

NOM :

PRENOM :

Numéro d'étudiant :

Utilisez uniquement les espaces encadrées prévues pour répondre.

1 On considère la fonction $taille(p)$ qui étant donnée une formule propositionnelle p désigne sa taille (en nombre de nœuds, y compris les feuilles) de l'arbre syntaxique correspondant. Par exemple $taille((u \vee (\neg u \wedge y))) = 6$ et $taille(\neg u) = 2$.

On considère également la fonction $hauteur(p)$ qui étant donnée une formule propositionnelle p désigne la hauteur de l'arbre syntaxique correspondant. Par exemple, $hauteur(((\neg u \wedge e) \vee u)) = 4$ et $hauteur((u \vee (\neg u \wedge e))) = 4$ et $hauteur(\neg u) = 2$. Complétez les définitions récursives suivantes :

- $taille((p \wedge q)) =$, $hauteur((p \wedge q)) =$
- $taille(u) =$, $hauteur(u) =$
- $taille(\neg p) =$, $hauteur(\neg p) =$
- $taille((p \vee q)) =$, $hauteur((p \vee q)) =$

2 Formalisez les phrases suivantes en logique propositionnelle (vous pouvez utiliser l'implication). Indiquez pour chaque variable propositionnelle que vous utilisez à quoi elle correspond.

1. b
2. Si Paris est belle, alors Berlin est belle.
3. e
4. a
5. d
6. c
7. Si Berlin n'est pas belle, alors ni Paris ni Rome sont belles.
8. Paris est belle.
9. f
10. g

3 On considère l'affectation $v = []$, qui associe à chaque variable la valeur de vérité 0. Montrer par induction structurelle sur les formules que pour toute formule p qui ne contient pas \neg , on a $\llbracket p \rrbracket v = 0$. N.B. : dans la preuve le cas $\neg p$ n'est pas considéré.

4 On considère les affectations suivantes : $v_1 = [b \mapsto 1]$ $v_2 = [b \mapsto 1, g \mapsto 1]$ $v_3 = [g \mapsto 1, z \mapsto 1]$.
Remplissez le tableau suivant (0 ou 1 dans les trois premières colonnes et *vrai* ou *faux* dans le reste) :

Formule p	$\llbracket p \rrbracket v_1$	$\llbracket p \rrbracket v_2$	$\llbracket p \rrbracket v_3$	p valide ?	p satisfaisable ?	p contradictoire ?
$((\neg b \vee g) \wedge b)$						
$(\neg g \wedge (z \wedge (b \wedge g)))$						
$((b \wedge z) \vee ((\neg b \wedge z) \vee \neg z))$						