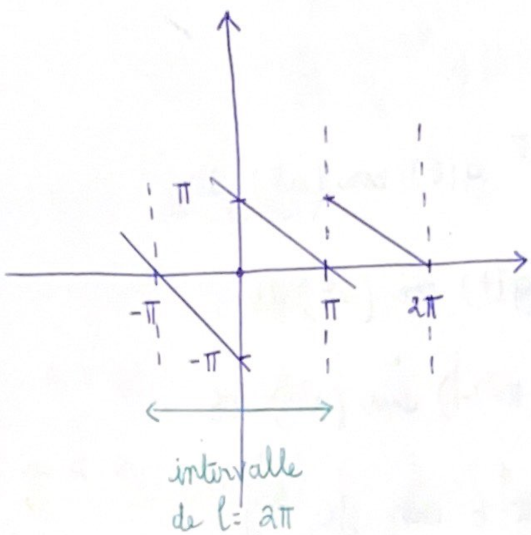
① Ex02

Q8. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π- périodique
impaire

1) $g(t) = \pi - t$ sur $]0;\pi]$ et $g(0) = 0$



on ne peut pas faire par translation car fct° impaire et intervalle doit être de longueur 2π

g non continue mais continue par morceaux
(on lève le stylo un nb fini de fois sur sa feuille)

Non continue en les $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

g est C^1 par morceaux car dérivable partout sauf en le nb fini de pts de discontinuité sur la feuille.

2) $a_n(g) = \,?$ $\forall n \geq 0$

$b_n(g) = \,?$ $\forall n \geq 0$

g impaire dc $\forall n \geq 0$, $a_n(g) = 0$

Soit $n \geq 1$

$$b_n(g) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(nt)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(nt)\, dt$$

$$\neq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin(nt)\, dt \quad \boxed{\text{car } [0;\pi] \text{ nn de } l = 2\pi}$$

Ici $b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt)\, dt$

(car $[-\pi; \pi]$ est de $\ell = 2\pi$)

$t \mapsto g(t) \sin(nt)$ PAIRE car g impair $\boxed{\text{et}}$ $t \mapsto \sin(nt)$ impair.

Ainsi,

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{1}{\pi} \times 2 \int_0^{\pi} g(t) \sin(nt)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin(nt)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin(nt)\, dt \end{aligned}$$

(car $g(t) = \pi - t$ sur $]0; \pi]$)

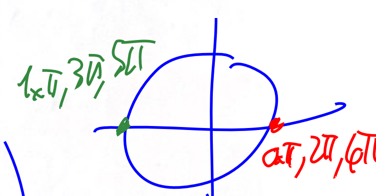
IPP :

$u(t) = \pi - t \qquad u'(t) = -1$

$v'(t) = \sin(nt) \qquad v(t) = -\frac{\cos(nt)}{n}$ (car $n \geqslant 1$)

On a alors

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{2}{\pi} \left(\left[(\pi - t) \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-1) \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\overbrace{(\pi - \pi) \times \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right)}^{=0} + \pi \frac{\cos(0)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt)\, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt)\, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{n} \left(\underbrace{\frac{\sin(n\pi)}{n}}_{=0} - \underbrace{\frac{\sin(0)}{n}}_{=0} \right) \right) \end{aligned}$$



② $b_n(g) = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{2}{n}$

c) calculer $(c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-int}\, dt$$

d'après le cours,

$$\left.\begin{array}{l} c_0(g) = a_0(g) \\ \text{si } n > 0,\ c_n(g) = \frac{1}{2}\left(a_n(g) - i b_n(g)\right) \\ \text{si } n < 0,\ c_n(g) = \frac{1}{2}\left(a_n(g) + i b_n(g)\right) \end{array}\right\} \text{ par ♥}$$

Ici,

$c_0(g) = a_0(g) = 0$

Soit $n > 0$

$$c_n(g) = \frac{1}{2}\left(a_n(g) - i b_n(g)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - i \times \frac{2}{n}\right)$$

$$c_n(g) = -\frac{i}{n}$$

Soit $n < 0$

$$c_n(g) = \frac{1}{2}\left(a_{-n}(g) + i b_{-n}(g)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(0 + i \times \frac{2}{-n}\right)$$

$$c_n(g) = -\frac{i}{n}$$

CCL : $c_0(g) = 0$

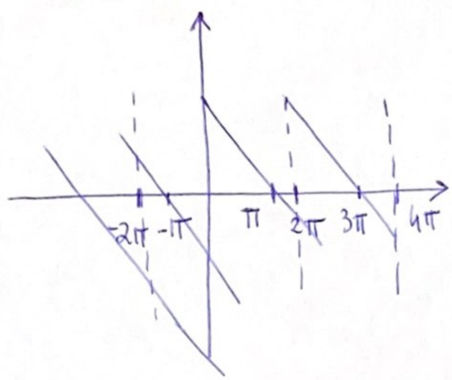
$\forall n \neq 0, \quad c_n(g) = \dfrac{-i}{n}$

4) Dirichlet non continue (car g non continue, C^1 par morceaux)

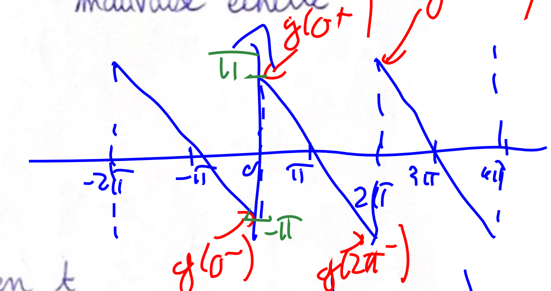
$$a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(g)\cos(nt) + b_n(g)\sin(nt)\right)$$

① $= \begin{cases} \dfrac{g(t^+) + g(t^-)}{2} & \text{si } g \text{ non continue en } t \\ g(t) & \text{si } g \text{ continue en } t. \end{cases}$

avec cv de la série



(graphique faux)
mauvaise échelle



Si $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, g continue en t

Si $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, g non continue en t $\quad \dfrac{g(t^+) + g(t^-)}{2} = 0$

$\quad\quad \parallel$

$\quad\quad \dfrac{\pi - \pi}{2}$

② $= 0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(0 \times \cos(nt) + \frac{2}{n} \times \sin(nt)\right)$

$= 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$ avec convergence

③ En résumé, pour $t \in \mathbb{R}$

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ g(t) & \text{si } t \neq 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Rmq : Soit $t = 2k\pi$

alors $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(n 2k\pi)}{n}}_{=0} = 0$ car $\sin(2nk\pi) = 0$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n} \; ?$$

Si dans Dirichlet, on choisit $t = 1$

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n \times 1)}{n} = g(1) \text{ car } 1 \neq 2k\pi$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{g(1)}{2} = \frac{\pi - 1}{2}$$

or $g(t) = \pi - t$ sur $]0; \pi]$ et $1 \in]0; \pi]$ dc $g(1) = \pi - 1$