

Tarea 4: Multicolinealidad

KEVIN STEVEN GARCÍA^a, ALEJANDRO VARGAS^b

1. Introducción

En este trabajo evaluaremos la presencia de multicolinealidad en el modelo lineal ajustado para los 500 datos seleccionados de la base de datos 'cadata'. Se dará una presentación formal de la multicolinealidad y se mostrarán algunas consecuencias que tiene la presencia de este, además, se describirán y se aplicarán distintos métodos para verificar la presencia o ausencia de esta en nuestro modelo lineal ajustado, posteriormente se tratará de solucionar esto, llevando a cabo estimación por PCR (regresión por componentes principales) y finalmente, se concluirá acerca del modelo teniendo en cuenta los resultados de los métodos aplicados y de la estimación por PCR comparada con los estimadores por MCO (mínimos cuadrados ordinarios).

2. Modelo planteado

El modelo sobre el cuál se va a evaluar la presencia de la multicolinealidad, es el modelo que se planteó en la tarea 1, que pretendía explicar la variable 'Valor mediano de las viviendas' con las variables explicativas 'Ingreso mediano', 'Edad mediana de la vivienda', 'Total de habitaciones', 'Total de dormitorios', 'Población' y 'Hogares'. El modelo planteado para estas variables, sin hacer transformación ni selección de estas es:

$$\begin{aligned} \text{ValorMediano} = & \beta_0 + \beta_1(\text{IngresoMediano}) + \beta_2(\text{EdadMediana}) + \beta_3(\text{TotalDeHabitaciones}) \\ & + \beta_4(\text{TotalDeDormitorios}) + \beta_5(\text{Poblacion}) + \beta_6(\text{Hogares}) \end{aligned}$$

3. Multicolinealidad

La multicolinealidad implica una dependencia casi lineal entre los regresores, los cuales son las columnas de la matriz X , por lo que es claro que una dependencia lineal exacta causaría una matriz $X^T X$ singular. La presencia de dependencias casi lineales puede influir en forma dramática sobre la capacidad de estimar coeficientes de regresión afectando la precisión de las estimaciones. Cuando existe multicolinealidad en nuestro modelo, el análisis por mínimos cuadrados puede ser totalmente inadecuado.

La multicolinealidad se da por cuatro fuentes principales:

^aCódigo: 1533173. E-mail: kevin.chica@correounivalle.edu.co

^bCódigo: 1525953. E-mail: jose.alejandro.vargas@correounivalle.edu.co

1. El método de recolección de datos que se empleó: Puede originar problemas de multicolinealidad cuando el analista sólo muestrea un subespacio de la región de los regresores definidos.
2. Restricciones en el modelo o en la población: Las restricciones en el modelo o en la población que se muestrea pueden causar multicolinealidad; por ejemplo, supóngase que una empresa eléctrica está investigando el efecto del ingreso familiar (X_1) y el tamaño de la vivienda (X_2) sobre el consumo eléctrico residencial. En este ejemplo, una restricción física en la población fue lo que causó este fenómeno: las familias que tienen ingresos mayores en general tienen casas mayores que las familias de menores ingresos, cuando hay restricciones físicas como ésta, habrá multicolinealidad independientemente del método de muestreo que se emplee.
3. Especificación del modelo: También se puede inducir la multicolinealidad por la elección del modelo. Por ejemplo, al agregar términos polinomiales a un modelo de regresión se produce un deterioramiento en $X^T X$, además, si el rango de X es pequeño, al agregar un término en X^2 puede producirse una multicolinealidad importante.
4. Un modelo sobredefinido: Cuando se tienen mas variables regresoras que observaciones se puede generar un problema de multicolinealidad.

Una multicolinealidad fuerte entre los regresores del modelo, da como resultado grandes varianzas y covarianzas de los estimadores de coeficientes de regresión por mínimos cuadrados. Esto implica que distintas muestras tomadas con los mismos valores de X podrían ocasionar estimaciones muy diferentes de los parámetros del modelo.

4. Métodos para detectar la multicolinealidad

Para este trabajo se utilizaran los métodos de diagnostico expuestos en el libro (Douglas C. Montgomery 2002), que son los siguientes:

1. Examen de la matriz de correlación: Una medida muy sencilla de la multicolinealidad es la inspección de los elementos r_{ij} no diagonales en la matriz de correlaciones. Si los regresores x_i y x_j son casi linealmente dependientes $|r_{ij}|$ será próximo a 1. Para nuestros datos, la matriz de correlaciones es la siguiente:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.01725 & 0.07903 & -0.18136 & -0.16257 & -0.16049 \\ & 1 & -0.31169 & -0.17024 & -0.26517 & -0.14456 \\ & & 1 & 0.86207 & 0.85768 & 0.86527 \\ & & & 1 & 0.83406 & 0.98870 \\ & & & & 1 & 0.85391 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de correlaciones R , nos muestra perfectamente la alta correlación que existe entre las últimas 4 variables regresoras o explicativas (Total de habitaciones, total de dormitorios, población y hogares), por lo cuál es casi evidente que una o varias de estas sobran en el modelo y pueden ocasionar multicolinealidad.

2. Factores de inflación de varianza: Los elementos diagonales de la matriz $C = (X^T X)^{-1}$ son muy útiles para detectar la multicolinealidad. C_{jj} , el j -ésimo elemento diagonal de C se puede escribir en la forma $C_{jj} = (1 - R_j^2)^{-1}$ siendo R_j^2 el coeficiente de determinación obtenido cuando se hace la regresión de x_j respecto a los demás $p - 1$ regresores. Si x_j es casi ortogonal a los regresores

restantes, R_j^2 es pequeño y C_{jj} es cercano a 1, mientras que si x_j es casi linealmente dependiente en algún subconjunto de los regresores restantes, R_j^2 es casi lineal y C_{jj} es grande. Como la varianza de los j -ésimos coeficientes de regresión es $C_{jj}\sigma^2$ se puede considerar que C_{jj} es el factor en el que aumenta la varianza de $\hat{\beta}_j$ debido a dependencias casi lineales entre los regresores.

Entonces se define el factor de inflación de varianza como:

$$VIF_j = C_{jj} = (1 - R_j^2)^{-1}$$

El factor VIF (de variance inflation factor) para cada término del modelo mide el efecto combinado que tienen las dependencias entre los regresores sobre la varianza de ese término. Si hay uno o más VIF grandes, hay multicolinealidad. El criterio dice que si cualquiera de los VIF es mayor que 5 o 10, es indicio de que los coeficientes asociados de regresión están mal estimados debido a la multicolinealidad.

Los VIF_i para este modelo son:

VARIABLE	Ing.Mediano	Edad Mediana	T.Habitaciones	T.Dormitorios	Población	Hogares
VIF	1.565795	1.271698	8.203393	52.2694	5.675371	56.12648

3. Análisis del eigensistema de $X^T X$:

Las raíces características, o eigenvalores o valores propios de $X^T X$, por ejemplo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ se pueden usar para medir el grado de multicolinealidad en los datos. Si hay una o más dependencias casi lineales en los datos, una o más de las raíces características será pequeña. Uno o más eigenvalores pequeños implican que hay dependencias casi lineales entre las columnas de X . Algunos analistas prefieren examinar el número de condición de $X^T X$, que se define como

$$k = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

En general, si el número de condición es menor que 100, no hay problema grave de multicolinealidad. Los números de condición de 100 a 1 000 implican multicolinealidad de moderada a fuerte, y si k es mayor que 1 000, es indicio de una fuerte multicolinealidad. Los Índices de condición de la matriz $X^T X$ son

$$k_j = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_j}; j = 1, 2, \dots, p$$

La cantidad de índices de condición que son grandes (digamos, ≥ 1000) es una medida útil de la cantidad de dependencias casi lineales en $X^T X$.

Los valores propios para la matriz $X^T X$ correspondiente a nuestros datos son:

$\lambda_1 = 5899151649, \lambda_2 = 71014417, \lambda_3 = 22677581, \lambda_4 = 2338923, \lambda_5 = 617446.6, \lambda_6 = 66680.87, \lambda_7 = 953.785, \lambda_8 = 248.5233$

De aquí, tenemos que $\lambda_{max} = 5899151649$ y $\lambda_{min} = 248.5233$, por lo tanto el número de condición es:

$$k = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{5899151649}{248.5233} = 23736815.22$$

Y los índices de condición son:

$$k_1 = \frac{5899151649}{5899151649} = 1, k_2 = \frac{5899151649}{71014417} = 83.069775, k_3 = \frac{5899151649}{22677581} = 260.131433$$

$$k_4 = \frac{5899151649}{2338923} = 2522.165821, k_5 = \frac{5899151649}{617446.6} = 9554.10824, k_6 = \frac{5899151649}{66680.87} = 88468.42654$$

$$k_7 = \frac{5899151649}{953.785} = 6184991.008, k_8 = \frac{5899151649}{248.5233} = 23736815.22$$

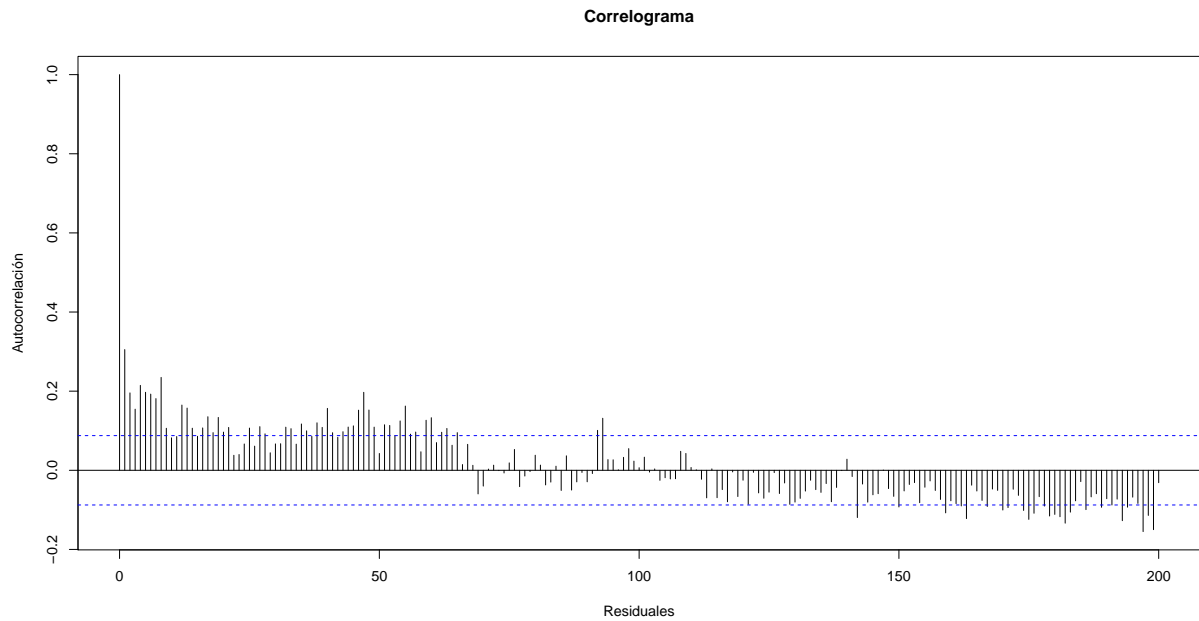


FIGURA 1: Correlograma de los residuales

5. Conclusiones

Referencias

- Douglas C. Montgomery, Elizabeth A. Peck, G. G. V. (2002), *Introducción al análisis de regresión lineal*, tercera edn, Compañía Editorial Continental.
- Faraway, J. J. (2005), *Extending the Linear Model with R: Generalized Linear, Mixed Effects and Non-parametric Regression Models*, Vol. 1 edn., Chapman y Hall / CRC.
- Gómez, N. G. (2006), *Notas de clase: Series de tiempo con R*, Universidad Nacional de Colombia.
- Gutiérrez, R. B. (2003), 'Validación de supuestos en el modelo de regresión', *Serie Monografías* **1** edn.