Cours du 21 janvier

K. Destagnol

Université Paris Saclay

21 janvier 2021

$1^{\text{ère}}$ remarque : lorsque $0 \leq u_n \leq v_n$

et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge. Alors on ne peut rien

dire sur $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Il faut absolument vérifier que les suites sont positives

avant d'appliquer ce résultat.

[Ex : $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$

et $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge]

$2^{\text{ème}}$ remarque : $0 \leq \boxed{u_n} \leq \boxed{v_n}$.

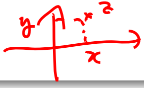
Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, alors on ne peut rien dire

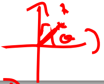
sur $\sum_{n\geq 0} u_n$!!!!

Chapitre 3

Séries de Fourier

Quelques rappels sur les complexes I





forme algébrique

Un nombre complexe $\boxed{z = x + iy}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme $\boxed{z = re^{i\theta}}$ où

Forme trigonométrique

$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ est le module de z et θ l'argument de z vérifiant pour $z \neq 0$

$$\boxed{\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r}. \end{cases}}$$

La partie réelle de z est x et sa partie imaginaire est y.

$z = i = 0 + 1 \times i$

Forme alg.

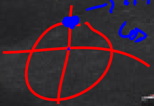
forme $\Rightarrow$ trigo

$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 = |i|$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{r} = 0 \\ \sin\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ et $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$\boxed{i = e^{i\pi/2}}$



Quelques rappels sur les complexes II

IMPORTANT

On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)} \text{ et } \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \underline{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}}$$

Quelques rappels sur les complexes II

On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)} \text{ et } \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}}$$

et $Re(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $Im(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$. Pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

où $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}^*_+} \times e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

$$= e^x\cos(y) + i\,e^x\sin(y).$$

Quelques rappels sur les complexes II

On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

et $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$. Pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Par ailleurs,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Quelques rappels sur les complexes II

On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

et $Re(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $Im(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$. Pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Par ailleurs,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

$\boxed{\cos(a+b)} = \mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)}\right)$ $\quad \sin(a+b) = \mathrm{Im}\left(e^{i(a+b)}\right)$

Mais $e^{i(a+b)} = e^{ia+ib} = e^{ia} \times e^{ib}$

$= (\cos a + i \sin a) \times (\cos b + i \sin b)$

$= \cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b + \overbrace{\underbrace{i^2}_{-1} \sin a \sin b}$

$= \boxed{\cos a \cos b - \sin a \sin b} + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b)$

Finalement, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Quelques rappels sur les complexes III

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \quad et$$

Quelques rappels sur les complexes III

$$\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)}$$

Σ pdt de 2 cosinus

utile pr les intégrale d'1 pdt de 2 cosinus.

idem pour les pdts de 2 sinus.

Quelques rappels sur les complexes III

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

et

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).$$

Quelques rappels sur les complexes III

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f(t)$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

et

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).$$

$t \mapsto$ nbre complexe et dépend de t

Pour conclure ces rappels, une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $f(t) = x(t) + iy(t)$ avec $x, y : I \to \mathbb{R}$ et on dira que f est dérivable sur I si, et seulement si, x et y le sont auquel cas

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

$(e^{2t})' = 2 \times e^{2t}$

Ex : $f(t) = \boxed{e^{it}}$ fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{it}$

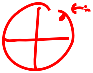
f dérivable et $\boxed{f'(t) = i \times e^{it}}$.

Fonction périodique

Fonction périodique

Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Fonction périodique



Fonction périodique

Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est T-périodique si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = f(t).$$

Ex : $f(t) = \cos t$ 2π-périodique $\qquad f(t+2\pi) = \cos(t+2\pi)$

$f(t) = \sin t$

$f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$

$f(t) = \cos(3t)$ est 2π-périodique.

2-périodique : $f(t+2) = f(t) \quad \forall t$.

$f(t) = \cos(\pi t)$ $\qquad f(t+2) = \cos(\pi(t+2)) = \cos(\pi t + 2\pi)$

$= \cos(\pi t)$

$= f(t)$

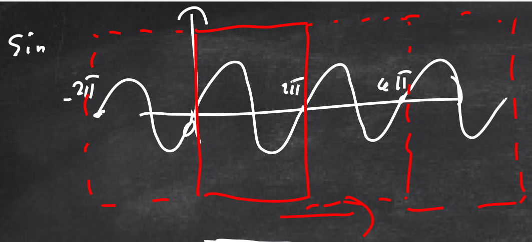
$\sin(\pi t)$

$e^{i\pi t}$

$t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ est T-périodique.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t+T)\right) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

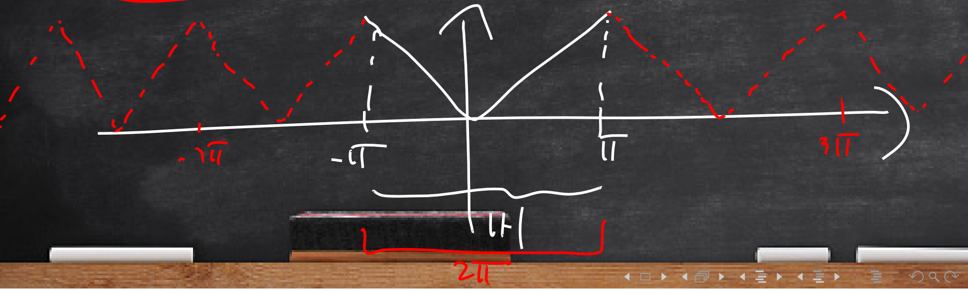
$t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ et $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{T} t}$ sont T-périodiques



Une fonction T-périodique est déterminée entièrement sur un intervalle de longueur T.

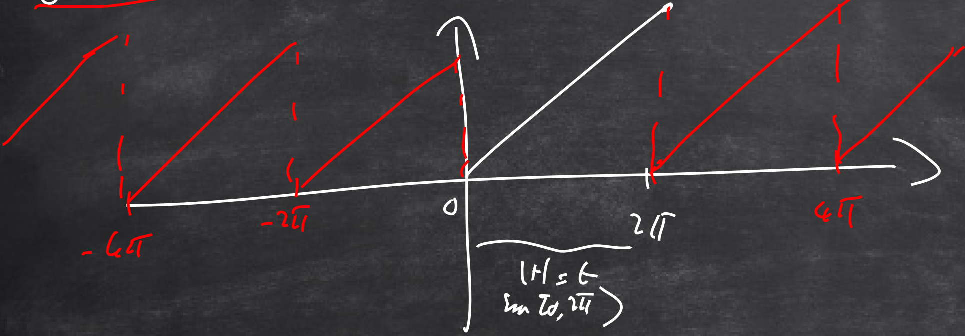
Ex : On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(t) = |t|$ sur $(-\pi, \pi)$

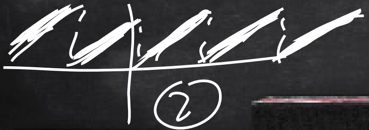
et f 2π-périodique.

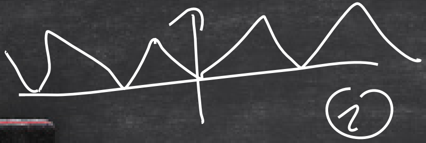


Ex 2 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boxed{2\pi\text{-périodique}}$ et

$f(t) = |t|$ sur $\boxed{[0, 2\pi[}$.







Régularité d'une fonction

Fonction continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est continue sur $\mathbb{R}$ si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) = f(t_0).$$

Autrement dit, on peut tracer le graphe de f sans "lever le crayon".

Régularité d'une fonction

continue $\Rightarrow$ continue par morceaux.

continue par morceaux $\not\Rightarrow$ continue.

Fonction continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est continue sur $\mathbb{R}$ si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

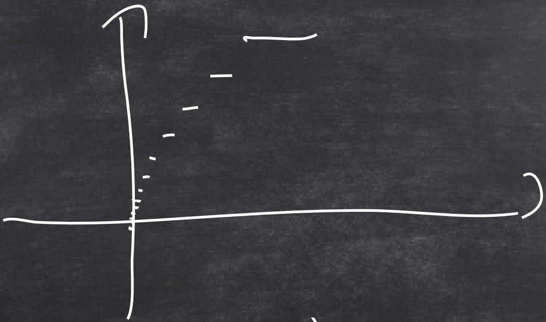
$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) = f(t_0).$$

Autrement dit, on peut tracer le graphe de f sans "lever le crayon".

Fonction continue par morceaux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, il existe $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ tel que la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Autrement dit, on peut tracer le graphe de f en "levant le crayon" un nombre fini de fois sur la feuille.



$$x \mapsto E\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\pi = 3{,}14|1592\ldots\ldots$ $\qquad$ $\frac{1}{3} = 0{,}33|33\ldots\ldots$

Idée derrière les séries de Fourier

Soit x un nombre réel. On peut associer à x la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses décimales avec $x_n \in \{0, \cdots, 9\}$.

$\pi \Longleftrightarrow (3, 1, 4, 1, 5, 9, 2 \ldots\ldots)$

suite

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\cdots$$

Idée derrière les séries de Fourier

Soit x un nombre réel. On peut associer à x la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses décimales avec $x_n \in \{0, \cdots, 9\}$.

$$\frac{1}{3} \rightsquigarrow (0, 3, 3, 3, 3, \cdots)$$

On a alors $x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{x_3}{1000} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ et les sommes tronquées de plus en plus loin $\sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{10^n}$ donnent des approximations de x.

$$(0, 3, 3, \cdots) \overset{\text{série}}{\rightsquigarrow} \frac{0}{10^0} + \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots$$

$$0 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots = 0{,}333\cdots$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3}{10^n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$$

Idée derrière les séries de Fourier

Soit x un nombre réel. On peut associer à x la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses décimales avec $x_n \in \{0, \cdots, 9\}$.

On a alors $x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{x_3}{1000} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ et les sommes tronquées de plus en plus loin $\sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{10^n}$ donnent des approximations de x.

f périodique ⇝ suite coefficients de Fourier ⇝ créer une série avec cette suite ⇝ la série converge et sa somme donne f.

$x \in \mathbb{R}$ ⇝ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ⇝ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$ ⇝ $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$

la suite des décimales de x

la série converge et sa somme vaut x

$\sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{10^n}$ a 1 somme approx. de x.

Coefficients de Fourier complexes

Coefficients de Fourier complexes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier complexe de f est

$\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t.}$$

On appelle alors coefficients de Fourier complexes de f la suite $\boxed{(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique. $f \rightsquigarrow (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\underbrace{e^{-\frac{2i\pi n t}{T}}}_{1\text{ fct }T\text{-périodique de base}}\,dt.$

Coefficients de Fourier complexes

Ex : Si $T = 2\pi$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.$$

Coefficients de Fourier complexes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier complexe de f est

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt.$$

On appelle alors coefficients de Fourier complexes de f la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Calculer les coefficients de Fourier complexes d'une fonction T-périodique f, c'est calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'intégrale

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt.$$

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_1^{1+T} f(t)\,dt = \int_\pi^{\pi+T} f(t)\,dt$$

si f T-périodique

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Alors,

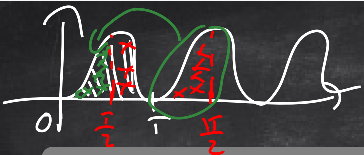
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\int_0^T f(t)\mathrm{d}t} = \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt.}$$

IMPORTANT

$[0,T]$ de longueur T

$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ longueur T.



$\int_0^T f(t)\,dt = ////$

$\int_{T/2}^{3T/2} f(t)\,dt = \times\times\times$

$(\frac{T}{2}, \frac{3T}{2})$ est de longueur T

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Alors,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

On a donc en particulier que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}t.$$

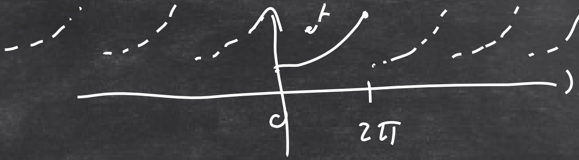
$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T \underline{f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,dt}$

int. de longueur T

$\hookrightarrow$ T-périod.

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-\frac{2i\pi n t}{T}}\, dt.$$

Exemple : $f(t) = e^t$ pour $t \in [0, 2\pi)$ et 2π-périodique.



non continue mais continue par morceaux.

Calculer les coefficients de Fourier complexes.

Il faut calculer $c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

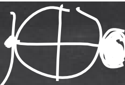
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et par définition,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(t)}_{= e^t} e^{-int} \, dt.$$

$$c_n(\ell) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{t} e^{-int}\, dt$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$2\pi n = \pi$$



$$e^{-2i\pi n} = \frac{1}{e^{2i\pi n}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{t-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\boxed{\int_0^{2\pi} e^{t(1-in)}\, dt}$$

$\alpha = 1-in$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{t(1-in)}}{1-in}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi(1-in)}-1}{1-in}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi-2i\pi n}-1}{1-in}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi}e^{-2i\pi n}-1}{1-in}\right)$$

$$\boxed{c_n(\ell) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{1-in}\right)}$$

cos

sin

$$e^{-2i\pi n} = \cos(-2\pi n) + i\sin(-2\pi n)$$

$$= 1$$

$e^{2\pi} > 0$

$2\pi \in \mathbb{R}$

$e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$

$= 1 + i \times 0 = 1$

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. $\rightarrow (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$

(i) Si f est à valeurs réelles, alors $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Si f est paire, $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si f est impaire, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Soient g une autre fonction continue par morceaux et T-périodique et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g), \quad c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f).$$

pas besoin de le calculer

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ alors $c_{-1}(f) = \overline{c_1(f)}$

si vous calculez $c_0(f), c_1(f), c_2(f), \dots$ $\quad c_{-2}(f) = \overline{c_2(f)}$

$(c_n(f))_{n\geq 0}$

f paire $\Leftrightarrow$ son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Proposition $f(-x) = f(x)$

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique.

(i) Si f est à valeurs réelles, alors $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Si on a $c_0(f), c_1(f), c_2(f), \dots$ alors $c_{-1}(f) = c_1(f)$, $c_{-2}(f) = c_2(f) \dots$

(ii) Si f est paire, $\boxed{c_n(f) = c_{-n}(f)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si f est impaire, $\boxed{c_n(f) = -c_{-n}(f)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Soient g une autre fonction continue par morceaux et T-périodique et $\lambda \in \mathbb{C}$.

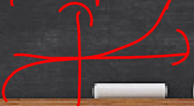
Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g), \quad c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f).$$

linéarité de l'intégrale.

f impaire $\Leftrightarrow$ son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

$f(x) = -f(x)$



Coefficients de Fourier réels

$a_0(f), a_1(f), \dots = (a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$

$b_1(f), b_2(f), \dots = (b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$

Coefficients de Fourier réels

À SAVOIR.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et T-périodique. On pose

$$\boxed{a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)dt.$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-ième coefficients de Fourier réels de f sont $n \geq 1$

$$\boxed{a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \boxed{b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.}$$

On appelle alors coefficients de Fourier réels de f les suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

Calculer les coefficients de Fourier réels d'une fonction T-périodique f, c'est calculer $a_0(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

$\forall n \geq 1$.

Proposition

Soit f une fonction réelle continue par morceaux et T-périodique. Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.

Par ailleurs, si g est une autre fonction à valeurs réelles continue par morceaux et T-périodique et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f+g) = a_n(f) + a_n(g) \quad \text{et} \quad a_n(\lambda f) = \lambda a_n(f)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f+g) = b_n(f) + b_n(g) \quad \text{et} \quad b_n(\lambda f) = \lambda b_n(f).$$

Lien entre coefficients complexes et réels

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

Si on a déjà calculé $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$

$$c_n(f) = \begin{cases} a_0(f) \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \text{ si } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)) \text{ si } n < 0. \end{cases}$$

$(c_0(f) = a_0(f))$

$(c_1(f), c_2(f), \dots)$

$(c_{-1}(f), c_{-2}(f), \dots)$

Réciproquement, on a $\boxed{c_0(f) = a_0(f)}$,

$$c_{-1}(f) = \frac{1}{2}(a_1(f) + ib_1(f))$$

Si vous savez calculer $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = 2\mathrm{Re}(c_n(f)) = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f)) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

$f(t) = e^t$ sur $[0, 2\pi)$ 2π-périodique.

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{2\pi}-1}{1-in}.$$

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(e^{2\pi}-1\right) \times \frac{1}{1+n^2}}$$

En déduire $(a_n(f))_{n\geq 0}$ et $(b_n(f))_{n\geq 0}$.

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\left(e^{2\pi}-1\right).$$

Et pour $n \geq 1$

$$a_n(f) = 2\,\mathrm{Re}\left(c_n(f)\right) = \frac{1}{\pi}\left(e^{2\pi}-1\right)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-in}\right)$$

Or $\frac{1}{1-in} = \frac{1+in}{(1-in)(1+in)} = \frac{1+in}{1+n^2}$ et $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-in}\right) = \frac{1}{1+n^2}$.

$$b_n(\ell) = -2\,\mathrm{Im}\,(c_n(\ell))$$

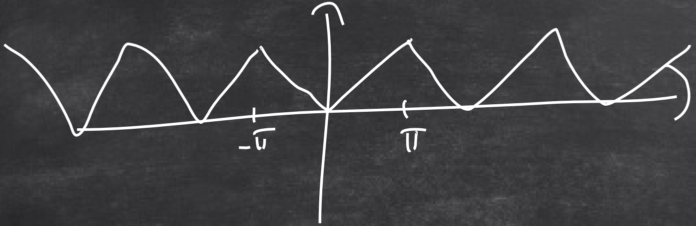
$$= -\frac{1}{\pi}\left(e^{2\pi}-1\right)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-in}\right)$$

$$\frac{1}{1-in} = \frac{1+in}{1+n^2} \quad \text{donc} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-in}\right) = \frac{n}{1+n^2}$$

et $$\boxed{b_n(\ell) = -\frac{1}{\pi}\left(e^{2\pi}-1\right)\frac{n}{1+n^2}}$$

Exemple détaillé

$f(t)=|t|$ sur $[-\pi,\pi)$ 2π-périodique



continue et paire (symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

$$\Rightarrow \boxed{\forall n\geq 1, \quad b_n(f)=0}$$

Reste à calculer les $(a_n(f))_{n\geq 0}$.

Coefficients de Fourier et dérivation

Proposition

Soit f une fonction T-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux On a alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} c_n(f), \quad a_0(f') = 0, \quad \forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_n(f') = \frac{2n\pi}{T} b_n(f) \\ b_n(f') = -\frac{2n\pi}{T} a_n(f). \end{cases}$$

En particulier, si on a déjà calculé les coefficients de Fourier d'une fonction f et que l'on vous demande de calculer ceux de f', on ne se fatigue pas à les calculer !

$f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$ 2π-périodique.

$\rightarrow$ longueur 2π = période.

$a_0(f)$, $a_n(f)$, $n \geq 1$.

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \; \cancel{= \frac{1}{\pi}} \int_0^{2\pi} |t|\,dt$$

car $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$

pas sur $[0, 2\pi)$.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \underset{\substack{f(t)=|t| \\ \text{sur } (-\pi,\pi)}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt$$

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt$$

Méthode 1 : $|t| = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ -t & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \underbrace{\int_{-\pi}^{0}}_{|t| = -t} + \underbrace{\int_{0}^{\pi}}_{|t| = t}$$

Méthode 2 : Si f est paire

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} f(t)\,dt.$$

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\times 2\int_0^{\pi} |t|\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$