TD 04 : Présentations de groupes fondamentaux et Van Kampen

► ***Cette feuille de TD 4 nous occupera une semaine.***

Exercices fondamentaux

1. **Présentation de groupes**

   (a) Montrer que le groupe de présentation $\langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ possède $2n$ éléments et qu'il est isomorphe au groupe des isométries du plan laissant invariant un polygone régulier à n côtés.

   (b) Montrer que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\langle a, b \mid b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ et au groupe des isométries de $\mathbf{Z}$. On parle de *groupe diédral infini*.

2. **$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et le groupe modulaire**

   (a) On appelle groupe modulaire le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\{\pm I_2\}$. Montrer qu'on a un morphisme surjectif $f : \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$.
   Indication : On pourra commencer par établir que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est engendré par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) En considérant l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ donnée par
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}$$
   et en remarquant que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ positif, $S \cdot x < 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ négatif, $T \cdot x > 1$ et $0 < T^{-1} \cdot x < 1$, montrer que f est injective. Conclure.

   (c) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} *_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ pour les inclusions évidentes $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

3. **Applications du théorème de Van Kampen**

   Utiliser le théorème de Van Kampen pour décrire les groupes fondamentaux des espaces suivants :

   (a) La bouteille de Klein ;

   (b) Le plan projectif réel $\mathbf{P}_2(\mathbf{R}) \cong_{\{\pm \mathrm{Id}\}} \backslash \mathbf{S}^2$.

4. **Groupe fondamental de parties du plan**

   Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

   (a) Montrer que $\mathbf{R}^2 \setminus \{1, \dots, n\}$ se rétracte par déformation sur un bouquet de n cercles.

   (b) Décrire le groupe fondamental de $\mathbf{R}^2 \setminus \{1, \dots, n\}$.

   (c) Soit Σ' une partie finie de $\mathbf{S}_2$. Décrire le groupe fondamental de $\mathbf{S}_2 \setminus \Sigma'$.

Exercices complémentaires

5. **Calcul du groupe fondamental d'un recollement**

   Pour $i \in \{1, 2\}$, soient $p_i \in \mathbf{N}^*$, B_i une copie du disque $\mathbf{B}^2$ et S_i une copie de $\mathbf{S}^1$ pointée en $x_i = 1$. On identifie S_i avec son image dans le bouquet de cercles $S_1 \vee S_2$. Soit $f_i : \partial B_i \to S_i$ l'application $z \mapsto z^{p_i}$ et soit X l'espace topologique recollement suivant
   $$X := \left(B_1 \bigsqcup B_2 \right) \cup_{f_1 \bigsqcup f_2} (S_1 \vee S_2) .$$
   Calculer le groupe fondamental de X.

6. **Variétés topologiques**

   Soit X une variété topologique connexe par arcs de dimension $d \geqslant 3$. Montrer que, pour toute partie finie $\Sigma \subset X$, pour tout $x \in X \setminus \Sigma$, on a $\pi_1(X \setminus \Sigma, x) \simeq \pi_1(X, x)$. On pourra utiliser le théorème de Van Kampen.

7. **Groupe fondamental de parties de $\mathbf{R}^3$**

   On s'intéresse dans cet exercice aux groupes fondamentaux de certaines parties de $\mathbf{R}^3$. Soient C le cercle $\{x^2 + y^2 - 1 = z = 0\}$, D la droite $\{x = y = 0\}$ et $x = (3, 0, 0)$.

   (a) Montrer, en utilisant la projection stéréographique, que $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus D, x) \simeq \pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus C, x)$ et en déduire $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus C, x)$.

   (b) Soient $L_1, \dots, L_n$ des droites verticales et deux à deux disjointes de $\mathbf{R}^3$. Calculer le groupe fondamental de $\mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^n L_i$.

(c) Soient deux droites D, D' de $\mathbf{R}^3$ qui s'intersectent en un unique point. Montrer que $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus (D \cup D'))$ est un groupe libre à 3 générateurs.

8. Sous-variétés et groupe fondamental

Soient r, R deux réels strictement positifs. On pose

$$T = \left\{((R + r\cos(\varphi))\cos(\theta), (R + r\cos(\varphi))\sin(\theta), r\sin(\varphi)) \mid (\theta, \varphi) \in \mathbf{R}^2\right\} \subseteq \mathbf{R}^3.$$

(a) Préciser les valeurs de r et de R telles que T soit une sous-variété de $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^3$ dont on précisera alors la dimension.

(b) Montrer que T est homéomorphe à un espace connu.

(c) Décrire, en utilisant le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de T puis le groupe fondamental de T privé d'un point.