Géométrie et Analyse de Fourier
Math 254
Université Paris-Saclay

Kevin Destagnol

2020-2021

Table des matières

Introduction 3

Séries de Fourier 5

1 Rappels sur les suites 5
- 1.1 Premières définitions . . . 5
- 1.2 Définir une suite . . . 6
- 1.3 Limite d'une suite . . . 7
  - 1.3.1 Définitions et propriétés de base . . . 7
  - 1.3.2 Calculs de limites et comparaisons . . . 10
- 1.4 Monotonie . . . 11

2 Séries numériques 14
- 2.1 Introduction . . . 14
- 2.2 Premières définitions . . . 14
- 2.3 Une condition nécessaire de convergence . . . 18
- 2.4 Séries à termes positifs et convergence absolue . . . 19
  - 2.4.1 Séries à termes positifs . . . 19
  - 2.4.2 Convergence absolue . . . 21
- 2.5 Un critère de convergence au-delà de la convergence absolue . . . 22
- 2.6 Kit de survie sur les séries . . . 23
- 2.7 Quelques démonstrations ∗ . . . 24

3 Séries de fonctions 26
- 3.1 Premières définitions . . . 26
- 3.2 Convergence normale et conséquences . . . 28

4 Séries de Fourier 33
- 4.1 Introduction et motivations . . . 33
- 4.2 Rappels sur les nombres complexes et la trigonométrie . . . 34
- 4.3 Coefficients de Fourier d'une fonction périodique . . . 35
- 4.4 Série de Fourier d'une fonction périodique . . . 46
- 4.5 Égalité de Parseval . . . 51
- 4.6 Application des séries de Fourier . . . 53
- 4.7 Kit de survie en séries de Fourier . . . 53

Géométrie 52

5 Rappels d'algèbre linéaire 52
- 5.1 Espaces vectoriels . . . 52
  - 5.1.1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . . . 52
  - 5.1.2 Bases et dimension . . . 56
  - 5.1.3 Produit scalaire et orthogonalité . . . 60

5.2 Applications linéaires 64
5.2.1 Définitions 64
5.2.2 Matrice d'une application linéaire 65

6 Isométries du plan et de l'espace **68**
6.1 Introduction et premières propriétés 68
6.1.1 Motivations 68
6.1.2 Automorphismes orthogonaux 69
6.2 Le cas du plan 72
6.3 Le cas de l'espace 72
6.4 Stratégie 74

7 Groupes de symétrie et lien avec la chimie $*$ **75**
7.1 Motivations 75
7.2 Le langage de la théorie des groupes 75
7.2.1 Introduction à la notion de groupe à travers l'exemple des groupes orthogonaux . . 76
7.3 Le groupe de symétrie d'une molécule 76

Introduction

Vous pouvez me contacter pour toute question ou problème par mail à l'adresse suivante kevin.destagnol@universite-paris-saclay.fr. Je signale que je corrige tout exercice écrit que vous avez rédigé et que vous souhaitez me rendre. Concernant le volume horaire, il est assez léger pour un programme assez chargé donc on va essayer de traiter le maximum du mieux que l'on peut en essayant d'expliquer pourquoi les notions sont utiles en physique et en chimie. Concernant la note finale, il y aura probablement une note de contrôle continu ainsi que deux devoirs à la maison qui compteront pour environ 25% de la note finale tandis que les 75% restants seront obtenus grâce à la note de l'examen final (il n'y a pas de partiel). Des petites questions à chercher pour vous inciter à ouvrir votre cours et tester votre compréhension seront distribuées (ou envoyées par mail) à la fin de chaque séance de cours que vous pourrez me rendre pour correction lors du cours de la semaine suivante. Le polycopié comprend des compléments et des démonstrations que l'on n'a pas le temps de faire en cours. Ces compléments et preuves sont signalés d'une étoile $*$ et ne sont pas exigibles mais certainement profitables à une bonne compréhension. Par ailleurs, pour celles et ceux qui veulent vraiment l'essentiel du cours à connaître, je vous recommande d'assister (au moins) aux TDs et de lire et travailler en priorité les passages en rouge de ce polycopié.

L'objectif du cours est double. Dans une première partie, on va traiter de séries de Fourier. Il s'agit d'un objet central en mathématiques mais aussi aux nombreuses applications en physique et en chimie comme on essayera de l'illustrer en TD. Les séries de Fourier sont très utiles pour modéliser des phénomènes ondulatoires ou vibratoires et font intervenir des notions physiques telles que la fréquence et le spectre. Elles furent introduites par Joseph Fourier en 1807 pour résoudre l'équation de la chaleur (à savoir l'étude de la propagation de la chaleur dans une tige métallique, ce qui fait intervenir une équation aux dérivées partielles [1]. Par ailleurs, on peut citer depuis 1807 de nombreuses autres applications plus industrielles et concrètes des séries de Fourier dans la synthèse sonore et le traitement d'image ou du signal en général (affichage d'un écran d'un téléphone portable ou format mp3 entre autres) mais aussi en spectroscopie RMN qui est une méthode utilisant les propriétés ondulatoires du champ magnétique de certains noyaux atomiques dans le but de confirmer la présence d'une molécule dans un milieu ou la présence d'impuretés. Elles constituent également un analogue discret de la transformée de Fourier d'utilité notable en cristallographie.

La deuxième partie du cours traitera de groupes et de symétries qui laissent invariants un objet tel un tétraèdre ou un cube avec applications à la cristallographie et aux propriétés électroniques des molécules. En effet, la structure géométrique d'une molécule est liée à sa structure électronique, ce qui est très utile en spectroscopie et permet de déterminer un certain nombre de propriétés de la molécule sans calculs tels que le moment dipolaire et les modes de vibrations nécessaires à la détection par spectroscopie infrarouge. Certains éthylotests peuvent par exemple fonctionner sur ce principe. Ces notions sont également centrales en cristallographie.

1. Vous avez peut être déjà rencontré certaines équations aux dérivées partielles, sinon ce n'est pas grave on y reviendra en TD et dites-vous pour le moment qu'il s'agit d'une généralisation des équations différentielles que vous avez vu en L1 dans le cas de fonctions de plusieurs variables et que ce sont, comme les équations différentielles, un outil très utile pour modéliser toute sorte de phénomènes physiques ou chimiques.

"L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré de former l'analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels." Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur, discours préliminaire, 1822.

Première Partie

Séries de Fourier

Mais tout le monde n'était pas de l'avis de Fourier, caricaturé ici par Boilly.
"Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que, sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.". Carl G.J. Jacobi, lettre à Legendre, 2 juillet 1830.

Chapitre 1

Rappels sur les suites

1.1 Premières définitions

La notion de série (nécessaire pour parler de séries de Fourier) découle de celle de suite, commençons donc par quelques rappels sur le sujet.

Les suites sont un analogue discret des fonctions où l'on remplace la variable continue [1] par un entier naturel [2]. On peut alors voir une suite comme une suite infinie de nombres indexée par les entiers naturels [3].

> **Définition 1.1** *Une* ***suite à valeurs réelles (resp. complexes)*** *est une famille de réels (resp. complexes) indexée par les entiers naturels. Autrement dit, il s'agit d'une famille $u_0, u_1, u_2, \ldots$ et l'on note $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
> *Pour $m \in \mathbb{N}$, on note u_m le terme de rang m. Il s'agit en réalité d'une fonction $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

► **Exemples** :

(i) La suite nulle définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 0$, autrement dit la suite $0, 0, 0, \ldots$ que l'on peut noter $(0)_{n\in\mathbb{N}}$;

(ii) La suite $(n)_{n\geqslant 0}$ qui correspond à $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$;

(iii) La suite $(n^2)_{n\geqslant 0}$ qui correspond à $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$;

(iv) La suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$ qui correspond à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

(v) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres pairs, autrement dit $u_0 = 0$ (le premier nombre pair), $u_1 = 2$ (le deuxième nombre pair), $u_2 = 4$ (le troisième nombre pair), etc... On peut alors voir que de manière générale $u_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► **Remarques** :

(i) Parfois une suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, et on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. C'est par exemple le cas de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ seulement définie à partir du rang [4] 1. De même $(n)_{n\geqslant 3}$ représente la suite $3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

(ii) L'indice n est muet [5]. Ainsi, on aurait pu noter

$$(u_n)_{n\geqslant 0} = (u_k)_{k\geqslant 0} = (u_\ell)_{\ell\geqslant 0}$$

tant qu'on a le même indice dans et en indice de la parenthèse et que cet indice n'est pas utilisé ailleurs. On évitera aussi $(u_u)_{u\geqslant 0}$ pour des raisons évidentes.

1. Souvent notée x.
2. Souvent noté n.
3. Autrement dit que l'on peut énumérer.
4. En effet, on ne peut pas diviser par 0.
5. Comme dans le cas d'une fonction où la variable x peut être remplacée par la variable t par exemple.

► **Exemple issu de la physique** : Contrairement aux planètes qui peuvent occuper toutes les orbites, l'électron d'un atome d'hydrogène ne peut occuper que certaines orbites et avoir certains niveaux d'énergie. C'est le phénomène de quantification. Le modèle de Bohr fournit alors que les niveaux d'énergie en eV de l'électron dans l'atome d'hydrogène sont donnés par

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2}$$

où n est le nombre quantique principal ou le numéro de la couche électronique. Cela définit une suite.

On a bien sûr les opérations classiques suivantes sur les suites.

Proposition 1.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles (resp. complexes) et $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{C}$). On a alors les définitions suivantes :*

(i) La somme des deux suites

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

(ii) Le produit des deux suites

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

(iii) Le produit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par λ

$$\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

(iv) Le quotient des deux suites, si pour tout[6] $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$

$$\frac{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(v_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

► **Exemple** : Si l'on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + 1$ et $v_n = n - 1$, alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n + v_n = n + 1 + n - 1 = 2n$ tandis que la suite $(3u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $3u_n = 3(n + 1) = 3n + 3$.

1.2 Définir une suite

Pour définir une suite, vous rencontrerez essentiellement deux méthodes. La première, et la plus commode, consiste à utiliser comme ci-dessus une formule explicite.

► **Exemple** : C'est le cas des suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mentionnées plus haut. Pour calculer le terme de rang m, on remplace alors simplement m dans la formule et on obtient respectivement m, m^2 et $\frac{1}{2^m}$. Ainsi, si on veut calculer le 100-ème terme de ces suites, on obtient 100, 100^2 et $\frac{1}{2^{100}}$.

La seconde méthode consiste à utiliser une formule de récurrence et des conditions initiales. Autrement dit, on se fixe par exemple $u_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction f et on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Connaissant u_0, on peut en déduire de proche en proche $u_1 = f(u_0)$, puis $u_2 = f(u_1)$, et ainsi calculer n'importe quel terme de rang souhaité.

► **Exemple 1** : Supposons que l'on possède un arbre de taille initiale 1 cm qui double sa taille tous les ans. Notons alors u_n la taille de l'arbre après n années. Alors par hypothèse, $u_0 = 1$ puisque cela correspond à la taille de l'arbre après 0 année, soit au départ. Puis on a pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = 2u_n$ puisque pour connaître la taille à l'année[7] $n+1$, il faut doubler la taille de l'arbre de l'année[8] n. On a donc une suite naturellement donnée par récurrence. Il se trouve qu'on peut parfois en

7. Qui correspond à u_{n+1}.
8. Qui correspond à u_n.

déduire une formule explicite à partir de la relation de récurrence comme ici puisqu'il s'agit d'une suite bien connue, à savoir d'une suite géométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2u_{n-1}$ mais $u_{n-1} = 2u_{n-2}$ et ainsi de suite de sorte que $u_n = 2^n u_0$ et $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vous pouvez par exemple démontrer cela par récurrence.

► **Exemple 2 (suite de Fibonacci)**∗ : Le problème associé à cette suite est de modéliser la croissance d'une population idéale de lapins. On se donne initialement un couple de lapins. On suppose que les lapins mettent deux mois avant d'être en mesure de procréer et que à un mois donné, tous les couples en mesure de procréer donnent naissance à un nouveau couple. Par ailleurs, on suppose que les lapins ne meurent jamais. On note alors u_n le nombre de couples après n mois. On voit que $u_0 = 1$ puisqu'au départ on a un seul couple. De même, $u_1 = 1$ puisqu'après un mois les lapins ne sont pas encore en mesure de procréer. Soit à présent un entier naturel n quelconque et cherchons à calculer u_{n+2}, qui correspond au nombre de couples de lapins après $n+2$ mois. Pour cela on a u_{n+1} couples au mois $n+1$. Ces couples ne disparaissant pas, au mois $n+2$ on retrouve ces u_{n+1} couples. Par ailleurs, au mois $n+2$ les couples qui sont là depuis au moins deux mois vont donner chacun lieu à un nouveau couple. Or les couples présents depuis au mois deux mois sont les couples présents depuis le mois n, à savoir u_n. Ainsi, le nombre de nouveaux couples est donné par u_n et le nombre de lapins au mois $n+2$ est finalement donné par

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

avec $u_0 = u_1 = 1$. Vous voyez que cela permet de calculer[9] $u_2 = 1+1 = 2$, $u_3 = 2+1 = 3$, $u_4 = 3+2 = 5$, etc...

1.3 Limite d'une suite

Passons maintenant à la notion de limite d'une suite[10]. Il s'agit d'une question naturelle du fait de l'ordre dans les entiers naturels : on a d'abord u_0 puis vient u_1 et ainsi de suite et il est ainsi naturel de se demander comment se comporte la suite quand n devient grand[11]. Si l'on pense à l'exemple des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, plus la couche est éloignée, plus l'énergie s'approche de 0, ce qui semble intuitif, plus l'éléctron est éloigné, moins il fait partie de l'atome et plus son énergie diminue. Intuitivement on a trois cas types, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui oscille entre -1 et 1 selon que n est pair ou impair, la suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui se rapproche autant que l'on veut de 1 et la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ qui semble s'envole vers l'infini. Précisons les définitions.

1.3.1 Définitions et propriétés de base

Définition 1.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (resp. complexe). On dit que la suite* ***converge*** *vers $\ell \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si les termes de la suite deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ à partir d'un certain rang. Autrement dit, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que la suite est convergente et on note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On a une ***unique*** *limite si la suite converge et s'il n'existe aucun tel ℓ, on dit que la suite est* ***divergente****.*

► **Exemples :**

(i) On a par exemple

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

9. On peut en fait aussi obtenir une formule explicite utilisant le nombre d'or pour ce genre de suites mais c'est plus compliqué et cela nous entraînerait trop loin!

10. Qui, en bref, fonctionne pareil que la limite d'une fonction quitte à remplacer n par x et à faire tendre x vers l'infini.

11. D'autant que la suite a une infinité de termes qu'il est par conséquent impossible de tous appréhender.

tandis que les suites $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(ii) On a également

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

En effet, je rappelle que pour calculer la limite en $+\infty$ d'un quotient de deux polynômes, il suffit de considérer la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Vous pouvez alors utiliser tous les résultats auxquels vous êtes habitués dans le cas des fonctions, notamment les croissances comparées suivantes [12].

Proposition 1.2 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-\beta n} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} = 0.$$

► **Remarque** :

(i) Toujours établir l'existence d'une limite avant d'en parler !

(ii) La limite (lorsqu'elle existe) d'une suite positive (*resp.* négative) est toujours positive (*resp.* négative). De manière plus générale, si pour tout entier naturel [13] n, $m < u_n$, et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors [14] $m \leqslant \ell$. De même, si pour tout entier naturel n, $u_n < M$, et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $\ell \leqslant M$.

On a ainsi fait la distinction entre $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et les deux autres mais pas encore entre $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 1.3 *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la suite **diverge vers** $+\infty$ si les termes de la suite deviennent arbitrairement grands à partir d'un certain rang. Autrement dit si*

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n > A.$$

*On dit que la suite **diverge vers** $-\infty$ si les termes de la suite deviennent arbitrairement négatifs à partir d'un certain rang. Autrement dit si* [15]

$$\forall A < 0, \quad \exists N = N(A) \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n < A.$$

On note alors respectivement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

*Si une suite n'est ni convergente ni divergente vers $\pm\infty$, on dit simplement que la suite est **divergente**.*

► **Exemple** : Bien sûr, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (-e^n) = -\infty.$$

tandis que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, finie ou infinie.

12. Où il faut se souvenir que l'exponentielle l'emporte toujours sur les polynômes et qu'à l'inverse, le logarithme est toujours battu par les polynômes.

13. En fait si l'inégalité vaut à partir d'un certain rang, on a un résultat analogue.

14. Bien noter le passage à l'inégalité large à la limite ! En effet, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} > 1$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \geqslant 1.$$

On a alors les opérations et formes indéterminées classiques que vous connaissez bien.

Proposition 1.3 *On pose pour tout réel ℓ*

$$+\infty + \ell = +\infty, \quad -\infty + \ell = -\infty, \quad +\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$$

ainsi que[16]

$$+\infty \times \ell = \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0 \\ -\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases} \quad \textit{et} \quad -\infty \times \ell = \begin{cases} -\infty \text{ si } \ell > 0 \\ +\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases}$$

et

$$+\infty \times +\infty = +\infty, \quad +\infty \times -\infty = -\infty, \quad -\infty \times -\infty = +\infty$$

et enfin

$$\frac{\ell}{\pm\infty} = 0, \quad \textit{et si } \ell \neq 0 : \frac{\ell}{0^+} = +\infty \quad \textit{et} \quad \frac{\ell}{0^-} = -\infty.$$

Soient alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Soit également λ un réel non nul. On a alors avec les règles de calculs ci-dessus que :

(i) *La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$$

***sauf** dans le cas $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 = -\infty$ ou $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 = +\infty$ qui sont deux **formes indéterminées**;*

(ii) *La suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \ell_1;$$

(iii) *La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2$$

***sauf** dans le cas $\ell_1 = 0$ et $\ell_2 = \pm\infty$ ou $\ell_1 = \pm\infty$ et $\ell_2 = 0$ qui sont des **formes indéterminées**;*

(iv) *Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et que $\ell_2 \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

***sauf** dans le cas $\ell_1 = \pm\infty$ et $\ell_2 = \pm\infty$ ou $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 = +\infty$ ou $\ell_1 = \ell_2 = 0$ qui sont des **formes indéterminées**.*

(v) *Si f est une fonction continue en ℓ_1 lorsque $\ell_1 \in \mathbb{R}$ ou telle que $\lim_{x\to\ell_1} f(x)$ existe si $\ell_1 = \pm\infty$, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et*[17]

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell_1).$$

► **Remarque** : Pour mémoire, les formes indéterminées sont les suivantes

$$+\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad \pm\infty \times 0, \quad 0 \times \pm\infty.$$

Pour lever une indétermination, on peut utiliser des méthodes analogues que dans le cas des limites en $+\infty$ de fonctions et notamment soit forcer la factorisation par le terme dominant (qui est donc à identifier) soit se ramener à des limites du cours du type croissances comparées. Enfin, dans le cas d'une limite $\frac{\ell}{0}$ avec $\ell \neq 0$, se souvenir qu'il faut déterminer si le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^-.

▶ **Exemples** :

(i) Considérons la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. On a alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Par ailleurs, la fonction cosinus est continue en 0 et vaut $\cos(0) = 1$, par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \cos(0) = 1.$$

(ii) On a vu que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

si bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1} + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1.$$

1.3.2 Calculs de limites et comparaisons

Commençons par limite importante à connaître.

Proposition 1.4 *Soit $q \in \mathbb{R}$. On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ si } |\ell| < 1 \\ 1 \text{ si } \ell = 1 \\ +\infty \text{ si } \ell > 1. \end{cases}$$

Démonstration.– Commençons par le cas $q > 0$. On a alors $q^n = e^{n\ln(q)}$. Si alors, $0 < q < 1$, on a $\ln(q) < 0$ si bien que

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(q) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

car l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$. De même, si $q > 1$, on a $\ln(q) > 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

car l'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Le cas $q = 1$ est évident puisque dans ce cas

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q^n = 1.$$

De même pour $q = 0$ où pour tout $n \geqslant 1$, $q^n = 0$. Il reste donc à traiter le cas $-1 < q < 0$. Pour ce faire, on remarque que

$$|q^n| = |q|^n \leqslant |q|^n.$$

Or, $0 < |q| < 1$ donc on a vu que

$$\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$$

et on conclut par le Corollaire 1.1 ci-dessous. □

Ensuite, le premier théorème que vous connaissez bien et qui permet de calculer une limite est le célèbre théorème des gendarmes ou lemme d'encadrement qui prend en sandwich une suite entre deux suites ayant la même limite, forçant ainsi la suite du milieu à avoir elle aussi, la même limite.

Proposition 1.5 (Théorème des gendarmes/Lemme d'encadrement)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, on a que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

On a alors le corollaire suivant qui découle immédiatement[18] de la Proposition 1.5 suivant mais qui s'avère très utile.

Corollaire 1.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

► **Exemple** : Considérons la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Le premier réflexe est d'essayer de calculer la limite du numérateur et celle du dénominateur et de voir si on peut conclure mais ici on est bloqué du fait que le numérateur n'admet pas de limite, ni finie ni infinie. On procède donc en remarquant que[19]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et ainsi le Corollaire 1.1 fournit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Terminons alors cette section par un analogue du théorème des gendarmes pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposition 1.6

(i) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(ii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

1.4 Monotonie

De la même façon que le sens de variations des fonctions apporte de nombreuses informations intéressantes, la monotonie d'une suite est également un aspect intéressant à étudier. On donne les définitions suivantes qui je l'espère vous paraissent tout à fait naturelles.

Définition 1.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que :*

*(i) La suite est **croissante** (resp. strictement croissante) si pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$);*

*(ii) La suite est **décroissante** (resp. strictement décroissante) si pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$);*

*(iii) La suite est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$;*

*(iv) La suite est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$;*

*(v) La suite est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

► **Exemples :**

18. En effet, se souvenir que $|u_n| \leqslant v_n$ équivaut à $-v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$.
19. En effet, $(-1)^n$ vaut toujours 1 ou -1 selon la parité de n et ainsi $|(-1)^n| = 1$.

(i) On a que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$

de sorte que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 et majorée par 1. Elle est ainsi bornée.

(ii) Pour savoir si une suite est croissante ou décroissante, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si ce signe est positif, la suite est croissante et s'il est négatif, la suite est décroissante. Dans le cas de $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$, on doit étudier

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{(n+1)n} < 0$$

de sorte que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et même strictement décroissante.

(iii) Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M$$

pour $m, M \in \mathbb{R}$. Alors, si la suite converge vers une limite finie ℓ, cette limite vérifie $m \leqslant \ell \leqslant M$. Par ailleurs, une suite bornée ne peut pas diverger vers $\pm\infty$ et une suite convergente est bornée. En revanche, une suite non bornée ne diverge pas nécessairement vers $\pm\infty$ comme en témoigne l'exemple de $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite bornée ne converge pas nécessairement comme en témoigne l'exemple de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais on va voir plus bas qu'au prix d'une hypothèse supplémentaire, ces réciproques deviennent vraies!

Proposition 1.7 *Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.*

► **Remarques** :

(i) Cet énoncé est assez naturel, une quantité qui ne fait que croître mais qui ne peut dépasser une valeur plafond finit par se stabiliser et tendre vers une limite.

(ii) Noter en revanche que ce résultat démontre la convergence de la suite mais ne donne pas sa limite! On peut en général seulement encadrer la valeur de la limite en utilisant l'exemple (iii) ci-dessus. On a par ailleurs dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ croissante (*resp.* décroissante) convergeant vers ℓ que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$ (*resp.* $u_n \geqslant \ell$).

On a évidemment le pendant de ce théorème pour les suites non bornées.

Proposition 1.8 *Toute suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) est divergente vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Terminons alors ce chapitre sur les suites par un théorème dans la même veine que le théorème des gendarmes.

Proposition 1.9 (Suites adjacentes) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiantque*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n,$$

que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$. Alors les deux suites sont convergentes et ont la même limite ℓ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

DÉMONSTRATION ∗– Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors pour tout entier n, $v_n \leqslant v_0$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

et ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc convergente vers un certain ℓ par la Proposition 1.7. De même, on montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc convergente vers un certain ℓ' par la Proposition 1.7. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \ell' - \ell$$

mais par hypothèse cette limite est nulle si bien que $\ell' = \ell$. □

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Introduction

Passons alors à l'objet essentiel de cette première partie du cours, à savoir les séries et commençons par les plus simples d'entre elles, à savoir les séries numériques.

Rappelons pour bien débuter ce chapitre que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

représente la somme des u_k pour k variant de 0 à n.

Pour introduire le concept de série, considérons pour commencer le paradoxe célèbre suivant dû au philosophe grec Zénon [1]. Imaginez que vous vous déplacer à la vitesse de 1 m/s et que vous devez parcourir un mètre. Combien de temps vous faut-il pour parcourir la distance d'un mètre ? Question facile, une seconde bien sûr ! Mais alors comment expliquer le raisonnement suivant : il vous faut d'abord parcourir la moitié de la distance et pour cela il vous faut $\frac{1}{2}$ seconde. Puis il faut parcourir la la moitié du trajet restant (soit $\frac{1}{4}$ de mètre) et pour cela il vous faut $\frac{1}{4}$ de seconde supplémentaire. On peut alors continuer le raisonnement en disant que pour arriver, il faut alors parcourir la moitié du chemin restant et ainsi de suite. Ce faisant, le temps nécessaire semble être

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

L'objectif de cette section est de donner un sens à cette somme infinie de termes positifs dont on a l'impression qu'elle devrait être infinie mais comme on va le voir, ce n'est pas toujours le cas, ce qui nous permettra de résoudre le paradoxe. De manière générale, pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, on voudrait donner un sens (au moins dans certains cas) à la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots .$$

Cela correspondra à l'analogue discret d'une intégrale pour les fonctions et on aura beaucoup de propriétés en commun.

2.2 Premières définitions

Une idée naturelle pour définir de tels objets est de procéder comme dans le paradoxe et de considérer des sommes finies avec de plus en plus de termes et de se dire que si cette suite de sommes finies converge, la limite est une bonne définition pour la somme infinie.

1. Que j'ai ici un peu remodifier puisque sa version originale concerne Achille et la tortue. L'objectif de ce paradoxe pour Zénon (que l'on va résoudre en utilisant les séries mais les séries étaient bien sûr inconnues de Zénon à l'époque) était de démontrer que tout est illusion et que parcourir un mètre est en réalité impossible.

Définition 2.1 *À une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe une nouvelle suite, appelée suite des* ***sommes partielles*** *et définie pour tout entier n par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

On appelle ***série de terme général*** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.*

On dit alors que la série ***converge*** *si la suite des sommes partielles converge et on note alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

sa limite, appelée somme de la série. Une série non convergente est alors dite ***divergente****.*

▶ **Remarques** :

(i) Attention à différencier les deux notations $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ qui représente la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui la limite de cette suite des sommes partielles et donc est un nombre réel ou complexe. On peut par ailleurs toujours parler d'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ mais on ne peut parler de sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ que dans le cas d'une série **convergente**.

(ii) Les séries convergentes sont alors le cadre dans lequel on peut donner un sens à la somme infinie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

(iii) On peut là aussi commencer une série à un rang n_0 et on notera alors respectivement $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ pour la série et si la série est convergente $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ pour sa somme. C'est par exemple le cas de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

▶ **Retour sur l'exemple introductif** : Revenons à l'exemple du paradoxe de Zénon. Il s'agit de s'intéresser à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$. Pour cela, on doit étudier la convergence de la suite des sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang n est donnée par définition par[2]

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

On remarque alors que d'après la Proposition 1.4 du chapitre précédent que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

car $0 < \frac{1}{2} < 1$ de sorte que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

2. Je rappelle qu'il faut savoir reconnaître les séries géométriques et savoir que

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

dès que $q \neq 1$.

Il s'ensuit alors que [3]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = 2 - 1 = 1$$

et on retrouve bien (mais avec peine!) qu'il faut 1 seconde pour parcourir 1 mètre à la vitesse de 1 m/s! En général on ne sait pas donner de formules explicites pour la somme d'une série mais on peut quand même parvenir à dire des choses sur ces objets. La suite des sommes partielles est ici donnée par

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & \frac{1}{2^0} \\ S_1 & = & \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} \\ S_2 & = & \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \\ S_3 & = & \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \\ S_4 & = & \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \\ & \vdots & \end{array}$$

► **Exemples** :

(i) Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$. Pour étudier cette série, on s'intéresse à la suite des sommes partielles. Pour cela, soit $n \in \mathbb{N}$, alors par définition [4]

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On a alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série diverge. La suite des sommes partielles est ici donnée par

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & 0 \\ S_1 & = & 0+1 \\ S_2 & = & 0+1+2 \\ S_3 & = & 0+1+2+3 \\ S_4 & = & 0+1+2+3+4 \\ & \vdots & \end{array}$$

(ii) Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$. Pour étudier cette série, on s'intéresse à la suite des sommes partielles. Pour cela, soit $n \in \mathbb{N}$, alors par définition

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.$$

On a alors deux cas, si n est pair S_n est une succession de 1 et de -1 avec autant de 1 que de -1 si bien que $S_n = 0$ tandis que si n est impair, S_n est une succession de 1 et de -1 en nombre égal suivi d'un 1 si bien que $S_n = 1$. La suite des sommes partielles oscille donc constamment entre 0 et 1 et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ diverge. La suite des sommes partielles est ici donnée par

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & 1 \\ S_1 & = & 1-1 \\ S_2 & = & 1-1+1 \\ S_3 & = & 1-1+1-1 \\ S_4 & = & 1-1+1-1+1 \\ & \vdots & \end{array}$$

3. La somme de 1 à $+\infty$ est la somme de 0 à $+\infty$ moins le terme pour $n = 0$, qui vaut 1.

4. Le calcul suivant utilise le calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique classique

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

que l'on peut démontrer par exemple par récurrence.

En général, on ne sait même pas calculer explicitement les sommes partielles et on va avoir besoin d'autres méthodes pour pouvoir malgré tout établir la convergence de séries et dire quelque chose de la somme. Pour cela, commençons par la convergence et la divergence de deux familles de séries essentielles [5].

Proposition 2.1

(i) ***(Série de Riemann)*** *La série*
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$$
converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

(ii) ***(Série de Riemann alternée)*** *La série*
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$
converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

(iii) ***(Série géométrique)*** *La série*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$$
converge si, et seulement si, $|q| < 1$ et dans ce cas
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

► **Exemples** : Ainsi, en prenant la série de Riemann pour $\alpha = 1$, la série **harmonique** $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge tandis que le cas $\alpha = 2$ fournit que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge [6]. On ne sait en revanche pas *a priori* la valeur de sa somme [7]. De même, considérant $\alpha = 1$ dans la série de Riemann alternée, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge. De même, la série $\sum_{n\geqslant 1} 3^n$ diverge car $3 > 1$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge car $0 < \frac{2}{3} < 1$.

On a bien évidemment les opérations suivantes sur les séries.

Proposition 2.2 *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors*

(i) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n + v_n)$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda u_n$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda u_n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

5. Pour celels et ceux qui veulent aller plus loin, des éléments de démonstration sont fournis pages 24 et 25.
6. On renvoie à la page `https://www.math.u-psud.fr/~destagnol/series.html` pour une illustration de ces phénomènes.
7. On verra que les séries de Fourier permettent en réalité de calculer la valeur de cette somme.

► **Remarque** : Il s'agit de propriétés de linéarité comme pour l'intégrale. Attention cependant au produit, ce n'est pas parce que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$ converge [8] et même dans le cas de la convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \neq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

au même titre que $(u_0 + u_1)(v_0 + v_1) \neq u_0 v_0 + u_1 v_1$!

► **Exemples** : Un réflexe doit donc être de vous demander si la série que l'on vous demande d'étudier est une série connue (de Riemann, de Riemann alternée ou géométrique) ou alors une combinaison linéaire de ces dernières. Par exemple, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{3-(-1)^n}{n^5}$ est une combinaison linéaire de la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^5}$ qui converge (car $\alpha = 5 > 1$) et de la série de Riemann alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^5}$ qui converge (car $\alpha = 5 > 0$). On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^5}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-(-1)^n}{n^5} = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}.$$

En revanche, on ne peut **rien** dire de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{3^n}{n}$ qui ferait intervenir un produit. On verra plus tard que le critère de d'Alembert permet d'étudier ces séries !

2.3 Une condition nécessaire de convergence

Un problème naturel est alors de trouver des critères assurant la convergence d'une série. On commence par une condition **nécessaire** (mais **PAS suffisante**).

Proposition 2.3 *Si la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

DÉMONSTRATION.– On note S_n la somme partielle de rang n. On a alors par définition pour tout $n \geqslant 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n + S_{n-1}$$

si bien que $u_n = S_n - S_{n-1}$. Mais par convergence de la série il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \ell$$

de sorte que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et on a ainsi le résultat. □

► **Remarque** : Attention à bien voir que ce n'est qu'une condition nécessaire. En particulier, toute suite tendant vers 0 en $+\infty$ ne donne pas lieu à une série convergente comme le montre l'exemple de la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Le théorème ne permet donc que de montrer la divergence de séries. Si une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ vérifie que $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors nécessairement la série diverge mais si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, il faut un argument supplémentaire pour conclure à la convergence, ce n'est pas suffisant pour la garantir. Un autre réflexe face à une série doit donc être de se demander si le terme général tend vers 0 ou non !

8. Considérer par exemple $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser la Proposition 2.1.

2.4 Séries à termes positifs et convergence absolue

2.4.1 Séries à termes positifs

Effectuons un court intermède autour des séries à termes positifs pour lesquels on a des critères plus agréables de convergence et auxquelles on va pouvoir souvent (mais pas toujours) se ramener pour étudier la convergence d'une série quelconque.

Proposition 2.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et supposons que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la série converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée, i.e.*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M.$$

Dans ce cas,

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant M.$$

Démonstration.– Il s'agit tout simplement de voir que pour tout entier naturel n, on a $S_{n+1} = u_{n+1} + S_n$ de sorte que $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ et par conséquent la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de sorte que sa convergence est équivalente au fait qu'elle soit majorée par les Proposition 1.7 et Proposition 1.8.

□

▶ **Remarque** : Cela établit seulement la convergence et donne simplement un encadrement de la somme sans donner sa valeur exacte. Par ailleurs, dans l'énoncé de la Proposition 2.4, la positivité à partir d'un certain rang suffirait.

▶ **Exemple** : On peut utiliser cela pour montrer la convergence de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On utilise alors la majoration valable pour tout entier $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Ainsi,

$$S_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

On constate alors que

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

car tous les termes se simplifient 2 à 2 sauf le premier et le dernier. On a alors

$$S_n \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Ainsi la suite des sommes partielles est majorée et comme la série est à termes positifs, elle converge et

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2.$$

On a vu que pour qu'une série converge il faut que la suite tende vers 0 et que le terme général varie suffisamment peu quand n tend vers $+\infty$. Il n'est donc pas étonnant qu'une suite majorée par une autre qui varie suffisamment peu pour donner lieu à une série convergente, donne également lieu à une série convergente. Et inversement, il est assez intuitif qu'une suite minorée par une autre qui varie trop pour donner lieu à une série convergente, donne également lieu à une série divergente. L'objet de la proposition suivante est de rendre cette intuition rigoureuse. Encore une fois, l'énoncé qui suit reste valable si l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ vaut seulement à partir d'un certain rang.

Proposition 2.5 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à **termes positifs** telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$.*

(i) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

(ii) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

DÉMONSTRATION.– En effet, on commence par remarquer que sommer l'inégalité $u_k \leqslant v_k$ pour k entre 0 et n et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$ fournit

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Alors, dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge implique que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et ainsi cette suite étant croissante, elle doit être majorée. Il existe alors un réel M tel que

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M.$$

Ainsi la suite des sommes partielles associées à $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ est aussi majorée et comme $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ est à termes positifs, par la Proposition 2.4, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Pour la seconde assertion, la suite $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ étant à termes positifs, dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge revient à dire qu'elle diverge vers $+\infty$, autrement dit [9]

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$$

et on conclut alors en utilisant l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$$

et la Proposition 1.6 du chapitre 1. □

▶ **Exemple** : Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Le terme général de la série est la suite $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ à termes positifs car $\frac{1}{n^2} \in [0, 1]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est positive. On utilise alors [10] l'inégalité

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or, on sait [11] que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la Proposition 2.5 garantit la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

9. Se souvenir qu'une suite croissante est soit convergente lorsqu'elle est majorée soit diverge vers $+\infty$ dans le cas contraire.
10. Vous pouvez en effet établir en étudiant le signe de la fonction $f(x) = \sin(x) - x$ sur $[0, +\infty[$ par exemple que

$$\forall x \geqslant 0, \quad \sin(x) \leqslant x.$$

11. Série de Riemann avec $\alpha = 2$, voir Propositiion 2.1.

Terminons cette section par un dernier critère très utile.

Proposition 2.6 (Critère de d'Alembert) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement **positifs** telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Alors si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, si $\ell > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge tandis que si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

► **Remarques** :

(i) L'idée derrière la preuve est la suivante. On a pour n grand que

$$u_n \approx \ell u_{n-1} \quad u_{n-1} \quad \ell u_{n-2} \quad \text{soit} \quad u_n \approx \ell^2 u_{n-2}$$

et de proche en proche, on s'attend à ce que $u_n \approx \ell^n u_0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^n$ converge si $\ell < 1$ et diverge si $\ell > 1$.

(ii) Dans le cas $\ell = 1$, on ne peut pas conclure. En effet, les séries de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ vérifient toutes $\ell = 1$ mais peuvent soit converger soit diverger selon les valeurs de α.

► **Exemples** :

(i) On peut déduire du critère de d'Alembert la convergence de la série [12] $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$. En effet, on a pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n!}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

donc la série converge !

(ii) De même pour la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{n}$. En effet, on a pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{n}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = 3 \times \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3 > 1$$

donc la série diverge !

2.4.2 Convergence absolue

Voyons à présent comment on peut se ramener dans certains cas à l'étude de séries à termes positifs. On introduit pour ce faire la notion de convergence absolue qui consiste à remplacer

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{par} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

et on espère qu'étudier la seconde série, qui est à termes positifs, donne des informations sur la série originale.

Définition 2.2 *Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente.*

12. Je rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

► **Exemples** :

(i) Considérons la série de terme général $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^2}$. On a alors

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ est convergente donc par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

(ii) Considérons la série de terme général $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$. On a alors

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ est divergente donc par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente.

L'intérêt de la notion de convergence absolue vient de la proposition suivante.

Proposition 2.7 *Toute série absolument convergente est convergente.*

► **Remarques** :

(i) À nouveau, une série absolument convergente converge donc il s'agit là d'un bon moyen de montrer la convergence d'une série et cela doit être votre premier réflexe. D'autant qu'on a des critères concernant les séries à termes positifs. Malheureusement, il existe des séries qui sont convergentes mais qui ne sont pas absolument convergentes, comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ par exemple. Ainsi, réciproquement la convergence n'implique **PAS** la convergence absolue.

(ii) Dans l'exemple ci-dessus, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc on peut en déduire que la série converge.

2.5 Un critère de convergence au-delà de la convergence absolue

On vient de voir que pour montrer la convergence d'une série, parfois étudier la convergence absolue ne suffit, comme dans l'exemple de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Voici alors un critère qui permet de s'en sortir malgré tout dans certains cas.

Proposition 2.8 (Critère de Leibniz) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs et tendant vers 0 en $+\infty$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ est convergente.*

► **Exemple** : On peut notamment appliquer ce critère au cas de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$. En effet, la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite de réels positifs, décroissante, et de limite nulle en $+\infty$ de sorte que le critère de Leibniz garantit la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

2.6 Kit de survie sur les séries

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série dont on vous demande d'étudier la convergence. Il faut alors suivre l'algorithme suivant :

(0) On calcule $\lim_{n \to +\infty} u_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, alors la série diverge et on a répondu à la question par la Proposition 2.3 et si $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, on passe à l'étape (0').

(0') On se demande si l'on a affaire à une combinaison linéaire de séries de Riemann, Riemann alternée ou géométrique, auquel cas on conclut directement par le cours et les Proposition 2.1 et Proposition 2.2. Sinon on passe à l'étape (1).

(1) On étudie le signe de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si à partir d'un certain rang, on a $u_n \geqslant 0$, alors on a affaire à une série à termes positifs. On utilise alors les critères de la Section 2.4.1 à cette série à termes positifs.

Le premier réflexe si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de nature multiplicative est d'appliquer à $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ le critère de d'Alembert (Proposition 2.6). Si vous obtenez que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

alors si $\ell < 1$, la série converge et vous avez fini. Si $\ell > 1$, la série diverge et vous avez également terminé et si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure et on essaye d'appliquer un autre critère.

Le second critère à tenter est celui de la Proposition 2.5.

Enfin, en dernier recours, on peut essayer d'appliquer la Proposition 2.4.

Si la série n'est **pas** à termes positifs, alors on passe directement à l'étape (2).

(2) On étudie la convergence absolue de la série, autrement dit la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Noter qu'on remplace donc u_n par $|u_n|$ qui devient positif[13]. On applique alors les critères de la Section 2.4.1 à cette série à termes positifs.

Le premier réflexe si ${}_{n \in \mathbb{N}}$ est de nature multiplicative est d'appliquer à $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ le critère de d'Alembert (Proposition 2.6). Si vous obtenez que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$$

alors si $\ell < 1$, la série converge absolument et donc converge par la Proposition 2.7 et vous avez fini. Si $\ell > 1$, la série ne converge pas absolument et il faut passer à l'étape[14] (3) et si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure et on essaye d'appliquer un autre critère.

Le second critère à tenter est celui de la Proposition 2.5. S'il vous permet de conclure à la divergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ vous devez passer à l'étape (3) et s'il vous permet de conclure à la convergence absolue, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge par la Proposition 2.7.

Enfin, en dernier recours, on peut essayer d'appliquer la Proposition 2.4. Si cela vous permet de conclure à la divergence vous devez passer à l'étape (3) et si cela vous permet de conclure à la convergence absolue, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

(3) On se retrouve alors avec une série qui ne converge pas absolument et on veut étudier si celle-ci converge ou pas. Pour ce genre de questions, vous serez soit guidés par l'énoncé soit il faut faire appel au seul critère dont vous disposez pour cela, à savoir le critère de Leibniz (Proposition 2.8). Si le critère s'applique, vous obtenez une série qui converge mais qui ne converge pas absolument.

---

13. Dans le cas où u_n est positif, $|u_n| = u_n$ et convergence et convergence absolue sont les même notions.
14. Car peut être converge-t-elle sans converger absolument.

2.7 Quelques démonstrations ∗

Voici quelques démonstrations non exigibles pour les curieux ou curieuses ou pour celles et ceux qui souhaiteraient approfondir le cours. Pour les autres, vous pouvez passer au chapitre suivant !

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1.–

(i) Dans le cas $\alpha \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$ et par conséquent la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge. Traitons alors le cas $\alpha > 1$ et les cas restants se traiteraient de façon analogue [15]. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Pour tout $k \geqslant 2$, le théorème des accroissements finis sur $[k-1, k]$ fournit alors l'existence d'un $u_k \in]k-1, k[$ tel que

$$f'(u_k) = \frac{1}{u_k^\alpha} = f(k) - f(k-1).$$

On a alors $\frac{1}{u_k^\alpha} > \frac{1}{k^\alpha}$ de sorte que

$$\frac{1}{k^\alpha} < f(k) - f(k-1)$$

et en sommant ces inégalités pour k allant de 2 à n, il vient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=2}^{n} (f(k) - f(k-1)) \quad \text{soit} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < 1 + \sum_{k=2}^{n} (f(k) - f(k-1)).$$

Or, on a

$$\sum_{k=2}^{n} (f(k) - f(k-1)) = f(2) - f(1) + f(3) - f(2) + \cdots + f(n) - f(n-1) = f(n) - f(1)$$

si bien que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < 1 + f(n) - f(1).$$

Mais, on a clairement que $f(n) \leqslant 0$ de sorte que $S_n < 2 - f(1)$ et la suite des sommes partielles est bornée. Comme $\frac{1}{n^\alpha} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, cela implique que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

(ii) On applique le critère de Leibniz pour $\alpha > 0$. Pour $\alpha \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$ et par conséquent la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge.

(iii) On effectue le calcul explicite des sommes partielles en utilisant la formule pour la somme géométrique.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \\ n+1 \text{ si } q = 1. \end{cases}$$

On voit alors en utilisant la Proposition 1.4 du chapitre 1 que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} \text{ si } |q| < 1 \\ +\infty \text{ si } q \geqslant 1 \\ \text{pas de limite si } q \leqslant -1. \end{cases}$$

□

15. Avec la fonction $f(x) = \ln(x)$ dans le cas $\alpha = 1$ et $f(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ dans le cas $0 < \alpha < 1$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.7.– On pose $a_n = u_n$ si $u_n \geqslant 0$ et o sinon et $b_n = u_n$ si $u_n < 0$ et 0 sinon de sorte que $u_n = 1_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est à termes positifs et $a_n \leqslant |u_n|$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge par la Proposition 2.5 et par convergence absolue de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. De même, $0 < -b_n \leqslant |u_n|$ et donc par le même raisonnement la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-b_n)$ converge et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ aussi et on peut conclure grâce à la Proposition 2.2. □

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.8.– Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k.$$

On note alors m_n la somme partielle jusqu'à l'entier impair le plus grand possible inférieur ou égal à n et M_n la même chose jusqu'à l'entier pair le plus petit possible supérieur [16] à n. On a alors

$$m_n \leqslant S_n \leqslant M_n$$

et la différence de M_n et m_n tend vers o car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On conclut alors par le théorème des suites adjacentes que les suites $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, qui doit aussi être la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le théorème des gendarmes. Ainsi, la série est bien convergente. □

16. Pour vous en convaincre, distinguer le cas n pair et le cas n impair.

Chapitre 3

Séries de fonctions

Ce chapitre ne sera pas abordé en cours et est donc **facultatif** mais est là pour celles et ceux qui veulent aller plus loin et approfondir leur cours. En effet, les séries de Fourier ne sont pas seulement des séries mais des **séries de fonctions**.

3.1 Premières définitions

Passons à présent à l'objet central de cette première moitié du cours, à savoir les séries de fonctions [1]. Une série de fonction sera tout simplement une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où l'on autorisera la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à dépendre d'un paramètre x. Voici quelques exemples introductifs.

► **Exemples** :

(i) Pour tout réel x, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^2}$ converge. En effet, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et on peut appliquer la Proposition 2.2 du chapitre 2. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

où la quantité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est une constante. On voit donc que ce faisant, on obtient une fonction de x définie sur $\mathbb{R}$.

(ii) On peut de manière similaire à ce qu'on a déjà vu également considérer pour $x \in \mathbb{R}$ la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$. On a vu que cette série diverge quand $|x| \geqslant 1$ et qu'elle converge quand $|x| < 1$ et que dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ définit une fonction mais définie sur $]-1,1[$ uniquement du fait que pour certaines valeurs du paramètre x, la série diverge.

Ces deux exemples introductifs donnent alors lieu aux définitions suivantes que je vous conseille de relire à l'aune de ces définitions.

Définition 3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une fonction $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $x \in I$ fixé, on peut alors considérer la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.*

[1]. Les séries de Fourier sont des séries de fonctions particulières.

*Si pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge, on dit que la série **converge simplement**. Dans ce cas, la somme de la série définit une fonction f sur I par*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

appelée fonction somme de la série.

► **Remarque** : L'exemple (i) ci-dessus définit une série de fonction qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ de fonction somme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

De même, l'exemple (ii) définit une série de fonctions qui converge simplement sur $]-1,1[$ de fonction somme

$$\forall |x| < 1, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

► **Exemple** : Considérons la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple de cette fonction consiste à déterminer pour quels x fixé la série converge. On se fixe par conséquent $x \in \mathbb{R}$. On peut par exemple appliquer le critère de d'Alembert pour établir la convergence absolue avec $u_n = \frac{|x|^n}{n!}$. On calcule alors

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Ainsi la série à termes $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x|^n}{n!}$ converge, ce qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument et donc converge. Ainsi, la série de fonction est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ et définit une fonction somme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On verra en TD qu'il s'agit en réalité de la fonction exponentielle !

On a donc obtenu un moyen de définir des fonctions à l'aide de séries de fonctions simplement convergentes. Bien sûr en général on ne saura pas donner d'expressions simples de ces fonctions contrairement au cas des séries géométriques mais on va malgré tout avoir besoin de savoir les étudier. Et bien évidemment pour étudier une fonction, il est utile de savoir si elle est continue, ses variations et pour cela si elle est dérivable et quelle est sa dérivée ! Malheureusement, même lorsque tous les f_n sont continues et dérivables, ce n'est pas forcément le cas de la fonction somme associée à une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, même en cas de convergence simple. C'est pourquoi pour garantir continuité et dérivabilité, on va avoir besoin d'un peu plus que la convergence simple, à savoir la convergence normale qui fait l'objet de la section suivante [2].

► **Exemple** $*$: Considérons l'exemple de la suite de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ avec pour tout entier naturel n,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1}.$$

On voit aisément que pour $x \in \mathbb{R}$ fixé $f_n(x) = x^n(1-x)$ et puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$, cela entraîne que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur l'intervalle

2. On aimerait au même titre que $(f_0 + f_1)' = f_0' + f_1'$ une formule du type

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'.$$

$]-1,1[$ et définit une fonction sur $]-1,1[$ par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

Par ailleurs, pour $|x| \geqslant 1$ et $x \neq 1$, on a $1-x \neq 0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ diverge de sorte que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ diverge également. Mais pour $x = 1$, on constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 0$ de sorte que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(1)$ converge (vers 0) et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge finalement simplement sur $]-1,1]$ vers une fonction

$$\forall x \in]-1,1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]-1,1[\\ 0 \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

On constate alors que bien que toutes les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient continues et dérivables et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, leur série n'est même pas une fonction continue et donc *a fortiori* non dérivable...

3.2 Convergence normale et conséquences

Commençons alors par une définition.

Définition 3.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$* ***converge normalement*** *si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge.*

L'intérêt d'une telle définition c'est qu'elle implique la convergence simple.

Proposition 3.1 *Une série de fonction qui converge normalement sur I converge simplement sur I.*

DÉMONSTRATION.– En effet, pour tout $x \in I$, on. a $|f_n(x)| \leqslant \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ et par conséquent si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge, alors par la Proposition 2.5 du chapitre précédent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ à termes positifs converge donc. Ainsi, pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument et donc converge. On a donc convergence simple sur I. □

► **Remarques** :

(i) La convergence normale est en un sens pratique puisqu'elle ramène le problème de la convergence d'une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, à celui d'une série numérique, à savoir la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in I} |f_n(x)|$, pour laquelle on a vu de nombreux critères de convergence au chapitre précédent.

(ii) Votre premier réflexe pour étudier une série de fonctions doit donc être de vérifier si on a convergence normale ou pas, puisque cela impliquera toutes un tas de bonnes propriétés que l'on recherche pour la fonction somme et la convergence simple. La méthode est alors de fixer $n \in \mathbb{N}$ et d'étudier la fonction[3] $x \mapsto |f_n(x)|$. On pourra notamment en dresser un tableau de variations sur I. On identifiera alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

et on étudiera la convergence de la série numérique à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Si la série converge, alors on a convergence normale et si non, on n'a pas convergence normale. Évidemment, parfois il est compliqué d'obtenir une expression exacte du maximum et on fera alors appel à la proposition suivante.

3. Ne pas oublier les valeurs absolues !

(iii) La réciproque de la Proposition 3.1 est fausse. En effet, il existe des séries de fonctions qui convergent simplement sur I mais qui ne convergent pas normalement sur I.

(iv) Il est clair que la convergence normale sur I implique la convergence normale sur tout intervalle inclus dans I.

► **Exemple** : Revenons à l'exemple de la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$. On a vu en page 20 que cette série de fonctions converge simplement sur $]-1,1[$ et que

$$\forall |x|<1, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Étudions la convergence normale de cette série de fonctions sur $]-1,1[$. Pour cela, on pose $f_n(x) = x^n$ sur $]-1,1[$ et on cherche à étudier la fonction $x \mapsto |f_n(x)| = |x|^n$. Il n'est pas difficile de voir que la fonction est paire, décroissante sur $]-1,0]$ puis croissante sur $[0,1[$ et on obtient alors le tableau de variations suivant

x	-1		0		1
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

de sorte que $M_n = \sup_{x\in]-1,1[} |f_n(x)| = 1$. Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge donc on n'a pas convergence normale. Mais notez que si l'on restreint la fonction à un intervalle de type $[-a,a]$ pour $a \in]0,1[$, alors on obtient que

x	$-a$		0		a
$f_n(x)$	a^n	$\searrow$	0	$\nearrow$	a^n

et ainsi que $M_n = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| = a^n$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$ converge donc en revanche, la série de fonction converge normalement sur tout intervalle $[-a,a]$ mais **PAS** sur $]-1,1[$.

Proposition 3.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies que I. Supposons qu'il existe une suite de réels positifs*[4] *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \forall x\in I, \quad |f_n(x)| \leqslant a_n.$$

Alors si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement.

DÉMONSTRATION.– En effet, on a alors

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \sup_{x\in I} |f_n(x)| \leqslant a_n$$

et on conclut avec la Proposition 2.5. □

► **Exemple** : Considérons la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+x^2}$. On a alors clairement que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| = \frac{1}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or, le majorant ici est bien indépendant de x et vérifie que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ converge[5] donc on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle converge aussi simplement sur $\mathbb{R}$ et définit une fonction somme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}.$$

L'intérêt de la convergence normale est qu'on a la suite de théorèmes suivants[6], que l'on admettra dans ces notes.

Proposition 3.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. Supposons que :*

*(i) Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est **continue**.*

*(ii) La série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge normalement** sur I.*

Alors la fonction somme

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est continue sur I.

Proposition 3.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. Supposons que :*

*(i) Il existe un $x_0 \in I$ tel que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ **converge**.*

*(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est **dérivable** sur I et la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ **converge normalement** sur I.*

Alors la fonction somme

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est dérivable sur I et[7]

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

► **Remarque :** Noter que dans l'hypothèse la plus favorable où les fonctions f_n sont dérivables et que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ convergent toutes les deux normalement sur I, la Proposition 3.4 s'applique.

On a pour finir les théorèmes d'interversion suivants.

Proposition 3.5 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions qui **converge normalement** sur I et telle que pour $x_0 \in I$*

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n.$$

Alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge et

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

5. Série de Riemann avec $\alpha = 2$ dans la Proposition 2.1.

6. Qui, moralement, nous disent qu'en cas de convergence normale, tout se passe bien et on a le droit de faire et de dire tout ce qu'on avait envie de dire ou de faire ! C'est le cadre idéal où toutes les bonnes propriétés des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se transmettent à la fonction somme !

► **Remarque** : Cette proposition permet d'étudier les limites de fonctions sommes.

Proposition 3.6 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions* ***continues*** *sur $[a, b]$ telle que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$. Alors la série numérique*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x.$$

► **Exemple** : Revenons à l'exemple de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2+x^2}$ page 22. On a établi que la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit de la Proposition 3.4 que la fonction somme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Pour étudier plus en détails la fonction S, on aimerait maintenant calculer sa dérivée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}.$$

Pour appliquer la Proposition 3.5, on doit étudier la convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$. On cherche donc le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $|f_n'|$ à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Il n'est pas difficile de voir que $\lim_{x\to\pm\infty} |f_n(x)| = +\infty$ et que par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| = +\infty.$$

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. On va s'en sortir de la façon suivante. Soit $A > 0$. On va alors étudier la convergence normale sur $[-A, A]$ plutôt que sur $\mathbb{R}$ tout entier. Dans ce cas, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-A, A], \quad |f_n'(x)| \leqslant \frac{2A}{n^2}$$

avec un majorant indépendant de x et terme général d'une série convergente. La Proposition 3.2 garantit donc que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement sur $[-A, A]$. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge aussi normalement sur $[-A, A]$, la Proposition 3.4 fournit que S est dérivable sur $[-A, A]$ et que

$$\forall x \in [-A, A], \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}.$$

Comme ceci est valable pour tout $A > 0$, on en déduit que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2} = -2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+x^2)^2}.$$

En particulier, S' est du signe contraire de celui de x et par conséquent on en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$S(0)$	$\searrow$	0

où $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et où on a utilisé la Proposition 3.5 pour calculer les limites. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \to \pm\infty} f_n(x) = \ell_n = 0.$$

La convergence normale nous a ainsi permis de se faire une bonne idée de cette fonction somme S sans que l'on en ait une expression exacte ! La Proposition 3.6 nous aurait également permis de calculer

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{n^2 + x^2} \right).$$

On a alors [8]

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

de sorte que [9]

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

► **Remarque** : Bien noter dans l'exemple précédent que même dans le cas où l'on n'a pas convergence normale sur I tout entier, pour établir la continuité ou la dérivabilité, il est suffisant d'étudier la convergence normale sur tout intervalle de type $[a, b]$ inclus dans I.

8. On écrit pour cela

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

et on vérifie que $x \mapsto n \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}$.

9. La convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ est alors automatique, fournit en somme par la Proposition 3.6. On peut la redémontrer en utilisant l'inégalité

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) \leqslant x.$$

Chapitre 4

Séries de Fourier

On entre avec ce chapitre dans le cœur du programme d'analyse, à savoir les séries de Fourier.

4.1 Introduction et motivations

Commençons par une analogie que j'espère éclairante. Soit x un nombre réel. On peut associer à x la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses décimales. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \{0,\dots,9\}$ et $x = x_0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\dots$ Par exemple, à $x = \frac{1}{3} = 0,3333\dots$, on associera la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,3,3,3,3,3,\dots)$ et à $\pi = 3,141592\dots$ on associera $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3,1,4,1,5,9,2,\dots)$ On constate alors que

$$x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{x_3}{1000} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

On peut alors considérer à partir de cette suite de décimales la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$ qui converge par les Proposition 2.1 et Proposition 2.5 car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{x_n}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

On peut alors montrer que la somme de cette série vaut bien

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

En d'autres termes, lorsqu'on se représente un nombre réel par la suite de ses décimales, on suit globalement la suite d'étapes suivante :

$x \in \mathbb{R}$	$\rightsquigarrow$	$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des décimales de x	$\rightsquigarrow$	$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$	$\rightsquigarrow$	$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ la série converge et sa somme vaut x

Cette suite de décimales est alors un bon moyen que tout un chacun utilise pour se faire une représentation de nombres réels abstraits tels que $\sqrt{2}$ ou[1] π. Et cela même sans connaître la liste de toutes les décimales[2], tronquer cette liste permet déjà de se faire une bonne idée d'un nombre réel et bien sûr plus on tronque la lite loin plus on se fait une idée précise.

Tout l'objet des séries de Fourier va alors être de mettre en œuvre le même genre de procédés afin de comprendre non plus des nombres réels mais des *fonctions périodiques*[3], omniprésentes dès qu'il s'agit de modéliser des phénomènes ondulatoires ou vibratoires en physique ou en chimie.

f fonction périodique	$\rightsquigarrow$	$(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ coefficients de Fourier de f	$\rightsquigarrow$	Série de Fourier de f via ses coefficients de Fourier

1. Insister là-dessus ! Comment vous vous représentez $\sqrt{2}$? Probablement en tapant sur votre calculatrice qui vous renvoie une liste (tronquée) de décimales ! Pareil fonction périodique sera bien approchée par une somme finie de sinusoïdes ou de cosinusoïdes !
2. Ce qui est possible pour $\frac{1}{3}$ par exemple mais pas pour π !
3. On verra même que les séries de Fourier ont même des choses à dire dans le cas non périodique !

$\rightsquigarrow$ Étude de la convergence de la série vers la fonction f de départ

Ainsi, comme dans le cas des décimales pour un nombre réel, la série de Fourier tronquée (qui sera un objet plus simple à appréhender) modélisant par exemple un signal électromagnétique ou une note de violon, permettre de cerner certaines propriétés du signal. On verra de plus que les séries de Fourier peuvent servir à obtenir des relations numériques non triviales et à résoudre des équations aux dérivées partielles.

Pour finir citons une application possible de ce genre de procédés. Imaginons que l'on ait un bruit à une fréquence donnée qui pollue un signal périodique que l'on enregistre. Il sera alors possible de calculer la série de Fourier correspondant au signal bruité et de supprimer le coefficient de Fourier correspondant à la fréquence du bruit. On construit ainsi une nouvelle série de Fourier qui devrait s'approcher [4] du signal initial sans le bruit !

4.2 Rappels sur les nombres complexes et la trigonométrie

Je donne ici quelques rappels sur les nombres complexes et quelques formules trigonométriques à connaître et qui seront très utiles par la suite ! Un nombre complexe [5] $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme [6] $z = re^{i\theta}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module de z et θ l'argument de z vérifiant pour $z \neq 0$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r}. \end{cases}$$

La partie réelle de z est x et sa partie imaginaire est y. On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

et $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$. Pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Par ailleurs [7],

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$$

et

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(-\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

et

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)).$$

Pour conclure ces rappels, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $f(t) = x(t) + iy(t)$ avec $x, y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et on dira que f est dérivable sur I si, et seulement si, x et y le sont auquel cas

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

En particulier, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et [8]

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t}.$$

4. Il n'y aura en général pas égalité du fait qu'on supprime aussi la contribution du signal associée à cette fréquence mais on peut espérer que celle-ci soit négligeable au sein du signal puisque correspondant à un coefficient de Fourier.

5. On parle de la forme algébrique.

6. C'est la forme trigonométrique.

7. Si vous ne voulez pas les apprendre, il faut savoir les retrouver ! On a que $\cos(a+b) = \mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)}\right)$. Or,

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i[\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)]$$

de sorte que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

En changeant b en $-b$, on en déduit par exemple en utilisant la parité de cosinus et l'imparité de sinus

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

8. Autrement dit on a la même formule que pour le cas réel !

4.3 Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Entrons à présent dans le vif du sujet et voyons comment associer à une fonction périodique la suite de ses coefficients de Fourier. Commençons par définir ce qu'est une fonction périodique. Intuitivement c'est une fonction qui modélise un phénomène qui se répète à intervalle de temps réguliers et indéfiniment.

Définition 4.1 *Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est T-**périodique** si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = f(t).$$

► **Remarques** :

(i) On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(t+nT) = f(t).$$

Autrement dit, une fonction T-périodique est nT-périodique pour tout entier relatif n.

(ii) Une fonction T-périodique est entièrement déterminée par sa restriction à $[0, T[$ ou à tout intervalle de longueur T, $[a, a+T[$ pour $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de f complet s'obtient alors par translation à partir du graphe de f sur un intervalle de longueur T de vecteurs [9] $n(1, 0)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Inversement, soit $g : [0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors g s'étend de manière unique en une fonction $\overline{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et T-périodique en posant

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in [nT, nT+T[, \quad \overline{g}(t) = g(t-nT).$$

Moralement, on construit le graphe de $\overline{g}$ en translatant le graphe de g dans la direction de l'axe des abscisses de 1,2,3,... puis de -1,-2,-3,... Si la fonction g est continue, alors la fonction $\overline{g}$ est continue par morceaux [10] tandis que si

$$g(0) = \lim_{\substack{t \to T \\ t < T}} g(t)$$

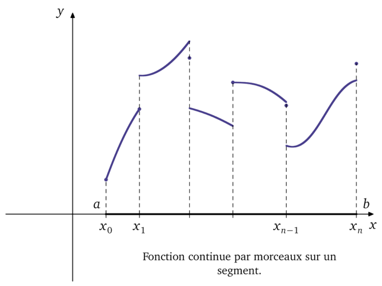
et que g est continue, alors la fonction $\overline{g}$ est continue. On peut donc transformer une fonction non périodique en fonction périodique et lui appliquer la théorie des séries de Fourier avec ce procédé ! En général, on ne vous demandera pas l'expression ci-dessus de $\overline{g}$ mais il faut savoir expliquer le procédé sur un dessin et pour le reste, l'expression originale de la fonction sur une période $[0, T[$ suffira. Traitons un exemple pour fixer les idées. Considérons la fonction $g : [-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = |t|$ pour tout $t \in [-\pi, \pi[$. Le graphe de g est donné par

9. En d'autre termes, en décalant le graphe de f sur un intervalle de longueur T vers la droite de 1,2,3,4,... puis vers la gauche de 1,2,3,4,...

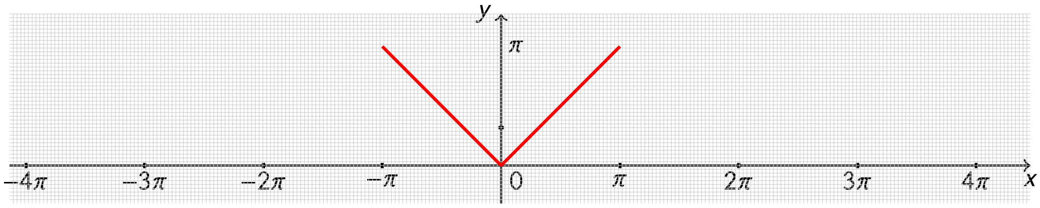
10. On rappelle qu'une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite *continue* par morceaux s'il existe un entier naturel n et

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

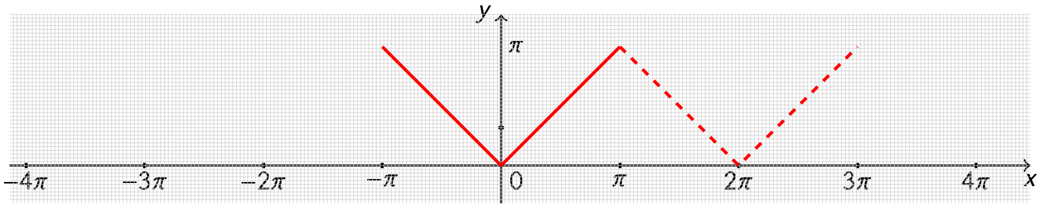
tels que la restriction de f à tout $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ soit continue. Autrement dit, une fonction continue sur $[a, b]$ est une fonction dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon et une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est une fonction dont on peut tracer le graphe en levant le crayon un nombre fini de fois. Une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est alors une fonction continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ au sens précédent.



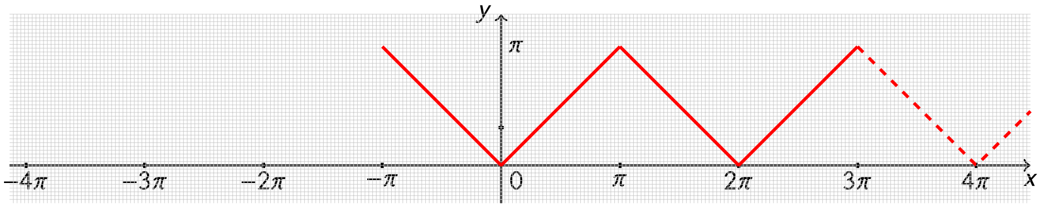
Fonction continue par morceaux sur un segment.



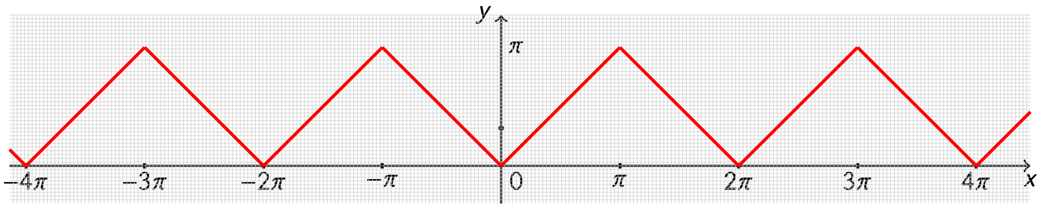
Une translation du graphe de [11] $(1, 0)$ donne lieu à



puis ajouter une translation de [12] $2(1, 0)$ suivant l'axe des abscisses donne



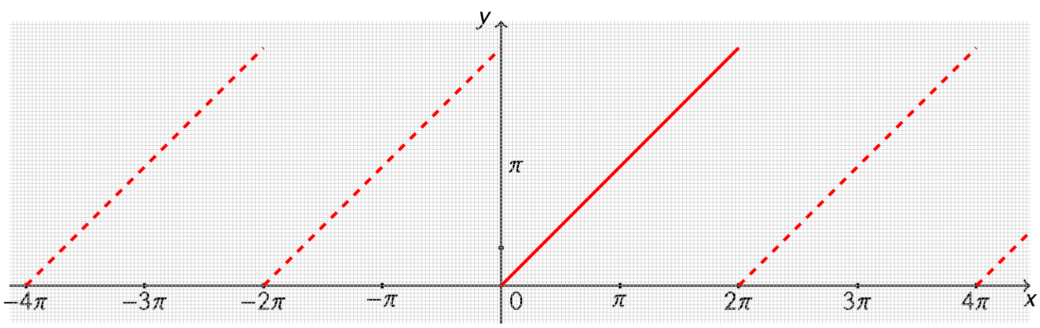
En procédant de même avec tous les $n(1, 0)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on obtient que $\overline{g}$ est donnée par



On obtient ainsi une fonction $\overline{g}$ 2π-périodique [13]. Cette fonction est continue car

$$g(-\pi) = \pi = \lim_{t \to \pi} g(t) = \lim_{t \to \pi} |t|$$

ce qui se voit bien sur le graphe ci-dessus ! **Attention** cependant que la fonction périodique obtenu par le même procédé à partir de la même fonction g mais prise sur $[0, 2\pi[$ est une fonction 2π-périodique différente. On donne son graphe ci-dessous et en particulier elle n'est pas continue mais continue par morceaux !



11. C'est-à-dire décaler la courbe de 1 vers la droite suivant l'axe des abscisses.
12. C'est-à-dire décaler la courbe de 2 vers la droite suivant l'axe des abscisses.
13. La longueur de l'intervalle de départ de g, à savoir $[-\pi, \pi[$.

▶ **Exemples** :

(i) Les fonctions constantes sont T-périodiques pour tout $T > 0$.

(ii) Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques et plus généralement les fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$t \longmapsto \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \quad \text{et} \quad t \longmapsto \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

sont T-périodique pour $T > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) La fonction $t \mapsto \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$ est 2π-périodique et la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) = e^{\frac{2ik\pi t}{T}}$ est T-périodique pour $T > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Ces fonctions forment nos fonctions périodiques de bases à partir desquelles on va comprendre les fonctions périodiques via les séries de Fourier. Une autre classe essentielle de fonctions périodiques est la classe des *polynômes trigonométriques*.

Définition 4.2 *Soit $T > 0$.*

(i) On dit que f est un ***polynôme trigonométrique complexe*** *de période T s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(a_{-N}, \ldots, a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$ tels que*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{\frac{2ik\pi z}{T}}.$$

(ii) On dit que f est un ***polynôme trigonométrique réel*** *de période T s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^N$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k \cos\left(\frac{2ik\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2ik\pi x}{T}\right)\right].$$

▶ **Exemples** : La fonction

$$z \longmapsto 1 + e^{-2iz} + e^{iz}$$

est un polynôme trigonométrique complexe de période 2π.
La fonction

$$x \longmapsto 1 + \cos\left(\frac{6\pi x}{T}\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$$

est un polynôme trigonométrique réel de période $T > 0$.
En revanche, les fonctions

$$z \mapsto 1 + z^2 + e^{iz}, \quad z \mapsto 2 + e^{iz^2}, \quad \text{ou} \quad x \mapsto \cos(x) - \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$$

ne sont **pas** des polynômes trigonométriques. En effet, pour les deux premiers exemples, $z \mapsto z^2$ ou $z \mapsto e^{iz^2}$ ne sont pas périodiques tandis que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ sont respectivement 2π-périodique et 3-périodique et un polynôme trigonométrique est une **combinaison linéaire** de **fonctions trigonométriques** de **même** période !

▶ **Remarques** :

(i) Bien évidemment, par l'exemple ci-dessus et la Proposition 4.1, les polynômes trigonométriques de période T sont T-périodiques !

(ii) La terminologie vient du fait qu'on évalue un polynôme en les fonctions trigonométriques de base $t \mapsto e^{\frac{2\pi t}{T}}$, $t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ ou $t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$. En effet, si

$$P(z) = \sum_{k=-N}^{N} a_k z^k$$

alors

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{\frac{2ik\pi z}{T}} = P\left(e^{\frac{2i\pi}{T}}\right)$$

par exemple.

On a les propriétés suivantes de stabilité des fonctions périodiques qui permettent de construire d'autres fonctions périodiques avec les fonctions périodiques de base que l'on vient de voir.

Proposition 4.1 *Soient $T > 0$ et f, g deux fonctions T-périodiques. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors*

$$f+g, \quad \lambda f, \quad f \times g, \quad \frac{f}{g}$$

sont T-périodiques[14]*. De plus, la fonction définie par translation par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = f(t+a)$$

est T-périodique pour tout $a \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $f_a = f$ lorsque $a \in T\mathbb{Z}$.

Passons alors à présent à l'étape

$$f \text{ fonction périodique} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{coefficients de Fourier de } f\end{array}$$

de notre procédé décrit en introduction.

Définition 4.3 (Coefficients de Fourier complexes) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième **coefficient de Fourier complexe** de f est*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

*On appelle alors **coefficients de Fourier complexes** de f la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Bien noter que la suite est ici indexée par **les entiers relatifs** $\mathbb{Z}$! On peut alors utiliser le lemme suivant qui permet un peu de souplesse quant à l'intégrale définissant $c_n(f)$.

Lemme 4.1 *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Alors,*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION.– Soit $a \in \mathbb{R}$. On a alors

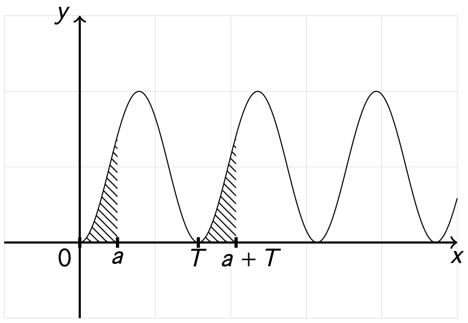
$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$$

par Chasles. Le changement de variable $s = T - t$ dans la dernière intégrale fournit

$$\int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(s)\mathrm{d}s = -\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t$$

de sorte qu'on a bien le résultat.[15]

15. Le résultat est évident sur un dessin, puisque f est T-périodique et $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre les abscisses 0 et a et $\int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre les abscisses T et $a+T$.



□

▶ **Remarque :** Puisque si f est continue par morceaux et T-périodique, $t \mapsto f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}$ est T-périodique continue par morceaux, on a par conséquent

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

Un choix utile est souvent $a = -\frac{T}{2}$ qui donne que

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\frac{2i\pi n}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

Les coefficients de Fourier complexes vérifient les propriétés de base suivantes.

Proposition 4.2 *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique.*

(i) Si f est à valeurs réelles, alors $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Si f est paire, $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si f est impaire, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a avec la notation de la Proposition 4.1

$$c_n(f_a) = e^{\frac{2i\pi na}{T}} c_n(f).$$

(v) Soient g une autre fonction continue par morceaux et T-périodique et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g), \quad c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f).$$

DÉMONSTRATION* –

(i) On a pour tout entier relatif n, par définition de l'exponentielle complexe

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left[\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t - i\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

de sorte que

$$\overline{c_n(f)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t + i\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t$$

car

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t, \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$$

puisque f est à valeurs réelles. Or, le calcul ci-dessus appliqué à $-n$ fournit

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t + i\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t$$

ce qui permet de conclure.

(ii) On a par définition, pour tout entier relatif n,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}t.$$

On effectue alors le changement de variable $s = -t$ qui fournit que

$$c_n(f) = -\frac{1}{T}\int_0^{-T} f(-s)e^{\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(s)e^{\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}s.$$

En effet, f et paire et je rappelle que $\int_a^b = -\int_b^a$. Il s'ensuit donc en utilisant le Lemme 4.1 que

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)e^{\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}s = c_{-n}(f).$$

(iii) Le même changement de variable que ci-dessus fournit le résultat. Essayez de le rédiger à titre d'exercice !

(iv) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a pour tout entier relatif n

$$c_n(f_a) = \frac{1}{T}\int_0^T f_a(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t+a)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}t$$

et le changement de variable $s = t + a$ permet de conclure. Essayez de le rédiger à titre d'exercice !

(v) Toutes ces propriétés se déduisent facilement de la linéarité de l'intégrale ! □

► **Remarque** : En revanche, en général, on a $c_n(fg) \neq c_n(f)c_n(g)$.

► **Exemples** :

(i) Considérons le cas de la fonction f constante égale à 1, soit de la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $f(t) = 1$. On veut calculer les coefficients de Fourier de f. Pour cela, on fixe $n \in \mathbb{Z}$ et on calcule

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}t.$$

On voit alors que

$$c_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = \frac{1}{T}[t]_0^T = \frac{T}{T} = 1.$$

Si maintenant $n \neq 0$, on a [16]

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}}{-\frac{2i\pi n}{T}}\right]_0^T = -\frac{1}{2in\pi}\left(e^{-2i\pi n} - e^0\right) = 0$$

car $e^0 = e^{-2i\pi n} = 0$. En effet, on a [17]

$$e^{-2i\pi n} = \cos(-2\pi n) + i\sin(-2\pi n) = 1 + i \times 0 = 1.$$

En conclusion, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) = c_0(f).$$

16. Se souvenir que pour tout $a \neq 0$, une primitive de $t \mapsto e^{at}$ est donnée par $t \mapsto \frac{e^{at}}{a}$ et considérer ici $a = -\frac{2i\pi n}{T}$.
17. Dessiner un cercle trigonométrique pour s'en convaincre !

(ii) Fixons $k \in \mathbb{Z}$ et posons $f_k(t) = e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$ qui est T-périodique et calculons ses coefficients de Fourier. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f_k) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{2i\pi kt}{T}} e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{2i\pi(k-n)t}{T}} \mathrm{d}t.$$

On a alors comme ci-dessus lorsque $k = n$ que

$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = 1$$

tandis que pour $n \neq k$,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{\frac{2i\pi(k-n)t}{T}}}{\frac{2i\pi(k-n)}{T}}\right]_0^T = -\frac{1}{2i(k-n)\pi}\left(e^{-2i\pi(k-n)} - e^0\right) = 0$$

de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_k) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(iii) Considérons pour terminer le cas de la fonction 2π-périodique définie pour tout $t \in [0, 2\pi]$ par $f(t) = e^t$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$ et calculons

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Or, sur $[0, 2\pi]$ (qui est ici l'intervalle d'intégration), on a $f(t) = e^t$ si bien que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^t e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-in)t}\mathrm{d}t.$$

On sait alors qu'une primitive de $t \mapsto e^{(1-in)t}$ est donnée par $t \mapsto \frac{e^{(1-in)t}}{1-in}$ si bien que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{(1-in)2\pi} - 1\right).$$

On a alors

$$e^{(1-in)2\pi} = e^{2\pi-2in\pi} = e^{2\pi}e^{-2in\pi}$$

et, par définition [18]

$$e^{-2in\pi} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1 + 0 \times i = 1$$

si bien que finalement

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi(1-in)}(e^{2\pi} - 1).$$

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, on utilise plutôt les coefficients de Fourier réels.

Définition 4.4 (Coefficients de Fourier réels) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et T-périodique. On pose*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

*et pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-ième **coefficients de Fourier réels** de f sont*

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

*On appelle alors **coefficients de Fourier réels** de f les suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

18. Tracer un cercle trigonométrique pour s'en convaincre ! Attention aussi qu'en revanche $e^{2\pi} \neq 1$! Cela ne marche que parce qu'on a le i !

► **Remarque** : ⚠ Bien noter que la suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est indexée par $\mathbb{N}$ et la suite $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est indexée par $\mathbb{N}^*$. Par ailleurs, attention à bien remarquer le facteur $\frac{2}{T}$ à ne pas confondre avec le facteur $\frac{1}{T}$ dans le cas des coefficients de Fourier complexes. Par le Lemme 4.1, on a également

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

On démontre alors les propriétés suivantes de façon complètement analogue à la Proposition 4.2, qui permet souvent de s'épargner un certain nombre de calculs inutiles.

Proposition 4.3 *Soit f une fonction réelle continue par morceaux et T-périodique. Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$. Par ailleurs, si g est une autre fonction à valeurs réelles continue par morceaux et T-périodique et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f+g) = a_n(f) + a_n(g) \quad \text{et} \quad a_n(\lambda f) = \lambda a_n(f)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f+g) = b_n(f) + b_n(g) \quad \text{et} \quad b_n(\lambda f) = \lambda b_n(f).$$

► **Remarque** : Soit f une fonction T-périodique. À la question, calculer les coefficients de Fourier de f, si rien de plus n'est spécifié, on calculera soit la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier complexes définis en Définition 4.3 soit les suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ des coefficients de Fourier réels définis en Définition 4.4. On verra que les deux donneront lieu en section suivante à un même objet, la série de Fourier. Le lien entre les deux types de coefficients de Fourier réside dans la proposition suivante. Traditionnellement, on utilisera plutôt les coefficients de Fourier complexes dans le cas d'une fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et les coefficients de Fourier réels dans le cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.4 *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$c_n(f) = \begin{cases} a_0(f) \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \text{ si } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)) \text{ si } n < 0. \end{cases}$$

Réciproquement, on a $c_0(f) = a_0(f)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = 2\mathrm{Re}(c_n(f)) = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f)) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

DÉMONSTRATION∗ – Tout d'abord, il est clair que $c_0(f) = a_0(f)$. Pour le reste, on utilise le fait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in \mathbb{R}$

$$e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

qui fournit immédiatement que, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t - i\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)).$$

Lorsque $n < 0$, on a [19] par parité de cosinus et imparité de sinus

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(-\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t + i\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(-\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)).$$

19. Attention ici que les indices de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$ doivent être des entiers positifs !

Puis à partir de l'expression de $c_n(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$, il est aisé de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

Mais puisque f est à coefficients réels, le (i) de la Proposition 4.2 fournit que $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ si bien que

$$c_n(f) + c_{-n}(f) = c_n(f) + \overline{c_n(f)} = 2\mathrm{Re}(c_n(f))$$

et

$$i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = i(c_n(f) - \overline{c_n(f)}) = i \times 2i\mathrm{Im}(c_n(f)) = -2\mathrm{Im}(c_n(f))$$

ce qui conclut la démonstration. □

▶ **Exemple à connaître :**

(i) Reprenons l'exemple de la fonction constante égale à 1 de la page 40. On doit donc calculer

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

On a alors tout de suite que $a_0(f) = 1$. Par ailleurs, on peut remarquer que f est paire et par la Proposition 4.3, cela implique que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n(f) = 0$. Il reste alors à calculer pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

On a ainsi [20]

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi nt}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}}\right]_0^T = \frac{1}{\pi n}(\sin(2\pi n) - \sin(0)) = 0.$$

Ainsi, on a

$$a_0(f) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = b_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f).$$

(ii) Fixons $k \in \mathbb{N}$ et considérons les fonctions T-périodiques

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_k(t) = \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \quad \text{et} \quad v_k(t) = \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right).$$

On voit tout de suite que u_k est paire si bien que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n(u_k) = 0$ et v_k est impaire si bien que pour tout $n \geqslant 0$, $a_n(v_k) = 0$. Calculons alors pour tout $n \geqslant 0$,

$$a_n(u_k) = \frac{2}{T}\int_0^T u_k(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

D'après la partie de rappels trigonométriques, on sait que

$$\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi(k+n)t}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(k-n)t}{T}\right)\right)$$

de sorte que par linéarité de l'intégrale

$$a_n(u_k) = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k+n)t}{T}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-n)t}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

Or, les calculs précédents fournissent alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(u_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k. \end{cases}$$

On obtient de façon analogue que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(v_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k. \end{cases}$$

20. Se souvenir que pour tout $a \neq 0$, une primitive de $t \mapsto \cos(at)$ est $t \mapsto \frac{\sin(at)}{a}$. De même, une primitive de $t \mapsto \sin(at)$ est $t \mapsto -\frac{\cos(at)}{a}$.

(iii) Revenons à l'exemple de la page 41 où l'on a établi que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1 - in)}.$$

Déduisons-en alors les coefficients de Fourier réels de f grâce à la Proposition 4.4. On a alors que $a_0(f) = c_0(f) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}$ tandis que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$a_n(f) = 2\mathrm{Re}(c_n(f)) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - in}\right).$$

On écrit alors le nombre complexe $\frac{1}{1-in}$ sous forme algébrique pour en déterminer la partie réelle et pour cela on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - in$, à savoir $1 + in$. On obtient

$$\frac{1}{1 - in} = \frac{1 + in}{(1 - in)(1 + in)} = \frac{1 + in}{1 + n^2}.$$

On a donc $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-in}\right) = \frac{1}{1+n^2}$ et

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)}$$

(presque) sans calculs ! En tout cas avec beaucoup moins de calculs que s'il avait fallu recalculer l'intégrale définissant $a_n(f)$! De même, par la Proposition 4.4, on a que

$$b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f)) = -\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1 - in}\right).$$

et ce qui précède montre que

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = -\frac{(e^{2\pi} - 1)n}{\pi(1 + n^2)} = \frac{(1 - e^{2\pi})n}{\pi(1 + n^2)}.$$

On a ainsi obtenu tous les coefficients de Fourier réels de f à partir de ceux complexes calculés préalablement !

Les résultats de l'exemple précédent fournissent par linéarité le résultat suivant concernant les polynômes trigonométriques.

Proposition 4.5 *Soit f un polynôme trigonométrique. Alors si*

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{\frac{2i\pi k z}{T}}$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $(a_{-N}, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$, alors on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{\frac{2i\pi k z}{T}}.$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_k(f) = \begin{cases} a_k \text{ si } -N \leqslant k \leqslant N \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

De même, si

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)\right]$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$, alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k(f) \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) + b_k(f) \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)\right].$$

Autrement dit, $a_0 = a_0(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_k(f) = \begin{cases} a_k \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant N \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_k(f) = \begin{cases} b_k \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant N \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

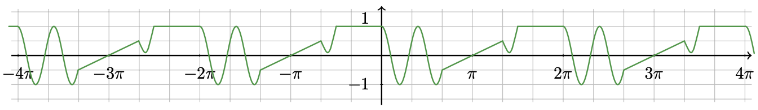
► **Remarque** : Autrement dit on lit directement les coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique sur son expression et les polynômes trigonométriques sont des fonctions pour lesquelles on peut effectuer le procédé décrit en introduction dans son ensemble, à savoir calculer les coefficients de Fourier puis reconstruire le polynôme trigonométrique de départ à partir de la liste des coefficients de Fourier. Cela donne une expression en termes d'intégrales de f des coefficients du polynôme trigonométrique. On verra en section suivante comment ce résultat s'étend à des fonctions périodiques plus générales. Les polynômes trigonométriques sont alors l'analogue des nombres décimaux dans notre analogie introductive.

► **Exemple** : Soit $f(z) = 1 - e^{-iz} + 5e^{3iz}$ un polynôme trigonométrique de période 2π. On lit alors sur l'expression de f ses coefficients de Fourier

$$c_0(f) = 1, \quad c_{-1}(f) = -1, \quad c_3(f) = 5, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 3\}, \quad c_n(f) = 0.$$

Pour conclure cette section, on donne le comportement des coefficients de Fourier vis-à-vis de la dérivation. Cette définition fait intervenir la notion de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On ne donnera pas de définition rigoureuse de cette notion. La continuité signifie que l'on peut tracer la courbe de f sans lever le crayon et le caractère $\mathcal{C}^1$ par morceaux signifie que sur tout intervalle $[a, b]$, on peut éventuellement trouver un nombre fini d'angles, de pics où la fonction n'est pas dérivable mais admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche. En revanche, elle ne doit admettre aucune tangente verticale.

En d'autres termes, vous devez retenir qu'une fonction **continue** est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si, et seulement si, elle est dérivable partout sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet des pics et qu'une fonction **non continue** est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si, et seulement si, elle est continue par morceaux (admet un nombre fini de discontinuités) et est dérivable partout sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet des pics. Dans tous les cas, elle ne doit **pas** admettre de tangente verticale. Voici un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.



Proposition 4.6 *Soit f une fonction T-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux On a alors*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} c_n(f), \quad a_0(f') = 0, \quad \forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_n(f') = \frac{2n\pi}{T} b_n(f) \\ b_n(f') = -\frac{2n\pi}{T} a_n(f). \end{cases}$$

Démonstration $*$ – Démontrons simplement le cas de $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ dans le cas d'une fonction dont la restriction à $[0, T]$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Le cas gnéral se démontre de la même manière mais simplement de manière plus technique. Les autres cas sont ainsi laissés en exercice, la démonstration étant parfaitement analogue. On a par définition pour tout entier relatif n

$$c_n(f') = \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} \mathrm{d}t$$

et une intégration par parties en intégrant f' en f et en dérivant $t \mapsto e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}$ en $t \mapsto -\frac{2i\pi n}{T} e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}$ fournit alors le résultat. En effet,

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{T} \left[-f(t) \frac{2i\pi n}{T} e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \right]_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \times \left(-\frac{2i\pi n}{T} e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \left(-f(T) \frac{2i\pi n}{T} e^{-2i\pi n} + f(0) \frac{2i\pi n}{T} e^0 \right) + \frac{2i\pi n}{T} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{2i\pi n}{T^2} (-f(T) + f(0)) + \frac{2i\pi n}{T} c_n(f) \end{aligned}$$

et on conclut en utilisant la T-périodicité de la fonction f. □

▶ **Remarque** : En particulier, si on a déjà calculé les coefficients de Fourier d'une fonction f et que l'on vous demande de calculer ceux de f', on ne se fatigue pas à les calculer mais on utilise la Proposition 4.6.

4.4 Série de Fourier d'une fonction périodique

Cette section est consacrée à la description de l'étape

$$\underset{\text{coefficients de Fourier de } f}{(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}} \quad \rightsquigarrow \quad \underset{\text{via ses coefficients de Fourier}}{\text{Série de Fourier de } f}$$

On a alors la définition suivante d'une série de Fourier.

Définition 4.5 (Série de Fourier.) *Soit f continue par morceaux et T-périodique. On appelle **série de Fourier** de f la série de fonctions*

$$a_0(f) + \sum_{n\geqslant 1}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]$$

ou de manière équivalente

$$c_0(f) + \sum_{n\geqslant 1}\left[c_n(f)e^{\frac{2i\pi nt}{T}} + c_{-n}(f)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\right].$$

Cette dernière série est notée $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\frac{2i\pi nt}{T}}$.

Pour le moment, on ne dit rien de la convergence de ces séries de Fourier.

▶ **Remarque** : La Proposition 4.5 (puisque la suite des coefficients de Fourier devient nulle au-delà de N et que les autres coefficients de Fourier ne sont rien d'autres que les coefficients du polynôme) fournit que pour un polynôme trigonométrique f, on a

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[c_n(f)e^{\frac{2i\pi nz}{T}} + c_{-n}(f)e^{-\frac{2i\pi nz}{T}}\right]$$

ou

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right].$$

Ainsi dans le cas des polynômes trigonométriques, la série de Fourier associée converge simplement vers le polynôme trigonométrique de départ.

Pour maintenant compléter notre procédé

$$\rightsquigarrow \quad \underset{\text{vers la fonction } f \text{ de départ}}{\text{Étude de la convergence de la série}}$$

il faut alors répondre aux deux questions suivantes.

(Q1) La série de Fourier converge-t-elle et pour quelles valeurs de $t\in\mathbb{R}$?

(Q2) Si on a convergence pour un certain réel t, la somme de la série de Fourier est-elle égale à $f(t)$?

Le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de Dirichlet permet de répondre par l'affirmative à cette question sous de bonnes hypothèses.

Théorème 4.1 (Théorèmes de Dirichlet) *Soit f une fonction T-périodique.*

(i) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge normalement (et donc en particulier simplement) vers f. En d'autres termes,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{2in\pi t}{T}}.$$

(ii) Si f est C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge simplement et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right]$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{2in\pi t}{T}} = \begin{cases} f(t) \text{ si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

avec

$$f(t^+) = \lim_{\substack{s \to t \\ s > t}} f(s) \quad \text{et} \quad f(t^-) = \lim_{\substack{s \to t \\ s < t}} f(s)$$

les limites respectivement à droite et à gauche de f.

► **Remarque** : Je vous renvoie en bas de page 44 juste avant la Proposition 4.6 pour une "définition" de la notion de classe C^1 par morceaux. Par ailleurs, noter qu'on ne demande pas la continuité dans la version (ii) du Théorème 4.1. En revanche, si f est continue en t alors $f(t^+) = f(t^-) = f(t)$ et ainsi

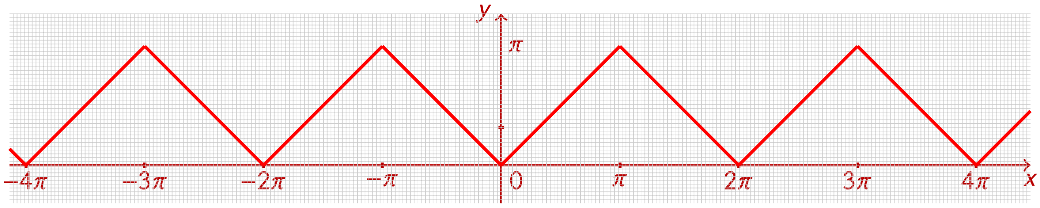
$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t)$$

si bien que la version (i) n'est en réalité qu'un cas particulier de la version (ii).

Ce théorème complète alors notre procédé décrit en introduction et on verra des exemples d'applications de ces théorèmes de Dirichlet en TD.

► **Exemples** :

(i) On reprend l'exemple de la page 34. On considère la fonction $g(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi]$ et $\overline{g}$ la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ comme expliqué page 35. Je rappelle que le graphe de $\overline{g}$ est donné par



Commençons alors par calculer les coefficients de Fourier de $\overline{g}$. Puisque la fonction est à valeurs réelles, on va calculer les, coefficients de Fourier réels de $\overline{g}$. Le graphe de $\overline{g}$ étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, $\overline{g}$ est paire et par la Proposition 4.3

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(\overline{g}) = 0.$$

Commençons par le cas

$$a_0(\overline{g}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Soit alors $n \geqslant 1$. Il reste alors, d'après la Définition 4.4, à calculer pour tout entier naturel n non nul, la quantité

$$a_n(\overline{g}) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g}(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g}(t) \cos(nt)\,dt.$$

La fonction $\overline{g}$ étant naturellement définie par g sur $[-\pi, \pi]$, on peut utiliser la remarque page 39 (ou directement le Lemme 4.1) qui fournit

$$a_n(\overline{g}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}(t)\cos(nt)\,dt.$$

Alors, sur $[-\pi, \pi]$, $\overline{g}(t) = g(t) = |t|$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \overline{g}(t)\cos(nt) = |t|\cos(nt)$ est paire [21] et

$$a_n(\overline{g}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |t|\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt.$$

car $t \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$. Pour intégrer une telle fonction on utilise alors une intégration par parties. Pour cela, on dérive $t \mapsto t$ en $t \mapsto 1$ et on primitive $t \mapsto \cos(nt)$ en [22] $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$ de sorte que

$$\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt$$

car $\sin(n\pi) = 0$ pour tout entier n. On a alors

$$\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(0)}{n}.$$

Or, $\cos(0) = 1$ et on voit en traçant un cercle trigonométrique, on se convainc que $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Il vient alors

$$\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n}$$

et

$$a_n(\overline{g}) = -\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} \text{ si } n \text{ impair.}\end{cases}$$

On peut alors construire la série de Fourier associée à $\overline{g}$ en utilisant la Définition 4.5

$$\begin{aligned} S(\overline{g}) &= a_0(\overline{g}) + \sum_{n\geqslant 1}\left[a_n(\overline{g})\cos(nt) + b_n(\overline{g})\sin(nt)\right] \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n(\overline{g})\cos(nt) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{impair}}}\frac{\cos(nt)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

On voit sur le graphe de $\overline{g}$ que $\overline{g}$ est continue et C^1 par morceaux si bien que le théorème de Dirichlet (Théorème 4.1) fournit que la série de Fourier converge et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overline{g}(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

Noter que le théorème de Dirichlet fournit *gratuitement* et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$. On peut alors par exemple évaluer cette identité en $t = 0$ pour obtenir

$$0 = \overline{g}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(0)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Il s'ensuit que la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$ converge et que sa somme vérifie

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{soit} \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

21. Je rappelle que pour une fonction paire f, on a pour tout $a > 0$, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$. En effet, l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre $-a$ et a est deux fois l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre 0 et a.
22. Car $n \neq 0$!

Voyons alors comment déduire de ce résultat la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Pour cela, on sépare la somme selon que n est pair ou que n est impair

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

où toutes les séries en jeu sont convergentes. On a alors

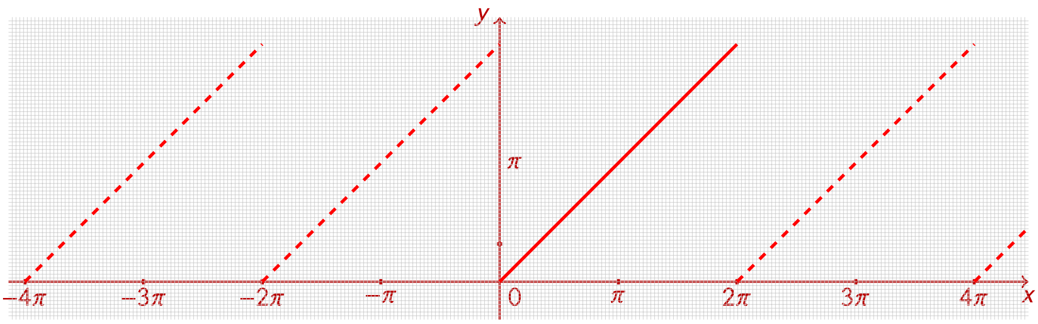
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \quad \text{soit} \quad \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(ii) On reprend l'exemple de la page 36. On considère la fonction $g(t) = |t|$ sur $[0, 2\pi]$ et $\overline{g}$ la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ comme expliqué page 35. Je rappelle que le graphe de $\overline{g}$ est donné par



Commençons alors par calculer les coefficients de Fourier de $\overline{g}$. Puisque la fonction est à valeurs réelles, on va calculer les, coefficients de Fourier réels de $\overline{g}$. Le graphe de $\overline{g}$ n'étant ni symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ni par rapport à l'origine, $\overline{g}$ n'est ni paire, ni impaire. Commençons alors par le cas

$$a_0(\overline{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g}(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Soit alors $n \geqslant 1$. Il reste alors, d'après la Définition 4.4, à calculer pour tout entier naturel n non nul, la quantité

$$a_n(\overline{g}) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g}(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos(nt) \, \mathrm{d}t$$

et la quantité

$$b_n(\overline{g}) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g}(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin(nt) \, \mathrm{d}t.$$

Comme dans l'exemple (i), une intégration par parties fournit [23]

$$a_n(\overline{g}) = 0 \quad \text{et} \quad b_n(f) = -\frac{2}{n}.$$

23. Les détails sont laissés à titre d'exercice et. constitueront l'objet d'un exercice de TD.

On peut alors construire la série de Fourier associée à $\overline{g}$ en utilisant la Définition 4.5

$$\begin{aligned} S(\overline{g}) &= a_0(\overline{g}) + \sum_{n\geqslant 1} [a_n(\overline{g})\cos(nt) + b_n(\overline{g})\sin(nt)] \\ &= \pi + \sum_{n\geqslant 1} b_n(\overline{g})\cos(nt) \\ &= \pi - 2\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nt)}{n}. \end{aligned}$$

On voit sur le graphe de $\overline{g}$ que $\overline{g}$ est non continue mais C^1 par morceaux si bien que le théorème de Dirichlet (Théorème 4.1 (ii)) fournit que la série de Fourier converge[24] et que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}, \quad \overline{g}(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

puisqu'en tout point $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, la fonction $\overline{g}$ est continue et

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \pi = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2kn\pi)}{n} = \pi - 2\times 0 = \pi$$

puisqu'en un point de la forme $2k\pi$, la fonction $\overline{g}$ est discontinue et vérifie

$$\frac{f(2k\pi^-) + f(2k\pi^+)}{2} = \frac{2\pi + 0}{2} = \pi.$$

Cette dernière égalité en alors une lapalissade. Noter que le théorème de Dirichlet fournit *gratuitement* la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nt)}{n}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ainsi que la valeur de sa somme.

(iii) Pour l'application du théorème de Dirichlet à l'exemple (iii) page 41, je vous renvoie au corrigé du DM II de l'an dernier.

► **Remarques :**

(i) Le théorème de Dirichlet (Théorème 4.1 (i)) implique donc en particulier que toute fonction f T-périodique, continue et C^1 par morceaux est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right].$$

Autrement dit, tout signal continue et C^1 par morceaux se décompose comme une somme d'un signal constant[25] et de signaux élémentaires[26] de période $\frac{2\pi}{n}$ (soit de fréquence $\frac{n}{2\pi}$) pour $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un tel signal est à *spectre discret* et pour connaître un tel signal il suffit donc de connaître chacun de ces signaux élémentaires, que l'on appelle en général *harmoniques*.

(ii) Pour une illustration du théorème de Dirichlet (Théorème 4.1 (i)), c'est-à-dire de la convergence de la série de Fourier vers une fonction périodique continue et C^1 par morceaux, voir ici (exemple (i) page 47), ici ou ici.
Pour une illustration du théorème de Dirichlet (Théorème 4.1 (ii)), voir ici (exemple (ii) page 48).

(iii) Si on considère deux fonctions f et g alors il est naturel que les coefficients de Fourier de f et de g coïncident. Réciproquement, le théorème de Dirichlet implique également dans le cas de deux fonctions f et g T-périodiques, continues et C^1 par morceaux, alors si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, $f = g$. Autrement dit, les coefficients de Fourier déterminent complètement un signal T-périodiques, continues et C^1 par morceaux.

24. Dans le cas non continu, il faut être un peu précautionneux lors de l'application du théorème de Dirichlet et l'appliquer séparément aux points de continuité de la fonction et à ses points de discontinuité.

25. À savoir $a_0(f)$.

26. À savoir $a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$.

4.5 Égalité de Parseval

Pour conclure cette partie d'analyse de Fourier du cours, on va voir une manière alternative de recombiner les coefficients de Fourier qui ne vont plus donner la fonction f initiale mais en quelque sorte l'énergie associée au signal périodique f, définie par

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

► **Exemple** : Commençons par traiter le cas d'un polynôme trigonométrique. Traitons le cas d'un polynôme trigonométrique complexe, le cas d'un polynôme trigonométrique réel se traitant de façon analogue. Soit ainsi

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad P(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{\frac{2i\pi k t}{T}}.$$

On calcule alors son énergie [27]

$$\frac{1}{T}\int_0^T |P(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\overline{P(t)}^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{\frac{2i\pi k t}{T}}\right)\left(\sum_{\ell=-N}^{N} \overline{a_\ell} e^{-\frac{2i\pi \ell t}{T}}\right)^2 \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k,\ell=-N}^{N} a_k a_\ell \int_0^T e^{\frac{2i\pi(k-\ell)t}{T}} \mathrm{d}t.$$

Or, on a vu que

$$\int_0^T e^{\frac{2i\pi(k-\ell)t}{T}} \mathrm{d}t = \begin{cases} T \text{ si } k = \ell \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

si bien que

$$\frac{1}{T}\int_0^T |P(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-N}^{N} a_k a_k = \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2.$$

La Proposition 4.5 fournit alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T |P(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

Ce résultat se généralise à des fonctions T-périodiques plus générales à ce que l'on appelle l'égalité de Parseval.

Proposition 4.7 (Égalité de Parseval) *Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux. Alors les séries numériques*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

convergent et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

► **Exemples :**

(i) On revient sur l'exemple (i) page 47. Appliquons la formule de Parseval (Proposition 4.7) à $\overline{g}$. Cela fournit

$$|a_0(\overline{g})|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(\overline{g})|^2 + |b_n(\overline{g})|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{g}(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

27. Se souvenir que pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z\overline{z}$.

On a alors d'après les calculs effectués page 47 que

$$|a_0(\overline{g})|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(\overline{g})|^2 + |b_n(\overline{g})|^2) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\text{impair}}}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2 n^4} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}.$$

À nouveau la convergence des séries en jeu est obtenue *gratuitement* par la Proposition 4.7. On calcule alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{g}(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{g}(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^2\mathrm{d}t$$

en utilisant le Lemme 4.1 et la parité de $\overline{g}$. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{g}(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

On a donc

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} \quad \text{soit} \quad \sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En raisonnant comme page 48, on en déduit la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$. Pour cela, on sépare la somme selon que n est pair ou que n est impair

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

où toutes les séries en jeu sont convergentes. On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^4} = \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96} \quad \text{soit} \quad \frac{15}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

soit $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

(ii) On revient sur l'exemple (ii) de la page 48. Appliquons la formule de Parseval (Proposition 4.7) à $\overline{g}$. Cela fournit

$$|a_0(\overline{g})|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(\overline{g})|^2 + |b_n(\overline{g})|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{g}(t)|^2\mathrm{d}t.$$

On a alors d'après les calculs effectués pages 48 et 49 que

$$|a_0(\overline{g})|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(\overline{g})|^2 + |b_n(\overline{g})|^2) = \pi^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

À nouveau la convergence des séries en jeu est obtenue *gratuitement* par la Proposition 4.7. On calcule alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{g}(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t^2\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\pi^2.$$

Il s'ensuit donc que

$$\frac{4}{3}\pi^2 = \pi^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{soit} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et on retrouve le résultat de la page 48.

(iii) Pour l'application de l'égalité de Parseval à l'exemple (iii) page 41, je vous renvoie au corrigé du DM II de l'an dernier.

On verra également d'autres exemples d'applications de cette formule en TD. Elle permet en particulier d'obtenir des égalités hautement non triviales et intéressantes comme, par exemple,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Cette valeur et plus généralement les valeurs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{pour} \quad x \in \left\{\frac{3}{2}, 2, 3, 4\right\}$$

sont très utiles et apparaissent en physique (condensat de Bose-Einstein, loi de Planck et loi de Stefan-Boltzmann entre autres).

4.6 Application des séries de Fourier

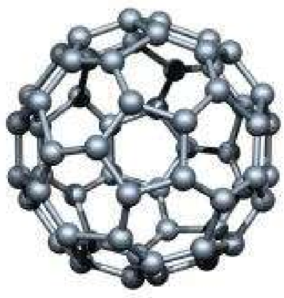
Pour une illustration simplifiée de l'utilisation des séries de Fourier au traitement du signal, voir ici où il est expliqué dans les grandes lignes comment l'analyse de Fourier peut permettre de supprimer un bruit dans un signal.

4.7 Kit de survie en séries de Fourier

Voici le minimum vital à absolument savoir faire concernant les séries de Fourier :

1. Construire une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ à partir d'une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ (voir pour cela page 35).
2. Déterminer à partir de son graphe si une fonction est paire ou impaire (ou rien du tout!) mais aussi si une fonction est continue, continue par morceaux ou C^1 par morceaux.
3. Calculer les coefficients de Fourier d'une fonction complexes (voir pour cela Définition 4.3) ou réels (voir Définition 4.4) et savoir utiliser des propriétés de symétrie pour se simplifier la vie (Proposition 4.2 et Proposition 4.3). Savoir reconstruire la série de Fourier à partir de ces coefficients (Définition 4.5).
4. Connaître et appliquer les théorèmes de Dirichlet (Théorème 4.1) pour en déduire la convergence et la somme de certaines séries en choisissant un $t \in \mathbb{R}$ judicieux.
5. Connaître et appliquer l'égalité de Parseval (Proposition 4.7) pour en déduire la convergence et la somme de certaines séries en choisissant un $t \in \mathbb{R}$ judicieux.

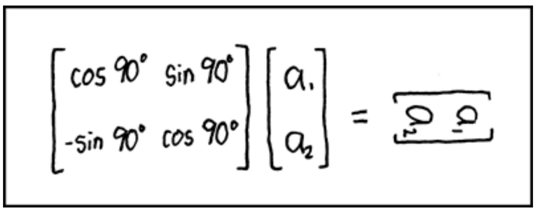
Les exemples pages 46-49 et pages 51-52 sont des exemples absolument **typiques** de ce qu'il faut savoir faire !



Une molécule de Fullerène C_{60} découverte en 1985 par H. Kroto, R. Curl et R. Smalley, ce qui leut valu le prix Nobel de chimie en 1996. La découverte de cette molécule composée de 12 pentagones et de 20 hexagones s'est effectuée dans le cadre de recherche sur les mécanismes de formation des longues chaînes de carbone dans l'espace interstellaire. Sa propension à acquérir des électrons ainsi que ses propriétés conductrices et lubrifiantes en font une des nanoparticules les plus utilisées dans l'industrie (pharmaceutique, cosmétique, éléctronique ou photovoltaïque). Son groupe de symétries est celui de l'icosaèdre, que vous noterez I_h en chimie et que l'on note $\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en mathématiques, composée de 120 éléments ! Ce dernier est composé de 60 rotations de l'espace (l'identité, 12 rotations d'un cinquième de tour, 20 rotations d'un tiers de tour et 15 demi-tours que vous pouvez vous amusez à identifier !) et de leur 60 composées avec la symétrie centrale de centre $(0,0,0)$. Cela permet de connaître **sans calculs** la construction et la classification des orbitales moléculaires !

Deuxième Partie

Géométrie



Petit test : si vous ne comprenez pas ce petit dessin "humoristique", c'est qu'il faut reprendre la lecture du Chapitre 6 et du TD 3 !

Chapitre 5

Rappels d'algèbre linéaire

Commençons par procéder à quelques rappels essentiels d'algèbre linéaire qui nous seront nécessaires afin d'aborder la seconde et dernière partie de ce cours, à savoir la partie géométrie et groupes d'isométries.

5.1 Espaces vectoriels

5.1.1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

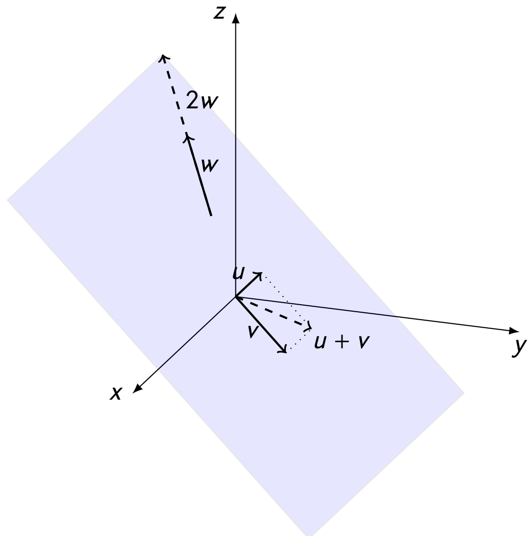
Je ne redonne pas ici la définition précise d'un espace vectoriel, ce qui ne serait pas nécessairement très éclairant. Vous devez seulement vous souvenir qu'un espace vectoriel est un espace dans lequel on a **l'élément nul** et dans lequel on peut **ajouter des vecteurs** et **multiplier des vecteurs par des scalaires** (autrement dit les multiplier par 2, -1, 3, etc...) [1]. Les deux espaces vectoriels de base qui vont nous intéresser dans cette partie du cours sont [2]

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}\,.$$

Il faut simplement avoir l'intuition de ce qui est ou de ce qui n'est pas un espace vectoriel, ce que tente de vous fournir les deux exemples ci-dessous.

► **Exemples** :

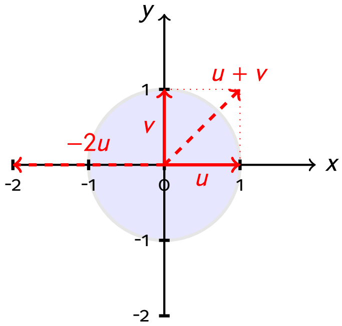
(i) Un plan de $\mathbb{R}^3$ **passant par l'origine** [3] est un espace vectoriel. En effet, il contient $(0, 0, 0)$ et ajouter ou multiplier des vecteurs par un scalaire ne fait jamais sortir du plan !



1. L'espace ambiant dans lequel nous vivons est, si l'on néglige la dimension temporelle de la physique, un espace vectoriel, et plus précisément l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Car une molécule ou un cristal peuvent toujours être vus dans un plan ou dans l'espace !
3. Attention au fait qu'un espace vectoriel doit contenir $(0, 0, 0)$!

Bien noter qu'un plan P qui ne contiendrait pas $(0,0,0)$ n'a aucune chance d'être stable par addition et multiplication par un scalaire. En effet, si $u \in P$, alors $-u \in P$ si P est stable par multiplication par un scalaire et $u - u \in P$ car P est stable par addition. Cela entraîne nécessairement que $u - u = (0,0,0) \in P$!

(ii) En revanche, le disque unité de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un espace vectoriel : en ajoutant ou multipliant des vecteurs par un scalaire, on finit par sortir du disque !



On l'a dit plus haut, les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ vont nous intéresser tout particulièrement mais leurs sous-espaces vectoriels également. Il est donc important de savoir reconnaître et décrire ces sous-espaces vectoriels. La stabilité par addition et par multiplication par un scalaire ainsi que le fait de contenir 0 est alors précisément ce qu'il s'agit de vérifier pour montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel. C'est l'objet de la proposition suivante [4].

Proposition 5.1

(i) Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$. L'ensemble E est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si,

1. $(0,0) \in E$;
2. $\forall (x,y),(x',y') \in E$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *on a que* $\lambda(x,y)+(x',y') = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in E$.

On a alors trois cas de figure.

1. *Soit* $E = \{(0,0)\}$ *auquel cas* E *est de dimension 0 ;*
2. *Soit* $E = \mathbb{R}^2$ *auquel cas* E *est de dimension* 2 *;*
3. *Soit* E *est de dimension 1 et* E *est alors une droite* ***passant par l'origine*** *et il existe* $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *tels que*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax + by = 0\right\}.$$

(ii) Soit $E \subseteq \mathbb{R}^3$. L'ensemble E est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si,

1. $(0,0,0) \in E$;
2. $\forall (x,y,z),(x',y',z') \in E$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *on a que*

$$\lambda(x,y,z) + (x',y',z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \in E.$$

On a alors quatre cas de figure.

1. *Soit* $E = \{(0,0,0)\}$ *auquel cas* E *est de dimension 0 ;*
2. *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *auquel cas* E *est de dimension* 3 *;*
3. *Soit* E *est de dimension 2 et* E *est alors un plan* ***passant par l'origine*** *et il existe* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\}$ *tels que*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = 0\right\};$$

4. Remarquer que $\lambda = 1$ dans le point **2** de la Proposition 5.1 fournit la stabilité par addition et $x', y') = (0,0)$ ou $(x',y',z') = (0,0,0)$ fournit la stabilité par multiplication par un scalaire. Il s'agit donc d'une façon pratique d'encoder ces deux stabilités d'un coup !

4. *Soit E est de dimension 1, auquel cas E est une droite de l'espace* ***passant par l'orgine****. Je rappelle qu'une droite de l'espace passant par l'origine est donnée soit en tant qu'intersection de deux plans passant par l'origine, autrement dit par deux équations*

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\right\}$$

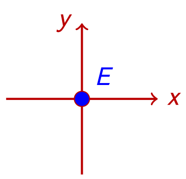
avec (a, b, c) et (α, β, γ) deux éléments non colinéaires de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ou alors sous sa forme paramétrique comme l'ensemble des

$$E = \{(at, bt, ct) \ : \ t \in \mathbb{R}\} \quad \text{pour} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

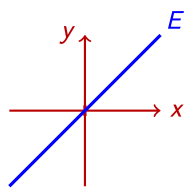
ce qui traduit que E est l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur (a, b, c), autrement dit la droite dirigée par (a, b, c) et passant par $(0, 0, 0)$.

► **Remarques** :

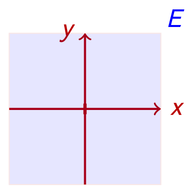
(i) On a donc la situation suivante dans $\mathbb{R}^2$ qui décrit tous les sous-espaces vectoriels possibles de $\mathbb{R}^2$.



Un unique sous-espace vectoriel de dimension 0 : à savoir $\{(0, 0)\}$.



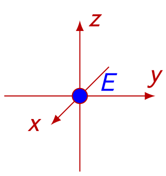
Une infinité de sous-espaces vectoriels de dimension 1 : toutes les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0, 0)$ d'équation $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.



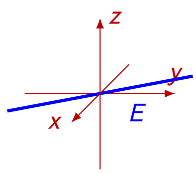
Un unique sous-espace vectoriel de dimension 2 : à savoir $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Attention au fait que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est **pas** en général un sous-espace vectoriel. En effet, ajouter deux vecteurs sur deux droites différentes donne en général un vecteur qui n'appartient à aucune des deux droites ! En revanche, une intersection de sous-espaces vectoriels est bien un espace vectoriel (c'est un bon exercice pour manipuler la notion de sous-espace vectoriel !).
Je rappelle également qu'une droite d'équation $ax + by = 0$ correspond à l'axe des ordonnées pour $b = 0$ et lorsque $b \neq 0$, elle correspond à la droite d'équation $y = -\frac{a}{b}x$ et qu'un vecteur directeur de la droite est donné par $(-b, a)$. On verra que le vecteur (a, b) est alors un vecteur orthogonal à la droite.

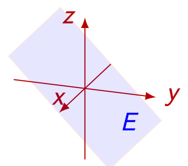
(ii) De même, dans $\mathbb{R}^3$, on a la description suivante des sous-espaces vectoriels possibles.



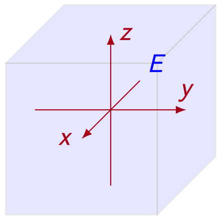
Un unique sous-espace vectoriel de dimension 0 : à savoir $\{(0, 0, 0)\}$.



Une infinité de sous-espaces vectoriels de dimension 1 : toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$.



Une infinité de sous-espaces vectoriels de dimension 2 : tous les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$.

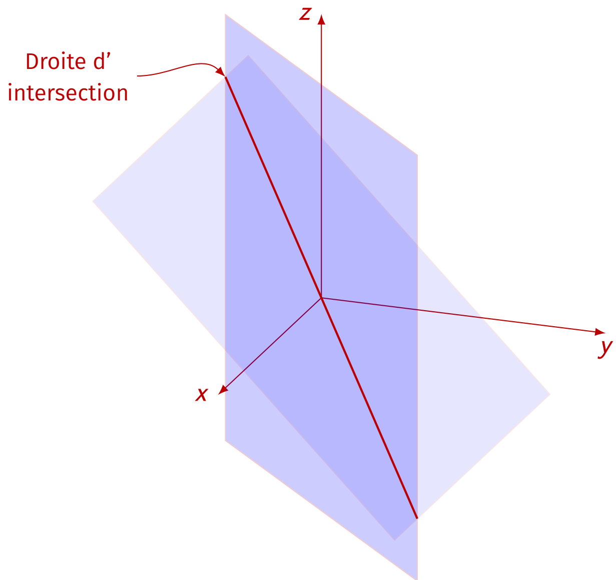


Un unique sous-espace vectoriel de dimension 3 : à savoir $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Je rappelle qu'un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$ a une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

On verra qu'alors le vecteur (a, b, c) est un vecteur orthogonal au plan. D'autre part, une droite D de $\mathbb{R}^3$ peut être vue de deux manières, soit comme intersection de deux plans comme ci-dessous.

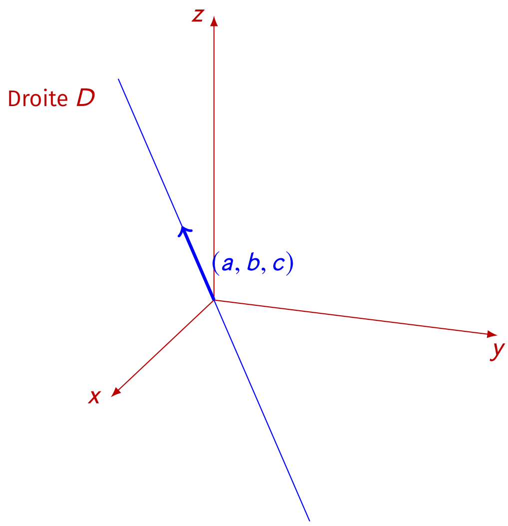


Dans ce cas, pour déterminer la droite D, on écrit que D est l'intersection des deux plans d'équations

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{et} \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \neq (\alpha, \beta, \gamma)$. Mais on peut aussi représenter une droite de l'espace en se donnant un vecteur directeur $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et dire que D est l'ensemble des points multiples de (a, b, c), autrement dit que

$$D = \{(at, bt, ct) \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$



La forme paramétrique est la plus simple en général. Pour passer de la forme d'une intersection de deux plans à la forme paramétrique, on utilise le pivot de Gauss ! Par exemple, considérons la droite D donnée par

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

On voit alors qu'en remplaçant la seconde ligne par la somme des deux lignes, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = -2x = -2y. \end{cases}$$

Ainsi, un point $(x, y, z) \in D$ si, et seulement si, $(x, y, z) = (y, y, -2y) = y(1, 1, -2)$ avec $y \in \mathbb{R}$ si bien que

$$D = \{(y, y, -2y) \ : \ y \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1, -2) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$$

et D est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $(1, 1, -2)$, autrement dit la droite dirigée par ce vecteur $(1, 1, -2)$.

Attention à l'espace dans lequel vous travaillez : si vous travaillez dans l'espace $\mathbb{R}^3$, une équation du type $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est l'équation d'un **plan** tandis que dans le plan $\mathbb{R}^2$, c'est l'équation d'une **droite** !

► **Exemples** :

(i) Considérons

$$E = \{(t, 2t) \ : \ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et décrivons quel type de sous-espace vectoriel il s'agit. On applique la Proposition 5.1 (i). On voit que pour $t = 0$, le point $(0, 2 \times 0) = (0, 0) \in E$. Soient alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y), (x', y') \in E$. Puisque $(x, y) \in E$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t, 2t)$. De même, puisque $(x', y') \in E$, il existe[5] $t' \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t', 2t')$. On calcule alors

$$\lambda(x, y) + (x', y') = \lambda(t, 2t) + (t', 2t') = (\lambda t + t', 2\lambda t + 2t') = (T, 2T)$$

pour $T = \lambda t + t'$ de sorte que $\lambda(x, y) + (x', y') \in E$ et que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour voir de quel type de sous-espace il s'agit, on voit que E ne dépend que d'un paramètre[6] si bien que E est de dimension 1. On sait alors qu'il s'agit d'une droite passant par l'origine. pour savoir laquelle, il suffit de remarquer que pour point $(x, y) \in E$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t, 2t)$. Autrement dit, $x = t$ et $y = 2t$ si bien que $y = 2x$ et ainsi le sous-espace vectoriel E n'est rien d'autre que la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = 2x$. On pouvait également raisonner en remarquant que

$$E = \{t(1, 2) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

de sorte que E est constitué de tous les vecteurs colinéaires à $(1, 2)$, autrement dit E est la droite passant par $(0, 0)$ et dirigée par $(1, 2)$, ce qui redonne bien la droite d'équation $y = 2x$.

(ii) Je vous laisse vérifier à titre d'exercice que de la même façon

$$E = \{(t, 2t, -t) \ : \ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui n'est autre que la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine et dirigée par le vecteur $(1, 2, -1)$.

5.1.2 Bases et dimension

La notion de base est une notion extrêmement importante et utile en algèbre linéaire. Je ne veux pas ici refaire un cours sur le sujet que vous avez probablement déjà eu mais rappeler les éléments importants à connaître, en particulier dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Commençons par une définition essentielle.

---

5. Attention ici à bien prendre une notation différente puisqu'*a priori*, $t \neq t'$ puisque (x, y) n'a aucune raison d'être égal à (x', y').

6. À savoir t.

Définition 5.1 (Bases canoniques) *La **base canonique** de $\mathbb{R}^2$ est la famille (e_1, e_2) où $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.*
*De même, la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$ est la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.*

► **Remarque** : Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, tout élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2.$$

Ainsi, on peut reconstituer tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ à partir de combinaisons linéaires de la base canonique et ce de manière unique. Ainsi, une base constitue les "briques de bases" optimales à partir desquelles on peut reconstruire tout l'espace vectoriel par addition et multiplication par des scalaires[7]. De plus, tout un tas de propriétés des applications linéaires que l'on verra en section suivante vont pouvoir s'étudier sur les vecteurs de la base canonique ou plus généralement d'une base quelconque!

Par ailleurs, on voit que pour connaître un vecteur de $\mathbb{R}^2$, il suffit de connaître sa composante $x \in \mathbb{R}$ devant e_1 et $y \in \mathbb{R}$ devant e_2. On a donc besoin de se donner deux nombres réels[8] pour déterminer un élément de $\mathbb{R}^2$, c'est pour cela qu'on dit que $\mathbb{R}^2$ est de **dimension** 2. De manière intuitive, la dimension correspond au nombre de paramètres à fixer pour déterminer n'importe quel vecteur de manière unique dans un espace vectoriel, ou de manière équivalente au nombre de directions indépendantes dont vous disposez dans l'espace en question. On voit bien que dans le plan $\mathbb{R}^2$ on a deux directions indépendantes et donc que $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 tandis que dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on a trois directions indépendantes et donc que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

Rappelons alors la définition suivante.

Définition 5.2 *Deux vecteurs non nuls (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$ sont dits **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$(x, y) = \lambda(x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda x' \\ y = \lambda y'. \end{cases}$$

*De même, deux vecteurs non nuls (x, y, z) et (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ sont dits **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$(x, y, z) = \lambda(x', y', z') \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda x' \\ y = \lambda y' \\ z = \lambda z'. \end{cases}$$

► **Exemple** : Deux vecteurs sont donc colinéaires s'ils sont proportionnels. En particulier, les vecteurs $(1, -2)$ et $(-2, 4)$ sont colinéaires car $(-2, 4) = -2(1, -2)$ tandis que les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires. En effet, s'il existait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(1, 2, 0) = \lambda(0, 1, 1)$, on aurait

$$\begin{cases} 1 = \lambda \times 0 \\ 2 = \lambda \\ 0 = \lambda \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = 0 \\ 2 = \lambda \\ 0 = \lambda \end{cases}$$

ce qui est absurde!

On décrit alors comment obtenir des bases des sous-espaces vectoriels non nuls[9] de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Proposition 5.2

7. Qui sont les seules opérations autorisées dans un tel espace!
8. Le nombre de vecteurs de la base.
9. En effet, l'espace vectoriel nul n'admet pas de base.

(i) **1.** *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. Alors on sait que E est une droite passant par l'origine et une base de E est simplement donnée par tout vecteur directeur de la droite en question.*

2. *Si maintenant E est de dimension 2, alors $E = \mathbb{R}^2$ et une base de E comporte nécessairement deux vecteurs et $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ est alors une base de $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si,*

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(ii) **1.** *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. Alors on sait que E est une droite passant par l'origine et une base de E est simplement donnée par tout vecteur directeur de la droite en question.*

2. *Si maintenant E est de dimension 2, alors E est un plan P d'équation*

$$ax + by + cz = 0.$$

*Une base de E comporte alors nécessairement deux vecteurs et deux vecteurs $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ forment une base de P si, et seulement si, ces deux vecteurs sont **dans** P, autrement dit si, et seulement si,*

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$$

*et (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) ne sont **pas colinéaires**.*

3. *Enfin si E est de dimension 3, alors $E = \mathbb{R}^3$ et une base de E comporte nécessairement trois vecteurs et $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si,*

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

▶ **Remarques** :

(i) Noter que la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

est obtenu en plaçant le premier vecteur (x_1, y_1) dans la première colonne et le second vecteur (x_2, y_2) dans la seconde colonne. Par ailleurs, je rappelle la règle pour calculer le déterminant d'une matrice carrée de taille 2 :

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

(ii) De même, noter que la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

est obtenu en plaçant le premier vecteur (x_1, y_1, z_1) dans la première colonne et le second vecteur (x_2, y_2, z_2) dans la deuxième colonne et enfin le troisième vecteur (x_3, y_3, z_3) dans la dernière colonne. Par ailleurs, je rappelle la règle dite de Sarrus pour calculer le déterminant d'une matrice carrée de taille 3 :

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2.$$

avec

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}\right).$$

► **Exemples** :

(i) Dans l'exemple (i) page 57, $e_1 = (1, 2)$ est une base de E.

(ii) Dans l'exemple (ii) page 57, $e_1 = (1, 2, -1)$ est une base de E.

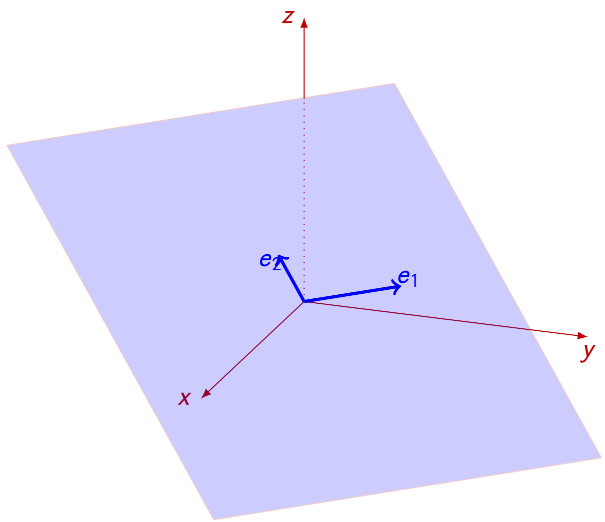
(iii) On considère le plan P de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$x + y - z = 0.$$

On peut soit deviner deux vecteurs de ce plan, comme par exemple [10] $(-1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ et on voit alors que ces vecteurs sont non colinéaires car sinon il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(-1, 1, 0) = \lambda(1, 0, 1) \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -1 = \lambda \\ 1 = \lambda \times 0 \\ 0 = \lambda \end{cases}$$

ce qui est absurde. Cela se voit sur un dessin : les deux vecteurs forment deux directions indépendantes dans le plan P.



On en déduit que (e_1, e_2) est une base de P avec $e_1 = (-1, 1, 0)$ et $e_2 = (1, 0, 1)$. Une méthode plus systématique pour trouver une telle base est d'écrire que $(x, y, z) \in P$ si, et seulement si, $x + y - z = 0$ soit si, et seulement si, $x = z - y$ soit

$$(x, y, z) = (z - y, y, z) = z(1, 0, 1) + y(-1, 1, 0)$$

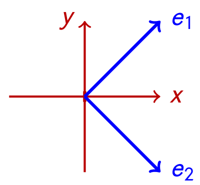
pour $y, z \in \mathbb{R}$ et on voit alors apparaître nos deux vecteurs $(-1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$. Noter qu'on n'a pas unicité d'une base ! L'écriture

$$x + y - z = 0 \iff z = x + y$$

fournit que $(x, y, z) \in P$ si, et seulement si, $(x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$ et par conséquent que $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ forment également une base de P !

(iv) Terminons par le fait que $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ car

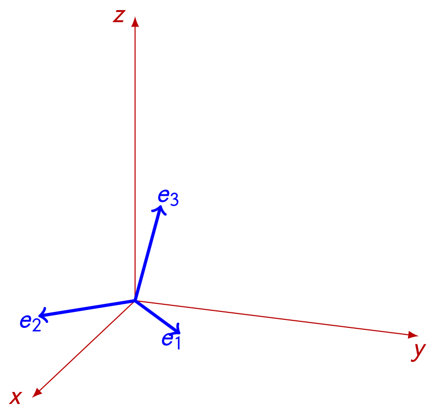
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$



10. $(-1, 1, 0) \in P$ car $-1 + 1 - 0 = 0$ et $(1, 0, 1) \in P$ car $1 + 0 - 1 = 0$.

Encore une fois, cela se voit sur un dessin, les deux directions de e_1 et e_2 sont indépendantes! Enfin, les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,-1,0)$ et $e_3 = (-1,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ car

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = -1+0+0-0-0-1 = -2 \neq 0.$$



Encore une fois, cela se voit sur un dessin, les trois directions de e_1, e_2 et e_3 sont indépendantes!

5.1.3 Produit scalaire et orthogonalité

Passons à présent à un outil capital pour cette partie du cours, à savoir le produit scalaire. Il s'agit d'un outil indispensable pour, à la fois, parler d'**angles** et de **distances** et en particulier d'**orthogonalité**. Commençons par rappeler la définition.

Définition 5.3 (Produit scalaire et norme)

(i) On définit le ***produit scalaire*** *de deux vecteurs (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$, et l'on note $(x,y)\cdot(x',y')$ le* ***nombre réel***

$$(x,y)\cdot(x',y') = xx' + yy'.$$

On définit alors la ***norme*** *d'un vecteur $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et l'on note $||(x,y)||$ le* ***réel positif***

$$||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

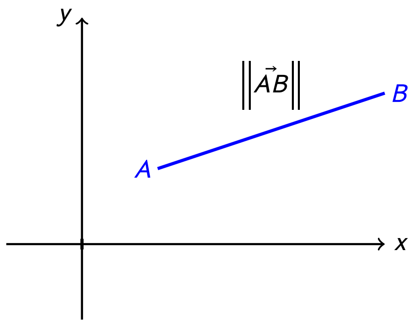
(i) De même, on définit le ***produit scalaire*** *de deux vecteurs (x,y,z) et (x',y',z') de $\mathbb{R}^3$, et l'on note $(x,y,z)\cdot(x',y',z')$ le* ***nombre réel***

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = xx' + yy' + zz'.$$

On définit alors la ***norme*** *d'un vecteur $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, et l'on note $||(x,y,z)||$ le* ***réel positif***

$$||(x,y,z)|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

► **Remarque** : Géométriquement, la norme $||\vec{u}||$ d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ (*resp.* de $\mathbb{R}^3$) représente la longueur du vecteur $\vec{u}$. Il s'agit donc d'un outil pour calculer des distances puisque par exemple, la distance d'un segment $[AB]$ sera donnée par $\left\|\vec{AB}\right\|$.

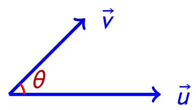


Noter par ailleurs que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ (*resp.* de $\mathbb{R}^3$), le produit scalaire est symétrique dans le sens où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

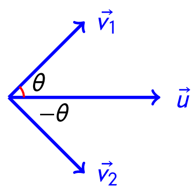
Vous connaissez alors probablement déjà la proposition suivante qui donne une expression alternative du produit scalaire et fait ainsi le lien entre ce nombre réel et **l'angle** entre deux vecteurs.

Proposition 5.3 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) d'angle $\theta \in [0, \pi]$, alors on a*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta).$$



► **Remarque** : La Proposition 5.3 permet ainsi de déterminer en calculant le produit scalaire de deux vecteurs le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs. ⚠ Mais **attention** au fait que cela ne permet pas exactement d'obtenir l'angle mais **uniquement** l'angle au signe près puisqu'il nous manque la valeur du sinus pour complètement déterminer un angle. Ainsi, on a que $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = \vec{u} \cdot \vec{v}_2$ dans la configuration ci-dessous ! ⚠



► **Exemples** :

(i) Soient $\vec{u} = (1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 0)$. On a alors que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ et

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad ||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

si bien que la Proposition 5.3 implique que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2}\cos(\theta)$ où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On en déduit que $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cela implique alors que $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ modulo 2π !

(ii) Soient $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (1, -1, 0)$. On a alors que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et [11]

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad ||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

si bien que la Proposition 5.3 implique que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\cos(\theta)$ où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On en déduit que $\cos(\theta) = 0$. Cela implique alors que $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ modulo 2π ! On peut donc en particulier en conclure que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **perpendiculaires** !

11. Attention ici qu'on a bien un $(-1)^2$ dans le calcul de $||\vec{v}||$ et **PAS** un -1^2 !

On vient de toucher du doigt la propriété essentielle du produit scalaire : il permet de **détecter l'orthogonalité de deux vecteurs**.

Proposition 5.4 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** (ou perpendiculaires) et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

► **Remarque** : Cela découle de la Proposition 5.3 puisque si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors le cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul ! Il faut donc **impérativement** penser à utiliser un produit scalaire pour traduire une condition d'orthogonalité dans un énoncé !

Venons-en alors aux deux dernières notions concernant l'orthogonalité qui nous seront utiles. La première est celle **d'orthogonal à un sous-espace vectoriel**.

Définition 5.4 *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). On appelle alors orthogonal de E et on note $E^\perp$ l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) orthogonaux à tous les vecteurs de E.*

On a alors la proposition suivante qui décrit $E^\perp$ dans chacun des cas possibles pour E dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ en regard de la Proposition 5.1.

Proposition 5.5 *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Alors $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) et :*

(i)
1. *Si $E = \{(0,0)\}$, alors $E^\perp = \mathbb{R}^2$;*
2. *Si $E = \mathbb{R}^2$, alors $E^\perp = \{(0,0)\}$;*
3. *Si E est droite d'équation $ax + by = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, alors $E^\perp$ est la droite dirigée par (a,b), autrement dit la droite d'équation $-bx + ay = 0$.*

(ii)
1. *Si $E = \{(0,0,0)\}$, alors $E^\perp = \mathbb{R}^3$;*
2. *Si $E = \mathbb{R}^3$, alors $E^\perp = \{(0,0,0)\}$;*
3. *Si E est un plan d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, alors $E^\perp$ est la droite dirigée par (a,b,c) ;*
4. *Si E est une droite dirigée par $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, alors $E^\perp$ est le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.*

► **Remarque** : Il n'est pas essentiel de retenir ce théorème par cœur. C'est en revanche un bon exercice de se convaincre intuitivement que l'orthogonal d'une droite du plan est une droite et que dans l'espace l'orthogonal d'une droite est un plan tandis que l'orthogonal d'un plan est une droite. Pour une visualisation, je vous renvoie aux pages suivantes `https://www.math.u-psud.fr/~destagnol/droiteorth.html` et `https://www.math.u-psud.fr/~destagnol/planorth.html`. Pour le reste, il est surtout important de savoir déterminer $E^\perp$ en pratique comme dans la liste d'exemples ci-dessous, qui comme vous allez le voir revient à utiliser le produit scalaire [12] !

► **Exemples** : Les trois exemples ci-dessous correspondent aux illustrations sur `https://www.math.u-psud.fr/~destagnol/droiteorth.html` et `https://www.math.u-psud.fr/~destagnol/planorth.html`.

(i) **Orthogonal d'une droite dans le plan** : Considérons la droite D de $\mathbb{R}^2$ dirigée par le vecteur $(2,1)$, autrement dit la droite d'équation $x = 2y$ soit $x - 2y = 0$. On a alors deux méthodes. Soit on remarque que

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - 2y = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y) \cdot (1,-2) = 0\right\}$$

12. Ce n'est pas une surprise, $E^\perp$ est défini par la notion d'orthogonalité !

en utilisant que $(x, y) \cdot (1, -2) = x - 2y$. Cela implique que D est l'ensemble des points orthogonaux au vecteur $(1, -2)$ et donc $D^\perp$ est la droite engendrée par $(1, -2)$, c'est-à-dire la droite d'équation $y = -2x$ soit $x + 2y = 0$.
On peut aussi raisonner à partir du vecteur directeur de D. Puisque D est dirigée par $(2, 1)$, $D^\perp$ est par définition constitué de tous les éléments $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ orthogonaux à $(2, 1)$. Autrement dit,

$$D^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x, y) \cdot (2, 1) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + y = 0\}$$

et on retrouve (heureusement!) la droite d'équation $y = -2x$ dirigée par $(1, -2)$.

(ii) **Orthogonal d'une droite dans l'espace** : Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par $(1, 0, -1)$. Par définition, $D^\perp$ est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux à $(1, 0, -1)$ de sorte que

$$D^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - z = 0\}$$

et par conséquent $D^\perp$ est le plan d'équation $x = z$.

(iii) **Orthogonal d'un plan dans l'espace** : Considérons le plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - z = 0$. On a ainsi

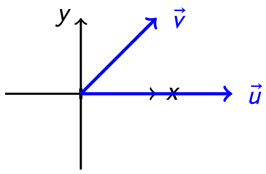
$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0\}$$

si bien que P est l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux à $(1, 0, -1)$ et ainsi $P^\perp$ est la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par $(1, 0, -1)$. On retrouve la droite D de (ii), ce n'est pas un hasard puisqu'on a vu que $D^\perp = P$ et donc $P^\perp = (D^\perp)^\perp$ et on peut établir que $(E^\perp)^\perp = E$ pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

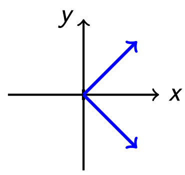
On finit par introduire un type de bases particulier qui va jouer un rôle important dans la suite, à savoir **les bases orthonormées**.

Définition 5.5 *Une base d'un espace vectoriel est dite* ***orthonormée*** *si tous les vecteurs qui la composent sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. On notera souvent* **BON** *pour base orthonormée.*

► **Remarques** : Pour vérifier qu'une base est orthonormée, il faut donc vérifier trois points : qu'on a bien une base en utilisant la Proposition 5.2, puis que les vecteurs sont orthogonaux deux à deux[13] et enfin calculer la norme de chacun des vecteurs et vérifier que cette norme vaut 1. Par ailleurs, une base orthonormée doit se reconnaître à l'œil sur un dessin. Voici un exemple dans $\mathbb{R}^2$.

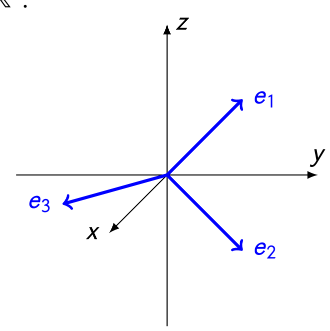


Un exemple de base non orthonormée (les vecteurs ne sont pas orthogonaux et pas tous de norme 1).

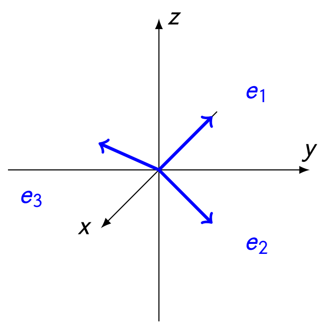


Un exemple de base orthonormée (les vecteurs sont orthogonaux 2 à 2 et tous de norme 1).

Et dans $\mathbb{R}^3$.



Un exemple de base non orthonormée (les vecteurs ne sont pas orthogonaux 2 à 2 et pas tous de norme 1).



Un exemple de base orthonormée (les vecteurs sont orthogonaux 2 à 2 et tous de norme 1).

13. Noter que si la base ne comporte qu'un élément, il n'y a rien à faire lors de cette étape ! Et pour vérifier cette orthogonalité, il faut bien sûr penser au produit scalaire !

▶ **Exemples** :

(i) Évidemment, on vérifie que les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des BONs.

(ii) La base $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ de la page 60 est une base [14]. On a $e_1 \cdot e_2 = 0$ mais $||e_1|| = ||e_2|| = \sqrt{2}$ donc il ne s'agit pas d'une BON. En revanche, en posant $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1$ et $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$, on peut vérifier que (e_1', e_2') reste une base de $\mathbb{R}^2$, que $e_1' \cdot e_2' = 0$ et que $||e_1'|| = ||e_2'|| = 1$ si bien que (e_1', e_2') est une BON de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Posons alors $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$. Je vous laisse vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que $e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$ et $||e_1|| = ||e_2|| = ||e_3|| = 1$, autrement dit que (e_1, e_2, e_3) est une BON de $\mathbb{R}^3$.

5.2 Applications linéaires

5.2.1 Définitions

Une application linéaire est simplement une application qui respecte la structure d'espace vectoriel : l'image de la somme de deux vecteurs doit être la somme des images, l'image de deux fois un vecteur doit être deux fois l'image et ainsi de suite. Autrement dit ce sont les applications *intéressantes* à étudier sur les espaces vectoriels. On a la définition précise suivante.

Définition 5.6 (Application linéaire)

(i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une ***application linéaire*** *si, et seulement si,*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda(x,y)+(x',y')) = f('\lambda x + x', \lambda y + y') = \lambda f(x,y) + f(x',y').$$

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une ***application linéaire*** *si, et seulement si,*

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (x,y,z),(x',y',z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')) &= f('\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z').\end{aligned}$$

▶ **Remarque** : Prenant $y = 0$ et $\lambda = 0$ il vient que si f est linéaire, alors $f(0) = 0$.

▶ **Exemples** :

(i) On considère l'application suivante

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y, x+y). \end{array} \right.$$

Vérifions alors que f est une application linéaire. Pour ce faire, on se fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. On calcule alors

$$f(\lambda(x,y)+(x',y')) = f('\lambda x + x', \lambda y + y') = (-\lambda y - y', \lambda x + x' + \lambda y + y')$$

par définition de f. On regroupe alors les termes en λ d'un côté et le reste d'un autre côté pour obtenir

$$f(\lambda(x,y)+(x',y')) = \lambda(-y, x+y) + (-y', x'+y')$$

où l'on reconnaît $f(x,y) = (-y, x+y)$ et $f(x',y') = (-y', x'+y')$ de sorte que

$$f(\lambda(x,y)+(x',y')) = \lambda f(x,y) + f(x',y').$$

L'application f est donc bien une application linéaire !

(ii) Vérifiez que l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-y, x+y, z+3y) \end{array} \right.$$

est une application linéaire !

14. On l'a montré en page 60.

5.2.2 Matrice d'une application linéaire

Un outil très utile pour étudier les applications linéaires est de passer par leur matrices. Il y a en fait équivalence entre les applications linéaires et les matrices associées comme on va le voir. Il faut simplement être prudent et toujours spécifier dans quelle base on écrit la matrice! Commençons alors par **la matrice d'une application linéaire** dans la base canonique [15].

Définition 5.7 (Matrice dans la base canonique)

(i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de f dans la base canonique est alors la matrice dont la première colonne est le vecteur $f(e_1) = f(1,0) \in \mathbb{R}^2$ et la seconde colonne est le vecteur $f(e_2) = f(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit,

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} | & | \\ | & | \end{array} \right) \end{array}.$$

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de f dans la base canonique est alors la matrice dont la première colonne est le vecteur $f(e_1) = f(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$, la deuxième colonne est le vecteur $f(e_2) = f(0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ et la troisième colonne est le vecteur $f(e_3) = f(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Autrement dit,

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{array} \right) \end{array}.$$

► **Exemples** :

(i) Reprenons l'exemple (i) de la page 65. On calcule $f(e_1) = f(1,0) = (-0, 1+0) = (0,1)$ tandis que $f(e_2) = f(0,1) = (-1, 0+1) = (-1,1)$. Ainsi la matrice M de f dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}.$$

(ii) De même, reprenons l'exemple (ii) de la page 65. On calcule $f(e_1) = f(1,0,0) = (0,1,0)$, $f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1,3)$ tandis que $f(e_3) = f(0,0,1) = (0,0,1)$. Ainsi la matrice M de f dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \end{array}.$$

On généralise un petit peu cette notion à présent pour parler de la matrice d'une application linéaire dans une base quelconque, ce qui nous donnera un peu plus de flexibilité et nous sera utile au chapitre suivant.

Définition 5.8 (Matrice dans une base quelconque)

(i) Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et (b_1, b_2) une base (potentiellement différente de la base canonique). Alors il existe $(m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 \quad \text{et} \quad f(b_2) = m_{12}b_1 + m_{22}b_2$$

15. Il est impératif de bien comprendre ce passage d'une application linéaire à sa matrice!

et la matrice M de f dans la base (b_1, b_2) est donnée par

$$M = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(b_1) & f(b_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \end{array}.$$

(ii) Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et (b_1, b_2, b_3) une base (potentiellement différente de la base canonique). Alors il existe $(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathbb{R}^9$ tels que

$$f(b_1) = m_{11}b_1+m_{21}b_2+m_{31}b_3, \quad f(b_2) = m_{12}b_1+m_{22}b_2+m_{32}b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = m_{13}b_1+m_{23}b_2+m_{33}b_3$$

et la matrice M de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est donnée par

$$M = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \end{array}.$$

▶ **Remarques** :

(i) Essayez de vous convaincre qu'en choisissant les base canoniques, on retombe sur le Définition 5.7.

(ii) Si l'on vous demande d'écrire la matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans une base (b_1, b_2, b_3), la méthode est de calculer $f(b_1)$ et d'essayer de trouver m_{11}, m_{21}, m_{31} tels que $f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 + m_{31}b_3$. En remplaçant b_1, b_2, b_3 par leurs expressions dans la base canonique (cela revient à résoudre un système linéaire en m_{11}, m_{21}, m_{31} qui admettra une unique solution). On fait alors de même avec $f(b_2)$ et $f(b_3)$. C'est donc relativement long et pénible et on ne vous le demandera donc sûrement pas mais si vous souhaitez approfondir cela, je vous renvoie à l'exemple ci-dessous. Si en revanche on vous demande seulement de vérifier comme ici que la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3)est donnée par

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

alors cela revient à la simple vérification que les relations

$$f(b_1) = m_{11}b_1+m_{21}b_2+m_{31}b_3, \quad f(b_2) = m_{12}b_1+m_{22}b_2+m_{32}b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = m_{13}b_1+m_{23}b_2+m_{33}b_3$$

sont vraies, ce qui est beaucoup plus commode !

▶ **Exemple** : Reprenons l'exemple (ii) de la page 65 et écrivons sa matrice dans la base $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (1, -1, 0)$ et $b_3 = (-1, 0, 1)$ de la page 61. On calcule alors $f(b_1) = f(1, 1, 0) = (-1, 2, 3)$ et on cherche α, β, γ tels que

$$(-1, 2, 3) = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 \quad \text{soit} \quad (-1, 2, 3) = (\alpha + \beta - \gamma, \alpha - \beta, \gamma)$$

si bien qu'on cherche à résoudre [16]

$$\begin{cases} -1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 2 = \alpha - \beta \\ 3 = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 2 = \alpha - \beta \\ 3 = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \alpha \\ 0 = \beta \\ 3 = \gamma \end{cases}$$

si bien que $f(b_1) = 2b_1 + 0 \times b_2 + 3b_3$. On calcule de même que $f(b_2) = (1, 0, -3) = -b_1 + b_2 - 3b_3$ et $f(b_3) = (0, -1, 1) = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - b_3$ de sorte que la matrice M de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est donnée par

$$M = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

16. On a là un gentil système linéaire que l'on résout comme d'habitude par pivot de Gauss !

En revanche, si la question est de vérifier que

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3), alors il s'agit de vérifier que

$$f(b_1) = 2b_1 + 0 \times b_2 + 3b_3, \quad f(b_2) = (1, 0, -3) = -b_1 + b_2 - 3b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = (0, -1, 1) = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - b_3.$$

On calcule alors

$$f(b_1) = (-1, 2, 3) \quad \text{et} \quad 2b_1 + 0 \times b_2 + 3b_3 = 2(1, 1, 0) + 3(-1, 0, 1) = (-1, 2, 3)$$

de sorte qu'on a bien $f(b_1) = 2b_1 + 0 \times b_2 + 3b_3$. On procède alors de même pour les deux autres relations et on a établi que M est bien la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3).

On conclut alors ce chapitre de révisions par un dernier résultat utile qui montre comment cette équivalence entre applications linéaires et matrices par rapport à la composition des applications linéaires.

Proposition 5.6 *Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$) deux applications linéaires dont les matrices dans la base canonique sont données par M et N respectivement. Alors la matrice de l'application linéaire $f \circ g$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f \circ g(x, y) = f(g(x, y))$ est donné par le produit matriciel $M \times N$.*

► **Remarque** : La composition de deux applications $f \circ g$ consiste à successivement appliquer la transformation g puis la transformation f au résultat de la transformation g.

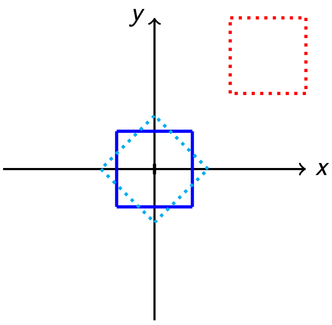
Chapitre 6

Isométries du plan et de l'espace

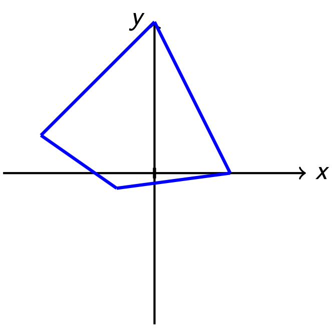
6.1 Introduction et premières propriétés

6.1.1 Motivations

L'objectif de cette partie du cours est de comprendre et de décrire les transformations du plan ou de l'espace qui laissent une figure **globalement invariante** [1], en d'autres termes d'étudier les symétries d'une figure et de formaliser cette notion [2]. Si vous prenez un carré, on voit qu'une translation (en rouge) ou une rotation d'angle [3] $\frac{\pi}{4}$ et de centre l'origine (en cyan) ne le laissent pas invariant



tandis qu'une rotation d'angle [4] $\frac{\pi}{2}$ le laisse globalement invariant [5]. L'intérêt de ce genre de transformations qui laissent invariante une figure est qu'elles nous donnent des informations concernant la figure! Imaginons que je vous cache une figure, disons à 4 côtés et 4 sommets pour simplifier, et que je vous donne simplement ses symétries (ou les transformations qui la laissent invariante). Si par exemple je vous dis qu'il n'y a aucune transformation qui la laisse invariante. Alors la figure peut être n'importe quoi comme par exemple



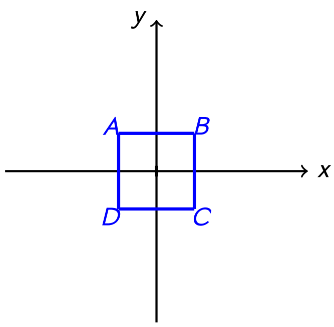
1. Par globalement invariant, on entend qu'une fois la transformation de la figure effectuée, par exemple la translation, le résultat se superpose à la figure initiale.
2. En particulier, il paraît assez intuitif qu'un cercle ou une sphère est plus symétrique qu'un carré ou qu'un cube qui sont eux-mêmes plus symétriques qu'une figure complètement quelconque du plan ou de l'espace
3. Soit 45 degrés pour ceux qui n'aiment pas les radians!
4. Soit 90 degrés.
5. Chaque sommet n'est pas envoyé sur lui-même mais la carré dans son ensemble est préservé.

Mais en fait, on a quand même un (tout petit) peu d'informations : par exemple la figure ne peut pas être un carré, un rectangle ou toute figure présentant une symétrie. Et plus je vous donnerai de symétries vérifiées par la figure plus vous aurez d'informations sur cette figure. Vous pouvez essayer de vous convaincre [6] que si je vous dis que la figure est globalement invariante par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors notre figure est nécessairement un carré. De même, si l'on a une figure à trois sommets et trois côtés [7] qui ne présente aucune symétrie, cela nous dit simplement que notre triangle est un triangle scalèneQuelconque. tandis que si l'on a un seul axe de symétrie, il s'agit d'un triangle isocèle et que si l'on a trois axes de symétries ou alors que le triangle est invariant par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, on a affaire à un triangle équilatéral. Ainsi on voit bien qu'obtenir des informations sur les symétries ou les transformations laissant globalement invariante une figure nous permet d'accéder de façon détournée à des informations sur la figure, sans nécessairement y avoir accès. On peut évidemment considérer le même problème avec des figures dans l'espace.

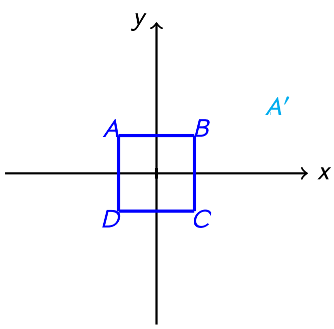
Pour finir, mentionnons qu'en chimie, on verra au chapitre suivant que, de manière analogue, si l'on représente une molécule dans le plan ou dans l'espace, alors étudier ses symétries [8] fournira de précieuses informations sur la molécule.

6.1.2 Automorphismes orthogonaux

Intéressons-nous alors aux transformations *candidates* à laisser une figure du plan ou de l'espace globalement invariante. On peut se convaincre sans trop de difficultés que les candidates en question vont être les applications qui préservent les angles et les distances [9]. En effet, soit f une application qui préserve angles et distances. Regardons [10] son effet sur le carré $ABCD$.

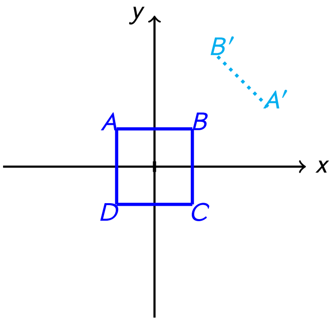


L'application f envoie A sur un point A'

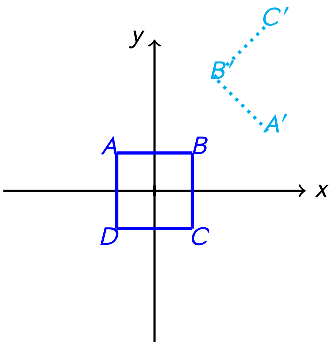


et maintenant puisque f préserve les distances, l'image B' de B par f doit être à la même distance de A' que celle entre B et A, ce qui donne par exemple

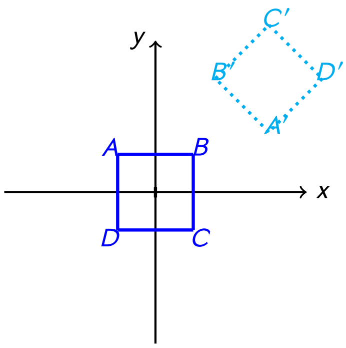
6. Et on peut le démontrer !
7. Autrement dit un triangle.
8. Avec des petites subtilités supplémentaires comme la prise en compte des doublets non liants et de la contrainte qu'un atome devra être envoyé sur un autre atome de même nature. Autrement dit un atome de carbone devra être envoyé sur un atome de carbone par exemple.
9. En fait, on peut démontrer grâce au produit scalaire qui est lié à la fois à la notion de distance et à celle d'angle qu'une application qui préserve les distances préserve les angles. C'est l'objet de le Proposition 6.2.
10. Je vous encourage à essayer de faire ces dessins par vous-mêmes.



L'image C' de C par f doit alors être à la même distance de B' que celle entre B et C puisque f préserve les distances et l'angle formé par A, B, C doit être le même que celui formé par A', B', C' puisque f préserve les angles de sorte qu'on a uniquement deux choix possibles à présent pour C'. Par exemple on peut avoir



Enfin, l'image D' de D doit être à la même distance de A' et C' respectivement que celles de D à A et de D à C et les angles formés doivent être droits ce qui ne laisse plus le choix



On constate donc bien que le carré $ABCD$ est envoyé sur un carré $A'B'C'D'$ qui n'a pas été déformé (du fait que f préserve angles et distances) et que l'on pourrait superposer au carré initial. Le carré $A'B'C'D'$ est simplement le carré $ABCD$ dans une autre position.

Venons-en donc à présent aux définitions un peu plus précises.

Définition 6.1 *Soit $f : E \longrightarrow E$ avec $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On dit que f préserve les distances si, et seulement si,*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad ||f(\vec{u}) - f(\vec{v})|| = ||\vec{u} - \vec{v}||.$$

► **Remarque** : Si l'on identifie $\vec{u}$ avec un point A de E et $\vec{v}$ avec un point B de E et que l'on note $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, cela signifie que la longueur du segment image $[A'B']$ est égale à celle du segment de départ $[AB]$.

On peut alors démontrer la proposition suivante.

Proposition 6.1 *Une application $f : E \longrightarrow E$ avec $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ qui préserve les distances est la composée d'une application linéaire préservant les distances et d'une translation.*

► **Remarque** : Cette Proposition 6.1 est importante . En effet, l'on va ultimement s'intéresser aux transformations laissant invariante une figure dont on peut imaginer que le centre de gravité est 0. Or une translation ne fixe aucune figure bornée de sorte qu'on va pouvoir dans notre étude se débarrasser de cette composante "translation" et se concentrer sur les applications linéaires conservant les distances.

On a alors la proposition suivante qui découle du lien entre distance, angle et produit scalaire.

Proposition 6.2 *Toute application linéaire qui préserve les distances préserve aussi les angles. On appelle une telle application linéaire* ***un automorphisme orthogonal****.*

Notre objectif va désormais être de décrire dans un premier temps toutes les automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace avant de voir comment l'étude des automorphismes orthogonaux qui laissent une molécule globalement invariante vous sera utile en chimie! La première étape pour cette description est la proposition **capitale** suivante.

Proposition 6.3 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$) une application linéaire et M sa matrice dans la base canonique. Alors f préserve les angles et les distances si, et seulement si, ${}^tMM = I_2$ (resp. I_3).*

► **Remarque** : Je rappelle que

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si l'on vous demande de vérifier qu'une application linéaire préserve angles et distances, il suffit de calculer ${}^tMM$ avec M la matrice de f dans la base canonique et de vérifier que vous obtenez l'identité. Je rappelle également que la transposée de la matrice M est la matrice obtenue en échangeant[11] les lignes et les colonnes de la matrice M. Je vous renvoie à la feuille de TD 3 pour des exemples traités en détails.

Enfin, on donne la proposition suivante.

Proposition 6.4 *Soient f une application linéaire préservant angles et distances et M sa matrice dans la base canonique. Alors $\det(M) \in \{-1, +1\}$.*

DÉMONSTRATION.– On sait que $tMM = I$ d'après la Proposition 6.3. Ainsi $\det\left({}^tMM\right) = \det(I)$. On a alors $\det(I) = 1$ et $\det\left({}^tMM\right) = \det\left({}^tM\right)\det(M)$. On peut alors établir que $\det\left({}^tM\right) = \det(M)$ de

11. Par exemple, si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

car la première ligne de M devient la première colonne de M et sa seconde ligne devient sa seconde colonne. De même en taille 3,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donne} \quad {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

car la première ligne de M est devenue la première colonne de ${}^tM$, la deuxième ligne de M est devenue la deuxième colonne de ${}^tM$ et la dernière ligne de M est devenue la dernière colonne de ${}^tM$.

sorte que $\det(M)^2 = 1$ et $\det(M) = \pm 1$. □

▶ **Remarque** : Lorsque $\det(M) = 1$, l'application linéaire f ne "retourne [12]" pas le plan ou l'espace (on dit qu'elle préserve l'orientation) tandis que si $\det(M) = -1$, l'application linéaire f "retourne" le plan ou l'espace (elle inverse l'orientation).

6.2 Le cas du plan

Décrivons à présent toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui préservent angles et distances. Je vous renvoie au TD 3 pour des démonstrations et des exemples détaillés.

Proposition 6.5 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire préservant angles et distances et M sa matrice dans la base canonique. On a alors deux cas de figure.*

(i) Si $\det(M) = 1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est une rotation du plan d'angle θ et de centre l'origine $(0, 0)$.

(ii) Si $\det(M) = -1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est la composée de la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses et d'une rotation du plan d'angle θ et de centre l'origine $(0, 0)$ ou de manière équivalente f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite du plan d'angle $\frac{\theta}{2}$ par rapport à l'axe des abscisses.

▶ **Remarques** :

(i) Pour une description de comment agit une rotation du plan, je vous renvoie à `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationplan.html` sur laquelle une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ de centre $(0, 0)$ est présentée. Les pages `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationplan2.html` et `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationplan3.html` vous permettent de voir l'action d'une telle rotation du plan sur différentes figures. Enfin, sur `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationplan4.html`, vous trouverez un exemple de composée d'une symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de centre $(0, 0)$ et une symétrie orthogonale de droite d'angle $\frac{\pi}{8}$. Vous pouvez constater que les deux transformations sont bien équivalentes ! Je vous renvoie également à `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationplan5.html` pour voir l'effet du cas (ii) sur une figure.

(ii) Pour tester votre bonne compréhension, je vous encourage à regarder le petit dessin "humoristique" page 51 et à voir si vous le comprenez !

Vous remarquez que toutes les applications linéaires du plan peuvent être décrites en termes de briques de base que sont les rotations et une symétrie orthogonale. Nous y reviendrons dans le dernier chapitre !

6.3 Le cas de l'espace

La situation est un tout petit peu plus compliquée [13] dans l'espace mais on peut démontrer de façon générale que la stratégie employée dans le TD 3 fonctionne et fournit la proposition suivante. En particulier, contrairement au cas du plan, la matrice d'une application linéaire de l'espace qui préserve angles

12. Une symétrie retourne le plan ou l'espace, autrement dit elle inverse les sens de parcours, tandis qu'une rotation ne les retourne pas, elle conserve les sens de parcours.

13. Puisqu'elle nécessite un changement de base.

et distances n'est pas immédiatement sous une forme qui permet de l'interpréter mais un changement de base orthonormée permet de la mettre sous une forme interprétable.

Proposition 6.6 *Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire préservant angles et distances. On a alors deux cas de figure.*

(i) Si $\det(M) = 1$, alors il existe une BON (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la matrice de f dans cette base (e_1, e_2, e_3) soit donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est alors une rotation d'angle θ autour de la droite dirigée par e_1.

(ii) Si $\det(M) = -1$, alors il existe une BON (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la matrice de f dans cette base (e_1, e_2, e_3) soit donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est alors la composée de la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par e_1 par une rotation d'angle θ autour de la droite dirigée par e_1.

► **Remarque** : Pour une description de ce à quoi ressemble une rotation de l'espace autour d'un axe ainsi que la symétrie orthogonale par rapport à un plan, je vous renvoie à `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationespace1.html`, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationespace2.html`, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationespace3.html`, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationespace4.html` et `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationespace5.html` et à la correction du TD 3. Globalement une telle rotation fait tourner l'espace autour de la droite dirigée par e_1 d'un angle θ dans la direction de e_2 vers e_3 et une symétrie orthogonale revient à prendre le miroir de l'espace par rapport au plan en question. La section suivante explique comment déterminer la bonne BON dans laquelle écrire la matrice de f afin de la décrire géométriquement et je vous renvoie au TD 3 pour des exemples détaillés.

Vous remarquez que, à nouveau, toutes les applications linéaires de l'espace peuvent être décrites en termes de briques de base que sont les rotations et une symétrie orthogonale. Je conclus cette section par quelques mots de vocabulaire qui sont utilisés en chimie.

Définition 6.2

(i) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6.6 avec $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ est appelée une ***rotation impropre****.*

(ii) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6.6 avec $\theta = 0$ est appelée une ***réflexion*** *par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par e_1.*

(i) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6.6 avec $\theta = \pi$ est appelée une ***inversion*** *par rapport à $(0, 0, 0)$.*

► **Remarque** : On parle de réflexion dans le cas où $\theta = 0$ car alors f est simplement une symétrie orthgonale par rapport à un plan et on a vu que cela revenait à prendre l'image miroir (ou la réflexion !) de l'espace par rapport à ce plan. Par ailleurs, quand $\theta = \pi$, on a en fait une symétrie centrale de centre $(0, 0, 0)$ et l'espace se trouve inversé (d'où le nom d'inversion !).

6.4 Stratégie

Face à une application linéaire du plan que l'on vous demande de décrire géométriquement il faut donc procéder de la manière suivante :

(i) Calculer la matrice M de l'application linéaire dans la base canonique, puis calculer sa transposée. Vérifiez alors que ${}^tMM = I_2$. Si oui, l'application linéaire en question préserve angles et distances.

(ii) Calculer $\det(M) \in \{-1, 1\}$ d'après la Proposition 6.4.

(iii) Appliquer alors la Proposition 6.5 (i) ou (ii) selon que $\det(M) = 1$ ou -1 et conclure.

De manière analogue, face à une application linéaire du plan que l'on vous demande de décrire géométriquement il faut donc procéder de la manière suivante :

(i) Calculer la matrice M de l'application linéaire dans la base canonique, puis calculer sa transposée. Vérifiez alors que ${}^tMM = I_3$. Si oui, l'application linéaire en question préserve angles et distances.

(ii) Calculer $\det(M) \in \{-1, 1\}$ d'après la Proposition 6.4.

(iii) Si $\det(M) = 1$, déterminer la droite [14]

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Notez e_1 un vecteur directeur de norme 1. Déterminez alors le plan $F^\perp$ et déterminer e_2 et e_3 une BON de ce plan et (e_1, e_2, e_3) est alors une BON de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et vous pouvez conclure par la Proposition 6.6 (i).

(ii) Si $\det(M) = -1$, déterminer la droite [15]

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Notez e_1 un vecteur directeur de norme 1. Déterminez alors le plan $F^\perp$ et déterminer e_2 et e_3 une BON de ce plan et (e_1, e_2, e_3) est alors une BON de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et vous pouvez conclure par la Proposition 6.6 (ii).

► **Remarque** : Pour conclure, au vu des circonstances, pas de panique, vous n'aurez pas à accomplir toute cette procédure tous seuls et vous serez guidés (au moins comme dans le TD 3 ou le DM 2).

14. Ce qui est logique puisque la forme de la matrice attendue dans la base (e_1, e_2, e_3) cherchée impose que $f(e_1) = e_1$, autrement dit que e_1 soit fixé par f et ici on cherche précisément les vecteurs de l'espace fixés par f avec F.

15. Ce qui est logique puisque la forme de la matrice attendue dans la base (e_1, e_2, e_3) cherchée impose que $f(e_1) = -e_1$, autrement dit que e_1 est envoyé sur son opposé par f et ici on cherche précisément les vecteurs de l'espace envoyés sur leur opposé par f avec F.

Chapitre 7

Groupes de symétrie et lien avec la chimie $*$

Ce chapitre est hors-programme mais introduit des notions dans la lignée du chapitre 6 qui seront fondamentale pour vous plus tard en chimie.

7.1 Motivations

Comme présenté en début de chapitre 6, étudier les transformations qui préservent angles et distances et qui laissent une molécule invariante, on parle de l'étude **des symétries** de la molécule, permet d'obtenir des informations sur la molécule en question. En particulier, des molécules de "forme équivalente" ou présentant les mêmes symétries vont partager certaines propriétés relatives à leur structure électronique (par exemple en chimie quantique ou les modes vibrationnels actifs en spectroscopie Raman). Le principe est analogue au fait qu'on puisse déduire des propriétés d'une figure à partir de ses symétries [1] et vous permettra en étudiant ces symétries pour une molécule de déterminer à l'avance et **sans calculs** :

- La présence de moments dipolaires permanents;
- L'activité optique;
- La construction et la classification des orbitales moléculaires;
- Les règles de sélection de transition;
- Le degré de dégénérescence des états.

7.2 Le langage de la théorie des groupes

Ce langage est omniprésent en spectroscopie ou en cristallographie par exemple. Un des plus célèbres livres de cours sur le sujet, écrit par un des plus grands mathématiciens du XXIème siècle [2], était un cours à destination des chimistes [3]. Ce langage est particulièrement adapté pour étudier le niveau de symétrie d'un objet [4]. Par exemple, il paraît assez intuitif qu'un cercle ou une sphère est plus symétrique qu'un carré ou qu'un cube qui sont eux-mêmes plus symétriques qu'une figure complètement quelconque du plan ou de l'espace et on va voir qu'à un objet on peut associer un groupe [5], que l'on appellera son **groupe de symétries** ou **groupe d'isométries** et que plus l'objet possèdera de symétries, plus ce groupe sera gros. Et nous allons voir que les éléments de ce groupes seront précisément des applications linéaires du plan et de l'espace qui préservent angles et distances, soit précisément les applications linéaires étudiées au chapitre précédent [6] !

1. Voir page en début de Chapitre 6.
2. Jean-Pierre Serre, plus jeune médaillé Fields à ce jour!
3. Mais peut être était-il un peu ardu! Il est en général étudié en master de mathématiques fondamentales ou lors de la préparation à l'agrégation externe!
4. Et donc d'une molécule en particulier!
5. Nous allons expliquer ce qu'on entend par groupe dans la suite.
6. Le monde est bien fait!

7.2.1 Introduction à la notion de groupe à travers l'exemple des groupes orthogonaux

7.3 Le groupe de symétrie d'une molécule