Exercice 2 du TD IV

Exercice 2.

Soit k un corps et N un entier naturel.

Exercice 2 du TD IV

Exercice 2.

Soit k un corps et N un entier naturel. On considère l'anneau de polynômes $A = k[X_1, \ldots, X_N]$, un élément $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ de k^N et un élément P de A.

Exercice 2 du TD IV

Exercice 2.

Soit k un corps et N un entier naturel. On considère l'anneau de polynômes $A = k[X_1, \ldots, X_N]$, un élément $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ de k^N et un élément P de A.

Vérifier que l'on définit des idéaux de A en posant

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}.$$

Exercice 2 du TD IV

Exercice 2.

Soit k un corps et N un entier naturel. On considère l'anneau de polynômes $A = k[X_1, \dots, X_N]$, un élément $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ de k^N et un élément P de A.

Vérifier que l'on définit des idéaux de A en posant

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}.$$

Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux étrangers si, et seulement si, $P(\mathbf{a}) \neq 0$.

Exercice 2 du TD IV

Exercice 2.

Soit k un corps et N un entier naturel. On considère l'anneau de polynômes $A = k[X_1, \dots, X_N]$, un élément $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ de k^N et un élément P de A.

Vérifier que l'on définit des idéaux de A en posant

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}.$$

Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux étrangers si, et seulement si, $P(\mathbf{a}) \neq 0$.On rappelle que, par définition, I_1 et I_2 sont des *idéaux étrangers* de A si $I_1 + I_2 = A$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 := (P) = P \cdot A \text{ est un idéal de } A.}$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 := (P) = P \cdot A \text{ est un idéal de } A.}$

C'est clair, par définition.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 := (P) = P \cdot A \text{ est un idéal de } A.}$

C'est clair, par définition.

$\boxed{I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\} \text{ est un idéal de } A.}$

La stabilité par addition est claire car pour tous $Q_1, Q_2 \in I_2$,

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 := (P) = P \cdot A \text{ est un idéal de } A.}$

C'est clair, par définition.

$\boxed{I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\} \text{ est un idéal de } A.}$

La stabilité par addition est claire car pour tous $Q_1, Q_2 \in I_2$,

$(Q_1 + Q_2)(a) = Q_1(a) + Q_2(a) = 0.$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 := (P) = P \cdot A \text{ est un idéal de } A.}$

C'est clair, par définition.

$\boxed{I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\} \text{ est un idéal de } A.}$

La stabilité par addition est claire car pour tous $Q_1, Q_2 \in I_2$,

$(Q_1 + Q_2)(a) = Q_1(a) + Q_2(a) = 0.$

Idem pour l'absorbance car pour tous $R \in A$ et $Q \in I_2$,

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 := (P) = P \cdot A \text{ est un idéal de } A.}$

C'est clair, par définition.

$\boxed{I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\} \text{ est un idéal de } A.}$

La stabilité par addition est claire car pour tous $Q_1, Q_2 \in I_2$,

$(Q_1 + Q_2)(a) = Q_1(a) + Q_2(a) = 0.$

Idem pour l'absorbance car pour tous $R \in A$ et $Q \in I_2$,

$(RQ)(a) = R(a) \times Q(a) = 0.$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 := (P) = P \cdot A \text{ est un idéal de } A.}$

C'est clair, par définition.

$\boxed{I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\} \text{ est un idéal de } A.}$

La stabilité par addition est claire car pour tous $Q_1, Q_2 \in I_2$, $(Q_1 + Q_2)(a) = Q_1(a) + Q_2(a) = 0$.

Idem pour l'absorbance car pour tous $R \in A$ et $Q \in I_2$, $(RQ)(a) = R(a) \times Q(a) = 0$. On peut aussi remarquer qu'il s'agit du noyau du morphisme $\varphi : A \to k$ défini par $Q \mapsto Q(\mathbf{a})$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 + I_2 = A \text{ implique que } P(\mathbf{a}) \neq 0.}$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 + I_2 = A \text{ implique que } P(\mathbf{a}) \neq 0.}$

Dans ce cas, il existe $R \in I_1$ et $Q \in I_2$ tels que $1 = R + Q$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 + I_2 = A \text{ implique que } P(\mathbf{a}) \neq 0.}$

Dans ce cas, il existe $R \in I_1$ et $Q \in I_2$ tels que $1 = R + Q$ et donc il existe $S \in A$ tel que

$$1 = P(\mathbf{a})S(\mathbf{a}) + Q(\mathbf{a})$$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 + I_2 = A \text{ implique que } P(\mathbf{a}) \neq 0.}$

Dans ce cas, il existe $R \in I_1$ et $Q \in I_2$ tels que $1 = R + Q$ et donc il existe $S \in A$ tel que

$$1 = P(\mathbf{a})S(\mathbf{a}) + Q(\mathbf{a}) \overset{Q \in I_2}{=} P(\mathbf{a})S(\mathbf{a}).$$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{I_1 + I_2 = A \text{ implique que } P(\mathbf{a}) \neq 0.}$

Dans ce cas, il existe $R \in I_1$ et $Q \in I_2$ tels que $1 = R + Q$ et donc il existe $S \in A$ tel que

$$1 = P(\mathbf{a})S(\mathbf{a}) + Q(\mathbf{a}) \overset{Q \in I_2}{=} P(\mathbf{a})S(\mathbf{a}).$$

D'où $P(\mathbf{a}) \neq 0$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$ (Je rappelle que $I_1 + I_2 = A \iff 1 \in I_1 + I_2$.)

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$ (Je rappelle que $I_1 + I_2 = A \iff 1 \in I_1 + I_2$.)

Première tentative : L'anneau A étant factoriel, si c'est le cas, il existe un polynôme $Q \in I_2$ premier avec P

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$ **(Je rappelle que $I_1 + I_2 = A \iff 1 \in I_1 + I_2$.)**

Première tentative : L'anneau A étant factoriel, si c'est le cas, il existe un polynôme $Q \in I_2$ premier avec P (c'est même équivalent par Bézout).

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$ (Je rappelle que $I_1 + I_2 = A \iff 1 \in I_1 + I_2$.)

Première tentative : L'anneau A étant factoriel, si c'est le cas, il existe un polynôme $Q \in I_2$ premier avec P (c'est même équivalent par Bézout). Si maintenant $Q \in I_2$ irréductible dans A, alors si P n'est pas premier à Q,

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$ (Je rappelle que $I_1 + I_2 = A \iff 1 \in I_1 + I_2$.)

Première tentative : L'anneau A étant factoriel, si c'est le cas, il existe un polynôme $Q \in I_2$ premier avec P (c'est même équivalent par Bézout). Si maintenant $Q \in I_2$ irréductible dans A, alors si P n'est pas premier à Q, on a nécessairement $Q \mid P$ et $P(\mathbf{a}) = 0$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$ (Je rappelle que $I_1 + I_2 = A \iff 1 \in I_1 + I_2$.)

Première tentative : L'anneau A étant factoriel, si c'est le cas, il existe un polynôme $Q \in I_2$ premier avec P (c'est même équivalent par Bézout). Si maintenant $Q \in I_2$ irréductible dans A, alors si P n'est pas premier à Q, on a nécessairement $Q \mid P$ et $P(\mathbf{a}) = 0$, ce qui est absurde.

Il s'agit donc de trouver $Q \in I_2$ irréductible

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$ (Je rappelle que $I_1 + I_2 = A \iff 1 \in I_1 + I_2$.)

Première tentative : L'anneau A étant factoriel, si c'est le cas, il existe un polynôme $Q \in I_2$ premier avec P (c'est même équivalent par Bézout). Si maintenant $Q \in I_2$ irréductible dans A, alors si P n'est pas premier à Q, on a nécessairement $Q \mid P$ et $P(\mathbf{a}) = 0$, ce qui est absurde.

Il s'agit donc de trouver $Q \in I_2$ irréductible, par exemple $Q = X_1 - a_1$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

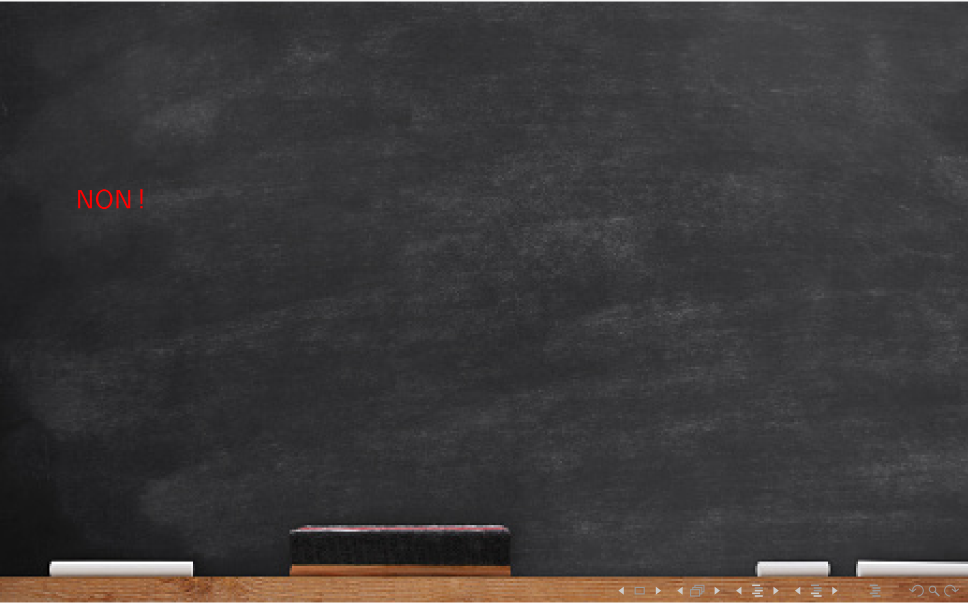
$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$ (Je rappelle que $I_1 + I_2 = A \iff 1 \in I_1 + I_2$.)

Première tentative : L'anneau A étant factoriel, si c'est le cas, il existe un polynôme $Q \in I_2$ premier avec P (c'est même équivalent par Bézout). Si maintenant $Q \in I_2$ irréductible dans A, alors si P n'est pas premier à Q, on a nécessairement $Q \mid P$ et $P(\mathbf{a}) = 0$, ce qui est absurde.

Il s'agit donc de trouver $Q \in I_2$ irréductible, par exemple $Q = X_1 - a_1$.

Ce raisonnement est-il correct ?

Exercice 2 du TD IV



NON !

Exercice 2 du TD IV

NON ! Je rappelle (voir TD III) que la relation de Bézout ne vaut dans un anneau factoriel que s'il est principal !

Exercice 2 du TD IV

NON ! Je rappelle (voir TD III) que la relation de Bézout ne vaut dans un anneau factoriel que s'il est principal ! Ce qui n'est pas le cas de $A = k[X_1, \ldots, X_N]$

Exercice 2 du TD IV

NON ! Je rappelle (voir TD III) que la relation de Bézout ne vaut dans un anneau factoriel que s'il est principal ! Ce qui n'est pas le cas de $A = k[X_1, \ldots, X_N]$ dès que $N > 1$!

Exercice 2 du TD IV

NON ! Je rappelle (voir TD III) que la relation de Bézout ne vaut dans un anneau factoriel que s'il est principal ! Ce qui n'est pas le cas de $A = k[X_1, \ldots, X_N]$ dès que $N > 1$!

Par exemple, $1 \notin (X_1) + (X_2)$ (évaluer en $X_1 = X_2 = 0$).

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Seconde tentative : Mais, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$, et par conséquent

$X_i - a_i \in I_2$ et est irréductible pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Seconde tentative : Mais, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$, et par conséquent

$X_i - a_i \in I_2$ et est irréductible pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.

On va voir que ces polynômes engendrent en réalité I_2.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On va montrer que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On va montrer que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On va montrer que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$. Comme le coefficient dominant de $X_1 - a_1$ est inversible dans A, on peut faire la division euclidienne de Q par $X_1 - a_1$

Exercice 2 du TD IV

Rappel

On peut effectuer la division euclidienne

Exercice 2 du TD IV

Rappel

On peut effectuer la division euclidienne (sans unicité) de P par Q dans $A[X]$ si le coefficient dominant de Q est élément de $A^\times$.

Ici, on a $X_1 - a_1 \in k[X_1, \ldots, X_N] = (k[X_2, \ldots, X_N])[X_1]$

Exercice 2 du TD IV

Rappel

On peut effectuer la division euclidienne (sans unicité) de P par Q dans $A[X]$ si le coefficient dominant de Q est élément de $A^\times$.

Ici, on a $X_1 - a_1 \in k[X_1, \ldots, X_N] = (k[X_2, \ldots, X_N])[X_1]$ et son coefficient dominant est $1 \in k[X_2, \ldots, X_N]^\times = k$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On a en réalité que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$. Comme le coefficient dominant de $X_1 - a_1$ est inversible dans A, on peut faire la division euclidienne de Q par $X_1 - a_1$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On a en réalité que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$.

Comme le coefficient dominant de $X_1 - a_1$ est inversible dans A, on peut faire la division euclidienne de Q par $X_1 - a_1$:

$$\exists B_1 \in A, \exists R_1 \in A, \quad Q = (X_1 - a_1)B_1 + R_1 \quad \deg_{X_1}(R_1) < \deg_{X_1}(X_1 - a_1)$$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On a en réalité que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$. Comme le coefficient dominant de $X_1 - a_1$ est inversible dans A, on peut faire la division euclidienne de Q par $X_1 - a_1$:

$$\exists B_1 \in A, \exists R_1 \in A, \quad Q = (X_1 - a_1)B_1 + R_1 \quad \deg_{X_1}(R_1) < \deg_{X_1}(X_1 - a_1) = 1.$$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On a en réalité que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$. Comme le coefficient dominant de $X_1 - a_1$ est inversible dans A, on peut faire la division euclidienne de Q par $X_1 - a_1$:

$$\exists B_1 \in A, \exists R_1 \in k[X_2, \dots, X_N], \quad Q = (X_1 - a_1)B_1 + R_1.$$

On a alors $R_1(a_2, \dots, a_N) = Q(\mathbf{a}) = 0$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On a en réalité que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$. Comme le coefficient dominant de $X_1 - a_1$ est inversible dans A, on peut faire la division euclidienne de Q par $X_1 - a_1$:

$$\exists B_1 \in A, \exists R_1 \in k[X_2, \dots, X_N], \quad Q = (X_1 - a_1)B_1 + R_1.$$

On a alors $R_1(a_2, \dots, a_N) = Q(\mathbf{a}) = 0$. On peut alors travailler dans $k[X_2, \dots, X_N]$ où $R_1(a_2, \dots, a_N) = 0$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On a en réalité que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$. Comme le coefficient dominant de $X_1 - a_1$ est inversible dans A, on peut faire la division euclidienne de Q par $X_1 - a_1$:

$$\exists B_1 \in A, \exists R_1 \in k[X_2, \dots, X_N], \quad Q = (X_1 - a_1)B_1 + R_1.$$

On a alors $R_1(a_2, \dots, a_N) = Q(\mathbf{a}) = 0$. On peut alors travailler dans $k[X_2, \dots, X_N]$ où $R_1(a_2, \dots, a_N) = 0$ et effectuer la division euclidienne de R_1 par $X_2 - a_2$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

On a en réalité que $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$. Pour le voir, soit $Q \in I_2$. Comme le coefficient dominant de $X_1 - a_1$ est inversible dans A, on peut faire la division euclidienne de Q par $X_1 - a_1$:

$$\exists B_1 \in A, \exists R_1 \in k[X_2, \ldots, X_N], \quad Q = (X_1 - a_1)B_1 + R_1.$$

On a alors $R_1(a_2, \ldots, a_N) = Q(\mathbf{a}) = 0$. On peut alors travailler dans $k[X_2, \ldots, X_N]$ où $R_1(a_2, \ldots, a_N) = 0$ et effectuer la division euclidienne de R_1 par $X_2 - a_2$:

$$\exists B_2 \in k[X_2, \ldots, X_N], \exists R_2 \in k[X_3, \ldots, X_N], \quad R_1 = (X_2 - a_2)B_2 + R_2.$$

Exercice 2 du TD IV

$\boxed{\text{On montre que } I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle.}$

On a alors

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + (X_2 - a_2)B_2 + R_2$$

avec $R_2 \in k[X_3, \ldots, X_N]$ annulant $(a_3, \ldots, a_N)$

Exercice 2 du TD IV

$\boxed{\text{On montre que } I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle.}$

On a alors

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + (X_2 - a_2)B_2 + R_2$$

avec $R_2 \in k[X_3, \dots, X_N]$ annulant $(a_3, \dots, a_N)$ et une récurrence fournit $B_1, \dots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

Exercice 2 du TD IV

$\boxed{\text{On montre que } I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle.}$

On a alors

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + (X_2 - a_2)B_2 + R_2$$

avec $R_2 \in k[X_3, \dots, X_N]$ annulant $(a_3, \dots, a_N)$ et une récurrence fournit $B_1, \dots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x.$$

Exercice 2 du TD IV

$\boxed{\text{On montre que } I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle.}$

On a alors

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + (X_2 - a_2)B_2 + R_2$$

avec $R_2 \in k[X_3, \dots, X_N]$ annulant $(a_3, \dots, a_N)$ et une récurrence fournit $B_1, \dots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x.$$

Comme $Q(\mathbf{a}) = 0$, on a $x = 0$

Exercice 2 du TD IV

$\boxed{\text{On montre que } I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle.}$

On a alors

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + (X_2 - a_2)B_2 + R_2$$

avec $R_2 \in k[X_3, \ldots, X_N]$ annulant $(a_3, \ldots, a_N)$ et une récurrence fournit $B_1, \ldots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x.$$

Comme $Q(\mathbf{a}) = 0$, on a $x = 0$ et $\boxed{Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N.}$

Exercice 2 du TD IV

$\boxed{\text{On montre que } I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle.}$

On a alors

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + (X_2 - a_2)B_2 + R_2$$

avec $R_2 \in k[X_3, \dots, X_N]$ annulant $(a_3, \dots, a_N)$ et une récurrence fournit $B_1, \dots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x.$$

Comme $Q(\mathbf{a}) = 0$, on a $x = 0$ et $\boxed{Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N.}$ D'où $I_2 \subseteq \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$.

Exercice 2 du TD IV

$\boxed{\text{On montre que } I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N\rangle.}$

On a alors

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + (X_2 - a_2)B_2 + R_2$$

avec $R_2 \in k[X_3, \dots, X_N]$ annulant $(a_3, \dots, a_N)$ et une récurrence fournit $B_1, \dots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x.$$

Comme $Q(\mathbf{a}) = 0$, on a $x = 0$ et $\boxed{Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N.}$ D'où $I_2 \subseteq \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N\rangle$. Réciproquement, $X_i - a_i \in I_2$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$

Exercice 2 du TD IV

$\boxed{\text{On montre que } I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle.}$

On a alors

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + (X_2 - a_2)B_2 + R_2$$

avec $R_2 \in k[X_3, \ldots, X_N]$ annulant $(a_3, \ldots, a_N)$ et une récurrence fournit $B_1, \ldots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x.$$

Comme $Q(\mathbf{a}) = 0$, on a $x = 0$ et $\boxed{Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N.}$ D'où $I_2 \subseteq \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$. Réciproquement, $X_i - a_i \in I_2$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ donc $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \dots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \ldots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle \cong k.$$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \ldots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle \cong k.$$

En effet, on a un morphisme $k \to A \to A/I_2$ injectif

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \ldots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle \cong k.$$

En effet, on a un morphisme $k \to A \to A/I_2$ injectif (car un élément du noyau est dans k et dans I_2).

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \ldots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle \cong k.$$

En effet, on a un morphisme $k \to A \to A/I_2$ injectif (car un élément du noyau est dans k et dans I_2). Ce qu'on vient de voir fournit que pour tout $\overline{Q} \in A/I_2$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \ldots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \ldots, X_N - a_N \rangle \cong k.$$

En effet, on a un morphisme $k \to A \to A/I_2$ injectif (car un élément du noyau est dans k et dans I_2). Ce qu'on vient de voir fournit que pour tout $\overline{Q} \in A/I_2$, il existe $B_1, \ldots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \dots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle \cong k.$$

En effet, on a un morphisme $k \to A \to A/I_2$ injectif (car un élément du noyau est dans k et dans I_2). Ce qu'on vient de voir fournit que pour tout $\overline{Q} \in A/I_2$, il existe $B_1, \dots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x$$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \dots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle \cong k.$$

En effet, on a un morphisme $k \to A \to A/I_2$ injectif (car un élément du noyau est dans k et dans I_2). Ce qu'on vient de voir fournit que pour tout $\overline{Q} \in A/I_2$, il existe $B_1, \dots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x$$

soit $\overline{Q} = \overline{x}$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

On a $I_2 = \langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle$ et en fait

$$A/I_2 = k[X_1, \dots, X_N]/\langle X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N \rangle \cong k.$$

En effet, on a un morphisme $k \to A \to A/I_2$ injectif (car un élément du noyau est dans k et dans I_2). Ce qu'on vient de voir fournit que pour tout $\overline{Q} \in A/I_2$, il existe $B_1, \dots, B_N \in A$ et $x \in k$ tels que

$$Q = (X_1 - a_1)B_1 + \cdots (X_N - a_N)B_N + x$$

soit $\overline{Q} = \overline{x}$, ce qui fournit la surjectivité.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Ainsi, I_2 est un idéal maximal

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Ainsi, I_2 est un idéal maximal et l'hypothèse $P(\mathbf{a}) \neq 0$ équivaut à $P \notin I_2$

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Ainsi, I_2 est un idéal maximal et l'hypothèse $P(\mathbf{a}) \neq 0$ équivaut à $P \notin I_2$ de sorte que $I_2 \subsetneq I_1 + I_2$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Ainsi, I_2 est un idéal maximal et l'hypothèse $P(\mathbf{a}) \neq 0$ équivaut à $P \notin I_2$ de sorte que $I_2 \subsetneq I_1 + I_2$. Par maximalité, on obtient que $I_1 + I_2 = A$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Alternative : Le noyau du morphisme de k-algèbres $A \longrightarrow k$ donné par

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Alternative : Le noyau du morphisme de k-algèbres $A \longrightarrow k$ donné par $Q \longmapsto Q(\mathbf{a})$ est I_2.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Alternative : Le noyau du morphisme de k-algèbres $A \longrightarrow k$ donné par $Q \longmapsto Q(\mathbf{a})$ est I_2. On conclut par surjectivité

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

<u>*Alternative :*</u> Le noyau du morphisme de k-algèbres $A \longrightarrow k$ donné par $Q \longmapsto Q(\mathbf{a})$ est I_2. On conclut par surjectivité (tout $x \in k$ est image du polynôme constant égale à x) et théorème de factorisation que $A/I_2 \cong k$.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \dots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Alternative : Le noyau du morphisme de k-algèbres $A \longrightarrow k$ donné par $Q \longmapsto Q(\mathbf{a})$ est I_2. On conclut par surjectivité (tout $x \in k$ est image du polynôme constant égale à x) et théorème de factorisation que $A/I_2 \cong k$.

Ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre.

Exercice 2 du TD IV

$$I_1 := (P) = P \cdot A \quad \text{et} \quad I_2 := \{Q \in k[X_1, \ldots, X_N] \mid Q(\mathbf{a}) = 0\}$$

$\boxed{P(\mathbf{a}) \neq 0 \text{ implique que } I_1 + I_2 = A.}$

Alternative : Le noyau du morphisme de k-algèbres $A \longrightarrow k$ donné par $Q \longmapsto Q(\mathbf{a})$ est I_2. On conclut par surjectivité (tout $x \in k$ est image du polynôme constant égale à x) et théorème de factorisation que $A/I_2 \cong k$. Ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre.

Ou on écrit $P \in A$ sous la forme $P + (P - P(a))$ avec $P \in I_1$ et $P - P(a) \in I_2$.

Exercice 2 du TD IV - Compléments

- On verra dans l'exercice 9 que si k est *algébriquement clos*, alors tout idéal maximal de A est de cette forme ;
- Pour des polynômes $P_1, \ldots, P_r \in A$, le sous-ensemble $V(\mathbf{P})$ de k^N défini par $P_1 = \cdots = P_r = 0$

Exercice 2 du TD IV - Compléments

- On verra dans l'exercice 9 que si k est *algébriquement clos*, alors tout idéal maximal de A est de cette forme ;
- Pour des polynômes $P_1, \ldots, P_r \in A$, le sous-ensemble $V(\mathbf{P})$ de k^N défini par $P_1 = \cdots = P_r = 0$ s'appelle *une variété algébrique affine*.

Exercice 2 du TD IV - Compléments

- On verra dans l'exercice 9 que si k est *algébriquement clos*, alors tout idéal maximal de A est de cette forme ;
- Pour des polynômes $P_1, \ldots, P_r \in A$, le sous-ensemble $V(\mathbf{P})$ de k^N défini par $P_1 = \cdots = P_r = 0$ s'appelle *une variété algébrique affine*. Une idée fondamentale de la *géométrie algébrique* est d'associer à $V(\mathbf{P})$ l'idéal

Exercice 2 du TD IV - Compléments

- On verra dans l'exercice 9 que si k est *algébriquement clos*, alors tout idéal maximal de A est de cette forme ;
- Pour des polynômes $P_1, \dots, P_r \in A$, le sous-ensemble $V(\mathbf{P})$ de k^N défini par $P_1 = \cdots = P_r = 0$ s'appelle *une variété algébrique affine*. Une idée fondamentale de la *géométrie algébrique* est d'associer à $V(\mathbf{P})$ l'idéal

$$I(V(\mathbf{P})) = \{Q \in A \mid \forall \mathbf{x} \in V(\mathbf{P}), \quad Q(\mathbf{x}) = 0\}$$

Exercice 2 du TD IV - Compléments

- On verra dans l'exercice 9 que si k est *algébriquement clos*, alors tout idéal maximal de A est de cette forme ;
- Pour des polynômes $P_1, \dots, P_r \in A$, le sous-ensemble $V(\mathbf{P})$ de k^N défini par $P_1 = \cdots = P_r = 0$ s'appelle *une variété algébrique affine*. Une idée fondamentale de la *géométrie algébrique* est d'associer à $V(\mathbf{P})$ l'idéal

$$I(V(\mathbf{P})) = \{Q \in A \mid \forall \mathbf{x} \in V(\mathbf{P}), \quad Q(\mathbf{x}) = 0\}$$

et une algèbre $A/I(V(\mathbf{P}))$ et de relier les propriétés *géométriques* de $V(\mathbf{P})$ et les propriétés *algébriques* de $I(V(\mathbf{P}))$.

Exercice 2 du TD IV - Compléments

- On verra dans l'exercice 9 que si k est *algébriquement clos*, alors tout idéal maximal de A est de cette forme ;
- Pour des polynômes $P_1, \dots, P_r \in A$, le sous-ensemble $V(\mathbf{P})$ de k^N défini par $P_1 = \cdots = P_r = 0$ s'appelle *une variété algébrique affine*. Une idée fondamentale de la *géométrie algébrique* est d'associer à $V(\mathbf{P})$ l'idéal

$$I(V(\mathbf{P})) = \{Q \in A \mid \forall \mathbf{x} \in V(\mathbf{P}), \quad Q(\mathbf{x}) = 0\}$$

et une algèbre $A/I(V(\mathbf{P}))$ et de relier les propriétés *géométriques* de $V(\mathbf{P})$ et les propriétés *algébriques* de $I(V(\mathbf{P}))$.

(voir par exemple le chapitre I du Perrin *Géométrie algébrique*

Exercice 2 du TD IV - Compléments

- On verra dans l'exercice 9 que si k est *algébriquement clos*, alors tout idéal maximal de A est de cette forme ;
- Pour des polynômes $P_1, \dots, P_r \in A$, le sous-ensemble $V(\mathbf{P})$ de k^N défini par $P_1 = \dots = P_r = 0$ s'appelle *une variété algébrique affine*. Une idée fondamentale de la *géométrie algébrique* est d'associer à $V(\mathbf{P})$ l'idéal

$$I(V(\mathbf{P})) = \{Q \in A \mid \forall \mathbf{x} \in V(\mathbf{P}), \quad Q(\mathbf{x}) = 0\}$$

et une algèbre $A/I(V(\mathbf{P}))$ et de relier les propriétés *géométriques* de $V(\mathbf{P})$ et les propriétés *algébriques* de $I(V(\mathbf{P}))$.

(voir par exemple le chapitre I du Perrin *Géométrie algébrique* et le lien avec le radical d'un idéal via le Nullstellensatz)

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

C'est du cours si A est **intègre**,

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

C'est du cours si A est **intègre**, en raisonnant sur le degré on voit qu'un élément de $A[X]^\times$ est

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

C'est du cours si A est **intègre**, en raisonnant sur le degré on voit qu'un élément de $A[X]^\times$ est constant

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

C'est du cours si A est **intègre**, en raisonnant sur le degré on voit qu'un élément de $A[X]^\times$ est constant et donc inversible dans A.

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^{\times} \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

C'est du cours si A est **intègre**, en raisonnant sur le degré on voit qu'un élément de $A[X]^{\times}$ est constant et donc inversible dans A. La réciproque étant évidente, on trouve que $A[X]^{\times} = A^{\times}$!

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

C'est du cours si A est **intègre**, en raisonnant sur le degré on voit qu'un élément de $A[X]^\times$ est constant et donc inversible dans A. La réciproque étant évidente, on trouve que $A[X]^\times = A^\times$!

Que se passe-t-il si A n'est plus supposé intègre ?

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

C'est du cours si A est **intègre**, en raisonnant sur le degré on voit qu'un élément de $A[X]^\times$ est constant et donc inversible dans A. La réciproque étant évidente, on trouve que $A[X]^\times = A^\times$!

Que se passe-t-il si A n'est plus supposé intègre ?

Noter qu'on perd la propriété que $\deg(PQ) = \deg P + \deg(Q)$.

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

C'est du cours si A est **intègre**, en raisonnant sur le degré on voit qu'un élément de $A[X]^\times$ est constant et donc inversible dans A. La réciproque étant évidente, on trouve que $A[X]^\times = A^\times$!

Que se passe-t-il si A n'est plus supposé intègre ?

Noter qu'on perd la propriété que $\deg(PQ) = \deg P + \deg(Q)$.

Exemple : $P = 2X$ et $Q = 2$ dans $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})[X]$.

Exercice 4 du TD IV

Calculer $A[X]^\times$ lorsque A est un anneau quelconque.

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

Soit

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]^\times, \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0.$$

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

Soit

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]^\times, \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0.$$

Il existe donc $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i \in A[X]$ avec $b_e \neq 0$

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

Soit

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]^\times, \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0.$$

Il existe donc $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i \in A[X]$ avec $b_e \neq 0$ tel que $PQ = 1$.

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

Soit

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]^\times, \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0.$$

Il existe donc $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i \in A[X]$ avec $b_e \neq 0$ tel que $PQ = 1$.

Il vient $a_0 b_0 = 1$

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

Soit

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]^\times, \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0.$$

Il existe donc $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i \in A[X]$ avec $b_e \neq 0$ tel que $PQ = 1$.

Il vient $a_0 b_0 = 1$ et

$$\forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

Exercice 4 du TD IV

$\boxed{\text{Calculer } A[X]^\times \text{ lorsque } A \text{ est un anneau quelconque.}}$

Soit

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]^\times, \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0.$$

Il existe donc $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i \in A[X]$ avec $b_e \neq 0$ tel que $PQ = 1$.

Il vient $a_0 b_0 = 1$ et

$$\forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

où l'on pose $a_j = 0$ et $b_j = 0$ si j dépasse le degré de P ou le degré de Q.

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a + x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible.

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a + x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1 + a^{-1}x) \sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a+x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1 + a^{-1}x) \sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1 + a^{-1}x$ est inversible

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a+x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1 + a^{-1}x) \sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1 + a^{-1}x$ est inversible et $a+x$ aussi.

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a + x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1 + a^{-1}x) \sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1 + a^{-1}x$ est inversible et $a + x$ aussi.

Ici, $a_0 \in A^\times \subseteq A[X]^\times$

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a+x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1 + a^{-1}x) \sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1 + a^{-1}x$ est inversible et $a + x$ aussi.

Ici, $a_0 \in A^\times \subseteq A[X]^\times$ et donc de proche en proche, si a_1 est nilpotent dans A,

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a + x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1 + a^{-1}x) \sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1 + a^{-1}x$ est inversible et $a + x$ aussi.

Ici, $a_0 \in A^\times \subseteq A[X]^\times$ et donc de proche en proche, si a_1 est nilpotent dans A, $a_1 X$ l'est dans $A[X]$ donc $a_0 + a_1 X \in A[X]^\times$.

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a+x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1+a^{-1}x)\sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1+a^{-1}x$ est inversible et $a+x$ aussi.

Ici, $a_0 \in A^\times \subseteq A[X]^\times$ et donc de proche en proche, si a_1 est nilpotent dans A, a_1X l'est dans $A[X]$ donc $a_0 + a_1X \in A[X]^\times$. Si maintenant, a_2 est nilpotent dans A,

Exercice 4 du TD IV

<u>*Intuition :*</u> On a vu dans le TD III que $a+x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$\left(1 + a^{-1}x\right) \sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1 + a^{-1}x$ est inversible et $a + x$ aussi.

Ici, $a_0 \in A^\times \subseteq A[X]^\times$ et donc de proche en proche, si a_1 est nilpotent dans A, a_1X l'est dans $A[X]$ donc $a_0 + a_1X \in A[X]^\times$. Si maintenant, a_2 est nilpotent dans A, alors de même $a_0 + a_1X + a_2X^2 \in A[X]^\times$.

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a+x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$\left(1 + a^{-1}x\right) \sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1 + a^{-1}x$ est inversible et $a + x$ aussi.

Ici, $a_0 \in A^\times \subseteq A[X]^\times$ et donc de proche en proche, si a_1 est nilpotent dans A, $a_1 X$ l'est dans $A[X]$ donc $a_0 + a_1 X \in A[X]^\times$. Si maintenant, a_2 est nilpotent dans A, alors de même $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in A[X]^\times$. De proche en proche, $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]^\times$.

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a+x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1+a^{-1}x)\sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1+a^{-1}x$ est inversible et $a+x$ aussi.

Ici, $a_0 \in A^\times \subseteq A[X]^\times$ et donc de proche en proche, si a_1 est nilpotent dans A, a_1X l'est dans $A[X]$ donc $a_0 + a_1X \in A[X]^\times$. Si maintenant, a_2 est nilpotent dans A, alors de même $a_0 + a_1X + a_2X^2 \in A[X]^\times$. De proche en proche, $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_iX^i \in A[X]^\times$. Si $a_0 \in A^\times$ et $a_2, \ldots, a_d$ sont des éléments nilpotents de A, alors P est inversible.

Exercice 4 du TD IV

Intuition : On a vu dans le TD III que $a+x$ avec $a \in A^\times$ et x nilpotent est inversible. En effet, si $x^n = 0$, alors

$$(1+a^{-1}x)\sum_{i=0}^{n-1} a^{-i}x^i = 1$$

si bien que $1+a^{-1}x$ est inversible et $a+x$ aussi.

Ici, $a_0 \in A^\times \subseteq A[X]^\times$ et donc de proche en proche, si a_1 est nilpotent dans A, a_1X l'est dans $A[X]$ donc $a_0 + a_1X \in A[X]^\times$. Si maintenant, a_2 est nilpotent dans A, alors de même $a_0 + a_1X + a_2X^2 \in A[X]^\times$. De proche en proche, $P = \sum_{i=0}^{d} a_iX^i \in A[X]^\times$. Si $a_0 \in A^\times$ et $a_2, \dots, a_d$ sont des éléments nilpotents de A, alors P est inversible.Montrons que la réciproque vaut.

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

On a envie de regarder le terme $d + e$

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

On a envie de regarder le terme $d+e$ qui fournit $a_d b_e = 0$.

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

On a envie de regarder le terme $d + e$ qui fournit $a_d b_e = 0$. Puis le terme $d + e - 1$

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

On a envie de regarder le terme $d+e$ qui fournit $a_d b_e = 0$. Puis le terme $d+e-1$ qui fournit

$$a_d b_{e-1} + a_{d-1} b_e = 0.$$

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

On a envie de regarder le terme $d+e$ qui fournit $a_d b_e = 0$. Puis le terme $d+e-1$ qui fournit

$$a_d b_{e-1} + a_{d-1} b_e = 0.$$

Multipliant par a_d,

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

On a envie de regarder le terme $d + e$ qui fournit $a_d b_e = 0$. Puis le terme $d + e - 1$ qui fournit

$$a_d b_{e-1} + a_{d-1} b_e = 0.$$

Multipliant par a_d, il vient (A commutatif)

$$a_d^2 b_{e-1} + a_{d-1} a_d b_e \overset{a_d b_e = 0}{=} a_d^2 b_{e-1} = 0.$$

Exercice 4 du TD IV

$$P=\sum_{i=0}^{d}a_iX^i,\quad Q=\sum_{i=0}^{e}b_iX^i,\quad a_0b_0=1\quad\text{et}\quad\forall i\geqslant 1,\quad\sum_{k=0}^{i}a_kb_{i-k}=0$$

On a envie de regarder le terme $d+e$ qui fournit $a_db_e=0$. Puis le terme $d+e-1$ qui fournit

$$a_db_{e-1}+a_{d-1}b_e=0.$$

Multipliant par a_d, il vient (A commutatif)

$$a_d^2b_{e-1}+a_{d-1}a_db_e\overset{a_db_e=0}{=}a_d^2b_{e-1}=0.$$

Pour le terme $d+e-2$, on a $a_db_{e-2}+a_{d-1}b_{e-1}+a_{d-2}b_e=0$

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

On a envie de regarder le terme $d+e$ qui fournit $a_d b_e = 0$. Puis le terme $d+e-1$ qui fournit

$$a_d b_{e-1} + a_{d-1} b_e = 0.$$

Multipliant par a_d, il vient (A commutatif)

$$a_d^2 b_{e-1} + a_{d-1} a_d b_e \overset{a_d b_e = 0}{=} a_d^2 b_{e-1} = 0.$$

Pour le terme $d+e-2$, on a $a_d b_{e-2} + a_{d-1} b_{e-1} + a_{d-2} b_e = 0$ et multiplier par a_d^2 fournit $a_d^3 b_{e-2} = 0$.

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

Une récurrence immédiate fournit $a_d^e b_0 = 0$.

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

Une récurrence immédiate fournit $a_d^e b_0 = 0$. Mais $a_0 b_0 = 1$ donc

$b_0 \in A^\times$ et

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

Une récurrence immédiate fournit $a_d^e b_0 = 0$. Mais $a_0 b_0 = 1$ donc $b_0 \in A^\times$ et $a_d^e = 0$ si bien que a_d est nilpotent.

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

Une récurrence immédiate fournit $a_d^e b_0 = 0$. Mais $a_0 b_0 = 1$ donc $b_0 \in A^\times$ et $a_d^e = 0$ si bien que a_d est nilpotent.

Puisque P est inversible par hypothèse et a_d nilpotent,

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

Une récurrence immédiate fournit $a_d^e b_0 = 0$. Mais $a_0 b_0 = 1$ donc $b_0 \in A^\times$ et $a_d^e = 0$ si bien que a_d est nilpotent.

Puisque P est inversible par hypothèse et a_d nilpotent, on a vu que $P - a_d X^d \in A[X]^\times$ de degré $\leqslant d - 1$

Exercice 4 du TD IV

$$P=\sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q=\sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

Une récurrence immédiate fournit $a_d^e b_0 = 0$. Mais $a_0 b_0 = 1$ donc $b_0 \in A^\times$ et $a_d^e = 0$ si bien que a_d est nilpotent.

Puisque P est inversible par hypothèse et a_d nilpotent, on a vu que $P - a_d X^d \in A[X]^\times$ de degré $\leqslant d-1$ et une récurrence sur le degré permet de conclure.

Exercice 4 du TD IV

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \quad Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i, \quad a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0$$

Une récurrence immédiate fournit $a_d^e b_0 = 0$. Mais $a_0 b_0 = 1$ donc $b_0 \in A^\times$ et $a_d^e = 0$ si bien que a_d est nilpotent.

Puisque P est inversible par hypothèse et a_d nilpotent, on a vu que $P - a_d X^d \in A[X]^\times$ de degré $\leqslant d-1$ et une récurrence sur le degré permet de conclure.

Finalement,

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]^\times \iff a_0 \in A^\times \quad \text{et} \quad a_1, \dots, a_d \in \mathrm{Nil}(A).}$$

Exercice 4 du TD IV

Soit B un anneau et A un sous-anneau de B.

Exercice 4 du TD IV

Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$.

Exercice 4 du TD IV

Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$. On dit que b est *entier* sur A

Exercice 4 du TD IV

Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$. On dit que b est *entier* sur A s'il vérifie une équation unitaire :

$$b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in A.$$

Exercice 4 du TD IV

Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$. On dit que b est *entier* sur A s'il vérifie une équation unitaire :

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in A.$$

Un anneau intègre est dit *intégralement clos*

Exercice 4 du TD IV

Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$. On dit que b est *entier* sur A s'il vérifie une équation unitaire :

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in A.$$

Un anneau intègre est dit *intégralement clos* si pour tout $x \in K = \mathrm{Frac}(A)$, si x est entier sur A alors $x \in A$.

Exercice 4 du TD IV

Soit B un anneau et A un sous-anneau de B. Soit $b \in B$. On dit que b est *entier* sur A s'il vérifie une équation unitaire :

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in A.$$

Un anneau intègre est dit *intégralement clos* si pour tout $x \in K = \mathrm{Frac}(A)$, si x est entier sur A alors $x \in A$.

Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ **unitaire tel que** $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ **unitaire tel que** $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel.

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel. Soient $x \in \mathrm{Frac}(A)$ et

$P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$.

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel. Soient $x \in \mathrm{Frac}(A)$ et
$P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$. On écrit $x = \frac{p}{q}$
avec $p \in A$, $q \in A \setminus \{0\}$ premiers entre eux.

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel. Soient $x \in \mathrm{Frac}(A)$ et $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in A$, $q \in A \setminus \{0\}$ premiers entre eux. On a alors de $P(x) = 0$ en chassant les dénominateurs que

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel. Soient $x \in \mathrm{Frac}(A)$ et $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in A$, $q \in A \setminus \{0\}$ premiers entre eux. On a alors de $P(x) = 0$ en chassant les dénominateurs que

$$p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - qa_{n-2}p^{n-2} - \cdots - q^{n-1}a_0\right).$$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel. Soient $x \in \mathrm{Frac}(A)$ et $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in A$, $q \in A \setminus \{0\}$ premiers entre eux. On a alors de $P(x) = 0$ en chassant les dénominateurs que

$$p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - qa_{n-2}p^{n-2} - \cdots - q^{n-1}a_0\right).$$

Il vient que $q \mid p^n$,

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel. Soient $x \in \mathrm{Frac}(A)$ et $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in A$, $q \in A \setminus \{0\}$ premiers entre eux. On a alors de $P(x) = 0$ en chassant les dénominateurs que

$$p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - qa_{n-2}p^{n-2} - \cdots - q^{n-1}a_0\right).$$

Il vient que $q \mid p^n$,donc $q \in A^\times$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel. Soient $x \in \mathrm{Frac}(A)$ et $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in A$, $q \in A \setminus \{0\}$ premiers entre eux. On a alors de $P(x) = 0$ en chassant les dénominateurs que

$$p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - qa_{n-2}p^{n-2} - \cdots - q^{n-1}a_0\right).$$

Il vient que $q \mid p^n$,donc $q \in A^\times$ et $x = \frac{p}{q} \in A$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\text{Montrer qu'un anneau factoriel } A \text{ est intégralement clos.}}$

Soit A un anneau factoriel. Soient $x \in \mathrm{Frac}(A)$ et $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in A$, $q \in A \setminus \{0\}$ premiers entre eux. On a alors de $P(x) = 0$ en chassant les dénominateurs que

$$p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - qa_{n-2}p^{n-2} - \cdots - q^{n-1}a_0\right).$$

Il vient que $q \mid p^n$,donc $q \in A^\times$ et $x = \frac{p}{q} \in A$ et A est intégralement clos.

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ **unitaire tel que** $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

$\boxed{\text{Montrer que si } d \equiv 1 \pmod 4\text{, alors } \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \text{ n'est pas intégralement clos.}}$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \text{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

$\boxed{\text{Montrer que si } d \equiv 1 \pmod 4 \text{, alors } \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \text{ n'est pas intégralement clos.}}$

Il s'agit de trouver $x \in \text{Frac}(\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right]) \setminus \mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ tel qu'il existe $P \in (\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right])[X]$ unitaire tel $P(x) = 0$.

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X] \quad \text{unitaire tel que} \quad P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ **unitaire tel que** $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

$\boxed{\text{Montrer que si } d \equiv 1 \pmod 4 \text{, alors } \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \text{ n'est pas intégralement clos.}}$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ **unitaire tel que** $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

$\boxed{\text{Montrer que si } d \equiv 1 \pmod 4\text{, alors } \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \text{ n'est pas intégralement clos.}}$

L'énoncé suggère de regarder $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}[\sqrt{d}]) \setminus (\mathbf{Z}[\sqrt{d}])$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ **unitaire tel que** $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

Montrer que si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas intégralement clos.

L'énoncé suggère de regarder $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}[\sqrt{d}]) \setminus (\mathbf{Z}[\sqrt{d}])$ (car $(1, \sqrt{d})$ est $\mathbf{Q}$-libre car d n'est pas un carré)

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

Montrer que si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas intégralement clos.

L'énoncé suggère de regarder $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}[\sqrt{d}]) \setminus (\mathbf{Z}[\sqrt{d}])$ (car $(1, \sqrt{d})$ est $\mathbf{Q}$-libre car d n'est pas un carré) qui annule $X^2 - X - \frac{d-1}{4} \in \mathbf{Z}[X] \subseteq (\mathbf{Z}[\sqrt{d}])[X]$

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A)$, $(\exists P \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0)$ $\Rightarrow$ $x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

$\boxed{\text{Montrer que si } d \equiv 1 \pmod 4 \text{, alors } \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \text{ n'est pas intégralement clos.}}$

L'énoncé suggère de regarder $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}[\sqrt{d}]) \setminus (\mathbf{Z}[\sqrt{d}])$ (car $(1, \sqrt{d})$ est $\mathbf{Q}$-libre car d n'est pas un carré) qui annule $X^2 - X - \frac{d-1}{4} \in \mathbf{Z}[X] \subseteq (\mathbf{Z}[\sqrt{d}])[X]$ (car $d \equiv 1 \pmod 4$).

Ainsi, si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas intégralement clos

Exercice 4 du TD IV

Intégralement clos : $\forall x \in \mathrm{Frac}(A), \quad (\exists P \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier sans facteur carré non nul. On pose :

$$\mathbf{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

$\boxed{\text{Montrer que si } d \equiv 1 \pmod 4, \text{ alors } \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \text{ n'est pas intégralement clos.}}$

L'énoncé suggère de regarder $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}[\sqrt{d}]) \setminus (\mathbf{Z}[\sqrt{d}])$ (car $(1, \sqrt{d})$ est $\mathbf{Q}$-libre car d n'est pas un carré) qui annule $X^2 - X - \frac{d-1}{4} \in \mathbf{Z}[X] \subseteq (\mathbf{Z}[\sqrt{d}])[X]$ (car $d \equiv 1 \pmod 4$).

Ainsi, si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ n'est pas intégralement clos, et en particulier pas factoriel.

Exercice 4 du TD IV

Ce polynôme vient de l'idée suivante (qui sera plus précise après le chapitre de théorie de Galois) :

Exercice 4 du TD IV

Ce polynôme vient de l'idée suivante (qui sera plus précise après le chapitre de théorie de Galois) : tout polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ annulant α

Exercice 4 du TD IV

Ce polynôme vient de l'idée suivante (qui sera plus précise après le chapitre de théorie de Galois) : tout polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ annulant α annule aussi $\overline{\alpha} = \frac{1-\sqrt{d}}{2}$

Exercice 4 du TD IV

Ce polynôme vient de l'idée suivante (qui sera plus précise après le chapitre de théorie de Galois) : tout polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ annulant α annule aussi $\overline{\alpha} = \frac{1-\sqrt{d}}{2}$ (penser au cas de $i = \sqrt{-1}$)

Exercice 4 du TD IV

Ce polynôme vient de l'idée suivante (qui sera plus précise après le chapitre de théorie de Galois) : tout polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ annulant α annule aussi $\overline{\alpha} = \frac{1-\sqrt{d}}{2}$ (penser au cas de $i = \sqrt{-1}$) et $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - X - \frac{d-1}{4}$.

Exercice 4 du TD IV - Compléments

On peut montrer plus généralement que

Exercice 4 du TD IV - Compléments

On peut montrer plus généralement que

- Si $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ sans facteur carré, alors l'anneau $\mathcal{O}_d = \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ est intégralement clos (mais pas toujours factoriel comme en témoigne le cas $d = -5$) ;

Exercice 4 du TD IV - Compléments

On peut montrer plus généralement que

- Si $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ sans facteur carré, alors l'anneau $\mathcal{O}_d = \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ est intégralement clos (mais pas toujours factoriel comme en témoigne le cas $d = -5$) ;
- Si $d \equiv 1 \pmod 4$ sans facteur carré, alors l'anneau $\mathcal{O}_d = \mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ est intégralement clos (mais pas toujours factoriel).

Exercice 4 du TD IV - Compléments

On peut montrer plus généralement que

- Si $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ sans facteur carré, alors l'anneau $\mathcal{O}_d = \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ est intégralement clos (mais pas toujours factoriel comme en témoigne le cas $d = -5$) ;
- Si $d \equiv 1 \pmod 4$ sans facteur carré, alors l'anneau $\mathcal{O}_d = \mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ est intégralement clos (mais pas toujours factoriel). On a déjà rencontré le cas $d = -19$.

Exercice 4 du TD IV - Compléments

On peut montrer plus généralement que

- Si $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ sans facteur carré, alors l'anneau $\mathcal{O}_d = \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ est intégralement clos (mais pas toujours factoriel comme en témoigne le cas $d = -5$) ;
- Si $d \equiv 1 \pmod 4$ sans facteur carré, alors l'anneau $\mathcal{O}_d = \mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ est intégralement clos (mais pas toujours factoriel). On a déjà rencontré le cas $d = -19$.

Ces anneaux $\mathcal{O}_d$ sont très important en théorie des nombres et sont des exemples d'*anneaux d'entiers* des *corps quadratiques* $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

Exercice 5 du TD IV

Exercice 5.

Soient K un corps et $A = K[X, Y]$.

Exercice 5.

Soient K un corps et $A = K[X, Y]$. On note B la sous-algèbre de A engendrée par les XY^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 5 du TD IV

Exercice 5.

Soient K un corps et $A = K[X, Y]$. On note B la sous-algèbre de A engendrée par les XY^n pour $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que si $Q(X, Y)$ est dans B, alors $Q(0, Y)$ est un polynôme constant.
2. Soit $r \in \mathbf{N}^{\times}$. Comparer les idéaux de B engendrés par $(X, XY, \ldots, XY^r)$ et $(X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1})$.
3. La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Montrer que si $Q(X, Y)$ est dans B, alors $Q(0, Y)$ est un polynôme constant.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

$\boxed{\text{Montrer que si } Q(X,Y) \text{ est dans } B, \text{ alors } Q(0,Y) \text{ est un polynôme constant.}}$

Par définition, Q est un polynôme en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

$\boxed{\text{Montrer que si } Q(X,Y) \text{ est dans } B, \text{ alors } Q(0,Y) \text{ est un polynôme constant.}}$

Par définition, Q est un polynôme en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$.Autrement dit, Q est une combinaison linéaire finie de monômes en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$ (y penser comme un polynôme en $(X_0, X_1, \dots)$ où $X_i = XY^i$).

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

$\boxed{\text{Montrer que si } Q(X,Y) \text{ est dans } B, \text{ alors } Q(0,Y) \text{ est un polynôme constant.}}$

Par définition, Q est un polynôme en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$.Autrement dit, Q est une combinaison linéaire finie de monômes en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$ (y penser comme un polynôme en $(X_0, X_1, \dots)$ où $X_i = XY^i$).

Soit S un monôme non constant

$$S = \lambda X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} \in K[X_0, \dots, X_r], \quad \lambda \in K \quad \text{et} \quad \alpha_0 + \cdots + \alpha_r > 0.$$

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

$\boxed{\text{Montrer que si } Q(X,Y) \text{ est dans } B, \text{ alors } Q(0,Y) \text{ est un polynôme constant.}}$

Par définition, Q est un polynôme en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$.Autrement dit, Q est une combinaison linéaire finie de monômes en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$ (y penser comme un polynôme en $(X_0, X_1, \dots)$ où $X_i = XY^i$).

Soit S un monôme non constant

$$S = \lambda X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} \in K[X_0, \dots, X_r], \quad \lambda \in K \quad \text{et} \quad \alpha_0 + \cdots + \alpha_r > 0.$$

On a alors que $X \mid R := S(X, XY, \dots, XY^r) = X^{\alpha_0 + \cdots + \alpha_r} Y$

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

$\boxed{\text{Montrer que si } Q(X,Y) \text{ est dans } B, \text{ alors } Q(0,Y) \text{ est un polynôme constant.}}$

Par définition, Q est un polynôme en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$.Autrement dit, Q est une combinaison linéaire finie de monômes en les XY^n avec $n \in \mathbf{N}$ (y penser comme un polynôme en $(X_0, X_1, \dots)$ où $X_i = XY^i$).

Soit S un monôme non constant

$$S = \lambda X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} \in K[X_0, \dots, X_r], \quad \lambda \in K \quad \text{et} \quad \alpha_0 + \cdots + \alpha_r > 0.$$

On a alors que $X \mid R := S(X, XY, \dots, XY^r) = X^{\alpha_0 + \cdots + \alpha_r} Y$ de sorte que $R(0,Y) = 0$.

Ainsi, dans $Q(0,Y)$, tous les monômes non constants de Q s'annulent et donc $Q(0,Y)$ est constant ~~égal au monôme constant~~ de Q.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^{\times}$.

$\boxed{\text{Comparer les idéaux de } B \text{ engendrés par } I = (X, XY, \ldots, XY^r) \text{ et } J = (X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1}).}$

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^\times$.

Comparer les idéaux de B engendrés par $I = (X, XY, \ldots, XY^r)$ et $J = (X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1})$.

Il est déjà clair que $I \subseteq J$.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^\times$.

$\boxed{\text{Comparer les idéaux de } B \text{ engendrés par } I = (X, XY, \ldots, XY^r) \text{ et } J = (X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1}).}$

Il est déjà clair que $I \subseteq J$.Montrons que l'inclusion est stricte en vérifiant que $XY^{r+1} \notin I$.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^\times$.

$\boxed{\text{Comparer les idéaux de } B \text{ engendrés par } I = (X, XY, \dots, XY^r) \text{ et } J = (X, XY, \dots, XY^r, XY^{r+1}).}$

Il est déjà clair que $I \subseteq J$.Montrons que l'inclusion est stricte en vérifiant que $XY^{r+1} \notin I$. Sinon, on pourrait écrire

$$XY^{r+1} = P_0 X + \cdots + P_r XY^r \quad \text{avec} \quad P_0, \dots, P_r \in B.$$

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^\times$.

$\boxed{\text{Comparer les idéaux de } B \text{ engendrés par } I = (X, XY, \ldots, XY^r) \text{ et } J = (X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1}).}$

Il est déjà clair que $I \subseteq J$.Montrons que l'inclusion est stricte en vérifiant que $XY^{r+1} \notin I$. Sinon, on pourrait écrire

$$XY^{r+1} = P_0X + \cdots + P_rXY^r \quad \text{avec} \quad P_0, \ldots, P_r \in B.$$

Comme l'anneau $B \subseteq K[X, Y]$ est intègre, on aurait

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^{\times}$.

Comparer les idéaux de B engendrés par $I = (X, XY, \ldots, XY^r)$ et $J = (X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1})$.

Il est déjà clair que $I \subseteq J$.Montrons que l'inclusion est stricte en vérifiant que $XY^{r+1} \notin I$. Sinon, on pourrait écrire

$$XY^{r+1} = P_0 X + \cdots + P_r XY^r \quad \text{avec} \quad P_0, \ldots, P_r \in B.$$

Comme l'anneau $B \subseteq K[X, Y]$ est intègre, on aurait

$Y^{r+1} = P_0 + \cdots + P_r Y^r$.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^{\times}$.

$\boxed{\text{Comparer les idéaux de } B \text{ engendrés par } I = (X, XY, \dots, XY^r) \text{ et } J = (X, XY, \dots, XY^r, XY^{r+1}).}$

Il est déjà clair que $I \subseteq J$.Montrons que l'inclusion est stricte en vérifiant que $XY^{r+1} \notin I$. Sinon, on pourrait écrire

$$XY^{r+1} = P_0 X + \cdots + P_r XY^r \quad \text{avec} \quad P_0, \dots, P_r \in B.$$

Comme l'anneau $B \subseteq K[X, Y]$ est intègre, on aurait $Y^{r+1} = P_0 + \cdots + P_r Y^r$. En faisant $X = 0$ et en appliquant **1.**, on aurait $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in K$ tels que

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^\times$.

Comparer les idéaux de B engendrés par $I = (X, XY, \ldots, XY^r)$ et $J = (X, XY, \ldots, XY^r, XY^{r+1})$.

Il est déjà clair que $I \subseteq J$.Montrons que l'inclusion est stricte en vérifiant que $XY^{r+1} \notin I$. Sinon, on pourrait écrire

$$XY^{r+1} = P_0X + \cdots + P_rXY^r \quad \text{avec} \quad P_0, \ldots, P_r \in B.$$

Comme l'anneau $B \subseteq K[X, Y]$ est intègre, on aurait $Y^{r+1} = P_0 + \cdots + P_rY^r$. En faisant $X = 0$ et en appliquant **1.**, on aurait $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \in K$ tels que $Y^{r+1} = \lambda_0 + \cdots + \lambda_rY^r$.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

Soit $r \in \mathbf{N}^\times$.

$\boxed{\text{Comparer les idéaux de } B \text{ engendrés par } I = (X, XY, \dots, XY^r) \text{ et } J = (X, XY, \dots, XY^r, XY^{r+\mathbf{1}}).}$

Il est déjà clair que $I \subseteq J$.Montrons que l'inclusion est stricte en vérifiant que $XY^{r+1} \notin I$. Sinon, on pourrait écrire

$$XY^{r+1} = P_0X + \cdots + P_rXY^r \quad \text{avec} \quad P_0, \dots, P_r \in B.$$

Comme l'anneau $B \subseteq K[X, Y]$ est intègre, on aurait $Y^{r+1} = P_0 + \cdots + P_rY^r$. En faisant $X = 0$ et en appliquant **1.**, on aurait $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in K$ tels que $Y^{r+1} = \lambda_0 + \cdots + \lambda_rY^r$.Absurde pour raison de degré !

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \;:\; n \in \mathbf{N} \rangle$$

La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

La question **2.** donne une suite strictement croissante d'idéaux de B, qui n'est donc pas un anneau noethérien

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

La question **2.** donne une suite strictement croissante d'idéaux de B, qui n'est donc pas un anneau noethérien, et a fortiori pas une K-algèbre de type fini.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K-\text{alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

La question **2.** donne une suite strictement croissante d'idéaux de B, qui n'est donc pas un anneau noethérien, et a fortiori pas une K-algèbre de type fini.

Je rappelle qu'un quotient d'un anneau noethérien est noethérien et qu'une K-algèbre de type fini est de la forme $K[X_1, \dots, X_n]/I$ avec I un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$.

Exercice 5 du TD IV

$$B \overset{K\text{–alg.}}{=} \langle XY^n \ : \ n \in \mathbf{N} \rangle$$

La K-algèbre B est-elle un anneau noethérien ? Une K-algèbre de type fini ?

La question **2.** donne une suite strictement croissante d'idéaux de B, qui n'est donc pas un anneau noethérien, et a fortiori pas une K-algèbre de type fini.

Je rappelle qu'un quotient d'un anneau noethérien est noethérien et qu'une K-algèbre de type fini est de la forme $K[X_1, \ldots, X_n]/I$ avec I un idéal de $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Ainsi, la propriété d'être une K-algèbre de type fini ne se conserve pas par passage à une sous-algèbre.

Exercice 6 du TD IV

Exercice 6.

Soit k un corps. On note $F = k(X)$ le corps des fractions rationnelles.

Exercice 6 du TD IV

Exercice 6.

Soit k un corps. On note $F = k(X)$ le corps des fractions rationnelles.

1. Soient $R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s}$ des éléments de F, avec $P_i \in k[X]$ et Q_i non nul dans $k[X]$ pour tout i de $\{1, \dots, s\}$. Soit B la sous-k-algèbre de F engendrée par $R_1, \dots, R_s$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $G \in k[X]$ tel que $B \subseteq (k[X])[G^{-1}]$.
2. En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \dots, R_s \rangle$$

Montrer qu'il existe un polynôme non nul $G \in k[X]$ tel que $B \subseteq (k[X])[G^{-1}]$.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \dots, R_s \rangle$$

$\boxed{\text{Montrer qu'il existe un polynôme non nul } G \in k[X] \text{ tel que } B \subseteq (k[X])[G^{-1}].}$

Par définition, tout $f \in B$ est un polynôme en les R_i

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \ldots, R_s \rangle$$

Montrer qu'il existe un polynôme non nul $G \in k[X]$ tel que $B \subseteq (k[X])[G^{-1}]$.

Par définition, tout $f \in B$ est un polynôme en les R_i. En particulier, en mettant au même dénominateur $f = \frac{P}{Q}$

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \ldots, R_s \rangle$$

Montrer qu'il existe un polynôme non nul $G \in k[X]$ tel que $B \subseteq (k[X])[G^{-1}]$.

Par définition, tout $f \in B$ est un polynôme en les R_i. En particulier, en mettant au même dénominateur $f = \frac{P}{Q}$ avec $P \in k[X]$ et Q de la forme

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \dots, R_s \rangle$$

$\boxed{\text{Montrer qu'il existe un polynôme non nul } G \in k[X] \text{ tel que } B \subseteq (k[X])[G^{-1}].}$

Par définition, tout $f \in B$ est un polynôme en les R_i. En particulier, en mettant au même dénominateur $f = \frac{P}{Q}$ avec $P \in k[X]$ et Q de la forme $Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_r^{\alpha_r}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{N}$.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{\text{sous}-k-\text{alg. de } F}{=} \langle R_1, \dots, R_s \rangle$$

Montrer qu'il existe un polynôme non nul $G \in k[X]$ tel que $B \subseteq (k[X])[G^{-1}]$.

Par définition, tout $f \in B$ est un polynôme en les R_i. En particulier, en mettant au même dénominateur $f = \frac{P}{Q}$ avec $P \in k[X]$ et Q de la forme $Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_r^{\alpha_r}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{N}$.

Il suffit alors de prendre $G = Q_1 \cdots Q_r$.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{\text{sous}-k-\text{alg. de } F}{=} \langle R_1, \dots, R_s \rangle$$

En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \ldots, R_s \rangle$$

En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{\text{sous}-k-\text{alg. de } F}{=} \langle R_1, \dots, R_s \rangle$$

En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F. Montrons cependant que pour tout $G \neq 0$, $(k[X])[G^{-1}] \neq F$.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \ldots, R_s \rangle$$

$\boxed{\text{En déduire que } F \text{ n'est pas de type fini en tant que } k\text{-algèbre.}}$

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F. Montrons cependant que pour tout $G \neq 0$, $(k[X])[G^{-1}] \neq F$.En effet, $\frac{1}{G+1} \notin (k[X])[G^{-1}]$ (si $G = -1$, c'est évident !).

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \ldots, R_s \rangle$$

$\boxed{\text{En déduire que } F \text{ n'est pas de type fini en tant que } k\text{-algèbre.}}$

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F. Montrons cependant que pour tout $G \neq 0$, $(k[X])[G^{-1}] \neq F$.En effet, $\frac{1}{G+1} \notin (k[X])[G^{-1}]$ (si $G = -1$, c'est évident !).

Sinon, il existerait un entier m, $H \in K[X]$ et $G \in K[X] \setminus \{0\}$ tels que $\frac{1}{G+1} = \frac{H}{G^m}$,

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \dots, R_s \rangle$$

$\boxed{\text{En déduire que } F \text{ n'est pas de type fini en tant que } k\text{-algèbre.}}$

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F. Montrons cependant que pour tout $G \neq 0$, $(k[X])[G^{-1}] \neq F$.En effet, $\frac{1}{G+1} \notin (k[X])[G^{-1}]$ (si $G = -1$, c'est évident !).

Sinon, il existerait un entier m, $H \in K[X]$ et $G \in K[X] \setminus \{0\}$ tels que $\frac{1}{G+1} = \frac{H}{G^m}$,soit $(G+1)H = G^m$ et $G + 1 \mid G^m$.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1=\frac{P_1}{Q_1},\dots,R_s=\frac{P_s}{Q_s}\in k(X),\quad B\overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=}\langle R_1,\dots,R_s\rangle$$

$\boxed{\text{En déduire que } F \text{ n'est pas de type fini en tant que } k\text{-algèbre.}}$

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F. Montrons cependant que pour tout $G\neq 0$, $(k[X])[G^{-1}]\neq F$.En effet,

$\frac{1}{G+1}\notin (k[X])[G^{-1}]$ (si $G=-1$, c'est évident !).

Sinon, il existerait un entier m, $H\in K[X]$ et $G\in K[X]\setminus\{0\}$ tels que $\frac{1}{G+1}=\frac{H}{G^m}$,soit $(G+1)H=G^m$ et $G+1\mid G^m$.Mais $G+1$ est premier avec G donc $G+1\in k[X]^\times=K$

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \dots, R_s \rangle$$

$\boxed{\text{En déduire que } F \text{ n'est pas de type fini en tant que } k\text{-algèbre.}}$

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F. Montrons cependant que pour tout $G \neq 0$, $(k[X])[G^{-1}] \neq F$.En effet, $\frac{1}{G+1} \notin (k[X])[G^{-1}]$ (si $G = -1$, c'est évident !).

Sinon, il existerait un entier m, $H \in K[X]$ et $G \in K[X] \setminus \{0\}$ tels que $\frac{1}{G+1} = \frac{H}{G^m}$,soit $(G+1)H = G^m$ et $G+1 \mid G^m$.Mais $G+1$ est premier avec G donc $G+1 \in k[X]^\times = K$ et G est constant.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \ldots, R_s \rangle$$

En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F. Montrons cependant que pour tout $G \neq 0$, $(k[X])[G^{-1}] \neq F$.En effet, $\frac{1}{G+1} \notin (k[X])[G^{-1}]$ (si $G = -1$, c'est évident !).

Sinon, il existerait un entier m, $H \in K[X]$ et $G \in K[X] \setminus \{0\}$ tels que $\frac{1}{G+1} = \frac{H}{G^m}$,soit $(G+1)H = G^m$ et $G+1 \mid G^m$.Mais $G+1$ est premier avec G donc $G+1 \in k[X]^\times = K$ et G est constant. Mais alors $(k[X])[G^{-1}] = k[X] \neq k(X)$.

Exercice 6 du TD IV

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, R_s = \frac{P_s}{Q_s} \in k(X), \quad B \overset{sous-k-alg.\ de\ F}{=} \langle R_1, \ldots, R_s \rangle$$

En déduire que F n'est pas de type fini en tant que k-algèbre.

Si F était de type fini, une algèbre B du type de **1.** égalerait F. Montrons cependant que pour tout $G \neq 0$, $(k[X])[G^{-1}] \neq F$.En effet, $\frac{1}{G+1} \notin (k[X])[G^{-1}]$ (si $G = -1$, c'est évident !).

Sinon, il existerait un entier m, $H \in K[X]$ et $G \in K[X] \setminus \{0\}$ tels que $\frac{1}{G+1} = \frac{H}{G^m}$,soit $(G+1)H = G^m$ et $G+1 \mid G^m$.Mais $G+1$ est premier avec G donc $G+1 \in k[X]^\times = K$ et G est constant. Mais alors $(k[X])[G^{-1}] = k[X] \neq k(X)$. On conclut donc que $k(X)$ n'est pas une k-algèbre de type fini.

Exercice 7 du TD IV

Exercice 7.

Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L.

Exercice 7 du TD IV

Exercice 7.

Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L.On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini.

Exercice 7 du TD IV

Exercice 7.

Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L.On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini.On se propose de montrer que L est une A-algèbre de type fini.

Exercice 7.

Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L.On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini.On se propose de montrer que L est une A-algèbre de type fini.Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans B tels que $B = A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

Exercice 7 du TD IV

Exercice 7.

Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L.On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini.On se propose de montrer que L est une A-algèbre de type fini.Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans B tels que $B = A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$.

Soit $\beta_1, \dots, \beta_m$ une base de B sur L, avec $\beta_1 = 1$.

Exercice 7 du TD IV

Exercice 7.

Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L.On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini.On se propose de montrer que L est une A-algèbre de type fini.Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans B tels que $B = A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

Soit $\beta_1, \ldots, \beta_m$ une base de B sur L, avec $\beta_1 = 1$.On écrit

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L.$$

Exercice 7 du TD IV

Exercice 7.

Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L.On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini.On se propose de montrer que L est une A-algèbre de type fini.Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans B tels que $B = A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

Soit $\beta_1, \ldots, \beta_m$ une base de B sur L, avec $\beta_1 = 1$.On écrit

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L.$$

Soit C la sous A-algèbre de L engendrée par les a_{ijk} et les b_{ij}.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

Montrer que tout élément x de B s'écrit $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C$.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

Montrer que tout élément x de B s'écrit $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C$.

Soit le C-module engendré par les β_i

$$B' = \left\{ x \in B \;:\; \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}.$$

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B L – ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$\boxed{\text{Montrer que tout élément } x \text{ de } B \text{ s'écrit } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i, \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C.}$$

Soit le C-module engendré par les β_i

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}.$$

Objectif : Montrer que $B' = B$.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}$$

Montrer que $B' = B$.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L **corps**, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ **et** B $L-$**ev de dim. finie de base** $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}$$

$\boxed{\text{Montrer que } B' = B.}$

Il suffit de montrer que $B \subseteq B'$.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\}$$

$\boxed{\text{Montrer que } B' = B.}$

Il suffit de montrer que $B \subseteq B'$. Si x est dans B, c'est un polynôme en les α_i à coefficients dans A.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k ; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}$$

$\boxed{\text{Montrer que } B' = B.}$

Il suffit de montrer que $B \subseteq B'$. Si x est dans B, c'est un polynôme en les α_i à coefficients dans A.Il suffit donc de montrer que tous les monômes $\alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_n^{r_n}$ en les α_i sont dans B'.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\}$$

$\boxed{\text{Montrer que } B' = B.}$

Il suffit de montrer que $B \subseteq B'$. Si x est dans B, c'est un polynôme en les α_i à coefficients dans A.Il suffit donc de montrer que tous les monômes $\alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_n^{r_n}$ en les α_i sont dans B'.

Comme chaque α_i est une combinaison linéaire des β_j à coefficients dans C

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \dots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij}\rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\}$$

Montrer que $B' = B$.

Il suffit de montrer que $B \subseteq B'$. Si x est dans B, c'est un polynôme en les α_i à coefficients dans A.Il suffit donc de montrer que tous les monômes $\alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_n^{r_n}$ en les α_i sont dans B'.

Comme chaque α_i est une combinaison linéaire des β_j à coefficients dans C, il suffit de montrer que tout monôme $\beta_1^{s_1} \cdots \beta_m^{s_m}$ en les β_j est dans B'.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \dots, \beta_m$

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k ; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}$$

$\boxed{\text{Montrer que } B' = B.}$

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}$$

$\boxed{\text{Montrer que } B' = B.}$

Il suffit de montrer que tout monôme $\beta_1^{s_1} \cdots \beta_m^{s_m}$ en les β_j est dans B'.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-\text{alg.}}{=} A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \dots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{\text{sous}-A-\text{alg.}}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}$$

$\boxed{\text{Montrer que } B' = B.}$

Il suffit de montrer que tout monôme $\beta_1^{s_1} \cdots \beta_m^{s_m}$ en les β_j est dans B'.

Or, d'après la définition des a_{ijk}, chaque β_i (rappelons que $\beta_1 = 1$) et chaque produit $\beta_i\beta_j$ est dans B'.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij}\rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\}$$

$\boxed{\text{Montrer que } B' = B.}$

Il suffit de montrer que tout monôme $\beta_1^{s_1} \cdots \beta_m^{s_m}$ en les β_j est dans B'.

Or, d'après la définition des a_{ijk}, chaque β_i (rappelons que $\beta_1 = 1$) et chaque produit $\beta_i\beta_j$ est dans B'.Ainsi B' est stable par multiplication par chaque β_i,

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}$$

Montrer que $B' = B$.

Il suffit de montrer que tout monôme $\beta_1^{s_1} \cdots \beta_m^{s_m}$ en les β_j est dans B'.

Or, d'après la définition des a_{ijk}, chaque β_i (rappelons que $\beta_1 = 1$) et chaque produit $\beta_i\beta_j$ est dans B'.Ainsi B' est stable par multiplication par chaque β_i,ce qui montre que tous les monômes $\beta_1^{s_1} \ldots \beta_m^{s_m}$ comme ci-dessus sont bien dans B'.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \dots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\}$$

Montrer que $B' = B$.

Il suffit de montrer que tout monôme $\beta_1^{s_1} \cdots \beta_m^{s_m}$ en les β_j est dans B'.

Or, d'après la définition des a_{ijk}, chaque β_i (rappelons que $\beta_1 = 1$) et chaque produit $\beta_i\beta_j$ est dans B'.Ainsi B' est stable par multiplication par chaque β_i,ce qui montre que tous les monômes $\beta_1^{s_1} \dots \beta_m^{s_m}$ comme ci-dessus sont bien dans B'.

Finalement $B' = B$.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\} = B$$

En déduire que $L = C$, et conclure.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\} = B$$

$\boxed{\text{En déduire que } L = C\text{, et conclure.}}$

On a $C \subseteq L$.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\} = B$$

$\boxed{\text{En déduire que } L = C \text{, et conclure.}}$

On a $C \subseteq L$.Réciproquement, soit $y \in L$

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\} = B$$

$\boxed{\text{En déduire que } L = C\text{, et conclure.}}$

On a $C \subseteq L$.Réciproquement, soit $y \in L$, alors $y = y\beta_1 \in B$ et d'après **1.**

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \dots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\} = B$$

$\boxed{\text{En déduire que } L = C\text{, et conclure.}}$

On a $C \subseteq L$.Réciproquement, soit $y \in L$, alors $y = y\beta_1 \in B$ et d'après **1.**, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \subset L$.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \dots, \beta_m$

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \;:\; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\} = B$$

En déduire que $L = C$, et conclure.

On a $C \subseteq L$.Réciproquement, soit $y \in L$, alors $y = y\beta_1 \in B$ et d'après **1.**, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \subset L$.Mais par unicité de la décomposition d'un élément de B sur la base $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ du L-ev B

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \ldots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij}\rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i \right\} = B$$

$\boxed{\text{En déduire que } L = C\text{, et conclure.}}$

On a $C \subseteq L$.Réciproquement, soit $y \in L$, alors $y = y\beta_1 \in B$ et d'après **1.**, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C \subset L$.Mais par unicité de la décomposition d'un élément de B sur la base $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ du L-ev B, on obtient $y = \lambda_1 \in C$.

Exercice 7 du TD IV

$A \subseteq L \subseteq B$, L corps, $B \overset{A-alg.}{=} A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et B $L-$ev de dim. finie de base $\beta_1 = 1, \dots, \beta_m$

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\beta_k; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\beta_j \quad \text{avec} \quad a_{ijk}, b_{ij} \in L, \quad C \overset{sous-A-alg.}{=} \langle a_{ijk}, b_{ij} \rangle$$

$$B' = \left\{ x \in B \ : \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \right\} = B$$

En déduire que $L = C$, et conclure.

On a $C \subseteq L$.Réciproquement, soit $y \in L$, alors $y = y\beta_1 \in B$ et d'après **1.**, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in C \subset L$.Mais par unicité de la décomposition d'un élément de B sur la base $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ du L-ev B, on obtient $y = \lambda_1 \in C$.

Finalement $L = C$, et L est bien de type fini comme A-algèbre.

Exercice 8.

Soient $k \subset K$ deux corps, tels que K soit une k-algèbre de type fini.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

Exercice 8.

Soient $k \subset K$ deux corps, tels que K soit une k-algèbre de type fini.Le but de l'exercice est de montrer que K est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 8.

Soient $k \subset K$ deux corps, tels que K soit une k-algèbre de type fini.Le but de l'exercice est de montrer que K est un k-espace vectoriel de dimension finie. Pour cela on écrit $K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, et on raisonne par récurrence en supposant le résultat vrai jusqu'à $n-1$, le cas $n = 0$ étant trivial.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

Exercice 8.

Soient $k \subset K$ deux corps, tels que K soit une k-algèbre de type fini.Le but de l'exercice est de montrer que K est un k-espace vectoriel de dimension finie. Pour cela on écrit $K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, et on raisonne par récurrence en supposant le résultat vrai jusqu'à $n-1$, le cas $n = 0$ étant trivial.

1. On pose $L = k(\alpha_1)$. Comparer K et $L[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$, et en déduire que K est de dimension finie sur L.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

$$HR_n : \quad \forall M \text{ corps}, \forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M\text{-ev de dim. finie}$$

Comparer K et $L[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, et en déduire que K est de dimension finie sur L.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Comparer K et $L[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, et en déduire que K est de dimension finie sur L.

Comme K est un corps et $\alpha_i \in K$, il contient $k(\alpha_1)$

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

$\boxed{\text{Comparer } K \text{ et } L[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]\text{, et en déduire que } K \text{ est de dimension finie sur } L.}$

Comme K est un corps et $\alpha_i \in K$, il contient $k(\alpha_1)$, et donc aussi $L[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \dots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Comparer K et $L[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$, et en déduire que K est de dimension finie sur L.

Comme K est un corps et $\alpha_i \in K$, il contient $k(\alpha_1)$, et donc aussi

$L[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$.Par hypothèse $K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \dots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Comparer K et $L[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$, et en déduire que K est de dimension finie sur L.

Comme K est un corps et $\alpha_i \in K$, il contient $k(\alpha_1)$, et donc aussi $L[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$.Par hypothèse $K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, donc finalement $K = L[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$, et l'hypothèse de récurrence donne alors que K (qui est une L-algèbre de type fini engendrée par $n-1$ éléments) est un L-ev de dimension finie.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r,$ $M[\beta_1, \ldots, \beta_r]$ $M-$ev de dim. finie

$\boxed{\text{En utilisant l'exercice 7, montrer que } L \text{ est une } k\text{-algèbre de type fini.}}$

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

$$HR_n : \quad \forall M \text{ corps}, \forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-\text{ev de dim. finie}$$

En utilisant l'exercice 7, montrer que L est une k-algèbre de type fini.

Il suffit d'appliquer le résultat de l'exercice 7 avec $A = k$, $L = L$ et $B = K$.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \dots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

$\boxed{\text{En utilisant l'exercice 7, montrer que } L \text{ est une } k\text{-algèbre de type fini.}}$

Il suffit d'appliquer le résultat de l'exercice 7 avec $A = k$, $L = L$ et $B = K$.

Rappel : Soient B un anneau, L un sous-anneau de B et A un sous-anneau de L. On suppose que L est un corps, que B est un L-espace vectoriel de dimension finie, et que B est aussi une A-algèbre de type fini. Alors L est une A-algèbre de type fini.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

Si α_1 n'est pas racine d'un polynôme non nul de $k[X]$

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \dots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

Si α_1 n'est pas racine d'un polynôme non nul de $k[X]$, alors le morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est injectif

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

Si α_1 n'est pas racine d'un polynôme non nul de $k[X]$, alors le morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est injectif (et surjectif), donc $k[\alpha_1] \cong k[X]$

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r$, $M[\beta_1, \dots, \beta_r]$ $M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

Si α_1 n'est pas racine d'un polynôme non nul de $k[X]$, alors le morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est injectif (et surjectif), donc $k[\alpha_1] \cong k[X]$ et son corps des fractions L est isomorphe à $k(X)$.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r,$ $M[\beta_1, \ldots, \beta_r]$ M−ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

Si α_1 n'est pas racine d'un polynôme non nul de $k[X]$, alors le morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est injectif (et surjectif), donc $k[\alpha_1] \cong k[X]$ et son corps des fractions L est isomorphe à $k(X)$.Absurde d'après l'exercice 6 car par **2.**, L est une k-algèbre de type fini.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \dots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

Si α_1 n'est pas racine d'un polynôme non nul de $k[X]$, alors le morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est injectif (et surjectif), donc $k[\alpha_1] \cong k[X]$ et son corps des fractions L est isomorphe à $k(X)$.Absurde d'après l'exercice 6 car par **2.**, L est une k-algèbre de type fini.Ainsi le noyau de φ est non nul.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

$$HR_n : \quad \forall M \text{ corps}, \forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \dots, \beta_r] \quad M-\text{ev de dim. finie}$$

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \dots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

On a que le noyau du morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est de la forme (π_{α_1}) avec $\pi_{\alpha_1} \in k[X]$ unitaire de degré d.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

On a que le noyau du morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est de la forme (π_{α_1}) avec $\pi_{\alpha_1} \in k[X]$ unitaire de degré d.Le polynôme π_{α_1} est irréductible

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r,$ $M[\beta_1, \ldots, \beta_r]$ $M-$ev de dim. finie

Montrer que $\alpha_{\mathbf{1}}$ est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

On a que le noyau du morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est de la forme $(\pi_{\alpha_{\mathbf{1}}})$ avec $\pi_{\alpha_{\mathbf{1}}} \in k[X]$ unitaire de degré d.Le polynôme $\pi_{\alpha_{\mathbf{1}}}$ est irréductible car sinon un de ses facteurs irréductible annulerait α_1

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

On a que le noyau du morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est de la forme (π_{α_1}) avec $\pi_{\alpha_1} \in k[X]$ unitaire de degré d.Le polynôme π_{α_1} est irréductible car sinon un de ses facteurs irréductible annulerait α_1 donc appartiendrait à (π_{α_1}), ce qui est absurde pour des raisons de degré.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r,$ $M[\beta_1, \dots, \beta_r]$ $M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

On a que le noyau du morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est de la forme (π_{α_1}) avec $\pi_{\alpha_1} \in k[X]$ unitaire de degré d.Le polynôme π_{α_1} est irréductible car sinon un de ses facteurs irréductible annulerait α_1 donc appartiendrait à (π_{α_1}), ce qui est absurde pour des raisons de degré.

On a alors que $k[\alpha_1] \cong k[X]/(\pi_{\alpha_1}) = \mathrm{Vect}_k(1, \alpha_1, \dots, \alpha_1^{d-1})$ et que $k[\alpha_1]$ est un corps car π_{α_1} est irréductible.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r$, $M[\beta_1, \dots, \beta_r]$ $M-$ev de dim. finie

Montrer que α_1 est racine d'un polynôme unitaire de $k[X]$, puis que L est de dimension finie sur k (en utilisant l'exercice 6).

On a que le noyau du morphisme φ de k-algèbres de $k[X] \to k[\alpha_1]$ qui envoie X sur α_1 est de la forme (π_{α_1}) avec $\pi_{\alpha_1} \in k[X]$ unitaire de degré d.Le polynôme π_{α_1} est irréductible car sinon un de ses facteurs irréductible annulerait α_1 donc appartiendrait à (π_{α_1}), ce qui est absurde pour des raisons de degré.

On a alors que $k[\alpha_1] \cong k[X]/(\pi_{\alpha_1}) = \mathrm{Vect}_k(1, \alpha_1, \dots, \alpha_1^{d-1})$ et que $k[\alpha_1]$ est un corps car π_{α_1} est irréductible.Ainsi, $k[\alpha_1] = L = k(\alpha_1)$ est de dimension finie sur k.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

On rappelle ici que si P est irréductible dans $k[X]$, alors $k[X]/(P)$ est un corps.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

On rappelle ici que si P est irréductible dans $k[X]$, alors $k[X]/(P)$ est un corps.En effet, soit $\overline{Q} \in k[X]/(P)$ non nul. Par division euclidienne de Q par P, on a

$$Q = PB + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(P)$$

et $\overline{Q} = \overline{R} \neq 0$. On peut donc supposer que le degré de Q est $< \deg(P)$ et donc Q est premier avec P qui est irréductible et par Bézout, on a $U, V \in k[X]$ tels que $QU + PV = 1$ soit dans le quotient $\overline{QU} = 1$ et $\overline{Q}$ est inversible.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

$$HR_n : \quad \forall M \text{ corps}, \forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M\text{−ev de dim. finie}$$

En déduire que K est un k-ev de dimension finie.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \dots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

En déduire que K est un k-ev de dimension finie.

D'après **3.**, L est de dimension finie sur k

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

$$HR_n : \quad \forall M \text{ corps}, \forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M\text{−ev de dim. finie}$$

En déduire que K est un k-ev de dimension finie.

D'après **3.**, L est de dimension finie sur k et d'après **1.**, K est de dimension finie sur L. Donc, K est de dimension finie sur k.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r$, $M[\beta_1, \dots, \beta_r]$ $M-$ev de dim. finie

En déduire que K est un k-ev de dimension finie.

D'après **3.**, L est de dimension finie sur k et d'après **1.**, K est de dimension finie sur L. Donc, K est de dimension finie sur k.

Si $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ est une base de L sur k et $(k_1, \dots, k_s)$ est une base de K sur L, alors $(\ell_i k_j)$ est une base de K sur k et $\dim_k K = \dim_L K \times \dim_k L$.

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \dots, \beta_r$, $M[\beta_1, \dots, \beta_r]$ $M-$ev de dim. finie

En déduire que K est un k-ev de dimension finie.

D'après **3.**, L est de dimension finie sur k et d'après **1.**, K est de dimension finie sur L. Donc, K est de dimension finie sur k.

Si $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ est une base de L sur k et $(k_1, \dots, k_s)$ est une base de K sur L, alors $(\ell_i k_j)$ est une base de K sur k et $\dim_k K = \dim_L K \times \dim_k L$.

On parle de multiplicativité des degrés et vous reverrez cette propriété dans le chapitre IV du cours (ou corollaire 1.5 du Perrin chapitre III).

Exercice 8 du TD IV - Lemme de Zariski

$$K = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \quad L = k(\alpha_1) = \mathrm{Frac}(k[\alpha_1])$$

HR_n : $\quad \forall M$ corps, $\forall r \leqslant n-1, \forall \beta_1, \ldots, \beta_r, \quad M[\beta_1, \ldots, \beta_r] \quad M-$ev de dim. finie

En déduire que K est un k-ev de dimension finie.

D'après **3.**, L est de dimension finie sur k et d'après **1.**, K est de dimension finie sur L. Donc, K est de dimension finie sur k.

Si $(\ell_1, \ldots, \ell_r)$ est une base de L sur k et $(k_1, \ldots, k_s)$ est une base de K sur L, alors $(\ell_i k_j)$ est une base de K sur k et $\dim_k K = \dim_L K \times \dim_k L$.

On parle de multiplicativité des degrés et vous reverrez cette propriété dans le chapitre IV du cours (ou corollaire 1.5 du Perrin chapitre III).

Une conséquence importante de ce lemme est l'exercice suivant !

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ dans k.

Exercice 9.

Soient $a_1, \dots, a_n$ dans k.

1. Montrer que le morphisme $u : P \mapsto P(a_1, \dots, a_n)$ de $k[X_1, \dots, X_n]$ dans k est surjectif de noyau l'idéal $J = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

Soient $a_1, \dots, a_n$ dans k.

1. Montrer que le morphisme $u : P \mapsto P(a_1, \dots, a_n)$ de $k[X_1, \dots, X_n]$ dans k est surjectif de noyau l'idéal $J = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$.

On l'a fait dans l'exercice 2 où l'on a montré de plus que $k[X_1, \dots, X_N]/J \cong k$ et que J est un idéal maximal.

Exercice 9.

Soient $a_1, \dots, a_n$ dans k.

1. Montrer que le morphisme $u : P \mapsto P(a_1, \dots, a_n)$ de $k[X_1, \dots, X_n]$ dans k est surjectif de noyau l'idéal $J = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$.

On l'a fait dans l'exercice 2 où l'on a montré de plus que $k[X_1, \dots, X_N]/J \cong k$ et que J est un idéal maximal.

L'objectif de cet exercice est de démontrer une réciproque de ce résultat dans le cas d'un corps *algébriquement clos.*

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \dots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

On a que L est une k-algèbre de type fini

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

On a que L est une k-algèbre de type fini, donc d'après l'exercice 8 L est de dimension finie sur k.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

On a que L est une k-algèbre de type fini, donc d'après l'exercice 8 L est de dimension finie sur k.Par ailleurs, pour $x \in L$, $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est liée dans le k-ev L

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

On a que L est une k-algèbre de type fini, donc d'après l'exercice 8 L est de dimension finie sur k.Par ailleurs, pour $x \in L$, $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est liée dans le k-ev L si bien que tout $x \in L$ annule un polynôme unitaire à coefficients dans k.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

On a que L est une k-algèbre de type fini, donc d'après l'exercice 8 L est de dimension finie sur k.Par ailleurs, pour $x \in L$, $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est liée dans le k-ev L si bien que tout $x \in L$ annule un polynôme unitaire à coefficients dans k.Comme k est algébriquement clos, on obtient $x \in k$.

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \dots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

On a que L est une k-algèbre de type fini, donc d'après l'exercice 8 L est de dimension finie sur k.Par ailleurs, pour $x \in L$, $(x^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est liée dans le k-ev L si bien que tout $x \in L$ annule un polynôme unitaire à coefficients dans k.Comme k est algébriquement clos, on obtient $x \in k$. Finalement $L \cong k$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \dots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

Plus précisément, $\varphi : k \to k[X_1, \dots, X_n] \to L$ est un morphisme de k-algèbres injectif.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

Plus précisément, $\varphi : k \to k[X_1, \ldots, X_n] \to L$ est un morphisme de k-algèbres injectif. En particulier, on peut identifier via φ, k à un sous-corps $\varphi(k)$ de L qui est algébriquement clos.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \dots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

Plus précisément, $\varphi : k \to k[X_1, \dots, X_n] \to L$ est un morphisme de k-algèbres injectif. En particulier, on peut identifier via φ, k à un sous-corps $\varphi(k)$ de L qui est algébriquement clos. L'argument fournit que $L \subseteq \varphi(k)$,

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

Plus précisément, $\varphi : k \to k[X_1, \ldots, X_n] \to L$ est un morphisme de k-algèbres injectif. En particulier, on peut identifier via φ, k à un sous-corps $\varphi(k)$ de L qui est algébriquement clos. L'argument fournit que $L \subseteq \varphi(k)$, autrement dit la surjectivité de φ

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

2. Montrer que le corps $L = k[X_1, \dots, X_n]/I$ est isomorphe (en tant que k-algèbre) à k.

Plus précisément, $\varphi : k \to k[X_1, \dots, X_n] \to L$ est un morphisme de k-algèbres injectif. En particulier, on peut identifier via φ, k à un sous-corps $\varphi(k)$ de L qui est algébriquement clos. L'argument fournit que $L \subseteq \varphi(k)$, autrement dit la surjectivité de φ qui est donc un isomorphisme de k-algèbres.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

2. En déduire qu'il existe $a_1, \dots, a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du **1.**, c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $P(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. En déduire qu'il existe $a_1, \ldots, a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du **1.**, c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

On a d'après **2.** un isomorphisme $k \to k[X_1, \ldots, X_n]/I$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. En déduire qu'il existe $a_1, \ldots, a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du **1.**, c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

On a d'après **2.** un isomorphisme $k \to k[X_1, \ldots, X_n]/I$.Soient $a_1, \ldots, a_n$ les antécédents de $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}$

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. En déduire qu'il existe $a_1, \ldots, a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du **1.**, c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

On a d'après **2.** un isomorphisme $k \to k[X_1, \ldots, X_n]/I$.Soient $a_1, \ldots, a_n$ les antécédents de $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}$, alors par définition les polynômes $(X_i - a_i)$ sont dans I

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. En déduire qu'il existe $a_1, \ldots, a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du **1.**, c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

On a d'après **2.** un isomorphisme $k \to k[X_1, \ldots, X_n]/I$.Soient $a_1, \ldots, a_n$ les antécédents de $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}$, alors par définition les polynômes $(X_i - a_i)$ sont dans I, donc I contient l'idéal J engendré par les $(X_i - a_i)$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Exercice 9.

On suppose dans la suite que k est algébriquement clos et on se donne I un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

2. En déduire qu'il existe $a_1, \dots, a_n$ dans k tel que I soit l'idéal J du **1.**, c'est-à-dire que I est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $P(a_1, \dots, a_n) = 0$.

On a d'après **2.** un isomorphisme $k \to k[X_1, \dots, X_n]/I$.Soient $a_1, \dots, a_n$ les antécédents de $\overline{X_1}, \dots, \overline{X_n}$, alors par définition les polynômes $(X_i - a_i)$ sont dans I, donc I contient l'idéal J engendré par les $(X_i - a_i)$.Or J est aussi un idéal maximal. Finalement $I = J$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Si k est algébriquement clos, tout idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est de la forme $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ pour $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Si k est algébriquement clos, tout idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$ est de la forme $\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ pour $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$.

Le résultat tombe en défaut si k n'est pas algébriquement clos car par exemple

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Si k est algébriquement clos, tout idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est de la forme $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ pour $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$.

Le résultat tombe en défaut si k n'est pas algébriquement clos car par exemple

$$\mathbf{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbf{C}$$

et $(X^2 + 1)$ est maximal dans $\mathbf{R}[X]$ sans être de la forme $(X - x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Si k est algébriquement clos, tout idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est de la forme $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ pour $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$.

Le résultat tombe en défaut si k n'est pas algébriquement clos car par exemple

$$\mathbf{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbf{C}$$

et (X^2+1) est maximal dans $\mathbf{R}[X]$ sans être de la forme $(X - x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.En revanche, on peut montrer que tout idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est engendré par n éléments même si k n'est pas algébriquement clos.

Exercice 9 du TD IV - Théorème des zéros de Hilbert

Si k est algébriquement clos, tout idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est de la forme $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ pour $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$.

Le résultat tombe en défaut si k n'est pas algébriquement clos car par exemple

$$\mathbf{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbf{C}$$

et (X^2+1) est maximal dans $\mathbf{R}[X]$ sans être de la forme $(X - x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.En revanche, on peut montrer que tout idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est engendré par n éléments même si k n'est pas algébriquement clos.

Pour aller plus loin, je vous conseille la lecture du premier chapitre de Perrin, *Géométrie algébrique*.

Exercice 3

Exercice 3.

On observe que le polynôme en n indéterminées

$$P = \prod_{i \neq j} (X_i - X_j)$$

est un polynôme symétrique de $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$; en effet, il est clairement invariant pour l'action de toute transposition, et les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$. D'après le théorème de structure, il existe $R \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $P = R(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, avec $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les polynômes symétriques élémentaires. D'autre part, on a

$$Q = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) = z^n - \sigma_1(z_1, \ldots, z_n) z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n(z_1, \ldots, z_n),$$

ce qui montre que chaque $\sigma_i(z_1, \ldots, z_n)$ est entier. Du coup,

$$P(z_1, \ldots, z_n) = R(\sigma_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \sigma_n(z_1, \ldots, z_n))$$

est bien entier comme on voulait.

Exercice 10 I

Exercice 10.

Montrer que l'anneau $\mathcal{C}^0([0,1])$ des fonctions continues $[0,1] \to \mathrm{R}$ n'est pas noethérien. Pour ce faire, on montrera que l'idéal des fonctions s'annulant en 0 n'est pas finiment engendré.

À rapprocher de l'exercice 4 du DM et de l'exercice 7 du TD III.

Soit I l'idéal des fonctions s'annulant en 0 et supposons par l'absurde que $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ avec $f_i \in \mathcal{C}^0([0,1])$. On considère alors

$$f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|} \in \mathcal{C}^0([0,1]).$$

On a $f(0) = 0$ donc $f \in I$ et il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telles que $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$. On a alors (puisqu'une fonction continue est bornée sur le compact $[0,1]$)

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = |f(x)| \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{x \in [0,1]} |\lambda_i(x)| \times \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| = Mf(x)^2.$$

On a $M = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{x \in [0,1]} |\lambda_i(x)| > 0$ sinon $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $f = 0$ et donc $I = 0$, ce qui est

Exercice 10 II

exclu. Or, $f(0) = 0$ et donc on par continuité, pour $\varepsilon = \frac{1}{2M} > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x| \leqslant \eta$ implique $f(x) < \varepsilon$ et $f(\eta) \neq 0$ (si f est nulle sur un voisinage de 0, alors tous les f_i aussi et donc toute fonction nulle en 0, ce qui n'est pas le cas de l'identité) et ainsi $f(\eta) < \frac{1}{2M}$. Mais, on a $f(\eta) \leqslant Mf(\eta)^2$ soit $f(\eta) > \frac{1}{M}$ ce qui est absurde car $\frac{1}{2M} < \frac{1}{M}$. On en déduit que I est un idéal qui n'est pas de type fini et donc par définition, $\mathcal{C}^0([0,1])$ ne peut pas être noethérien.