Feuille TD 2 – Exercices Algèbre – Groupes II

► *Cette feuille de TD nous occupera deux semaines.*

Exercices fondamentaux de la semaine 1

Exercice 1 — Quelques isomorphismes classiques. Soit k un corps.

1. Montrer que si V est un k-espace vectoriel de dimension finie, alors $V \otimes_k k \cong V$.
2. Soient V_1, V_2, V_3 trois k-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que $(V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 = V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$ et en préciser la dimension.
3. Soient I un ensemble, $(V_i)_{i\in I}$ une famille de k-espaces vectoriels de dimension finie ainsi que V un k-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que
$$V \otimes_k \left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I} V \otimes_k V_i.$$

Exercice 2 — Produit tensoriel et applications linéaires. Soient k un corps et V, V', W, W' des k-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Construire une application linéaire $\varphi : \mathrm{Hom}_k(V, V')\otimes_k \mathrm{Hom}_k(W, W') \to \mathrm{Hom}_k(V\otimes_k W, V'\otimes_k W')$. Donner pour $f \in \mathrm{Hom}_k(V, V')$, $g \in \mathrm{Hom}_k(W, W')$, la matrice de l'application $\varphi(f \otimes g)$ dans une base adaptée.
2. Montrer que c'est un isomorphisme.
3. Montrer que, si l'on note V^* le dual de V, alors on a un isomorphisme entre $\theta_{V,W} : V^* \otimes_k W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, W)$. Montrer alors que $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ est de rang r si, et seulement si, r est le plus petit entier naturel tel que $\theta^{-1}_{V,W}(f)$ s'écrive comme une somme de d tenseurs élémentaires non nuls.
4. Décrire un isomorphisme entre $V^* \otimes_k V^*$ et $(V \otimes_k V)^*$. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de G-modules si V est un G-module pour G un groupe fini.
5. Montrer que l'application
$$\begin{cases} V \times V^* & \longrightarrow & k \\ (x, f) & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$
fournit une application $e : V \otimes_k V^* \longrightarrow k$. Que vaut $e \circ \theta^{-1}_{V,V}$?

Exercice 3 — Le groupe $\mathfrak{S}_3$.

1. On considère l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{C}^3$ par permutation des coordonnées. Vérifier que cela définit une structure de $\mathfrak{S}_3$-module sur $\mathbb{C}^3$. Préciser sa représentation matricielle dans la base canonique.
2. Montrer que $\mathbb{C}^3$ admet deux sous-$\mathfrak{S}_3$-modules non triviaux $\mathbb{C}(1, 1, 1)$ et $H = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et que chacun de ceux-ci sont simples.
3. Donner une représentation matricielle de la représentation H.

On note à présent $\sigma = (1\,2\,3)$, $\tau = (1\,2)$ et V une représentation de $\mathfrak{S}_3$.

4. Montrer que V se décompose en $V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$ où V_α est le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre α.
5. Montrer que $\tau(V_\alpha) = V_{\alpha^2}$ pour $\alpha \in \{1, j, j^2\}$. En déduire que V_1 et $V_j \oplus V_{j^2}$ sont deux sous-$\mathfrak{S}_3$-modules de V.
6. Que peut-on en déduire si V est irréductible ?
7. On suppose que V est irréductible et que $V_1 \neq \{0\}$. Montrer que V est de dimension 1 et est soit la représentation triviale soit la signature.
8. On suppose que V est irréductible et que $V_j \neq \{0\}$. Soit $v \in V_j \setminus \{0\}$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par v et $\tau(v)$ est un plan $\mathfrak{S}_3$-stable. En déduire que V est $\mathfrak{S}_3$-isomorphe à H.
9. Généraliser cette méthode au groupe $\mathbf{D}_4$.

Exercices complémentaires de la semaine 1

Exercice 4 — Pour maîtriser le vocabulaire.

1. À quoi correspond une représentation du groupe trivial ? De $\mathbb{Z}$? De $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Même question avec une sous-représentation.
3. Quels sont les G-modules simples lorsque G est le groupe trivial ?

4. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de dimension 1 soit donnée par le module trivial soit par le module D pour lequel l'action de l'élément non trivial sur la droite D se fait par multiplication par -1. Montrer que toute représentation est semi-simple.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1. Combien existe-t-il de représentations irréductibles non isomorphes sur $\mathbb{C}$? Montrer que toute représentation est semi-simple.
6. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1. Combien existe-t-il de représentations irréductibles de dimension finie non isomorphes sur $\mathbb{C}$? Que se passe-t-il si on change de corps ? En considérant un bloc de Jordan, construire une représentation de dimension finie de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas somme directe de modules simples.

Exercice 5 — Extension des scalaires.

1. Soient $k \subseteq K$ deux corps et V un k-espace vectoriel. Munir $V_K := V \otimes_k K$ d'une structure de K-espace vectoriel.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une k-base de V. Exhiber une K-base de V_K et comparer $\dim_k(V)$ et $\dim_K(V_K)$.
3. Soient W un k-espace vectoriel et $f : V \to W$ une application k-linéaire. Montrer que $f_K = f \otimes \mathrm{Id}_K : V_K \to W_K$ est une application K-linéaire. On fixe une base $\mathcal{C}$ de W. Comparer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et celle de f_K dans les bases correspondantes de la question **2.**
4. On suppose que V est un G-module sur k avec G un groupe fini. Construire sur V_K une structure de G-module sur K ayant la même représentation matricielle que celle de V.
   Une représentation de G sur K qui est de la forme V_K pour une représentation V de G sur k est dite *réalisable sur* k.

Exercice 6 — Un module non semi-simple. Soient G un groupe fini, p un nombre premier qui divise le cardinal de G et $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrer que la droite de $k[G]$ engendrée par $\sum_{g \in G} g$ est un sous-G-module de $k[G]$ qui n'admet pas de supplémentaire.
2. En déduire que $k[G]$ n'est pas un G-module semi-simple.

Exercice 7 — Centre et lemme de Schur. Soient G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur un corps algébriquement clos.

1. Montrer que tout élément du centre de G agit sur V comme une homothétie.
2. En déduire que si le centre de G n'est pas cyclique, la représentation de V n'est pas fidèle.

Exercices fondamentaux de la semaine 2

Exercice 8 — Groupes d'ordre pq et p^3.

1. Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. On considère G un groupe non abélien d'ordre pq. Montrer que $D(G)$ est l'unique q-Sylow de G. Déterminer alors le groupe des caractères linéaires de G à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$.
2. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. Montrer que $D(G) = Z(G)$ est d'ordre p. Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$.

Exercice 9 — Irréductibilité. Soient G un groupe fini, k un corps de caractéristique nulle et χ un caractère de G sur k.

1. On suppose k algébriquement clos. Montrer que si χ est irréductible, alors $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$.
2. Montrer que $\langle \chi, \chi \rangle_G$ est une somme de carrés d'entiers.
3. En déduire que si $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$, alors χ est irréductible.

Exercice 10 — Tables de caractères.

1. Déterminer la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$.
2. Soit G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur $\mathbb{C}$ et χ un caractère linéaire de G. Montrer que $\chi \otimes V$ est une représentation irréductible de G.
3. Déterminer la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.
4. Déterminer la table de caractères de $\mathbb{H}_8$.

Exercice 11 — Dimensions des représentations irréductibles. Soit G un groupe fini. Le but de cet exercice est d'établir que les dimensions des représentations irréductibles sur $\mathbb{C}$ divise l'ordre de $G/Z(G)$. Soit V une représentation irréductible.

1. Construire sur $V^{\otimes m}$ une structure de G^m-module. Montrer que la représentation associée est irréductible.
2. Montrer que si $g \in Z(G)$, alors $\rho_V(g)$ est une homothétie. On notera $\lambda(g)$ son rapport.
3. On note H le sous-groupe de G^m formé des éléments $(g_1, \ldots, g_m)$ avec $g_i \in Z(G)$ et $g_1 g_2 \cdots g_m = 1$. Montrer que H agit trivialement sur $V^{\otimes m}$. En déduire que $V^{\otimes m}$ fournit en fait une représentation de G^m/H irréductible.
4. En déduire que $\dim(V) \mid \#G/Z(G)$.

Exercices complémentaires de la semaine 2

Exercice 12. Soit G un groupe.

1. Calculer $\mathrm{End}_G(k[G])$.
2. Montrer que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est semi-simple et en déterminer les composantes isotypiques.
3. En déduire que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{C}$-algèbre, à $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 13 — Groupe diédral. On pose $G = \mathbf{D}_4$.

1. Déterminer $D(G)$ et G^{ab}.
2. Montrer que les représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$ sont de dimension inférieure ou égale à 2.
3. Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$. Déterminer une réalisation matricielle de chacune d'entres elles. Comparer avec $\mathbb{H}_8$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 — Représentations réelles d'un groupe cyclique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse dans cette exercice aux représentations de dimension finie de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les représentations de dimension 1 de G.
2. Soit P un diviseur irréductible de $X^n - 1$. Montrer que la multiplication par la classe de X dans $\mathbb{R}[X]/(P)$ définit un G-module simple, que l'on notera V_P.
3. Soient P et Q deux diviseurs irréductibles unitaires de $X^n - 1$. Montrer que V_P est isomorphe à V_Q si, et seulement si, $P = Q$.

Soit V une représentation de dimension finie de G. On note $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ le morphisme de groupes associé et $f = \rho(\overline{1})$.

4. Soit P un diviseur irréductible de degré 1 de $X^n - 1$. Montrer que toute droite de $\mathrm{Ker}(P(f))$ est G-stable. En déduire que $\mathrm{Ker}(P(f))$ est semi-simple.
5. Soit P un diviseur irréductible de degré 2 de $X^n - 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Ker}(P(f))$, la famille $(x, f(x))$ engendre un G-module irréductible isomorphe à V_P. En déduire que $\mathrm{Ker}(P(f))$ est semi-simple.
6. Montrer que V est semi-simple et que ses sous-représentations irréductibles sont (à isomorphisme près) les V_P.
7. Déterminer la composante V_P-isotypique de V pour tout P diviseur irréductible de $X^n - 1$.
8. Déterminer le nombre de représentations irréductibles de G sur $\mathbb{R}$.