1

TD2 : Séries de Fourier

EXO 1 : Un premier exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-Périodique

et $\forall t \in [-\pi, \pi[$, $f(t) = t^2$

Rappel :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique

coeff de Fourier réels :

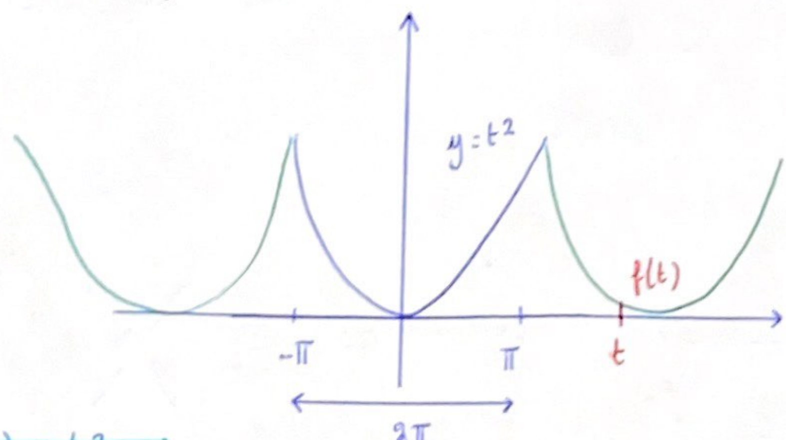
$$(a_n(f))_{n \geq 0} \qquad (b_n(f))_{n \geq 1}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_d^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \qquad \text{et} \quad a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$$

1)



Rmq : $f(t) \neq t^2$ si $t \notin [-\pi, \pi[$

- f continue car on la trace sans lever le crayon

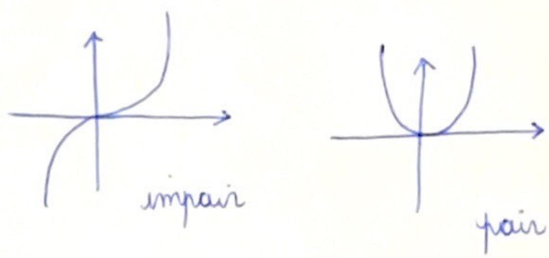
- f est C^1 par morceaux ?

Rappel : C^1 par morceaux

$\Leftrightarrow$ f dérivable partout sauf éventuellement en un nbre fini de pics ou de discontinuités

Donc f C^1 par morceaux car continue et dérivable partout sauf en un nbre fini de pics sur la feuille.

2) 1er réflexe : f pair ou impair ou rien du tout ?



Ici le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dc f paire.

D'où $b_n(f) = 0 \quad \forall n \geq 1$

Calculons alors

① $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \neq \frac{1}{2\pi}\cancel{\int_0^{2\pi}} t^2\,dt$ NON

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt$ car f est 2π-périodique et $[-\pi, \pi]$ est de longueur 2π et $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$

$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\right)$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right)$

$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\left(\frac{\cancel{2\pi}^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$ $\boxed{\text{Ainsi } a_0(f) = \frac{\pi^2}{3}}$

② ② Soit $n \geq 1$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt$$

même justification que précédemment

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt \quad (\text{car } t \mapsto t^2\cos(nt) \text{ paire})$$

IPP $\int uv' = [uv] - \int u'v$

$$\left(\text{Ici} \quad \begin{cases} u(t) = t^2 & u'(t) = 2t \\ v'(t) = \cos(nt) & v(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n} \end{cases}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t\frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\pi^2\frac{\sin(n\pi)}{n}} - 0 - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt\right)$$

car $\sin(n\pi) = 0$

Finalement,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \times \frac{-2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt$$

Nouvelle IPP

$$\begin{cases} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = \sin(nt) & v(t) = -\dfrac{\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

$$a_n(f) = \frac{-4}{n\pi}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1 \times (-\cos nt)}{n}\,dt\right)$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\left(-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} - \left(-0\frac{\cos(0)}{n}\right) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt\right)$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(\frac{-\pi}{n}(-1^n) + \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^\pi \cos(nt)\,dt}_{= \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{\sin(n\pi)}{n} - \frac{\sin 0}{n} = 0} \right)$$

car $\cos(n\pi) = (-1)^n$

donc $a_n(f) = \frac{-4}{n\pi} \times \frac{-\pi}{n}(-1)^n$

$$= \boxed{\frac{4(-1)^n}{n^2}}$$

Rappel : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique

La série de Fourier de f est la série

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$a_0(f) + \sum_{n \geq 1} \left(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt) \right)$$

Ici, on obtient

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nt) + 0 \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

3

Théorème de Dirichlet continu

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 2π-périodique, C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = a_0(b) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(b)\cos(nt) + b_n(b)\sin(nt)\right)$$

Ici, f 2π-périodique, continue, C^1 par morceaux dc par Dirichlet,

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \cos(nt) \text{ cv}$$

et $\forall \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)}$$

Etudier $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Ici, posant $= 0$

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(0)}_{=1}$$

$$\boxed{0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}}$$

donc $4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{3}$

et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$ avec converge de la série

Ici, pour $t = \pi$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(n\pi)}_{= (-1)^n}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

donc $4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$

$= \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ avec convergence

<u>Parseval</u>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π- périodique

C^1 par morceaux alors

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$$

converge et

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

6

$$\frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\right)^2 + 0^2\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

D'autre part, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2 dt$ f 2π-périodique

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^2)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^5}{5} - \frac{(-\pi)^5}{5}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^5}{5} + \frac{\pi^5}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5}$$

et $\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ donc

$8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

avec convergence de la série.