

Diseño de bloques completos al azar y diseño factorial

KEVIN STEVEN GARCÍA^a, ALEJANDRO VARGAS^b, ALEJANDRO SOTO^c

1. Punto 1

Uno de los objetivos de la industria metalúrgica nacional es determinar cuál de los tres elementos: níquel, hierro o cobre es el mejor agente soldante. Se sueldan una serie de lingotes de acero utilizando cada uno de los posibles agentes soldantes (níquel, hierro o cobre). Existen diferencias entre los lingotes de acero utilizados en este proceso, se utiliza en total 7 lingotes (todos diferentes), se mide la fuerza (expresada en 1000 libras por pulgada cuadrada) necesaria para soldar los lingotes. Los resultados fueron:

LINGOTE	AGENTE SOLDANTE		
	NIQUEL	HIERRO	COBRE
1	67.0	71.9	72.2
2	67.5	68.8	66.4
3	76.0	82.6	74.5
4	72.7	78.1	67.3
5	73.1	74.2	73.2
6	65.8	70.8	68.7
7	75.6	84.9	69.0

- a. El diseño de bloques completos al azar (DBCA) es el adecuado para este problema, ya que, se quieren comparar 3 tratamientos contenidos en 7 bloques (lingotes) relativamente homogéneos, se consideran los lingotes como bloques, ya que nos dicen que los 7 son diferentes y teniendo en cuenta esto, se podría decir que es un factor perturbador el cual tiene un efecto en la variable de respuesta pero no es de nuestro interés, entonces se desea controlar esta variabilidad que surge de este factor (lingote) que podría afectar en los resultados.
- b.
- Unidad experimental: Lingote
 - Factor de tratamiento: Agente Soldante
 - Niveles: Níquel, Hierro, Cobre.
 - Factor de control: Tipo de lingote
 - Niveles: 1,2,3,4,5,6 y 7.
 - Tratamientos: Níquel, Hierro y Cobre.
 - Variable de respuesta: Fuerza necesaria para soldar los lingotes ($1000lb/plg^2$)

c. **Estadísticas descriptivas:**

Dado que nuestro interés se centra en los tratamientos que en este caso son los niveles de los agentes soldantes (Níquel, Hierro y Cobre), obtendremos descriptivas por estos niveles y no por los tipos de lingotes(bloques) los cuales no son de nuestro interés:

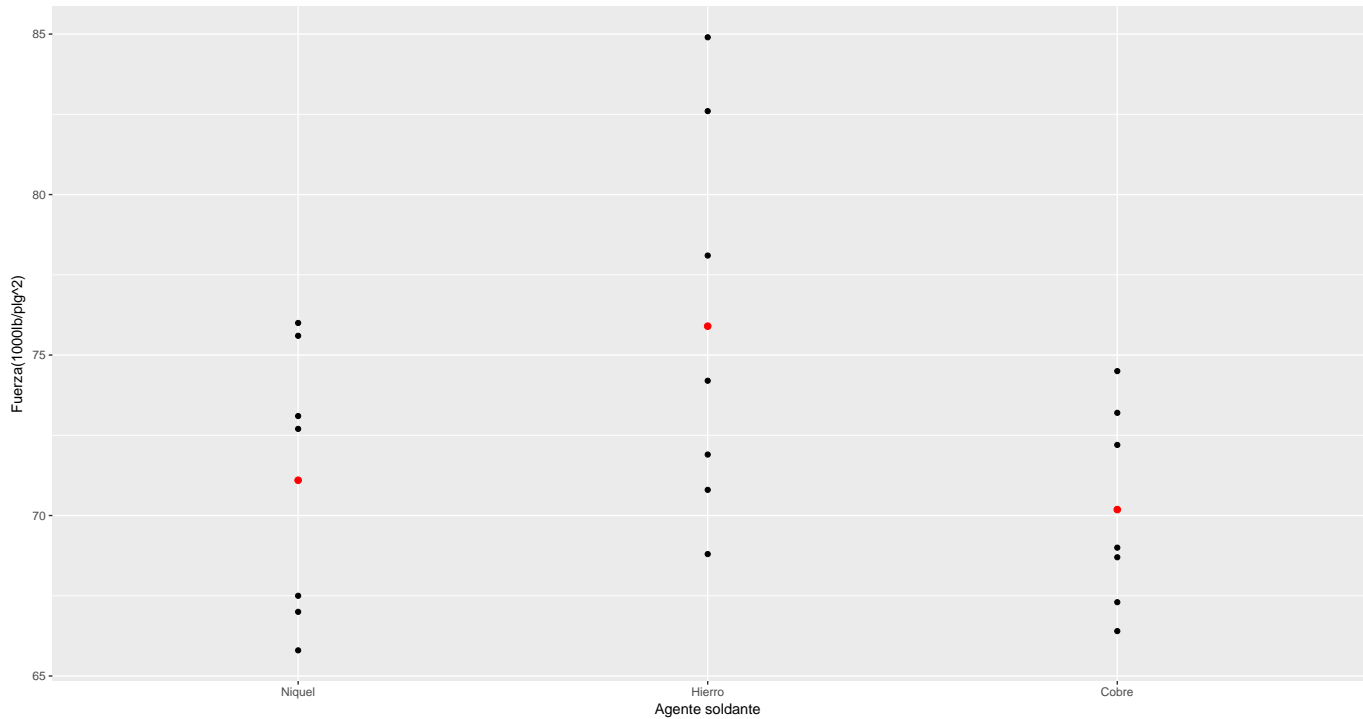
^aCódigo: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co

^bCódigo: 1525953. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co

^cCódigo: 1532457. E-mail: asotomurillo@gmail.com

	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
Niquel	65,8	67,25	72,7	71,1	74,35	76,0	4,25597619	5,985901815
Hierro	68,8	71,35	74,2	75,9	80,35	84,9	6,137860648	8,086772922
Cobre	66,4	68	69,0	70,2	72,7	74,5	3,109892051	4,430947356

En la tabla anterior, podemos observar que el hierro tiene un promedio de $75.9 \text{ 1000lb/plg}^2$, mientras que el Niquel y el Cobre tienen un promedio de 71.1 y $70.2 \text{ 1000lb/plg}^2$ respectivamente, lo cuál nos indicaría a priori, que el efecto de los agentes soldantes Niquel y Cobre sobre la fuerza necesaria para soldar los lingotes son muy parecidos, mientras que el efecto del agente soldante Hierro es distinto a los nombrados anteriormente. En cuanto a la desviación estándar, sucede lo mismo que con la media, la de los agentes soldantes Niquel y Cobre son bastante parecidas (4.256 y $3.11 \text{ 1000lb/plg}^2$ respectivamente), mientras que la del agente soldante Hierro es un poco más elevada ($6.1378 \text{ 1000lb/plg}^2$). Finalmente, si se observan en general los estadísticos mínimo y máximo y los cuartiles, se llega a lo mismo mencionado anteriormente, los agentes soldantes Niquel y Cobre se comportan de una manera similar, mientras que el Hierro parece necesitar mayor fuerza para soldar los lingotes.



En ésta gráfica se confirman las interpretaciones dadas anteriormente, los agentes soldantes Niquel y Cobre, son muy parecidos en cuanto a su media y su comportamiento en general con respecto a la fuerza necesaria para soldar los lingotes, mientras que el agente soldante Hierro, tiene una media más elevada y una dispersión mayor, lo que significa que con este agente soldante se necesita mayor fuerza para soldar los lingotes.

d.

Se plantea el siguiente modelo:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 7$$

El cuál se construye bajo los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2), \quad E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}, \quad V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2, \quad \text{cov}[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0$$

Donde:

y_{ij} = Fuerza necesaria para soldar el lingote j -ésimo con el agente soldante i -ésimo.

μ = Media general de contenido de calcio por lote sin tener en cuenta el agente soldante ni el tipo de lingote.

τ_i = Efecto del i-ésimo agente soldante sobre la fuerza necesaria para soldar el lingote.

β_j = Efecto del j-ésimo lingote sobre la fuerza necesaria para soldarlo.

ε_{ij} = Error aleatorio debido al i-ésimo agente soldante y a el j-ésimo lingote.

e.

Dado que no nos interesan los bloques (tipo de lingote), ya que a priori nos dijeron que entre estos existen diferencias. Nos centraremos en los efectos de los tres tratamientos o agentes soldantes. Por lo que se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$$

$$H_1 : \text{Al menos una de las igualdades no se cumple.}$$

f.

Antes de realizar la ANOVA e interpretar los resultados, se comprobarán los supuestos del modelo para saber si las interpretaciones que obtengamos si van a ser correctas.

Sobre los errores se tienen los siguientes supuestos:

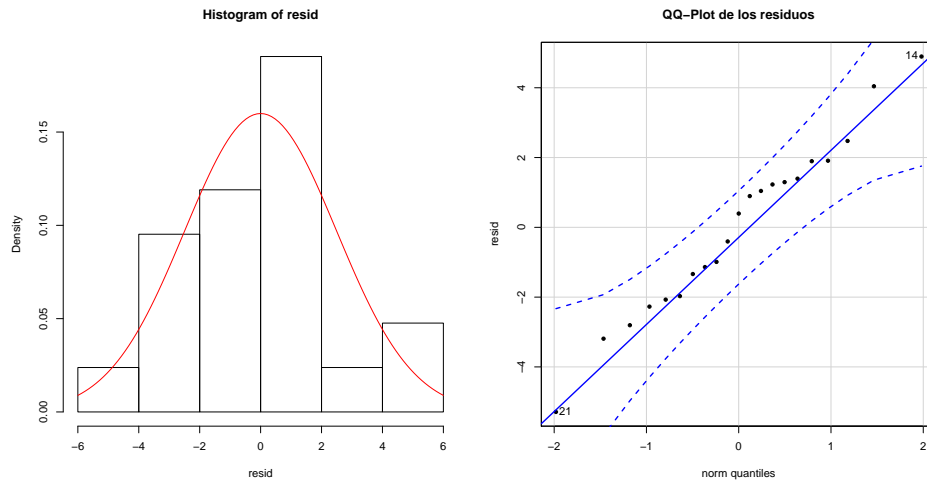
$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \rightarrow \text{Normalidad}$$

$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Correcta especificación}$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Homocedasticidad}$$

$$\text{cov}[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \text{Independencia}$$

- Normalidad: Para probar el supuesto de normalidad, se realizarán dos pruebas gráficas (histograma y QQ-plot) y una prueba estadística (Shapiro Wilk).



En estas gráficas no se observa un incumplimiento claro de este supuesto, ya que en el QQplot se observa que los puntos no se salen de los intervalos de confianza de la recta de cuantiles teórica de la distribución normal y en el histograma no se ve un comportamiento muy diferente a una distribución normal. Sin embargo, las pruebas gráficas no son muy convincentes ya que su interpretación puede ser distinta de una persona a otra y depende mucho de la experiencia del investigador. Por ello se acude a la prueba formal.

* Test Shapiro-Wilk:

$$H_0 : \text{Los datos provienen de una distribución normal}$$

$$H_a : \text{Los datos no provienen de una distribución normal}$$

$$W = 0.98289, p\text{-value} = 0.9606$$

Como el p-valor=0.9606 es muy superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal, lo que nos indica que este supuesto de normalidad en los errores no se incumple.

- Correcta Especificación: Sabemos que este supuesto siempre se cumple, ya que el método o la construcción del modelo asegura que la esperanza de los residuales sea igual a cero, sin embargo, se realizó una prueba t para comprobarlo.

* T-test:

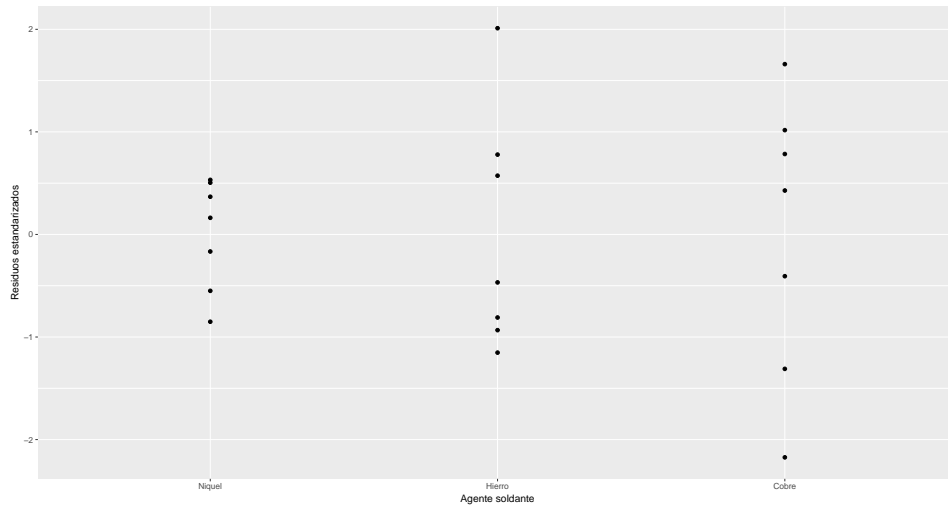
$$H_0 : \text{La verdadera media es igual a } 0$$

$$H_a : \text{La verdadera media no es igual a } 0$$

$$t = 1.9109e - 16, df = 24, p - value = 1$$

Como el p-valor=1 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y se verifica lo dicho anteriormente.

- Homocedasticidad: Para analizar la homocedasticidad se realizó una gráfica (Residuos estandarizados por agente soldante) y una prueba estadística (Test de Barlett)



En esta gráfica se observa que para el agente soldante Niquel, la dispersión de los puntos (residuales estandarizados) es menor que la de los otros dos agentes soldantes (Hierro y Cobre) las cuales son muy parecidas, por lo que se pensaría que este supuesto podría incumplirse, sin embargo se realiza la prueba formal, la cual se espera que tenga un p valor no tan alto, por el gráfico obtenido anteriormente.

* Prueba de Barlett:

$$H_0 : \text{Las varianzas de todos los grupos son iguales}$$

$$H_a : \text{Al menos una de las varianzas es diferente}$$

$$\text{Bartlett's } K - \text{squared} = 4.3295, df = 2, p - value = 0.1148$$

Como el p-valor=0.1148 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que al menos entre dos grupos la varianza es diferente, lo que nos indica que este supuesto de homocedasticidad en los errores no se incumple.

- Independencia: Para probar el supuesto de independencia en los errores, no se debe realizar un correlograma o una prueba sobre la autocorrelación (prueba de Durbin-Watson) ya que estas dependen del orden en el cual se obtuvieron los datos, y esa información no se tiene, por lo tanto, solo se realizará una prueba de rachas.

* Test de rachas:

$$H_0 : \text{La muestra es aleatoria (las observaciones son independientes)}$$

$$H_a : \text{La muestra no es aleatoria (las observaciones no son independientes)}$$

$$\text{Standard Normal} = 0.68395, p - value = 0.494$$

Como el p valor=0.494 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los residuales no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Ya que según las pruebas aplicadas, ninguno de los supuestos se incumple, procedemos a realizar e interpretar la ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Agente	2	131.9	65.95	6.359	0.0131*
Lingote	6	268.3	44.71	4.311	0.0151*
Residuals	12	124.5	10.37		

El análisis se centra en el factor que nos interesa, el cual es el factor de tratamiento (tipo de agente soldante). Vemos que se obtiene un $pvalor = 0.0131$ menor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, por lo que se rechaza la hipótesis nula planteada en el literal e, y concluimos que hay evidencia estadística para decir que los agentes soldantes (Cobre, Hierro y Niquel) no producen el mismo efecto en cuanto a la fuerza necesaria para soldar los lingotes.

Haciendo un análisis breve sobre el factor de control o factor de bloqueo (Lingote), dado que el $pvalor = 0.0151 < 0.05$, se confirma lo descrito en el enunciado. Existen diferencias entre los lingotes de acero utilizados en este proceso.

- g. Se realizará la prueba postanova de comparaciones múltiples de Tukey, ya que en la ANOVA se encontró que si existen diferencias. Los resultados resumidos para esta prueba son:

Agente	lsmean	SE	df	lower.CL	upper.CL	.group
3Cobre	70.2	1.22	12	67.5	72.8	a
1Niquel	71.1	1.22	12	68.4	73.8	a
2Hierro	75.9	1.22	12	73.2	78.6	b

Los tratamientos con la misma letra no son significativamente diferentes. Es decir, los agentes soldantes Niquel y Cobre no son significativamente diferentes, siendo estos, los que menos fuerza (expresada en 1000 libras por pulgada cuadrada) requieren para soldar los lingotes. Mientras que el agente soldante Hierro es estadísticamente diferentes a los dos anteriores; este requiere un poco más de fuerza para soldar los lingotes. Lo anterior confirma la hipótesis que se tenía desde las estadísticas descriptivas, donde dijimos que este agente soldante parecía diferir de los otros dos.

- h. La primera conclusión que se obtiene es que existen diferencias entre los tres agentes soldantes en cuanto a la fuerza requerida para soldar los lingotes, en la ANOVA se detectó que al menos uno de los agentes soldantes difiere. Posteriormente en la prueba postanova de comparaciones múltiples, se observó que los agentes soldantes Cobre y Niquel son los que menor fuerza requieren para soldar los lingotes, mientras que el agente soldante Hierro requiere un poco más de fuerza. Suponiendo que el mejor agente soldante sea el que menos fuerza requiera para soldar los diferentes lingotes, se le daría como respuesta a la industria metalúrgica nacional que los mejores son el Cobre y el Niquel, por lo cuál se seleccionaría el que resulte menos costoso, ya que la diferencia entre la fuerza requerida para estos dos es insignificante, es decir, requieren la misma fuerza para soldar los diferentes lingotes.

2. Punto 2

Un agrónomo realizó un experimento para determinar los efectos combinados de un herbicida y un insecticida en el crecimiento y desarrollo de plantas de algodón (delta de hoja suave):

Insecticida	Herbicida				
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0	122.0	72.5	52.0	36.3	29.3
20	82.8	84.8	71.5	80.5	72.0
40	65.8	68.8	79.5	65.8	82.5
60	68.0	70.0	68.8	77.3	68.3
80	57.5	60.8	63.0	69.3	73.3

a.

En este caso se podría proponer en principio un diseño factorial pero dado que solo se tiene una réplica por cada combinación de los niveles de los factores, o sea una réplica por tratamiento y lo que en realidad se quiere evaluar es la respuesta del desarrollo de las plantas de algodón ante las distintas dosis de Herbicida, se podría proponer mejor un diseño por bloques donde el Insecticida sea un control.

- b.
- Unidad experimental: Planta de algodón
 - Factor de tratamiento: Herbicida
 - Niveles: 0.0,0.5,1.0,1.5 y 2.0.
 - Factor de control: Insecticida.
 - Niveles: 0,20,40,60 y 80.
 - Tratamientos: 0.0,0.5,1.0,1.5 y 2.0.
 - Variable de respuesta: Crecimiento de las plantas de algodón.

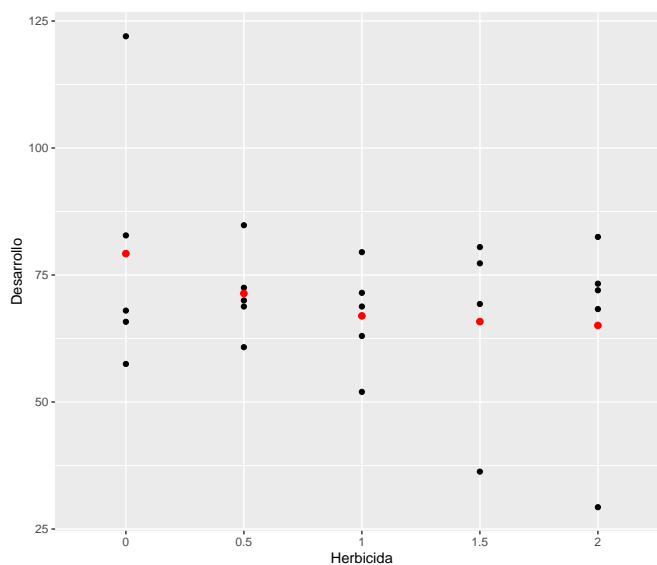
c.

Estadísticas descriptivas:

Como acordamos que el mejor es un DBCA entonces nos interesa al final conocer el efecto del Herbicida sobre el crecimiento de la planta de algodón y no el Insecticida(bloques o control), así pues hacemos descriptivas respecto a el Herbicida:

Herbicida	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
0	57.5	65.8	68.0	79.22	82.8	122	28.89933	79.22
0.5	60.8	68.8	70.0	71.38	72.5	84.8	7.769788	10.8851
1	52	63.0	68.8	66.96	71.5	79.5	9.173135	13.69942
1.5	36.3	65.8	69.3	65.84	77.3	80.5	15.68969	23.83003
2	29.3	68.3	72.0	65.08	73.3	82.5	18.49047	28.41191

Podemos observar primero que los coeficientes de variación son relativamente altos lo que indica en principio que tal vez el control local no fue muy bueno, observamos ademas que los promedios para cada tratamiento están muy cercanos entre si lo que indicaría que pueden haber tratamientos con igual efecto.



En la gráfica podemos apreciar que cada tratamiento parece comportarse de manera similar, teniendo como notamos anteriormente promedios muy similares, podemos ver que la variabilidad es relativamente alta y que los tratamientos 0.5 y 1.5 parecen ser los que presentan menor variabilidad.

d.

Se plantea el siguiente modelo:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 7$$

El cuál se construye bajo los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2), \quad E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}, \quad V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2, \quad cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0$$

Donde:

y_{ij} =Crecimiento de la planta de algodón j-esima con el herbicida i-esimo.

μ =Media general del crecimiento de la planta de algodón sin tener en cuenta el herbicida ni el tipo de insecticida(control).

τ_i =Efecto del i-ésimo Herbicida sobre el crecimiento de la planta de algodón.

β_j =Efecto del j-ésimo Insecticida sobre el crecimiento de la planta.

ε_{ij} =Error aleatorio debido al i-ésimo Herbicida y a el j-ésimo Insecticida.

e.

Dado que no nos interesan los bloques(Insecticida), ya que decidimos usarlos como control. Nos centraremos en los efectos de los tratamientos o Herbicidas. Por lo que se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_5 = \tau$$

H_1 :Al menos una de las igualdades no se cumple.

f.

Antes de realizar la ANOVA e interpretar los resultados, se comprobarán los supuestos del modelo para saber si las interpretaciones que obtengamos si van a ser correctas.

Sobre los errores se tienen los siguientes supuestos:

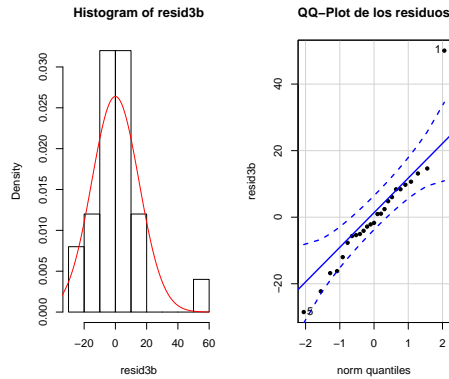
$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \rightarrow \text{Normalidad}$$

$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Correcta especificacion}$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Homocedasticidad}$$

$$\text{cov}[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \text{Independencia}$$

- Normalidad: Para probar el supuesto de normalidad, se realizarán dos pruebas gráficas (histograma y QQ-plot) y una prueba estadística(Shapiro Wilk).



En estas gráficas no se observa un incumplimiento claro de este supuesto, ya que en el QQplot se observa que los puntos no se salen de los intervalos de confianza de la recta de cuantiles teórica de la distribución normal y en el histograma no se ve un comportamiento muy diferente a una distribución normal. Sin embargo, las pruebas gráficas no son muy convincentes Por ello se acude a la prueba formal.

- * Test Shapiro-Wilk:

$$H_0 : \text{Los datos provienen de una distribucion normal}$$

$$H_a : \text{Los datos no provienen de una distribucion normal}$$

$$W = 0.90519, p - \text{value} = 0.02385$$

Como el p-valor=0.02385 es inferior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que hay evidencia estadística suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal, lo que nos indica que este supuesto de normalidad en los errores se incumple.

- Correcta Especificación: Sabemos que este supuesto siempre se cumple, ya que el método o la construcción del modelo asegura que la esperanza de los residuales sea igual a cero, sin embargo, se realizó una prueba t para comprobarlo.

* T-test:

$$H_0 : \text{La verdadera media es igual a } 0$$

$$H_a : \text{La verdadera media no es igual a } 0$$

$$t = 6.8721e - 17, df = 47, p - value = 1$$

Como el p-valor=1 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y se verifica lo dicho anteriormente.

- Homocedasticidad: Para analizar la homocedasticidad se realizó una prueba estadística Test de Levene ya que la prueba de Barlett es sensible a las desviaciones de la normalidad y como tenemos que nuestros errores no cumplen el supuesto de normalidad esta prueba (Prueba de Barlett) serviría únicamente para probar normalidad.

* Prueba de Levene:

$$H_0 : \text{Las varianzas de todos los grupos son iguales}$$

$$H_a : \text{Al menos una de las varianzas es diferente}$$

$$F \text{ Value} = 0.5558, df = 4, p - value = 0.6972$$

Como el p-valor= 0.6972 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que al menos entre dos grupos la varianza es diferente, lo que nos indica que este supuesto de homocedasticidad en los errores no se incumple.

- Independencia: Para probar el supuesto de independencia en los errores, no se debe realizar un correlograma o una prueba sobre la autocorrelación (prueba de Durbin-Watson) ya que estas dependen del orden en el cual se obtuvieron los datos, y esa información no se tiene, por lo tanto, solo se realizará una prueba de rachas.

* Test de rachas:

$$H_0 : \text{La muestra es aleatoria (las observaciones son independientes)}$$

$$H_a : \text{La muestra no es aleatoria (las observaciones no son independientes)}$$

$$\text{Standard Normal} = -0.19646, p - value = 0.8443$$

Como el p valor=0.8443 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los residuales no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Ya que según las pruebas aplicadas, se incumple el supuesto de normalidad no podemos hacer una ANOVA porque los resultados podrían ser erróneos, por esto procedemos a realizar una prueba no paramétrica (Prueba de Friedman)

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_5 = \tau$$

$$H_1 : \text{Al menos una de las igualdades no se cumple.}$$

$$\text{Friedman chi - squared} = 1.3333, df = 4, p - value = 0.8557$$

Como el p valor=0.8557 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los diferentes Herbicidas presentan efectos distintos sobre el crecimiento de la planta de algodón.

- h. como pudimos observar no se cumplía el supuesto de Normalidad de los errores y viéndolo como un diseño por bloques el test de Friedman arroja que no había diferencias significativas entre los tratamientos, por ende podemos concluir que independientemente de el herbicida que se utilice se va a obtener el mismo crecimiento en las plantas de algodón por lo que en este caso sería una buena opción optar por el que resulte mas económico.

3. Punto 3

4. Punto 4

Dos tipos de moluscos A y B fueron sometidos a tres concentraciones distintas de agua de mar (100, 75 y 50) y se observó el consumo de oxígeno midiendo la proporción de O₂ por unidad de peso seco del molusco.

Concentración de agua de Mar	Tipo de Molusco							
	A				B			
100%	7.16	8.26	6.78	14	6.14	6.14	3.68	10
	13.6	11.1	8.93	9.66	10.4	11.6	5.49	5.8
75%	5.2	13.2	5.2	8.39	4.47	4.95	9.96	6.49
	7.18	10.4	6.37	7.18	5.75	5.44	1.8	9.9
50%	11.11	10.5	9.74	14.6	9.63	14.5	6.38	10.2
	18.8	11.11	9.74	11.8	13.4	17.7	14.5	12.3

- a. En este caso es adecuado un diseño factorial ya que se quiere evaluar el efecto que tiene la concentración de agua de mar sobre el consumo de oxígeno de 2 tipos de Molusco, por ende se debe tener en cuenta las interacciones entre los moluscos y las diferentes concentraciones de agua de mar.
- b.
- Unidad experimental: Molusco
 - Factor de tratamiento: Concentración de agua de mar y Tipo de molusco
 - Niveles: 100,75,50 y A, B.
 - Tratamientos: $A * 100, B * 100, A * 75, B * 75, A * 50, B * 50$.
 - Variable de respuesta: Proporción de O₂ por unidad de peso seco del molusco.

- c. **Estadísticas descriptivas:**
se obtienen descriptivas tanto para la concentración de agua de mar como para cada uno de los tipos de moluscos respecto a el proporción de O₂:

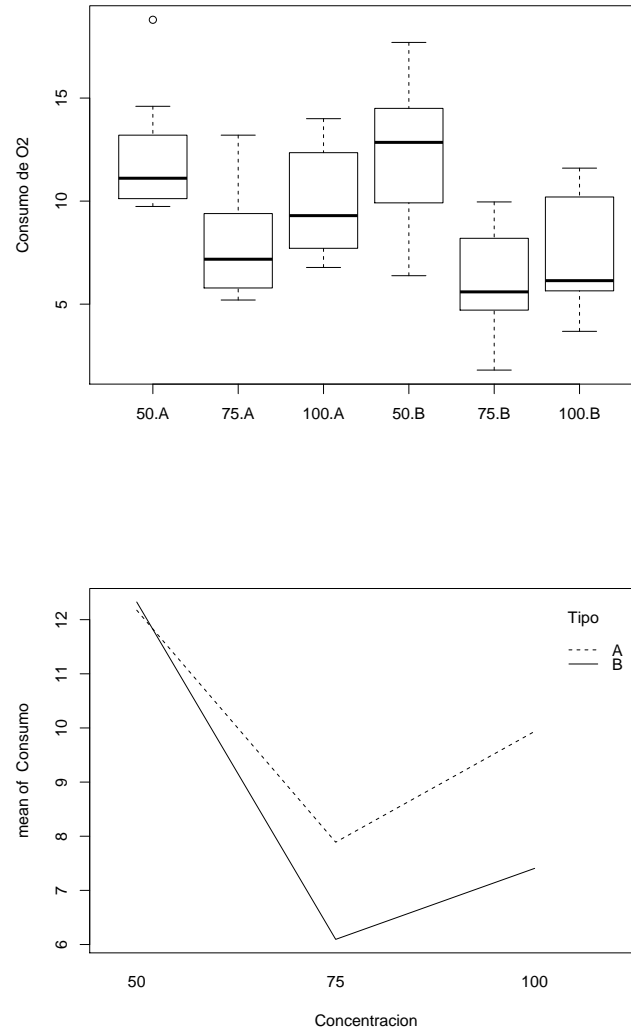
Concentración	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
100	3.68	6.140	8.595	8.67125	10.575	14	2.905647	33.50898
75	1.8	5.2	6.43	6.9925	8.7675	13.2	2.715052	38.82806
50	6.38	10.085	11.455	12.25062	14.500	18.8	3.098041	25.28884

En la tabla anterior, vemos que la concentración de agua de mar tiene un coeficiente de variación grande en varios de los tratamientos lo que indica que el porcentaje de O₂ varia mucho en las diferentes concentraciones. El mayor promedio de porcentaje de O₂ es el que tiene una concentración de 50 porciento de agua de mar.

Tipo	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
A	5.2	7.18	9.74	9.846	11.11	18.8	3.225164	32.75608
B	1.8	5.685	8.060	8.609167	10.700	17.7	3.918164	45.51153

En este caso observamos que los promedios de porcentaje de O₂ son muy similares lo que indica en principio que el Tipo de molusco no tiene un efecto significativo sobre el O₂, o lo que es lo mismo que da igual si el molusco es A o B el porcentaje de O₂ va a ser el mismo.

Para evaluar la interacciones entre los diferentes niveles de los factores utilizamos un boxplot. Podemos observar como la variabilidad en los distintos tratamientos es parecida pero sus medias toman diferentes valores donde la que mayor porcentaje de O₂ tiene es la del tratamiento $50 * B$ que es en la que se tiene un molusco de tipo B con un porcentaje de agua de mar del 50, esto en principio podría indicar que tal vez este sea el tratamiento que presenta un mejor efecto, aun así si compramos los tratamientos $50 * A$ y $50 * B$ son las que presentan mejor porcentaje de O₂ por lo que también se podría inferir a priori que la concentración 50 porciento de agua de mar es la mas significativa.



En este gráfico podemos observar a priori que tal vez exista una interacción entre el porcentaje de agua de mar y el tipo de molusco donde el mayor porcentaje de O2 en el agua se observa cuando se tiene una concentración de agua de mar del 50, sin embargo los gráficos no suelen ser muy confiables porque depende de la experiencia que tenga quien los observa, por ende esperaremos a tener la prueba ANOVA.

d.

Se plantea el siguiente modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha_i * \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2 \quad k = 1, \dots, 8$$

El cuál se construye bajo los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2), \quad E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}, \quad V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2, \quad cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0$$

Donde:

y_{ijk} = Porcentaje k-ésimo de O2 en el agua el cual tiene un porcentaje i-ésimo de agua de mar y un tipo de molusco j.

μ = Media general de porcentaje de O2 sin tener en cuenta la concentración de agua de mar ni el tipo de molusco.

α_i = Efecto del i-ésimo porcentaje de concentración sobre el porcentaje de O2(consumo).

β_j = Efecto del j-ésimo tipo de molusco sobre el porcentaje de O2(consumo).

$\alpha_i * \beta_j$ = Efecto de la interacción entre la concentración y el tipo de molusco sobre el porcentaje de O2(consumo)

ε_{ij} = Error aleatorio debido al i-ésimo porcentaje de concentración y a el j-ésimo tipo de molusco.

e.

Principalmente nos interesa la interacción entre el porcentaje de agua de mar y el tipo de molusco. Por lo que se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0 : (\alpha * \beta)_{11} = (\alpha * \beta)_{12} = \dots = (\alpha * \beta)_{32}$$

$$H_1 : \text{Al menos una de las igualdades no se cumple.}$$

f.

Antes de realizar la ANOVA e interpretar los resultados, se comprobarán los supuestos del modelo esto para conocer si el método a utilizar es correcto.

Sobre los errores se tienen los siguientes supuestos:

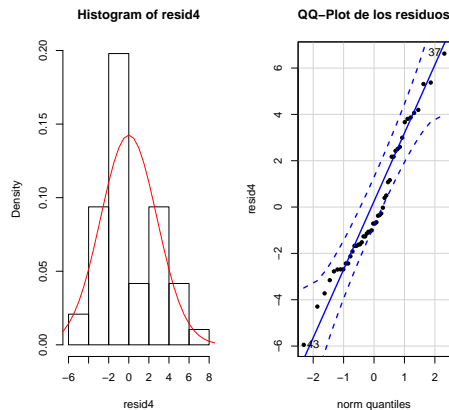
$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \rightarrow \text{Normalidad}$$

$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Correcta especificacion}$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Homocedasticidad}$$

$$\text{cov}[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \text{Independencia}$$

- Normalidad: Para probar el supuesto de normalidad, se realizarán dos pruebas gráficas (histograma y QQ-plot) y una prueba estadística (Shapiro Wilk).



Podemos observar en la gráfica que este supuesto se cumple claramente, observamos como el QQ-plot se apega muy bien a la recta y el histograma sigue muy de cerca la curva de una distribución normal, sin embargo se hace una prueba formal ya que las pruebas gráficas no son tan confiables.

- * Test Shapiro-Wilk:

$$H_0 : \text{Los datos provienen de una distribución normal}$$

$$H_a : \text{Los datos no provienen de una distribución normal}$$

$$W = 0.95824, p\text{-value} = 0.08571$$

Como el p-valor=0.08571 es muy superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal, lo que nos indica que este supuesto de normalidad en los errores no se incumple.

- Correcta Especificación: Sabemos que este supuesto siempre se cumple, ya que el método o la construcción del modelo asegura que la esperanza de los residuales sea igual a cero, sin embargo, se realizó una prueba t para comprobarlo.
- * T-test:

$$H_0 : \text{La verdadera media es igual a 0}$$

$$H_a : \text{La verdadera media no es igual a 0}$$

$$t = 6.8721e - 17, df = 47, p\text{-value} = 1$$

Como el p-valor=1 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y se verifica lo dicho anteriormente.

- Homocedasticidad: Para analizar la homocedasticidad se realizó una prueba estadística (Test de Barlett)

* Prueba de Barlett:

H_0 : Las varianzas de todos los grupos son iguales

H_a : Al menos una de las varianzas es diferente

Bartlett's $K - squared = 0.71218, df = 5, p - value = 0.9823$

Como el p-valor=0.9823 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que al menos entre dos grupos la varianza es diferente, lo que nos indica que este supuesto de homocedasticidad en los errores no se incumple.

- Independencia: Para probar el supuesto de independencia en los errores, no se debe realizar un correlograma o una prueba sobre la autocorrelación (prueba de Durbin-Watson) ya que estas dependen del orden en el cual se obtuvieron los datos, y esa información no se tiene, por lo tanto, solo se realizará una prueba de rachas.

* Test de rachas:

H_0 : La muestra es aleatoria (las observaciones son independientes)

H_a : La muestra no es aleatoria (las observaciones no son independientes)

Standard Normal = -0.77925, $p - value = 0.4358$

Como el p valor=0.4358 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los residuales no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Ya que según las pruebas aplicadas, ninguno de los supuestos se incumple, procedemos a realizar e interpretar la ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Concentracion	2	230.82	115.408	13.1712	3.629e-05 ***
Tipo	1	23.23	23.227	2.6508	0.1110
Concentracion*Tipo	2	15.36	7.678	0.8763	0.4238
Residuals	42	368.01	8.762		

Podemos ver que la interacción entre los factores no es representativa, esto quiere decir que en conjunto la concentración de agua de mar con el tipo de molusco no tiene un efecto significativo sobre el porcentaje de O2 en el agua y se deberán analizar los factores por separado.

g. Se realizará la prueba postanova de comparaciones múltiples para cada uno de los factores por separados ya que la interacción es no representativa:

Agente	lsmean	SE	df	lower.CL	upper.CL	.group
75	6.99	0.74	42	5.50	8.49	a
100	8.67	0.74	42	7.18	10.16	a
50	12.25	0.74	42	10.76	13.74	b

Podemos ver que en las comparaciones para la concentración si se aprecian diferencias significativas, en este caso entre el tratamiento del porcentaje 50 con el resto.

Agente	lsmean	SE	df	lower.CL	upper.CL	.group
B	8.61	0.604	42	7.39	9.83	a
A	10.00	0.604	42	8.78	11.22	a

Para las comparaciones de el tipo de molusco notamos que no hay diferencias y independientemente del tipo de molusco el porcentaje de O2 va a ser el mismo.

- h. Primero notamos que la interacción es no significativa por lo que podemos decir que en conjunto el tipo de molusco y la concentración de agua de mar no tienen ningún efecto sobre el porcentaje de O_2 , sin embargo viéndolo por separado la concentración sí presenta un efecto significativo, siendo la concentración 50 de agua de mar la que mayor porcentaje de O_2 presenta, así sin importar cual sea el tipo de molusco la concentración de agua de mar en el cual se desarrolla es la que influye en el consumo de oxígeno.