Analyse de Fourier et géométrie : DM 1

Exercice 1 — Suites, séries et intégrales. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} \mathrm{d}x.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$. En déduire la valeur de I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité

$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

4. En utilisant un encadrement de $\ln(x)$ pour $x \in [1, e]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!}$.
6. Déduire des questions précédentes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{n!}$ puis que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}$ converge ainsi que la valeur de sa somme.

Solution — Sur 8 points.

1. (**sur 1 point**) La fonction ln étant dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto 1 + \ln(x)$ l'est et la fonction inverse étant dérivable sur $]0, +\infty[$, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables et[1]

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times (1 + \ln(x))}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln(x))}{x^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2}.}$$

On constate donc qu'une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est donnée par $-f$ si bien que

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} \mathrm{d}x = [-f(x)]_1^e = -f(e) - (-f(1)) = -f(e) + f(1).$$

On calcule alors

$$f(1) = \frac{1 + \ln(1)}{1} = 1 \quad \text{car} \quad \ln(1) = 0$$

et

$$f(e) = \frac{1 + \ln(e)}{e} = \frac{2}{e} \quad \text{car} \quad \ln(e) = 1.$$

Finalement, il vient

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}.}$$

2. (**sur 2 points**) On veut partir de

$$I_{n+1} = \int_1^e \frac{\ln(x)^{n+1}}{x^2} \mathrm{d}x$$

et aboutir, grâce à une intégration par parties, à

$$I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} \mathrm{d}x.$$

1. On applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et on rappelle que la dérivée de ln est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Pour faire diminuer la puissance de ln, il faut dériver $\ln(x)^{n+1}$ et on pose donc [2]

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} u'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times \ln(x)^n = \frac{n+1}{x} \ln(x)^n \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

On obtient ainsi [3] par intégrations par parties

$$I_{n+1} = \left[-\frac{\ln(x)^{n+1}}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{n+1}{x} \ln(x)^n \times \left(-\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)^{n+1}}{x}\right]_1^e + (n+1) \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} \mathrm{d}x. \qquad (*)$$

On calcule alors

$$\left[-\frac{\ln(x)^{n+1}}{x}\right]_1^e = -\frac{\ln(e)^{n+1}}{e} + 0 = -\frac{1}{e}$$

car $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$. Par ailleurs, on reconnaît

$$\int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} \mathrm{d}x = I_n$$

si bien que $(*)$ devient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n.}$$

3. (**sur 1,5 point**) Établissons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en utilisant les deux questions précédentes.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, je rappelle que $0! = 1$ et on obtient par conséquent

$$\frac{I_0}{0!} = I_0 = \int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} + 1$$

  et d'autre part

$$1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{0!} = 1 - \frac{1}{e}$$

  si bien que

$$\frac{I_0}{0!} = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}$$

  et on a notre propriété au rang [4] 0.

- **Hérédité** : Soit alors $n \in \mathbb{N}$ et supposons que l'on ait

$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

  On cherche alors à établir que

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}.$$

---

2. En effet, je rappelle que la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ et qu'en dérivant u^n, on obtient $nu'u^{n-1}$.
3. Je rappelle que $\int u'v = [uv] - \int uv'$.
4. Cela n'est pas utile ici, mais noter que la première question fournit que

$$\frac{I_1}{1!} = I_1 = 1 - \frac{2}{e} \quad \text{tandis que} \quad 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right) = 1 - \frac{2}{e}$$

car $0! = 1! = 1$ et on a la propriété au rang 1 également !

D'après la question **2.**, on a

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

si bien que

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{1}{e} \times \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!}I_n.$$

On a alors

$$\frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \times (n+1)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} = \frac{1}{n!}$$

de sorte que

$$\frac{n+1}{(n+1)!}I_n = \frac{I_n}{n!}.$$

On a ainsi

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{1}{e} \times \frac{1}{(n+1)!} + \frac{I_n}{n!}$$

et par hypothèse de récurrence, on obtient

$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

qui entraîne que [5]

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{1}{e} \times \frac{1}{(n+1)!} + 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{e}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right).$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$$

et finalement

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$$

et on a bien obtenu l'hérédité.

En conclusion, on a ainsi démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.}$$

4. (**sur 1 point**) La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ si bien que

$$\forall x \in [1, e], \quad \ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(e) \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On en déduit alors par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$ que

$$\forall x \in [1, e], \quad 0 \leqslant \ln(x)^n \leqslant 1^n = 1$$

puis comme $x^2 > 0$ sur $[1, e]$ que

$$\forall x \in [1, e], \quad 0 \leqslant \frac{\ln(x)^n}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Par positivité de l'intégrale, il vient

$$0 \leqslant \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = I_0 = 1 - \frac{1}{e}.$$

On a alors $1 - \frac{1}{e} < 1$ et on reconnaît I_n au milieu de sorte qu'il vient bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant 1.}$$

5. La seconde égalité provenant d'une factorisation par $\frac{1}{e}$.

5. (**sur 1 point**) On l'a vu dans le cours. On a pour tout entier $n \geqslant 1$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \geqslant n > 0$$

de sorte que par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, il vient

$$0 \leqslant \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et par le lemme d'encadrement, on a bien $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0.}$

6. (**sur 1,5 point**) D'après la question **4.**, on a pour tout entier naturel n et puisque $n! \geqslant 0$, la double inégalité

$$0 \leqslant \frac{I_n}{n!} \leqslant \frac{1}{n!}$$

avec $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ d'après la question précédente. Le lemme d'encadrement fournit alors à nouveau que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n!} = 0.}$
La question **3.** fournit que pour tout entier naturel n

$$1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{I_n}{n!}.$$

Or, on vient de voir que $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$ de sorte que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 \quad \text{soit} \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

On en déduit donc que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}$, définie par $(S_n)_{n \geqslant 0}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers e, ce qui, par définition, signifie que $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \text{ converge et que sa somme vaut } e,}$ autrement dit

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e.}$$

► **REMARQUE**– Noter qu'on avait vu en cours que le critère de d'Alembert fournissait la convergence de cette série mais pas sa valeur que l'on obtient ici. On avait obtenu cette valeur dans le TD I par une autre méthode à base de suites adjacentes. De façon plus générale, on peut établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et que sa somme vaut e^x, autrement dit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

EXERCICE 2 — SÉRIES DE FOURIER. On note f la fonction 2π-périodique et paire définie par

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x \in]1,\pi]. \end{cases}$$

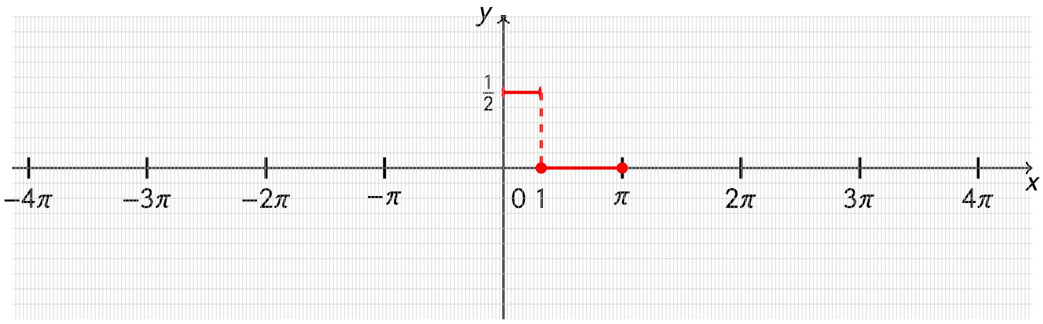
1. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[0,\pi]$, puis sur $[-\pi,\pi]$ et enfin sur $\mathbb{R}$. Préciser si f est continue et le cas échéant les points où elle est discontinue. Est-elle continue par morceaux ? De classe C^1 par morceaux ?
2. Que vaut $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Justifier !
3. Soit $n \geqslant 0$. Montrer que les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ et $t \mapsto |f(t)|^2$ sont paires et en déduire que
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t.$$
4. Montrer que $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}$ et que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \frac{\sin(n)}{\pi n}.$$
5. En déduire les coefficients de Fourier complexes de f.
6. Montrer que pour tout $t \neq \pm 1 + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et t qui n'est pas un multiple entier de 2π, on a
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\pi n}\cos(nt)$$
avec convergence de la série en jeu. Que se passe-t-il en un multiple entier de 2π et en $t = \pm 1 + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$?
7. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n}$ converge et que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$
8. En admettant[6] que pour tout entier n, $\sin(2n) = 2\sin(n)\cos(n)$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(2n)}{n}$ converge et préciser la valeur de sa somme[7].
9. Que pouvez-vous dire de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$?
10. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t$ puis utiliser l'égalité de Parseval pour obtenir que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$ converge et que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

---

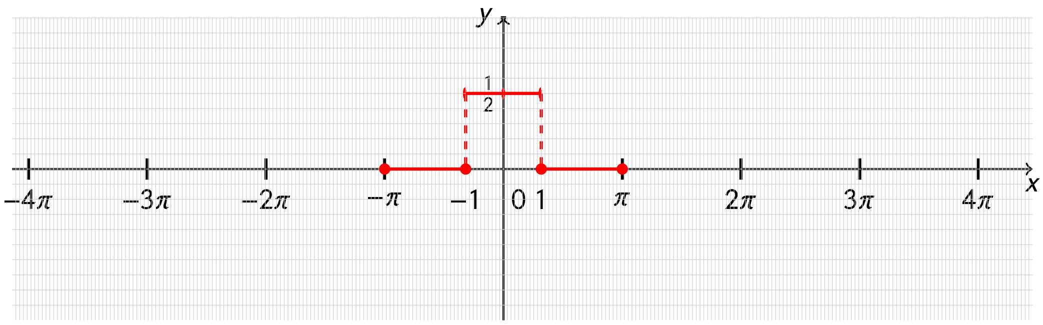
6. Démontrer cette formule à partir de la partie imaginaire de e^{2in} calculée de deux façons comme dans les exercices sur le cours 2 vaut 1 point bonus !
7. Autrement dit, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.

SOLUTION — SUR 14 POINTS.

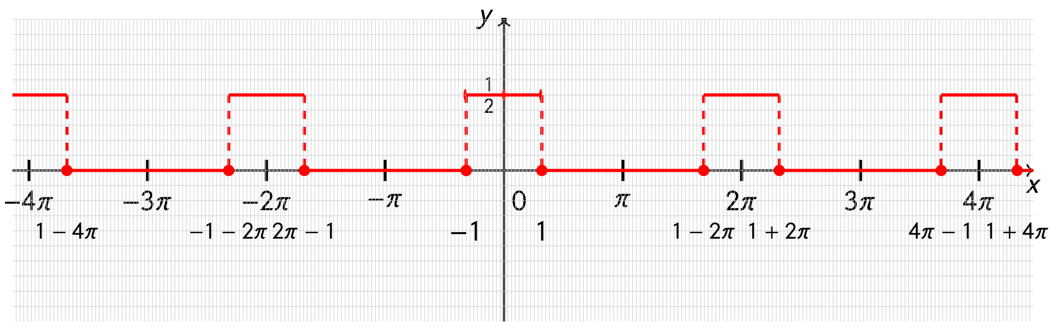
1. (**sur 1 point**) On commence par tracer le graphe sur $[0, \pi]$, intervalle sur lequel on a une formule explicite pour la fonction f.



On en déduit alors le graphe sur $[-\pi, 0]$ en utilisant le fait que l'énoncé spécifie que la fonction f est paire. Il suffit alors de tracer le symétrique de la portion de graphe par rapport à l'axe des ordonnées.



Finalement, on a obtenue le tracé sur $[-\pi, \pi]$, qui est un intervalle de longueur la période (à savoir 2π) et donc on en déduit le graphe de f sur tout $\mathbb{R}$ en effectuant des translations du graphe ci-dessus vers la gauche et vers la droite de longueur tous les multiples entiers de la période[8]. Cela fournit le graphe suivant.



On voit que pour tracer la portion de courbe ci-dessus, il faut "lever le crayon" un nombre fini de fois et ainsi on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue par morceaux et non continue.}}$ Plus précisément, on peut dire que la fonction f est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R} \setminus \{\pm 1 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}}$ et que $\boxed{f \text{ est discontinue en tout point } x = \pm 1 + 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}}$. De même, on voit que f est dérivable en tout point où elle est continue tandis qu'elle admet des dérivées à droite et à gauche distinctes en $x = \pm 1 + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ de sorte que l'on peut en conclure que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien de classe } C^1 \text{ par morceaux.}}$

2. (**sur 0,5 point**) La fonction est paire d'après l'énoncé donc d'après le cours, on en déduit immédiatement que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = 0.}$$

3. (**sur 1 point**) Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que f est paire donc $f(-t) = f(t)$ et ainsi

$$f(-t)\cos(-nt) = f(t)\cos(nt)$$

8. Ici égale à 2π et donc on donc on effectuera des translations de $2\pi, 4\pi$, etc... vers la gauche et vers la droite.

par parité de la fonction cosinus et $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto f(t)\cos(nt) \text{ est paire.}}$ De même, $|f(-t)|^2 = |f(t)|^2$ donc on en conclut de même que $\boxed{t \mapsto |f(t)|^2 \text{ est également paire.}}$
Par ailleurs, ces deux fonctions sont 2π-périodiques (car f et $t \mapsto \cos(nt)$ le sont) si bien que d'après le cours

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t$$

car l'intégrale d'une fonction 2π-périodique sur un intervalle de longueur 2π ne dépend pas de l'intervalle. Mais, comme $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est paire, il vient d'après le cours que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{si bien que} \quad \boxed{\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.}$$

De même, comme $t \mapsto |f(t)|^2$ est paire, il s'ensuit du cours que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \boxed{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t.}$$

4. (**sur 2 points**) Par définition, on a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

Par 2π-périodicité et puisque $[-\pi, \pi]$ est de longueur 2π, on a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$$

puis enfin par parité de f, il vient

$$a_0(f) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

Calculons alors

$$\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

On va remplacer f par son expression qui est donnée sur $[0, \pi]$ par $f(t) = \frac{1}{2}$ si $t \in [0, 1]$ et 0 sinon. Cela nous incite à utiliser la relation de Chasles pour obtenir que

$$\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

car $f(t) = \frac{1}{2}$ si $t \in [0, 1]$ et 0 sur $[1, \pi]$. Finalement, il s'ensuit que

$$\boxed{a_0(f) = \frac{1}{2\pi}.}$$

Soit à présent $n \geqslant 1$. On a alors par définition

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente, il vient que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

Calculons alors, grâce à la relation de Chasles à nouveau [9]

$$\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \int_0^{1} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t + \int_1^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(nt)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, puisque $n > 0$

$$\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n)}{n} - 0\right) = \frac{\sin(n)}{2n}$$

car $\sin(0) = 0$. Finalement,

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\times\frac{\sin(n)}{2n} = \frac{\sin(n)}{n}$$

et

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = \frac{\sin(n)}{\pi n}.}$$

5. (**sur 1 point**) On applique les formules du cours ! On a $c_0(f) = a_0(f) = \frac{1}{2\pi}$. Puis, pour $n > 0$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) = \frac{a_n(f)}{2} = \frac{\sin(n)}{2\pi n}$$

car $b_n(f) = 0$ pour tout $n > 0$ tandis que pour $n < 0$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)) = \frac{a_{-n}(f)}{2} = \frac{\sin(-n)}{-2\pi n} = \frac{\sin(n)}{2\pi n}$$

car $b_{-n}(f) = 0$ pour tout $n < 0$ et $\sin(-n) = -\sin(n)$ par imparité de la fonction sinus. Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n)}{2\pi n} & \text{si } n \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi} & \text{si } n = 0. \end{cases}}$$

► **Remarque**– Noter que puisque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

on peut en un sens dire que $\frac{\sin(0)}{0} = 1$ et ainsi on voit que dans ce sens, on a $c_n(f) = \frac{\sin(n)}{2\pi n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que la valeur en 0 est fait assez cohérente.

6. (**sur 2 points**) Le théorème de Dirichlet dans sa version non continue ici, nous assure que la série de Fourier associée à f suivante [10]

$$a_0(f) + \sum_{n\geqslant 1}[a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)] = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)\cos(nt)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)\cos(nt)}{n}$$

converge pour tout réel t puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'après la question **1.**. On sait également d'après ce théorème de Dirichlet que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)\cos(nt)}{n} = \begin{cases} f(t) \text{ si } f \text{ est continue en } t \\ \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \text{ si } f \text{ est non continue en } t. \end{cases}$$

On a vu en première question, que $\boxed{\text{pour tout } t \neq \pm 1 + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z},}$ la fonction f est continue si bien que

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{\pi n}\cos(nt)} \qquad (*)$$

9. Car on connaît l'expression de f sur $[0, \pi]$.
10. D'après les calculs de la question **4.**

avec $\boxed{\text{convergence de la série en jeu.}}$ Lorsque $t = \pm 1 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\pi n} \cos(nt)$$

avec convergence de la série en jeu. On voit sur le dessin que dans tous les cas [11]

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4}$$

tandis que pour tout entier naturel n, on a $\cos(nt) = \cos(\pm n) = \cos(n)$ par 2π-périodicité et parité de cosinus. Ainsi, on obtient en $t = \pm 1 + 2k\pi$ avec k entier

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)\cos(n)}{\pi n} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)\cos(n)}{n}$$

et finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)\cos(n)}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

avec $\boxed{\text{convergence de la série en jeu!}}$

► **REMARQUE**– Noter que si vous essayer d'appliquer l'algorithme du cours, vous ne serez pas en mesure de conclure quant à la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n)\cos(n)}{n}$ tandis qu'ici, les séries de Fourier permettent d'obtenir immédiatement la convergence et la valeur de la somme infinie ! Il en est de même pour les questions suivantes.

7. (**sur 1,5 point**) Pour faire apparaître ce $\frac{\sin(n)}{n}$ à partir du $\frac{\sin(n)\cos(nt)}{n}$ qui apparaît dans $(*)$, on est tenté de choisir $t = 0$ de sorte que $\cos(nt) = \cos(0) = 1$. On vérifie alors que $t = 0$ n'est pas de la forme $\pm 1 + 2k\pi$ avec k entier et on peut donc déduire de la question précédente que

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\pi n} \cos(0) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\pi n}$$

avec convergence de la série en jeu. Or, $0 \in [0, \pi]$ et donc [12] $f(0) = \frac{1}{2}$ et il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}$$

et finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 1}{2}.}$$

8. (**sur 1,5 point**) On sait que pour tout entier naturel n, on a $\sin(2n) = \operatorname{Im}(e^{2in})$. Mais,

$$e^{2in} = (e^{in})^2 = (\cos(n) + i\sin(n))^2 = \cos^2(n) - \sin^2(n) + 2i\sin(n)\cos(n)$$

et donc $\operatorname{Im}(e^{2in}) = 2\sin(n)\cos(n)$ et finalement $\boxed{\sin(2n) = 2\sin(n)\cos(n).}$ Pour faire apparaître $\frac{\sin(2n)}{n} = 2\frac{\sin(n)\cos(n)}{n}$ à partir du $\frac{\sin(n)\cos(nt)}{n}$ qui apparaît dans $(*)$, on est tenté de choisir $t = 1$ de sorte que $\cos(nt) = \cos(n)$. On vérifie alors que $t = 1$ est de la forme $\pm 1 + 2k\pi$ avec k entier et le calcul de la question **6.** fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)\cos(n)}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

11. Se souvenir que $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ représente la moyenne de la valeur avant et de la valeur après le saut en une discontinuité !
12. Sinon, lisez cette valeur sur le graphe de f !

avec convergence de la série en jeu. On obtient donc

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)\cos(n)}{n}=\frac{\pi}{2}-1$$

avec

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)\cos(n)}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin(n)\cos(n)}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n)}{n}$$

par ce qui précède. On en conclut bien que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n)}{n}=\frac{\pi}{2}-1}$$

avec convergence de la série !

9. (**sur 1,5 point**) Pour faire apparaître ce $\frac{(-1)^n\sin(n)}{n}$ à partir du $\frac{\sin(n)\cos(nt)}{n}$ qui apparaît dans $(*)$, on est tenté de choisir $t=\pi$ de sorte que $\cos(nt)=\cos(n\pi)=(-1)^n$ comme on l'a vu plusieurs fois en cours et en TD. On vérifie alors que $t=\pi$ n'est pas de la forme $\pm1+2k\pi$ avec k entier et on peut donc déduire de la question précédente que

$$f(\pi)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{\pi n}\cos(n\pi)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(n)}{\pi n}$$

avec convergence de la série en jeu. Or, $\pi\in[0,\pi]$ et donc[13] $f(\pi)=0$ et il s'ensuit que

$$0=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(n)}{n}\quad\text{soit}\quad\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(n)}{n}=-\frac{1}{2\pi}$$

et finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(n)}{n}=-\frac{1}{2}.}$$

10. (**sur 2 points**) On utilise comme précédemment la relation de Chasles pour obtenir que

$$\int_0^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^1|f(t)|^2\mathrm{d}t+\int_1^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{4}\mathrm{d}t\quad\text{soit}\quad\boxed{\int_0^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{4}}$$

car $f(t)=\frac{1}{2}$ si $t\in[0,1]$ et $f(t)=0$ si $t\in[1,\pi]$. La fonction est continue par morceaux, donc on peut appliquer l'égalité de Parseval qui fournit que la série[14]

$$|a_0(f)|^2+\frac{1}{2}\sum_{n1}\left[|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right]=\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{2}\sum_{n1}\frac{\sin^2(n)}{\pi^2n^2}$$

converge et que

$$\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{\pi^2n^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t.$$

Or, on a vu en question **3.** que

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

et le calcul qu'on vient d'effectuer implique que

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

13. Sinon, lisez cette valeur sur le graphe de f !
14. Grâce aux questions **2**. et **5**.

Il vient par conséquent

$$\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{\pi^2 n^2}$$

avec convergence de la série. On en déduit que

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi^2}$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 1}{2}.}$$

► **REMARQUE**– Noter qu'on obtient en combinant cette question et la question **7.** l'identité (non triviale et surprenante)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}.$$