ANALYSE DE FOURIER ET GÉOMÉTRIE : EXERCICES SUR LE COURS 3 – CORRECTION

EXERCICE 1 — NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE.

1. Calculer $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ et $e^{2i\pi n}$ pour n un entier.
On pourra distinguer selon que $n = 2k$ est pair ou selon que n est impair.

2. Donner le conjugué de $z = 3 - i$ puis de $e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Mettre sous forme algébrique $\frac{1+2i}{2-i}$.

SOLUTION.

1. Il est bon de tracer un cercle et de regarder ce qu'il se passe pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ pour se faire une idée ici ! Supposons $n = 2k$ pair avec $k \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0.$$

Supposons alors que $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

On constate alors sur un cercle trigonométrique que lorsque k est pair, on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 1$ et lorsque k est impair, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -1$. Pour le démontrer, on peut [1] utiliser la formule page 34 du polycopié

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(k\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(k\pi).$$

On a alors $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\cos(k\pi) = (-1)^k$ comme on l'a vu dans les exercices pour le cours 2. Il vient que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

En conclusion, lorsque n est pair, $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et lorsque $n = 2k + 1$ est impair, on obtient $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$.

Enfin, on a par définition

$$e^{2i\pi n} = \cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n).$$

On a alors puisque n est entier (tracer un cercle à nouveau !) que $\cos(2\pi n) = 1$ et $\sin(2\pi n) = 0$ si bien que $e^{2i\pi n} = 1$. **Attention** que sans le i, on obtient e^{2n} qui est un réel, l'exponentielle de $2n$ qui est strictement supérieure à 1 !

2. On a bien sûr [2], $\overline{z} = 3 + i$ et puisque $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, on a

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

par parité de la fonction cosinus et imparité de la fonction sinus.

3. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, à savoir $2 + i$ et on obtient

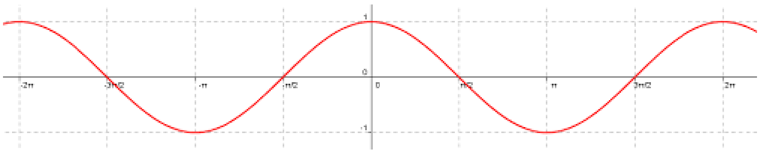
$$\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i}{5} = i$$

car $i^2 = -1$.

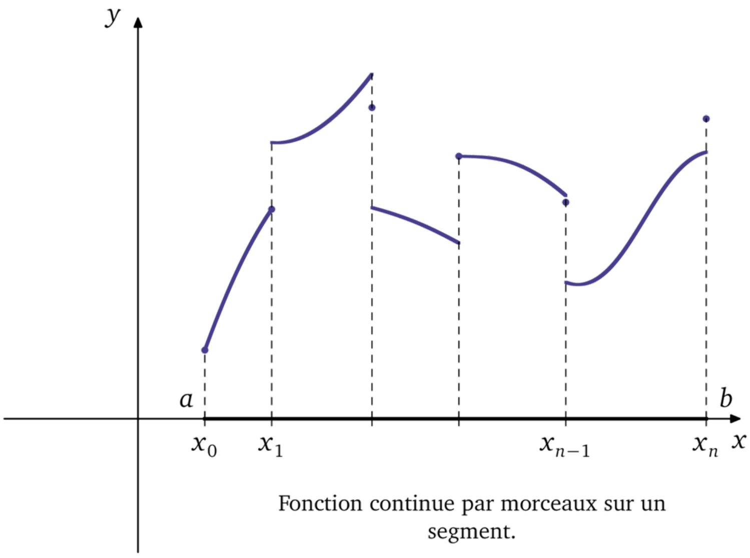
1. On peut aussi raisonner par récurrence.
2. Je rappelle que le conjugué de $a + ib$ est $a - ib$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2 — CONTINUE *VS* CONTINUE PAR MORCEAUX. Dessiner le graphe d'une fonction continue et le graphe d'une fonction continue par morceaux. Expliquer la différence.

SOLUTION.
Je rappelle qu'une fonction continue est une fonction dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon, par exemple



tandis qu'une fonction continue par morceaux est une fonction dont on peut tracer le graphe en s'autorisant à lever le crayon un nombre fini de fois sur toute portion finie du graphe, par exemple



Fonction continue par morceaux sur un segment.

EXERCICE 3 — FONCTIONS PÉRIODIQUES.

1. Dire si les fonctions suivantes sont périodiques ou non et si oui préciser la période[3] :

$$t \mapsto e^t, \quad t \mapsto \cos(t) + \sin(2t), \quad t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right), \quad t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) e^{-\frac{4i\pi t}{3}}, \quad t \mapsto \cos(\pi t) + \cos(t).$$

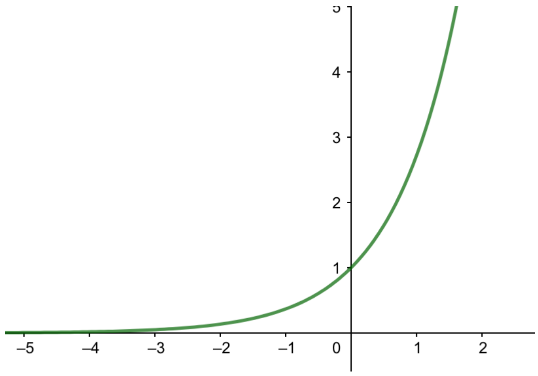
2. Tracer le graphe de la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$. La fonction est-elle continue ?
3. A-t-on pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et f une fonction continue par morceaux 2π-périodique l'égalité

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{10-\pi}^{10+\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t?$$

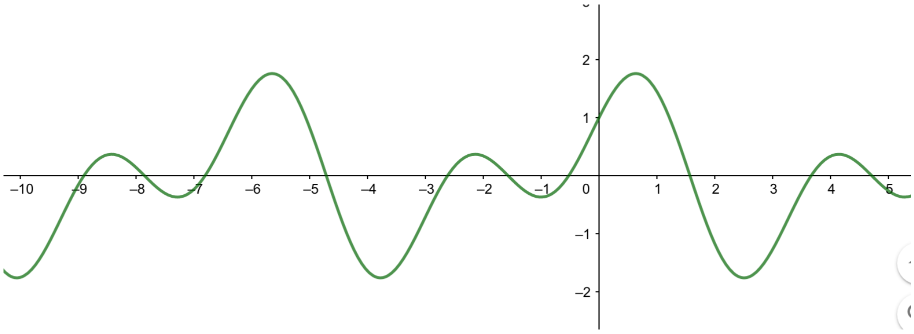
SOLUTION.

1. On rappelle qu'une fonction périodique a un graphe qui se répète périodiquement. Ici, on sait que le graphe de l'exponentielle ne se répète pas donc l'exponentielle n'est pas périodique. On peut le démontrer par l'absurde en supposant qu'il existe $T > 0$ tel que pout tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t+T} = e^t$. On aurait alors $e^{t+T} = e^t e^T = e^t$ puis $e^T = 1$ après simplification par $e^t \neq 0$. Ainsi, nécessairement $T = 0$ mais c'est exclu par la définition d'une période ! Finalement, la fonction exponentielle n'est pas périodique !

3. Le dernier exemple est difficile !



En revanche, le graphe de $f_2 : t \mapsto \cos(t) + \sin(2t)$ semble périodique

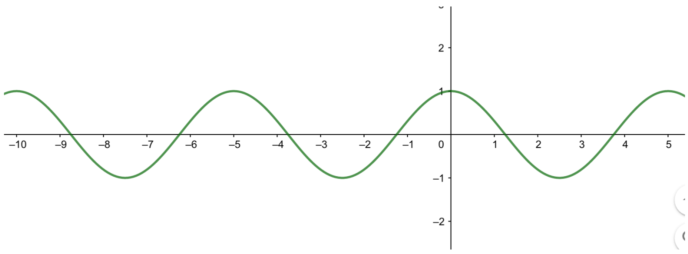


ce qui n'est pas surprenant car cos et sin sont 2π-périodique et qu'une somme de fonctions 2π-périodique l'est. Ainsi, on vérifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_2(t + 2\pi) = \cos(t + 2\pi) + \sin(2(t + 2\pi)) = \cos(t) + \sin(2t + 4\pi) = \cos(t) + \sin(2t) = f_2(t)$$

et la fonction f_2 est bien 2π-périodique.

Le graphe de $f_3 : t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$ semble périodique



ce qui n'est pas surprenant car f_3 est un des exemples type du cours de fonction 5-périodique (voir page 37). Ainsi, on vérifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_3(t + 5) = \cos\left(\frac{2\pi(t + 5)}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi t}{5} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right) = f_3(t)$$

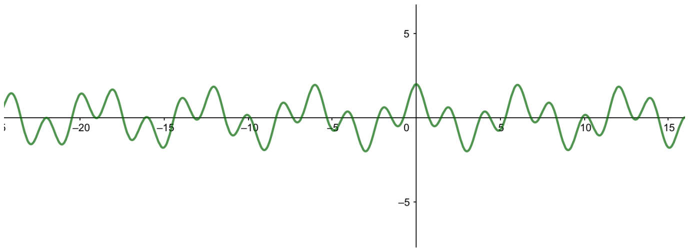
et la fonction f_3 est bien 5-périodique.

Pour la fonction $f_4 : t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) e^{-\frac{4i\pi t}{3}}$, on ne peut pas tracer le graphe car elle est à valeurs complexes mais f_4 est un produit de deux exemples types du cours de fonctions 3-périodiques (voir page 37) et un produit de fonctions 3-périodiques reste 3-périodique. Ainsi, on vérifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_4(t + 3) = \sin\left(\frac{2\pi(t + 3)}{3}\right) e^{-\frac{4i\pi(t+3)}{3}} = \sin\left(\frac{2\pi t}{3} + 2\pi\right) e^{-\frac{4i\pi t}{3} - 2i\pi} = \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) e^{-\frac{4i\pi(t+3)}{3}} = f_4(t)$$

car
$$e^{-2i\pi} = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1$$
et la fonction f_4 est bien 3-périodique.

Enfin, le graphe de $f_5 : t \mapsto \cos(\pi t) + \cos(t)$ ne semble pas périodique (il en a l'air à première vue mais une étude attentive montre qu'il ne l'est pas !)

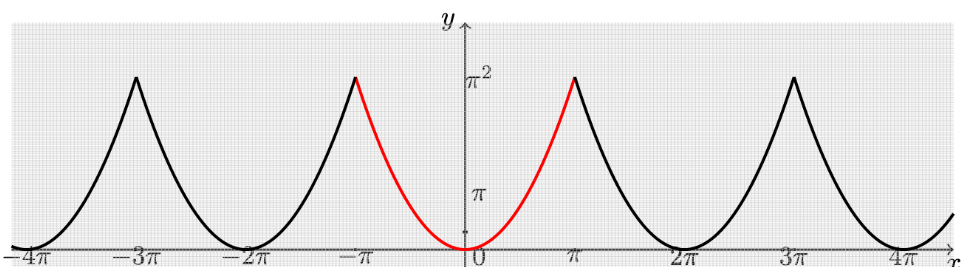


ce qui n'est pas surprenant car f_5 est la somme d'une fonction 2-périodique ($t \mapsto \cos(\pi t)$) et d'une fonction π-périodique et la somme de deux fonctions périodiques n'est en général pas périodique. La démonstration de ce fait dépasse le cadre de ce cours est provient du fait que π n'est pas rationnel ou ne peut pas être écrit comme le quotient de deux entiers[4].

Il faut surtout ici apprendre à reconnaître les fonctions périodiques de base et savoir que si la période est la même, on peut les ajouter ou les multiplier et rester périodique de même période mais que si les périodes sont différentes, c'est plus compliqué !

Dernier point, lorsque vous recherchez une période, certains ou certaines d'entre vous ont cherché $T > 0$ tel que
$$f_4(t+T) = \sin\left(\frac{2\pi(t+T)}{3}\right) e^{-\frac{4i\pi(t+T)}{3}}$$
soit égal à
$$\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) e^{-\frac{4i\pi t}{3}\pi}$$
et en ont déduit que nécessairement $\sin\left(\frac{2\pi(t+T)}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$ et $e^{-\frac{4i\pi(t+T)}{3}} = e^{-\frac{4i\pi t}{3}\pi}$. Cela est faux en général ! Par exemple, $12 = 4 \times 3 = 2 \times 6$ mais ce n'est pas pour autant que $4 = 2$ et $3 = 6$! Il en va de même pour une somme, ce n'est pas parce que
$$\cos(t+T) + \sin(2(t+T)) = \cos(t) + \sin(2t)$$
que $\cos(t+T) = \cos(t)$ et $\sin(2(t+T)) = \sin(2t)$ a priori car par exemple $2 + 5 = 4 + 3$ n'implique pas non plus que $2 = 4$ et $5 = 3$! La stratégie est donc de dessiner la courbe afin de deviner si oui ou non la fonction est périodique ainsi que sa période T. Ensuite, pour cette valeur de T, on montre que $f(t+T) = f(t)$ pour tout réel t.

2. On commencer par tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$, intervalle sur lequel, $f(t) = t^2$, en rouge ci-dessous puis on veut que f soit 2π-périodique donc on décale la portion de graphe sur $[-\pi, \pi]$ vers la gauche et vers la droite pour obtenir les portions noires ci-dessous et le graphe complet de f.



4. Une façon de le voir est de constater que $f_5(0) = 2$ et que $f_5(t) = 2$ si, et seulement si, $\cos(\pi t) = \cos(t) = 1$ car un cosinus est toujours entre -1 et 1. Or, $\cos(\pi t) = \cos(t) = 1$ équivaut à $t = 2k\pi$ et $\pi t = 2\ell\pi$ pour k, ℓ entiers de sorte que $t = 2\ell$ est entier et $\pi = \frac{\ell}{k}$ ce qui est absurde ! Ainsi la fonction ne prend la valeur 2 qu'une fois et ne peut donc pas être périodique car si elle admettait une période $T > 0$, alors $f(T) = f(T+0) = f(0) = 2$.

On peut tracer le graphe sans lever le crayon (autrement dit $f(\pi) = f(-\pi)$) donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}$!

3. On a par définition que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$$

et comme f est 2π-périodique, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-int}$ est 2π-périodique. On sait alors d'après le cours qu'on peut intégrer sur n'importe quel intervalle de longueur 2π sans changer le résultat. ici, l'intervalle $[10-\pi, 10+\pi]$ est de longueur 2π donc

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \int_{10-\pi}^{10+\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$$

et on a bien

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{10-\pi}^{10+\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 — Coefficients de Fourier.

Soit f une fonction continue par morceaux 2-périodique.

1. Que signifie calculer les coefficients de Fourier réels de f ?
2. A-t-on pour tout $n \in \mathbb{N}$ que
$$a_n(f) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t?$$
3. Que dire des coefficients de Fourier (réels et complexes) si la fonction est impaire ?
4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{i}{n}$. Que pouvez-vous en déduire sur la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier complexes ?

Solution.

1. Cela signifie calculer $a_0(f) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout $n \geqslant 1$
$$a_n(f) = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\cos(\pi nt)\,\mathrm{d}t$$
et
$$b_n(f) = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\sin(\pi nt)\,\mathrm{d}t.$$
2. Non sauf pour a_0 d'après ce qui précède !
3. Dans ce cas, $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et on a que la moitié des coefficients de Fourier à calculer ! Voir Propositions 4.2 et 4.3.
4. On utilise alors les relations entre coefficients réels et complexes donnés par la Proposition 4.4. On sait que $c_0(f) = a_0(f) = 0$ et que pour tout $n > 0$,
$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) = -\frac{i}{2}\times\frac{i}{n} = \frac{1}{2n}$$
tandis que pour tout $n < 0$,
$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)) = \frac{i}{2}\times\frac{i}{-n} = \frac{1}{2n}.$$
Finalement, on a que $c_0(f) = 0$ et pour tout $n \neq 0$, $c_n(f) = \frac{1}{2n}$.

Exercice 5 — Pour préparer le cours suivant.

Finir le calcul de coefficients de Fourier entamé à la fin du dernier cours. Autrement dit, calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction 2π-périodique définie pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ par $f(t) = |t|$.

Solution. Je vous renvoie à l'exemple (i) pages 47 et suivantes du polycopié de cours !