

DCS5718 最优化理论与方法

大作业：优化算法实验

实验要求:

1. 撰写并提交完整的实验报告，包括问题描述、算法设计、数值实验、结果分析；
2. 编写并提交完整的源代码，建议用 MATLAB 或 Python 实现；

考虑一个 10 节点的分布式系统。节点 i 有线性测量 $\mathbf{b}_i = A_i \mathbf{x} + \mathbf{e}_i$ ，其中 \mathbf{b}_i 为 5 维的测量值， A_i 为 5×200 维的测量矩阵， \mathbf{x} 为 200 维的未知稀疏向量且稀疏度为 5， \mathbf{e}_i 为 5 维的测量噪声。从所有 \mathbf{b}_i 与 A_i 中恢复 \mathbf{x} 的一范数正则化最小二乘模型如下：

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \frac{1}{2} \|A_1 \mathbf{x} - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} \|A_{10} \mathbf{x} - \mathbf{b}_{10}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1,$$

其中 $\lambda > 0$ 为正则化参数。请设计下述算法求解该问题：

1. 邻近梯度法；
2. 加速邻近梯度法；
3. 交替方向乘子法；
4. 次梯度法；

在实验中，设 \mathbf{x} 的真值中的非零元素服从均值为 0 方差为 1 的高斯分布， A_i 中的元素服从均值为 0 方差为 1 的高斯分布， \mathbf{e}_i 中的元素服从均值为 0 方差为 0.1 的高斯分布。

对于每种算法，给出目标函数值随着迭代的变化情况，分析算法相关参数（如步长）对于算法实际表现的影响。基于数值结果，综合讨论比较上述算法，以及正则化参数 λ 对计算结果的影响。此外，计算算法求得的解与真值的误差，讨论恢复效果。