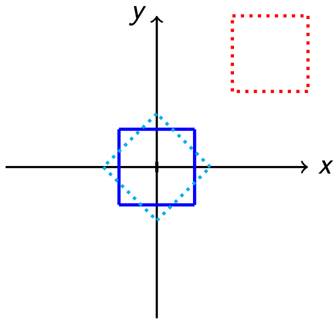
COURS–TD III : ISOMÉTRIES DU PLAN ET DE L'ESPACE

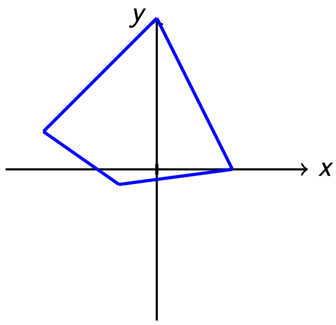
1 INTRODUCTION

1.1 Motivations

On cherche dans cette partie du cours à comprendre et de décrire les transformations du plan ou de l'espace qui laissent une figure **globalement invariante** [1], en d'autres termes d'étudier les symétries d'une figure et de formaliser cette notion [2]. Si vous prenez un carré, on voit qu'une translation (en rouge) ou une rotation d'angle [3] $\frac{\pi}{4}$ et de centre l'origine (en cyan) ne le laissent pas invariant



tandis qu'une rotation d'angle [4] $\frac{\pi}{2}$ le laisse globalement invariant [5]. L'intérêt de ce genre de transformations qui laissent invariante une figure est qu'elles nous donnent des informations concernant la figure ! Imaginons que je vous cache une figure, disons à 4 côtés et 4 sommets pour simplifier, et que je vous donne simplement ses symétries (ou les transformations qui la laissent invariante). Si par exemple je vous dis qu'il n'y a aucune transformation qui la laisse invariante. Alors la figure peut être (presque) n'importe quoi comme par exemple



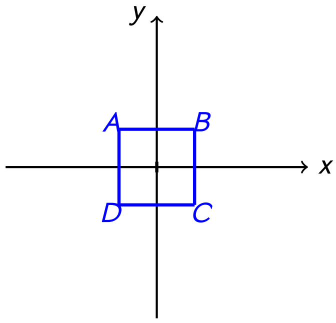
Mais en fait, on a quand même un (tout petit) peu d'informations : par exemple la figure ne peut pas être un carré, un rectangle ou toute figure présentant une symétrie. Et plus je vous donnerai de symétries vérifiées par la figure plus vous aurez d'informations sur cette figure. Vous pouvez essayer de vous convaincre [6] que si je vous dis que la figure est globalement invariante par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors notre figure est nécessairement un carré. De même, si l'on a une figure à trois sommets et trois côtés [7] qui ne présente aucune symétrie, cela nous dit simplement que notre triangle est un triangle quelconque tandis que si l'on a un seul axe de symétrie, il s'agit d'un triangle isocèle et que si l'on a trois axes de symétries ou alors que le triangle est invariant par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, on a affaire à un triangle équilatéral. Ainsi on voit bien qu'obtenir des informations sur les symétries ou les

1. Par globalement invariant, on entend qu'une fois la transformation de la figure effectuée, par exemple la translation, le résultat se superpose à la figure initiale.
2. En particulier, il paraît assez intuitif qu'un cercle ou une sphère est plus symétrique qu'un carré ou qu'un cube qui sont eux-mêmes plus symétriques qu'une figure complètement quelconque du plan ou de l'espace
3. Soit 45 degrés pour ceux qui n'aiment pas les radians !
4. Soit 90 degrés.
5. Chaque sommet n'est pas envoyé sur lui-même mais la carré dans son ensemble est préservé.
6. Et on peut le démontrer !
7. Autrement dit un triangle.

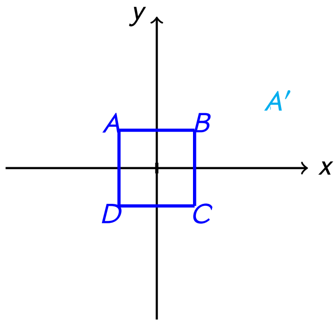
transformations laissant globalement invariante une figure nous permet d'accéder de façon détournée à des informations sur la figure, sans nécessairement y avoir accès. On peut évidemment considérer le même problème avec des figures dans l'espace. Pour finir, mentionnons qu'en chimie, si l'on représente une molécule dans le plan ou dans l'espace, alors étudier ses symétries [8] fournira de précieuses informations sur la molécule.

1.2 Automorphismes orthogonaux

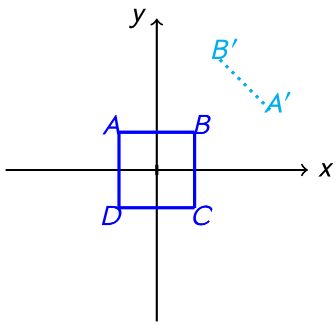
Intéressons-nous alors aux transformations *candidates* à laisser une figure du plan ou de l'espace globalement invariante. On peut se convaincre sans trop de difficultés que les candidates en question vont être les applications qui préservent les angles et les distances [9]. En effet, soit f une application qui préserve angles et distances. Regardons [10] son effet sur le carré $ABCD$.



L'application f envoie A sur un point A'



et maintenant puisque f préserve les distances, l'image B' de B par f doit être à la même distance de A' que celle entre B et A, ce qui donne par exemple

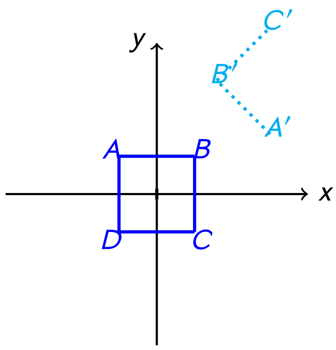


L'image C' de C par f doit alors être à la même distance de B' que celle entre B et C puisque f préserve les distances et l'angle formé par A, B, C doit être le même que celui formé par A', B', C' puisque f préserve les angles de sorte qu'on a uniquement deux choix possibles à présent pour C'. Par exemple on peut avoir

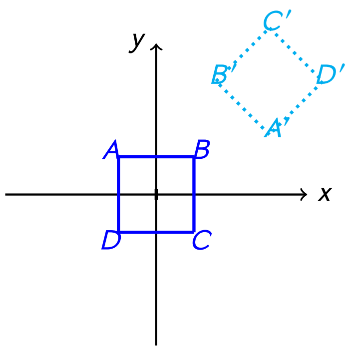
8. Avec des petites subtilités supplémentaires comme la prise en compte des doublets non liants et de la contrainte qu'un atome devra être envoyé sur un autre atome de même nature. Autrement dit un atome de carbone devra être envoyé sur un atome de carbone par exemple.

9. En fait, on peut démontrer grâce au produit scalaire qui est lié à la fois à la notion de distance et à celle d'angle qu'une application qui préserve les distances préserve les angles. C'est l'objet de la Proposition 2.

10. Je vous encourage à essayer de faire ces dessins par vous-mêmes.



Enfin, l'image D' de D doit être à la même distance de A' et C' respectivement que celles de D à A et de D à C et les angles formés doivent être droits ce qui ne laisse plus le choix



On constate donc bien que le carré $ABCD$ est envoyé sur un carré $A'B'C'D'$ qui n'a pas été déformé (du fait que f préserve angles et distances) et que l'on pourrait superposer au carré initial. Le carré $A'B'C'D'$ est simplement le carré $ABCD$ dans une autre position.

Proposition 1 *Une application $f : E \longrightarrow E$ avec $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ qui préserve les distances et qui préserve une figure bornée dont le centre de gravité est 0_E est une application linéaire.*

Proposition 2 *Toute application linéaire qui préserve les distances préserve aussi les angles. On appelle une telle application linéaire* ***un automorphisme orthogonal****.*

Notre objectif va désormais être de décrire tous les automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace avant de voir comment l'étude des automorphismes orthogonaux qui laissent une molécule globalement invariante vous sera utile en chimie ! La première étape pour cette description est la proposition **capitale** suivante.

Proposition 3 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$) une application linéaire et M sa matrice dans la base canonique. Alors f préserve les angles et les distances si, et seulement si, ${}^tMM = I_2$ (resp. I_3).*

► **REMARQUE–** Je rappelle que

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si l'on vous demande de vérifier qu'une application linéaire préserve angles et distances, il suffit de calculer ${}^tMM$ avec M la matrice de f dans la base canonique et de vérifier que vous obtenez l'identité. Je rappelle également que la transposée de la matrice M est la matrice obtenue en échangeant[11] les lignes et les colonnes de la matrice M.

Enfin, on donne la proposition suivante.

> **Proposition 4** *Soient f une application linéaire préservant angles et distances et M sa matrice dans la base canonique. Alors* $\det(M) \in \{-1, +1\}$.

DÉMONSTRATION.– On sait que ${}^tMM = I$ d'après la Proposition 3. Ainsi $\det\left({}^tMM\right) = \det(I)$. On a alors $\det(I) = 1$ et $\det\left({}^tMM\right) = \det\left({}^tM\right)\det(M)$. On peut alors établir que $\det\left({}^tM\right) = \det(M)$ de sorte que $\det(M)^2 = 1$ et $\det(M) = \pm 1$. □

► **REMARQUE–** Lorsque $\det(M) = 1$, l'application linéaire f ne "retourne[12]" pas le plan ou l'espace (on dit qu'elle préserve l'orientation) tandis que si $\det(M) = -1$, l'application linéaire f "retourne" le plan ou l'espace (elle inverse l'orientation).

2 LE CAS DU PLAN

► **EXERCICE I**

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On pose alors

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(M_\theta)$, $\det(N_\theta)$ et ${}^tM_\theta M_\theta$ et ${}^tN_\theta N_\theta$. Qu'en concluez-vous ?
2. Écrire l'application linéaire f_θ (*resp.* g_θ) de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont M_θ (*resp.* N_θ) est la matrice dans la base canonique.
3. En identifiant tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec un nombre complexe $z = x + iy$, montrer que f_θ est l'application linéaire $z \mapsto e^{i\theta}z$. En déduire le module et l'argument de l'image de z en fonction du module et de l'argument de z.
4. Donner la nature géométrique de l'application linéaire f_θ.
5. Vérifier que $N_\theta = M_\theta S$ avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Écrire l'application linéaire s associée à S et justifier que $g_\theta = f_\theta \circ s$. Décrire géométriquement s et ensuite g_θ.

CORRECTION–

1. On vérifie immédiatement que

$$\det(M_\theta) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \det(N_\theta) = -\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = -\left(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\right) = -1$$

et que ${}^tM_\theta M_\theta = {}^tN_\theta N_\theta = I_2$. On en conclut que l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est M_θ préserve angles et distances sans "retourner" l'espace et que l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est N_θ préserve angles et distances en "retournant" l'espace.

---

11. Par exemple, si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

car la première ligne de M devient la première colonne de M et sa seconde ligne devient sa seconde colonne. De même en taille 3,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donne} \quad {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

car la première ligne de M est devenue la première colonne de ${}^tM$, la deuxième ligne de M est devenue la deuxième colonne de ${}^tM$ et la dernière ligne de M est devenue la dernière colonne de ${}^tM$.

12. Une symétrie retourne le plan ou l'espace, autrement dit elle inverse les sens de parcours, tandis qu'une rotation ne les retourne pas, elle conserve les sens de parcours.

2. On sait d'après le cours que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_\theta(x, y) = M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$ si bien que

$$f_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)). \end{array} \right.$$

De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $g_\theta(x, y) = N_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), x\sin(\theta) - y\cos(\theta))$ si bien que

$$g_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), x\sin(\theta) - y\cos(\theta)). \end{array} \right.$$

3. On identifie tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec le nombre complexe $z = x + iy$. Ainsi, $f_\theta(x, y) = f_\theta(z) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$. Par ailleurs, puisque $z = x + iy$, on a

$$e^{i\theta}z = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(x + iy) = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) + i(x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

de sorte que $f_\theta(z)$ correspond bien au nombre complexe $e^{i\theta}z$ et que $f_\theta(z) = e^{i\theta}z$. On en déduit que

$$|| = \left|e^{i\theta}z\right| = \left|e^{i\theta}\right| \times |z| = |z|$$

car $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et de même

$$\arg(f_\theta(z)) = \arg\left(e^{i\theta}z\right) = \arg\left(e^{i\theta}\right) + \arg(z) = \theta + \arg(z)$$

modulo 2π.

4. On en déduit que $f_\theta(z)$ a même module que z et un argument augmenté de θ si bien que f_θ est une rotation de centre l'origine et d'angle θ.

5. On vérifie immédiatement que $N_\theta = M_\theta S$. On sait d'après le cours que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $s(x, y) = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, -y)$ si bien que

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, -y) \end{array} \right.$$

dont on voit immédiatement sur un dessin qu'il s'agit d'une symétrie d'axe l'axe des abscisses ! On a alors $N_\theta = M_\theta S$ et la proposition 4.6 du polycopié de cours garantit que $g_\theta = f_\theta \circ s$. On en déduit que g_θ est la composition d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses [13] suivie d'une rotation [14] de centre l'origine et d'angle θ.

On en déduit le résultat de cours suivant.

Proposition 5 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire préservant angles et distances et M sa matrice dans la base canonique. On a alors deux cas de figure.*

(i) Si $\det(M) = 1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est une rotation du plan d'angle θ et de centre l'origine $(0, 0)$.

(ii) Si $\det(M) = -1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est la composée de la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses et d'une rotation du plan d'angle θ et de centre l'origine $(0, 0)$ ou de manière équivalente f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite du plan d'angle $\frac{\theta}{2}$ par rapport à l'axe des abscisses.

13. Correspondant à s.
14. Correspondant à f_θ en utilisant la question **4**.

► **Remarque–** Pour une description de comment agit une rotation du plan, je vous renvoie ici pour l'exemple d'une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ de centre $(0,0)$. Les liens ici et ici vous permettent de voir l'action d'une telle rotation du plan sur différentes figures. Enfin, ici, vous trouverez un exemple de composée d'une symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de centre $(0,0)$ et une symétrie orthogonale de droite d'angle $\frac{\pi}{8}$. Vous pouvez constater que les deux transformations sont bien équivalentes ! Je vous renvoie également ici pour voir l'effet du cas (ii) sur une figure.

► **Exercice II (Applications directes)**
Décrire géométriquement les applications linéaires dont les matrices dans la base canonique sont données par

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction– On vérifie que les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifient toutes ${}^tMM = I_2$ de sorte qu'elle correspondent toutes à des applications linéaires $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ préservant angles et distances. Par ailleurs, on calcule que

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1, \quad \det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

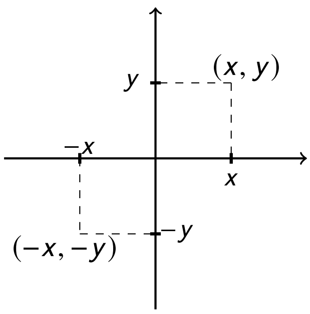
D'après le cours il existe donc $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2 & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}.$$

On voit alors tout de suite que $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ convient de sorte que l'application linéaire correspondante est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre l'origine et que $\theta_2 = \pi$ convient de sorte que l'application linéaire correspondante est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle π et de centre l'origine. On peut voir que ce dernier cas correspond à une symétrie centrale de centre l'origine, soit à l'aide d'un petit dessin, soit en remarquant que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ associée vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x,-y)$$

ce qui permet bien de voir qu'il s'agit de la transformation qui envoie un point (x,y) sur le point $(-x,-y)$, autrement dit la symétrie centrale de centre l'origine.



Enfin, dans le dernier cas où le déterminant valait -1, le cours garantit qu'il existe $\theta_3 \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & -\cos(\theta_3) \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\theta_3 = \frac{\pi}{4}$ convient et ainsi d'après le cours, l'application linéaire associée est la composée d'une symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre l'origine, ou de manière équivalente une symétrie orthogonale d'axe la droite d'angle $\frac{\pi}{8}$. Je vous renvoie aux figures Geogebra de la remarque page 5 pour des illustrations et je vous encourage à vous entraîner à dessiner l'effet de ces matrices sur par exemple le point $(2,1)$!

3 Le cas de l'espace

La situation est un tout petit peu plus compliquée [15] dans l'espace. L'exercice suivant permet de traiter un premier exemple.

► **Exercice III (Un exemple dans l'espace)**

On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x+y-\sqrt{2}z, x+y+\sqrt{2}z, \sqrt{2}(x-y)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est une application linéaire et donner sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer ${}^tMM$ et $\det(M)$.
3. Déterminer
$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$
Justifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel, le décrire géométriquement et en donner sa dimension. Montrer que $f_1 = (1,1,0)$ est un vecteur directeur et en déduire un vecteur directeur e_1 de norme 1.
4. Déterminer $F^\perp$, le décrire géométriquement et en donner sa dimension. Montrer que $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ sont deux vecteurs orthogonaux de $F^\perp$ et que (e_1, e_2, e_3) constitue une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. On considère la matrice
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
7. Donner la matrice de l'application linéaire f restreinte au plan $F^\perp$ dans la base orthonormée (e_2, e_3). En déduire la nature géométrique de f.

► **Exercice IV (Un second exemple dans l'espace)**

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Écrire l'application linéaire f associée à M et calculer $\det(M)$ et ${}^tMM$.

15. Puisqu'elle nécessite un changement de base et la matrice d'une application linéaire de l'espace qui préserve angles et distances n'est pas immédiatement sous une forme qui permet de l'interpréter mais un changement de base orthonormée permet de la mettre sous une forme interprétable.

2. Montrer que $M = NS$ avec
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Écrire les applications linéaires g et s associées à N et S et justifier que $f = g \circ s$.

3. Décrire géométriquement g en s'inspirant de l'exercice 1.2.

4. Justifier que s est une symétrie orthogonale par rapport au plan (Oyz).

5. Conclure quant à la nature géométrique de f.

On peut généraliser ces deux exercices pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 6 *Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire préservant angles et distances. On a alors deux cas de figure.*

(i) Si $\det(M) = 1$, alors il existe une famille orthonormée (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la matrice de f dans cette base (e_1, e_2, e_3) soit donnée par
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
et f est alors une rotation d'angle θ autour de la droite dirigée par e_1.

(ii) Si $\det(M) = -1$, alors il existe une famille orthonormée (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la matrice de f dans cette base (e_1, e_2, e_3) soit donnée par
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
et f est alors la composée de la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par e_1 par une rotation d'angle θ autour de la droite dirigée par e_1.

► **REMARQUE–** Pour une description de ce à quoi ressemble une rotation de l'espace autour d'un axe ainsi que la symétrie orthogonale par rapport à un plan, je vous renvoie ici, ici, ici, ici et ici ainsi qu'à la correction du TD. Globalement une telle rotation fait tourner l'espace autour de la droite dirigée par e_1 d'un angle θ dans la direction de e_2 vers e_3 et une symétrie orthogonale revient à prendre le miroir de l'espace par rapport au plan en question. La section suivante explique comment déterminer la bonne famille orthonormée dans laquelle écrire la matrice de f afin de la décrire géométriquement.

Vous remarquez que, à nouveau, toutes les applications linéaires de l'espace peuvent être décrites en termes de briques de base que sont les rotations et une symétrie orthogonale. Je conclus cette section par quelques mots de vocabulaire qui sont utilisés en chimie.

Définition 1

*(i) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6 avec $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ est appelée une **rotation impropre**.*

*(ii) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6 avec $\theta = 0$ est appelée une **réflexion** par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par e_1.*

*(i) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6 avec $\theta = \pi$ est appelée une **inversion** par rapport à $(0, 0, 0)$.*

► **REMARQUE–** On parle de réflexion dans le cas où $\theta = 0$ car alors f est simplement une symétrie orthgonale par rapport à un plan et on a vu que cela revenait à prendre l'image miroir (ou la réflexion !) de l'espace par rapport à ce plan. Par ailleurs, quand $\theta = \pi$, on a en fait une symétrie centrale de centre $(0, 0, 0)$ et l'espace se trouve inversé (d'où le nom d'inversion !).

4 STRATÉGIE

Face à une application linéaire du plan que l'on vous demande de décrire géométriquement il faut donc procéder de la manière suivante :

(i) Calculer la matrice M de l'application linéaire dans la base canonique, puis calculer sa transposée. Vérifier alors que ${}^tMM = I_2$. Si oui, l'application linéaire en question préserve angles et distances.

(ii) Calculer $\det(M) \in \{-1, 1\}$ d'après la Proposition 4.

(iii) Appliquer alors la Proposition 5 (i) ou (ii) selon que $\det(M) = 1$ ou -1 et conclure.

De manière analogue, face à une application linéaire du plan que l'on vous demande de décrire géométriquement il faut donc procéder de la manière suivante :

(i) Calculer la matrice M de l'application linéaire dans la base canonique, puis calculer sa transposée. Vérifiez alors que ${}^tMM = I_3$. Si oui, l'application linéaire en question préserve angles et distances.

(ii) Calculer $\det(M) \in \{-1, 1\}$ d'après la Proposition 4.

(iii) Si $\det(M) = 1$, déterminer la droite [16]

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Notez e_1 un vecteur directeur de norme 1. Déterminez alors le plan $F^\perp$ et déterminer e_2 et e_3 une famille orthonormée de ce plan et (e_1, e_2, e_3) est alors une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et vous pouvez conclure par la Proposition 6 (i).

(ii) Si $\det(M) = -1$, déterminer la droite [17]

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Notez e_1 un vecteur directeur de norme 1. Déterminez alors le plan $F^\perp$ et déterminer e_2 et e_3 une famille orthonormée de ce plan et (e_1, e_2, e_3) est alors une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et vous pouvez conclure par la Proposition 6 (ii).

► **REMARQUE–** Pour conclure, au vu des circonstances, pas de panique, vous n'aurez pas à accomplir toute cette procédure tous seuls et vous serez guidés (au moins comme dans ce TD ou dans le DM 2).

16. Ce qui est logique puisque la forme de la matrice attendue dans la base (e_1, e_2, e_3) cherchée impose que $f(e_1) = e_1$, autrement dit que e_1 soit fixé par f et ici on cherche précisément les vecteurs de l'espace fixés par f avec F.

17. Ce qui est logique puisque la forme de la matrice attendue dans la base (e_1, e_2, e_3) cherchée impose que $f(e_1) = -e_1$, autrement dit que e_1 est envoyé sur son opposé par f et ici on cherche précisément les vecteurs de l'espace envoyés sur leur opposé par f avec F.