Universidad del Valle
Programa Académico de Estadística
Estadística Aplicada III
Cali, septiembre de 2018

Laboratorio 2: ACP con datos faltantes

Kevin Steven García[a], Alejandro Vargas[b]

1. Introducción

En el presente informe veremos la aplicación del ACP con datos completos y datos faltantes a la matriz de datos correspondientes a las importaciones de los países sudamericanos provenientes de estados unidos entre 1991 y 2010. El ACP con datos faltantes se realizará a la matriz de datos mencionada con el 5,10,15, y 20 % de datos faltantes, por medio de dos algoritmos, el algoritmo NIPALS y el ACP-EM, se mostraran los resultados obtenidos y se comparará la eficiencia o la imputación obtenida de los dos algoritmos en cuanto a las estimaciones de los datos faltantes con respecto a la matriz de datos original. Además se analizará el comportamiento de los métodos en cuanto a valores y vectores propios obtenidos, porcentaje de Inercia explicado por los ejes, la estructura factorial en la nube de individuos y en la nube de variables, la ortogonalidad en las componentes y la ortonormalidad de los vectores propios obtenidos.

La base de datos sobre la cuál se va a trabajar es la siguiente:

Año	Colombia	Brasil	Chile	Argentina	Ecuador	Peru
1991	44.4	27.2	45.6	20.0	6.0	14.1
1992	75.5	11.8	58.9	22.6	17.8	14.4
1993	110.7	50.6	128.3	17.2	119.4	118.5
1994	80.3	70.6	102.2	15.2	154.9	146.1
1995	81.6	82.3	89.0	35.1	169.4	127.1
1996	76.4	97.4	185.0	51.0	75.5	129.0
1997	32.0	89.5	195.3	31.1	33.4	110.2
1998	55.5	63.1	66.3	24.4	9.7	66.7
1999	74.3	72.6	76.3	28.1	11.2	110.7
2000	84.5	76.2	80.1	29.5	11.8	110.2
2001	87.1	97.4	89.3	51.5	63.1	89.3
2002	89.3	89.5	72.4	40.3	66.3	70.2
2003	70.2	63.1	80.1	60.5	76.3	90.1
2004	90.1	66.3	70.5	39.1	20.0	64.5
2005	60.5	76.3	107.2	31.1	63.4	92.7
2006	140.3	20.0	63.4	50.2	101.2	120.8
2007	120.4	22.6	101.2	51.0	103.1	107.2
2008	130.2	17.2	103.1	42.5	66.7	70.8
2009	110.1	31.1	75.6	25.7	110.7	101.2
2010	120.2	24.4	68.9	60.3	110.2	110.8

[a]Código: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co
[b]Código: 1525953. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co

2. ACP datos completos

En el laboratorio 1 se vio paso por paso la aplicación del ACP, por lo tanto se mostraran solo los resultados obtenidos,es decir, los valores y vectores propios u, y las componentes principales Z· u.

Los valores y vectores propios obtenidos para la matriz de correlaciones asociada a la matriz de datos completa son:

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
2.1934092	1.9561781	0.9038789	0.5119470	0.2854407	0.1491461

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
-0.3266572	0.5708984	0.0068014	0.1170875	0.5332445	0.5189071
-0.1588587	-0.6033277	0.2009878	-0.5413708	0.1852719	0.4929051
-0.3381710	-0.4635960	0.0514265	0.7890499	-0.0779079	0.1985066
-0.2898593	0.2066273	0.8863988	-0.0448699	-0.2455986	-0.1589085
-0.5459391	0.1756044	-0.3785943	-0.2216216	-0.6626128	0.1990175
-0.6096157	-0.1470297	-0.1669623	-0.1395665	0.4193810	-0.6192861

Entonces, las componentes serán:

$$C = \begin{pmatrix} 3.57940293 & 0.2200186 & -0.45449358 & 0.07133223 & -0.720973151 & -0.20047529 \\ 2.98416620 & 1.1042398 & -0.46390509 & 0.71180698 & -0.455553845 & 0.19923050 \\ -1.18011107 & -0.0116174 & -1.74610834 & 0.70549306 & 0.310200546 & 0.48646527 \\ -1.55340630 & -0.7593625 & -2.19242499 & -0.62366337 & -0.204020462 & -0.20732998 \\ -1.75941910 & -0.3826535 & -0.86317511 & -1.17272788 & -0.865691407 & 0.12542483 \\ -1.95192515 & -2.1096857 & 1.13135115 & 0.91256447 & -0.033529896 & 0.19059358 \\ -0.24144158 & -3.3571269 & 0.21738043 & 1.42840546 & -0.256638938 & -0.32533218 \\ 1.98337243 & -0.7162408 & -0.17289755 & -0.37637158 & 0.202418839 & -0.25420678 \\ 0.73442430 & -0.7828704 & -0.07627906 & -0.46668505 & 1.061208739 & -0.52216426 \\ 0.53228046 & -0.6705084 & 0.04502957 & -0.41734440 & 1.233682980 & -0.25313938 \\ -0.37260533 & -0.5712985 & 1.32752250 & -0.83881402 & 0.043950908 & 0.54991653 \\ 0.34063969 & -0.2236844 & 0.59420850 & -0.93477773 & -0.009209529 & 0.85547004 \\ -0.25306113 & 0.1018299 & 1.54180034 & -0.54482210 & -0.818951578 & -0.47394187 \\ 1.13138487 & 0.1457486 & 0.74310059 & -0.28906437 & 0.448604684 & 0.38436376 \\ 0.26399863 & -1.2144046 & -0.14020651 & -0.12147196 & -0.240048044 & -0.04377519 \\ -1.30421117 & 2.4709380 & 0.21944271 & 0.01303094 & 0.504568106 & -0.33221632 \\ -1.21980212 & 1.6156676 & 0.38826932 & 0.71976837 & -0.148517945 & -0.21359085 \\ -0.07690509 & 1.8051120 & 0.27156821 & 1.24900452 & 0.206211966 & 0.49705097 \\ -0.35915931 & 1.2125308 & -1.25387195 & 0.04770938 & 0.035716022 & 0.03874664 \\ -1.27762217 & 2.1233680 & 0.88368884 & -0.07337295 & -0.293427995 & -0.50109002 \end{pmatrix}$$

3. ACP datos faltantes

3.1. Generación de matrices con datos faltantes

Para realizar los algoritmos NIPALS y EM-PCA, generamos NA's de forma aleatoria (se generaron pares de números correspondientes a las filas y columnas de la matriz y se reemplazaron por NA) en la matriz de datos correspondiente a la base de datos dada en la introducción , con 5,10,15, y 20 % de NA's o datos faltantes. Esas matrices son las siguientes:

- Matrices con el 5 % y 10 % de datos faltantes respectivamente:

Año	Colombia	Brasil	Chile	Argentina	Ecuador	Peru
1991	44.4	27.2	45.6	20.0	6.0	14.1
1992	75.5	11.8	58.9	22.6	NA	14.4
1993	110.7	50.6	128.3	17.2	119.4	118.5
1994	80.3	70.6	102.2	15.2	154.9	146.1
1995	81.6	82.3	89.0	35.1	169.4	127.1
1996	76.4	97.4	185.0	51.0	75.5	129.0
1997	32.0	89.5	195.3	31.1	33.4	NA
1998	55.5	63.1	66.3	24.4	9.7	66.7
1999	74.3	72.6	76.3	28.1	11.2	110.7
2000	84.5	76.2	80.1	29.5	11.8	110.2
2001	87.1	97.4	89.3	51.5	63.1	NA
2002	89.3	89.5	72.4	40.3	66.3	70.2
2003	70.2	63.1	80.1	60.5	76.3	90.1
2004	NA	66.3	70.5	39.1	20.0	64.5
2005	60.5	NA	107.2	31.1	63.4	92.7
2006	140.3	20.0	63.4	50.2	101.2	120.8
2007	120.4	22.6	101.2	51.0	103.1	107.2
2008	130.2	NA	103.1	42.5	66.7	70.8
2009	110.1	31.1	75.6	25.7	110.7	101.2
2010	120.2	24.4	68.9	60.3	110.2	110.8

Año	Colombia	Brasil	Chile	Argentina	Ecuador	Peru
1991	44.4	27.2	45.6	NA	6.0	14.1
1992	75.5	NA	58.9	22.6	17.8	14.4
1993	NA	50.6	NA	17.2	119.4	118.5
1994	80.3	70.6	102.2	15.2	154.9	146.1
1995	81.6	82.3	89.0	35.1	169.4	127.1
1996	76.4	97.4	185.0	51.0	75.5	129.0
1997	32.0	89.5	195.3	31.1	33.4	110.2
1998	55.5	63.1	66.3	24.4	9.7	66.7
1999	NA	72.6	NA	28.1	11.2	110.7
2000	84.5	76.2	80.1	29.5	11.8	110.2
2001	87.1	97.4	NA	51.5	63.1	89.3
2002	89.3	89.5	72.4	40.3	66.3	70.2
2003	70.2	63.1	80.1	60.5	76.3	90.1
2004	90.1	66.3	NA	39.1	20.0	64.5
2005	60.5	76.3	107.2	31.1	63.4	92.7
2006	140.3	20.0	63.4	50.2	101.2	120.8
2007	120.4	22.6	101.2	51.0	103.1	107.2
2008	NA	17.2	103.1	42.5	66.7	70.8
2009	NA	31.1	75.6	25.7	110.7	101.2
2010	120.2	24.4	68.9	NA	110.2	110.8

- Matrices con el 15 % y 20 % de datos faltantes respectivamente:

Año	Colombia	Brasil	Chile	Argentina	Ecuador	Peru
1991	NA	27.2	45.6	NA	6.0	14.1
1992	75.5	NA	58.9	22.6	17.8	14.4
1993	110.7	50.6	128.3	NA	119.4	118.5
1994	80.3	70.6	NA	15.2	154.9	146.1
1995	81.6	82.3	89.0	35.1	169.4	NA
1996	76.4	97.4	185.0	51.0	75.5	NA
1997	32.0	89.5	195.3	31.1	33.4	NA
1998	55.5	63.1	NA	NA	9.7	66.7
1999	74.3	72.6	76.3	28.1	11.2	NA
2000	84.5	76.2	80.1	29.5	NA	110.2
2001	87.1	97.4	89.3	51.5	63.1	89.3
2002	89.3	NA	72.4	40.3	66.3	70.2
2003	70.2	63.1	80.1	60.5	76.3	90.1
2004	90.1	66.3	NA	39.1	20.0	64.5
2005	60.5	76.3	NA	31.1	63.4	92.7
2006	140.3	20.0	63.4	50.2	101.2	120.8
2007	120.4	22.6	101.2	51.0	103.1	107.2
2008	NA	17.2	NA	42.5	66.7	70.8
2009	110.1	31.1	NA	25.7	110.7	101.2
2010	120.2	24.4	68.9	60.3	110.2	110.8

Año	Colombia	Brasil	Chile	Argentina	Ecuador	Peru
1991	44.4	27.2	45.6	NA	6.0	14.1
1992	75.5	11.8	58.9	22.6	17.8	14.4
1993	NA	50.6	128.3	NA	119.4	118.5
1994	80.3	70.6	102.2	15.2	154.9	146.1
1995	81.6	82.3	89.0	35.1	169.4	NA
1996	76.4	97.4	NA	51.0	NA	129.0
1997	32.0	89.5	NA	NA	33.4	110.2
1998	55.5	63.1	66.3	24.4	9.7	66.7
1999	74.3	72.6	NA	28.1	NA	110.7
2000	NA	76.2	80.1	29.5	11.8	110.2
2001	87.1	NA	89.3	51.5	63.1	NA
2002	89.3	89.5	72.4	40.3	NA	NA
2003	70.2	63.1	80.1	60.5	76.3	90.1
2004	90.1	66.3	70.5	39.1	20.0	NA
2005	60.5	NA	107.2	31.1	63.4	92.7
2006	140.3	20.0	63.4	50.2	101.2	120.8
2007	120.4	NA	NA	51.0	103.1	107.2
2008	130.2	17.2	103.1	42.5	66.7	70.8
2009	110.1	31.1	75.6	25.7	NA	NA
2010	120.2	24.4	68.9	60.3	NA	110.8

3.2. NIPALS

El algoritmo NIPALS realiza una descomposición singular de una matriz de datos, mediante secuencias iterativas convergentes de proyecciones ortogonales, el cuál utiliza la descomposición derivada del ACP que permite realizar la reconstitución de la matriz con los datos faltantes estimados. Gonzales (2014).

La siguiente figura es el esquema básico del algoritmo NIPALS

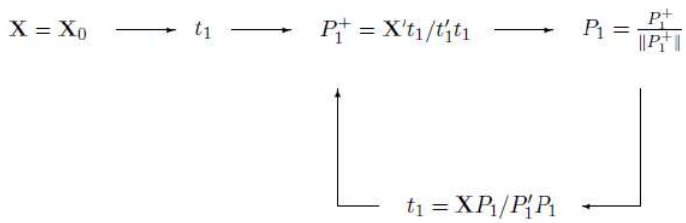


FIGURA 1: Esquema del algoritmo NIPALS

El pseudocódigo de este algoritmo propuesto por Gonzales (2014), es el siguiente:

Etapa 1. $X_0 = X_h$

Etapa 2. $h = 1, 2, ..., a$:

Etapa 2.1. $t_h = 1^{\underline{a}}$ columna de X_{h-1}

Etapa 2.2. :Repetir hasta la convergencia de P_h

Etapa 2.2.1 Para $j = 1, 2, ..., p$:

$$P_{hj} = \frac{\sum_{\{i:x_{ji} \ e \ t_{hi} \ existen\}} x_{h-1,ji} t_{hi}}{\{i:x_{ji} \ e \ t_{hi} \ existen\} t_{hi}^2} \qquad [cov(t_h, x_{h-1,j})/s_{th}^2]$$

Etapa 2.2.2 normar P_h a 1.

Etapa 2.2.3 Para $i = 1, 2, ..., n$: $\qquad t_{hi} = \frac{\sum_{\{j:x_{ji} \ existe\}} x_{h-1,ji} P_{hj}}{\sum_{\{j:x_{ji} \ existe\}} P_{hj}^2}$

Etapa 2.3. $X_h = X_{h-1} - t_h P_h'$

Fin

3.3. Resultados

Los valores propios obtenidos mediante el algoritmo NIPALS para las matrices con 5,10,15 y 20 % son:

% NA	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6
5%	2,4795911	1,9574160	0,9418925	0,5887012	0,2926197	0,1261818
10%	2,156179	1,9495680	1,1627291	0,4743410	0,2712866	0,1075340
15%	2,7541533	2,0189161	0,8745523	0,3612268	0,1725610	0,1452363
20%	3,01079935	1,8538082	0,7589054	0,4764867	0,2343548	0,0456656

En cuanto a los vectores propios obtenidos, por cuestiones de espacio, compararemos solo los tres primeros vectores propios de cada matriz:

	5%			10%			15%			20%		
	λ1	λ2	λ3	λ1	λ2	λ3	λ1	λ2	λ3	λ1	λ2	λ3
Colombia	0,429714	0,462774	0,010940	0,489972	0,337622	0,239236	0,541172	0,226588	0,010857	0,453184	0,437367	0,271795
Brasil	0,072810	-0,630665	0,172080	-0,222065	-0,624667	0,087050	-0,376927	-0,449971	-0,224875	0,031260	-0,680329	-0,301077
Chile	0,190536	-0,557458	0,061648	0,055773	-0,577781	0,189901	-0,179969	-0,603601	-0,275110	0,398640	-0,291447	0,157374
Argentina	0,307943	0,120163	0,902719	0,235302	-0,010222	0,885203	0,253161	0,174995	-0,919974	0,589108	0,215449	-0,677587
Ecuador	0,614783	0,015342	-0,359984	0,603334	-0,047589	-0,299120	0,452037	-0,391397	0,164834	0,394665	-0,216978	0,581645
Perú	0,548592	-0,250335	-0,148247	0,536774	-0,399503	-0,161459	0,514044	-0,445012	-0,010266	0,363215	-0,409174	0,115233

Las componentes principales, también mostraremos las primeras tres para cada matriz:

	5%			10%			15%			20%		
	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3
1991	-3,38561	0,96224	-0,52252	-2,66750	2,04076	-1,39643	-1,65576	2,69941	0,92977	-4,05012	1,08850	0,73527
1992	-3,17064	1,63906	-0,25508	-2,41899	1,85653	-0,35675	-2,32608	1,57941	1,11585	-2,52801	1,97281	0,42393
1993	1,10355	-0,23717	-1,70741	0,99864	-0,02049	-1,85360	1,49240	-0,93401	-0,64793	3,46691	0,34316	-0,07606
1994	1,39985	-0,98069	-2,15301	1,42211	-1,11806	-2,24315	0,91680	-3,08385	1,69149	0,48462	-2,03815	2,19461
1995	1,72311	-0,69924	-0,82566	1,58126	-0,99349	-0,87997	0,58190	-1,70723	0,54383	0,85547	-1,67174	1,09327
1996	1,34960	-2,47212	1,17382	0,64130	-2,69809	1,27803	-1,19477	-1,92428	-1,67327	1,15153	-1,75298	-0,85475
1997	-1,20286	-3,25403	0,28139	-1,27443	-2,88730	-0,02913	-3,45986	-1,57594	-0,48362	-1,85495	-2,04811	-0,36828
1998	-2,06252	-0,24303	-0,22459	-1,92016	0,41734	-0,54820	-1,79814	0,35036	0,07033	-2,11121	-0,19723	-0,39885
1999	-0,92232	-0,52498	-0,09807	-0,93077	-0,96685	-0,30734	-1,60896	0,87904	0,49460	-0,67934	-0,95321	0,41531
2000	-0,70789	-0,47074	0,02278	-0,67744	-0,27090	-0,12182	-0,09366	-0,60951	0,69882	-0,85860	-0,96250	-0,60835
2001	0,44962	-0,76668	1,26155	-0,06534	-1,13176	1,47463	-0,32314	-0,34161	-1,19233	0,82211	0,09686	-0,69267
2002	-0,31264	-0,16603	0,55745	-0,45790	-0,00560	0,52067	-0,14854	0,75606	0,07256	-0,00793	-0,77645	-0,58155
2003	0,25757	0,06666	1,56848	0,23652	-0,02401	1,51578	0,14900	0,19297	-1,46217	0,73316	0,00588	-1,29158
2004	-1,39243	0,03556	0,70259	-0,92082	0,59051	0,76826	-0,89693	0,86773	-0,22229	-0,55006	0,28600	-0,72060
2005	-0,55151	-1,13710	-0,14717	-0,67308	-0,80694	-0,34001	-0,99591	-1,12045	0,18173	-0,27316	-1,57939	-0,08401
2006	1,68383	2,19068	0,29995	2,43904	1,64462	0,81415	2,80179	0,92929	-0,13159	1,50502	1,80212	0,65461
2007	1,41452	1,33701	0,46841	1,93462	0,96626	0,94906	2,01778	0,37995	-0,44040	1,78305	0,61257	0,31577
2008	0,44845	1,27030	0,44834	0,12543	1,26578	0,65730	0,51803	1,85137	0,37723	1,02225	1,69975	0,76010
2009	0,58818	1,14563	-1,21805	0,87570	1,02993	-1,08417	1,23473	0,10498	1,53413	-0,45739	1,20662	1,33149
2010	1,60743	1,84073	0,96754	1,84051	1,34595	0,32946	2,42527	0,80440	-0,89674	1,64705	1,66759	-0,47150

3.4. EM-PCA

El método Análisis de Componentes Principales vía EM (ACP-EM), es un método propuesto por Josse and Husson (2012), él cual realiza un Análisis de Componentes principales en presencia de datos faltantes. Particularmente, los datos faltantes son estimados inicialmente por valores promedio y luego se desea minimizar la distancia entre los valores originales (Z) y los valores estimados ($\Psi u'$). Ochoa (2018)

Para realizar este algoritmo en R Core Team (2017), usamos la función del paquete ade4. El pseudocódigo de este algoritmo propuesto por Ochoa (2018) es:

1. Iniciación L=0

   Z^0 los datos faltantes son reemplazados por valores iniciales, como por ejemplo la media.

2. Paso L

2.1 Realice un ACP para calcular Ψ^L,u^L, tomando q dimensiones (para garantizar un proceso iterativo).

2.2 Los valores faltantes son imputados via reconstitución de la matriz $Z^L = \Psi^L u'^L$. Los valores observados son los mismos y los faltantes se reemplazan por la imputación.

3. Se repiten el paso 2.1 y 2.2 hasta la convergencia.

3.5. Resultados

Los valores propios obtenidos mediante el algoritmo EM-PCA para las matrices con 5,10,15 y 20 % de datos faltantes son:

% NA	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6
5%	2,235339	1,923973	0,904790	0,481629	0,288574	0,165697
10%	2,106891	1,988887	1,044122	0,429413	0,295421	0,135266
15%	2,422113	2,142823	0,850670	0,360214	0,149434	0,074747
20%	2,712656	1,838548	0,669018	0,460891	0,226887	0,092000

En cuanto a los vectores propios obtenidos, por cuestiones de espacio, compararemos solo los tres primeros vectores propios de cada matriz:

	5%			10%			15%			20%		
	λ1	λ2	λ3	λ1	λ2	λ3	λ1	λ2	λ3	λ1	λ2	λ3
Colombia	-0,334085	0,562250	0,016244	0,590850	0,241440	0,141372	0,601545	-0,114905	-0,082281	-0,268283	0,614693	0,189306
Brasil	-0,190819	-0,602094	0,192583	-0,247043	-0,558790	0,062836	-0,552897	-0,156642	0,207208	-0,224581	-0,627557	-0,378188
Chile	-0,338732	-0,474736	0,001897	-0,044784	-0,621902	0,162562	-0,423327	-0,403031	0,167667	-0,460454	-0,161048	0,355306
Argentina	-0,297174	0,190883	0,884138	0,248249	-0,052183	0,892656	0,324347	-0,102589	0,916765	-0,291383	0,412317	-0,784264
Ecuador	-0,530656	0,206737	-0,394717	0,569424	-0,151401	-0,328128	0,214939	-0,587164	-0,284671	-0,532033	0,046700	0,270350
Perú	-0,606076	-0,129639	-0,158563	0,449432	-0,465889	-0,212453	0,042927	-0,666739	-0,026216	-0,545534	-0,173788	-0,082067

Las componentes principales, también mostraremos las primeras tres para cada matriz:

	5%			10%			15%			20%		
	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3
1991	3,626683	0,263291	-0,407144	-2,489497	2,449398	-0,072293	0,905144	3,023943	-0,016483	3,909336	0,095974	-0,020289
1992	3,032592	1,160975	-0,442228	-1,927845	2,120317	-0,348764	-0,663319	2,767307	-0,977592	3,343545	0,949753	0,920148
1993	-1,132140	0,086053	-1,795388	0,810795	-0,210146	-1,818897	0,724626	-1,600365	-0,008707	-2,434962	0,450429	0,736078
1994	-1,512373	-0,625419	-2,220552	1,117358	-1,296318	-2,369615	-1,163878	-2,502403	-2,024493	-1,855701	-1,515407	1,851160
1995	-1,745381	-0,282198	-0,885654	1,381125	-1,174559	-0,919216	-0,215698	-1,921839	-0,729780	-1,990789	-0,929030	0,371490
1996	-1,997177	-2,132116	1,012304	0,235342	-2,977362	1,306279	-1,723843	-1,869548	1,611287	-1,986335	-1,057800	-0,981527
1997	-0,240878	-3,364454	0,089671	-1,910353	-2,942963	0,031558	-3,516666	-0,476277	0,508840	0,666910	-2,492531	-0,338078
1998	1,980866	-0,700421	-0,134152	-1,940659	0,738460	-0,528460	-1,407104	1,397469	0,112845	2,111362	-1,015715	-0,105872
1999	0,718712	-0,768679	-0,033159	-1,104702	-0,651665	-0,268769	-1,055183	1,677667	-0,344223	-0,196218	-1,057039	0,319748
2000	0,508175	-0,667093	0,086340	-0,686965	-0,114670	-0,184516	-0,524893	-0,289411	-0,658343	0,741817	-1,354116	-0,385519
2001	-0,765054	-0,670775	1,244572	-0,082201	-1,047051	1,410679	-0,507684	-0,153263	1,302952	-0,422449	0,478298	-0,688538
2002	0,299760	-0,232956	0,617262	-0,350216	0,114220	0,506996	0,436070	0,731504	-0,014041	-0,291849	-0,579170	-0,794638
2003	-0,254661	0,122275	1,544169	0,223698	-0,038841	1,654370	0,223500	-0,029584	1,644355	-0,330933	0,272925	-1,572314
2004	1,294978	-0,177448	0,772776	-0,780737	0,609152	0,780615	-0,280835	1,211849	0,365183	0,992577	0,037467	-0,690897
2005	0,306052	-1,030583	-0,215734	-0,878562	-0,741560	-0,325897	-1,569001	-0,105523	-0,205091	-0,247342	-1,421963	0,378993
2006	-1,238409	2,563463	0,264703	2,800444	1,375903	0,761932	2,927646	-0,756923	0,029523	-0,779641	2,537846	-0,097946
2007	-1,156070	1,694894	0,372717	2,116294	0,660415	0,953951	1,987492	-0,832517	0,339302	-1,256976	1,364915	-0,119585
2008	-0,216583	1,230810	0,460000	0,404850	1,115499	0,643000	1,798624	0,939959	-0,232576	-0,246886	2,023793	1,008219
2009	-0,290754	1,324339	-1,238356	1,024160	0,863840	-1,133275	1,043013	-0,462783	-1,578681	0,947230	0,911045	1,060168
2010	-1,218338	2,206041	0,907852	2,037671	1,147930	-0,079680	2,581990	-0,749264	0,875722	-0,672694	2,300328	-0,850800

4. Comparaciones

1. Poder descriptivo en los dos primeros ejes
   El poder descriptivo de las dos primeras componentes para los tres métodos y las matrices generadas con el 5,10,15 y 20 % de datos faltantes se resume en la siguiente tabla:

		Nipals				ACP-EM			
	ACP completo	5%	10%	15%	20%	5%	10%	15%	20%
Poder descriptivo	0,691598	0,694759	0,670694	0,754439	0,762475	0,693219	0,682630	0,760823	0,758534

2. Valores propios
   La comparación de los valores propios se puede ver en la siguiente tabla:

	%NA	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6
ACP	Completa	2,193409	1,956178	0,903879	0,511947	0,285441	0,149146
Nipals	5%	2,479591	1,957416	0,941893	0,588701	0,292620	0,126182
	10%	2,156179	1,949568	1,162729	0,474341	0,271287	0,107534
	15%	2,754153	2,018916	0,874552	0,361227	0,172561	0,145236
	20%	3,010799	1,853808	0,758905	0,476487	0,234355	0,045666
ACP-EM	5%	2,235339	1,923973	0,904790	0,481629	0,288574	0,165697
	10%	2,106891	1,988887	1,044122	0,429413	0,295421	0,135266
	15%	2,422113	2,142823	0,850670	0,360214	0,149434	0,074747
	20%	2,712656	1,838548	0,669018	0,460891	0,226887	0,092000

3. Vectores propios
   La comparación de los dos primeros vectores propios se puede ver en la siguiente tabla:

ACP		NIPALS								ACP-EM							
Completa		5%		10%		15%		20%		5%		10%		15%		20%	
λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2
-0,3267	0,5709	0,4297	0,4628	0,4900	0,3376	0,5412	0,2266	0,4532	0,4374	-0,3341	0,5622	0,5909	0,2414	0,6015	-0,1149	-0,2683	0,6147
-0,1589	-0,6033	0,0728	-0,6307	-0,2221	-0,6247	-0,3769	-0,4500	0,0313	-0,6803	-0,1908	-0,6021	-0,2470	-0,5588	-0,5529	-0,1566	-0,2246	-0,6276
-0,3382	-0,4636	0,1905	-0,5575	0,0558	-0,5778	-0,1800	-0,6036	0,3986	-0,2914	-0,3387	-0,4747	-0,0448	-0,6219	-0,4233	-0,4030	-0,4605	-0,1610
-0,2899	0,2066	0,3079	0,1202	0,2353	-0,0102	0,2532	0,1750	0,5891	0,2154	-0,2972	0,1909	0,2482	-0,0522	0,3243	-0,1026	-0,2914	0,4123
-0,5459	0,1756	0,6148	0,0153	0,6033	-0,0476	0,4520	-0,3914	0,3947	-0,2170	-0,5307	0,2067	0,5694	-0,1514	0,2149	-0,5872	-0,5320	0,0467
-0,6096	-0,1470	0,5486	-0,2503	0,5368	-0,3995	0,5140	-0,4450	0,3632	-0,4092	-0,6061	-0,1296	0,4494	-0,4659	0,0429	-0,6667	-0,5455	-0,1738

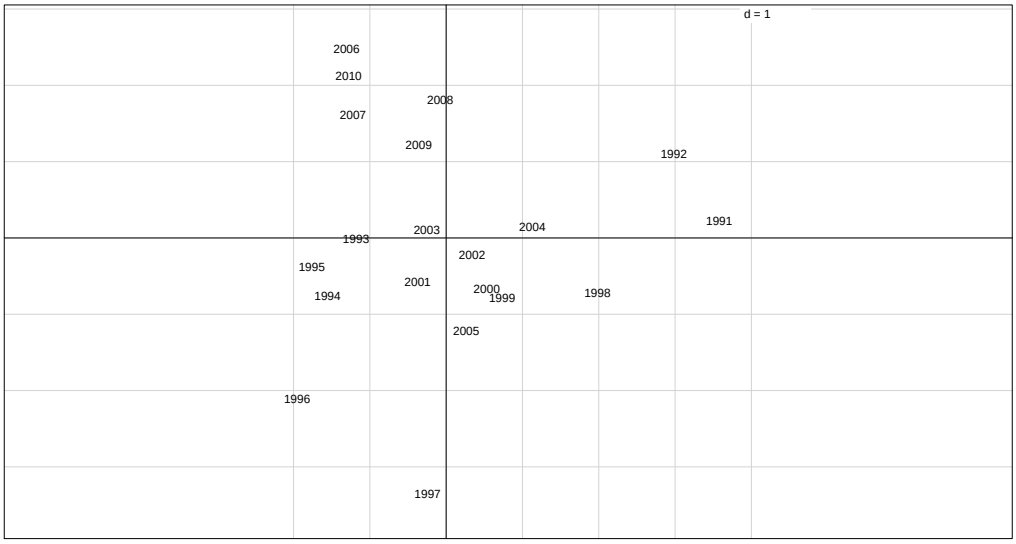
4. Componentes principales
   La comparación de las dos primeras componentes principales se puede ver en la siguiente tabla:

	ACP		NIPALS								ACP-EM							
	Completa		5%		10%		15%		20%		5%		10%		15%		20%	
	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2
1991	-3,5794	0,2200	-3,3856	0,9622	-2,6675	2,0408	-1,6558	2,6994	-4,0501	1,0885	3,6267	0,2633	-2,4895	2,4494	0,9051	3,0239	3,9093	0,0960
1992	-2,9842	1,1042	-3,1706	1,6391	-2,4190	1,8565	-2,3261	1,5794	-2,5280	1,9728	3,0326	1,1610	-1,9278	2,1203	-0,6633	2,7673	3,3435	0,9498
1993	1,1801	-0,0116	1,1035	-0,2372	0,9986	-0,0205	1,4924	-0,9340	3,4669	0,3432	-1,1321	0,0861	0,8108	-0,2101	0,7246	-1,6004	-2,4350	0,4504
1994	1,5534	-0,7594	1,3998	-0,9807	1,4221	-1,1181	0,9168	-3,0839	0,4846	-2,0382	-1,5124	-0,6254	1,1174	-1,2963	-1,1639	-2,5024	-1,8557	-1,5154
1995	1,7594	-0,3827	1,7231	-0,6992	1,5813	-0,9935	0,5819	-1,7072	0,8555	-1,6717	-1,7454	-0,2822	1,3811	-1,1746	-0,2157	-1,9218	-1,9908	-0,9290
1996	1,9519	-2,1097	1,3496	-2,4721	0,6413	-2,6981	-1,1948	-1,9243	1,1515	-1,7530	-1,9972	-2,1321	0,2353	-2,9774	-1,7238	-1,8695	-1,9863	-1,0578
1997	-0,2414	-3,3571	-1,2029	-3,2540	-1,2744	-2,8873	-3,4599	-1,5759	-1,8549	-2,0481	-0,2409	-3,3645	-1,9104	-2,9430	-3,5167	-0,4763	0,6669	-2,4925
1998	-1,9834	-0,7162	-2,0625	-0,2430	-1,9202	0,4173	-1,7981	0,3504	-2,1112	-0,1972	1,9809	-0,7004	-1,9407	0,7385	-1,4071	1,3975	2,1114	-1,0157
1999	-0,7344	-0,7829	-0,9223	-0,5250	-0,9308	-0,9669	-1,6090	0,8790	-0,6793	-0,9532	0,7187	-0,7687	-1,1047	-0,6517	-1,0552	1,6777	-0,1962	-1,0570
2000	-0,5323	-0,6705	-0,7079	-0,4707	-0,6774	-0,2709	-0,0937	-0,6095	-0,8586	-0,9625	0,5082	-0,6671	-0,6870	-0,1147	-0,5249	-0,2894	0,7418	-1,3541
2001	0,3726	-0,5713	0,4496	-0,7667	-0,0653	-1,1318	-0,3231	-0,3416	0,8221	0,0969	-0,7651	-0,6708	-0,0822	-1,0471	-0,5077	-0,1533	-0,4224	0,4783
2002	-0,3406	-0,2237	-0,3126	-0,1660	-0,4579	-0,0056	-0,1485	0,7561	-0,0079	-0,7765	0,2998	-0,2330	-0,3502	0,1142	0,4361	0,7315	-0,2918	-0,5792
2003	0,2531	0,1018	0,2576	0,0667	0,2365	-0,0240	0,1490	0,1930	0,7332	0,0059	-0,2547	0,1223	0,2237	-0,0388	0,2235	-0,0296	-0,3309	0,2729
2004	-1,1314	0,1457	-1,3924	0,0356	-0,9208	0,5905	-0,8969	0,8677	-0,5501	0,2860	1,2950	-0,1774	-0,7807	0,6092	-0,2808	1,2118	0,9926	0,0375
2005	-0,2640	-1,2144	-0,5515	-1,1371	-0,6731	-0,8069	-0,9959	-1,1204	-0,2732	-1,5794	0,3061	-1,0306	-0,8786	-0,7416	-1,5690	-0,1055	-0,2473	-1,4220
2006	1,3042	2,4709	1,6838	2,1907	2,4390	1,6446	2,8018	0,9293	1,5050	1,8021	-1,2384	2,5635	2,8004	1,3759	2,9276	-0,7569	-0,7796	2,5378
2007	1,2198	1,6157	1,4145	1,3370	1,9346	0,9663	2,0178	0,3800	1,7830	0,6126	-1,1561	1,6949	2,1163	0,6604	1,9875	-0,8325	-1,2570	1,3649
2008	0,0769	1,8051	0,4484	1,2703	0,1254	1,2658	0,5180	1,8514	1,0222	1,6998	-0,2166	1,2308	0,4048	1,1155	1,7986	0,9400	-0,2469	2,0238
2009	0,3592	1,2125	0,5882	1,1456	0,8757	1,0299	1,2347	0,1050	-0,4574	1,2066	-0,2908	1,3243	1,0242	0,8638	1,0430	-0,4628	0,9472	0,9110
2010	1,2776	2,1234	1,6074	1,8407	1,8405	1,3459	2,4253	0,8044	1,6471	1,6676	-1,2183	2,2060	2,0377	1,1479	2,5820	-0,7493	-0,6727	2,3003

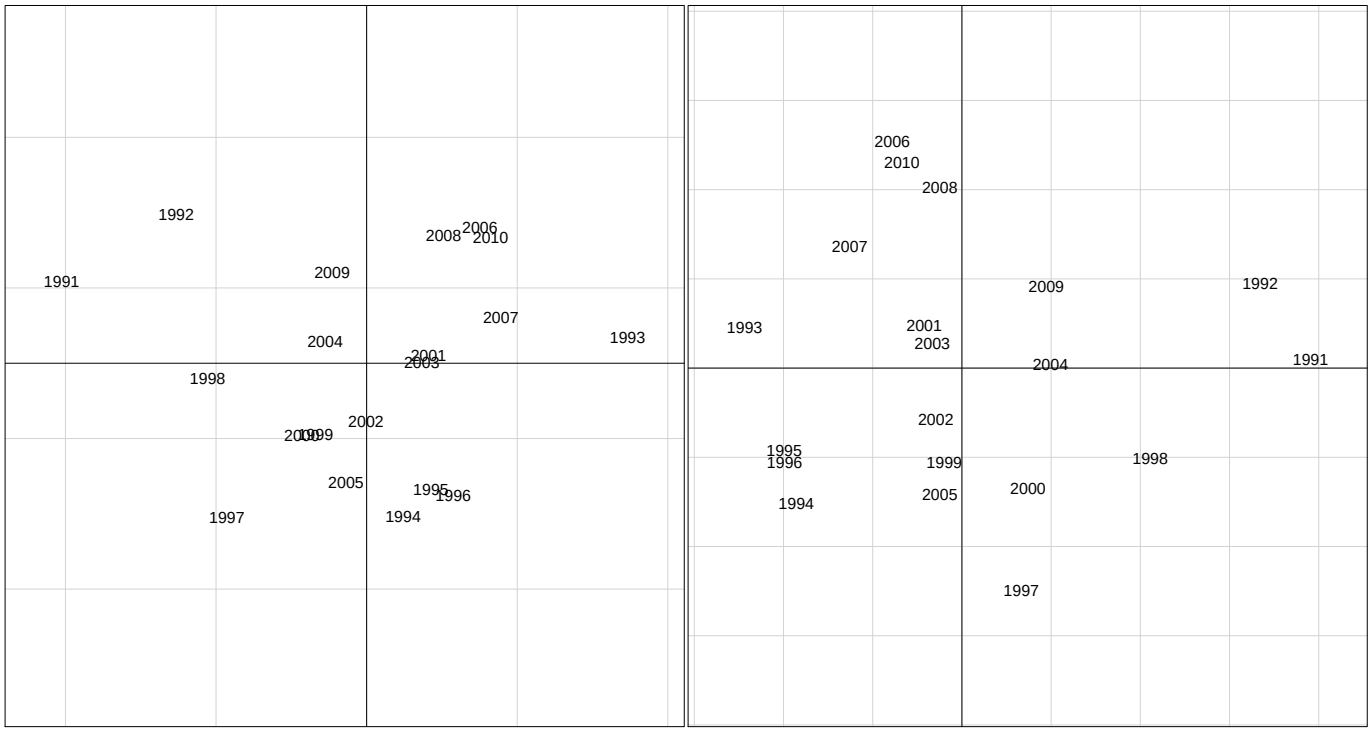
5. Correlación entre la componente 1 completo y faltantes
   Para comparar estas correlaciones, se obtendrá el valor absoluto de la correlación entre la componente 1 de la matriz completa y la componente 1 de cada una de las matrices incompletas por NIPLALS y por ACP-EM. Se sacará el valor absoluto ya que por cuestiones del código, los signos entre una componente y otra pueden ser iguales o inversos.

	Nipals				ACP-EM			
	5%	10%	15%	20%	5%	10%	15%	20%
Correlación Comp 1	0,966200	0,904884	0,620512	0,851966	0,997426	0,821209	0,163642	0,936184

6. Estructura factorial en la nube de individuos
   Para comparar estas estructuras, solo se comparara el ACP con datos completos con el ACP-EM y el NIPALs para la matriz con más datos faltantes (20 % de datos faltantes)
   La nube de individuos correspondiente al ACP de la matriz de datos completos es

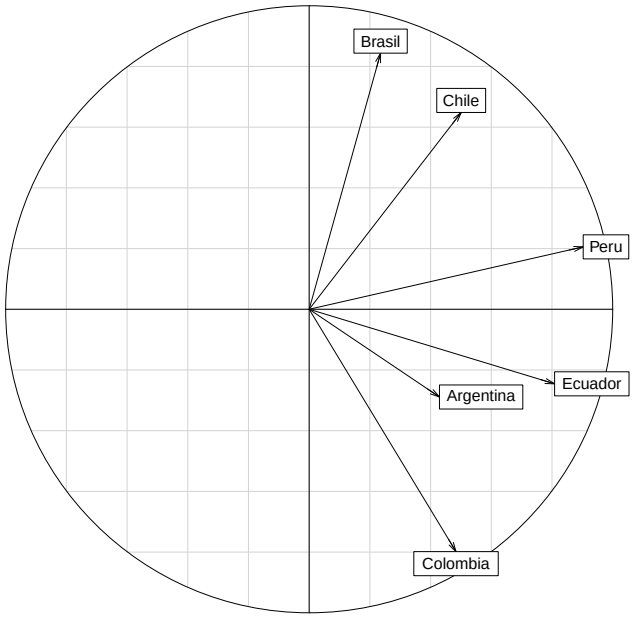


Las nubes de individuos para el NIPALS y el ACP-EM con una matriz del 20 % de datos faltantes es respectivamente

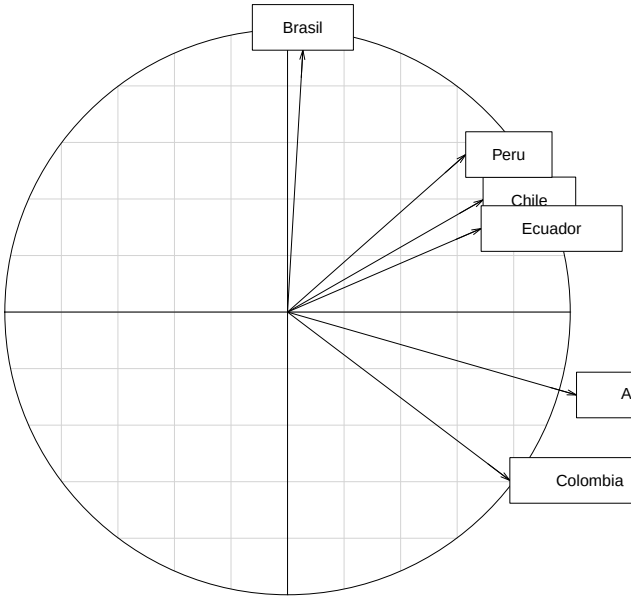


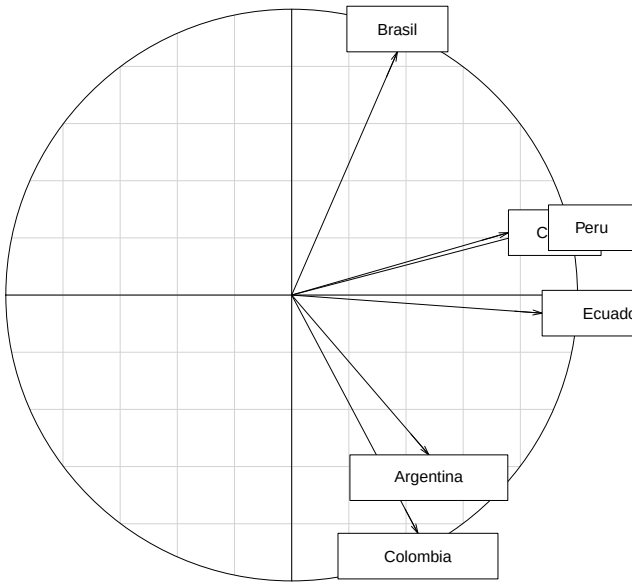
7. Estructura factorial en la nube de variables
   Para comparar estas estructuras, solo se comparara el ACP con datos completos con el ACP-EM y el NIPALs para la matriz con más datos faltantes (20 % de datos faltantes)

   La nube de variables correspondiente al ACP de la matriz de datos completos es



Las nubes de variables para el NIPALS y el ACP-EM con una matriz del 20 % de datos faltantes es respectivamente





8. Ortogonalidad en las dos primeras componentes y ortonormalidad en los dos primeros vectores propios
La ortogonalidad en las dos primeras componentes se puede evidenciar en la siguiente tabla, donde se hizo el producto punto entre la componente 1 y la componente 2

		Nipals				ACP-EM			
	ACP completo	5%	10%	15%	20%	5%	10%	15%	20%
Ortogonalidad	0	0,686668	-1,395858	-0,819374	1,147813	0	0	0	0

La ortonormalidad en los dos primeros vectores propios se puede ver en la siguiente tabla, donde se obtuvo la norma de cada uno, y posteriormente se hizo su producto punto.

	ACP		NIPALS								ACP-EM							
	Completa		5%		10%		15%		20%		5%		10%		15%		20%	
	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2	λ1	λ2
Norma	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ortogonalidad	0		-0,044171		0,026357		0,039479		-0,046576		0		0		0		0	

9. Imputación
   Las imputaciones obtenidas con el algoritmo NIPALS y el algoritmo EM-PCA para la matriz generada con el 20 % de datos faltantes es respectivamente

Año	Colombia	Brasil	Chile	Argentina	Ecuador	Peru
1991	38,2	20,1	40,1	22,6	6,5	69,1
1992	49,3	18,1	52,9	29,2	46,2	103,8
1993	111,4	87,2	154,8	41,7	177,8	128,9
1994	114,1	88,5	133,1	8,4	58,5	57,6
1995	119,9	97,6	93,0	24,5	86,8	63,7
1996	90,8	110,4	124,6	46,5	80,8	58,7
1997	59,9	82,4	89,3	33,3	15,8	28,9
1998	56,2	36,0	77,9	38,2	8,3	64,2
1999	93,8	65,5	87,2	31,4	34,7	68,6
2000	75,2	67,5	112,1	41,8	2,2	72,0
2001	82,4	72,4	98,6	43,7	95,8	100,1
2002	107,1	72,7	100,4	48,1	22,6	90,1
2003	73,3	83,6	69,9	48,8	111,3	88,8
2004	84,5	44,6	92,0	48,1	38,5	99,2
2005	63,9	77,1	138,2	34,6	62,8	37,7
2006	138,4	43,5	63,8	35,0	97,6	176,2
2007	111,9	63,1	111,9	36,7	124,3	127,8
2008	95,1	21,2	127,2	31,6	119,0	141,9
2009	104,0	11,9	92,7	25,5	64,4	124,3
2010	112,4	60,6	60,1	43,6	112,0	164,6

Año	Colombia	Brasil	Chile	Argentina	Ecuador	Peru
1991	44,4	27,2	45,6	25,7	6,0	14,1
1992	75,5	11,8	58,9	22,6	17,8	14,4
1993	106,8	50,6	128,3	47,5	119,4	118,5
1994	80,3	70,6	102,2	15,2	154,9	146,1
1995	81,6	82,3	89,0	35,1	169,4	129,8
1996	76,4	97,4	99,9	51,0	109,7	129,0
1997	32,0	89,5	84,0	25,4	33,4	110,2
1998	55,5	63,1	66,3	24,4	9,7	66,7
1999	74,3	72,6	86,9	28,1	73,1	110,7
2000	62,8	76,2	80,1	29,5	11,8	110,2
2001	87,1	52,4	89,3	51,5	63,1	99,3
2002	89,3	89,5	72,4	40,3	75,8	102,0
2003	70,2	63,1	80,1	60,5	76,3	90,1
2004	90,1	66,3	70,5	39,1	20,0	79,5
2005	60,5	75,3	107,2	31,1	63,4	92,7
2006	140,3	20,0	63,4	50,2	101,2	120,8
2007	120,4	45,4	89,0	51,0	103,1	107,2
2008	130,2	17,2	103,1	42,5	66,7	70,8
2009	110,1	31,1	75,6	25,7	52,9	76,3
2010	120,2	24,4	68,9	60,3	88,3	110,8

10. RV de scouffier
    En la siguiente tabla podemos ver el coeficiente RV de scouffier para cada matriz con datos faltantes imputada por los dos métodos (NIPALS y EM-PCA)

	NIPALS				ACP-EM			
	5%	10%	15%	20%	5%	10%	15%	20%
Coeficiente RV	0.8887252	0.8370876	0.6765642	0.6866648	0.9962964	0.9840701	0.9245709	0.8500526

11. Indice en presencia de datos faltantes
    Se mostraran tres indices, el indice original llevando a cabo el ACP de la matriz completa, y los dos indices correspondientes a los métodos NIPALS y EM-PCA a la matriz con 20 % de datos faltantes.

    El indice que obtenemos del ACP con datos completos es:

$$I = 0.4837847Colombia + 0.2352724Brasil + 0.5008368Chile + 0.4292863Argentina + 0.8085448Ecuador$$
$$+0.9028508Peru$$

    El indice que obtenemos con el NIPALS para la matriz con el 20 % de datos faltantes es:

$$I = 0.78635001Colombia + 0.05424095Brasil + 0.69170650Chile + 1.02219932Argentina + 0.68480831Ecuador$$
$$+0.63023740Peru$$

    El indice que obtenemos con el EM-PCA para la matriz con el 20 % de datos faltantes es:

$$I = 0.4418657Colombia + 0.3698878Brasil + 0.7583750Chile + 0.4799118Argentina + 0.8762652Ecuador$$
$$+0.89850185Peru$$

5. Conclusiones

- Con respecto a la comparación del poder descriptivo de los dos primeros ejes, ambos métodos tienen la incongruencia de que entre más datos faltantes tiene la matriz, mayor poder descriptivo tienen las dos primeras componentes.
- Con respecto a la comparación de los valores propios, se pudo observar en la tabla, que en las matrices del 5 % y 10 %, ambos métodos generan valores propios parecidos a los del ACP con la matriz completa, de ahí en adelante, los valores propios muestran una diferencia mayor e ambos métodos.
- En cuanto a los vectores propios, en general son más parecidos o más cercanos los del método EM-PCA que los del método NIPALS, con respecto a los vectores propios del ACP con la matriz completa.
- En cuanto a la comparación de la componente 1 con los datos completos y la componente 1 para cada matriz con datos faltantes por los dos métodos, ambos métodos presentan una alta correlación en las matrices con el 5,10 y 20 %, con respecto a la matriz con el 15 % de datos faltantes, se comporta mejor el NIPALS, en cuanto a la primera componente.
- Observando la estructura factorial de la nube de individuos, comparamos los dos métodos aplicándolos a la matriz del 20 % de datos faltantes, y se puede observar que el método EM-PCA nos da una mejor aproximación a la nube con datos completos.
- Con respecto a la nube de variables, también se compararon las estructuras del ACP para la matriz completa, y los dos métodos para la matriz con el 20 % de NA's. Podemos observar que el método EM-PCA nos genera mejores resultados, ya que mantiene casi la misma estructura en la nube de variables que el ACP para datos completos.
- Con respecto a la ortogonalidad en las componentes, en la tabla se puede observar que las primeras dos componentes mantienen la ortogonalidad para las 4 matrices con datos faltantes en el método EM-PCA, todo lo contrario ocurre con el NIPALS, donde se observa que en ninguna de las 4 matrices mantiene la ortogonalidad en dichas componentes.
- Con respecto a la ortonormalidad en los dos primeros vectores propios, todos son de norma 1 en ambos algoritmos para todas las matrices, pero la ortogonalidad no se cumple en ninguna de las matrices por el método NIPALS.
- Observando las matrices imputadas con el 20 % de datos faltantes por los dos algoritmos, se ve claramente que es mejor la imputación del método EM-PCA, ya que este mantiene los valores originales y solo estima los faltantes, en cambio el algoritmo NIPALS en sus iteraciones va modificando no solo los faltantes sino también todos los demás, por lo que al final se obtienen valores distintos en toda la matriz imputada.
- Viendo la tabla del coeficiente RV para la imputación por ambos métodos para las matrices con los valores faltantes generados, se pued eobservar que en todos los porcentajes, la correlación entre las matrices imputadas con la original es mayor en el método EM-PCA, la razón es la misma dada en el item anterior.
- Finalmente, en cuanto a los indices construidos por los dos métodos para la matriz con el 20 % de datos faltantes, vemos que los coeficientes de cada variable son más parecidos en el método EM-PCA que el los obtenidos por el método NIPALS. Por lo tanto el indice en general, va a ser más cercano el del método EM-PCA que el del NIPALS.

Teniendo en cuenta todas las conclusiones dadas anteriormente, podemos concluir que para las 4 matrices generadas con los datos faltantes, tiene mejor comportamiento en todos los aspectos el algoritmo EM-PCA que el algoritmo NIPALS.

Referencias

Gonzales, V. M. (2014), ANÁLISIS CONJUNTO DE MÚLTIPLES TABLAS DE DATOS MIXTOS MEDIANTE PLS, PhD thesis, UNIVERSITAT POLITÉCNICA DE CATALUNYA, Barcelona.

Kassambara, A. & Mundt, F. (2017), *factoextra: Extract and Visualize the Results of Multivariate Data Analyses*. R package version 1.0.5.
*https://CRAN.R-project.org/package=factoextra

Lê, S., Josse, J. & Husson, F. (2008), 'FactoMineR: A package for multivariate analysis', *Journal of Statistical Software* **25**(1), 1–18.

Ludovic Lebart, Alain Morineau, M. P. (1995), *Statistique exploratoire multidimensionnelle*, Dunod, Paris.

Ochoa, A. F. (2018), Análisis de correspondencias múltiples en presencia de datos faltantes: el principio de datos disponibles del algoritmo nipals (acmpdd), Master's thesis, Universidad del Valle.

R Core Team (2017), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
*https://www.R-project.org/

Wickham, H. (2009), *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*, Springer-Verlag New York.
*http://ggplot2.org

Wickham, H. & Bryan, J. (2018), *readxl: Read Excel Files*. R package version 1.1.0.
*https://CRAN.R-project.org/package=readxl

Zelaya, J. T. (n.d.), *ANÁLISIS MULTIVARIADO DE DATOS*, Universidad de Costa Rica.