ANALYSE DE FOURIER ET GÉOMÉTRIE : EXERCICES SUR LES COURS 5 ET 6

EXERCICE 1.
Est-ce que l'ensemble $F = \{(2\lambda, \mu, \lambda + \mu) \ : \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Décrire géométriquement F et en donner une équation ainsi qu'une base.

SOLUTION.
Pour $\lambda = \mu = 0$, on a $(2\lambda, \mu, \lambda + \mu) = (0, 0, 0) \in F$. Soient à présent $k \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z), (x', y', z') \in F$. Par définition, puisque $(x, y, z) \in F$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = (2\lambda, \mu, \lambda + \mu)$ et de même puisque $(x', y', z') \in F$, il existe $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ tels que $(x', y', z') = (2\lambda', \mu', \lambda' + \mu')$. On a alors

$$k(x, y, z) + (x', y', z') = (2(k\lambda + \lambda'), k\mu + \mu', (k\lambda + \lambda') + (k\mu + \mu')) = (2\Lambda, M, \Lambda + M)$$

avec $\Lambda = k\lambda + \mu \in \mathbb{R}$ et $M = k\mu + \mu' \in \mathbb{R}$ et $k(x, y, z) + (x', y', z') \in F$. Finalement, F est bien un espace vectoriel !
On a besoin de deux paramètres donc F est de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, il s'agit donc d'un plan ! On a pour tout λ et μ réels

$$(2\lambda, \mu, \lambda + \mu) = \lambda(2, 0, 1) + \mu(0, 1, 1)$$

donc tout vecteur de F est une combinaison linéaire de $(2, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et il s'agit donc d'une base du plan F ! Pour obtenir une équation de F, on sait d'après le cours qu'une telle équation est donnée par

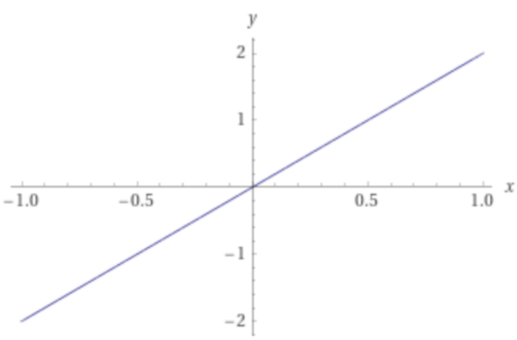
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad -x - 2y + 2z = 0.$$

EXERCICE 2.

1. Représenter le sous-espace vectoriel donné par $y = 2x$ dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver deux vecteurs non colinéaires du plan d'équation $x - y = 0$.
3. Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y = 0\}$ est un espace vectoriel. Le décrire géométriquement, le dessiner. En préciser la dimension et en donner une base.
4. Mêmes questions avec $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z - y + 2x = 2z + x + y = 0\}$.
5. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $3y - x = 0$. Préciser un vecteur non nul orthogonal à $\mathcal{D}$ et décrire $\mathcal{D}^\perp$.

SOLUTION.

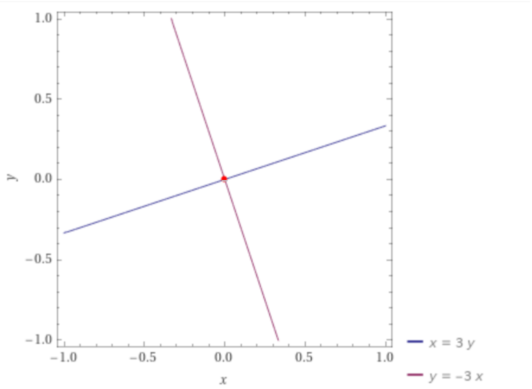
1. Dans le plan, on obtient



et pour le cas de l'espace, je vous renvoie ici.

2. Un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est dans ce plan si, et seulement si, $x = y$ soit $(x, y, z) = (x, x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, ce qui fournit deux vecteurs du plan, $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ non colinéaires.

3. On vérifie que $(0,0,0) \in E$ car $z = 0$ et $x + y = 0 + 0 = 0$. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z),(x',y',z') \in E$. On a alors $z = x + y = 0$ car $(x,y,z) \in E$ et $z' = x' + y' = 0$ car $(x',y',z') \in E$. On calcule alors
$$\lambda(x,y,z) + (x',y',z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z').$$
Pour vérifier si $\lambda(x,y,z) + (x',y',z') = (X,Y,Z)$ avec $X = \lambda x + x'$, $Y = \lambda y + y'$ et $Z = \lambda z + z'$ est dans E, on doit montrer que $Z = X + Y = 0$. On a
$$Z = \lambda z + z' = 0 \quad \text{car} \quad z = z' = 0$$
et
$$X + Y = \lambda(x+y) + (x'+y') = 0 \quad \text{car} \quad x + y = x' + y' = 0$$
et finalement $\lambda(x,y,z) + (x',y',z') \in E$ et E est un espace vectoriel. Il s'agit de l'intersection de deux plans non parallèles donc une droite de dimension 1. En donner une base revient à en donner un vecteur directeur. Pour cela, on voit que $(x,y,z) \in E$ si, set seulement si, $z = 0$ et $y = -x$ soit $(x,y,z) = (x,-x,0) = x(1,-1,0)$ et on voit que E est la droite dirigée par $(1,-1,0)$. Pour un dessin, voir ici.
4. On procède de la même façon et on obtient toujours une droite donnée par
$$\begin{cases} z - y + 2x = 0 \\ 2z + x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z - y + 2x = 0 \\ 3z + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z - y + 2x = 0 \\ z = -y \end{cases} \iff \begin{cases} -2y + 2x = 0 \\ z = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$$
où l'on a effectué à la première étape l'opération $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$. On en déduit que $(x,y,z) \in E$ si, et seulement si, $(x,y,z) = (y,y,-y) = y(1,1,-1)$ et on obtient la droite dirigée par $(1,1,-1)$. Pour un dessin, voir ici.
5. On sait d'après le cours qu'un vecteur directeur est donné par $(3,1)$. En effet, un point $(x,y) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $x = 3y$ soit $(x,y) = (3y,y) = y(3,1)$. De même, le cours assure qu'un vecteur orthogonal non nul est $(-1,3)$. En effet, $(x,y) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si $(x,y)\cdot(-1,3) = 0$ soit si, et seulement si, (x,y) est orthogonal à $(-1,3)$. On en déduit qu'une équation de la droite $\mathcal{D}^\perp$ est donnée par
$$\det\begin{pmatrix} -1 & x \\ 3 & y \end{pmatrix} = -y - 3x = 0.$$
De manière équivalente, on obtient $y + 3x = 0$.



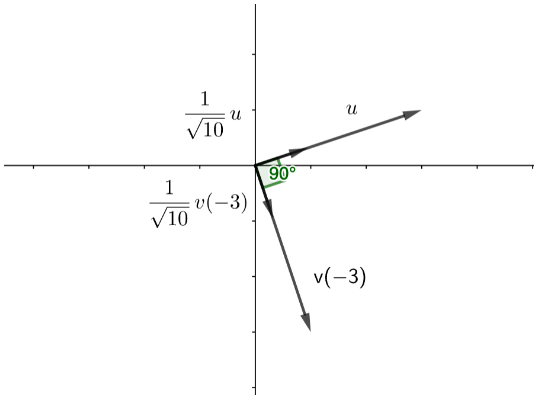
Exercice 3.
Soient $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que les vecteurs u et $v(1)$ sont colinéaires ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$ pour que $(u, v(x))$ forme deux vecteurs orthogonaux ? En déduire une famille orthonormée.

Solution.
Si u et $v(1)$ sont colinéaires, comme ils sont non nuls, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u(1)$ soit $3 = \lambda$ et $1 = \lambda$ ce qui est absurde. On en déduit que u et $v(1)$ ne sont pas colinéaires !
On calcule
$$u \cdot v(x) = 3 + x$$

et on sait que $u \perp v(x)$ si, et seulement si, $u \cdot v(x) = 0$ soit si, et seulement si, $3 + x = 0$ soit $x = -3$. Dans ce cas, on a donc une famille orthogonale et

$$||u|| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad ||v(-3)|| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

si bien que $\frac{1}{\sqrt{10}}u$ et $\frac{1}{\sqrt{10}}v(-3)$ forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 4.
Soient $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $w = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Montrer que (u, v, w) forme une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Solution.
Il s'agit de montrer que chaque vecteur est de norme 1 et que les vecteurs sont orthogonaux deux à deux. On vérifie alors que

$$||u|| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1, \quad ||v|| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \quad \text{et} \quad ||w|| = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 1$$

de sorte qu'ils sont bien tous de norme 1. On calcule alors

$$u \cdot v = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 + 1) = 0, \quad u \cdot w = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 \times (-1) + 1 \times (-1) + 1 \times 2) = 0$$

et

$$v \cdot w = \frac{1}{2\sqrt{3}}((-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + 0 \times 2) = 0$$

si bien que les vecteurs sont bien orthogonaux 2 à 2. On a donc bien une famille orthonormée! Pour un dessin, voir ici.

Exercice 5.
Soient $u = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$. Calculer le produit scalaire de u et v puis de v et w. En déduire l' angle entre les vecteurs u et v puis l'angle entre les vecteurs v et w.

Solution. On a

$$u \cdot v = (-1) \times (-2) + 1 \times 2 + 2 \times 0 = 2 + 2 = 4 \quad \text{et} \quad v \cdot w = (-2) \times 2 + 2 \times 0 + 0 \times 2 = -4.$$

Or, on sait d'après le cours que $u \cdot v = ||u|| \times ||v|| \times \cos(\theta)$ avec θ l'angle entre les vecteurs u et v. On calcule alors

$$||u|| = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad ||v|| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

de sorte que

$$4 = u \cdot v = ||u|| \times ||v|| \times \cos(\theta) = 4\sqrt{3}\cos(\theta)$$

et $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On a donc que θ vaut $\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ($\approx 54,74$ degrés) modulo 2π.
De même, on sait d'après le cours que $v \cdot w = ||v|| \times ||w|| \times \cos(\theta')$ avec θ' l'angle entre les vecteurs v et w. On calcule alors

$$||v|| = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad ||w|| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

de sorte que

$$-4 = v \cdot w = ||v|| \times ||w|| \times \cos(\theta') = 8\cos(\theta')$$

et $\cos(\theta') = -\frac{1}{2}$. On a donc que θ' vaut $\pm 2\frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Pour un dessin, voir ici.

EXERCICE 6.
On considère $F = \{(t, 2t, -t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser sa dimension. Déterminer $F^\perp$ et donner sa dimension. Décrire géométriquement F et $F^\perp$. Exhiber un vecteur u de F de norme 1. Trouver une famille orthonormée[1] (v, w) de $F^\perp$.

SOLUTION. On vérifie pour commencer que pour $t = 0$, $(t, 2t, -t) = (0, 0, 0) \in F$. Soient à présent $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y, z), (x', y', z') \in F$. Puisque $(x, y, z) \in F$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (t, 2t, -t)$ et puisque $(x', y', z') \in F$, il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $(x', y', z') = (t', 2t', -t')$. On a alors

$$\lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda t + t', 2(\lambda t + t'), -(\lambda t + t')) = (T, 2T, -T)$$

pour $T = \lambda t + t' \in \mathbb{R}$ si bien que $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a besoin d'un paramètre[2] pour connaître complètement un élément de F si bien que F est de dimension 1. Il s'agit donc d'une droite et tout élément de F est de la forme $(t, 2t, -t) = t(1, 2, -1)$ avec t réel si bien que F est l'ensemble des multiples de $(1, 2, -1)$ et F est la droite dirigée par $(1, 2, -1)$. Le vecteur $(1, 2, -1)$ est donc une base de F. On a alors $||u|| = \sqrt{6}$ si bien que $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ est un vecteur directeur de F de norme 1.

On sait que $F^\perp$ est alors un plan donné par l'équation $x + 2y - z = 0$ qui est donc de dimension 2. On constate alors que (x, y, z) est dans $F^\perp$ si, et seulement si, $z = x + 2y$ de sorte que $(x, y, z) = (x, y, x + 2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2)$ et ainsi tout élément du plan $F^\perp$ est combinaison linéaire de $v = (1, 0, 1)$ et de $v' = (0, 1, 2)$. On constate cependant que $v \cdot v' = 2 \neq 0$. Mais par exemple[3], $w = v' - v = (-1, 1, 1) \in F^\perp$ car $-1 + 2 - 1 = 0$ et on vérifie que $v \cdot w = 0$ et on a ainsi une famille orthonormée de $F^\perp$. Puisque $||v|| = \sqrt{2}$ et $||w|| = \sqrt{3}$, on obtient une famille orthonormée avec $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$. Pour un dessin, voir ici.

EXERCICE 7.
On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (5x - y, x). \end{array} \right.$$

Montrer que f est une application linéaire et donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer $f(5, -1)$ de deux manières.

SOLUTION.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On calcule

$$f(\lambda(x, y) + (x', y')) = f(\lambda x + x', \lambda y + y') = f(X, Y)$$

avec $X = \lambda x + x'$ et $Y = \lambda y + y'$ et par définition $f(X, Y) = (5X - Y, X)$ de sorte que

$$f(\lambda(x, y) + (x', y')) = (5(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), \lambda x + x') = \lambda(5x - y, x) + (5x' - y', x') = \lambda f(x, y) + f(x', y')$$

et f est bien une application linéaire.

1. C'est-à-dire deux vecteurs v et w de $F^\perp$ de norme 1 et orthogonaux.
2. À savoir t.
3. Il existe un moyen automatique de trouver deux tels vecteurs appelé procédé de Gram-Schmidt mais que nous n'avons pas le temps d'aborder dans ce cours !

On a alors $f(e_1) = f(1,0) = (5,1)$ et $f(e_2) = f(0,1) = (-1,0)$ et ainsi sa matrice M dans le base canonique est donnée par

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

On a alors $f(5,-1) = (5 \times 5 - (-1), 5) = (26,5)$ en utilisant la définition de f ou

$$f(5,-1) = M \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et on trouve (heureusement!) deux fois le même résultat!

Exercice 8.
On pose

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x - y + 2z, z - x, y). \end{array} \right.$$

Montrer que g est une application linéaire et donner la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $g(2,0,1)$ de deux manières.
On suppose désormais qu'on a une famille orthonormée (b_1, b_2, b_3) telle que

$$g(b_1) = -b_3, \quad g(b_2) = 3b_1 - b_2 \quad \text{et} \quad g(b_3) = b_1 + b_2.$$

Donner la matrice de g dans la base (b_1, b_2, b_3) et calculer son déterminant.

Solution. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. On calcule

$$g(\lambda(x,y,y) + (x',y',z')) = g(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = g(X,Y,Z)$$

avec $X = \lambda x + x'$, $Y = \lambda y + y'$ et $Z = \lambda z + z'$ et par définition $g(X,Y,Z) = (5X - Y + 2Z, Z - X, Y)$ de sorte que

$$\begin{aligned} g(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) &= (5(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z'), \lambda z + z' - (\lambda x + x'), \lambda y + y') \\ &= \lambda(5x - y + 2z, z - x, y) + (5x' - y' + 2z', z' - x', y') = \lambda g(x,y,z) + g(x',y',z') \end{aligned}$$

et g est bien une application linéaire!

On a alors $g(e_1) = g(1,0,0) = (5,-1,0)$, $g(e_2) = g(0,1,0) = (-1,0,1)$ et $g(e_3) = g(0,0,1) = (2,1,0)$ et ainsi sa matrice M dans le base canonique est donnée par

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

On a alors $g(2,0,1) = (5 \times 2 - 0 + 2 \times 1, 1 - 2, 0) = (12,-1,0)$ en utilisant la définition de g ou

$$g(2,0,1) = M \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on trouve (heureusement!) deux fois le même résultat!
Enfin, on a par définition dans ce cas que la matrice N de g dans la famille orthonormée (b_1, b_2, b_3) est donnée par

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(b_1) & g(b_2) & g(b_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Par la règle de Sarrus, on obtient $\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4.$

EXERCICE 9 — UN SYSTÈME LINÉAIRE.
Résoudre le système linéaire suivant

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et décrire géométriquement l'ensemble des solutions.

SOLUTION.
On a

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y+z \\ x-y \end{pmatrix}$$

de sorte que (x, y, z) est solution du système linéaire si, et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y-z=x \\ x+y+z=y \\ x-y=z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y-z=0 \\ x+z=0 \\ x-y-z=0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y=z \\ x=-z \\ x-y-z=0. \end{array} \right.$$

On constate alors en remplaçant que si $y = z$ et $x = -z$, alors $x - y - z = -3z$ si bien que $z = x = y = 0$ et le système admet une unique solution, à savoir $(0, 0, 0)$.

EXERCICE 10. Traiter un exercice sur les séries de Fourier parmi l'exercice 2, l'exercice 3 ou un sujet d'annales de l'an dernier !

SOLUTION.
Je vous renvoie aux corrigés correspondants sur la page web du cours ou sur Ecampus !