Universidad del Valle
Programa Académico de Estadística
Estadística Aplicada III
Cali, marzo de 2019

Diseño de bloques completos al azar y diseño factorial

Kevin Steven García[a], Alejandro Vargas[b], Alejandro Soto[c]

1. Punto 1

Uno de los objetivos de la industria metalúrgica nacional es determinar cuál de los tres elementos: níquel, hierro o cobre es el mejor agente soldante. Se sueldan una serie de lingotes de acero utilizando cada uno de los posibles agentes soldantes (níquel, hierro o cobre). Existen diferencias entre los lingotes de acero utilizados en este proceso, se utiliza en total 7 lingotes (todos diferentes), se mide la fuerza (expresada en 1000 libras por pulgada cuadrada) necesaria para soldar los lingotes. Los resultados fueron:

	AGENTE	SOLDANTE	
LINGOTE	NIQUEL	HIERRO	COBRE
1	67.0	71.9	72.2
2	67.5	68.8	66.4
3	76.0	82.6	74.5
4	72.7	78.1	67.3
5	73.1	74.2	73.2
6	65.8	70.8	68.7
7	75.6	84.9	69.0

a.

El diseño de bloques completos al azar (DBCA) es el adecuado para este problema, ya que, se quieren comparar 3 tratamientos contenidos en 7 bloques (lingotes) relativamente homogéneos, se consideran los lingotes como bloques, ya que nos dicen que los 7 son diferentes y teniendo en cuenta esto, se podría decir que es un factor perturbador el cual tiene un efecto en la variable de respuesta pero no es de nuestro interés, entonces se desea controlar esta variabilidad que surge de este factor (lingote) que podría afectar en los resultados.

b.
- Unidad experimental: Lingote
- Factor de tratamiento: Agente Soldante
- Niveles: Niquel, Hierro, Cobre.
- Factor de control: Tipo de lingote
- Niveles: 1,2,3,4,5,6 y 7.
- Tratamientos: Niquel, Hierro y Cobre.
- Variable de respuesta: Fuerza necesaria para soldar los lingotes ($1000 lb/plg^2$)

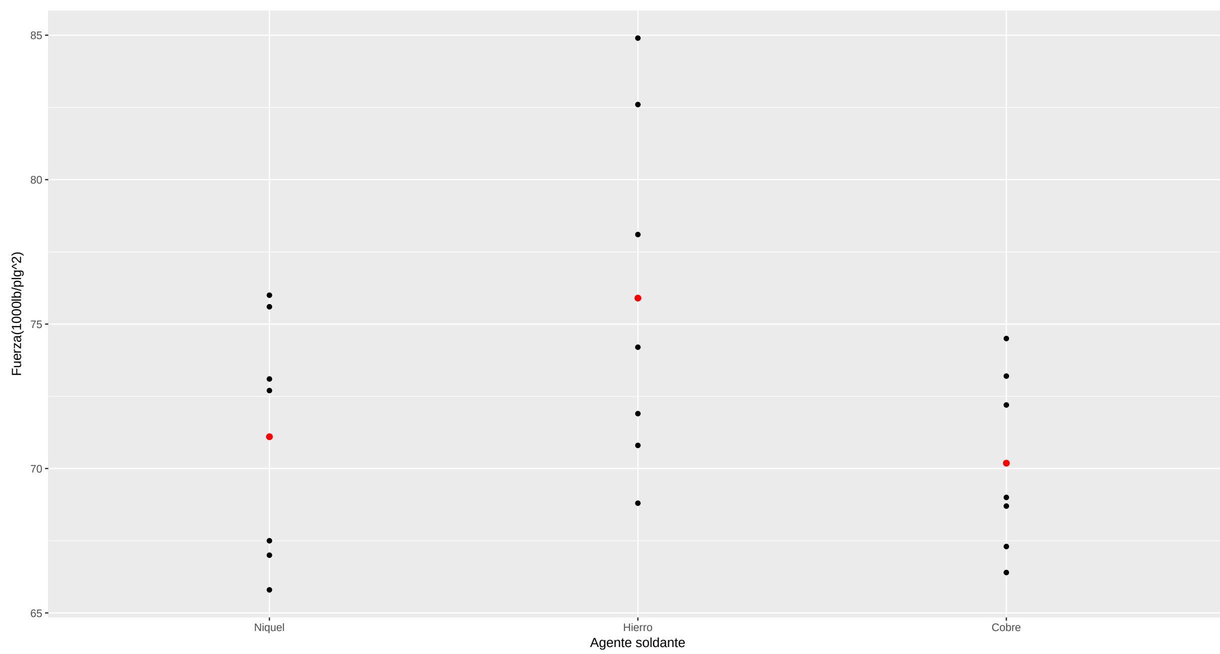
c.

Estadísticas descriptivas:
Dado que nuestro interés se centra en los tratamientos que en este caso son los niveles de los agentes soldantes (Niquel, Hierro y Cobre), obtendremos descriptivas por estos niveles y no por los tipos de lingotes(bloques) los cuales no son de nuestro interés:

[a]Código: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co
[b]Código: 1525953. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co
[c]Código: 1532457. E-mail: asotomurillo@gmail.com

	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
Niquel	65,8	67,25	72,7	71,1	74,35	76,0	4,25597619	5,985901815
Hierro	68,8	71,35	74,2	75,9	80,35	84,9	6,137860648	8,086772922
Cobre	66,4	68	69,0	70,2	72,7	74,5	3,109892051	4,430947356

En la tabla anterior, podemos observar que el hierro tiene un promedio de 75.9 $1000lb/plg^2$, mientras que el Niquel y el Cobre tienen un promedio de 71.1 y 70.2 $1000lb/plg^2$ respectivamente, lo cuál nos indicaría a priori, que el efecto de los agentes soldantes Niquel y Cobre sobre la fuerza necesaria para soldar los lingotes son muy parecidos, mientras que el efecto del agente soldante Hierro es distinto a los nombrados anteriormente. En cuanto a la desviación estándar, sucede lo mismo que con la media, la de los agentes soldantes Niquel y Cobre son bastante parecidas(4.256 y 3.11 $1000lb/plg^2$ respectivamente), mientras que la del agente soldante Hierro es un poco más elevada(6.1378 $1000lb/plg^2$). Finalmente, si se observan en general los estadísticos mínimo y máximo y los cuartiles, se llega a lo mismo mencionado anteriormente, los agentes soldantes Nique y Cobre se comportan de una manera similar, mientras que el Hierro parece necesitar mayor fuerza para soldar los lingotes.



En ésta gráfica se confirman las interpretaciones dadas anteriormente, los agentes soldantes Niquel y Cobre, son muy parecidos en cuanto a su media y su comportamiento en general con respecto a la fuerza necesaria para soldar los lingotes, mientras que el agente soldante Hierro, tiene una media más elevada y una dispersión mayor, lo que significa que con este agente soldante se necesita mayor fuerza para soldar los lingotes.

d.

Se plantea el siguiente modelo:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, ..., 3 \qquad j = 1, ..., 7$$

El cuál se construye bajo los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2), \quad E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}, \quad V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2, \quad cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0$$

Donde:
y_{ij} =Fuerza necesaria para soldar el lingote j-ésimo con el agente soldante i-ésimo.
μ =Media general de contenido de calcio por lote sin tener en cuenta el agente soldante ni el tipo de lingote.
τ_i =Efecto del i-ésimo agente soldante sobre la fuerza necesaria para soldar el lingote.
β_j =Efecto del j-ésimo lingote sobre la fuerza necesaria para soldarlo.
ε_{ij} =Error aleatorio debido al i-ésimo agente soldante y a el j-ésimo lingote.

e.

Dado que no nos interesan los bloques(tipo de lingote), ya que a priori nos dijeron que entre estos existen diferencias. Nos centraremos en los efectos de los tres tratamientos o agentes soldantes. Por lo que se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$$
$$H_1 : \text{Al menos una de las igualdades no se cumple.}$$

f.

Antes de realizar la ANOVA e interpretar los resultados, se comprobarán los supuestos del modelo para saber si las interpretaciones que obtengamos si van a ser correctas.
Sobre los errrores se tienen los siguientes supuestos:

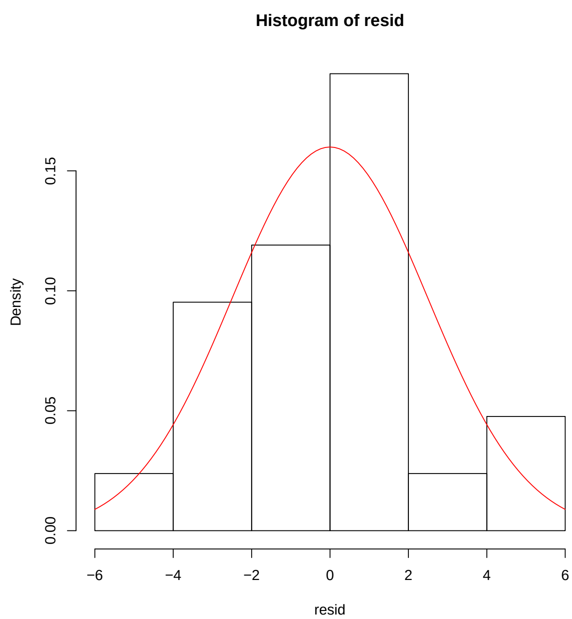
$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \rightarrow \quad Normalidad$$

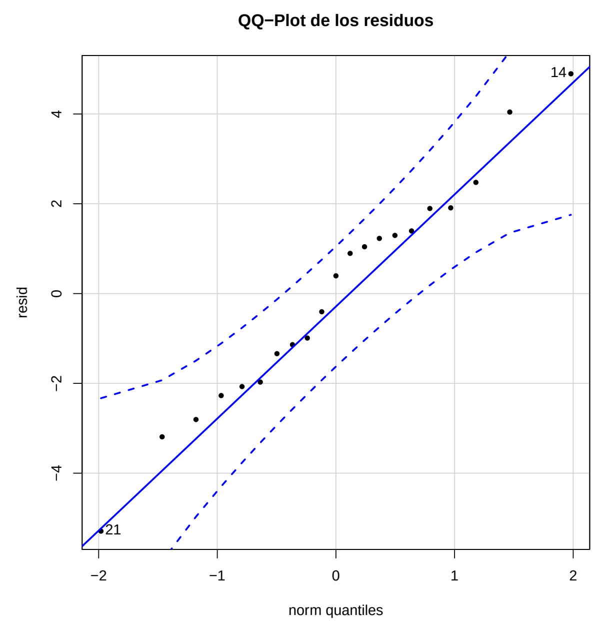
$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \quad Correcta\ especificacion$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \quad Homocedasticidad$$

$$cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \quad Independencia$$

- Normalidad: Para probar el supuesto de normalidad, se realizarán dos pruebas gráficas (histograma y QQ-plot) y una prueba estadística(Shapiro Wilk).





En estas gráficas no se observa un incumplimiento claro de este supuesto, ya que en el QQplot se observa que los puntos no se salen de los intervalos de confianza de la recta de cuantiles teórica de la distribución normal y en el histograma no se ve un comportamiento muy diferente a una distribución normal. Sin embargo, las pruebas gráficas no son muy convincentes ya que su interpretación puede ser distinta de una persona a otra y depende mucho de la experiencia del investigador. Por ello se acude a la prueba formal.

* Test Shapiro-Wilk:

$$H_0 : Los\ datos\ provienen\ de\ una\ distribucion\ normal$$

$$H_a : Los\ datos\ no\ provienen\ de\ una\ distribucion\ normal$$

$$W = 0.98289, p - value = 0.9606$$

Como el p-valor=0.9606 es muy superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal, lo que nos indica que este supuesto de normalidad en los errores no se incumple.

- Correcta Especificación:Sabemos que este supuesto siempre se cumple, ya que el método o la construcción del modelo asegura que la esperanza de los residuales sea igual a cero, sin embargo, se realizó una prueba t para comprobarlo.

* T-test:

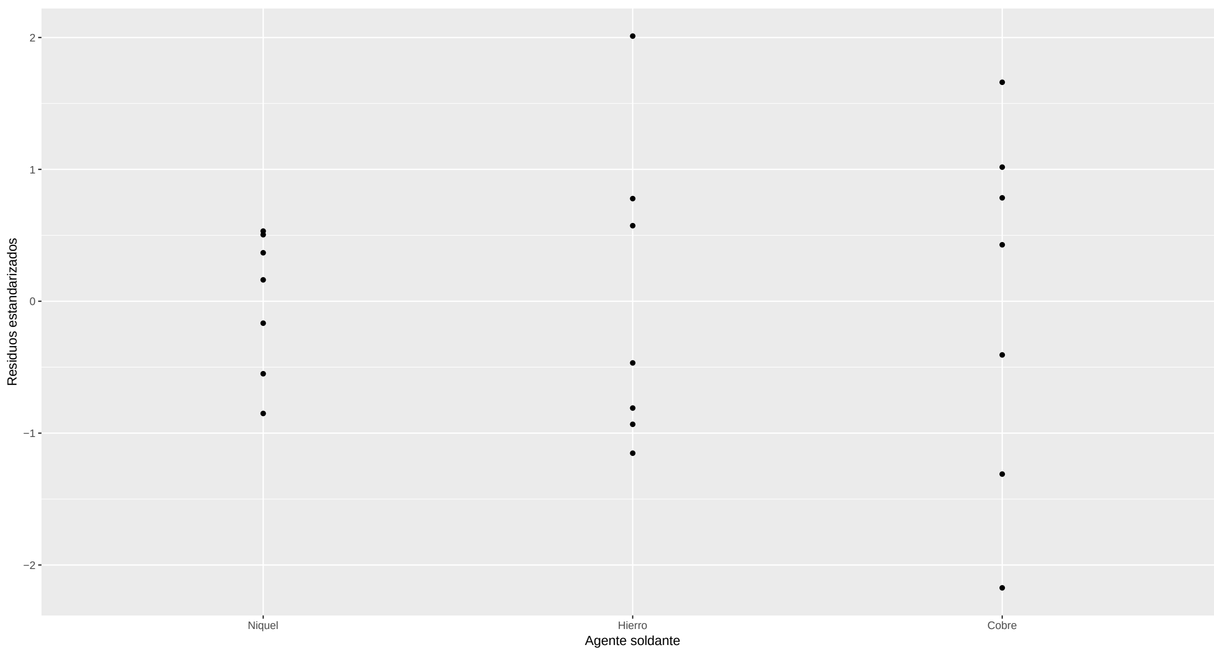
$$H_0 : La\ verdadera\ media\ es\ igual\ a\ 0$$

$$H_a : La\ verdadera\ media\ no\ es\ igual\ a\ 0$$

$$t = 1.9109e - 16, df = 24, p - value = 1$$

Como el p-valor=1 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y se verifica lo dicho anteriormente.

- Homocedasticidad:Para analizar la homocedasticidad se realizó una gráfica(Residuos estandarizados por agente soldante) y una prueba estadística (Test de Barlett)



En esta gráfica se observa que para el agente soldante Niquel, la dispersión de los puntos(residuales estandarizados) es menor que la de los otros dos agentes soldantes(Hierro y Cobre) las cuales son muy parecidas, por lo que se pensaría que este supuesto podría incumplirse, sin embargo se realiza la prueba formal, la cual se espera que tenga un p valor no tan alto, por el gráfico obtenido anteriormente.

* Prueba de Barlett:

$$H_0 : Las\ varianzas\ de\ todos\ los\ grupos\ son\ iguales$$

$$H_a : Al\ menos\ una\ de\ las\ varianzas\ es\ diferente$$

$$Bartlett's\ K - squared = 4.3295, df = 2, p - value = 0.1148$$

Como el p-valor=0.1148 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que al menos entre dos grupos la varianza es diferente, lo que nos indica que este supuesto de homocedasticidad en los errores no se incumple.

- Independencia:Para probar el supuesto de independencia en los errores, no se debe realizar un correlograma o una prueba sobre la autocorrelación(prueba de Durbin-Watson) ya que estas dependen del orden en el cuál se obtuvieron los datos, y esa información no se tiene, por lo tanto, solo se realizará una prueba de rachas.

* Test de rachas:

$$H_0 : La\ muestra\ es\ aleatoria\ (las\ observaciones\ son\ independientes)$$

$$H_a : La\ muestra\ no\ es\ aleatoria\ (las\ observaciones\ no\ son\ independientes)$$

$$Standard\ Normal = 0.68395, p - value = 0.494$$

Como el p valor=0.494 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los residuales no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Ya que según las pruebas aplicadas, ninguno de los supuestos se incumple, procedemos a realizar e interpretar la ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Agente	2	131.9	65.95	6.359	0.0131*
Lingote	6	268.3	44.71	4.311	0.0151*
Residuals	12	124.5	10.37		

El análisis se centra en el factor que nos interesa, el cual es el factor de tratamiento (tipo de agente soldante). Vemos que se obtiene un $pvalor = 0.0131$ menor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, por lo que se rechaza la hipótesis nula planteada en el literal e, y concluimos que hay evidencia estadística para decir que los agentes soldantes(Cobre, Hierro y Niquel) no producen el mismo efecto en cuanto a la fuerza necesaria para soldar los lingotes.
Haciendo un análisis breve sobre el factor de control o factor de bloqueo(Lingote), dado que el $pvalor = 0.0151 < 0.05$, se confirma lo descrito en el enunciado. Existen diferencias entre los lingotes de acero utilizados en este proceso.

g. Se realizará la prueba postanova de comparaciones múltiples de Tukey, ya que en la ANOVA se encontró que si existen diferencias. Los resultados resumidos para esta prueba son:

Agente	lsmean	SE	df	lower.CL	upper.CL	.group
3Cobre	70.2	1.22	12	67.5	72.8	a
1Niquel	71.1	1.22	12	68.4	73.8	a
2Hierro	75.9	1.22	12	73.2	78.6	b

Los tratamientos con la misma letra no son significativamente diferentes. Es decir, los agentes soldantes Niquel y Cobre no son significativamente diferentes, siendo estos, los que menos fuerza (expresada en 1000 libras por pulgada cuadrada) requieren para soldar los lingotes. Mientras que el agente soldante Hierro es estadisticamente diferentes a los dos anteriores; este requiere un poco más de fuerza para soldar los lingotes. Lo anterior confirma loa hipótesis que se tenía desde las estadísticas descriptivas, donde dijimos que este agente soldante parecía diferir de los otros dos.

h. La primera conclusión que se obtiene es que existen diferencias entre los tres agentes soldantes en cuanto a la fuerza requerida para soldar los lingotes , en la ANOVA se detectó que al menos uno de los agentes soldantes difiere. Posteriormente en la prueba postanova de comparaciones múltiples, se observó que los agentes soldantes Cobre y Niquel son los que menor fuerza requieren para soldar los lingotes, mientras que el agente soldante Hierro requiere un poco más de fuerza. Suponiendo que el mejor agente soldante sea el que menos fuerza requiera para soldar los diferentes lingotes, se le daría como respuesta a la industria metalúrgica nacional que los mejores son el Cobre y el Niquel, por lo cuál se seleccionaría el que resulte menos costoso, ya que la diferencia entre la fuerza requerida para estos dos es insignificante, es decir, requieren la misma fuerza para soldar los diferentes lingotes.

2. Punto 2

Un agrónomo realizo un experimento para determinar los efectos combinados de un herbicida y un insecticida en el crecimiento y desarrollo de plantas de algodón (delta de hoja suave):

Insecticida	**Herbicida**				
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0	122.0	72.5	52.0	36.3	29.3
20	82.8	84.8	71.5	80.5	72.0
40	65.8	68.8	79.5	65.8	82.5
60	68.0	70.0	68.8	77.3	68.3
80	57.5	60.8	63.0	69.3	73.3

a.

En este caso se podría proponer en principio un diseño factorial pero dado que solo se tiene una réplica por cada combinación de los niveles de los factores, y lo que en realidad se quiere evaluar es la respuesta del desarrollo de las plantas de algodón ante las distintas dosis de herbicida, se podría proponer mejor un diseño por bloques donde el insecticida sea un factor de control y el interés se centré totalmente en el herbicida.

b.

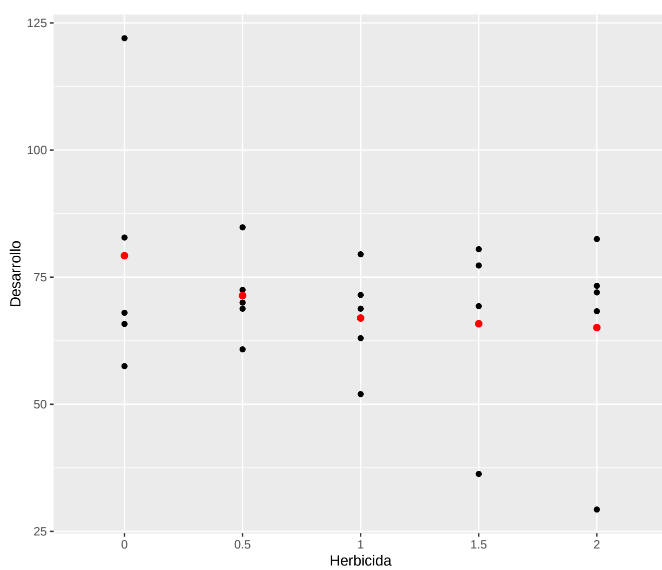
- Unidad experimental: Planta de algodón
- Factor de tratamiento: Herbicida
- Niveles: 0.0,0.5,1.0,1.5 y 2.0.
- Factor de control:Insecticida.
- Niveles: 0,20,40,60 y 80.
- Tratamientos: 0.0,0.5,1.0,1.5 y 2.0.
- Variable de respuesta: Crecimiento de las plantas de algodón.

c.

Estadísticas descriptivas:
Como acordamos que el mejor diseño es un DBCA, entonces nos interesa al final conocer el efecto del herbicida sobre el crecimiento de la planta de algodón y no el insecticida(bloques o control), por lo tanto realizamos descriptivas respecto al herbicida:

Herbicida	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
0	57.5	65.8	68.0	79.22	82.8	122	28.89933	79.22
0.5	60.8	68.8	70.0	71.38	72.5	84.8	7.769788	10.8851
1	52	63.0	68.8	66.96	71.5	79.5	9.173135	13.69942
1.5	36.3	65.8	69.3	65.84	77.3	80.5	15.68969	23.83003
2	29.3	68.3	72.0	65.08	73.3	82.5	18.49047	28.41191

Podemos observar primero que los coeficientes de variación son relativamente altos lo que indica en principio que tal vez el control local no fue muy bueno, observamos ademas que los promedios para cada tratamiento están muy cercanos entre si lo que indicaría que pueden haber tratamientos con igual efecto.



En la gráfica podemos apreciar que cada tratamiento parece comportarse de manera similar, teniendo como notamos anteriormente promedios muy similares, podemos ver que la variabilidad es relativamente alta y que los tratamientos 0.5 y 1.5 parecen ser los que presentan menor variabilidad.

d.

Se plantea el siguiente modelo:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, ..., 3 \qquad j = 1, ..., 7$$

El cuál se construye bajo los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2), \quad E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}, \quad V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2, \quad cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0$$

Donde:
y_{ij} =Crecimiento de la planta de algodón j-esima con el herbicida i-esimo.
μ =Media general del crecimiento de la planta de algodón sin tener en cuenta el herbicida ni el tipo de insecticida(control).
τ_i =Efecto del i-ésimo Herbicida sobre el crecimiento de la planta de algodón.
β_j =Efecto del j-ésimo Insecticida sobre el crecimiento de la planta.
ε_{ij} =Error aleatorio debido al i-ésimo Herbicida y a el j-ésimo Insecticida.

e.

Dado que no nos interesan los bloques(Insecticida), ya que decidimos usarlos como control. Nos centraremos en los efectos de los tratamientos o Herbicidas. Por lo que se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_5 = \tau$$

H_1 :Al menos una de las igualdades no se cumple.

f.

Antes de realizar la ANOVA e interpretar los resultados, se comprobarán los supuestos del modelo para saber si las interpretaciones que obtengamos si van a ser correctas.
Sobre los errrores se tienen los siguientes supuestos:

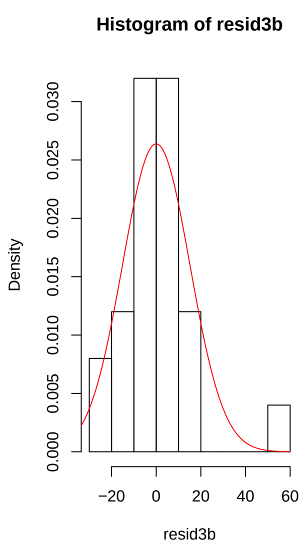
$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \rightarrow \quad Normalidad$$

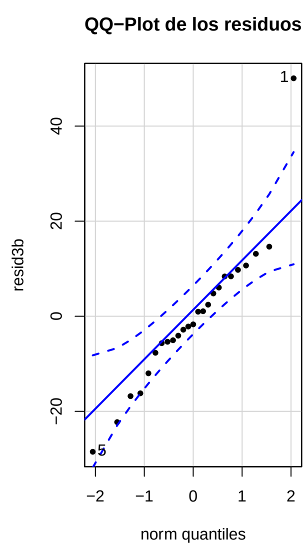
$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \quad Correcta\ especificacion$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \quad Homocedasticidad$$

$$cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \quad Independencia$$

- Normalidad: Para probar el supuesto de normalidad, se realizarán dos pruebas gráficas (histograma y QQ-plot) y una prueba estadística(Shapiro Wilk).





En estas gráficas se observa un posible incumplimiento de este supuesto, ya que en el QQplot se logra ver que algunos puntos se salen o están muy cerca de los limites de los intervalos de confianza de la recta de cuantiles teórica de la distribución normal y en el histograma se ve un comportamiento muy diferente a una distribución normal en la cola derecha. Sin embargo, las pruebas gráficas no son muy convincentes por ello se acude a la prueba formal.

* Test Shapiro-Wilk:

$$H_0 : Los\ datos\ provienen\ de\ una\ distribucion\ normal$$
$$H_a : Los\ datos\ no\ provienen\ de\ una\ distribucion\ normal$$
$$W = 0.90519, p - value = 0.02385$$

Como el p-valor=0.02385 es inferior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que hay evidencia estadística suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal, lo que nos indica que este supuesto de normalidad en los errores se incumple.

- Correcta Especificación:Sabemos que este supuesto siempre se cumple, ya que el método o la construcción del modelo asegura que la esperanza de los residuales sea igual a cero, sin embargo, se realizó una prueba t para comprobarlo.

* T-test:

$$H_0 : La\ verdadera\ media\ es\ igual\ a\ 0$$
$$H_a : La\ verdadera\ media\ no\ es\ igual\ a\ 0$$
$$t = 6.8721e - 17, df = 47, p - value = 1$$

Como el p-valor=1 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y se verifica lo dicho anteriormente.

- Homocedasticidad:Para analizar la homocedasticidad se realizó una prueba estadística (Test de Levene) ya que la prueba de Barlett es sensible a las desviaciones de la normalidad y como tenemos que nuestros errores no cumplen el supuesto de normalidad, los resultados de la prueba de Levene son más confiables.

* Prueba de Levene:

$$H_0 : Las\ varianzas\ de\ todos\ los\ grupos\ son\ iguales$$
$$H_a : Al\ menos\ una\ delas\ varianzas\ es\ diferente$$
$$F\ Value = 0.5558, df = 4, p - value = 0.6972$$

Como el p-valor= 0.6972 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que al menos entre dos grupos la varianza es diferente, lo que nos indica que este supuesto de homocedasticidad en los errores no se incumple.

- Independencia:Para probar el supuesto de independencia en los errores, no se debe realizar un correlograma o una prueba sobre la autocorrelación(prueba de Durbin-Watson) ya que estas dependen del orden en el cuál se obtuvieron los datos, y esa información no se tiene, por lo tanto, solo se realizará una prueba de rachas.

* Test de rachas:

$$H_0 : La\ muestra\ es\ aleatoria\ (las\ observaciones\ son\ independientes)$$
$$H_a : La\ muestra\ no\ es\ aleatoria\ (las\ observaciones\ no\ son\ independientes)$$
$$Standard\ Normal = -0.19646, p - value = 0.8443$$

Como el p valor=0.8443 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los residuales no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Ya que según las pruebas aplicadas, se incumple el supuesto de normalidad no podemos hacer una ANOVA porque los resultados podrían ser erróneos,por esto procedemos a realizar una prueba no paramétrica (Prueba de Friedman)

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_5 = \tau$$
$$H_1 : Al\ menos\ una\ de\ las\ igualdades\ no\ se\ cumple.$$
$$Friedman\ chi - squared = 1.3333, df = 4, p - value = 0.8557$$

Como el p valor=0.8557 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los diferentes herbicidas presentan efectos distintos sobre el crecimiento de la planta de algodón.

h. como pudimos observar no se cumplía el supuesto de Normalidad de los errores y viéndolo como un diseño por bloques el test de Friedman arrojo que no había diferencias significativas entre los tratamientos, por ende podemos concluir que independientemente del herbicida que se utilice se va a obtener el mismo crecimiento en las plantas de algodón, por lo que en este caso sería una buena opción optar por el que resulte mas económico.

3. Punto 3

Se están estudiando los factores que influyen en la resistencia a la ruptura de una fibra sintética. Se selecciona tres operadores y cuatro máquinas, para el experimento se utilizan fibras de un mismo lote de producción. Los resultados son los siguientes:

OPERARIO	MAQUINA (B)			
(A)	1	2	3	4
1	109	110	108	110
1	110	115	109	108
2	110	110	111	114
2	112	111	109	112
3	116	112	114	120
3	114	115	119	117

a.

El diseño adecuado para esta situación es un diseño factorial, ya que: 1) se consta de dos factores a estudiar, 2) se quiere ver el efecto que tiene cada factor sobre la variable de respuesta, es decir se quieren tener hipótesis para ambos factores, 3)se quiere estudiar el efecto que tiene la interacción entre los dos factores en la variable de respuesta, y la presencia de esta interacción hace que los factores no se puedan estudiar por separado.

b.
- Unidad experimental: Fibra sintética
- Factor de tratamiento: Maquinas y los operadores de las maquinas
- Niveles:Maquina 1, 2, 3 y 4 y operarios 1, 2 y 3
- Tratamientos: Son 12 tratamientos, los cuales son las combinaciones de los niveles es decir: Maquina 1, Operario 1; Maquina 1, Operario 2;...; Maquina 4, Operario 3
- Variable de respuesta: Resistencia a la ruptura de una fibra sintética

c.

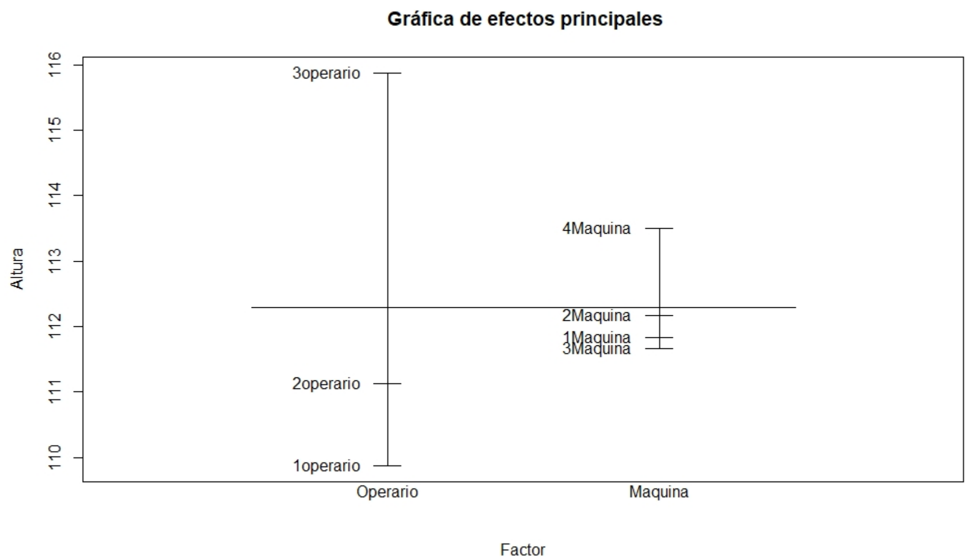
Para ver las estadísticas descriptivas para este problema vamos a hacer el análisis por factor, es decir haremos una tabla para describir a los obreros y haremos una tabla para describir a las maquinas:

Obrero	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
1	108	108	109.5	109.9	110	115	2.232071	2.03100
2	109	110	111	111.1	112	114	1.552648	1.397522
3	112	114	115.5	115.9	117.5	120	2.695896	2.326053

Como se puede notar en la tabla los operarios tienen una media muy cercana lo que nos indicaría que no hay mucha diferencia entre ellos, sin embargo, podemos decir que de los tres operarios el tercero tiene una media un poco mayor que los otros, lo que nos podría indicar la posibilidad de que exista alguna diferencia, pero quizá se deba a la variabilidad que este presenta.

Maquina	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
1	109	110	111	111.8	113.5	116	2.71416	2.4276923
2	110	110.2	111.5	112.2	114.2	115	2.316607	2.0647121
3	108	109	110	111.7	113.2	119	4.179314	3.7415523
4	108	110.5	113	113.5	116.2	120	4.460942	3.9303453

En esta tabla para describir el factor de las maquinas podemos notar que el valor medio de las maquinas es muy parecido, notando que la maquina 4 tiene una media un poco mayor pero esto se puede deber a que también presenta una desviación estándar un poco mayor que los demás. En general se podría decir que con las estadísticas descriptivas no se aprecia una diferencia clara entre las maquinas.



La gráfica de efectos muestra un poco lo que hemos mencionado de que tanto se parecen entre si los operarios y las maquinas, vemos como la maquina 4 esta un poco mas alejada de la media que las otras tres y esto mismo pasa con el operario 3, lo que podría interpretarse como que habría una diferencia entre los niveles del factor operario, y que podría presentarse una diferencia quiza menos marcada entre los niveles del factor maquina.

d.

Se plantea el siguiente modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha_i * \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \quad k = 1,2$$

El cuál se construye bajo los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2), \;\; E[\varepsilon_{ij}] = 0 \;\; \forall_{ij}, \;\; V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2, \;\; cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \; con \; i \neq i^{'} \; y \; j \neq j^{'}$$

Donde:
$y_{ijk} =$ Es la resistencia a la ruptura de una fibra sintética con el i-ésimo Operador en la en la j.ésima maquina
$\mu =$ Media general de resistencia a la ruptura de una fibra sintetica sin tener en cuenta la acción del i-ésimo operador en la j-ésima maquina
$\alpha_i =$ Efecto del i-ésimo operador sobre la resistencia a la ruptura de una fibra sintética
$\beta_j =$ Efecto de la j-ésima maquina sobre la resistencia que tiene una fibra sintética a la ruptura
$\alpha_i * \beta_j =$ Efecto de la interacción entre el i-ésimo operador y la j-ésima maquina sobre la resistencia a la ruptura de una fibra sintética
ε_{ij} =Error aleatorio debido al i-ésimo operador y a la j-ésima maquina

e.

La principal hipótesis que se quiere probar para este tipo de diseño es:

$$H_0 : (\alpha * \beta)_{11} = (\alpha * \beta)_{12} = ... = (\alpha * \beta)_{34}$$

H_1 :Al menos una de las igualdades no se cumple.

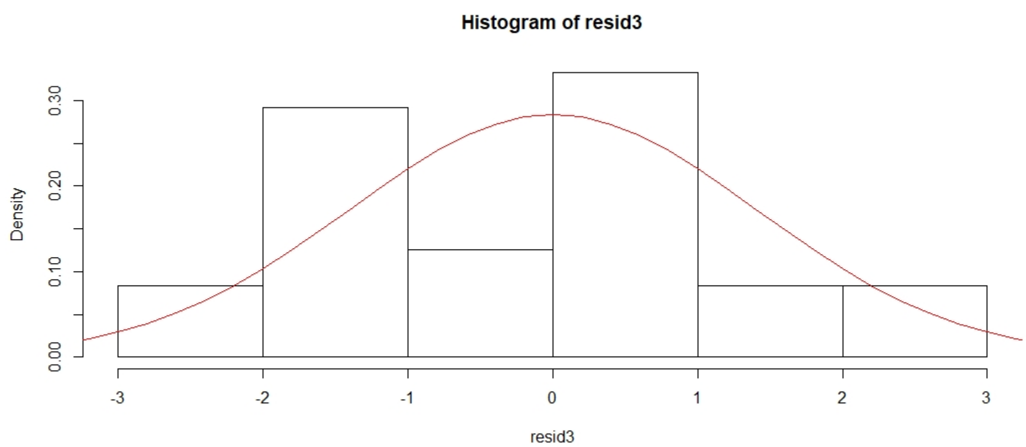
ya que principalmente nos interesa ver cómo la resistencia a la ruptura de una fibra de vidrio esta siendo afectada por cada una de estas interacciones.

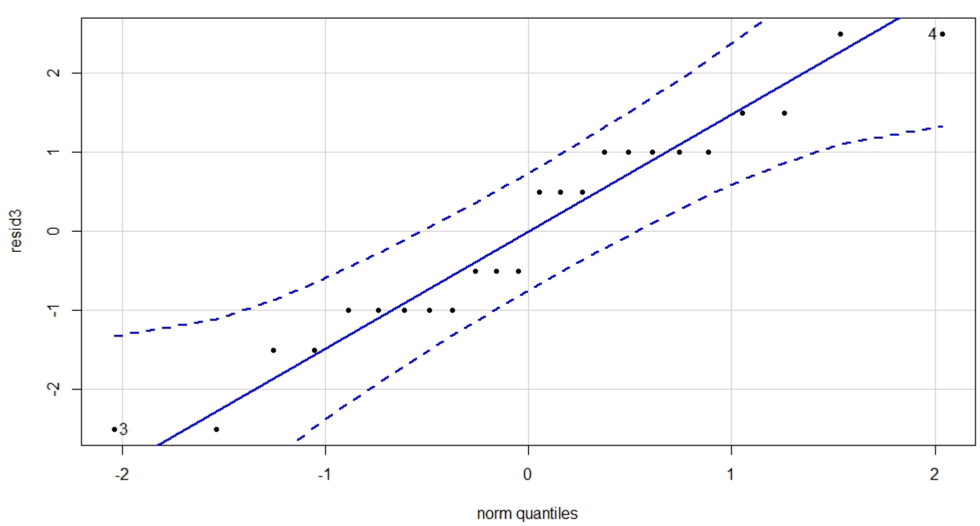
f.

Antes de realizar el análisis de varianza (ANOVA) primero debemos ver que los supuestos planteados para el modelo se cumplan, para evitar que la ANOVA que se realice no sea la adecuada, y lograr llegar a los resultados pertinentes.
Los supuestos a comprobar sobre los errores serán los siguientes:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \rightarrow \quad Normalidad$$
$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \quad Correcta\ especificacion$$
$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \quad Homocedasticidad$$
$$cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \quad Independencia$$

- Normalidad: para probar la normalidad de los errores, que es una parte muy importante y un supuesto fundamental para la construcción de la ANOVA, lo haremos a través de dos pruebas gráficas (Un Histograma y un QQ-plot) y de una prueba estadística (Shapiro Wilk) las cuales nos llevaran a hacer una correcta interpretación.





como se puede notar en las gráficas, el supuesto de normalidad no se rechazaría, ya que en el QQ-plot vemos como los puntos están cerca de la linea, y siempre se mantienen dentro de las bandas que nos indican que si los residuales se encuentran dentro de ellas no tendríamos por que pensar que no se comportan de una manera normal. Cuando vemos el histograma, es un poco menos claro el cumplimiento de la normalidad, por lo tanto y para comprobarlo realizaremos la prueba estadística.

* Test Shapiro Wilk:

$$H_0 : Los\ datos\ provienen\ de\ una\ distribucion\ normal$$

$$H_a : Los\ datos\ no\ provienen\ de\ una\ distribucion\ normal$$

$$W = 0.94926, p - value = 0.2611$$

En el Test de Shapiro Wilk el valor-p es mas grande que el nivel de significancia $\alpha = 0.05$ podemos decir que no hay evidencia estadística suficiente para que se rechace la hipótesis nula, entonces podemos concluir que los residuales si siguen una distribución normal.

- Correcta especificación: De acuerdo a como esta planteado el modelo estadístico, este supuesto siempre se cumple, ya que se asegura de que la esperanza de los errores siempre es 0, para mostrarlo veremos el resultado de la prueba T

* T-test:

$$H_0 : La\ verdadera\ media\ es\ igual\ a\ 0$$

$$H_a : La\ verdadera\ media\ no\ es\ igual\ a\ 0$$

$$t = -1.0473e - 16, df = 47, p - value = 1$$

Como el valor-p es 1 decimos que no se rechaza la hipótesis nula y que los residuales si tiene media 0.

- Homocedasticidad: Para hacer el análisis de esta prueba se realizará la prueba estadística de Barlett, la cual trabaja sobre la hipótesis nula de que todas las varianzas son iguales.

* Prueba de Barlett:

$$H_0 : Las\ varianzas\ de\ todos\ los\ grupos\ son\ iguales$$

$$H_a : Al\ menos\ una\ delas\ varianzas\ es\ diferente$$

$$Bartlett's\ K - squared = 4.8106, df = 11, p - value = 0.94$$

Como tenemos un valor-p bastante alto, mucho mayor que nuestra significancia de 0.05 podemos decir que no se rechaza la hipótesis nula, lo que nos indica que se podría considerar que las varianzas son iguales.

- Independencia: Para probar el supuesto de independencia de los errores se usara el test de rachas, que probar esta supuesto por medio del test de Durbin-Watson o por medio de un correlograma es mas complejo ya que estos exigen tener el orden en el cual se obtuvieron los errores y esta información no se tiene.

* Test de Rachas

$$H_0 : La\ muestra\ es\ aleatoria\ (las\ observaciones\ son\ independientes)$$

$$H_a : La\ muestra\ no\ es\ aleatoria\ (las\ observaciones\ no\ son\ independientes)$$

$$Standard\ Normal = 2.5045, p - value = 0.01226$$

Como podemos ver en la prueba de rachas, el supuesto de independencia se incumple, ya que tenemos un valor-p=0.01226 y es menor que un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, por lo tanto este cae en la región de rechazo, y podemos decir que hay evidencia estadística para decir que los errores no son independientes entre si.

Después de realizadas las pruebas para los supuestos, y que ningún supuesto fundamental(normalidad y homocedasticidad) se incumpliera pasamos a realizar la tabla ANOVA.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Operario	2	160.333	80.167	21.1429	0.0001167 ***
Maquina	3	12.458	4.153	1.0952	0.3887526
Operario*Maquina	6	44.667	7.444	1.9634	0.1506807
Residuales	12	45.500	3.792		

La interpretación mas importante que podemos hacer es que la interacción entre los factores no es significativa ya que tiene un valor-p por arriba de la significancia que es de 0.05, lo que nos indica que en conjunto los operarios y las maquinas no representan una variación o un efecto significativo en la resistencia a la ruptura de la fibra sintética, y podemos notar que para las maquinas tampoco representaría un efecto en el momento de la variación.

g.

Ya que la interacción entre los factores no resulto significativa vamos a probar los factores por separado y ver si cada uno de ellos entre sus niveles resulta significativo.

Operario	lsmean	SE	df	lower.CL	upper.CL	.group
Operario 1	110	0.688	12	108	111	a
Operario 2	111	0.688	12	110	113	a
Operario 3	116	0.688	12	114	117	b

Como lo muestra la tabla, al comparar los niveles del factor operario se puede ver que existe una diferencia entre el operario 3 con respecto a los operarios 1 y 2

Operario	lsmean	SE	df	lower.CL	upper.CL	.group
Maquina 1	112	0.795	12	110	113	a
Maquina 2	112	0.795	12	110	114	a
Maquina 3	112	0.795	12	110	114	a
Maquina 4	114	0.795	12	112	115	a

Y como podemos ver en la tabla que representan las comparaciones para el factor de las maquinas no existe ninguna diferencia entre los niveles de este factor, es decir que es consistente con los resultados que nos presento la tabla ANOVA donde se decía que este factor tampoco presentaba un efecto en el diseño.

h.

Como conclusiones tenemos que, al realizar el experimento y los análisis de varianza, pudimos notar que la interacción entre las maquinas y los operarios no tiene un efecto que pueda ser decisivo, es decir que la resistencia a la ruptura va a estar más afectada por el tipo de operario que realiza el trabajo, ya que como pudimos ver en las pruebas múltiples para los factores por separado las maquinas tampoco tienen un efecto sobre la variabilidad que puede presentar esta resistencia a la ruptura.
como recomendaciones, se puede decir que el experimento debería realizarse con un mejor sistema de aleatorización, ya que como pudimos ver al realizar la comprobación del supuesto de independencia a través de la prueba de rachas, este no se cumple, lo que nos indica que la aleatorizacion no se hizo de la mejor manera.

4. Punto 4

Dos tipos de moluscos A y B fueron sometidos a tres concentraciones distintas de agua de mar (100 %, 75 % y 50 %) y se observó el consumo de oxígeno midiendo la proporción de O2 por unidad de peso seco del molusco.

Concentración de agua de Mar	**Tipo de Molusco**							
	A				**B**			
100%	7.16	8.26	6.78	14	6.14	6.14	3.68	10
	13.6	11.1	8.93	9.66	10.4	11.6	5.49	5.8
75%	5.2	13.2	5.2	8.39	4.47	4.95	9.96	6.49
	7.18	10.4	6.37	7.18	5.75	5.44	1.8	9.9
50%	11.11	10.5	9.74	14.6	9.63	14.5	6.38	10.2
	18.8	11.11	9.74	11.8	13.4	17.7	14.5	12.3

a.

En este caso es adecuado un diseño factorial ya que se quiere evaluar el efecto que tiene la concentración de agua de mar sobre el consumo de oxigeno de 2 tipos de Molusco, por ende se debe tener en cuenta las interacciones entre los moluscos y las diferentes concentraciones de agua de mar.

b.
- Unidad experimental: Molusco
- Factor de tratamiento: Concentración de agua de mar y Tipo de molusco
- Niveles: 100 %,75 %,50 % y A, B.
- Tratamientos: $A * 100\,\%$, $B * 100\,\%$,$A * 75\,\%$,$B * 75\,\%$,$A * 50\,\%$,$B * 50\,\%$.
- Variable de respuesta: Proporción de O2 por unidad de peso seco del molusco.

c.

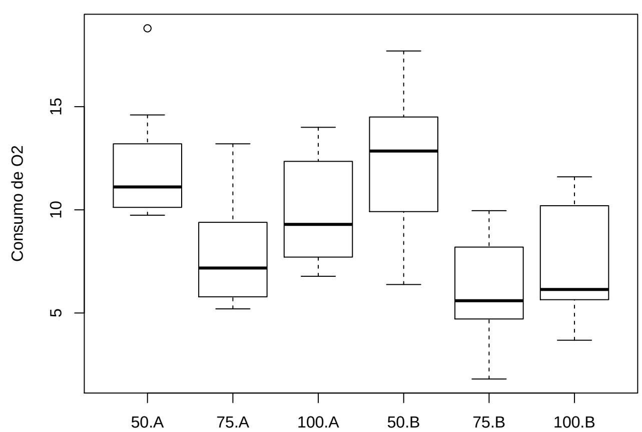
Estadísticas descriptivas:
se obtienen descriptivas tanto para la concentración de agua de mar como para cada uno de los tipos de moluscos respecto a la proporción de O2:

Concentración	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
100 %	3.68	6.140	8.595	8.67125	10.575	14	2.905647	33.50898
75 %	1.8	5.2	6.43	6.9925	8.7675	13.2	2.715052	38.82806
50 %	6.38	10.085	11.455	12.25062	14.500	18.8	3.098041	25.28884

En la tabla anterior, vemos que la concentración de agua de mar tiene un coeficiente de variación grande en varios de los tratamientos lo que indica que el porcentaje de O2 varía considerablemente en las diferentes concentraciones. El mayor promedio de porcentaje de O2 es el que tiene una concentración de 50 % de agua de mar.

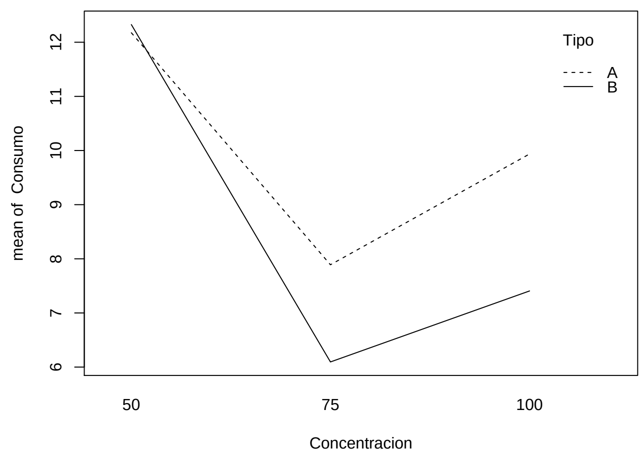
Tipo	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
A	5.2	7.18	9.74	9.846	11.11	18.8	3.225164	32.75608
B	1.8	5.685	8.060	8.609167	10.700	17.7	3.918164	45.51153

En este caso observamos que los promedios de porcentaje de O2 son muy similares lo que indica en principio que el Tipo de molusco no tiene un efecto significativo sobre el O2, o lo que es lo mismo que da igual si el molusco es A o B el porcentaje de O2 va a ser el mismo.



Para evaluar la interacciones entre los diferentes niveles de los factores utilizamos un boxplot. Podemos observar como la variabilidad en los distintos tratamientos es parecida pero sus medias toman diferentes valores donde la que mayor porcentaje de O2 tiene es la del tratamiento $50\,\% * B$ que es en la que se tiene un molusco de tipo B con un porcentaje de agua de mar del 50 %, esto en principio podría indicar que tal vez este sea el tratamiento que presenta un mejor efecto, aun así si compramos los tratamientos $50\,\% * A$ y $50\,\%.B$ son las que presentan mejor porcentaje de O2 por lo que también se podría inferir a priori que la concentración 50 % de agua de mar es la mas significativa.

En este gráfico podemos observar a priori que tal vez exista una interacción entre el porcentaje de agua de mar y el tipo de molusco donde el mayor porcentaje de O2 en el agua se observa cuando se tiene una concentración de agua de mar del 50 %, sin embargo los gráficos no suelen ser muy confiables porque depende de la experiencia que tenga quien los observa, por ende esperaremos a tener la prueba ANOVA.



d.

Se plantea el siguiente modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha_i * \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2 \quad k = 1,...,8$$

El cuál se construye bajo los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0,\sigma^2), \quad E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}, \quad V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2, \quad cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0$$

Donde:
y_{ijk} =Porcentaje k-esimo de O2 en el agua el cual tiene un porcentaje i-esimo de agua de mar y un tipo de molusco j .
μ =Media general de porcentaje de O2 sin tener en cuenta la concentración de agua de mar ni el tipo de molusco.
α_i =Efecto del i-ésimo porcentaje de concentración sobre el porcentaje de O2(consumo).
β_j =Efecto del j-ésimo tipo de molusco sobre el porcentaje de O2(consumo).
$\alpha_i * \beta_j$ =Efecto de la interacción entre la concentración y el tipo de molusco sobre el porcentaje de O2(consumo)
ε_{ij} =Error aleatorio debido al i-ésimo proncetaje de concentracion y a el j-ésimo tipo de molusco.

e.

Principalmente nos interesa la interacción entre el porcentaje de agua de mar y el tipo de molusco. Por lo que se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0 : (\alpha * \beta)_{11} = (\alpha * \beta)_{12} = ... = (\alpha * \beta)_{32}$$
H_1 :Al menos una de las igualdades no se cumple.

f.

Antes de realizar la ANOVA e interpretar los resultados, se comprobarán los supuestos del modelo, esto para conocer si el método a utilizar es correcto.
Sobre los errores se tienen los siguientes supuestos:

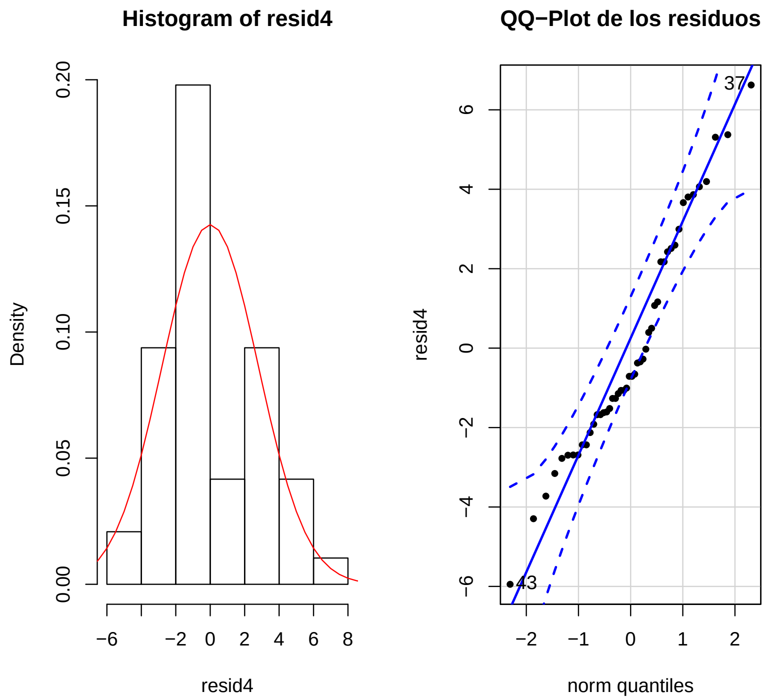
$$\varepsilon_{ij} \approx N(0,\sigma^2) \rightarrow \quad Normalidad$$

$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \quad Correcta\ especificacion$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \quad Homocedasticidad$$

$$cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \quad Independencia$$

- Normalidad: Para probar el supuesto de normalidad, se realizarán dos pruebas gráficas (histograma y QQ-plot) y una prueba estadística(Shapiro Wilk).
  Podemos observar en la gráfica que no hay un cumplimiento claro de este supuesto, observamos como el QQ-plot tiene algunos punto muy cercanos al la linea del intervalo y el histograma no sigue muy de cerca la curva de una distribución normal, por lo cual se hace un prueba formal para validar el supuesto de una forma más objetiva.



* Test Shapiro-Wilk:

$$H_0 : Los\ datos\ provienen\ de\ una\ distribucion\ normal$$

$$H_a : Los\ datos\ no\ provienen\ de\ una\ distribucion\ normal$$

$$W = 0.95824, p - value = 0.08571$$

Como el p-valor=0.08571 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal, lo que nos indica que este supuesto de normalidad en los errores no se incumple.

- Correcta Especificación:Sabemos que este supuesto siempre se cumple, ya que el método o la construcción del modelo asegura que la esperanza de los residuales sea igual a cero, sin embargo, se realizó una prueba t para comprobarlo.

* T-test:

$$H_0 : La\ verdadera\ media\ es\ igual\ a\ 0$$

$$H_a : La\ verdadera\ media\ no\ es\ igual\ a\ 0$$

$$t = 6.8721e - 17, df = 47, p - value = 1$$

Como el p-valor=1 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y se verifica lo dicho anteriormente.

- Homocedasticidad:Para analizar la homocedasticidad se realizó una prueba estadística (Test de Barlett)

* Prueba de Barlett:

$$H_0 : Las\ varianzas\ de\ todos\ los\ grupos\ son\ iguales$$

$$H_a : Al\ menos\ una\ delas\ varianzas\ es\ diferente$$

$$Bartlett's\ K - squared = 0.71218, df = 5, p - value = 0.9823$$

Como el p-valor=0.9823 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que al menos entre dos grupos la varianza es diferente, lo que nos indica que este supuesto de homocedasticidad en los errores no se incumple.

- Independencia:Para probar el supuesto de independencia en los errores, no se debe realizar un correlograma o una prueba sobre la autocorrelación(prueba de Durbin-Watson) ya que estas dependen del orden en el cuál se obtuvieron los datos, y esa información no se tiene, por lo tanto, solo se realizará una prueba de rachas.

* Test de rachas:

$$H_0 : La\ muestra\ es\ aleatoria\ (las\ observaciones\ son\ independientes)$$

$$H_a : La\ muestra\ no\ es\ aleatoria\ (las\ observaciones\ no\ son\ independientes)$$

$$Standard\ Normal = -0.77925, p - value = 0.4358$$

Como el p valor=0.4358 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los residuales no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no incumplirse.

Ya que según las pruebas aplicadas, ninguno de los supuestos se incumple, procedemos a realizar e interpretar la ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Concentracion	2	230.82	115.408	13.1712	3.629e-05 ***
Tipo	1	23.23	23.227	2.6508	0.1110
Concentracion*Tipo	2	15.36	7.678	0.8763	0.4238
Residuals	42	368.01	8.762		

Podemos ver que la interacción entre los factores no es significativa, esto quiere decir que en conjunto la concentración de agua de mar con el tipo de molusco no tiene un efecto significativo sobre el porcentaje de O2 en el agua y se deberán analizar los factores por separado.

g. Se realizará la prueba postanova de comparaciones múltiples para cada uno de los factores por separados ya que la interacción no es significativa

Agente	lsmean	SE	df	lower.CL	upper.CL	.group
75	6.99	0.74	42	5.50	8.49	a
100	8.67	0.74	42	7.18	10.16	a
50	12.25	0.74	42	10.76	13.74	b

Podemos ver que en las comparaciones para la concentración si se aprecian diferencias significativas, en este caso entre el tratamiento del 50 % con el resto.

Agente	lsmean	SE	df	lower.CL	upper.CL	.group
B	8.61	0.604	42	7.39	9.83	a
A	10.00	0.604	42	8.78	11.22	a

Para las comparaciones del tipo de molusco notamos que no hay diferencias, por lo que independientemente del tipo de molusco el porcentaje de O2 va a ser el mismo.

h. Primero notamos que la interacción es no significativa por lo que podemos decir que en conjunto el tipo de molusco y la concentración de agua de mar no tienen ningún efecto sobre el porcentaje de O2, sin embargo viéndolo por separado la concentración si presenta un efecto significativo, siendo la concentración 50 % de agua de mar la que mayor porcentaje de O2 presenta, así sin importar cuál sea el tipo de molusco, la concentración de agua de mar en el cual se desarrolla es la que influye en el consumo de oxigeno.