

Diseño Completamente Aleatorizado

KEVIN STEVEN GARCÍA^a, ALEJANDRO VARGAS^b, ALEJANDRO SOTO^c

1. Punto 1

Un fabricante supone que existe diferencias en el contenido de calcio en lotes de materia prima que le son suministrados por su proveedor. Actualmente hay una gran cantidad de lotes en la bodega. Cinco (5) lotes son seleccionados. Un químico realiza 5 pruebas a cada lote y obtiene los siguientes resultados:

LOTE 1	LOTE 2	LOTE 3	LOTE 4	LOTE 5
23.46	23.59	23.51	23.28	23.29
23.48	23.46	23.64	23.4	23.46
23.56	23.42	23.46	23.37	23.37
23.39	23.49	23.52	23.46	23.32
23.4	23.5	23.49	23.39	23.38

- a.
- Unidad experimental: Materia prima
 - Factor: Lote
 - Niveles: Lote 1, Lote 2, Lote 3, Lote 4 y lote 5
 - Tratamientos: Lote 1, Lote 2, Lote 3, Lote 4 y lote 5
 - Variable de respuesta: Contenido de calcio

- b.
- El diseño completamente aleatorizado es adecuado en esta situación, ya que se quiere analizar si existen diferencias entre los lotes de materia prima en cuanto a la concentración de calcio, es decir se investiga el efecto de un factor(lote) con a(5) niveles (o a(5) tratamientos) sobre una variable de respuesta que es contenido de calcio; además, como los lotes son de la misma materia prima y el mismo proveedor, también se podría suponer que las unidades experimentales son homogéneas y, finalmente, de una gran cantidad de lotes se seleccionaron 5 de ellos, es decir, se realizó un proceso de aleatorización en la asignación de unidades experimentales cumpliendo con las 4 características principales del DCA.

- c.
- Estadísticas descriptivas:**

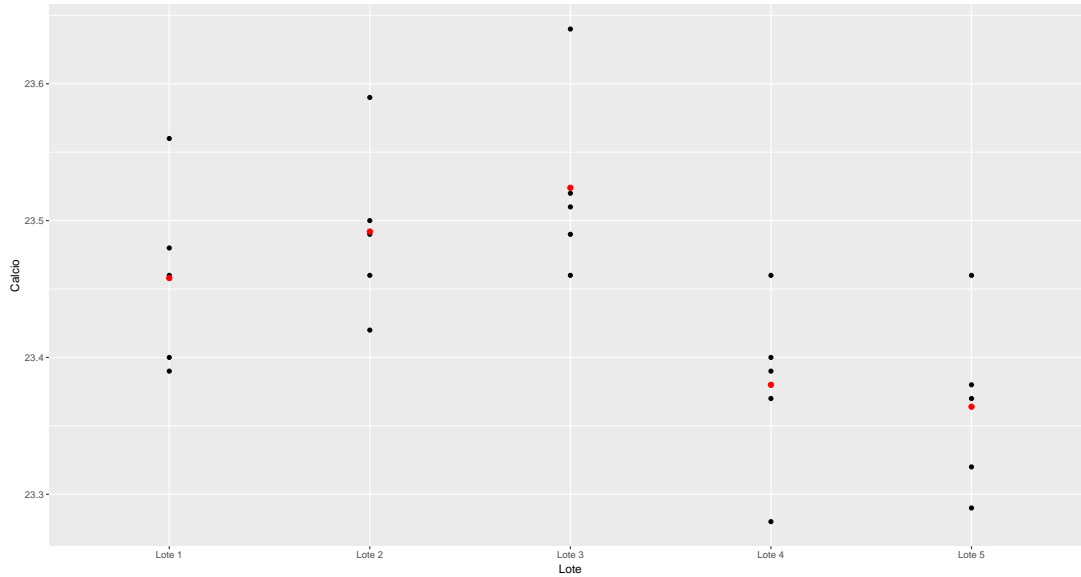
	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
Lote 1	23.39	23.4	23.46	23.458	23.48	23.56	0.068702256	0.29287346
Lote 2	23.42	23.46	23.49	23.492	23.5	23.59	0.063007936	0.26821018
Lote 3	23.46	23.49	23.51	23.524	23.52	23.64	0.068774995	0.29236097
Lote 4	23.28	23.37	23.39	23.38	23.4	23.46	0.065192024	0.27883672
Lote 5	23.29	23.32	23.37	23.364	23.38	23.46	0.06503845	0.27837036

En la tabla anterior, se podría decir a priori, que no se aprecian diferencias significativas entre los lotes en cuanto a la cantidad de calcio que presentan. Todas tienen valores muy parecidos en cada uno de los estadísticos obtenidos. Poseen casi la misma media, mediana y desviación.

^aCódigo: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co

^bCódigo: 1525953. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co

^cCódigo: 1532457. E-mail: asotomurillo@gmail.com



En ésta gráfica dado que el eje y reduce demasiado su escala, se pueden apreciar diferencias decimales, y se observa que en decimales, el lote 1, 2 y 3 son parecidos, siendo el 3 el que más calcio contiene, y los lotes 4 y 5 son casi iguales, y tienen menor calcio que los otros 3 lotes.

d.

Se plantea el siguiente modelo:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5$$

El cuál se construye bajo los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2), \quad E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij}, \quad V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2, \quad cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0$$

Donde:

y_{ij} = Cantidad de calcio en la j-ésima prueba del lote i.

μ = Media general de contenido de calcio por lote sin tener en cuenta el tipo de lote.

τ_i = Efecto del i-ésimo lote sobre el contenido de calcio.

ε_{ij} = Error aleatorio debido al i-ésimo lote en la j-ésima réplica.

e.

Planteamos la siguiente hipótesis:

H_0 : No hay un efecto del factor de tratamiento (lote) sobre la cantidad de calcio.

H_1 : Al menos uno de los tratamientos (lote) tiene un efecto significativo sobre la cantidad de calcio.

f.

Antes de realizar la ANOVA e interpretar los resultados, se comprobarán los supuestos del modelo para saber si las interpretaciones que obtengamos si van a ser correctas.

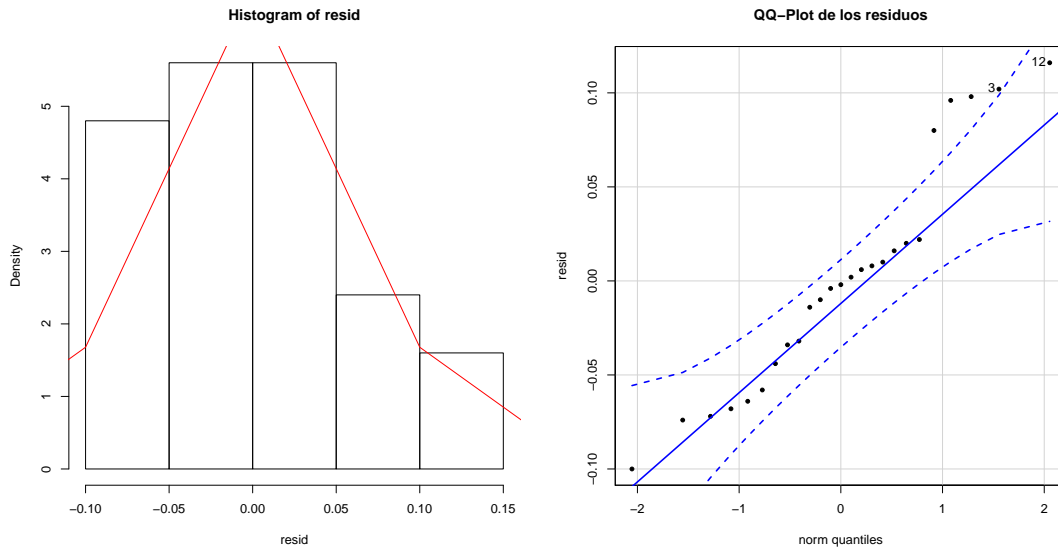
Sobre los errores se tienen los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2) \rightarrow \text{Normalidad}$$

$$E[\varepsilon_{ij}] = 0 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Correcta especificacion}$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \rightarrow \text{Homocedasticidad}$$

$$cov[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}] = 0 \quad \forall_{i \neq i'} \quad \wedge \quad \forall_{j \neq j'} \rightarrow \text{Independencia}$$



- Normalidad: Para probar el supuesto de normalidad, se realizarán dos pruebas gráficas (histograma y QQ-plot) y una prueba estadística(Shapiro Wilk).

* Test Shapiro-Wilk:

H_0 : Los datos provienen de una distribución normal

H_a : Los datos no provienen de una distribución normal

$$W = 0.93593, p - value = 0.1192$$

Como el p-valor=0.1192 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los datos no provienen de una distribución normal, lo que nos indica que este supuesto de normalidad en los errores no se incumple.

- Correcta Especificación: Sabemos que este supuesto siempre se cumple, ya que el método o la construcción del modelo asegura que la esperanza de los residuales sea igual a cero, sin embargo, se realizó una prueba t para comprobarlo.

* T-test:

H_0 : La verdadera media es igual a 0

H_a : La verdadera media no es igual a 0

$$t = 1.9109e - 16, df = 24, p - value = 1$$

Como el p-valor=1 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y se verifica lo dicho anteriormente.

- Homocedasticidad: Para analizar la homocedasticidad se realizó una prueba gráfica(valores ajustados vs residuos) y una prueba estadísticas(Test de Barlett)

* Prueba de Barlett:

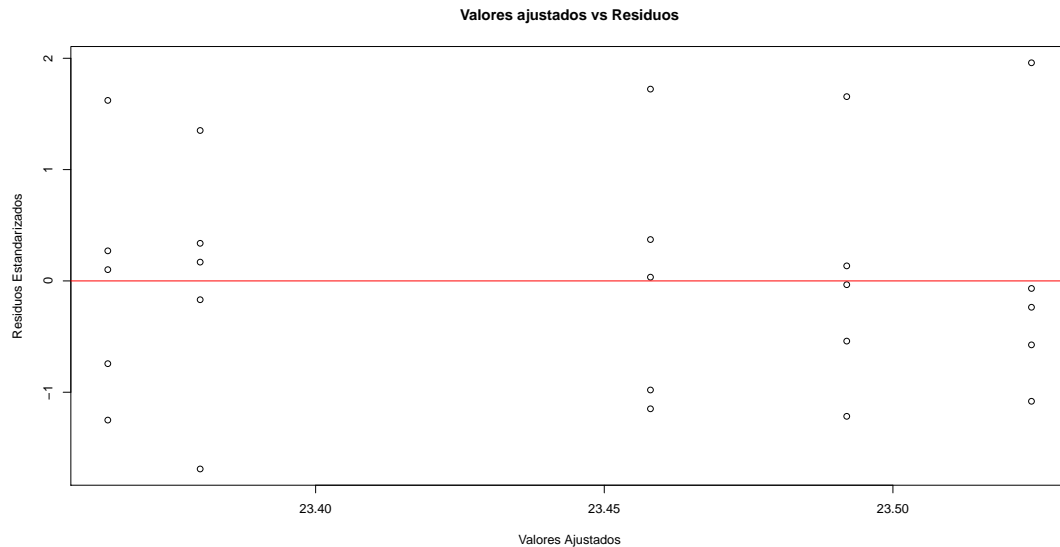
H_0 : Las varianzas de todos los grupos son iguales

H_a : Al menos una de las varianzas es diferente

$$\text{Bartlett's } K - \text{squared} = 0.042264, df = 4, p - value = 0.9998$$

Como el p-valor=0.9998 es superior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que al menos entre dos grupos la varianza es diferente, lo que nos indica que este supuesto de homocedasticidad en los errores no se incumple.

- Independencia: Para probar el supuesto de independencia en los errores, no se debe realizar un correlograma o una prueba sobre la autocorrelación(prueba de Durbin-Watson) ya que estas dependen del orden en el cual se obtuvieron los datos, y esa información no se tiene, por lo tanto, solo se realizará una prueba de rachas.



* Test de rachas:

H_0 : La muestra es aleatoria (las observaciones son independientes)

H_a : La muestra no es aleatoria (las observaciones no son independientes)

Standard Normal = 0.62212, $p - value$ = 0.5339

Como el p valor=0.62212 es mayor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no hay evidencia estadística suficiente para decir que los residuales no están distribuidos de manera aleatoria, en otras palabras, no podemos decir que no son independientes. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que este supuesto de independencia en los errores parece no cumplirse.

Ya que según las pruebas aplicadas, ninguno de los supuestos se incumple, procedemos a realizar e interpretar la ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Lote	4	0.09698	0.02424	5.535	0.00363**
Residuals	20	0.08760	0.00438		

Podemos ver que el p valor=0.00363 es inferior a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, por lo cual se rechaza H_0 planteada en el ítem e, y concluimos que al menos uno de los tratamientos(lote) tiene un efecto significativo sobre la cantidad de calcio.

- g. Se realizará la prueba postanova de Fisher, ya que queremos maximizar la probabilidad de encontrar diferencias significativas, y ésta, al ser no conservadora, tiende a rechazar más hipótesis nulas. Los resultados resumidos para esta prueba son:

	Calcio	groups
Lote 3	23.524	a
Lote 2	23.492	a
Lote 1	23.458	ab
Lote 4	23.380	bc
Lote 5	23.364	c

Los tratamientos con la misma letra no son significativamente diferentes. Es decir, los lotes 3 y 2 no son significativamente diferentes, siendo estos, los que más contenido de calcio tienen. El lote 1 no es significativamente diferentes a los dos lotes mencionados anteriormente, sin embargo, tampoco es diferente al lote 4, esto se podría interpretar como que este lote 1 tiene una cantidad de calcio promedio, lo cual se observa en la gráfica del ítem c. El lote 4 es diferente a los lotes 3 y 2(presenta una cantidad de calcio inferior), y es estadísticamente igual a los lotes 1 y 5. Finalmente el lote 5 es diferente a los lotes 3,2 y 1, y semejante al lote 4, siendo este, el que menor cantidad de calcio presenta.

- h. Las conclusión principal que se obtiene es que la suposición del fabricante sobre la existencia de diferencias en el contenido de calcio en los lotes de materia prima resulto ser cierta, en la ANOVA se detectó que al menos uno de los lotes difiere en cuanto al contenido de calcio. Posteriormente en la prueba postanova de Fisher, se observó que los lotes 3 y 2 son los que más contenido de calcio presentan, el lote 1 presenta un contenido de calcio promedio, y los lotes 4 y 5 son los que menor contenido de calcio tienen. Si nos vamos al contexto de los datos, los resultados nos están diciendo que existen diferencias estadísticamente significativas, sin embargo, estas diferencias pueden no ser grandes para el fabricante, ya que se detectaron diferencias decimales. Entonces queda a decisión del fabricante si realmente acepta la decisión o si por el contrario, las diferencias no le parecen significativas dentro del contexto.
- i. Cuando no se cumple el supuesto de normalidad se realiza la prueba no Paramétrica de Kruskal-Wallis para darnos cuenta si la cantidad de calcio difiere en los diferentes lotes. Los resultados para esta prueba son:

* Prueba de Kruskal-Wallis:

$$H_0 : \text{Las 5 medianas son todas iguales}$$

$$H_1 : \text{Al menos una de las medianas es diferente}$$

$$\text{Kruskal} - \text{Wallis chi} - \text{squared} = 14.441, df = 4, p - \text{value} = 0.006013$$

Dado que el p valor=0.006013 es menor que nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, se rechaza H_0 y concluimos que hay evidencia estadística suficiente para decir que los lotes presentan diferencias en la cantidad de calcio en cuanto a sus medianas.

Se puede observar que cuando realizamos la ANOVA, bajo el supuesto de normalidad, la hipótesis de que los efectos de los lotes de materia prima en la cantidad de calcio es la misma, también se rechazaba a un nivel de significancia $\alpha = 0.05$. Ahora para la comparación dado que la variable de respuesta tiene empates, se tienen los siguientes resultados:

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4
Lote 2	0.973	-	-	-
Lote 3	0.805	0.989	-	-
Lote 4	0.696	0.303	0.106	-
Lote 5	0.523	0.180	0.052	0.999

Aquí podemos ver una contradicción entre la prueba de Kruskal-Wallis y las comparaciones por pares usando Nemenyi-test con Chi-cuadrado, ya que la primera nos dice que si existen diferencias entre las cantidades de calcio de los lotes, pero cuando hacemos las comparaciones entre todos los lotes vemos que todos los p valores son superiores a nuestro nivel de significancia $\alpha = 0.05$, la cuál no nos detecta diferencias entre los pares de lotes.

2. Punto 2

3. Punto 3

Los datos de la tabla siguiente representan la resistencia al machacado de tres materiales (M1, M2, M3) al tratarlos con cuatro productos químicos (A, B, C, D). Existe evidencia de diferencias en la resistencia media entre los cuatro productos químicos?

PRODUCTO QUÍMICO	MATERIAL		
	M1	M2	M3
A	5	9	7
B	3	8	4
C	8	13	9
D	4	6	8

- a.
- Unidad experimental: Los materiales M1, M2, M3.
 - Factor: Tratamiento con los productos químicos (A,B,C,D)
 - Niveles: Productos químicos A, B, C, D
 - Tratamientos: Productos químicos A, B, C, D

- Variable de respuesta: Resistencia al machacado

b.

El Diseño Completamente Aleatorizado (D.C.A) es el adecuado para esta situación ya que solo se quiere medir, el efecto que tiene cada uno de los químicos sobre la resistencia que tiene los materiales al machacado después de haber aplicado cada uno de los 4 (A, B, C, D) productos químicos.

c.

Estadísticas descriptivas:

	Mín	Q1	Mediana	Media	Q3	Máx	Des. Estándar	CV(%)
A	5	6	7	7	8	9	2	28.57143
B	3	3.5	4	5	6	8	2.645751	52.91503
C	8	8.5	9	10	11	13	2.645751	26.45751
D	4	5	6	6	7	8	2	33.33333

De acuerdo a lo que podemos ver en la tabla de estadísticas descriptivas de cada uno de los productos químicos, podemos ver como, todos los productos químicos que estamos comparando están muy cerca entre si en el momento de evaluar la resistencia que tienen ciertos materiales al machacado, podemos ver como la desviación estándar están muy cerca entre los 4 productos y as específicamente la del producto químico A es igual al producto químico D y los productos químicos B y C también lo son, el producto químico B tiene una media y una mediana mucho mayor que los otros, el rango mas amplio en el que se mueve la resistencia es de 5.