

Parcial 2

KEVIN GARCÍA^{1,a}, ALEJANDRO VARGAS^{1,b}

¹DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD DEL VALLE, CALI, COLOMBIA

1. Punto 1

En una planta de potabilización de agua se desea controlar el contenido de plomo (partes por millón) en agua, para ello se ha pensado en construir un gráfico de control, con la estrategia de revisar diariamente a través de la toma de una muestra de 5 unidades. Los resultados se muestran a continuación:

Muestras					
Día	1	2	3	4	5
1	13	8	2	5	8
2	0	6	1	9	15
3	4	2	4	3	4
4	3	15	8	3	5
5	5	10	5	4	0
6	9	5	13	7	7
7	0	4	4	3	9
8	9	3	0	6	0
9	14	0	0	5	3
10	3	9	5	0	2

Muestras					
Día	1	2	3	4	5
11	5	8	0	7	8
12	3	2	2	7	4
13	5	11	14	8	3
14	13	5	5	12	7
15	7	0	1	0	6
16	12	7	10	4	13
17	9	4	4	8	9
18	6	1	1	3	13
19	7	0	5	7	2
20	10	0	10	12	7

Muestras					
Día	1	2	3	4	5
21	3	7	5	10	12
22	3	0	10	5	4
23	3	3	0	6	9
24	0	2	3	6	7
25	2	3	5	4	10
26	3	1	4	2	4
27	2	4	5	13	4
28	0	16	7	2	11
29	3	5	9	8	6
30	9	7	10	13	0

FIGURE 1: Datos del problema

- a. Construir un gráfico de control \bar{X} -barra; R con niveles de significancia del 5% y del 0.27%.

Los dos gráficos de control iniciales $\bar{x} - R$, para los niveles de significancia dados son:

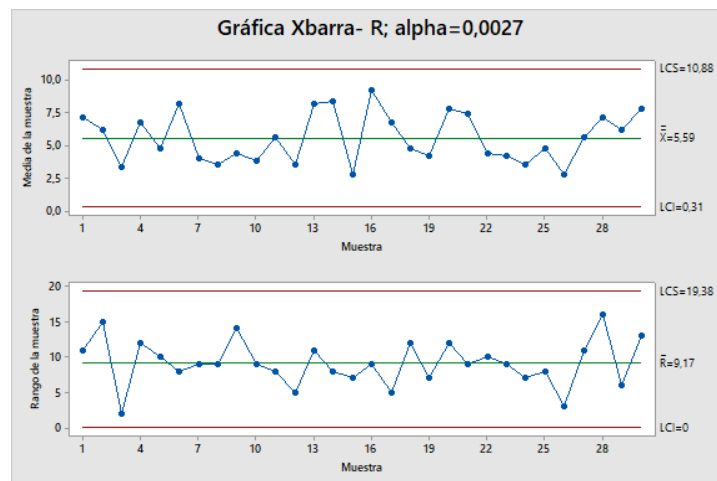
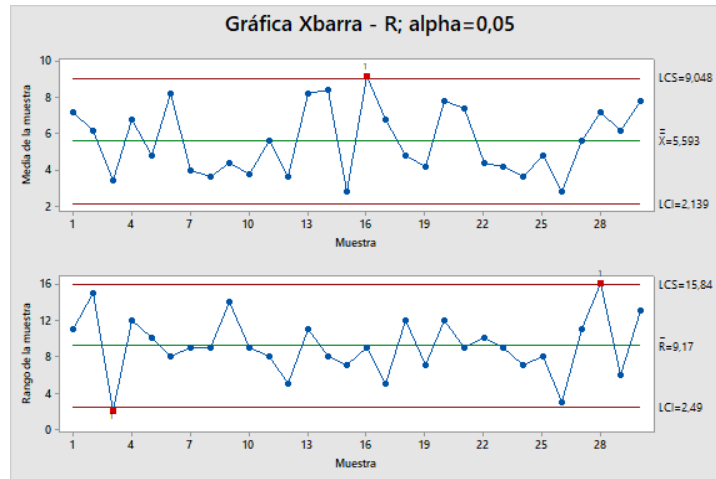


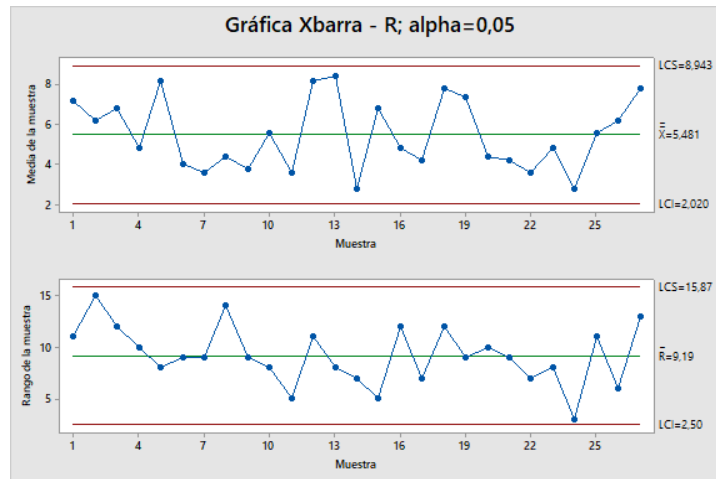
FIGURE 2: Gráfico de control inicial $\bar{x} - R$ para $\alpha = 0.0027$

^aUniversidad del Valle. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co

^bUniversidad del Valle. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co

FIGURE 3: Gráfico de control inicial $\bar{x} - R$ para $\alpha = 0.05$

Podemos observar que en el gráfico $\bar{x} - R$ para $\alpha = 0.05$, tenemos tres puntos por fuera de los límites control, la muestra 16 en el de la media y las muestras 3 y 28 en el del rango, estos se deben eliminar para establecer el gráfico. El gráfico de control luego de eliminar estos dos puntos es:

FIGURE 4: Gráfico de control depurado $\bar{x} - R$ para $\alpha = 0.05$

Se puede notar que el gráfico con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, genera límites más estrictos (estrechos) que su comparativo con $\alpha = 0.0027$.

- b. Simule 1000 subgrupos bajo control, desde la distribución normal y evalúe la significancia de forma empírica para cada gráfico.

Se simularon datos bajo control, observando las gráficas de control vemos que los parámetros "ideales" para que un proceso se encuentre bajo control vienen dados por:

α	X-barra	R
0.05	5.48	9.18
0.0027	5.59	9.16

TABLE 1: Tabla para medias.

Con estos parámetros se simularon 1000 subgrupos, una simulación para cada gráfica de control y posterior a esto se procedió a evaluar de forma empírica la significancia; esto se logró contando el número de simulaciones que se salieron de los límites de control LCI y LCS.

α	X-barra	R
0.05	3.94	3.94
0.0027	3.94	3.94

TABLE 2: Tabla para desviaciones.

	X-barra	R
$\alpha - real$	0.05	0.05
$\alpha - empirico$	0.048	0
$\alpha - real$	0.0027	0.0027
$\alpha - empirico$	0.001	0

TABLE 3: Tabla para desviaciones.

2. Punto 2

Para controlar el volumen de llenado de un proceso de envasado se ha construido un gráfico de control para el centramiento, obteniendo como resultado LSC= 1015; LIC= 995. Este gráfico de control ha sido construido con un probabilidad de error tipo I equivalente a 0.6%. Este proceso debe cumplir con un volumen de llenado nominal de 1000 cc con tolerancia de ± 30 ml. Haciendo uso de las observaciones con las que este gráfico de control fue implementado, el controlador de calidad de dicho proceso ha realizado el correspondiente análisis de capacidad, reportando un índice Cpk=0,9348.

- a. Calcular los límites de control para el gráfico S. (mantener el mismo nivel de error tipo I y el mismo tamaño de muestra)

La información dada es:

$$LIC = 995 \text{ (Limite de control inferior)}$$

$$LSC = 1015 \text{ (Limite de control superior)}$$

$$LIE = 970 \text{ (Limite inferior especificado)}$$

$$LSE = 1030 \text{ (Limite superior especificado)}$$

$$\mu = 1000$$

$$\alpha = 0.006$$

$$Cpk = 0.9348$$

A partir de esto, debemos hallar n y \bar{S} para poder construir el gráfico S .

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $\alpha = 0.006$, entonces $k = 2.75$:

$$995 = \bar{\bar{X}} + 2.75 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

$$1015 = \bar{\bar{X}} - 2.75 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

Sumando (1) y (2) tenemos:

$$2010 = 2\bar{\bar{X}}$$

$$\bar{\bar{X}} = 1005$$

También sabemos que

$$C_{pk} = \min(C_{pu}, C_{pl})$$

Donde:

$$C_{pu} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma}$$

$$C_{pl} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma}$$

En este caso $C_{pk} = C_{pu}$, ya que analizando los numeradores $LSE - \mu = 25 < \mu - LIE = 35$, por tanto $Min(C_{pu}, C_{pl}) = C_{pu}$

Como ya conocemos el valor de C_{pk} :

$$0.9348 = \frac{1030 - 1005}{3\sigma} \rightarrow 2.8044\sigma = 25 \rightarrow \hat{\sigma} = \frac{25}{2.8044} = 8.9145$$

Reemplazando $\hat{\sigma} = 8.9145$ en (1), obtenemos n:

$$1015 = 1005 + 2.75 \frac{8.9145}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 2.4515 \rightarrow n = 6$$

Dado que según Montgomery, se puede trabajar $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$, ya que la varianza del proceso es desconocida. Y ya sabemos que $n = 6$, entonces c_4 de acuerdo a las tablas tabuladas es igual a 0.9515, entonces, reemplazando:

$$8.9145 = \frac{\bar{S}}{0.9515} \rightarrow \bar{S} = 8.4821$$

Finalmente, los limites para el gráfico S son:

$$LCS = \bar{S} + 2.75 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = 16.024$$

$$LC = \bar{S} = 8.4821$$

$$LCI = \bar{S} - 2.75 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = 0.94$$

Dado que el n y el k en ambos casos es de 6 y de 2.75 respectivamente, se asegura que en el gráfico S se mantiene el mismo nivel de error tipo I y el mismo tamaño de muestra

- b. Construir y comentar la curva característica de operación para el gráfico X barra asociado y su curva ARL. (evaluar en el rango 0 - 3.5 desviaciones estándar)

Para construir la curva de operación, se calcularon las probabilidades de no detectar un cambio dado que el proceso está fuera de control, para diferentes magnitudes de cambio r de 0 a 3.5%. Estas probabilidades se calcularon mediante:

$$\beta = P(\text{No detectar un cambio} | \text{Fuera de control})$$

$$\beta_r = P(Z < k - r\sqrt{n}) - P(Z < -k - r\sqrt{n})$$

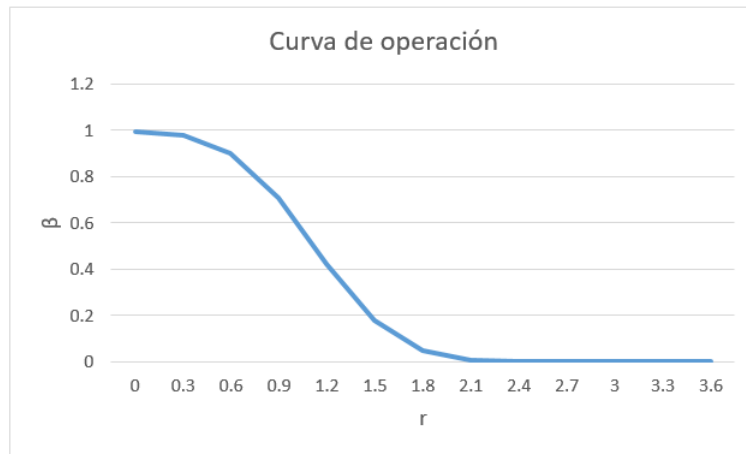
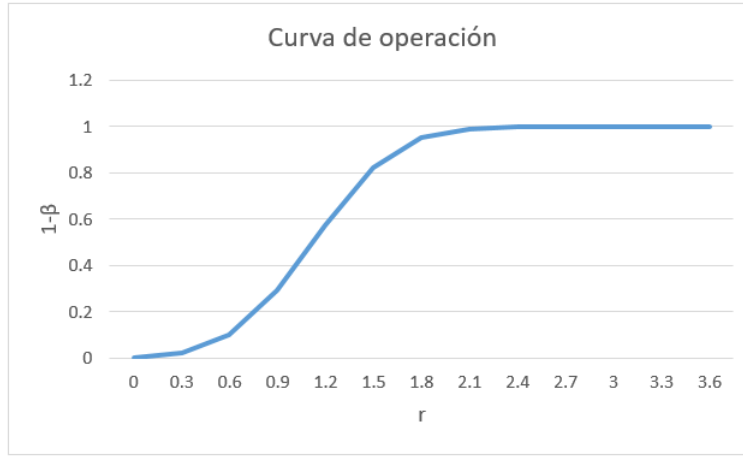


FIGURE 5: Curva característica de operación(β_r)

FIGURE 6: Curva característica de operación($1 - \beta_r$)

Para realizar más fácil la interpretación, se obtuvo y se graficó $1 - \beta_r$ que es la probabilidad de detectar el cambio, dado que el proceso está fuera de control.

Se puede apreciar que para cambios de una magnitud r baja, entre 0 y 0.7%, la probabilidad de detectar cambios de este tipo está entre 0 y 0.2 de forma ascendente. Como es de esperarse, mientras más grande es la magnitud del cambio r , más alta es la probabilidad de que el gráfico de control lo detecte, por ejemplo, a partir de cambios de una magnitud r de 0.7% hasta 1.5%, la probabilidad de detectar el cambio crece casi que linealmente. Finalmente, estas probabilidades se estabilizan en 1, cuando la magnitud del cambio es mayor o igual a 2, esto quiere decir que cambios de estas magnitudes, siempre los detectará el gráfico de control.

Para construir la curva ARL, se calculará para r entre 0 y 3.5:

$$ARL_r = \frac{1}{p_r} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & r = 0 \\ \frac{1}{1 - \beta_r} & r > 0 \end{cases}$$

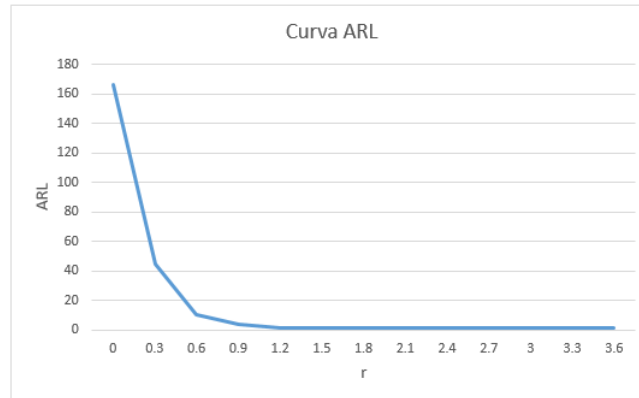


FIGURE 7: Curva ARL

Con respecto al ARL (número promedio de observaciones que dejará pasar el gráfico antes de emitir una señal bajo un cambio de magnitud $r\sigma$, se observa en el gráfico, que cuando el proceso está bajo control, es decir, $r = 0$, la frecuencia promedio de aparición de falsas alarmas es de aproximadamente 160 muestreos, mientras que cuando el proceso está fuera de control a una magnitud r baja (entre 0.1 y 0.6%), la frecuencia promedio de detección del cambio va desde 140 muestreos en el mínimo ($r = 0.1$) hasta 10 muestreos en el máximo ($r = 0.6$), a partir de una magnitud de cambio de 0.9% en adelante, la frecuencia promedio de detección del cambio se estabiliza en 0, es decir, que el cambio siempre se va a detectar.

- c. En determinado momento el proceso de llenado comienza a envasar botellas con un promedio de 984 cc. Evalúe la probabilidad de que el gráfico detecte este cambio antes de 3 inspecciones.

Para calcular la probabilidad de que el gráfico detecte un cambio en la media del proceso de una magnitud r , debemos calcular el complemento de:

$$\beta = P(\text{No detectar un cambio} | \text{Fuera de control})$$

$$\beta_r = P(Z < k - r\sqrt{n}) - P(Z < -k - r\sqrt{n})$$

Debemos calcular la magnitud del cambio r que corresponde al cambio hasta 984 cc

$$r = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma_0} = \frac{|984 - 1005|}{8.9145} = 2.35$$

Obtenida la magnitud del cambio $r = 2.35\%$, y tenemos que para $\alpha = 0.006$, $k = 2.75$. Por lo tanto:

$$\beta_{2.35} = P(Z < 2.75 - 2.35 \cdot \sqrt{6}) - P(Z < -2.75 - 2.35 \cdot \sqrt{6}) = P(Z < -3) - P(Z < -8.5) = 0.00135 - 0 = 0.00135$$

Entonces, la probabilidad de detectar el cambio será:

$$1 - \beta_{2.35} = 1 - 0.00135 = 0.99865$$

Finalmente, la probabilidad de que el gráfico detecte el cambio antes de 3 inspecciones (en 2 o menos) es, la probabilidad de que lo detecte en la primera más la probabilidad de que lo detecte en la segunda:

$$(1 - \beta_{2.35}) + \beta_{2.35}(1 - \beta_{2.35}) = 0.99865 + (0.00135)(0.99865) = 0.999998$$

Se puede decir que como la magnitud del cambio es considerablemente grande, el gráfico lo detectará casi siempre (99.86% de las veces) en la primera inspección, y casi el 100% de las veces lo detectará antes de 3 inspecciones.

- d. Si se presenta un cambio como el enunciado en c, cuál sería el porcentaje de unidades no conformes que se producirían?, cuál sería el nuevo valor C_{pk} y C_p .

Si se presenta un cambio como el enunciado en c, es decir, si μ pasa a ser 984 cc, el porcentaje de unidades no conformes que se producirían la podemos encontrar como el complemento de:

$$\begin{aligned} P(970 < \bar{x} < 1030 | \mu = 984) &= P(\bar{x} < 1030 | \mu = 984) - P(\bar{x} < 970 | \mu = 984) \\ &= P\left(Z < \frac{1030 - 984}{8.945/\sqrt{6}}\right) - P\left(Z < \frac{970 - 984}{8.945/\sqrt{6}}\right) \\ &= P(Z < 12.64) - P(Z < -3.84) = 1 - 0.00006 = 0.99994 \end{aligned}$$

Entonces, se producirán $1 - 0.99994 = 0.00006$ unidades no conformes, es decir, se producirán 60 unidades no conformes por millón.

El valor de C_p no cambia, ya que no depende de la media del proceso, este valor es:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} = \frac{1030 - 970}{6(8.9145)} = 1.1217$$

Lo que nos estaría diciendo que el proceso es capaz con necesidad de vigilancia.

El nuevo valor C_{pk} es:

$$C_{pk} = \min(C_{pu}, C_{pl})$$

Donde:

$$C_{pu} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma} = \frac{1030 - 984}{3(8.9145)} = 1.72$$

$$C_{pl} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma} = \frac{984 - 970}{3(8.9145)} = 0.52$$

Por tanto:

$$C_{pk} = \text{Min}(1.72, 0.52) = 0.52$$

Lo que nos indica que el proceso no cumple con por lo menos una de las especificaciones.