Universidad del Valle
Programa Académico de Estadística
Estadística Aplicada III
Cali, marzo de 2019

Diseños factoriales fraccionados

Kevin Steven García[a], Alejandro Vargas[b], Alejandro Soto[c]

1. Introducción

Para entender y abordar el tema correspondiente a los diseños factoriales fraccionados, debemos tener claro el concepto y funcionamiento de un diseño factorial en general, por ello, se dará una breve introducción sobre este tipo de diseño, ya que este es la base de nuestro tema en cuestión.

Los diseños factoriales surgen ante la necesidad de estudiar conjuntamente varios factores obedeciendo a la posibilidad de que el efecto de un factor cambie según los niveles de otros factores, esto es, que los factores interactúen. Estos diseños también se usan cuando se quiere optimizar la respuesta o variable dependiente, es decir, se quiere encontrar la combinación de niveles de los factores que producen un valor óptimo de la variable dependiente.
Si se investiga un factor por separado, el resultado puede ser diferente al estudio conjunto y es mucho más difícil describir el comportamiento general del proceso o encontrar el óptimo.

2. Diseños factoriales

Un diseño factorial es un tipo de experimento cuyo diseño permite estudiar los efectos que varios factores pueden tener en una respuesta. Al realizar un experimento, variar los niveles de todos los factores al mismo tiempo en lugar de uno a la vez, permite estudiar las interacciones entre los factores.

Los diseños factoriales producen experimentos más eficientes, pues cada observación proporciona información sobre todos los factores, y es factible ver las respuestas de un factor en diferentes niveles de otro factor en el mismo experimento. La respuesta a cualquier factor observado en diferentes condiciones indica si los factores actúan en las unidades experimentales de manera independiente. La interacción entre factores ocurre cuando su actuación no es independiente.

Suponga que tenemos dos factores, A con a niveles y B con b niveles. Las observaciones de un experimento factorial pueden describirse con un modelo. Hay varias formas de escribir el modelo de un experimento factorial. La forma más utilizada es el modelo de los efectos:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, ..., a \\ j = 1, 2, ..., b \\ k = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

Donde μ es el efecto promedio global, τ_i es el efecto del nivel i-ésimo del factor A de los renglones, β_j es el efecto del nivel j-ésimo del factor B de las columnas, $(\tau\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción entre τ_i y β_j, y ε_{ijk} es un componente del error aleatorio. Puesto que hay n replicas del experimento, hay abn observaciones en total.

En el diseño factorial de dos factores, ambos factores, A y B son de igual interés, por lo que se prueban las hipótesis acerca de la igualdad de los efectos de los tratamientos de cada factor. Para el factor A:

[a]Código: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co
[b]Código: 1525953. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co
[c]Código: 1532457. E-mail: asotomurillo@gmail.com

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$
$$H_1 : \text{Al menos una } \tau_i \neq 0$$

Para el factor B:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$
$$H_1 : \text{Al menos una } \beta_j \neq 0$$

También existe interés en determinar si los tratamientos de los factores A y B interactúan. Por lo tanto, también querría probarse

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ para todas las } i, j$$
$$H_1 : \text{Al menos una } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

Todas las hipótesis anteriores se pueden probar realizando el análisis de varianza de dos factores como sigue:

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F
A	a-1	SC_A	$CM_A = \frac{SC_A}{a-1}$	$F = \frac{CM_A}{CM_{error}}$
B	b-1	SC_B	$CM_B = \frac{SC_B}{b-1}$	$F = \frac{CM_B}{CM_{error}}$
AB	(a-1)(b-1)	SC_{AB}	$CM_{AB} = \frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$F = \frac{CM_{AB}}{CM_{error}}$
Error	ab(n-1)	SC_{error}	$CM_{error} = \frac{SC_{error}}{ab(n-1)}$	
Total	abn-1	SC_{total}		

Donde la suma de cuadrados total es:

$$SC_{total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

La suma de cuadrados de los efectos principales son:

$$SC_A = \tfrac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \tfrac{y_{...}^2}{abn} \quad \text{y} \quad SC_B = \tfrac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2 - \tfrac{y_{...}^2}{abn}$$

La suma de cuadrados de la interacción es:

$$SC_{AB} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} - SC_A - SC_B$$

Y, la suma de cuadrados del error se encuentra como:

$$SC_{error} = SC_{total} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

2.1. Ejemplo: Nuevos efectos del fraguado sobre el concreto asfáltico

Se sabe que la variación en la resistencia de los especímenes de prueba está asociada con el método de fraguado y de mezcla usados para construirlos. Un ingeniero civil realizó un experimento para calificar las diferencias entre un conjunto de métodos de fraguado conforme sus efectos sobre la resistencia de los especímenes de prueba y para determinar hasta qué grado el tipo de mezcla afecta las comparaciones entre los métodos de fraguado.

Diseño de tratamientos: Se usó un arreglo factorial con los factores "método de fraguado" y "tipo de mezclado". Existen dos niveles de tipo de mezcla A_1(basalto) y A_2(roca silícea), y cuatro niveles de método de fraguado C_1(presión estática), C_2(amasado normal), C_3(amasado lento) y C_4(amasado muy lento).

Diseño del experimento: Se construyeron tres réplicas de especímenes y se probaron las ocho combinaciones. Los 24 especímenes se prepararon y probaron en orden aleatorio para un diseño totalmente aleatorizado.

Los datos de este experimento se encuentran en la siguiente tabla:

	Método de fraguado			
		Amasado		
Tipo de mezcla	*Estático*	*Normal*	*Lento*	*Muy lento*
Basalto	68	126	93	56
	63	128	101	59
	65	133	98	57
Silícea	71	107	63	40
	66	110	60	41
	66	116	59	44