① ILLOUL

Rappels de cours

Prop :

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

f préserve angle & distances $\iff$ ${}^tMM = I$
où M est la matrice de f dans la base canonique

Prop :

Si f linéaire et préserve angles et distances
alors $\det M = 1$ ~ si f ne "retourne" pas l'espace
ou $= -1$ ~ si f "retourne" l'espace

Prop : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tq ${}^tMM = I_2$. Alors
(i) Si $\det M = 1$, $\exists\, \theta \in [0, 2\pi[$ tq $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
et f est une rotation de centre l'origine et d'angle θ
(ii) Si $\det M = -1$, $\exists\, \theta\ [0, 2\pi[$ tq $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
et f est la composée d'une symétrie d'axe (Ox) avec une rotation d'angle θ ou de manière équivalente une symétrie par rapport à la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$ avec (Oz)

EXO III (page 5)

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto \frac{1}{2}(x+y-\sqrt{2}z, x+y+\sqrt{2}z, \sqrt{2}(x-y))$$

1) Mq f est linéaire

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$$f(\lambda(x,y,z)\lambda(x',y',z')) = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

Objectif : $\lambda f(x,y,z) + f(x',y',z')$ $\qquad$ $= f(X,Y,Z)$

$$= \frac{1}{2}(X+Y-\sqrt{2}Z, X+Y+\sqrt{2}Z, \sqrt{2}(X-Y))$$

$$= \frac{1}{2}((\lambda x+x')+(\lambda y+y')-\sqrt{2}(\lambda z+z'), (\lambda x+x') + (\lambda y+y')+\sqrt{2}(\lambda z+z'), \sqrt{2}((\lambda x+x')-(\lambda y+y')))$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{2}(x+y-\sqrt{2}z, x+y+\sqrt{2}z, \sqrt{2}(x-y))\right) + \frac{1}{2}(x'+y'-\sqrt{2}z', x'+y'+\sqrt{2}z', \sqrt{2}(x'-y'))$$

$$= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z')$$

regroupe les termes en λ d'un côté et les autres d'un autre côté

donc f est linéaire

= λ_3

Matrice M de f dans la base canonique

$$f(e_1) = f(1,0,0) = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$$

$$f(e_2) = f(0,1,0) = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2})$$

$$f(e_3) = f(0,0,1) = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Ainsi $M =$
$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \end{array}$$
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2) $${}^tM = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^tM M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I_3$$

règle de Sarrus

et $\det M = \det \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$

$= 0 + 2/8 + 2/8 + 2/8 + 2/8 + 0$

$= 1$

Ainsi f préserve angles et distances sans retourner l'espace

3) $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

pts invariants par f

$\frac{1}{2}\left(x+y-\sqrt{2}z,\ x+y+\sqrt{2}z,\ \sqrt{2}(x-y)\right) = (x,y,z)$

$(x,y,z) \in F \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y-\sqrt{2}z) = x \\ \frac{1}{2}(x+y+\sqrt{2}z) = y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x+y-\sqrt{2}z = 2x & L_1 \leftarrow 2L_1 \\ x+y+\sqrt{2}z = 2y & L_2 \leftarrow 2L_2 \\ \sqrt{2}(x-y) = 2z & L_3 \leftarrow 2L_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x+y-\sqrt{2}z = 0 \\ x-y+\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x-\sqrt{2}y-2z = 0 \end{cases}$

③

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 2z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow -L_1$$

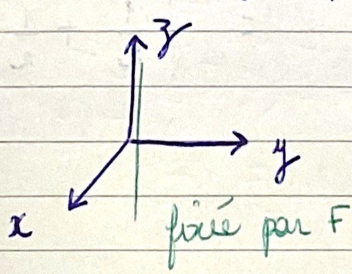
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{2}L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (x, y, z) = (y, y, 0) = y(1, 1, 0)$$

F est l'ensemble des multiples de $(1,1,0)$ donc F est la droite dirigée par $(1,1,0)$



(on obtient tjs une droite)

$$\|f_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$$

On pose alors,

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$e_1 \in F$ et il est de norme 1

4) Déterminer $F^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y,z) \perp f_1\}$

vecteur directeur de $f_1 (1,1,0)$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{(x,y,z) \cdot f_1}_{x+y=0} = 0\}$

$F^{\perp}$ est le plan d'équation $x + y = 0$

$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \qquad e_3 = (0,0,1)$

I) $e_2, e_3 \in F^{\perp}$

II) e_2, e_3 famille orthonormé $e_2 \perp e_3$ et $\|e_2\| = \|e_3\| = 1$

I) • pour e_2, $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ donc $e_2 \in F^{\perp}$

• – e_3, $0 + 0 = 0$ donc $e_3 \in F^{\perp}$

II) $e_2 \cdot e_3 = 0$

$$\|e_2\| = \|(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}} = 1$$

$\|e_3\| = 1$

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

Mq (e_1, e_2, e_3) est une famille othonormée de $\mathbb{R}^3$

$\Updownarrow$

$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_1 \cdot e_3 = 0$

$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

OK

④

5) Mq la matrice de f dans (b_1, b_2, b_3) est :

$$\begin{array}{cccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) & \\ \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right)} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$

$$b_3 = (0,0,1)$$

$f(b_1) = b_1 \rightarrow$ OK
$f(b_2) = -b_3 \rightarrow$ OK
$f(b_3) = b_2 \rightarrow$ à faire

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x+y-\sqrt{2}z,\ x+y+\sqrt{2}z,\ \sqrt{2}(x-y)\right)$$

$$f(b_1) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$= b_1$$

$b_1 \in F$ des vecteurs fixés par f

$\cancel{(x, y, z)}$

$$f(b_2) = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}\left(0, 0, \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(0,0,-2)$$
$$= -(0,0,1) = -b_3$$

Ccl : La matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Automatiquement, on a

$${}^t\tilde{M}M = I_2$$

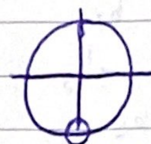
$$\det \tilde{M} = 1$$

Par le cours de la semaine dernière, ...

$$\exists\, \theta\ [0, 2\pi[\ \text{tq}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \theta \\ \sin\theta = -1 \end{cases}$$



$\frac{3\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \ [2\pi]$$

$$\mathrm{Mat}\,(f, (b_1, b_2, b_3)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}$$

$f(b_1) = b_1 \Leftrightarrow$ droite dirigée par b_1 est fixe

(b_2, b_3) base de $F^\perp$ dans $F^\perp$, f agit comme

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$$ dc f est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$

Ainsi f est une rotat° autour de la droite dirigée par b_1 d'angle $\frac{3\pi}{2}$

⑤

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq ${}^tMM = I_3$

i) Si $\det M = 1$ $\exists (b_1, b_2, b_3)$ famille orthonormée tq $\mathrm{Mat}(f, b_1, b_2, b_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

et f est alors une rotation autour de la droite dirigée par b_1 et d'angle θ

ii) Si $\det M = -1$ alors $\exists$ une famille orthonormé (b_1, b_2, b_3) et $\exists \theta \in [0, 2\pi[$

$$\mathrm{Mat}(f(b_1, b_2, b_3)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

alors f est la composée de la symétrie par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par b_1 et de la rotation autour de cette droite d'angle θ

en Chimie $\Rightarrow$ · si $\det M = -1$, $\theta \neq 0, \pi$
↳ rotat° impropre
· si $\det M = -1$, $\theta = 0 \to$ invers°
· ———, $\theta = \pi \to$ réflex°

stratégie ${}^tMM = I_3$

$\det M = 1$
$F \left\{ (x, y, z) \,/\, M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$
↳ b_1
↳ $F^\perp \to b_2, b_3$

$\det M = -1$
$F \left\{ -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$
↳ b_1
↳ $F^\perp \to b_2, b_3$