DCS5718 最优化理论与方法
作业

5 月 16 日（星期五）23:59 前提交

1. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个凸集。**证明**：对任意 k 个向量 $x_1, \cdots, x_k \in C$，以及 $\theta_1, \cdots, \theta_k \in \mathbb{R}$ 满足 $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, $\theta_i \geqslant 0$，都有 $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$。（注：凸集的定义要求此式在 $k = 2$ 时成立，这里需要证明对任意 $k \geq 2$ 都成立）

2. **证明**：集合 S 的凸包是所有包含 S 的凸集的交。

3. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为二次不等式的解集，即

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top A x + b^\top x + c \leqslant 0 \right\},$$

其中 $A \in \mathbf{S}^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$。**证明**: 若 $A \succeq 0$（即 A 是半正定矩阵），则 C 是凸集。

4. 确定以下函数的凹凸性：

   (a) $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i,\ \ x_i \in \mathbb{R}_{++},\ \ i = 1, \cdots, n$；

   (b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$；

   (c) $f(x_1, x_2) = x_1 / x_2,\ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$；

5. **推导**线性规划问题的**对偶问题**和**KKT条件**：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Gx \leq h \\ & Ax = b \end{aligned}$$

6. **推导**以下问题的**对偶问题**：

$$\min_x \quad \frac{1}{2} ||x - x_0||_2^2 + \sum_{i=1}^N ||A_i x + b_i||_2,$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。（提示：引入新的变量 $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ 以及等式约束 $y_i = A_i x + b_i$，将原无约束优化问题转化为约束优化问题后，再推导其对偶问题。）