Devoir numéro 2 : Allez Hopf

Le but de ce devoir est de donner une autre interprétation de la caractéristique d'Euler–Poincaré d'une surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Le devoir est à rendre par email en un unique pdf comportant votre nom et prénom au plus tard le **lundi 7 avril**.

Notations et introduction

Soit n un entier naturel non nul. Dans ce devoir, on notera $\overline{B}_n(x,\varepsilon)$ (*respectivement* $B_n(x,\varepsilon)$) la boule fermée (*resp.* ouverte) de $\mathbb{R}^n$ de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\varepsilon > 0$. On notera également $\chi(X)$ la caractéristique d'Euler–Poincaré d'un CW-complexe fini X. On rappelle que

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k c_k \quad \text{avec} \quad c_k = \mathrm{card}\,\{\text{cellules ouvertes de dimension } k \text{ de } X\}\,.$$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs C^∞ sur U admettant un zéro isolé $x \in U$. Pour $\varepsilon > 0$ tel que X ne s'annule qu'en x sur $\overline{B}_n(x,\varepsilon)$, on définit l'indice de X en x, noté $\mathrm{Ind}(X,x)$, par

$$\mathrm{Ind}(X,x) := \deg\left(v \in \mathbb{S}_{n-1} \longmapsto \frac{X(x+\varepsilon v)}{||X(x+\varepsilon v)||} \in \mathbb{S}_{n-1} \right).$$

On rappelle que l'on a vu en TD que cette définition avait un sens et était indépendante du choix de ε.

Soit $f : M \longrightarrow N$ un C^∞-difféomorphisme local entre deux sous-variétés lisses et X un champ de vecteurs C^∞ sur N. On définit alors un champ de vecteurs Y sur M par

$$\forall m \in M, \quad Y(m) = (T_m f)^{-1}\left(X(f(m))\right).$$

On parle de *tiré en arrière* de X par f et on note $Y = f^* X$. Pour finir, soient M une sous-variété C^∞ et X un champ de vecteurs C^∞ sur M admettant un zéro isolé $x \in M$. Pour une carte locale (U,φ) de M en x telle que X ne s'annule qu'en x sur U, on définit l'indice de X en x par

$$\mathrm{Ind}(X,x) := \mathrm{Ind}\left(\left(\varphi^{-1}\right)^* X_{|U}, \varphi(x) \right).$$

Questions

Préliminaires

1. On considère les champs de vecteurs C^∞ suivants sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, \quad Z\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Déterminer le flot de ces champs de vecteurs, dessiner leurs courbes intégrales et déterminer leur indice en $(0,0)$.

2. Soient M une sous-variété C^∞ de dimension n et X un champ de vecteurs C^∞ sur M ayant un zéro isolé en $x \in M$. Le but de cette question est d'établir que l'indice de X en x est bien défini et indépendant du choix de la carte locale.

   a) Soient (U,φ) et (V,ψ) deux cartes locales en x telles que X ne s'annule qu'en x sur U et sur V et telles que $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Montrer que si l'on pose $f = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$, on a

$$\forall t \in \varphi(U \cap V), \quad \left(\varphi^{-1}\right)^* X(t) = d_{f^{-1}(t)} f \circ \left(\psi^{-1}\right)^* X \circ f^{-1}(t).$$

   b) On suppose dans cette question que $\psi(U \cap V)$ est convexe et que f préserve l'orientation. Montrer qu'en tant que C^∞-plongements, f est C^∞-isotope à la restriction à $\psi(U \cap V)$ de l'application linéaire $d_0 f$ puis que f est C^∞-isotope à la restriction à $\psi(U \cap V)$ de l'identité. Conclure dans le cas où f préserve l'orientation.
   Indication : On pourra utiliser librement qu'il existe $g_1, \ldots, g_n$ des fonctions C^∞ sur $\psi(U \cap V)$ telles que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et telles que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \psi(U \cap V), \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

   c) Établir que si ρ est une réflexion [1], $\rho \circ \left(\varphi^{-1}\right)^* X \circ \rho^{-1}$ a le même indice que $\left(\varphi^{-1}\right)^* X$ en 0 et conclure.

1. C'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Poincaré–Hopf

Soient S une surface compacte connexe orientée à bord vide de $\mathbb{R}^3$ et X un champ de vecteurs C^∞ sur S à zéros isolés. On note l'application de Gauß

$$G : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{S}_2 \\ x & \longmapsto & \hat{x} \end{array} \right.$$

où $\hat{x}$ est l'unique élément de $\mathbb{S}_2$ orthogonal à $T_x S$ tel que si (v_1, v_2) est une base directe de $T_x S$, alors $(v_1, v_2, \hat{x})$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$. On rappelle qu'on a établi que G est de classe C^∞ dans le TD 5.
On considère alors $N : S \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $N(x,t) = x + tG(x)$. On admettra que, pour $\delta > 0$ assez petit, $N_{|S\times[-\delta,\delta]}$ est un plongement C^∞.

3. Justifier que pour $\delta > 0$ assez petit, $S_\delta = N(S \times [-\delta, \delta])$ est une sous-variété compacte connexe orientée à bord de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera le bord et la dimension. Illustrer S_δ par un dessin. **On rappelle que le bord de S_δ est orienté par la direction sortante.**

On se fixe un tel choix de $\delta > 0$ dans la suite. On étend alors X à S_δ via

$$\tilde{X}(N(x,t)) = \cos\left(\frac{\pi t}{2\delta}\right) X(x) + \sin\left(\frac{\pi t}{2\delta}\right) G(x).$$

4. Comparer les zéros de $\tilde{X}$ et ceux de X.
5. Justifier l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in S$ tel que $X(x) = 0$, on a $B_3(x,\varepsilon) \subseteq S_\delta$ et que l'on peut supposer ces boules d'adhérences disjointes et ne rencontrant pas le bord de S_δ. En considérant $M = S_\delta \setminus \bigcup_{\substack{x\in S \\ X(x)=0}} B_3(x,\varepsilon)$, établir que

$$2\deg(G) = \sum_{\substack{x\in S \\ X(x)=0}} \mathrm{Ind}(\tilde{X}, x).$$

6. Soit (U, φ) une carte locale en $x \in S$ telle que X ne s'annule qu'en x sur U, telle que $\varphi(x) = 0$ et telle que $\overline{B}_2(0,\varepsilon) \subseteq \varphi(U) = V$ avec $\varepsilon < \delta$. On définit alors $\tilde{\varphi} : N(U\times] - \delta, \delta[) \longrightarrow V\times] - \delta, \delta[$ par $\tilde{\varphi}(N(y,t)) = (\varphi(y), t)$. Justifier qu'il s'agit d'une carte locale de S_δ en x telle que $\overline{B}_3(0,\varepsilon) \subseteq V\times] - \delta, \delta[$. On pose alors

$$\Psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{S}_1 & \longrightarrow & \mathbb{S}_1 \\ v & \longmapsto & \dfrac{(\varphi^{-1})^* X(\varepsilon v)}{\left\|(\varphi^{-1})^* X(\varepsilon v)\right\|} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Psi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{S}_2 & \longrightarrow & \mathbb{S}_2 \\ w & \longmapsto & \dfrac{(\tilde{\varphi}^{-1})^* \tilde{X}(\varepsilon w)}{\left\|(\tilde{\varphi}^{-1})^* \tilde{X}(\varepsilon w)\right\|} \end{array} \right. .$$

Établir que si $v \in \mathbb{S}_1$ est une valeur régulière de Ψ_1, alors[2] $(v, 0) \in \mathbb{S}_2$ en est une de Ψ_2 et que tous les antécédents de $(v,0)$ par Ψ_2 sont de la forme $(v', 0)$. En déduire que $\mathrm{Ind}(\tilde{X}, x) = \mathrm{Ind}(X, x)$ et conclure que

$$\sum_{\substack{x\in S \\ X(x)=0}} \mathrm{Ind}(X, x)$$

ne dépend pas de X.
On pourra notamment établir que $d_{N(x,t)}\tilde{\varphi}(T_x S) \subseteq \mathbb{R}^2\times\{0\}$ et $d_{N(x,t)}\tilde{\varphi}\left((T_x S)^\perp\right) \subseteq \{(0,0)\}\times\mathbb{R}$, puis vérifier que pour tout $v \in T_x S$, $d_{N(x,0)}\tilde{\varphi}(v) = (d_x\varphi(v), 0)$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, $d_{N(x,0)}\tilde{\varphi}(hG(x)) = (0,0,h)$.
7. Dessiner, pour tout $g \in \mathbb{N}$, un champ de vecteurs C^∞ sur Σ_g, la somme connexe de g tores $\mathbb{T}^2$, ne possédant que des zéros isolés et tel que la somme des indices des zéros de ce champ de vecteurs soit égal à $\chi(\Sigma_g)$. En déduire que pour tout champ de vecteurs lisse X à zéros isolés sur S, on a

$$\sum_{\substack{x\in S \\ X(x)=0}} \mathrm{Ind}(X, x) = \chi(S).$$

On ne demande ici pas de détails et un dessin convaincant de champ de vecteurs sur le $4g$-gone qui s'annule au centre de chaque k-cellule avec indice $(-1)^k$ pour $k \in \{0,1,2\}$ suffira. On pourra notamment s'inspirer de la question **1.** *et on traitera à part le cas $g = 0$.*

► **Compléments. –** On peut utiliser ce résultat pour établir qu'une surface compacte connexe orientable et à bord vide possède un champ de vecteurs qui ne s'annule pas si, et seulement si, $g = 1$. On a alors construit un tel champ de vecteurs dans le TD 5. Cette formule a par ailleurs de nombreuses autres applications telles qu'une nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert–Gaußou une démonstration de la formule de Gauß–Bonnet.

2. Si $v = (x,y) \in \mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, on a alors bien $(v,0) = (x,y,0) \in \mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$.