DEVOIR NUMÉRO 1 : NOEUDS TORIQUES

Le but de ce devoir est d'étudier le groupe fondamental et certains revêtements des noeuds toriques.

NOTATIONS

Dans ce devoir, pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{S}^n$ désignera la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$, $\mathbf{B}^n$ le disque unité fermé de $\mathbf{R}^n$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments. Enfin on considérera $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ le tore de dimension 2 muni de sa projection canonique $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$. Pour p et q deux entiers naturels non tous deux nuls et premiers entre eux, on pose $D_{p,q}$ la droite de $\mathbf{R}^2$ d'équation $qy = px$ et $C_{p,q} = \pi(D_{p,q})$.

QUESTIONS

1. Montrer que l'application
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & \Big((\sqrt{2}+\cos(2\pi y))\cos(2\pi x), (\sqrt{2}+\cos(2\pi y))\sin(2\pi x), \sin(2\pi y)\Big) \end{array} \right.$$
est une immersion C^∞ qui passe au quotient en une application $\tilde{\varphi} : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}^3$ qui est un homéomorphisme sur son image.
On identifiera ainsi $C_{p,q}$ à un sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ via $\tilde{\varphi}$ dans la suite.
2. Rappeler à quel espace connu est homéomorphe $C_{p,q}$ et tenter d'esquisser $\tilde{\varphi}(C_{1,2})$, $C_{2,3}$ et $\tilde{\varphi}(C_{2,3})$.
On parle de noeud de trèfle pour $C_{2,3}$.
3. Montrer que les espaces $\mathbf{R}^3 \setminus C_{1,q}$ avec $q \geqslant 0$ sont tous homéomorphes.
4. On note $s : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{S}^3 \setminus \{N\}$ l'inverse de la projection stéréographique avec N le pôle nord de $\mathbf{S}^3$. Montrer que $\mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}$ et $\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{p,q})$ sont connexes par arcs et que, pour tout $\mathbf{x} \notin C_{p,q}$, $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}, \mathbf{x}) \cong \pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{p,q}), N)$.
5. On pose
$$A = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{S}^3 \;:\; x_1^2 + x_2^2 \geqslant \frac{1}{2}\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{S}^3 \;:\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$
Montrer que A et B sont homéomorphes à [1] $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2$ et que
$$\mathbf{S}^3 \cong \left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2\right) \cup_{\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1} \left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2\right) \quad \text{où} \quad \left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2\right) \cup_{\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1} \left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2\right) = \left(\left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2\right) \bigsqcup \left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2\right)\right)/\mathcal{R}$$
et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $i_1(z_1,z_2) \,\mathcal{R}\, i_2(z_2,z_1)$ pour tous $(z_1,z_2) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et i_j l'inclusion canonique de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ dans la j-ième copie de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2$ de la somme disjointe $\left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2\right) \bigsqcup \left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2\right)$ pour $j \in \{1,2\}$.
6. Calculer $\pi_1\left(\mathbf{T}^2 \setminus C_{p,q}, x\right)$ pour tous p, q et tout $x \in \mathbf{T}^2 \setminus C_{p,q}$.
7. Déduire des questions précédentes que le *groupe fondamental du noeud torique* $\pi_1\left(\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{p,q}), N\right)$ admet comme présentation $\langle a, b \mid a^p b^{-q}\rangle$. Reconnaître ce groupe lorsque p ou q vaut 1.
On notera $G_{p,q}$ ce groupe.
8. (**BONUS**) Montrer que les sous-groupes $\langle a^p\rangle$ et $\langle b^q\rangle$ de $G_{p,q}$ sont égaux.
On notera alors $C = \langle a^p\rangle = \langle b^q\rangle$. Montrer que C est distingué dans $G_{p,q}$ et que $G_{p,q}/C$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.
9. (**BONUS**) Montrer que l'abélianisé de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}*\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ est $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ et que l'ordre maximum d'un élément de torsion [2] dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}*\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ est $\max(p,q)$. En déduire que les groupes $G_{p,q}$ avec $1 < p < q$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$ sont deux à deux non isomorphes. Qu'en déduisez-vous quant aux espaces $\mathbf{S}^3 \setminus C_{p,q}$ avec $1 < p < q$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$?

Soient X un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe ayant un groupe fondamental de présentation finie, $x \in X$ et $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On note $\operatorname{Hom}_{\mathrm{tr}}(\pi_1(X,x), \mathfrak{S}_n)$ l'ensemble des homomorphismes de groupes $\rho : \pi_1(X,x) \to \mathfrak{S}_n$ tel que le groupe image agisse transitivement sur $\{1,\dots,n\}$. Cela fournit une action transitive de $\pi_1(X,x)$ sur $\{1,\dots,n\}$ par $[\alpha]\cdot k = \rho([\alpha])(k)$ pour $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ et $k \in \{1,\dots,n\}$.

10. Soit $\rho \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{tr}}(\pi_1(X,x), \mathfrak{S}_n)$. Montrer que H_1, le stabilisateur de 1, est d'indice n dans $\pi_1(X,x)$. Que pouvez-vous en déduire pour le revêtement connexe $p : E \to X$ associé à H_1 ? Préciser notamment le groupe $p_*(\pi_1(E,1))$ en identifiant la fibre $p^{-1}(x)$ avec $\{1,\dots,n\}$ et quand il est galoisien. Montrer que, réciproquement, à tout revêtement connexe p à n feuillets de X correspond un morphisme $\rho_p \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{tr}}(\pi_1(X,x), \mathfrak{S}_n)$.
11. On définit une relation d'équivalence sur $\operatorname{Hom}_{\mathrm{tr}}(\pi_1(X,x), \mathfrak{S}_n)$ par $\rho \sim \rho'$ si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que pour tout $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$, $\rho([\gamma]) = \sigma\rho'([\gamma])\sigma^{-1}$. Montrer que deux revêtements connexes p et p' à n feuillets de X sont isomorphes si et seulement si $\rho_p \sim \rho_{p'}$.
12. En déduire quel est l'ensemble des classes d'isomorphismes de revêtements connexes à 3 feuillets du noeud de trêfle $C_{2,3}$, autrement dit de revêtements connexes à 3 feuillets de $\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{2,3})$, en précisant lesquels sont galoisiens.

BARÈME– (note sur 10) : 1-0,5-0,5-1-1,25-1,25-1,5-(0,75-0,75)-1,25-1-1,25
15

1. On parle de *tore plein*.
2. On pourra commencer par établir par récurrence sur la longueur d'un mot qu'un élément de torsion est conjugué à un élément de torsion de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou de $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

Corrigé

1. La fonction φ est clairement de classe C^∞ et sa matrice jacobienne en $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -2\pi(\sqrt{2}+\cos(2\pi y))\sin(2\pi x) & -2\pi\sin(2\pi y)\cos(2\pi x)\\ 2\pi(\sqrt{2}+\cos(2\pi y))\cos(2\pi x) & -2\pi\sin(2\pi y)\sin(2\pi x)\\ 0 & 2\pi\cos(2\pi y)\end{pmatrix}.$$

Si $\cos(2\pi y)\neq 0$, alors $-2\pi(\sqrt{2}+\cos(2\pi y))\sin(2\pi x)\neq 0$ ou $2\pi(\sqrt{2}+\cos(2\pi y))\cos(2\pi x)\neq 0$ ce qui implique que la matrice est de rang 2, autrement dit que $d\varphi_{(x,y)}$ est injective. Lorsque $\cos(2\pi y)=0$, on obtient

$$\begin{pmatrix} -2\pi\sqrt{2}\sin(2\pi x) & \pm 2\pi\cos(2\pi x)\\ 2\pi\sqrt{2}\cos(2\pi x) & \pm 2\pi\sin(2\pi x)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

et le mineur 2×2 constitué des deux premières lignes vaut $\pm 4\sqrt{2}\pi^2\neq 0$ et la matrice est également de rang 2 et $d\varphi_{(x,y)}$ est injective. Dans tous les cas, on obtient bien une immersion C^∞.
On a clairement que pour tous $(x,y),(x',y')\in\mathbf{R}^2$,

$$\varphi(x,y)=\varphi(x',y') \iff (x,y)-(x',y')\in\mathbf{Z}^2.$$

En effet la réciproque est évidente et pour le sens direct, la condition $\sin(2\pi y)=\sin(2\pi y')$ implique que $y-y'\in\mathbf{Z}$ auquel cas $\cos(2\pi x)=\cos(2\pi x')$ et $\sin(2\pi x)=\sin(2\pi x')$ donc $x-x'\in\mathbf{Z}$ ou $y+y'\in\frac{1}{2}+\mathbf{Z}$ et $\cos(2\pi y')=-\cos(2\pi y)$ ce qui implique, puisque $(\sqrt{2}+\cos(2\pi y)\cos(2\pi x)=(\sqrt{2}-\cos(2\pi y)\cos(2\pi x')$ et $(\sqrt{2}+\cos(2\pi y)\sin(2\pi x)=(\sqrt{2}-\cos(2\pi y)\sin(2\pi x')$, que

$$(\sqrt{2}+\cos(2\pi y))^2=(\sqrt{2}+\cos(2\pi y))^2 \quad\text{soit}\quad \cos(2\pi y)=0.$$

Ainsi, on a $y\in\frac{1}{4}+\mathbf{Z}$ et $y'\in\frac{1}{4}+\mathbf{Z}$ si bien que $y-y'\in\mathbf{Z}$. Finalement, $\cos(2\pi x)=\cos(2\pi x')$ et $\sin(2\pi x)=\sin(2\pi x')$ donc $x-x'\in\mathbf{Z}$.
On a donc bien l'équivalence et ainsi ϕ fournit par passage au quotient une application injective continue $\tilde{\varphi}:\mathbf{T}^2\longrightarrow\mathbf{R}^3$. L'image de $\tilde{\varphi}$ est séparé (car $\mathbf{R}^3$ l'est) et $\mathbf{T}^2$ est compact donc on en déduit qu'il s'agit d'un homéomorphisme sur son image!

2. On a démontré en TD que dans ce cas, $C_{p,q}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^1$. Je vous renvoie ici pour des dessins et des représentations graphiques. Je vous renvoie également aux pages Wikipedia du trefoil knot et du overhand knot.

3. On constate sur les dessins que les noeuds $C_{1,q}$ et en fait aussi les $C_{p,1}$ sont des "noeuds triviaux" dans le sens qu'on peut aisément voir qu'on peut les déplier de façon continue et continûment réversible sur un cercle (que l'on peut prendre égal à $C_{1,0}$ qui est le cercle donné par $(x-\sqrt{2})^2+z^2-1=y=0$ par exemple). Ainsi, pour tout $q\geqslant 0$, il existe un homéomorphisme $f:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$ vérifiant $f(C_{1,q})=C_{1,0}$. On a donc bien que pour tout $q\geqslant 0$, $\mathbf{R}^3\setminus C_{1,q}\cong\mathbf{R}^3\setminus C_{1,0}$. Noter que $C_{p,q}$ est donné par

$$\left\{\Big((\sqrt{2}+\cos(2\pi pt))\cos(2\pi qt),(\sqrt{2}+\cos(2\pi pt))\sin(2\pi qt),\sin(2\pi pt)\Big)\ :\ t\in\mathbf{R}\right\}.$$

Il n'est alors pas facile de décrire explicitement un tel homéomorphisme et on ne le fera pas ici. On a que l'application

$$\psi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{S}^3\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos(2\pi x),\sin(2\pi x),\cos(2\pi y),\sin(2\pi y)\Big)\end{array}\right.$$

est une immersion C^∞ qui fournit au quotient une application $\tilde{\psi}:\mathbf{T}^2\longrightarrow\mathbf{S}^3$ qui est un homéomorphisme sur son image. On constate alors que $C_{p,q}$ correspond à

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(z^q,z^p)\ :\ z\in\mathbf{S}^1\right\}.$$

Noter que l'homéomorphisme de $\mathbf{S}^3$ donné par $(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto(x_3,x_4,x_1,x_2)$ envoie $C_{p,q}$ sur $C_{q,p}$ de sorte que $\mathbf{S}^3\setminus C_{p,q}\cong\mathbf{S}^3\setminus C_{q,p}$ et donc $\mathbf{R}^3\setminus C_{p,q}\cong\mathbf{R}^3\setminus C_{q,p}$. On dit que les deux noeuds sont *équivalents*, ce qui n'est pas complètement évident à partir des dessins de $C_{2,3}$ et de $C_{3,2}$ par exemple et cela permet peut être de voir plus clairement l'homéomorphisme entre $\mathbf{R}^3\setminus C_{p,1}$ et $\mathbf{R}^3\setminus\mathbf{S}_1$.
On a de même avec $(x,y,z)\mapsto(x,y,-z)$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui envoie $C_{p,q}$ sur $C_{p,-q}$ et $(x,y,z)\mapsto(x,-y,z)$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui envoie $C_{p,q}$ sur $C_{-p,q}$. Il suffit donc à présent d'étudier les noeuds $C_{p,q}$ avec $1<p<q$ et $\mathrm{pgcd}(p,q)=1$.

4. On rappelle que pour tout $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, on a que s est un homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ sur $\mathbf{S}^3\setminus\{N\}$ donné par

$$s(x,y,z)=\left(\frac{2x}{1+S},\frac{2y}{1+S},\frac{2z}{1+S},\frac{S-1}{1+S}\right)\quad\text{avec}\quad S=x^2+y^2+z^2.$$

Compléments sur la question 3

On peut expliciter l'homéomorphisme comme suit : par ce qui précède, il suffit de traiter $\mathbb{R}^3 - C_{q,1}$.

On a alors en identifiant $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$,

$$C_{q,1} = \left((\sqrt{2} + \cos(2\pi q x)) e^{2i\pi x}, \sin(2\pi q x) \right)$$

On pose alors

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(re^{2i\pi x}, z) \longmapsto \left(\frac{(\sqrt{2}+1)\, r}{\sqrt{2} + \cos(2\pi q x)} e^{2i\pi x}, z \right)$$

$$(0, z) \longmapsto (0, z)$$

qui est un homéo vérifiant

$$\varphi(C_{q,1}) = \left((\sqrt{2}+1) e^{2i\pi x}, \sin(2\pi q x) \right).$$

$$\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(re^{2i\pi x}, z) \longmapsto \left(re^{2i\pi x}, z - \frac{r}{\sqrt{2}+1} \sin(2\pi q x) \right)$$

$$(0, z) \longmapsto (0, z)$$

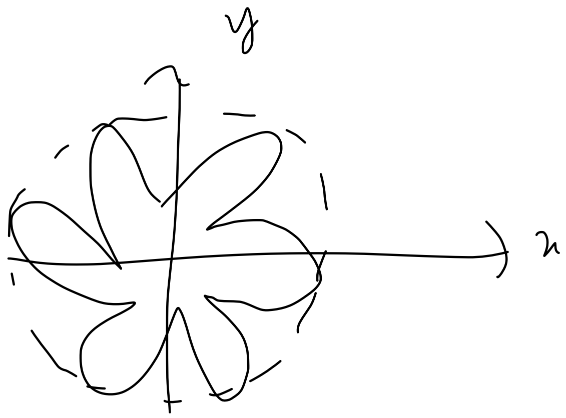
est un homéo tq

$$\psi\left((\sqrt{2}+1) e^{2i\pi x}, \sin(2\pi q x) \right) = \left((\sqrt{2}+1) e^{2i\pi x}, 0 \right) = C_{0,1}.$$

On a donc $\mathbb{R}^3 - C_{q,1} \simeq \mathbb{R}^3 - C_{0,1}$ et

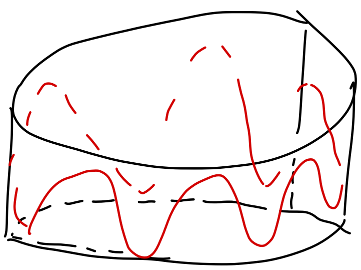
donc $\mathbb{R}^3 - C_{1,q} \simeq \mathbb{R}^3 - C_{1,0} \simeq \mathbb{R}^3 - S^1$.

Dans l'étape 1, on projette sur le plan (Oxy) et on obtient des choses du type



que l'on envoie continûment sur le cercle pointillé.

Après avoir appliqué f, on obtient



et il n'y a plus qu'à "aplatir" tout ça sur le cercle du bas via ψ.

On pouvait bien sûr raisonner "à la main" en distinguant selon que les points sont sur $\mathbf{T}^2 \setminus C_{p,q}$ ou pas mais on donne ici une démonstration plus rigoureuse qui est un cas particulier du résultat plus général suivant : pour toute variété M connexe de dimension $n \geqslant 2$ et N sous-variété de dimension au plus $n-2$, alors $M \setminus N$ est connexe[3].

On a que $\tilde{\varphi}(C_{p,q}) = \varphi(D_{p,q})$ est l'image d'un compact par une application continue donc est compact (donc fermé) de $\mathbf{R}^3$. Par ailleurs, φ étant une immersion $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que $\tilde{\varphi}(C_{p,q})$ est une sous-variété fermée $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 1 de $\mathbf{R}^3$. Ainsi, $\mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}$ est un ouvert et pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}$, il existe deux boules ouvertes (donc connexes par arcs) $U_\mathbf{x}$ et $U_\mathbf{y}$ contenant respectivement $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. On note alors $\mathcal{D}$ la droite passant par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. On note alors $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à $\mathcal{D}$ contenant $(0,0,0)$ et $p : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$. On voit que p est une application ouverte[4] et donc fermée car surjective. Ainsi, $p(U_\mathbf{x})$ et $p(U_\mathbf{y})$ sont deux ouverts de $\mathcal{P}$ qui se rencontrent car ils contiennent tous les deux $p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{y})$. Par ailleurs, $p : C_{p,q} \longrightarrow \mathcal{P}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car restriction de p linéaire à la sous-variété de dimension 1 $C_{p,q}$ et le lemme de Sard implique alors que $p(C_{p,q})$ est un fermé de mesure nulle dans $\mathcal{P}$. Ainsi, $\mathcal{P} \setminus p(C_{p,q})$ est un ouvert dense qui rencontre par conséquent l'ouvert non vide $p(U_\mathbf{x}) \cap p(U_\mathbf{y})$. Il existe alors $\mathbf{z} \in \mathcal{P} \setminus p(C_{p,q}) \cap p(U_\mathbf{x}) \cap p(U_\mathbf{y})$. On obtient alors que $p^{-1}(\{\mathbf{z}\})$ est une droite incluse dans $\mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}$ contenant un point de $U_\mathbf{x}$ et un point de $U_\mathbf{y}$. Il suffit alors de concaténer un chemin continu dans $U_\mathbf{x}$ de $\mathbf{x}$ au point de la droite dans $U_\mathbf{x}$ puis on parcourt la droite jusqu'au point de la droite dans $U_\mathbf{y}$ que l'on concatène avec un chemin dans $U_\mathbf{x}$ de ce point à $\mathbf{y}$ pour conclure que $\mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}$.

Enfin, via s, on a $\mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}$ homéomorphe à $\mathbf{S}^3 \setminus (\{N\} \cup s(C_{p,q}))$ et donc $\mathbf{S}^3 \setminus (\{N\} \cup s(C_{p,q}))$ et *a fortiori* $\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{p,q})$. En effet, si on doit relier deux points $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ distincts de N, on peut le faire dans $\mathbf{S}^3 \setminus (\{N\} \cup s(C_{p,q}))$ et si un des points est N (disons $\mathbf{y}$), comme $s(C_{p,q})$ est un fermée de $\mathbf{S}^3 \setminus \{N\}$ donc de $\mathbf{S}^3$ car s est un homéomorphisme, on peut trouver un voisinage de N dans $\mathbf{S}^3$ connexe par arcs et relier N à un point $\mathbf{x}$ distincts de N dans ce voisinage et on applique alors la connexité par arcs de $\mathbf{S}^3 \setminus (\{N\} \cup s(C_{p,q}))$ pour trouver un chemin continu de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{z}$ dans $\mathbf{S}^3 \setminus (\{N\} \cup s(C_{p,q}))$. On a ainsi le résultat !

Enfin, on a pour tout $\mathbf{x} \notin C_{p,q}$ que

$$\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}, \mathbf{x}) \cong \pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus (\{N\} \cup s(C_{p,q})), s(\mathbf{x})).$$

Mais, $s(C_{p,q})$ est un fermé de $\mathbf{S}^3$ qui est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 3. Par conséquent, $\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{p,q})$ est un ouvert de $\mathbf{S}^3$ et donc également une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 3. L'exercice 5 du TD IV fournit alors immédiatement (comme conséquence de Van Kampen) que

$$\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus (\{N\} \cup s(C_{p,q})), s(\mathbf{x})) \cong \pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{p,q}, s(\mathbf{x}))$$

et on a donc bien

$$\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus C_{p,q}, \mathbf{x}) \cong \pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{p,q}), N)$$

où l'on a pu changer de point base par connexité par arcs de $\mathbf{S}^3 \setminus s(C_{p,q})$.

5. On pose ici

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \sqrt{2}x_3, \sqrt{2}x_4 \right) \end{array} \right.$$

qui est bien définie car $0 \neq x_1^2 + x_2^2 \geqslant \frac{1}{2}$, $\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right) \in \mathbf{S}^1$ et $2(x_3^2 + x_4^2) \leqslant 1$ car $x_3^2 + x_4^2 \leqslant \frac{1}{2}$. Par ailleurs, φ est clairement continue et injective[5]. Vérifions alors que φ est surjective. Pour ce faire, soit $((x,y),(z,t)) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2$. On pose alors $x_3 = \frac{z}{\sqrt{2}}$ et $x_4 = \frac{t}{\sqrt{2}}$. On cherche alors x_1 et x_2 tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ et $x_1^2 + x_2^2 \geqslant \frac{1}{2}$. On a alors nécessairement $x_1^2 + x_2^2 = 1 - \frac{z^2+t^2}{2} \geqslant \frac{1}{2}$ car $(z,t) \in \mathbf{B}^2$. Il suffit alors de poser $x_1 = x\sqrt{1 - \frac{z^2+t^2}{2}}$ et $x_2 = y\sqrt{1 - \frac{z^2+t^2}{2}}$ pour obtenir un antécédent ! On a ainsi une bijection continue avec A un fermé dans $\mathbf{S}^3$ compact donc compact et $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2$ séparé donc un homéomorphisme[6].

3. Dans le cas N fermée, on peut adapter la démonstration qui suit. Par le théorème de Whitney, on peut supposer que M est une sous-variété de $\mathbf{R}^{2n}$. Pour tout $m \in M \setminus N$, on pose U_m l'ensemble des points $m' \in M$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m'' \in M$ dans la boule de centre m et de rayon ε qu'on peut relier à m par un chemin continu dans $M \setminus N$. Noter qu'on peut avoir $m' \in N$. On montre alors en utilisant le fait que M est localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ que U_m est ouvert (en raisonnant comme ci-dessous et en distinguant selon que m' est dans N ou non) et fermé dans M si bien que $U_m = M$, ce qui permet de conclure par locale connexité par arcs de $M \setminus N$ qui est une sous-variété de dimension n en tant qu'ouvert de M.

4. Ici cela se voit directement à la main mais en fait il s'agit d'un résultat plus général : toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ surjective avec F de dimension finie est ouverte, conséquence par exemple du théorème de l'application ouverte de Banach-Schauder.

5. En effet, si $x_3 = x_3'$ et $x_4 = x_4'$, alors $x_1^2 + x_2^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2$ car $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2 = 1$ et de

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) = \left(\frac{x_1'}{\sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}}, \frac{x_2'}{\sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}} \right)$$

on tire $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$.

6. On pouvait aussi exhiber l'inverse qui transparaît du raisonnement ci-dessus.

On procède évidemment de même avec

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \dfrac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2 \right) \end{array} \right.$$

car $x_1^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{2}$ équivaut à $x_3^2 + x_4^2 \geqslant \frac{1}{2}$ pour en déduire que $B \cong \mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2$.

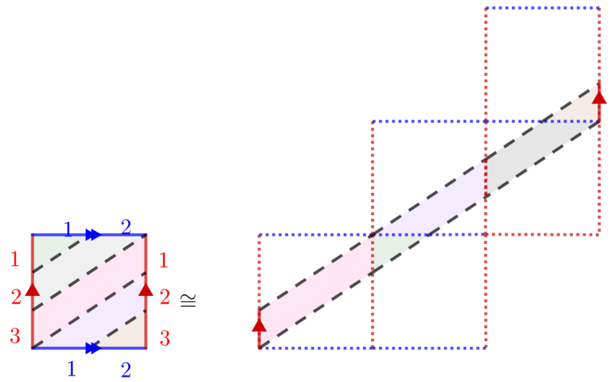
On pose finalement $\theta : (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2) \bigsqcup (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2) \longrightarrow \mathbf{S}^3$ définie sur la première copie de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2$ par φ^{-1} et sur la seconde copie par ψ^{-1}. On obtient ainsi par définition une application continue et clairement surjective car $A \cup B = \mathbf{S}^3$. Par ailleurs, deux points $((x_i, y_i, z_i, t_i), i)$ et $((x_j, y_j, z_j, t_j), j)$ pour $i, j \in \{1, 2\}$ ont la même image si, et seulement si, ils sont égaux ou $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et $i_1(x_1, y_1, z_1, t_1) = i_2(z_2, t_2, x_2, y_2)$, autrement dit si et seulement s'ils sont équivalents pour $\mathcal{R}$. Ainsi, on obtient au quotient une bijection continue $\tilde{\theta} : (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2) \cup_{\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1} (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2) \longrightarrow \mathbf{S}^3$. On peut conclure soit en montrant que $(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2) \cup_{\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1} (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2)$ est compact[7] et $\mathbf{S}^3$ est séparé soit en exhibant la réciproque qui à tout point de $\mathbf{S}^3$ associe son image par φ s'il est dans A et son image par ψ s'il est dans B que l'on compose avec la projection canonique. On obtient une application continue dont on vérifie qu'elle est la réciproque de $\tilde{\theta}$.

►**Remarque –** On peut montrer plus généralement de même que

$$\mathbf{S}^n \cong (\mathbf{S}^q \times \mathbf{B}^p) \bigcup_{\mathbf{S}^{p-1} \times \mathbf{S}^q} \left(\mathbf{S}^{p-1} \times \mathbf{B}^{q+1} \right)$$

pour tous (p, q) entiers tels que $n = p + q$ et $p \geqslant 1$.

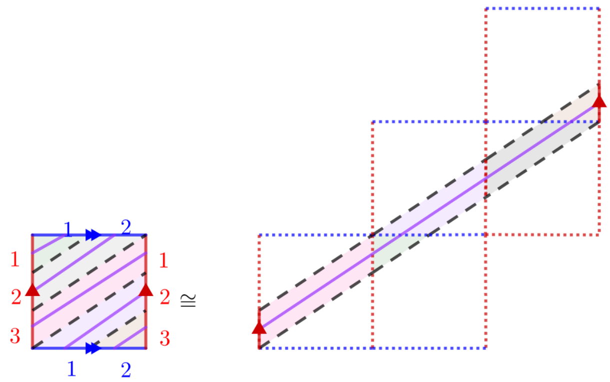
6. On utilise la représentation du tore par un carré dans lequel on identifie les côtés opposés. On procède alors en réarrangeant les morceaux de ce carré délimités par les segments de $C_{p,q}$ (en pointillés ci-dessous) et en recollant le long des identifications sur les bords de façon à obtenir un cylindre, de type d'homotopie d'un cercle. On fournit ici des dessins dans le cas de $C_{2,3}$.



On obtient finalement que

$$\pi_1 \left(\mathbf{T}^2 \setminus C_{p,q}, x \right) = \langle c \rangle \cong \mathbf{Z}$$

pour tout $x \in \mathbf{T}^2 \setminus C_{p,q}$. On donne dans le cas de $C_{2,3}$ un générateur c en violet :



7. Car l'union disjointe l'est et le quotient séparé.

On peut raisonner un peu différemment en voyant $\mathbf{T}^2$ à travers $\tilde{\psi}$ avec les notations de la question **3.** On a ainsi $C_{p,q} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(z^q, z^p) \ : \ z \in \mathbf{S}^1\right\}$ et $A \cap B = \tilde{\psi}(\mathbf{T}^2) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(z, w) \ : \ (z, w) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1\right\} \cong \mathbf{T}^2$. On vérifie alors que

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(z, w) & \longmapsto & \left(\sqrt{2}^{q-p} \frac{z^p}{w^q}, \sqrt{2}^{v-u} \frac{w^u}{z^v}\right) \end{array} \right.$$

où l'on a choisi u, v entiers tels que $pu - qv = 1$ par la relation de Bézout car p et q sont premiers entre eux. On obtient une application bien définie et on va en calculer la réciproque. Soient $(z_1, z_2) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. On cherche $\frac{1}{\sqrt{2}}(z, w) \in A \cap B$ tels que $z_1 = \sqrt{2}^{q-p} \frac{z^p}{w^q}$ et $z_2 = \sqrt{2}^{v-u} \frac{w^u}{z^v}$. On a alors

$$z_1^u z_2^q = \frac{1}{\sqrt{2}} z \quad \text{et} \quad z_1^v z_2^p = \frac{1}{\sqrt{2}} w.$$

Ainsi, on a bien un inverse continu et f est un homéomorphisme dont on vérifie que $f(C_{p,q}) = \{1\} \times \mathbf{S}^1$. Il s'ensuit que $\mathbf{T}^2 \smallsetminus C_{p,q}$ est homéomorphe à un cylindre et on retrouve le résultat! On peut prendre comme générateur de $\pi_1(\mathbf{T}^2 \smallsetminus C_{p,q})$ tout lacet $t \mapsto (z_0, e^{2i\pi t})$ pour $z_0 \in \mathbf{S}^1 \smallsetminus \{1\}$.

7. On va appliquer le théorème de Van Kampen pour calculer le groupe fondamental de $\mathbf{S}^3 \smallsetminus s(C_{p,q})$ et utiliser la question **4.** On fait alors appel à la question **5.** En effet, on peut inclure $U = A \cap \mathbf{S}^3 \smallsetminus s(C_{p,q})$ dans un ouvert U' connexe par arcs [8] de $\mathbf{S}^3 \smallsetminus s(C_{p,q})$ qui se rétracte par déformation forte sur U. On a alors que U' a même type d'homotopie que U. Mais, on a vu que A est homéomrophe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{B}^2$ et la déformation forte induite par la rétraction radiale de $\mathbf{B}^2$ fournit une rétraction forte $r : A \to \mathbf{S}^1 \times \{0\}$ donnée par $(z, w) \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, 0\right)$ si on représente le point (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbf{S}^3$ par $(z := x_1 + ix_2, w := x_3 + ix_4) \in \mathbf{C}^2$. Cette rétraction par déformation forte fournit une rétraction par déformation forte de U' sur $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$. Par ailleurs, U' est connexe par arcs par les mêmes arguments que précédemment et on en déduit que $\pi_1(U') \cong \mathbf{Z}$ et on peut considérer un générateur a qui fait un tour de la première copie de $\mathbf{S}^1$ du bord $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ le long duquel on recolle A et B. Ce bord est un tore sur lequel vit $s(C_{p,q})$.

On procède de même avec $V = B \cap \mathbf{S}^3 \smallsetminus s(C_{p,q})$ dans un ouvert V' connexe par arcs de $\mathbf{S}^3 \smallsetminus s(C_{p,q})$ qui se rétracte par déformation forte sur V qui se rétracte lui-même par déformation forte sur $\{0\} \times \mathbf{S}^1$. On obtient que $\pi_1(V') \cong \mathbf{Z}$ et on peut considérer un générateur b qui fait un tour de la deuxième copie de $\mathbf{S}^1$ du bord $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ le long duquel on recolle A et B.

Finalement, $U' \cap V'$ est connexe par arcs et se rétracte par déformation forte sur $A \cap B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(z, w) \ : \ (z, w) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1\right\}$ privé de $s(C_{p,q})$ qui est bien inclus dans $A \cap B$. La question précédente fournit alors que $U' \cap V'$ a le type d'homotopie de $\mathbf{T}^2 \smallsetminus C_{p,q}$ et que $\pi_1(U' \cap V', x) = \langle c \rangle \cong \mathbf{Z}$. On constate alors sur les dessins ci-dessus que a correspond au lacet rouge, b au lacet bleu et c au lacet violet. On peut donc se convaincre facilement, soit sur le dessin que $i_{1,*}(c) = a^p$ et $i_{2,*}(c) = a^p$ où $i_{1,*} : \pi_1(U' \cap V') \to \pi_1(U')$ et $i_{2,*} : \pi_1(U' \cap V') \to \pi_1(V')$ sont les applications induites par les inclusions., soit en utilisant la fin de la question précédente. En effet, un générateur de $\pi_1(U' \cap V')$ est donné dans $A \cap B$ par $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(z_0^u e^{2i\pi qt}, z_0^v e^{2i\pi pt})$ de sorte que si a est donné par $t \mapsto (0, z_0^v e^{2i\pi t})$, alors $i_{1,*}(c)$ est donné par (à travers la rétraction forte) $t \mapsto (0, z_0^v e^{2i\pi pt})$ correspond bien à a^p tandis que si b est donné par $t \mapsto (z_0^u e^{2i\pi t}, 0)$, alors $i_{2,*}(c)$ est donné par (à travers la rétraction forte) $t \mapsto (z_0^u e^{2i\pi qt}, 0)$ et correspond bien à b^q. Finalement, on conclut bien par le théorème de Van Kampen (par connexité par arcs, on peut prendre n'importe quel point base) que $\pi_1\left(\mathbf{S}^3 \smallsetminus s(C_{p,q}), N\right)$ admet comme présentation $\langle a, b \mid a^p b^{-q} \rangle$.

On reconnaît lorsque $p = 1$ (le cas $q = 1$ étant analogue) $\langle a, b \mid a = b^q \rangle = \langle b \rangle \cong \mathbf{Z}$. On retrouve bien le groupe fondamental de $\mathbf{R}^3 \smallsetminus \mathbf{S}^1$ qui est isomorphe au groupe fondamental de $\mathbf{R}^3 \smallsetminus \mathcal{D}$ pour une droite $\mathcal{D}$ comme on l'a vu dans le dernier exercice du TD IV.

8. On a la relation $a^p = b^q$ donc on a clairement que $\langle a^p \rangle = \langle b^q \rangle$. Pour vérifier que C est distingué (en raisonnant par récurrence sur la longueur des mots), il suffit d'établir que pour tout $x \in C$

$$axa^{-1} \in C \quad \text{et} \quad bxb^{-1} \in C.$$

Par définition, on a $x = a^{pk} = b^{q\ell}$ pour $k, \ell \in \mathbf{Z}$. Il s'ensuit que

$$axa^{-1} = aa^{pk}a^{-1} = a^{pk} = x \in C$$

et de même

$$bxb^{-1} = bb^{q\ell}b^{-1} = b^{q\ell} = x \in C$$

et on a bien que C est un sous-groupe normal de $G_{p,q}$.

On sait alors que

$$G_{p,q}/C = \langle a, b \mid a^p = b^q, \ a^p = b^q = e \rangle = \langle a, b \mid a^p = b^q = e \rangle = \langle a \mid a^p = e \rangle * \langle b \mid b^q = e \rangle = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}.$$

8. On obtient un tore plein privé de $C_{p,q}$ sur son bord et "on l'épaissit" un petit peu. En repassant dans $\mathbf{R}^3$, il suffit par exemple pour ce faire, pour tout $x \in A \cap \mathbf{S}^3 \smallsetminus s(C_{p,q}) \cong \mathbf{T} \smallsetminus C_{p,q}$ où $\mathbf{T}$ désigne le tore plein, d'agrandir le segment $[O, x]$ en un segment $[0, x'[$ avec $[x, x']$ de longueur $\varepsilon > 0$.

9. Par définition de l'abélianisé [9], on a

$$(G_{p,q}/C)^{\mathrm{ab}} = \langle a, b \mid a^p = b^q = e\rangle / \langle\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle\rangle = \langle a, b \mid a^p = b^q = e, \ , ab = ba\ \rangle = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}.$$

Ainsi, le produit pq est déterminé par $G_{p,q}$. Montrons alors que $\max(p, q)$ aussi, ce qui déterminera p et q.

Soit m un élément de torsion de $G_{p,q}/C$. Montrons par récurrence sur la longueur du mot m que m est conjugué à un élément de torsion de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou de $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. C'est clair pour le mot vide et pour un mot de longueur 1, car un tel mot est dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Supposons alors le résultat pour les mots de longueur $k < n$ et que $m = w_1 \cdots w_n$ est de longueur n et de torsion dans $G_{p,q}/C$. Il existe alors un entier s tel que m^s soit le mot vide. Cela implique nécessairement que $w_n = w_1^{-1}$ et m doit être de la forme $w_1 \cdots w_{n-1} w_1^{-1}$ et m est donc conjugué au mot $w_2 \cdots w_{n-1}$ de longueur $< n$ et de torsion. On conclut alors par hypothèse de récurrence !

Finalement, un mot de torsion m de $G_{p,q}/C$ est conjugué à un élément de torsion dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, si bien qu'il est d'ordre divisant p ou q et ainsi tout élément de torsion est d'ordre inférieur à $\max(p, q)$. Il est alors iémmdiat de construire un élément de torsion de cet ordre si bien que le maximum des ordres des éléments de torsion de $G_{p,q}/C$ est $\max(p, q)$. Ainsi, $G_{p,q}$ détermine p et q. On en déduit que si $G_{p,q} \cong G_{p',q'}$ avec $1 < p < q$ et $1 < p' < q'$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = \mathrm{pgcd}(p', q')$, alors $(p, q) = (p', q')$. Finalement, tous les $\mathbf{R}^3 \smallsetminus C_{p,q}$ avec $1 < p < q$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ ont des π_1 2 à 2 non isomorphes et sont par conséquent 2 à 2 non homéomorphes !

10. On a une action de groupe et donc une bijection entre $H_1/\pi_1(X, x)$ et l'orbite de 1, qui est $\{1, \dots, n\}$ tout entier puisque l'action est transitive. On en déduit que $H_1/\pi_1(X, x)$ est de cardinal n et donc que H_1 est d'indice n. Soit alors $\pi : \tilde{X} \to X$ un revêtement universel (qui existe et est unique à isomorphisme près grâce aux hypothèses de l'énoncé). Le revêtement associé à H_1 est alors, à isomorphisme près, le revêtement $p_{H_1} : E := H_1/\tilde{X} \to X$. Il est à n feuillets car H_1 est d'indice n et est galoisien si, et seulement si, H_1 est distingué dans $\pi_1(X, x)$. On sait d'après le cours qu'on a une bijection entre $p^{-1}(x)$ et $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))/\pi_1(X, x)$ pour tout $\tilde{x} \in E$ tel que $p(\tilde{x}) = x$. On sait aussi que tous les $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ sont conjugués à H_1, autrement dit sont le stabilisateur d'un élément $k \in \{1, \dots, n\}$. On choisit alors d'identifier $k \in \{1, \dots, n\}$ avec l'unique $\tilde{x} \in E$ tel que $p(\tilde{x}) = x$ et tel que $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ soit le stabilisateur de k. Ainsi, $p_*(\pi_1(E, 1)) = H_1$.

Réciproquement, si $p : E \to X$ est un revêtement connexe à n feuillets, alors $p^{-1}(x)$ est de cardinal n et en l'identifiant à $\{1, \dots, n\}$, l'action de $\pi_1(X, x)$ sur la fibre fournit une action transitive (car on a supposé E connexe et comme p est un revêtement et X est connexe par arcs, E est connexe, localement connexe par arcs donc connexe par arcs) de $\pi_1(X, x)$ sur $\{1, \dots, n\}$, autrement dit un morphisme $\rho_p \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\pi_1(X, x), \mathfrak{S}_n)$. Ce morphisme est défini de la façon suivante. On considère $[\gamma]$ avec γ un lacet en x et $k \in \{1, \dots, n\}$ qui correspond à un élément de la fibre $p^{-1}(x)$. On a alors que $\rho_p([\gamma])(k)$ qui est défini comme étant l'extrémité de l'unique relevé de γ par p d'origine k. Noter que ce morphisme n'est pas unique mais dépend de la numérotation choisie pour les éléments de $p^{-1}(x)$. Cela conduit à la définition de la question suivante.

11. Tout isomorphisme de revêtement f induit par restriction une bijection entre $p^{-1}(x)$ et $p'^{-1}(x)$ car $p \circ f = p'$ et f est un homéomorphisme. En identifiant $p^{-1}(x)$ et $p'^{-1}(x)$ avec $\{1, \dots, \}$, cela fournit un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Maintenant, si $\tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement de γ d'extrémité k par p', $f \circ \tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement de γ par d'extrémité $\sigma(k)$ par p. Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tout $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$,

$$\rho_p([\gamma])(\sigma(k)) = f \circ \tilde{\gamma}(1) = f(\rho_{p'}([\gamma])(k)) = \sigma(\rho_{p'}([\gamma])(k)).$$

Ainsi, on a bien $\rho_p([\gamma]) = \sigma \rho_{p'}([\gamma])\sigma^{-1}$.

Réciproquement, supposons que l'on ait $\rho_p([\gamma]) = \sigma \rho_{p'}([\gamma])\sigma^{-1}$ pour deux revêtements connexes à n feuillets. On a alors en prenant la numérotation de la question **10.** que $p_*(\pi_1(E, 1))$ est le stabilisateur de 1 par ρ_p et que $p'_*(\pi_1(E', 1))$ est le stabilisateur de 1 par $\rho_{p'}$. De la relation $\rho_p([\gamma]) = \sigma \rho_{p'}([\gamma])\sigma^{-1}$, on en déduit que $p'_*(\pi_1(E', 1))$ est le stabilisateur de $k = \sigma(1)$ par ρ_p, à savoir $p_*(\pi_1(E, k))$. Ainsi, $p'_*(\pi_1(E', 1)) = p_*(\pi_1(E, k))$ et on sait d'après le cours que cela implique [10] l'existence d'un isomorphisme de revêtement $f : E \to E'$ tel que $f(1) = k$.

Ainsi, on a une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes à n feuillets et les classes d'équivalences de morphismes de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\pi_1(X, x), \mathfrak{S}_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

12. Il est clair que le complémentaire du noeud de trèfle satisfait les hypothèses des questions précédentes et il s'agit d'après les questions précédentes de trouver tous les morphismes de $G_{2,3} = \langle a, b \mid a^2 = b^3\rangle \to \mathfrak{S}_3$ dont l'image agit transitivement sur $\{1, 2, 3\}$, modulo renumérotation. Un tel morphisme ρ est défini par l'image de a et par celle de b telles que $\rho(a)^2 = \rho(b)^3$. Il faut donc que le cube de l'image de b soit le carré d'un élément. On a alors que $\rho(b)$ ne peut être que l'identité ou un 3-cycles [11]. Si $\rho(b) = \mathrm{Id}$, alors $\rho(a)^2 = \mathrm{Id}$ et donc est soit l'identité soit une transposition et dans tous les cas, le groupe image (qui est soit trivial soit à deux éléments engendré par une transposition) n'agit pas transitivement sur $\{1, 2, 3\}$. On doit donc avoir $\rho(b) = (123)$ ou (132). Quitte à renuméroter (ce qui fournit des revêtements isomorphes), on peut donc fixer $\rho(b) = (123)$. On a alors que $\rho(a)^2 = \mathrm{Id}$ et on a deux possibilités. La première est $\rho(a) = \mathrm{Id}$. Cela fournit un morphisme qui convient et qui correspond à une classe d'isomorphie de revêtement connexe à 3 feuillets du noeud de trèfles. Soit, $\rho(a)$ est une transposition. On peut alors supposer que [12] $\rho(a) = (12)$. Cela fournit un second morphisme qui

9. Ici, il suffit de faire commuter a et b.

10. On relève (de façon unique) l'application $p : E \to X$ par p' et on vérifie que le relèvement de $p' : E' \to X$ par p est alors une réciproque, de sorte qu'on obtient bien un isomorphisme !

11. Je rappelle que $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{Id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

12. Car $(123)(12)(132) = (23)$ et $(132)(12)(123) = (13)$ donc les autres choix s'obtiennent par renumérotation !

convient et qui correspond à une autre classe d'isomorphie de revêtement connexe à 3 feuillets du noeud de trêfles. À isomorphisme près, on a donc tous les revêtements connexes à 3 feuillets et ce sans avoir déterminé un revêtement universel.

Reste à déterminer si ces deux revêtements sont galoisiens. Dans le premier cas, on sait que $H_1 = p_*(\pi_1(E,1))$ est le stabilisateur de 1. On voit alors que H_1 est constitué des mots tels que la somme des puissances de b est congrue à 0 modulo 3 et que cette propriété est clairement stable par conjugaison. On a ainsi affaire à un revêtement galoisien. Dans le second cas, le fait que $\rho(a)$ fixe 3 incite à considérer $p_*(\pi_1(E,3))$ qui est le stabilisateur de 3. On constate alors par exemple que

$$\rho\Big(\big(ab^2\big)^{-1}a\big(ab^2\big)\Big) = \rho(b^{-2}ab^2) = (123)(12)(132) = (23)$$

qui ne fixe pas 3, alors que $\rho(a) = (12)$ appartient au stabilisateur de 3. On en déduit que $p_*(\pi_1(E,3))$ n'est pas distingué et que le revêtement n'est pas galoisien !