课程总结

- 主要讨论一类“容易”的优化问题：凸优化问题
- 分析问题
  - 哪些是凸优化问题？（凸集、凸函数）
  - 凸优化问题有哪些性质？（对偶理论）
- 讨论几种“简单”的优化算法：无约束优化、有约束优化、随机优化

凸集

- 定义：集合内任意两点的凸组合仍然在集合内

- 例：R^n 空间及其任意子空间、任意直线、任意射线、任意线段、线性方程组的解集等等

- 保持集合凸性的操作
  - 交集
  - 仿射变换
  - 透视函数

凸函数

- 定义：凸组合的函数值小于等于函数值的凸组合

  一阶可微情况下的等价定义（一阶条件）

  二阶可微情况下的等价定义（二阶条件）

  注意：凸函数的定义域一定要为凸集！

- 例：线性函数、二次函数、指数函数、幂函数、负对数函数、熵函数等等

- 保持函数凸性的操作
  - 非负加权和、仿射映射、极大值函数
  - 函数的复合
  - 函数的透视

凸集遇上凸函数

- 凸函数的次水平集必然是凸集

  次水平集为凸集的函数是拟凸函数

- 凸优化问题
  - 目标函数为凸函数，可行域为凸集的极小化问题
  - 目标函数为凸函数，不等式约束函数为凸函数，等式约束函数为仿射函数的极小化问题
  - 基本概念：定义域、可行域、最优解集等等

- 典型问题：线性规划、二次规划、二次约束二次规划、回归问题等等

对偶理论

- 拉格朗日函数、对偶函数、对偶问题
- 对偶间隙何时为零（强对偶性何时成立）
- 当拉格朗日函数存在鞍点时，强对偶性成立，且鞍点是原对偶最优解
- KKT条件：primal/dual feasibility, complementary slackness, stationarity

优化算法

- 新解 = 旧解 + 步长×方向

  步长选择策略：固定步长、递减步长、精确/非精确线搜索（Armijo Rule等）

- 无约束优化（求解KKT条件）
  - 一阶方法（梯度、次梯度、坐标下降法、邻近点梯度、Nesterov加速算法等等）
  - 二阶方法（牛顿、拟牛顿）

- 有约束优化（求解KKT条件）
  - 罚方法、增广拉格朗日法、交替方向乘子法
  - 拓展：内点、对偶方法

- 随机梯度算法及其变形

无约束优化算法

无约束优化方法 $\xrightarrow{\nabla f_0(x) = 0 \quad \text{或} \quad 0 \in \partial f_0(x)}$ $\min\limits_{x} \; f_0(x)$

一阶方法
- 梯度下降法　经典算法
- 次梯度法　不可微情况
- 邻近梯度法、及其加速　不可微，但有结构情况

对条件数敏感

二阶方法
- 牛顿法　经典算法
- 拟牛顿法　降低复杂度

对条件数相对不敏感

算法名称翻译

Proximal Gradient Method (PGM)

邻近梯度法

邻近点梯度法

近似点梯度法

Proximal Point Algorithm (PPA)

邻近点算法

近似点算法