Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Estadística
Programa Académico de Estadística
Matemáticas para Estadísticos
Cali, mayo de 2018

Aproximación de integrales por el método de Simpson

KEVIN STEVEN GARCÍA[a], ALEJANDRO SOTO[b], BRYAN MARTINEZ[c]

1. Introducción

En análisis numérico, la integración numérica constituye una amplia gama de algoritmos para calcular el valor exacto de una integral definida y, por extensión, el término se usa a veces para describir algoritmos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales.
El problema básico considerado por la integración numérica es calcular una solución aproximada a la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Este problema también puede ser enunciado como un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria, como sigue:

$$y'(x) = f(x),\ y(a) = 0$$

Encontrar $y(b)$ es equivalente a calcular la integral.

Hay varias razones para llevar a cabo la integración numérica. La principal puede ser la imposibilidad de realizar la integración de forma analítica. Es decir, integrales que requerirían de un gran conocimiento y manejo de matemática avanzada, pueden ser resueltas de una manera más sencilla mediante métodos numéricos. Incluso existen funciones integrables pero cuya primitiva no puede ser calculada, siendo la integración numérica de vital importancia. La solución analítica de una integral nos arrojaría una solución exacta, mientras que la solución numérica nos daría una solución aproximada. El error de la aproximación, que depende del método que se utilice y de qué tan fino sea, puede llegar a ser tan pequeño que es posible obtener un resultado idéntico a la solución analítica en las primeras cifras decimales.

Los métodos de integración numérica pueden ser descritos generalmente como combinación de evaluaciones del integrando para obtener una aproximación a la integral. Una parte importante del análisis de cualquier método de integración numérica es estudiar el comportamiento del error de aproximación como una función del número de evaluaciones del integrando. Un método que produce un pequeño error para un pequeño número de evaluaciones es normalmente considerado superior. Reduciendo el número

[a]Código: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co
[b]Código: 1532457. E-mail: soto.alejandro@correounivalle.edu.co
[c]Código: 1524989. E-mail: matinez.bryan@correounivalle.edu.co

de evaluaciones del integrando se reduce el número de operaciones aritméticas involucradas, y por tanto se reduce el error de redondeo total. También, cada evaluación cuesta tiempo, y el integrando puede ser arbitrariamente complicado.

Existen varios métodos para tratar de llegar al resultado de la integral planteada de forma aproximada, los más utilizados por su simpleza y por su eficiencia son:

- Regla del rectángulo.
- Regla del punto medio.
- Regla del Trapecio.
- Regla de Simpson.

Nosotros nos enfocaremos en desarrollar y mostrar algunos ejemplos de la regla de Simpson.

2. Método de Simpson

En este método, se aproxima la integral de f por el área encerrada bajo un arco de parábola que coincide con f en tres puntos: los extremos del intervalo [a, b] y su punto medio:

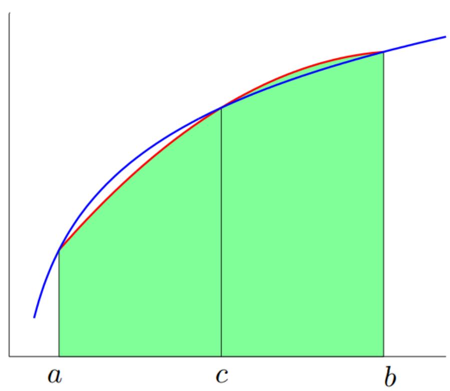

FIGURA 1: Fórmula de Simpson: área bajo la parábola que coincide con f en a, b y $c = \frac{a+b}{2}$

La aproximación está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

3. Ejemplos

Ejemplo 1: Considere la función $f(x) = cos(2x)$ y halle la integral $\int_0^1 f(x)dx$.
La integral exacta de forma analítica es:

$$I(f) = \int_0^1 cos(2x)dx = \frac{1}{2}sen(2) = 0.4546$$

La idea de acerlo de forma analitica es poder comparar que tan buena es la aproximación.
Utilizando el método de Simpson, la integral se resuelve de la siguiente manera:

$$I(f) = \int_0^1 cos(2x)dx \approx \frac{1}{6}(cos(0) + 4cos(1) + cos(2)) = 0.4575$$

Ejemplo 2: Aplicar la regla de Simpson para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}dx$
El valor exacto de esta integral es:

$$I(f) = \int_0^1 e^{x^2}dx = 1.462651$$

Utilizando el método de Simpson, la integral se resuelve de la siguiente manera:

$$I(f) = \int_0^1 e^{x^2}dx \approx \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{(1/2)^2} + e^1) = 1.475730$$

Ejemplo 3: Aplicar la regla de Simpson para aproximar la integral $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$
El valor exacto de esta integral es:

$$I(f) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx = 1.402182$$

Utilizando el método de Simpson, la integral se resuelve de la siguiente manera:

$$I(f) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx \approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+0}} + 4\frac{1}{\sqrt{1+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+8}}\right) = 1.387253$$

4. Regla de Simpson compuesta

Para cualquier regla interpoladora, se puede hacer una aproximación más precisa dividiendo el intervalo $[a, b]$ en algún número n de subintervalos, hallando una aproximación para cada subintervalo, y finalmente sumando todos los resultados. Las reglas que surgen de hacer esto se llaman reglas compuestas, y se caracterizan por perder un orden de precisión global frente a las correspondientes simples, si bien globalmente dan valores más precisos de la integral, a costa eso sí de incrementar significativamente el coste operativo del método.

$$\int_a^b f(x)dx \approx I^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} I(f;[x_i,x_{i+1}]) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)}{6}\left(f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f(x_{i+1})\right)$$

En el caso de sub-intervalos de igual longitud, se transforma en:

$$I^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{6}\left(f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f(x_{i+1})\right)$$

$$= \frac{h}{6}\left\{f(x_1)+2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)+4\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right\}$$

donde $h = \frac{b-a}{n}$.

5. Ejemplos

Ejemplo 1: Se considera de nuevo la integral del ejemplo 1 de la sección anterior:

$$I(f) = \int_0^1 cos(2x)dx = \frac{1}{2}sen(2) = 0.4546$$

Utilizando la fórmula de Simpson compuesta con 5 sub-intervalos de igual longitud (es decir, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$ y $\{x_i\}_{i=1}^{6} = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$), se obtiene:

$$I^c(f) = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{5}\left(cos(2x_i)+4cos\left(2\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+cos(2x_{i+1})\right)$$

$$= 0.03333\{cos(0)+2(cos(0.4)+cos(0.8)+cos(1.2)+cos(1.6))+cos(2)$$
$$+4(cos(0.2)+cos(0.6)+cos(1)+cos(1.4)+cos(1.8))\} = 0.4546$$

Ejemplo 2: Se considera de nuevo la integral del ejemplo 2 de la sección anterior:

$$I(f) = \int_0^1 e^{x^2}dx = 1.462651$$

Utilizando la fórmula de Simpson compuesta con 5 sub-intervalos de igual longitud (es decir, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$ y $\{x_i\}_{i=1}^{6} = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$), se obtiene:

$$I^c(f) = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{5}\left(e^{x_i^2}+4e^{\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^2}+e^{x_{i+1}^2}\right)$$

$$= 0.03333\left\{e^0+2(e^{0.2^2}+e^{0.4^2}+e^{0.6^2}+e^{0.8^2})+e^{1^2}+4(e^{0.1^2}+e^{0.3^2}+e^{0.5^2}+e^{0.7^2}+e^{0.9^2})\right\}$$

$$= 0.03333(43.880442) = 1.462682$$

Ejemplo 3: Se considera de nuevo la integral del ejemplo 3 de la sección anterior:

$$I(f) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx = 1.402182$$

Utilizando la fórmula de Simpson compuesta con 8 sub-intervalos de igual longitud (es decir, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{8} = 0.25$ y $\{x_i\}_{i=1}^{9} = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\}$), se obtiene:

$$I^c(f) = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x_i^3}} + 4\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x_{i+1}^3}}\right)$$

$$= 0.04166\{\tfrac{1}{\sqrt{1}} + 2\left(\tfrac{1}{\sqrt{1+0.25^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+0.5^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+0.75^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+1^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+1.25^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+1.5^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+1.75^3}}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{1+2^3}} +$$
$$4\left(\tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{0.25}{2}\right)^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{0.75}{2}\right)^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1.25}{2}\right)^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1.75}{2}\right)^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2.25}{2}\right)^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2.75}{2}\right)^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3.25}{2}\right)^3}} + \tfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3.75}{2}\right)^3}}\right)$$

$$= 0.04166\{1 + 2(4.9373) + 0.3333 + 4(5.6111)\}$$

$$= 0.04166(33.652459) = 1.401961$$

6. Comparación Resultados

Para comparar que tan cercano o que tan aproximado es el método tenemos la siguiente tabla:

	Exacta	Simpson simple	Simpson compuesto
Ejemplo 1	0.4546	0.4575	0.4546
Ejemplo 2	1.462651	1.475730	1.462682
Ejemplo 3	1.402182	1.387253	1.401961

Se puede concluir que el método da muy buenas aproximaciones al valor exacto de la integral, estas aproximaciones van a ser muchísimo mejor si se parte el área de integración en un número elevado de sub-intervalos. Se debe tener en cuenta que entre mayor sea el área en el que se esta integrando, se debe dividir en mas sub-intervalos para obtener buenos resultados, es decir, si se va a encontrar una integral de 0 a 1, probablemente con 5 sub intervalos basta para obtener una buena aproximación, pero si se va a encontrar una integral de 0 a 10, ó de 0 a 100, estos 5 sub intervalos no bastaran para obtener una buena aproximación. En los 3 ejemplos que trabajamos vemos que se obtienen mejores aproximaciones con el Simpson compuesto, lo cuál es bastante lógico, ya que se esta integrando por áreas o pedazos y finalmente se suman cada una de esas áreas.