Analyse de Fourier et géométrie : DM 1

►► *Merci de rendre votre copie* ***pour le 10 février 2021*** *sous forme d'un* ***unique fichier pdf*** *à votre chargé de TD. Merci d'utiliser le formulaire que vous trouverez en cliquant ici pour le groupe C2 et à l'adresse mail elodie.maignant@ens-paris-saclay.fr pour le groupe C1. Pour convertir des formats png, jpeg ou autres au format pdf ou fusionner différents pdfs en un seul, je vous renvoie (par exemple) au site suivant. Un* ***corrigé*** *sera ensuite disponible ici, sur la page web du cours. Vous pouvez rédiger votre travail* ***par groupe de 3 maximum*** *à condition que* ***chacun ou chacune d'entre vous rédige une partie du devoir***. ◄◄

Exercice 1 — Suites, séries et intégrales. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2}\mathrm{d}x.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1+\ln(x)}{x}$. En déduire la valeur de I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité
$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$
4. En utilisant un encadrement de $\ln(x)$ pour $x \in [1,e]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}$.
6. Déduire des questions précédentes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{n!}$ puis que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ converge ainsi que la valeur de sa somme.

Exercice 2 — Série de Fourier. On note f la fonction 2π-périodique et paire définie par
$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x \in]1,\pi]. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[0,\pi]$, puis sur $[-\pi,\pi]$ et enfin sur $\mathbb{R}$. Préciser si f est continue et le cas échéant les points où elle est discontinue. Est-elle continue par morceaux ? De classe C^1 par morceaux ?
2. Que vaut $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Justifier !
3. Soit $n \geqslant 0$. Montrer que les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ et $t \mapsto |f(t)|^2$ sont paires et en déduire que
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t.$$
4. Montrer que $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}$ et que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \frac{\sin(n)}{\pi n}.$$
5. En déduire les coefficients de Fourier complexes de f.
6. Montrer que pour tout $t \neq \pm 1 + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et t qui n'est pas un multiple entier de 2π, on a
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{\pi n}\cos(nt)$$
avec convergence de la série en jeu. Que se passe-t-il en un multiple entier de 2π et en $t = \pm 1 + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$?

7. En déduire que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

8. En admettant[1] que pour tout entier n, $\sin(2n) = 2\sin(n)\cos(n)$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(2n)}{n}$ converge et préciser la valeur de sa somme[2].

9. Que pouvez-vous dire de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$?

10. Calculer $\int_0^\pi |f(t)|^2 \mathrm{d}t$ puis utiliser l'égalité de Parseval pour obtenir que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

1. Démontrer cette formule à partir de la partie imaginaire de e^{2in} calculée de deux façons comme dans les exercices sur le cours 2 vaut 1 point bonus !
2. Autrement dit, la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.