

Parcial 2

KEVIN GARCÍA^{1,a}, ALEJANDRO VARGAS^{1,b}, ALEJANDRO SOTO^{1,c}

¹DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD DEL VALLE, CALI, COLOMBIA

1. Punto 1

En una planta de potabilización de agua se desea controlar el contenido de plomo (partes por millón) en agua, para ello se ha pensado en construir un gráfico de control, con la estrategia de revisar diariamente a través de la toma de una muestra de 5 unidades. Los resultados se muestran a continuación:

Día	Muestras				
	1	2	3	4	5
1	13	8	2	5	8
2	0	6	1	9	15
3	4	2	4	3	4
4	3	15	8	3	5
5	5	10	5	4	0
6	9	5	13	7	7
7	0	4	4	3	9
8	9	3	0	6	0
9	14	0	0	5	3
10	3	9	5	0	2

Día	Muestras				
	1	2	3	4	5
11	5	8	0	7	8
12	3	2	2	7	4
13	5	11	14	8	3
14	13	5	5	12	7
15	7	0	1	0	6
16	12	7	10	4	13
17	9	4	4	8	9
18	6	1	1	3	13
19	7	0	5	7	2
20	10	0	10	12	7

Día	Muestras				
	1	2	3	4	5
21	3	7	5	10	12
22	3	0	10	5	4
23	3	3	0	6	9
24	0	2	3	6	7
25	2	3	5	4	10
26	3	1	4	2	4
27	2	4	5	13	4
28	0	16	7	2	11
29	3	5	9	8	6
30	9	7	10	13	0

FIGURE 1: Datos del problema

- a. Construir un gráfico de control \bar{X} -barra; R con niveles de significancia del 5% y del 0.27%.

Los dos gráficos de control iniciales $\bar{x} - R$, para los niveles de significancia dados son:

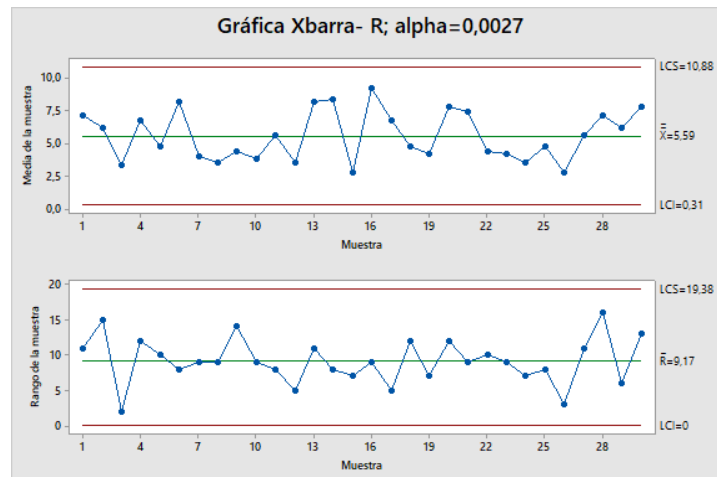
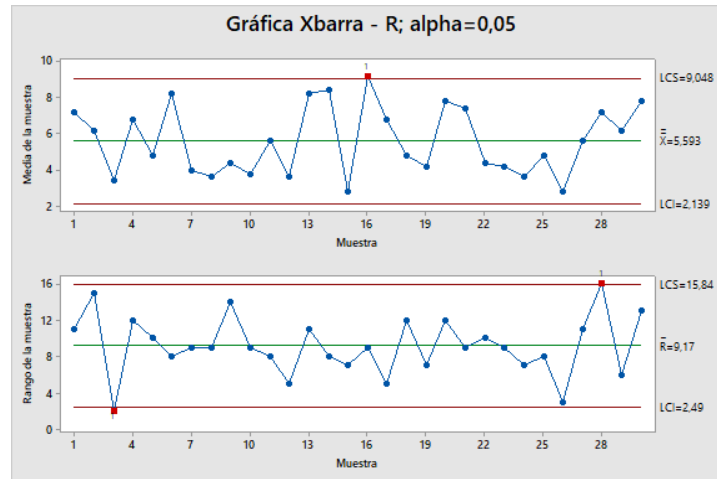


FIGURE 2: Gráfico de control inicial $\bar{x} - R$ para $\alpha = 0.0027$

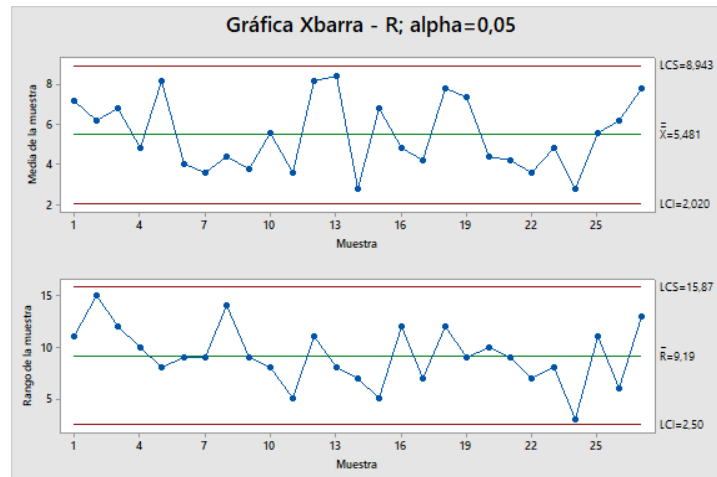
^aUniversidad del Valle, E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co

^bUniversidad del Valle, E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co

^cUniversidad del Valle, E-mail: asotomurillo@gmail.com

FIGURE 3: Gráfico de control inicial $\bar{x} - R$ para $\alpha = 0.05$

Podemos observar que en el gráfico $\bar{x} - R$ para $\alpha = 0.05$, tenemos tres puntos por fuera de los límites control, la muestra 16 en el de la media y las muestras 3 y 28 en el del rango, estos se deben eliminar para establecer el gráfico. El gráfico de control luego de eliminar estos dos puntos es:

FIGURE 4: Gráfico de control depurado $\bar{x} - R$ para $\alpha = 0.05$

Se puede notar que el gráfico con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, genera límites más estrictos (estrechos) que su comparativo con $\alpha = 0.0027$.

- b. Simule 1000 subgrupos bajo control, desde la distribución normal y evalúe la significancia de forma empírica para cada gráfico.

2. Punto 2

Para controlar el volumen de llenado de un proceso de envasado se ha construido un gráfico de control para el centramiento, obteniendo como resultado $LSC = 1015$; $LIC = 995$. Este gráfico de control ha sido construido con una probabilidad de error tipo I equivalente a 0.6%. Este proceso debe cumplir con un volumen de llenado nominal de 1000 cc con tolerancia de ± 30 ml. Haciendo uso de las observaciones con las que este gráfico de control fue implementado, el controlador de calidad de dicho proceso ha realizado el correspondiente análisis de capacidad, reportando un índice $Cpk = 0.9348$.

- a. Calcular los límites de control para el gráfico S. (mantener el mismo nivel de error tipo I y el mismo tamaño de muestra)

La información dada es:

$$\begin{aligned}
LIC &= 995 \text{ (Limite de control inferior)} \\
LSC &= 1015 \text{ (Limite de control superior)} \\
LIE &= 970 \text{ (Limite inferior especificado)} \\
LSE &= 1030 \text{ (Limite superior especificado)} \\
\mu &= 1000 \\
\alpha &= 0.006 \\
Cpk &= 0.9348
\end{aligned}$$

A partir de esto, debemos hallar n y \bar{S} para poder construir el gráfico S .

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $\alpha = 0.006$, entonces $k = 2.75$:

$$995 = \bar{X} + 2.75 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

$$1015 = \bar{X} - 2.75 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

$$LC = \bar{X}$$

Sumando (1) y (2) tenemos:

$$2010 = 2\bar{X}$$

$$\bar{X} = 1005$$

También sabemos que

$$C_{pk} = \min(C_{pu}, C_{pl})$$

Donde:

$$C_{pu} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma}$$

$$C_{pl} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma}$$

En este caso $C_{pk} = C_{pu}$, ya que analizando los numeradores $LSE - \mu = 25 < \mu - LIE = 35$, por tanto $\min(C_{pu}, C_{pl}) = C_{pu}$

Como ya conocemos el valor de C_{pk} :

$$0.9348 = \frac{1030 - 1005}{3\sigma} \rightarrow 2.8044\sigma = 25 \rightarrow \hat{\sigma} = \frac{25}{2.8044} = 8.9145$$

Reemplazando $\hat{\sigma} = 8.9145$ en (1), obtenemos n :

$$1015 = 1005 + 2.75 \frac{8.9145}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 2.4515 \rightarrow n = 6$$

Dado que según Montgomery, se puede trabajar $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$, ya que la varianza del proceso es desconocida. Y ya sabemos que $n = 6$, entonces c_4 de acuerdo a las tablas tabuladas es igual a 0.9515, entonces, reemplazando:

$$8.9145 = \frac{\bar{S}}{0.9515} \rightarrow \bar{S} = 8.4821$$

Finalmente, los limites para el gráfico S son:

$$LCS = \bar{S} + 2.75 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = 16.024$$

$$LC = \bar{S} = 8.4821$$

$$LCI = \bar{S} - 2.75 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = 0.94$$

Dado que el n y el k en ambos casos es de 6 y de 2.75 respectivamente, se asegura que en el gráfico S se mantiene el mismo nivel de error tipo I y el mismo tamaño de muestra

- b. Construir y comentar la curva característica de operación para el gráfico X barra asociado y su curva ARL. (evaluar en el rango 0 - 3.5 desviaciones estándar)

Para construir la curva de operación, se calcularon las probabilidades de no detectar un cambio dado que el proceso está fuera de control, para diferentes magnitudes de cambio r de 0 a 3.5%. Estas probabilidades se calcularon mediante:

$$\beta = P(\text{No detectar un cambio} | \text{Fuera de control})$$

$$\beta_r = P(Z < k - r\sqrt{n}) - P(Z < -k - r\sqrt{n})$$

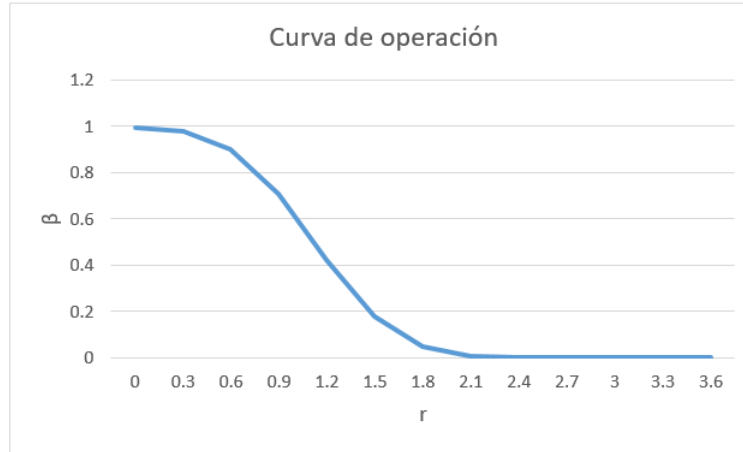


FIGURE 5: Curva característica de operación(β_r)

Para realizar más fácil la interpretación, se obtuvo y se graficó $1 - \beta_r$ que es la probabilidad de detectar el cambio, dado que el proceso está fuera de control.

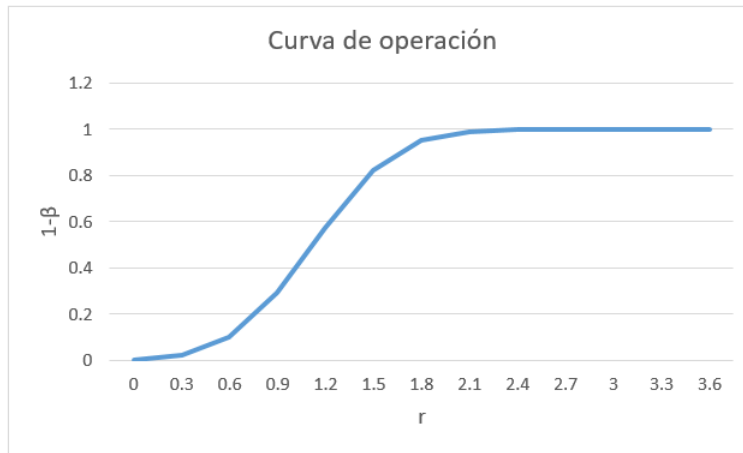


FIGURE 6: Curva característica de operación($1 - \beta_r$)

Para construir la curva ARL, se calculará para r entre 0 y 3.5:

$$ARL_r = \frac{1}{p_r} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & r = 0 \\ \frac{1}{1 - \beta_r} & r > 0 \end{cases}$$

- c. En determinado momento el proceso de llenado comienza a envasar botellas con un promedio de 984 cc. Evalúe la probabilidad de que el gráfico detecte este cambio antes de 3 inspecciones.
- d. Si se presenta un cambio como el enunciado en c, cuál sería el porcentaje de unidades no conformes que se producirían?, cuál sería el nuevo valor C_{pk} y C_p .

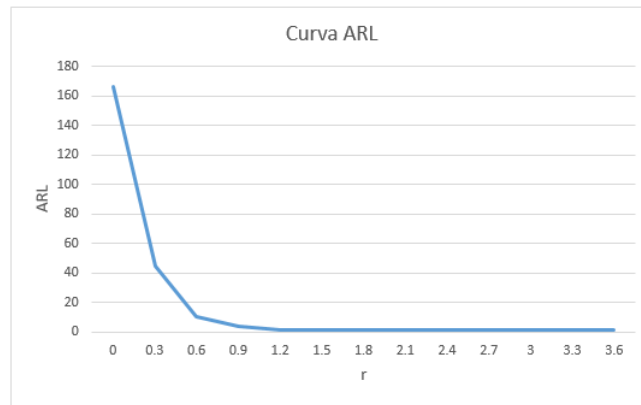


FIGURE 7: Curva ARL

3. Conclusión