

# FEUILLE TD 2 – EXERCICES ALGÈBRE – GROUPES II

► Cette feuille de TD nous occupera deux semaines.

## Exercices fondamentaux de la semaine 1

**EXERCICE 1 — QUELQUES ISOMORPHISMES CLASSIQUES.** Soit  $k$  un corps.

1. Montrer que si  $V$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie, alors  $V \otimes_k k \cong V$ .
2. Soient  $V_1, V_2, V_3$  trois  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que  $(V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 = V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$  et en préciser la dimension.
3. Soient  $I$  un ensemble,  $(V_i)_{i \in I}$  une famille de  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie ainsi que  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que

$$V \otimes_k \left( \bigoplus_{i \in I} V_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} V \otimes_k V_i.$$

**EXERCICE 2 — PRODUIT TENSORIEL ET APPLICATIONS LINÉAIRES.** Soient  $k$  un corps et  $V, V', W, W'$  des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Construire une application linéaire  $\varphi : \text{Hom}_k(V, V') \otimes_k \text{Hom}_k(W, W') \rightarrow \text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W')$ . Donner pour  $f \in \text{Hom}_k(V, V')$ ,  $g \in \text{Hom}_k(W, W')$ , la matrice de l'application  $\varphi(f \otimes g)$  dans une base adaptée.
2. Montrer que c'est un isomorphisme.
3. Montrer que, si l'on note  $V^*$  le dual de  $V$ , alors on a un isomorphisme entre  $\theta_{V, W} : V^* \otimes_k W \rightarrow \text{Hom}_k(V, W)$ . Montrer alors que  $f \in \text{Hom}_k(V, W)$  est de rang  $r$  si, et seulement si,  $r$  est le plus petit entier naturel tel que  $\theta_{V, W}^{-1}(f)$  s'écrit comme une somme de  $d$  tenseurs élémentaires non nuls.
4. Décrire un isomorphisme entre  $V^* \otimes_k V^*$  et  $(V \otimes_k V)^*$ . Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de  $G$ -modules si  $V$  est un  $G$ -module pour  $G$  un groupe fini.
5. Montrer que l'application

$$\begin{cases} V \times V^* & \longrightarrow k \\ (x, f) & \longmapsto f(x) \end{cases}$$

fournit une application  $e : V \otimes_k V^* \rightarrow k$ . Que vaut  $e \circ \theta_{V, V}^{-1}$ ?

**EXERCICE 3 — LE GROUPE  $\mathfrak{S}_3$ .**

1. On considère l'action de  $\mathfrak{S}_3$  sur  $\mathbb{C}^3$  par permutation des coordonnées. Vérifier que cela définit une structure de  $\mathfrak{S}_3$ -module sur  $\mathbb{C}^3$ . Préciser sa représentation matricielle dans la base canonique.
2. Montrer que  $\mathbb{C}^3$  admet deux sous- $\mathfrak{S}_3$ -modules non triviaux  $\mathbb{C}(1, 1, 1)$  et  $H = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  et que chacun de ceux-ci sont simples.
3. Donner une représentation matricielle de la représentation  $H$ .

On note à présent  $\sigma = (1\ 2\ 3)$ ,  $\tau = (1\ 2)$  et  $V$  une représentation de  $\mathfrak{S}_3$ .

4. Montrer que  $V$  se décompose en  $V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$  où  $V_\alpha$  est le sous-espace propre de  $\sigma$  associé à la valeur propre  $\alpha$ .
5. Montrer que  $\tau(V_\alpha) = V_{\alpha^2}$  pour  $\alpha \in \{1, j, j^2\}$ . En déduire que  $V_1$  et  $V_j \oplus V_{j^2}$  sont deux sous- $\mathfrak{S}_3$ -modules de  $V$ .
6. Que peut-on en déduire si  $V$  est irréductible?
7. On suppose que  $V$  est irréductible et que  $V_1 \neq \{0\}$ . Montrer que  $V$  est de dimension 1 et est soit la représentation triviale soit la signature.
8. On suppose que  $V$  est irréductible et que  $V_j \neq \{0\}$ . Soit  $v \in V_j \setminus \{0\}$ . Montrer que l'espace vectoriel engendré par  $v$  et  $\tau(v)$  est un plan  $\mathfrak{S}_3$ -stable. En déduire que  $V$  est  $\mathfrak{S}_3$ -isomorphe à  $H$ .
9. Généraliser cette méthode au groupe  $D_4$ .

## Exercices complémentaires de la semaine 1

**EXERCICE 4 — EXTENSION DES SCALAIRES.**

1. Soient  $k \subseteq K$  deux corps et  $V$  un  $k$ -espace vectoriel. Munir  $V_K := V \otimes_k K$  d'une structure de  $K$ -espace vectoriel.
2. Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  une  $k$ -base de  $V$ . Exhiber une  $K$ -base de  $V_K$  et comparer  $\dim_k(V)$  et  $\dim_K(V_K)$ .
3. Soient  $W$  un  $k$ -espace vectoriel et  $f : V \rightarrow W$  une application  $k$ -linéaire. Montrer que  $f_K = f \otimes \text{Id}_K : V_K \rightarrow W_K$  est une application  $K$ -linéaire. On fixe une base  $\mathcal{C}$  de  $W$ . Comparer la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  et celle de  $f_K$  dans les bases correspondantes de la question 2.

4. On suppose que  $V$  est un  $G$ -module sur  $k$  avec  $G$  un groupe fini. Construire sur  $V_K$  une structure de  $G$ -module sur  $K$  ayant la même représentation matricielle que celle de  $V$ .  
Une représentation de  $G$  sur  $K$  qui est de la forme  $V_K$  pour une représentation  $V$  de  $G$  sur  $k$  est dite *réalisable sur  $k$* .

**EXERCICE 5 — UN MODULE NON SEMI-SIMPLE.** Soient  $G$  un groupe fini,  $p$  un nombre premier et  $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

- Montrer que la droite de  $k[G]$  engendrée par  $\sum_{g \in G} g$  est un sous- $G$ -module de  $k[G]$  qui n'admet pas de supplémentaire.
- En déduire que  $k[G]$  n'est pas un  $G$ -module semi-simple.

**EXERCICE 6 — CENTRE ET LEMME DE SCHUR.** Soient  $G$  un groupe fini et  $V$  une représentation irréductible de  $G$  sur un corps algébriquement clos.

- Montrer que tout élément du centre de  $G$  agit sur  $V$  comme une homothétie.
- En déduire que si le centre de  $G$  n'est pas cyclique, la représentation de  $V$  n'est pas fidèle.

## Exercices fondamentaux de la semaine 2

**EXERCICE 7 — GROUPES D'ORDRE  $pq$  ET  $p^3$ .**

- Soient  $p < q$  deux nombres premiers distincts. On considère  $G$  un groupe non abélien d'ordre  $pq$ . Montrer que  $D(G)$  est l'unique  $q$ -Sylow de  $G$ . Déterminer alors le groupe des caractères linéaires de  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^*$  et le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de  $G$  sur  $\mathbb{C}$ .
- Soit  $p$  un nombre premier et  $G$  un groupe d'ordre  $p^3$  non abélien. Montrer que  $D(G) = Z(G)$  est d'ordre  $p$ . Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de  $G$  sur  $\mathbb{C}$ .

**EXERCICE 8 — IRRÉDUCTIBILITÉ.** Soient  $G$  un groupe fini,  $k$  un corps de caractéristique nulle et  $\chi$  un caractère de  $G$  sur  $k$ .

- On suppose  $k$  algébriquement clos. Montrer que si  $\chi$  est irréductible, alors  $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$ .
- Montrer que  $\langle \chi, \chi \rangle_G$  est une somme de carrés d'entiers.
- En déduire que si  $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$ , alors  $\chi$  est irréductible.

**EXERCICE 9 — TABLES DE CARACTÈRES.**

- Déterminer la table de caractères de  $\mathfrak{S}_3$ .
- Soit  $G$  un groupe fini et  $V$  une représentation irréductible de  $G$  sur  $\mathbb{C}$  et  $\chi$  un caractère linéaire de  $G$ . Montrer que  $\chi \otimes V$  est une représentation irréductible de  $G$ .
- Déterminer la table de caractères de  $\mathfrak{S}_4$ .
- Déterminer la table de caractères de  $\mathbb{H}_8$ .

**EXERCICE 10 — DIMENSIONS DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES.** Soit  $G$  un groupe fini. Le but de cet exercice est d'établir que les dimensions des représentations irréductibles sur  $\mathbb{C}$  divise l'ordre de  $G/Z(G)$ .

- Construire sur  $V^{\otimes m}$  une structure de  $G^m$ -module. Montrer que la représentation associée est irréductible.
- Montrer que si  $g \in Z(G)$ , alors  $\rho_V(g)$  est une homothétie. On notera  $\lambda(g)$  son rapport.
- On note  $H$  le sous-groupe de  $G^m$  formé des éléments  $(g_1, \dots, g_m)$  avec  $g_i \in Z(G)$  et  $g_1 g_2 \cdots g_m = 1$ . Montrer que  $H$  agit trivialement sur  $V^{\otimes m}$ . En déduire que  $V^{\otimes m}$  fournit en fait une représentation de  $G^m/H$  irréductible.
- En déduire que  $\dim(V) \mid \#G/Z(G)$ .

## Exercices complémentaires de la semaine 2

**EXERCICE 11.** Soit  $G$  un groupe.

- Calculer  $\text{End}_G(k[G])$ .
- Montrer que  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$  est semi-simple et en déterminer les composantes isotypiques.
- En déduire que  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$  est isomorphe, en tant que  $\mathbb{C}$ -algèbre, à  $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

**EXERCICE 12 — GROUPE DIÉDRAL.** On pose  $G = D_4$ .

- Déterminer  $D(G)$  et  $G^{\text{ab}}$ .
- Montrer que les représentations irréductibles de  $G$  sur  $\mathbb{C}$  sont de dimension inférieure ou égale à 2.
- Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de  $G$  sur  $\mathbb{C}$ . Déterminer une réalisation matricielle de chacune d'entre elles. Comparer avec  $\mathbb{H}_8$ . Que peut-on en déduire?