Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Estadística
Programa Académico de Estadística
Análisis Multivariante
Cali, septiembre de 2018

Laboratorio 2: Análisis de Componentes Principales

Kevin Steven García[a], Alejandro Vargas[b], Alejandro Soto[c]

1. Introducción

En este informe se llevará a cabo el análisis de componente principales a una base de datos correspondiente a la "Encuesta de Presupuestos Familiares del año 1990/91" en España. esta se cuenta con 51 observaciones y 9 variables. Las observaciones son las provincias españolas más Ceuta y Melilla, que aparecen unidas como una única provincia, y las variables son:$X_1=$ alimentación, $X_2=$ vestido y calzado, $X_3=$ vivienda, $X_4=$ moviliario doméstico, $X_5=$ gastos sanitarios, $X_6=$ transporte, $X_7=$ enseñanza y cultura, $X_8=$ turismo y ocio, $X_9=$ otros gastos. En este análisis se tomará en cuenta conceptos como el análisis exploratorio de los datos, la nube de individuos y de variables (circulo de correlaciones), la representación simultanea, la construcción e interpretación del indice, los cosenos cuadrados y las contribuciones y las relaciones de transición.

2. Análisis exploratorio

En el análisis exploratorio vamos a realizar un análisis descriptivo y gráfico para cada variable y se obtendrá la matriz de correlaciones para posteriormente realizar comparaciones con los resultados del ACP.

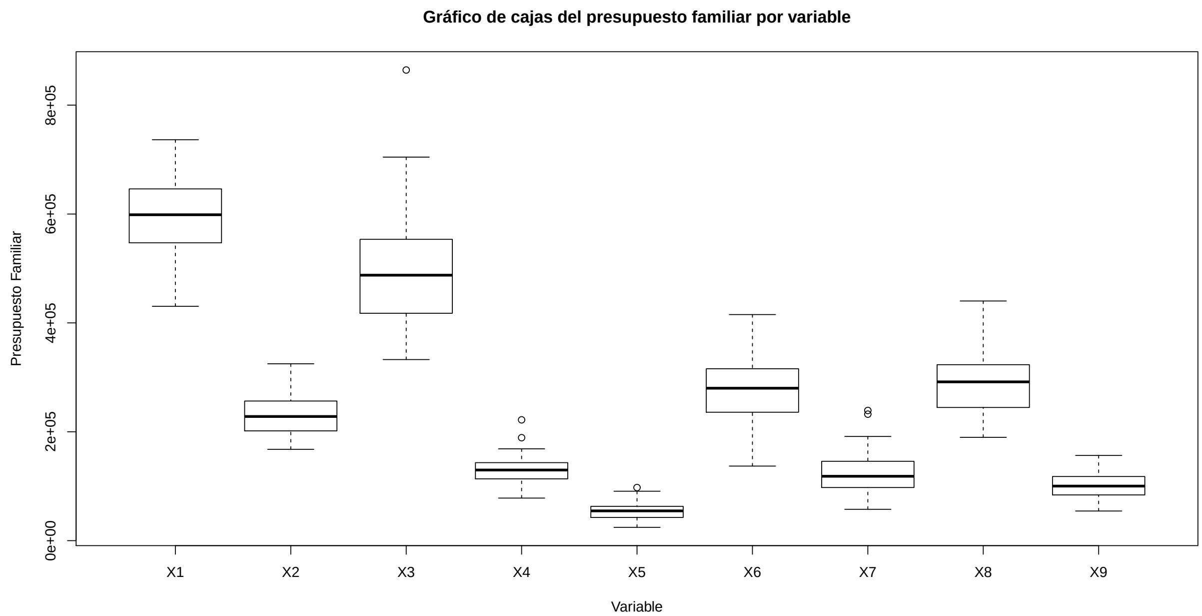
- Estadísticas descriptivas

Descriptivas	Alimentación	Vestido y Calzado	Vivienda	Moviliario doméstico	Gastos sanitarios	Transporte	Enseñanza y cultura	Turismo y ocio	Otros gastos
Minimo	430442	167814	332662	78217	24476	136992	57607	189811	54442
1st. Cuartil	547131	201655	417691	113550	42610	235941	97603	244666	84019
Mediana	598669	228072	487651	129768	54684	280023	118269	291708	100255
Media	600781	232043	499956	129688	55104	278112	125310	294558	102225
3rd. Cuartil	646183	256498	553526	143317	63087	315771	145831	323239	117851
Máximo	736441	324877	864553	221954	97595	415313	239187	440275	156493
Desviación Est.	66004.47	37922.05	107438	26666.27	16702.17	60014.13	40173.34	60612.32	23548.8

En esta tabla podemos ver las estadísticas descriptivas de los presupuestos familiares de cada provincia española para las variables medidas. Se puede observar que en cuanto a los promedios, como es de esperarse, las provincias destinan en general, mas dinero de su presupuesto en la alimentación, con un promedio de 600781 euros por provincia para las familias, seguido de los presupuestos para vivienda, que son en promedio de 499956 euros por provincia. En cambio, a lo que menos destinan dinero las provincias es en gastos sanitarios, con un promedio de 55104 euros. El presupuesto máximo que tuvo una provincia fue para gastos familiares en vivienda, con un presupuesto destinado de 864553 euros y el presupuesto mínimo, fue precisamente para gastos sanitarios, con un presupuesto de solo 24476. En cuanto a la variación

[a]Código: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co
[b]Código: 1525953. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co
[c]Código: 1532457. E-mail: asotomurillo@gmail.com

de los presupuestos entre provincias. Las provincias tienen presupuestos menos variables en los gastos sanitarios, con una desviación estándar de solo 16702.17 euros, lo contrario sucede con los gastos en vivienda, donde cada provincia tiene gastos o presupuestos muy variables en este aspecto, presenta una desviación estándar de 107438 euros.



En esta gráfica podemos confirmar las interpretaciones dadas anteriormente. Se puede observar que en promedio los presupuestos de las provincias para los gastos familiares en alimentación (X_1) y vivienda (X_3) son mucho mayores que el resto. En los presupuestos familiares para vivienda, vemos un punto atípico muy alto, que corresponde a una provincia que tiene un presupuestos para ello de 864553 euros (fue el mayor presupuesto de todos). Podemos observar que los presupuestos para gastos familiares correspondientes a X_2 (Vestido y calzado),X_6 (Transporte) y X_8 (Turismo y ocio) se comportan de manera parecida en las provincias en cuanto a su promedio y a su variabilidad, es un poco menor y menos variable los presupuestos familiares en vestido y calzado. Finalmente, los menores presupuestos de las provincias corresponden a las variables X_4,X_5,X_7 y X_8, donde evidenciamos en todas estas variables (excepto X_9) algunos puntos atípicos (no muy graves) por encima.

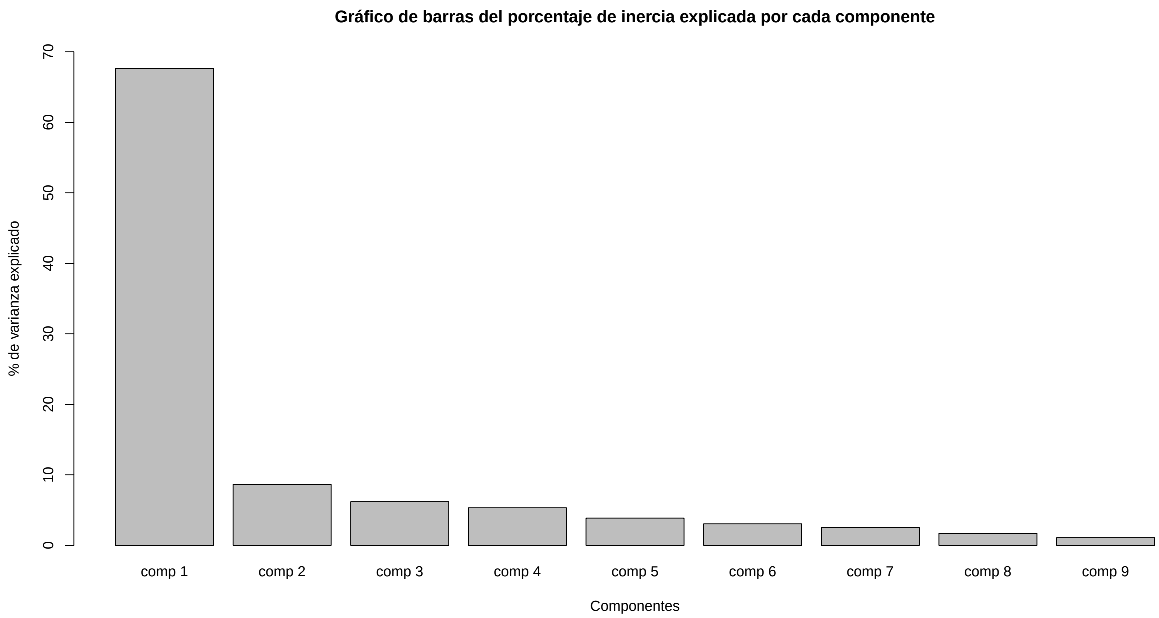
- Matriz de correlaciones

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X1	1	0.531518	0.475464	0.516663	0.474304	0.527562	0.588739	0.438100	0.483185
X2	0.531518	1	0.549165	0.633367	0.505310	0.587491	0.545900	0.462608	0.532391
X3	0.475464	0.549165	1	0.698918	0.670385	0.691356	0.833379	0.810211	0.541736
X4	0.516663	0.633367	0.698918	1	0.674083	0.727259	0.755607	0.756133	0.635271
X5	0.474304	0.505311	0.670385	0.674083	1	0.729750	0.812126	0.705834	0.590650
X6	0.527562	0.587492	0.691356	0.727259	0.729750	1	0.744703	0.726837	0.713231
X7	0.588739	0.545900	0.833379	0.755607	0.812126	0.744703	1	0.844991	0.562388
X8	0.438100	0.462608	0.810211	0.756133	0.705834	0.726837	0.844991	1	0.582652
X9	0.483185	0.532391	0.541736	0.635271	0.590650	0.713231	0.562388	0.582652	1

En la matriz de correlaciones podemos ver correlaciones altas en las variables X_3 con X_7 y X_8 con 0.8334 y 0.8102 respectivamente. También vemos una correlación alta entre X_5 y X_7 con 0.8121 y entre X_7 y X_8 con 0.845. Se espera que esto se vea evidenciado en la nube de las variables, es decir, que la representación de estas variables con altas correlaciones sea muy cercana en el gráfico. Si no somos tan estrictos en las correlaciones, se podría decir que todas las variables se correlacionan fuertemente, ya que la mínima correlación entre las variables es la de X_1 y X_8 con una correlación de 0.4381. Entonces podemos afirmar que todas las variables están correlacionadas positivamente, por lo que esperamos que en la nube de variables, todas tengan el mismo sentido o signo, y no estén tan alejadas.

3. Porcentaje de Inercia y ejes seleccionados

	Valor propio	Porcentaje de varianza	Porcentaje de varianza acumulada
comp 1	6.08732572	67.636952	67.63695
comp 2	0.77720888	8.635654	76.27261
comp 3	0.55666880	6.185209	82.45782
comp 4	0.47914455	5.323828	87.78164
comp 5	0.34768511	3.863168	91.64481
comp 6	0.27435674	3.048408	94.69322
comp 7	0.22712456	2.523606	97.21683
comp 8	0.15329446	1.703272	98.92010
comp 9	0.09719117	1.079902	100.00000



En la tabla y la gráfica anterior, vemos el porcentaje de varianza explicado por cada componente, observamos que con las primeras dos componentes, se acumula un 76.27 % de varianza explicada, y el aumento de la componente 3, no es muy significativo, por lo cuál optamos por utilizar las dos primeras componentes.

4. Resultados ACP

4.1. Valores propios

Los valores propios obtenidos fueron

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
6.08732572	0.77720888	0.55666880	0.47914455	0.34768511	0.27435674	0.22712456	0.15329446	0.09719117

4.2. Vectores propios: Variables

Los dos primeros vectores propios para las variables fueron

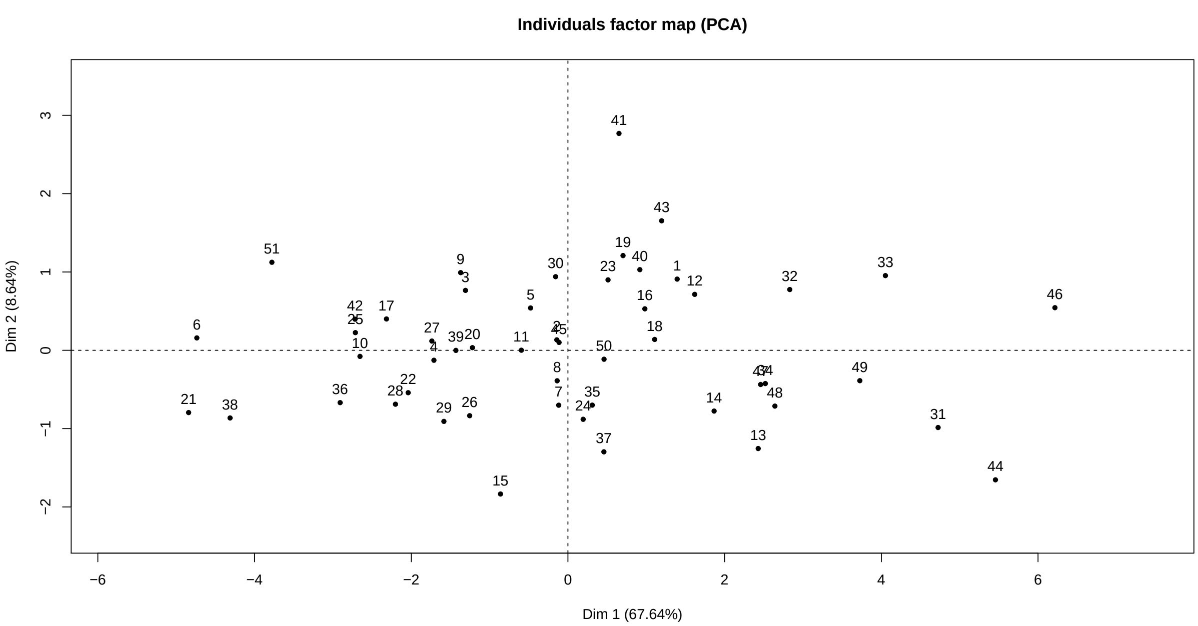
Variable	v1	v2
X_1	0.2695709	0.581576684
X_2	0.2885398	0.535194871
X_3	0.3476300	-0.274191765
X_4	0.3528739	-0.002137995
X_5	0.3410886	-0.199767613
X_6	0.3555715	0.007846322
X_7	0.3705182	-0.229288381
X_8	0.3521639	-0.389951665
X_9	0.3076265	0.235680269

4.3. Componentes: Variables

Las dos primeras componentes para las variables fueron:

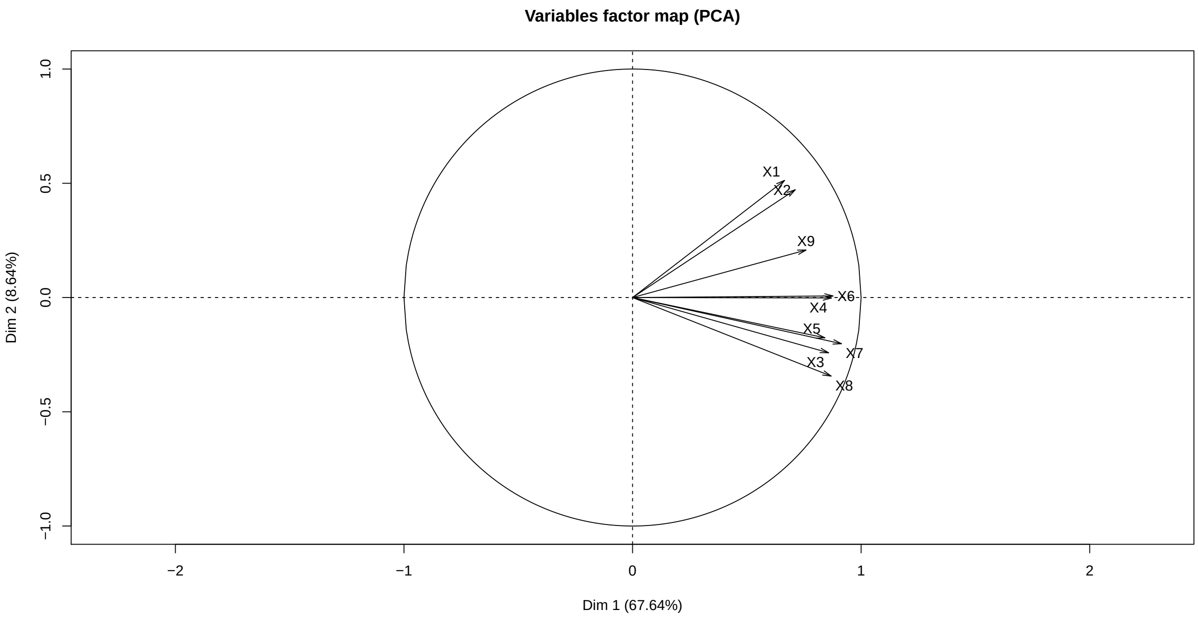
Variable	c1	c2
X_1	0.6650990	0.512714812
X_2	0.7119000	0.471824861
X_3	0.8576904	-0.241725956
X_4	0.8706285	-0.001884845
X_5	0.8415510	-0.176114032
X_6	0.8772839	0.006917274
X_7	0.9141612	-0.202139378
X_8	0.8688766	-0.343779248
X_9	0.7589916	0.207774432

5. Nube de individuos



Sobre esta nube de individuos no se puede dar fácilmente una interpretación clara, ya que son muchos individuos. Lo que se puede evidenciar es que una gran parte de las provincias españolas están muy cercanas en cuanto a los gastos o presupuestos familiares en las 9 variables medidas. Hay excepciones y casos especiales de provincias donde sus gastos fueron muy alejados del resto. Posteriormente se dará una mejor interpretación en la representación simultanea.

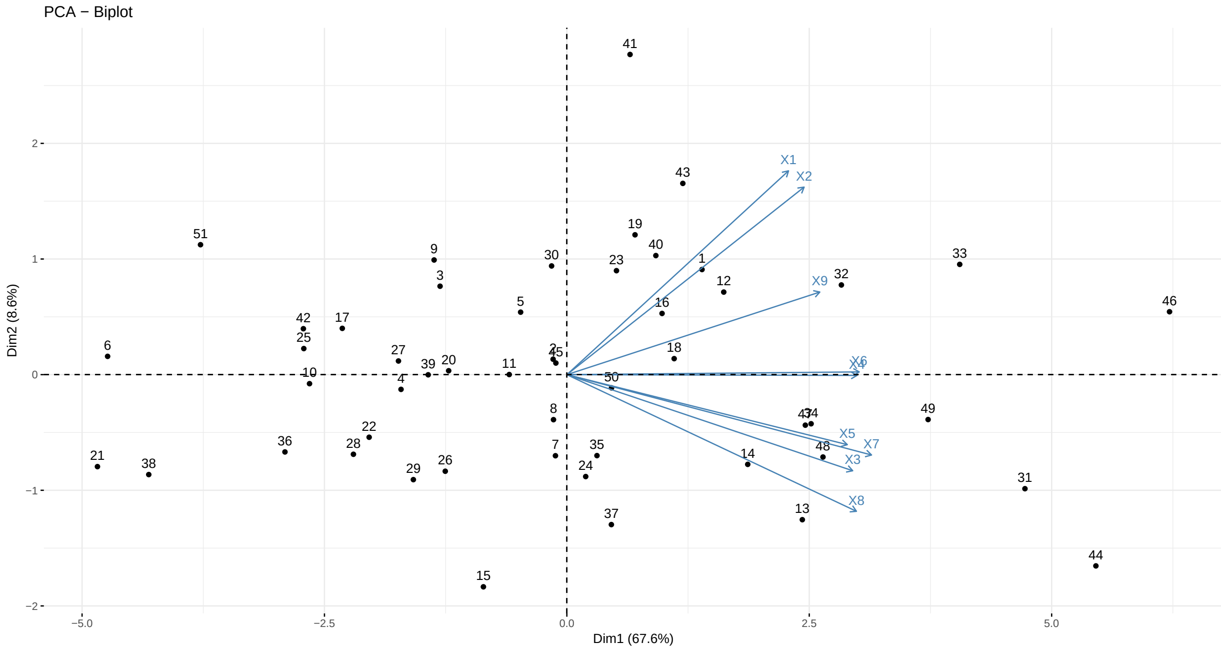
6. Circulo de correlaciones



En esta gráfica que corresponde al circulo de correlaciones, podemos ver que aparentemente todas las 9 variables están bien representadas por estas dos componentes y la mayoría contribuyen de manera similar a la construcción del eje 1, esto se verificara más adelante con los cosenos cuadrados y las contribuciones. Además se corrobora las hipótesis que teníamos inicialmente de la matriz de correlaciones (que todas las variables iban a estar cercanas la una de la otra, y que todas iban a tener el mismo sentido).

7. Representación simultanea

En esta gráfica se puede observar, que hay muchas provincias donde los gastos familiares son muy bajos en varias de las variables medidas, por ejemplo, las provincias 6 (Jaén),21 (Salamanca),38 (Badajoz) y 51 (Ceuta y Melilla) tienen valores muy bajos en casi todas las variables, esto nos dice que las familias que pertenecen a estas provincias, probablemente no tengan tantos recursos para gastar en estos aspectos y se podría analizar la calidad de vida de estas familias, en cambio, hay provincias que tienen altos valores en cuanto al presupuesto familiar en algunas o todas estas variables, como por ejemplo, las provincias 46 (Navarra),44 (Madrid),31 (Barcelona),32 (Gerona),33 (Lérida),49 (Vizcaya), entre otras. Se puede observar que aparecieron provincias importantes como Navarra, Madrid y Barcelona, era de esperarse ya que en estas provincias las familias tienen una mejor calidad de vida en general que las familias de otras provincias, por lo que los presupuestos y los gastos familiares en estas provincias, van a ser mayores en todas las variables.



8. Contribuciones y cosenos cuadrados

Los cosenos cuadrados y las contribuciones de las variables en las tres primeras dimensiones o componentes son:

Variable	Cosenos	Cuadrados	Contribuciones	
	Componente 1	Componente 2	Componente 1	Componente 2
X1	0.4423566	0.2628765	7.266847	33.82314
X2	0.5068016	0.2226187	8.325522	28.64335
X3	0.7356329	0.0584314	12.084665	7.518112
X4	0.7579939	0.0000035	12.452002	0.0004571
X5	0.7082081	0.0310161	11.634141	3.990710
X6	0.7696271	0.00004785	12.643107	0.0061565
X7	0.8356907	0.0408603	13.728371	5.257316
X8	0.7549465	0.1181842	12.401940	15.20623
X9	0.5760683	0.0431702	9.463405	5.554519

En la tabla anterior, con respecto a los cosenos cuadrados. Podemos ver que en la primera componente, la variable X_7 (Enseñanza y cultura) es la que esta mejor representada con un coseno cuadrado de 0.8357 y la variable X_1 (alimentación) es la que menos representada esta por esta componente, con un coseno cuadrado de 0.4423. Pero en general, se podría decir que la mayoría de variables esta bien representada por esta componente. Observando la componente 2, las únicas que están aceptablemente representadas son las variables X_1 y X_2 (Vestido y calzado) con cosenos cuadrados de 0.2629 y 0.2226 respectivamente.

Centrándonos en las contribuciones, observamos que con respecto a la primera componente, como se esperaba (por el circulo de correlaciones), casi todas las variables contribuyen de igual forma a la construcción del primer eje, la que más contribuye es X_7 (Enseñanza y cultura) con una contribución de 13.7284 y la que menos contribuye es X_1 (alimentación) con una contribución de 7.2668. En cuanto a la segunda componente, las variables ya no contribuyen de forma parecida a la construcción del eje 2, las que mas contribuyen son X_1, X_2 y X_8 con contribuciones de 33.82, 28.64 y 15.21 respectivamente.

9. Indice

Para darnos cuenta si se puede realizar el indice, nos debemos fijar en el circulo de correlaciones y observar si se cumple el factor tamaño, es decir, que todas las variables tengan el mismo sentido con respecto al eje 1, esto también se podría ver en los signos del primer vector propio, ya que este define el signo de las coordenadas, si todos los signos del primer vector propio son iguales, podemos construir un indice con la primera componente principal. En este caso, podemos observar que todos los signos del primer vector propio son positivos y en el circulo de correlaciones, que todas las variables van en el mismo sentido con respecto al eje 1, por lo que tenemos lo que se denomina como factor tamaño y se puede realizar la construcción del indice.

Con la primera componente principal, se realiza la construcción del indice:

Variable	Componente 1
X_1	0.6650990
X_2	0.7119000
X_3	0.8576904
X_4	0.8706285
X_5	0.8415510
X_6	0.8772839
X_7	0.9141612
X_8	0.8688766
X_9	0.7589916

El indice es:

$$I = 0.6650990X_1 + 0.7119000X_2 + 0.8576904X_3 + 0.8706285X_4 + 0.8415510X_5 + 0.8772839X_6 + 0.9141612X_7 + 0.8688766X_8 + 0.7589916X_9$$

El cuál lo podríamos denominar como indice de presupuestos familiares, tendríamos un indice para cada provincia, entonces lo que se esperaría, es que los que tengan un valor mas alto en este indice, son las provincias que tienen un mayor desarrollo y sus habitantes tienen una mejor calidad de vida. Por ejemplo se espera que los indices de Madrid, Navarra y Barcelona, sean de los más altos según las interpretaciones anteriores.

10. Puntos Adicionales

10.1. Relaciones de transición

La descomposición con la función svd() de R, a la matriz $N^{\frac{1}{2}}Z$, donde N es la matriz con $\frac{1}{51}$ en su diagonal, es la siguiente:

Los valores propios son:

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
2.4672506	0.8815945	0.7461024	0.6922027	0.5896483	0.5237907	0.4765759	0.3915284	0.3117550

Los vectores propios para las variables son:

Variable	v1	v2
X_1	0.2695709	0.581576684
X_2	0.2885398	0.535194871
X_3	0.3476300	-0.274191765
X_4	0.3528739	-0.002137995
X_5	0.3410886	-0.199767613
X_6	0.3555715	0.007846322
X_7	0.3705182	-0.229288381
X_8	0.3521639	-0.389951665
X_9	0.3076265	0.235680269

Podemos ver que esta función nos saca los mismos vectores propios que en el ACP, pero los valores propios son distintos, exactamente son la raíz cuadrada de los valores propios que nos arroja el ACP.

Las relaciones de transición son $\Psi_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} N^{-\frac{1}{2}} v_\alpha \quad$ y $\quad \varphi = \sqrt{\lambda_\alpha} u_\alpha$
En la siguiente tabla se verán las dos primeras componentes para las variables con esta relación de transición

Variable	c1	c2
X_1	0.4234281	0.546061334
X_2	0.4532234	0.502511936
X_3	0.5460393	-0.257447600
X_4	0.5542762	-0.002007433
X_5	0.5357643	-0.187568334
X_6	0.5585133	0.007367167
X_7	0.5819908	-0.215286346
X_8	0.5531609	-0.366138348
X_9	0.4832038	0.221287899

Se puede observar que la relación no funciona, ya que no obtenemos las componentes principales, en las componentes para los individuos también ocurre lo mismo, pero como se menciono anteriormente, los valores propios obtenidos de esta matriz con la función svd(), son la raíz cuadrada de los valores propios obtenidos del ACP o de la función eigen() a la matriz de correlaciones. por lo cuál, para que nos arroje los verdaderos componentes, las relaciones de transición deben ser:

$$\Psi_\alpha = \lambda_\alpha N^{-\frac{1}{2}} v_\alpha$$

$$\varphi = \lambda_\alpha u_\alpha$$

Se le quita la raíz a los valores propios.
Con esta relación se obtienen las siguientes dos primeras componentes para las variables

Variable	c1	c2
X_1	0.6650990	0.512714812
X_2	0.7119000	0.471824861
X_3	0.8576904	-0.241725956
X_4	0.8706285	-0.001884845
X_5	0.8415510	-0.176114032
X_6	0.8772839	0.006917274
X_7	0.9141612	-0.202139378
X_8	0.8688766	-0.343779248
X_9	0.7589916	0.207774432

Las cuales si son las componentes originales. Lo mismo ocurre con las componentes de los individuos, esta relación si nos da las componentes dadas por el ACP.

10.2. Varianza de las componentes en el espacio de las variables

la varianza de cada componentes $v(\varphi)$ en el espacio de las variables se muestran en la siguiente tabla

$v(\varphi_1)$	$v(\varphi_2)$	$v(\varphi_3)$	$v(\varphi_4)$	$v(\varphi_5)$	$v(\varphi_6)$	$v(\varphi_7)$	$v(\varphi_8)$	$v(\varphi_9)$
0.006485077	0.085682921	0.061845612	0.053234137	0.038631116	0.030475913	0.025223868	0.017030272	0.010791507

11. Conclusión

Con respecto al ACP realizado, observamos que las familias que tienen mayor presupuesto para los gastos en las 9 variables medidas, son las pertenecientes a las provincias de Madrid, Barcelona, Navarra, Vizcaya, Lérida y Gerona; por lo que se podría decir que la calidad de vida que tienen las personas en estas provincias es mucho mayor que la calidad de vida de las familias pertenecientes a las demás provincias.