

TRABAJO FINAL

KEVIN STEVEN GARCÍA^a, JOSE ALEJANDRO VARGAS^b

1. Punto 1

Un ingeniero mecánico está investigando el efecto de la velocidad de avance (plg/min) sobre la resistencia a la tensión (lb/plg²), en un proceso de maquinado de piezas de acero. El ingeniero trabaja con tres velocidades (125, 150 y 175 plg/min). Los resultados se muestran a continuación:

125	150	175
100	76	108
96	80	100
92	75	96
96	84	98
92	82	100

a.

- Factores: Velocidad de avance(plg/min)
- Niveles: 125, 150 y 175 plg/min
- Unidad experimental: Pieza de acero
- Tratamientos: Son 3 tratamientos. 125, 150 y 175 plg/min
- Variable de respuesta: Resistencia a la tensión(lb/plg²)

b.

Se enumeran las 15 piezas de acero y los 3 tratamientos(velocidades), se obtiene un número al azar del 1 al 15 para las piezas y se obtiene un número del 1 al 3 para las velocidades de avance, la pieza seleccionada se le asigna el tratamiento seleccionado. Así se continua hasta que los 3 tratamientos cuenten con 5 piezas de acero cada uno. En este caso se esta aleatorizando tanto los individuos como los tratamientos en la asignación.

El modelo estadístico es:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \simeq N(0, \sigma^2)$$

$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij}$$

$$Cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i' \wedge j \neq j'}$$

Donde:

y_{ij} es la resistencia a la tensión en lb/plg² de la pieza de acero j a una velocidad de avance i
 μ es la media general de la resistencia a la tensión sin tener en cuenta la velocidad de avance

^aCódigo: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co

^bCódigo: 1525953. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co

τ_i es el efecto del i -ésimo nivel de la velocidad de avance sobre la resistencia a la tensión en lb/plg²
 ε_{ij} es el error aleatorio debido al i -ésimo nivel de velocidad en la j -ésima replica

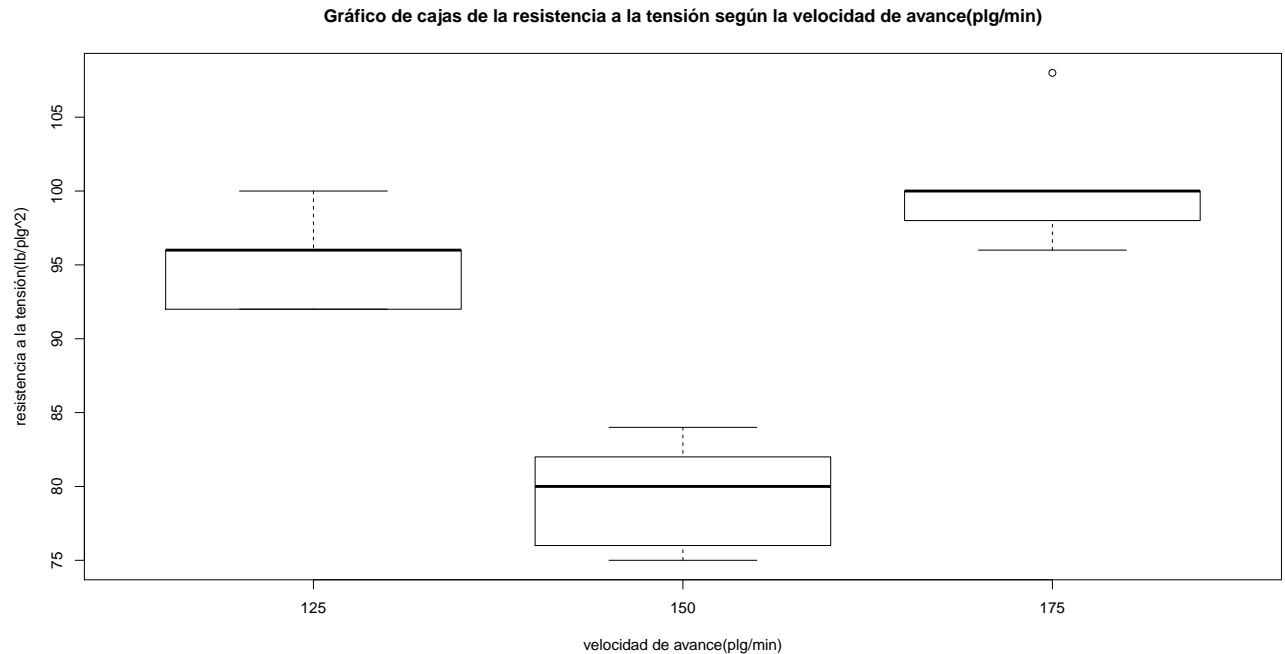
c.

Para el análisis exploratorio de datos se realizó la siguiente tabla de estadísticas descriptivas:

Estadístico	125	150	175
Min	92	75	96
1st Cuartil	92	76	98
Mediana	96	80	100
Media	95.2	79.4	100.4
3rd Cuartil	96	82	100
Maximo	100	84	108
Desv. Estandar	3.34664	3.847077	4.560702

En esta tabla podemos observar que en general, la resistencia a la tensión de las piezas de acero es parecida para las velocidades de avance de 125 y 175 (plg/min), pero para la velocidad de avance de 150 (plg/min) se puede notar una disminución general en la resistencia a la tensión de las piezas. La mayor resistencia se encontró en una pieza expuesta a una velocidad de avance de 175 plg/min, la cual fue de 108 lb/plg², y la menor resistencia se encontró en una pieza expuesta a una velocidad de avance de 150 plg/min, la cual fue de 75 lb/plg². En cuanto a la variabilidad, el tratamiento que tiene mayor variabilidad en los efectos, es el de una velocidad de avance de 175, presenta una desviación estándar de 4.5607, y el tratamiento que tiene menor variabilidad en los efectos es el de una velocidad de avance de 125, presenta una desviación estándar de 3.3466.

También se realizó el siguiente gráfico de cajas:



En este gráfico confirmamos lo dicho anteriormente, se observa que los tratamientos 1 y 3 son más parecidos entre sí en cuanto a sus efectos, y el tratamiento 2 parece tener un efecto más bajo en cuanto a la resistencia a la tensión de las piezas de acero.

d.

Hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$$

H_a : Al menos una de estas igualdades no se cumple

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F	Pr>F
τ	2	$SC_{\tau} = 1196.1333$	$CM_{trat} = 598.0666$	38.3376	0.00001
Error	12	$SC_{error} = 187.2$	$CM_{error} = 15.6$		
Total	14	$SC_{total} = 1383.3333$			

A un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ se rechaza H_0 y concluimos que hay diferencias significativas entre los efectos de las velocidades de avance sobre la resistencia a la tensión.

e.

Ejerceré el control local del experimento asegurándome que las piezas de acero sean lo más homogéneas posibles para que la resistencia a la tensión dependa de la velocidad de avance y no de las cualidades o características de la pieza. También me aseguraré de que la máquina este igualmente calibrada al inicio de cada tratamiento, es decir, que las velocidades de avance realmente sean las establecidas (125, 150 y 175 plg/min).

Para evaluar el control local del experimento nos centramos en la varianza estimada y en el coeficiente de variación

$$\sigma^2 = 15.6 \quad \bar{y}_{..} = 91.6666 \quad \rightarrow \quad CV = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\bar{y}_{..}} = 0.04308 \cdot 100\% \simeq 4.31\%$$

Dado que la desviación estándar $\sigma = 3.9496$ es pequeña y el coeficiente de variación también lo es, concluimos que hubo un buen control local en el experimento.

f.

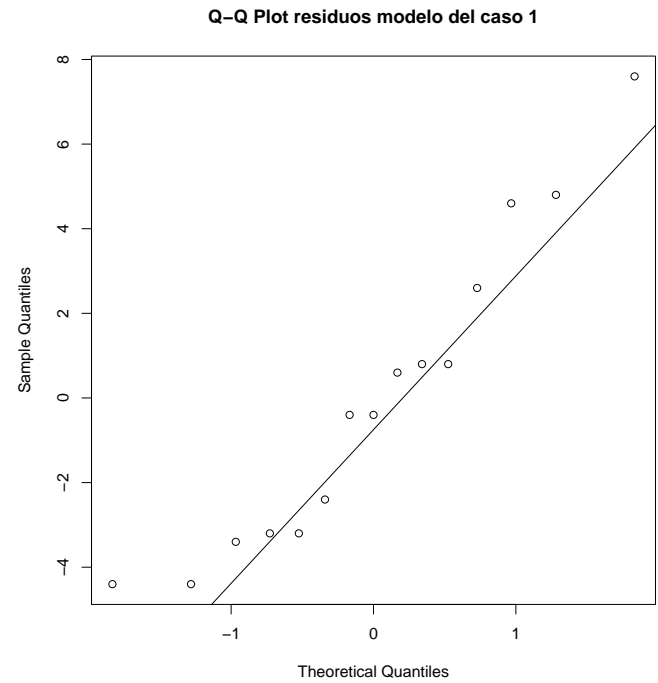
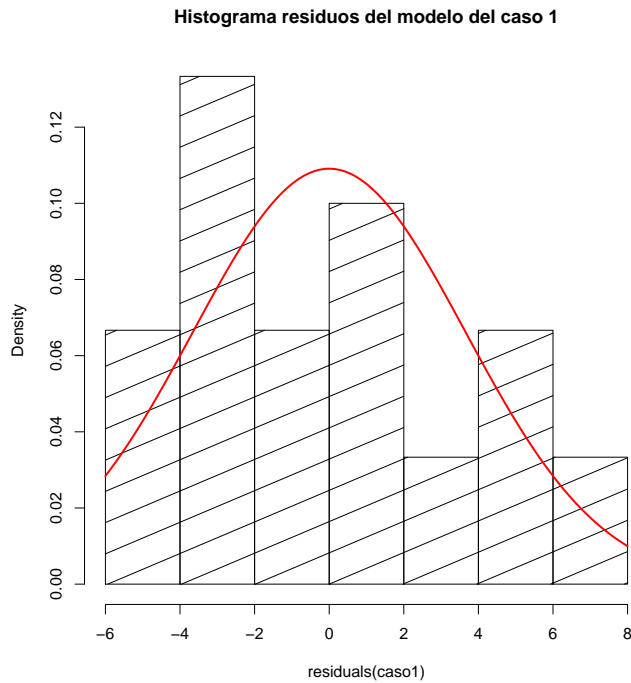
Sobre los errores se tienen los siguientes supuestos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &\approx N(0, \sigma^2) \rightarrow \text{Normalidad} \\ E[\varepsilon_{ij}] &= 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Correcta especificación} \\ V[\varepsilon_{ij}] &= \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Homocedasticidad} \\ \text{cov}[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] &= 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \text{Independencia} \end{aligned}$$

Normalidad:

Para verificar el supuesto de normalidad en los errores, se hicieron pruebas gráficas (histograma y Q-Q plot) y estadísticas, dentro de las pruebas estadísticas se realizaron pruebas para analizar la asimetría (test D'Agostino) y la curtosis (test de Anscombe-Glynn) individualmente, y se realizó la prueba de normalidad Shapiro-Wilk, para evaluar conjuntamente la normalidad de los residuos.

En las gráficas se observa un posible incumplimiento de la normalidad, sobre todo en el histograma, se puede ver que las barras no coinciden con la curva teórica de la normal, cabe aclarar que la prueba gráfica no es muy confiable porque depende de la experiencia del investigador, por ello nos vamos a centrar en los resultados de las pruebas estadísticas, ya que estas son más objetivas.



Los resultados para cada una de las pruebas realizadas fueron:

Test D'Agostino:

H_0 : Los datos no tienen asimetría

H_a : Los datos tienen asimetría

$skew = 0.5694, z = 1.1306, p - value = 0.2582$

Como el p-valor=0.2582 es superior a nuestro nivel de significancia(0.05), no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que los datos tienen asimetría. Lo cuál es un buen indicio en cuanto a la normalidad de los errores.

Test de Anscombe-Glynn: Sabemos que la curtosis en una distribución normal es 3, por ello se establecen las siguientes hipótesis en este test.

H_0 : La curtosis es igual a 3

H_a : La curtosis no es igual a 3

$kurt = 2.34890, z = -0.19307, p - value = 0.8469$

Como el p-valor=0.8469 es superior a nuestro nivel de significancia, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que los datos no tienen una curtosis igual a 3. Lo cuál complementando la prueba anterior, es muy probable que los errores presenten una distribución normal.

Test Shapiro-Wilk:

H_0 : Los datos provienen de una distribución normal

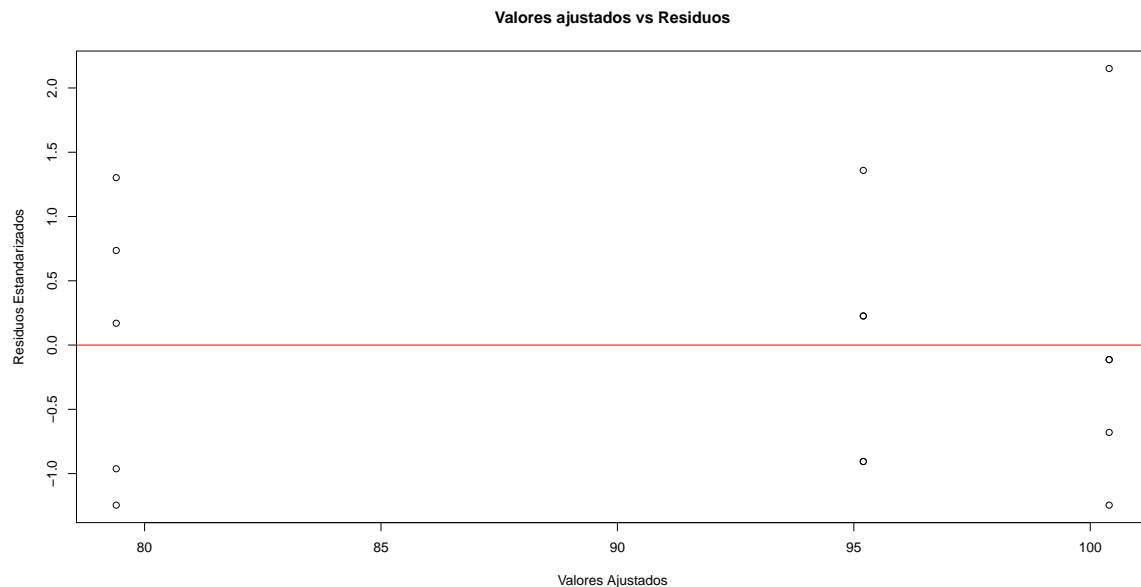
H_a : Los datos no provienen de una distribución normal

$W = 0.92696, p - value = 0.2457$

Como el p-valor=0.2457 es superior a nuestro nivel de significancia, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal. Lo cual junto con las dos pruebas anteriores, nos indica que este supuesto de normalidad en los errores parece cumplirse.

Homocedasticidad:

Para analizar la homocedasticidad se realizó una prueba gráfica (valores ajustados vs residuos) y una prueba estadística (Test de Levene)



Podemos observar que la varianza en los distintos grupos (podemos ver que se forman tres grupos que corresponden a los valores ajustados de los tres tratamientos) es muy parecida, asumiendo que el último punto del tercer grupo es un punto atípico, no se observa un grupo con una mayor dispersión que el resto. Por lo cual gráficamente se podría decir que el supuesto de homocedasticidad en los errores parece cumplirse.

Los resultados la prueba realizada fueron:

Test de Levene:

H_0 : La varianza de los grupos no son diferentes (iguales)

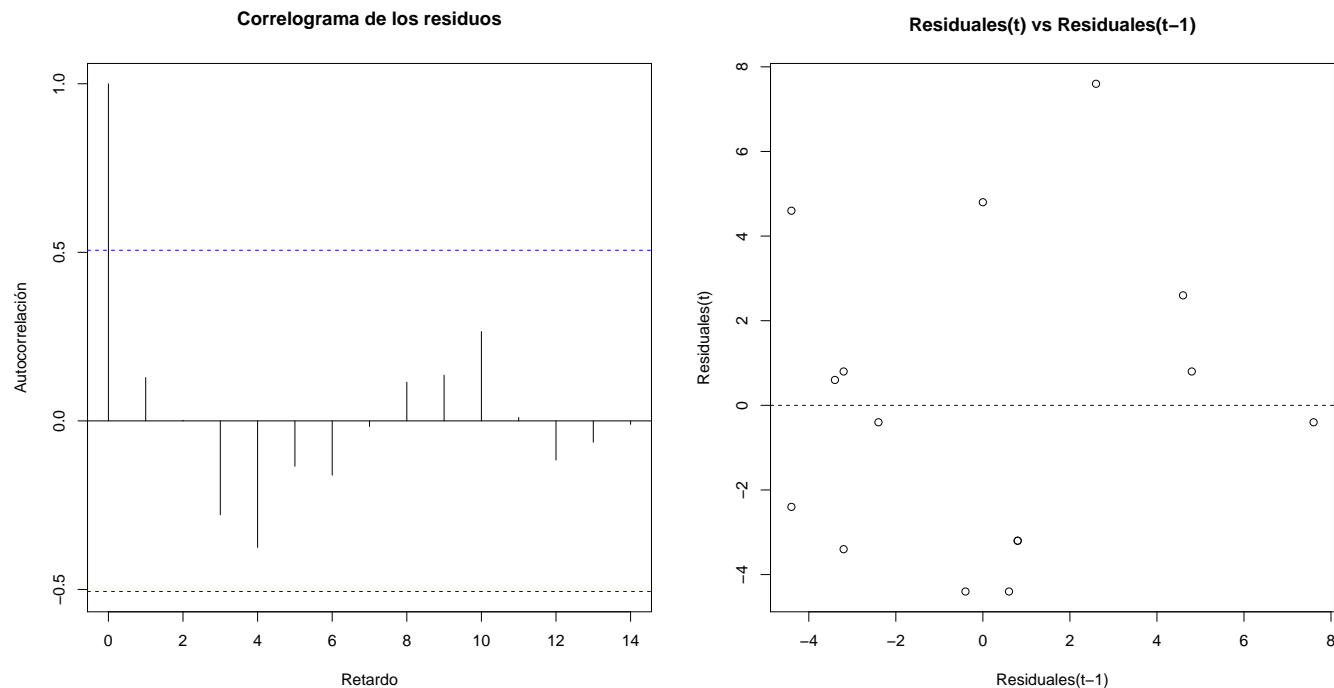
H_a : La varianza de los grupos son diferentes

$F_{value} = 0.0924, Pr(> F) = 0.9124$

Se utilizó el test de Levene ya que este no es sensible a las desviaciones de la normalidad como el de Bartlett. Como el p valor=0.9124 es superior a cualquier nivel de significancia de los usualmente establecidos (0.01,0.05,0.1) no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que la varianza de los grupos (3 grupos en este caso) son diferentes, por lo tanto, el supuesto de homocedasticidad en los errores parece cumplirse.

Independencia:

Para analizar el supuesto de independencia en los errores, se realizaron dos pruebas gráficas (correlograma de los residuos y residuo t vs residuo anterior ($t-1$)) y dos pruebas estadísticas (test de Rachas y test de Durbin-Watson).



En la primera gráfica, podemos observar que la correlación en el retardo 1, es decir, la correlación entre el error i y el anterior $i-1$, es muy baja (casi nula), pero la correlación en el retardo 4, es decir, la correlación entre el error i y el $i-4$, es de aproximadamente -0.45. Esta correlación se podría considerar un poco elevada, pero no sobrepasa los intervalos generados (líneas azules) para la correlación. En la segunda gráfica, no se observa una tendencia clara entre el error i y el error $i-1$, esto nos dice que no existe una correlación clara entre ellos. Podemos concluir que el supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Test de rachas:

H_0 : La muestra es aleatoria (las observaciones son independientes)

H_a : La muestra no es aleatoria (las observaciones no son independientes)

Standard Normal = -0.25129, p -value = 0.8016

Como el p valor=0.8016 es mayor que nuestro nivel de significancia, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que los residuales no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Test de Durbin-Watson:

H_0 : No existe autocorrelación en la muestra ($\rho = 0$)

H_a : Existe autocorrelación en la muestra ($\rho \neq 0$)

DW = 1.6188, p -value = 0.1682

Como el p valor=0.1682 es mayor que nuestro nivel de significancia, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que existe autocorrelación en los residuales, en otras palabras, no podemos decir que los residuales no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

g.

Observando las estadísticas descriptivas y el diagrama de cajas realizado en el literal c, a priori, se podría pensar que las velocidades de avance 125 y 175 plg/min generan un efecto diferente que la velocidad de avance de 150 plg/min, sobre la resistencia a la tensión de las piezas de acero. Dado esto, se plantea la siguiente hipótesis nula

$$H_0 : 2\tau_2 - \tau_1 - \tau_3 = 0$$

Bajo la hipótesis nula, tenemos que el estadístico de prueba es:

$$F = \frac{(\sum_{i=1}^t a_i \bar{y}_i)^2}{\hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^t \frac{a_i^2}{r_i}}$$

$$\rightarrow F = \frac{(-36.8)^2}{1.2 \cdot 15.6} = 72.341880$$

Como $F_{0.95(1,12)} = 4.7472 < F_{cal} = 72.341880$, se rechaza H_0 y concluimos que si hay diferencias significativas en relación a la resistencia a la tensión de las piezas de acero, entre la velocidad de avance de 150 plg/min y las velocidades de avance de 125 y 175 plg/min.

Con el resultado anterior sabemos que la velocidad de avance de 150 plg/min tiene un efecto distinto (probablemente inferior) en cuanto a la resistencia a la tensión de las piezas de acero, pero también nos gustaría saber si entre los efectos de las velocidades de avance de 125 y 175 plg/min también existen diferencias, para ello planteamos la siguiente hipótesis.

$$H_0 : \tau_1 - \tau_3 = 0$$

$$\rightarrow F = \frac{(-5.2)^2}{0.4 \cdot 15.6} = 4.3333$$

Como $F_{0.95(1,12)} = 4.7472 > F_{cal} = 4.3333$, no se rechaza H_0 y concluimos que no hay evidencia estadística para decir que existen diferencias entre el efecto de la velocidad de avance 125 plg/min y el efecto de la velocidad de avance 175 plg/min sobre la resistencia a la tensión en el proceso de maquinado de las piezas de acero.

h.

Las diferencias entre los promedios de los tratamientos es:

$$Velocidad\ 1(125) - Velocidad\ 2(150) = 95.2 - 79.4 = 15.8$$

$$Velocidad\ 1(125) - Velocidad\ 3(175) = 95.2 - 100.4 = 5.2$$

$$Velocidad\ 2(150) - Velocidad\ 3(175) = 79.4 - 100.4 = 21$$

Viendo las diferencias, nos parece razonable asumir una diferencia mínima de 15 lb/plg² para decir que existen diferencias entre los tratamientos, entonces, se tienen dos formulas esenciales para calcular la potencia del experimento:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^t (\tau_i - \bar{\tau})^2 r_i}{2\hat{\sigma}^2} \quad , \quad \hat{\Phi} = \sqrt{\frac{2\hat{\lambda}}{t}}$$

$$\rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^3 (15)^2 r_i}{2\hat{\sigma}^2} = \frac{3 \cdot (15)^2 \cdot 5}{2(15.6)} = 108.17307$$

$$\rightarrow \hat{\Phi} = \sqrt{\frac{2(108.17307)}{3}} = \sqrt{72.1154} = 8.4920$$

Con la tabla de la beta no central con $f_1 = 2$ y $f_2 = 12$ tenemos que:

$$Pr(Error\ tipo\ II) = 0$$

$$\rightarrow potencia = 1 - Pr(Error\ tipo\ II) = 1$$

El 100 % de las veces estaríamos rechazando la hipótesis nula cuando esta es falsa, en otras palabras, el 100 % de las veces, encontraríamos diferencias entre los tratamientos si de verdad las hay.

2. Punto 2

Un ingeniero de alimentos tiene como objetivo determinar si los métodos de colado o tamizado tienen influencia sobre el rendimiento del almidón agrio de yuca. Se trabaja con las variedades MBra 12 y con tres métodos de colado o tamizado:

Manual	Método mecánico continuo	Método mecánico discontinuo
17.6	16.9	19.3
18.9	15.3	21.1
16.3	17.1	19.8
17.4	18.6	18.9
18.0	17.2	20.0

a.

El modelo estadístico es:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \simeq N(0, \sigma^2)$$

$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij}$$

$$Cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i' \wedge j \neq j'}$$

Donde:

y_{ij} es el rendimiento en Kg de la parcela j con el método de colado o tamizado i
 μ es la media general del rendimiento en Kg sin tener en cuenta el método de colado o tamizado
 τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del método de colado sobre el rendimiento en Kg por parcela
 ε_{ij} es el error aleatorio debido al i -ésimo tratamiento en la j -ésima replica

b.

Hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$$

H_a : Al menos una de estas igualdades no se cumple

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F	Pr>F
τ	2	$SC_{\tau} = 21.628$	$CM_{trat} = 10.814$	10.9342	0.00198
Error	12	$SC_{error} = 11.868$	$CM_{error} = 0.989$		
Total	14	$SC_{total} = 33.496$			

A un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ se rechaza H_0 y concluimos que hay diferencias significativas entre los efectos del método de tamizado sobre el rendimiento del almidón de yuca.

c.

Ejercerá el control local del experimento, buscando que en cada tamizaje de cada parcela la herramienta a utilizar este en igualdad de condiciones para asegurarnos que el rendimiento se deba al método y no al desgaste que la herramienta podría tener, además de esto las parcelas deben ser asignadas a cada método o el método a cada parcela de forma que la posición de las parcelas no se vea incluida ya que esto puede traer sesgos donde el rendimiento se deba a la ubicación de la parcela y no al método de colado.

Para evaluar el control local del experimento nos centramos en la varianza estimada y en el coeficiente de variación

$$\sigma^2 = 0.989 \quad \bar{y}_{..} = 18.16 \quad \rightarrow CV = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\bar{y}_{..}} = 0.0547 \cdot 100 \% \simeq 5.476 \%$$

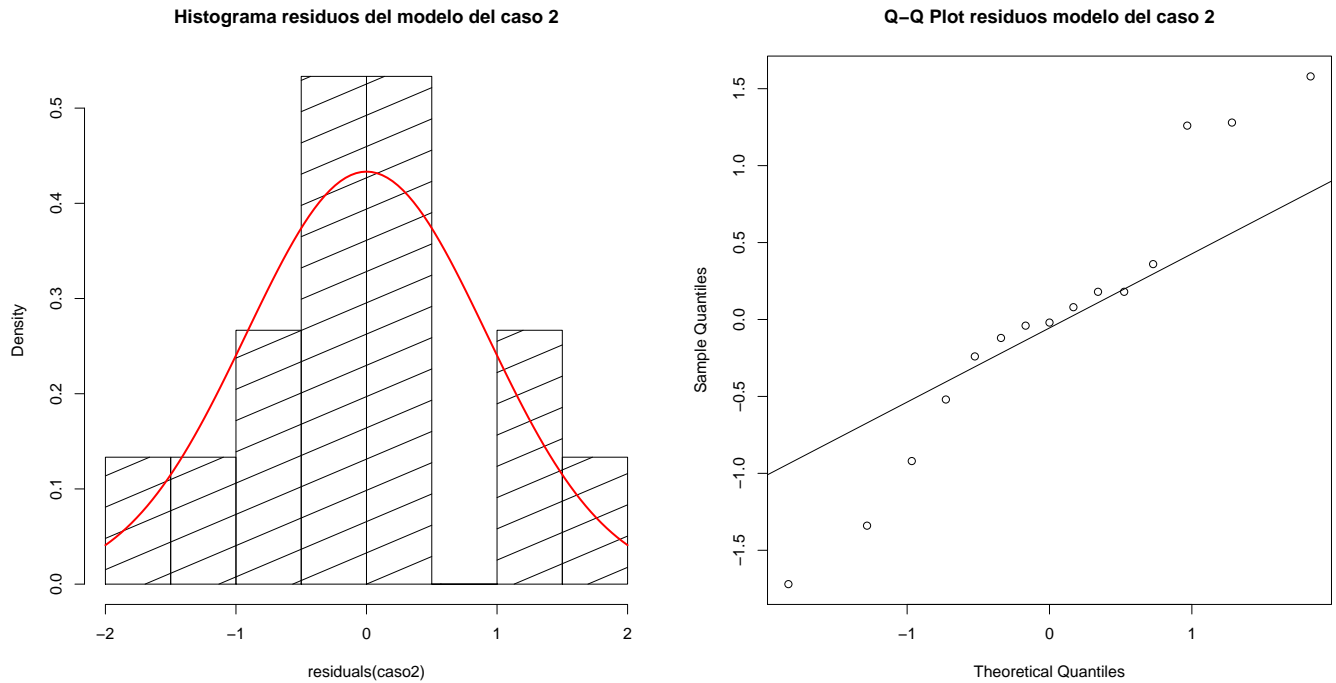
Dado que la desviación estándar $\sigma = 0.9945$ es pequeña y el coeficiente de variación también lo es, concluimos que hubo un buen control local en el experimento.

d.

Normalidad:

Para verificar el supuesto de normalidad en los errores, se hicieron pruebas gráficas(histograma y Q-Q plot) y estadísticas, dentro de la pruebas estadísticas se realizaron pruebas para analizar la asimetría(test D'Agostino) y la curtosis(test de Anscombe-Glynn) individualmente, y se realizó la prueba de normalidad Shapiro-Wilk, para evaluar conjuntamente la normalidad de los residuos.

En las gráficas se observa un posible incumplimiento de la normalidad, se puede ver que las barras de las colas sobrepasan un poco la curva teórica de la normal, y en el QQ-plot se observa que en ambas colas los puntos no están en la recta de los cuantiles teóricos, cabe aclarar que la prueba gráfica no es muy confiable porque depende de la experiencia del investigador, por ello nos vamos a centrar en los resultados de las pruebas estadísticas, ya que estas son mas objetivas.



Los resultados para cada una de las pruebas realizadas fueron:

Test D'Agostino:

H_0 : Los datos no tienen asimetría

H_a : Los datos tienen asimetría

$skew = -0.031147, z = -0.063304, p - value = 0.9495$

Como el p -valor=0.9495 es superior a nuestro nivel de significancia, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que los datos tienen asimetría. Lo cuál es un buen indicio en cuanto a la normalidad de los errores.

Test de Anscombe-Glynn: Sabemos que la curtosis en una distribución normal es 3, por ello se establecen las siguientes hipótesis en este test.

H_0 : La curtosis es igual a 3

H_a : La curtosis no es igual a 3

$kurt = 2.57990, z = 0.16259, p - value = 0.8708$

Como el p -valor=0.8708 es superior a nuestro nivel de significancia, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que los datos no tienen una curtosis igual a 3. Lo cuál complementando la prueba anterior, es muy probable que los errores presenten una distribución normal.

Test Shapiro-Wilk:

H_0 : Los datos provienen de una distribución normal

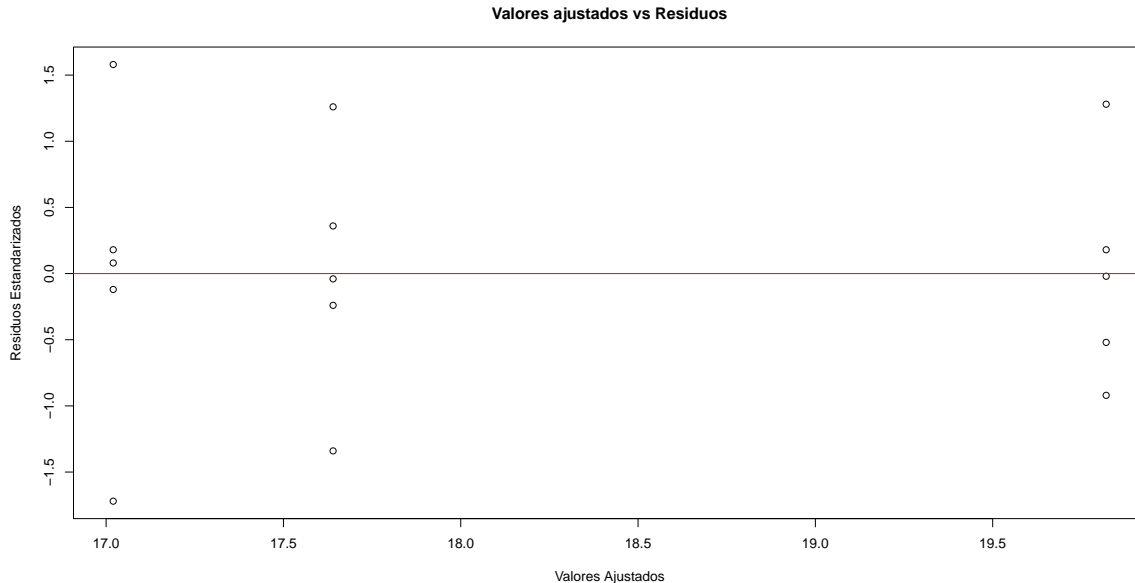
H_a : Los datos no provienen de una distribución normal

$W = 0.95297, p - value = 0.5725$

Como el p -valor=0.5725 es superior a nuestro nivel de significancia, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal. Lo cual junto con las dos pruebas anteriores, nos indica que este supuesto de normalidad en los errores parece cumplirse.

Homocedasticidad:

Para analizar la homocedasticidad se realizó una prueba gráfica (valores ajustados vs residuos) y una prueba estadística (Test de Levene)



Podemos observar que la varianza en los distintos grupos (podemos ver que se forman tres grupos que corresponden a los valores ajustados de los tres tratamientos) es muy parecida, un poco más para el primero, pero no se observa una diferencia considerable. Por lo cual gráficamente se podría decir que el supuesto de homocedasticidad en los errores parece cumplirse.

Los resultados la prueba realizada fueron:

Test de Levene:

H_0 : La varianza de los grupos no son diferentes (iguales)

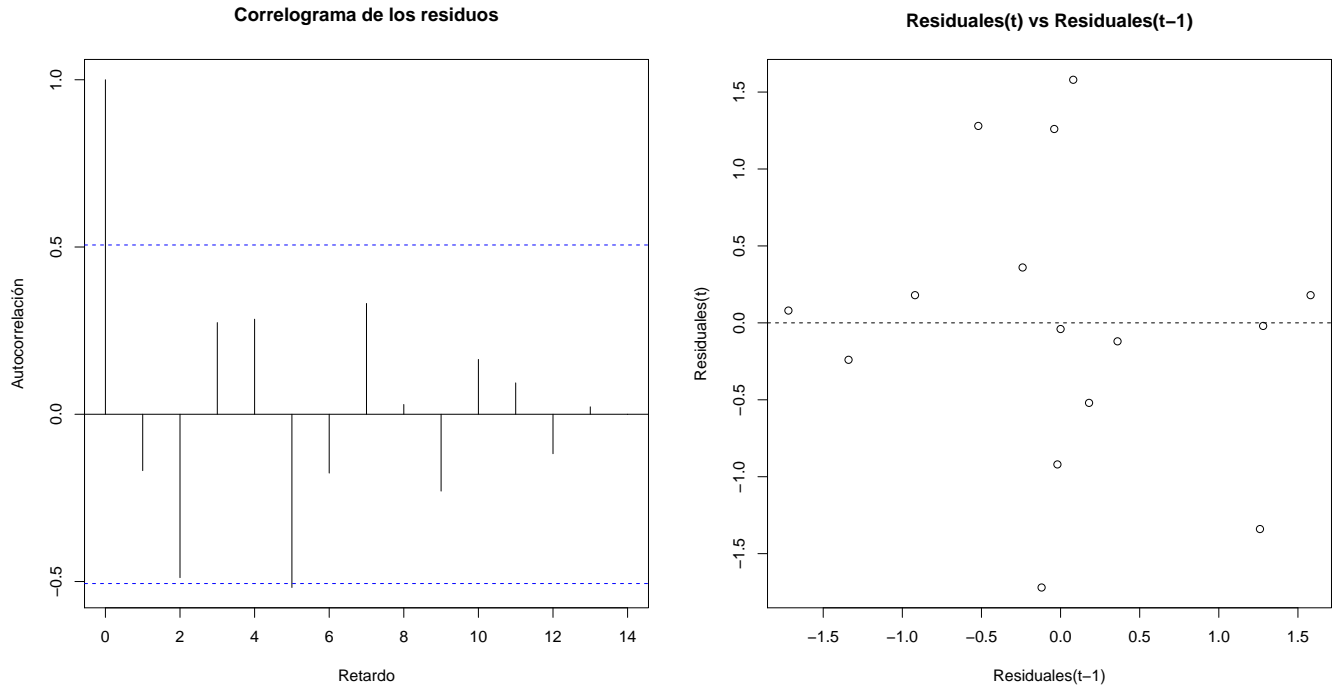
H_a : La varianza de los grupos son diferentes

$F\text{value} = 0.0653, Pr(> F) = 0.9372$

Se utilizó el test de Levene ya que este no es sensible a las desviaciones de la normalidad como el de Bartlett. Como el p valor=0.9372 es superior a cualquier nivel de significancia de los usualmente establecidos (0.01,0.05,0.1) no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que la varianza de los grupos(3 grupos en este caso) son diferentes, por lo tanto, el supuesto de homocedasticidad en los errores parece cumplirse.

Independencia:

Para analizar el supuesto de independencia en los errores, se realizaron dos pruebas gráficas (correlograma de los residuos y residuo t vs residuo anterior ($t-1$)) y dos pruebas estadísticas (test de Rachas y test de Durbin-Watson).



En la primera gráfica, podemos observar que la correlación en el retardo 1, es decir, la correlación entre el error i y el anterior $i-1$, es baja, pero la correlación en el retardo 2 y 4, es decir, la correlación entre el error i y el $i-2$, y el error i y el $i-4$, son de aproximadamente -0.5. Esta correlación se podría considerar un poco elevada, y además sobrepasa los intervalos generados (líneas azules) para la correlación. En la segunda gráfica, no se observa una tendencia clara entre el error i y el error $i-1$, pero centrándonos en la primera gráfica podemos decir que no está claro el cumplimiento de este supuesto.

Test de rachas:

H_0 : La muestra es aleatoria (las observaciones son independientes)

H_a : La muestra no es aleatoria (las observaciones no son independientes)

Standard Normal = 0.82565, p -value = 0.409

Como el p valor=0.409 es mayor que nuestro nivel de significancia, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que los residuos no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Test de Durbin-Watson:

H_0 : No existe autocorrelación en la muestra ($\rho = 0$)

H_a : Existe autocorrelación en la muestra ($\rho \neq 0$)

DW = 2.334, p -value = 0.9024

Como el p valor=0.9024 es mayor que nuestro nivel de significancia, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia suficiente para decir que existe autocorrelación en los residuos, en otras palabras, no podemos decir que los residuos no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

e.

Las diferencias entre los promedios de los tratamientos son:

$$\begin{aligned}\text{Manual} - \text{Mecánico continuo} &= 17.64 - 17.02 = 0.62 \\ \text{Manual} - \text{Mecánico discontinuo} &= 17.64 - 19.82 = 2.18 \\ \text{Mecánico continuo} - \text{Mecánico discontinuo} &= 17.02 - 19.82 = 2.8\end{aligned}$$

Viendo las diferencias, nos parece razonable asumir una diferencia mínima de 2 kg para decir que existen diferencias entre los tratamientos, entonces, se tienen dos formulas esenciales para calcular la potencia del experimento:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^t (\tau_i - \bar{\tau})^2 r_i}{2\hat{\sigma}^2} \quad , \quad \hat{\Phi} = \sqrt{\frac{2\hat{\lambda}}{t}} \\ \rightarrow \hat{\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^3 (2)^2 r_i}{2\hat{\sigma}^2} = \frac{3 \cdot (2)^2 \cdot r_i}{2(0.989)} = \frac{12r_i}{1.978} = 6.0667r_i \\ \rightarrow \hat{\Phi} &= \sqrt{\frac{2(6.0667)r_i}{3}} = \sqrt{4.0445r_i}\end{aligned}$$

Estableciendo una potencia mínima de 0.90, tenemos la siguiente tabla de análisis de sensibilidad para determinar nuestro tamaño del experimento, comenzando con $r_i = 2$ replicas:

r	2	3
$n_1 = t - 1$	2	2
$n_2 = n - t$	3	6
$\hat{\Phi}$	2.844	3.483
P(Error II)	0.3715	0.027
$\beta = \text{Potencia}$	0.6285	0.973

El número de replicas adecuado para tener una potencia superior al 90 % es de 3 (con 3 replicas se obtiene una potencia de 97.3 %)

3. Punto 3

a. $2\tau_1 - \tau_2 - \tau_3$

Por el teorema 2, $\vec{\lambda}'\vec{\beta}$ es estimable si y solo si existe un vector \vec{r}' tal que $\vec{r}'x'x = \lambda'$ o $x'x\vec{r} = \lambda$.

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema queda:

$$15r_1 + 5r_2 + 5r_3 + 5r_4 = 0 \quad (1)$$

$$5r_1 + 5r_2 = 2 \quad (2)$$

$$5r_1 + 5r_3 = -1 \quad (3)$$

$$5r_1 + 5r_4 = -1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\text{de (2): } 5r_2 &= 2 - 5r_1 \rightarrow r_2 = \frac{2}{5} - r_1 \\ \text{de (3): } 5r_3 &= -1 - 5r_1 \rightarrow r_3 = -\frac{1}{5} - r_1 \\ \text{de (4): } 5r_4 &= -1 - 5r_1 \rightarrow r_4 = -\frac{1}{5} - r_1\end{aligned}$$

Entonces, un vector r el cuál resuelve el sistema es:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

\therefore La función propuesta en el punto a; $2\tau_1 - \tau_2 - \tau_3$ es estimable.

b. $\tau_2 - \tau_3$

Por el teorema 2:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema queda:

$$15r_1 + 5r_2 + 5r_3 + 5r_4 = 0 \quad (1)$$

$$5r_1 + 5r_2 = 0 \quad (2)$$

$$5r_1 + 5r_3 = 1 \quad (3)$$

$$5r_1 + 5r_4 = -1 \quad (4)$$

de (2): $5r_2 = -5r_1 \rightarrow r_2 = -r_1$

de (3): $5r_3 = 1 - 5r_1 \rightarrow r_3 = \frac{1}{5} - r_1$

de (4): $5r_4 = -1 - 5r_1 \rightarrow r_4 = -\frac{1}{5} - r_1$

Entonces, un vector r el cuál resuelve el sistema es:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

\therefore La función propuesta en el punto b; $\tau_2 - \tau_3$ es estimable.

c. $\tau_1 + \tau_2$

Por el teorema 2:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema queda:

$$15r_1 + 5r_2 + 5r_3 + 5r_4 = 0 \quad (1)$$

$$5r_1 + 5r_2 = 1 \quad (2)$$

$$5r_1 + 5r_3 = 1 \quad (3)$$

$$5r_1 + 5r_4 = 0 \quad (4)$$

de (2): $5r_2 = 1 - 5r_1 \rightarrow r_2 = \frac{1}{5} - r_1$

de (3): $5r_3 = 1 - 5r_1 \rightarrow r_3 = \frac{1}{5} - r_1$

de (4): $5r_4 = -5r_1 \rightarrow r_4 = -r_1$

Entonces, si $r_1 = 0 \rightarrow r_2 = \frac{1}{5} \quad r_3 = \frac{1}{5} \quad r_4 = 0$

Pero, reemplazando estos valores en (1):

$$15(0) + 5\left(\frac{1}{5}\right) + 5\left(\frac{1}{5}\right) + 5(0) = 0$$

$$2 \neq 0$$

\therefore La función propuesta en el punto c; $\tau_1 + \tau_2$ no es estimable.

d.

Según el teorema 3, el mejor estimador lineal insesgado de $\vec{\lambda}'\vec{\beta}$ es $\vec{r}'x'y$

a.

$$r'x'y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}y_{1.} - \frac{1}{5}y_{2.} - \frac{1}{5}y_{3.}$$

$$= 2\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.}$$

b.

$$r'x'y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}y_{2.} - \frac{1}{5}y_{3.}$$

$$= \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.}$$

c. No es estimable.

e.

En el punto anterior tenemos los mejores estimadores lineales insesgados para cada una de las funciones, reemplazando los valores para encontrar la estimación, tenemos:

a.

$$2\tau_1 - \tau_2 - \tau_3 = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.} = -1.56$$

Con esta estimación podemos concluir que se produce 1.56 kg menos de rendimiento del almidón de yuca cuando se usa el método de tamizado manual en lugar de alguno de los métodos mecánicos, ya sea continuo o discontinuo.

b.

$$\tau_2 - \tau_3 = \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.} = -2.8$$

Con esta estimación concluimos que se produce 2.8 kg menos de rendimiento del almidón de yuca cuando se usa el método de tamizado mecánico continuo en lugar del método mecánico discontinuo.

c. No es estimable

f.

Teorema: Hay exactamente k funciones estimables linealmente independientes, donde k es el rango de x.

Dado el teorema anterior, el rango de x es igual a 3, por lo tanto, se podrían obtener 3 funciones estimables linealmente independientes.

g.

El teorema 4, establece que cualquier vector \vec{r} produce la misma estimación insesgada de $\vec{\lambda}'\vec{\beta}$

Para la función del literal a, $2\tau_1 - \tau_2 - \tau_3$, la cual es estimable y tenemos una estimación de -1.56, encontraremos otro vector \vec{r} y calcularemos una nueva estimación.

Otro vector sería $\vec{r} = [1 \quad -\frac{3}{5} \quad -\frac{6}{5} \quad -\frac{6}{5}]$

Obteniendo una estimación con este nuevo vector, tenemos:

$$r'x'y = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \end{pmatrix} = y_{..} - \frac{3}{5}y_{1.} - \frac{6}{5}y_{2.} - \frac{6}{5}y_{3.}$$

$$= y_{..} - 3\bar{y}_{1.} - 6\bar{y}_{2.} - 6\bar{y}_{3.}$$

$$= 272.4 - 3(17.64) - 6(17.02) - 6(19.82) = -1.56$$

Obteniendo así, la misma estimación anterior, lo cual comprueba el teorema 4.

Para la función del literal b, $\tau_2 - \tau_3$, la cual es estimable y tenemos una estimación de -2.8, encontraremos otro vector \vec{r} y calcularemos una nueva estimación.

Otro vector sería $\vec{r} = [1 \quad -1 \quad -\frac{4}{5} \quad -\frac{6}{5}]$

Obteniendo una estimación con este nuevo vector, tenemos:

$$\begin{aligned} r'x'y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \end{pmatrix} = y_{..} - y_{1.} - \frac{4}{5}y_{2.} - \frac{6}{5}y_{3.} \\ &= y_{..} - y_{1.} - 4\bar{y}_2 - 6\bar{y}_3. \\ &= 272.4 - 88.2 - 4(17.02) - 6(19.82) = -2.8 \end{aligned}$$

Obteniendo así, la misma estimación anterior, lo cual comprueba el teorema 4.