**Université de Paris XI** — **L2 – 2ème semestre 2019-20**
**Mathématiques** — **Math 254**

# DM 2 : Correction

Voici trois exercices types pour vous entraîner en en vue de l'examen.

**Exercice 1.1.**— (Convergence de séries) **sur 4,5 points**
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la suite $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) (**sur 1 point**) Comme le suggère l'énoncé, commençons par le cas $\alpha < 0$. On a alors [1],

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$$

de sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite quand $n$ tend vers $+\infty$ car la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. De manière analogue, lorsque $\alpha = 0$, on a

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^0} = 1 \quad \text{soit} \quad u_n = \sin(1)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0$. Finalement, d'après la Proposition 2.3 du polycopié de cours, on en déduit que $\boxed{\text{pour } \alpha \leqslant 0, \text{ la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ diverge grossièrement.}}$

Passons à présent au cas $\alpha > 0$. Dans ce cas, on a [2]

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Ainsi, par continuité de la fonction sinus en 0 et puisque $\sin(0) = 0$, il vient que

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

b) (**sur 1,5 points**) Posons pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sin(x) - x$ et $g(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = \cos(x) - 1 \quad \text{et} \quad g'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}.$$

Or, on sait que pour tout réel $x$, $\cos(x) \leqslant 1$ si bien que

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0.$$

Ainsi, $f$ est décroissante sur $[0,1]$. En particulier, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f(0)$. Puisque $f(0) = 0$, cela implique que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sin(x) - x \leqslant 0 \quad \text{soit} \quad \sin(x) \leqslant x. \qquad (*)$$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $1$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $0 \searrow f(1)$ |

1. Penser par exemple à $\alpha = -1$ qui donne $n^\alpha = n^{-1} = \frac{1}{n}$.
2. Penser cette fois à $\alpha = 1$ de sorte que $n^\alpha = n$.

Passons à présent à l'étude de $g$. On a

$$g'(x) \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(x) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Un petit cercle trigonométrique permet de se convaincre que sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction cosinus est décroissante, prend la valeur 1 en 0 et passe par la valeur[3] $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3} > 1$. On en déduit donc que pour tout $x \in [0,1]$, on a $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\forall x \in [0,1], \quad g'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2} \geqslant 0$$

si bien que la fonction $g$ est croissante sur $[0,1]$.

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $g(0)$ $\nearrow$ | $g(1)$ |

Or $g(0) = 0$ si bien que

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \sin(x) - \frac{x}{2} \geqslant 0 \quad \text{soit} \quad \sin(x) \geqslant \frac{x}{2}. \qquad (**)$$

En combinant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient bien

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad \frac{x}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant x.}$$

Soient alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$. En prenant[4] $x = \frac{1}{n^\alpha} \in [0,1]$ dans l'inégalité de gauche ci-dessus, il vient que

$$\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \geqslant \frac{1}{2n^\alpha} \geqslant 0.$$

On a donc bien que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ u_n \geqslant 0.}$

c) (**sur 1 point**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 1$. En prenant[5] $x = \frac{1}{n^\alpha} \in [0,1]$ dans l'inégalité de droite ci-dessus, il vient que

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Or, on sait d'après le cours que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha > 1$. Puisque les séries sont[6] **à termes positifs**, la Proposition 2.5 du polycopié garantit alors que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ converge pour } \alpha > 1.}$

3. Une autre façon de dire les choses est que $1, \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $\frac{\pi}{3} > 1$ de sorte que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1\frac{\pi}{3}$. Or, on a dit que la fonction cosinus était décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il vient

$$\forall x \in [0,1], \quad \cos(x) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Bien noter que $\frac{1}{n^\alpha} \in [0,1]$ ici uniquement parce que $\alpha > 0$.
5. Bien noter que $\frac{1}{n^\alpha} \in [0,1]$ ici à nouveau parce que $\alpha > 1$.
6. C'est important de le préciser et pour $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$, cela découle de la question précédente.

d) (**sur 1 point**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < \alpha \leqslant 1$. En prenant [7] $x = \frac{1}{n^\alpha} \in [0,1]$ dans l'inégalité de droite ci-dessus, il vient que

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\frac{1}{2n^\alpha}.$$

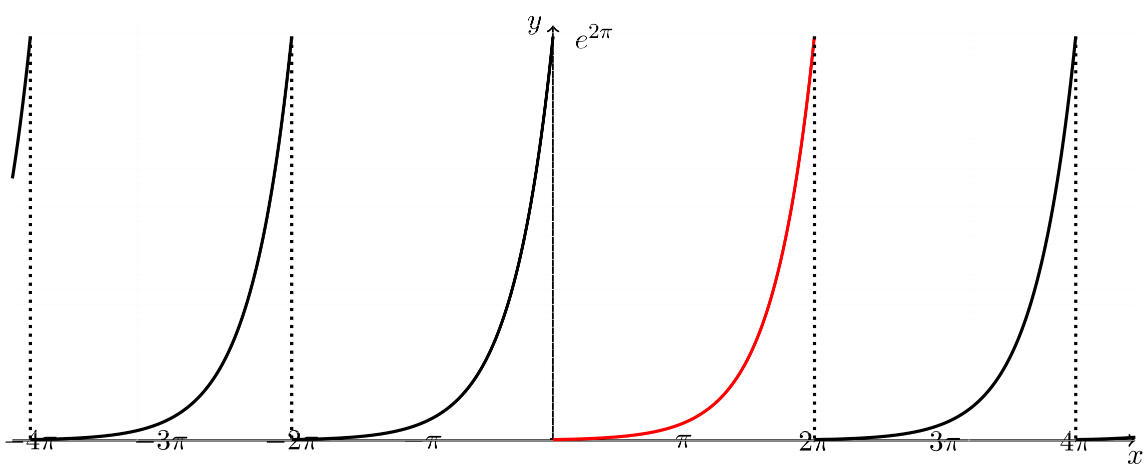
Or, on sait d'après le cours que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann divergente car $\alpha \leqslant 1$. Puisque les séries sont [8] **à termes positifs**, la Proposition 2.5 du polycopié garantit alors que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ diverge pour } 0 < \alpha \leqslant 1.}$

$$\boxed{\text{En conclusion, la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1.}$$

**Exercice 1.2.**— (Séries de Fourier), **sur 7,5 points**
On considère la fonction $2\pi$-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[0, 2\pi[$ est définie par

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad f(t) = e^t.$$

a) (**sur 1 point**) Voici le graphe en question (la portion en rouge correspond à l'intervalle $[0, 2\pi[$).




On constate que la fonction n'est pas continue (on ne peut pas tracer le graphe sans lever le crayon). Plus précisément, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ **sauf** en les points de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ où elle présente un saut. On constate par ailleurs que sur la portion de graphe tracée on n'a aucun pic ni tangente verticale et que la fonction est dérivable partout sauf en un nombre fini de points (ses points de discontinuités où elle admet cependant une dérivée à droite et une dérivée à gauche) si bien que la fonction est bien de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

$$\boxed{\text{En conclusion, } f \text{ n'est pas continue. Elle est continue par morceaux et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux.}}$$

b) (**sur 2 points**) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition, il s'agit de calculer [9]

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Or, sur $[0, 2\pi[$, on a $f(t) = e^t$ de sorte que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^t e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{t-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{t(1-in)}\mathrm{d}t.$$

7. Bien noter que $\frac{1}{n^\alpha} \in [0,1]$ ici à nouveau parce que $\alpha > 0$.
8. C'est important de le préciser et pour $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, cela découle de la question précédente.
9. Ici la période est $T = 2\pi$.

On sait alors qu'une primitive de $t \mapsto e^{\alpha t}$ est donnée par $t \mapsto \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$ dès que $\alpha \neq 0$ est un nombre complexe. Ici, on a $\alpha = 1 - in \neq 0$ si bien que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{t(1-in)} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{(1-in)t}}{1-in} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{(1-in)2\pi} - 1}{2\pi(1-in)}.$$

Or,

$$e^{(1-in)2\pi} = e^{2\pi} e^{-2i\pi n} = e^{2\pi}$$

car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{-2i\pi n} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1$. Il s'ensuit finalement que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-in)}.}$$

c) (**sur 1 points**) On utilise pour ce faire les relations entre coefficients complexes et réels fournies par la Proposition 4.4 du polycopié de cours. On a en particulier que

$$\boxed{a_0(f) = c_0(f) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}}$$

tandis que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) &= \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-in)} + \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1+in)} \\ &= \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right) \\ &= \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \times \frac{1 + in + 1 - in}{(1-in)(1+in)} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \times \frac{2}{1+n^2} \end{aligned}$$

si bien que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = \frac{(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1+n^2)} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \times \frac{2}{1+n^2}.}$$

De même, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) &= i\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-in)} - i\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1+in)} = i\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-in} - \frac{1}{1+in} \right) \\ &= i\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \times \frac{1 + in - 1 + in}{(1-in)(1+in)} = i\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \times \frac{2in}{1+n^2} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = -\frac{n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1+n^2)} = -\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \times \frac{2n}{1+n^2}.}$$

d) (**sur 1,5 points**) En tout point $t \neq 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on a vu en question a) que la fonction $f$ était continue. Par ailleurs, la fonction n'étant pas globalement continue sur $\mathbb{R}$, il faut appliquer la version (ii) du théorème de Dirichlet qui fournit en tout point de continuité que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)]$$

avec convergence des séries en jeu. Les calculs des questions b) et c) fournissent alors immédiatement le résultat par linéarité de la somme :

$$\boxed{\forall t \neq 2k\pi, \quad f(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{int}}{1-in} = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos(nt)-2n\sin(nt)}{1+n^2}\right)}$$

avec convergence des séries en jeu [10].

e) (**sur 2 points**) Commençons par la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$. On cherche la bonne valeur de $t$ en laquelle évaluer la série de Fourier réelle de $f$ pour faire apparaître cette série. On voit en question d) qu'on a du $1+n^2$ au dénominateur et on voudrait faire apparaître du $\frac{(-1)^n}{1+n^2}$. On voit donc qu'il faudrait se débarrasser du $\sin(nt)$ qui fait intervenir un $n$ en trop au numérateur et remplacer $\cos(nt)$ par $(-1)^n$. On voit alors que $t=\pi$ semble convenir parfaitement ! Par ailleurs $\pi$ **n'est pas** de la forme [11] $2k\pi$ pour $k\mathbb{Z}$. On a donc d'après la question d) avec $t=\pi$ que

$$f(\pi) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos(n\pi)-2n\sin(n\pi)}{1+n^2}\right)$$

avec convergence de la série. Or, on sait (ou on voit sur un cercle trigonométrique) que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{et} \quad \sin(n\pi) = 0$$

si bien que

$$f(\pi) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2}\right) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\right) \qquad (*)$$

avec convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$. On a alors que puisque $\pi \in [0, 2\pi[$, $f(\pi) = e^\pi$ et $(*)$ se réécrit

$$e^\pi = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\right)$$

soit

$$\frac{e^\pi 2\pi}{e^{2\pi}-1} = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{e^\pi \pi}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2}.}$$

avec convergence de la série. On peut "simplifier" un tout petit peu en écrivant que

$$\frac{e^\pi \pi}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh(\pi)} - 1\right)$$

10. On pouvait bien sûr ici aussi partir de l'égalité fournie par la série de Fourier complexe

$$\forall t \neq 2k\pi, \quad f(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{int}}{1-in} = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{e^{int}}{1-in} + \frac{e^{-int}}{1+in}\right]$$

et utiliser le fait que, par parité de cosinus et imparité de sinus,

$$\forall n \geqslant 1, \quad e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt) \quad \text{et} \quad e^{-int} = \cos(nt) - i\sin(nt)$$

mais cela était beaucoup plus long quand le théorème de Dirichlet fournit immédiatement le résultat ! Par ailleurs, vous pouvez remarquer que ces calculs seraient en fait exactement ceux effectués en question d) !

11. C'est capital de le vérifier car la question d) n'est valable que dans ce cadre. On verra que le théorème de Dirichlet donne autre chose en les points de discontinuités de $f$ !

avec $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ la fonction sinus hyperbolique définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Passons alors à la seconde série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+n^2}$. On voit alors que pour faire apparaître cette quantité dans la série de Fourier réelle de $f$, on veut faire disparaître le $\sin(nt)$ et avoir $\cos(nt) = 1$. La valeur idále est alors $t = 0$. Cependant $t = 0$ est de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (prendre $k = 0$) et donc on ne peut pas appliquer la question précédente directement. Mais ce n'est pas grave parce que la version (ii) du théroème de Dirichlet nous dit qu'en $t = 2k\pi$ (point de discontinuité de la fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), on a

$$\frac{f(2k\pi^+) + f(2k\pi^-)}{2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{int}}{1 - in} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos(nt) - 2n\sin(nt)}{1+n^2}\right)$$

où $\frac{f(2k\pi^+)+f(2k\pi^-)}{2} = \frac{e^{2\pi}+1}{2}$ car ici[12] $f(2k\pi^+) = e^0 = 1$ et $f(2k\pi^-) = e^{2\pi}$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{e^{2\pi} + 1}{2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in2k\pi}}{1 - in} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos(2nk\pi) - 2n\sin(2nk\pi)}{1+n^2}\right)$$

soit

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{e^{2\pi} + 1}{2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 - in} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1+n^2}\right).$$

En particulier, on constate que le résultat ne dépend pas de $k$. On a ainsi

$$\frac{e^{2\pi} + 1}{2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}\right)$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2}}$$

avec convergence de la série. On peut là encore "simplifier" sous la forme

$$\frac{(e^{2\pi}+1)\pi}{2(e^{2\pi}-1)} - \frac{1}{2} = \frac{(e^{\pi}+e^{-\pi})\pi}{2(e^{\pi}-e^{-\pi})} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh(\pi)} - 1\right)$$

avec $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ la tangente hyperbolique définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

f) (**Bonus, sur 2 points**) La fonction étant continue par morceaux, l'inégalité de Parseval fournit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] \qquad (*)$$

avec convergence des séries en jeu. On a alors, puisque $f(t) = e^t$ sur $[0, 2\pi[$, que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{4\pi}-1}{4\pi}.$$

12. Je rappelle que $f(2k\pi^+)$ est la valeur prise par $f$ à droite du saut en $2k\pi$, qui vaut ici $e^0$ tandis que $f(2k\pi^-)$ est la valeur prise par $f$ à gauche du saut en $2k\pi$, qui vaut ici $e^{2\pi}$.

Par ailleurs[13], la question b) fournit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|1-in|^2} = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

On a alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{1+n^2} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

où l'on a séparé la somme de $n=-\infty$ à $n=+\infty$ en trois parties :les $n$ de $-\infty$ à $-1$, puis $n=0$ qui correspond à $\frac{1}{1+0^2}=1$ et enfin les $n$ de 1 à $+\infty$. On constate alors qu'en posant $k=-n$, il vient

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(-k)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

puisque l'indice d'une somme est muet[14]. Ainsi,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

On a alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}\right)$$

13. Prendre ici l'une ou l'autre des séries (avec coefficients de Fourier complexes ou réels aboutit au même résultat). En effet, les coefficients réels donnent lieu à la série convergente

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(f)^2|^2 + |b_n(f)^2|^2\right].$$

On a alors

$$a_0(f)^2 = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2$$

et pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n(f)^2 = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \times \frac{4}{(1+n^2)^2} \quad \text{et} \quad b_n(f)^2 = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \times \frac{4n^2}{(1+n^2)^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(f)^2|^2 + |b_n(f)^2|^2\right] &= \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(1+n^2)^2} + \frac{n^2}{(1+n^2)^2}\right]\right) \\ &= \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}\right) \end{aligned}$$

car

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{(1+n^2)^2} + \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{1+n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{1}{1+n^2}.$$

14. Ici, de manière intuitive, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{1+n^2} &= \frac{1}{1+(-1)^2} + \frac{1}{1+(-2)^2} + \frac{1}{1+(-3)^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \end{aligned}$$

et par $(*)$, il vient

$$\frac{e^{4\pi}-1}{4\pi}=\left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}\right).$$

Cela implique que

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{e^{4\pi}-1}{4\pi}\times\frac{4\pi^2}{(e^{2\pi}-1)^2}=\frac{\pi(e^{4\pi}-1)}{(e^{2\pi}-1)^2}$$

soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi(e^{4\pi}-1)}{2(e^{2\pi}-1)^2}-\frac{1}{2}.$$

On peut alors de demander si l'on retombe bien sur le résultat de la question précédente [15]. Pour voir cela, on utilise le fait que $e^{4\pi}-1$ est une identité remarquable de la forme $a^2-b^2$ avec $a=e^{2\pi}$ et $b=1$ si bien que $e^{4\pi}-1=(e^{2\pi}-1)(e^{2\pi}+1)$ et finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi(e^{2\pi}-1)(e^{2\pi}+1)}{2(e^{2\pi}-1)^2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2}}$$

et on retrouve bien (ouf!) le résultat de la question e).

**Exercice 1.3.—** (Géométrie), **sur 9 points**

On considère l'application

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(2x-y+2z,2x+2y-z,-x+2y+2z)).\end{array}\right.$$

a) (**sur 1,5 points**) Commençons par établir la linéarité de $f$. Pour ce faire, on revient à la définition. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$. Il s'agit de montrer que

$$f\left(\lambda(x,y,z)+(x',y,',z')\right)=\lambda f(x,y,z)+f(x',y',z').$$

On a alors

$$\lambda(x,y,z)+(x',y,',z')=\left(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z'\right)$$

si bien que [16]

$$\begin{aligned}
&f\left(\lambda(x,y,z)+(x',y,',z')\right)=\left(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z'\right)\\
&=\frac{1}{3}\big(2(\lambda x+x')-(\lambda y+y')+2(\lambda z+z'),2(\lambda x+x')+2(\lambda y+y')-(\lambda z+z'),\\
&-(\lambda x+x')+2(\lambda y+y')+2(\lambda z+z')\big)\\
&=\lambda\times\frac{1}{3}(2x-y+2z,2x+2y-z,-x+2y+2z)+\frac{1}{3}(2x'-y'+2z',2x'+2y'-z',-x'+2y'+2z')\\
&=\lambda f(x,y,z)+f(x',y,',z')
\end{aligned}$$

de sorte qu'on a bien

$$f\left(\lambda(x,y,z)+(x',y,',z')\right)=\lambda f(x,y,z)+f(x',y',z')$$

15. Sinon quelque chose cloche!
16. On a pour tout $(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3$,

$$f(X,Y,Z)=\frac{1}{3}(2X-Y+2Z,2X+2Y-Z,-X+2Y+2Z)$$

et ici $X=\lambda x+x'$, $Y=\lambda y+y'$, $Z=\lambda z+z'$ et ensuite on regroupe les termes en $\lambda$ et les termes non en facteur de $\lambda$.

et que $\boxed{\text{l'application } f \text{ est bien une application linéaire.}}$

Passons alors à présent à la matrice de $f$ dans la base canonique $c_1 = (1,0,0)$, $c_2 = (0,1,0)$ et $c_3 = (0,0,1)$. On rappelle que cette matrice est donnée par le vecteur $f(c_1)$ en première colonne, le vecteur $f(c_2)$ en deuxième colonne et le vecteur $f(c_3)$ en troisième colonne. Calculons donc

$$f(c_1) = f(1,0,0) = \frac{1}{3}(2,2,-1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

puis

$$f(c_2) = f(0,1,0) = \frac{1}{3}(-1,2,2) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

et

$$f(c_3) = f(0,0,1) = \frac{1}{3}(2,-1,2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(c_1) & f(c_2) & f(c_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}.}$$

b) (**sur 1 point**) On commence par déterminer la transposée de $M$ en échangeant lignes et colonnes

$${}^tM = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

et je vous laisse (vraiment !) vérifier

$${}^tMM = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

et on vérifie grâce à la règle de Sarrus par exemple que

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{8}{27} + \frac{8}{27} - \frac{1}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = 1.$$

En conclusion,

$$\boxed{{}^tMM = I_3 \quad \text{et} \quad \det(M) = 1}$$

si bien que $\boxed{f \text{ préserve angles et distances et ne "retourne" pas l'espace.}}$

c) (**sur 2 points**) Pour déterminer

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\},$$

on remarque que $(x,y,z) \in F$ si, et seulement si,

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Mais on sait grâce au cours que puisque $M$ est la matrice de $f$ **dans la base canonique**,

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=f(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(2x-y+2z)\\\frac{1}{3}(2x+2y-z)\\\frac{1}{3}(-x+2y+2z)\end{pmatrix}.$$

Ainsi $(x,y,z)\in F$ si, et seulement si,

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(2x-y+2z)=x\\\frac{1}{3}(2x+2y-z)=y\\\frac{1}{3}(-x+2y+2z)=z\end{cases}\iff\begin{cases}2x-y+2z=3x\\2x+2y-z=3y\\-x+2y+2z=3z\end{cases}$$

après s'être débarrassé des fractions. On a donc affaire à un système linéaire et on dispose des opérations du pivot de Gauss pour le résoudre ! On a donc que $(x,y,z)\in F$ si, et seulement si,

$$\begin{cases}-x-y+2z=0\\2x-y-z=0\\-x+2y-z=0.\end{cases}$$

Utilisons alors la première ligne pour éliminer les $x$ dans les deux dernières lignes en effectuant $L_2\leftarrow L_2+2L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1$ de sorte que le système est équivalent à

$$\begin{cases}-x-y+2z=0\\-3y+3z=0\\3y-3z=0.\end{cases}$$

On constate alors que la seconde ligne est l'opposée de la dernière et on peut donc supprimer la dernière ligne qui est redondante. Le système équivaut donc, après simplification par le facteur 3 dans la deuxième ligne, à

$$\begin{cases}-x-y+2z=0\\-y+z=0\end{cases}\iff\begin{cases}-x-y+2z=0\\y=z.\end{cases}$$

On remplace donc $y$ par sa valeur dans la première ligne pour obtenir que le système est équivalent à

$$\begin{cases}-x-z+2z=0\\y=z\end{cases}\iff\begin{cases}x=z\\y=z\end{cases}\iff\begin{cases}x=z\\y=z\\z=z.\end{cases}$$

On a donc que $(x,y,z)\in F$ si, et seulement si, $(x,y,z)=(z,z,z)=z(1,1,1)$ avec $y\in\mathbb{R}$, autrement dit si, et seulement si, $(x,y,z)$ est colinéaire à $(1,1,1)$. On en déduit donc que $\boxed{F \text{ est la droite de } \mathbb{R}^3 \text{ dirigée par le vecteur } f_1=(1,1,1).}$ Il s 'agit alors d'un sous-espace vectoriel de dimension [17] 1 de $\mathbb{R}^3$ et on sait alors d'après le cours (voir section 5.1.2 du polycopié de cours) tout vecteur directeur en est une base,

17. Se souvenir qu'"intuitivement", la dimension correspond aux nombres de paramètres à fixer pour connaître complètement un élément de $F$. ici, il suffit de se fixer la valeur d'**un** seul paramètre, à savoir la valeur de $y$, pour déterminer un élément de $F$ donc la dimension est 1. Il s'agit aussi du nombre de directions indépendantes que vous avez sur $F$ et sur une droite on a bien une unique direction, à savoir le long de la droite !

donc $f_1$ est en particulier une base de $F$. Pour que cette base soit orthonormée, il faut que $||f_1|| = 1$. Or, on calcule

$$||f_1|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \neq 1.$$

Mais on voit alors que si l'on prend $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, alors $e_1$ est toujours un vecteur directeur de la droite $F$ (puisqu'il est colinéaire à $f_1$) et par conséquent une $e_1$ est aussi une base de $F$ et on vérifie que[18]

$$||e_1|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1$$

et $\boxed{e_1 \text{ est ainsi une base orthonormée de } F.}$

d) (**sur 1,5 points**) Je rappelle que par définition $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux à $F$. Autrement dit, $F$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à la droite $F$ dirigée par $f_1 = (1,1,1)$. Pour qu'un vecteur soit orthogonal à cette droite, il faut et il suffit ainsi que ce vecteur soit orthogonal à $f_1$ si bien que

$$F^\perp = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z) \perp f_1\right\}.$$

Or, on dispose d'un outil très commode pour détecter l'orthogonalité, à savoir le produit scalaire. En effet, $(x, y, z) \perp f_1$ si, et seulement si, $(x, y, z) \cdot f_1 = 0$. Or, par définition,

$$(x, y, z) \cdot f_1 = (x, y, z) \cdot (1,1,1) = x \times 1 + y \times 1 + z \times 1 = x + y + z$$

si bien que

$$F^\perp = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\right\}.$$

$\boxed{\text{On reconnaît là le plan d'équation } x + y + z = 0,}$ en particulier $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Soit alors $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. On a immédiatement que $e_3 \in F$ car la somme de ces composantes est nulle et de même $e_2 \in F^\perp$. Par ailleurs,

$$e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{6}} \times 0 = 0$$

si bien que $e_2$ est orthogonal[19] à $e_3$.

Il nous reste alors à vérifier que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Pour cela il faut vérifier trois points. Le premier est que $(e_1, e_2, e_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. On sait d'après le cours que cela équivaut au fait que le déterminant de la matrice dont les colonnes sont données par $e_1$, $e_2$ et $e_3$ est non nul. Or, on a[20]

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = 1 \neq 0$$

grâce par exemple à la règle de Sarrus. On a donc bien affaire à une base de $\mathbb{R}^3$. Le second point à vérifier est le fait que $e_1$ est orthogonal à $e_2$ et $e_3$ et que $e_2$ et $e_3$ sont orthogonaux. On a déjà vu que $e_2 \perp e_3$ et on calcule[21]

$$e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) = 0 \quad \text{et} \quad e_1.e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = 0$$

18. On a choisi $e_1$ pour que cela fonctionne !
19. En réalité, les vecteurs $e_2$ et $e_3$ forment une base orthonormée du plan $F^\perp$.
20. Noter que la première colonne est bien $e_1$, la seconde $e_2$ et la troisième $e_3$ !
21. Je vous laisse les détails des calculs !

si bien qu'on a bien $e_1 \perp e_2$ et $e_1 \perp e_3$. Le dernier point à vérifier est le fait que $e_1$, $e_2$ et $e_3$ sont tous de norme 1. On l'a déjà vu pour $e_1$, et on a

$$||e_2|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

et

$$||e_3|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = \sqrt{1} = 1$$

si bien que $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est finalement une base orthonormée de } \mathbb{R}^3.}$

e) (**sur 1 point**) Pour établir que la matrice de $f$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

il suffit par définition de montrer que $f(e_1) = 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3 = e_1$, que

$$f(e_2) = 0 \times e_1 + \frac{1}{2} \times e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times e_3 = \frac{e_2}{2} + \frac{e_3\sqrt{3}}{2}$$

et que

$$f(e_3) = 0 \times e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times e_2 + \frac{1}{2} \times e_3 = -\frac{e_2\sqrt{3}}{2} + \frac{e_3}{2}.$$

On a alors bien que $f(e_1) = e_1$ soit par le calcul soit en utilisant le fait que $e_1 \in F$ et que $F$ est l'ensemble des vecteurs envoyés sur eux-mêmes par $f$ si bien que nécéssairement $f(e_1) = e_1$ ! On calcule alors

$$f(e_2) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

tandis que

$$\frac{e_2}{2} + \frac{e_3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, -1, 0) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

si bien qu'on a en effet

$$f(e_2) = \frac{e_2}{2} + \frac{e_3\sqrt{3}}{2}.$$

De même en utilisant la définition de $f$, il vient

$$f(e_3) = f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

tandis que

$$-\frac{e_2\sqrt{3}}{2} + \frac{e_3}{2} = -\frac{3}{2\sqrt{6}}(1, -1, 0) + \frac{1}{2\sqrt{6}}(1, 1, -2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

et

$$f(e_3) = -\frac{e_2\sqrt{3}}{2} + \frac{e_3}{2}.$$

Finalement, on a bien vérifié que

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3) \text{ est donnée par } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

f) (**sur 1 point**) On considère la matrice

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On voit immédiatement que

$$\boxed{\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.}$$

g) (**sur 1 point**) On a vu en question e) que

$$f(e_2) = -\frac{e_2}{2} + \frac{e_3\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad f(e_3) = -\frac{e_2\sqrt{3}}{2} + \frac{e_3}{2}$$

de sorte que $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$ et que la matrice de $f$ restreinte à $F^\perp$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \tilde{M}.$$

On a vu en question précédente que

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

et on sait alors d'après le cours que $\tilde{M}$ (et par conséquent $f$ restreinte au plan $F^\perp$) est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre l'origine [22]. Par ailleurs, par définition de $F$, l'application linéaire $f$ fixe la droite $F$. On a donc une application linéaire qui fixe la droite dirigée par $(1, 1, 1)$ et qui effectue une rotation dans la plan orthogonal à cette droite d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre l'origine [23]. Autrement dit

$$\boxed{f \text{ est une rotation de l'espace d'angle } \frac{\pi}{3} \text{ et d'axe la droite dirigée par } (1, 1, 1).}$$

Pour construire l'image d'un point $A$ par cette rotation, le proc'edé est simple : on trace le plan perpendiculaire à la droite $F$ passant par $A$ puis on effectue dans ce plan une rotation de $A$ de $\frac{\pi}{3}$ dans le sens de $e_2$ vers $e_3$ et d'origine le point d'intersection de la droite $F$ et de ce plan. Pour une illustration, je vous renvoie à `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~destagnol/rotationdm2.html`. En d'autres termes, $f$ fait tourner l'espace de $\frac{\pi}{3}$ dans le sens de $e_2$ vers $e_3$ autour de la droite $F$.

22. La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ a lieu dans le sens de $e_2$ vers $e_3$.
23. Et dans le sens de $e_2$ vers $e_3$.