Géométrie et Analyse de Fourier
Math 254 – Version abrégée
Université Paris-Saclay

Kevin Destagnol

2020-2021

Table des matières

Introduction

Vous pouvez me contacter pour toute question ou problème par mail à l'adresse suivante `kevin.destagnol@universite-paris-saclay.fr`. Je signale que je corrige tout exercice écrit que vous avez rédigé et que vous souhaitez me rendre. Concernant le volume horaire, il est assez léger pour un programme assez chargé donc on va essayer de traiter le maximum du mieux que l'on peut en essayant d'expliquer pourquoi les notions sont utiles en physique et en chimie. Concernant la note finale, il y aura probablement une note de contrôle continu ainsi que deux devoirs à la maison qui compteront pour environ 25% de la note finale tandis que les 75% restants seront obtenus grâce à la note de l'examen final (il n'y a pas de partiel). Des petites questions à chercher pour vous inciter à ouvrir votre cours et tester votre compréhension seront distribuées (ou envoyées par mail) à la fin de chaque séance de cours que vous pourrez me rendre pour correction lors du cours de la semaine suivante.

L'objectif du cours est double. Dans une première partie, on va traiter de séries de Fourier. Il s'agit d'un objet central en mathématiques mais aussi aux nombreuses applications en physique et en chimie comme on essayera de l'illustrer en TD. Les séries de Fourier sont très utiles pour modéliser des phénomènes ondulatoires ou vibratoires et font intervenir des notions physiques telles que la fréquence et le spectre. Elles furent introduites par Joseph Fourier en 1807 pour résoudre l'équation de la chaleur (à savoir l'étude de la propagation de la chaleur dans une tige métallique, ce qui fait intervenir une équation aux dérivées partielles [1]. Par ailleurs, on peut citer depuis 1807 de nombreuses autres applications plus industrielles et concrètes des séries de Fourier dans la synthèse sonore et le traitement d'image ou du signal en général (affichage d'un écran d'un téléphone portable ou format mp3 entre autres) mais aussi en spectroscopie RMN qui est une méthode utilisant les propriétés ondulatoires du champ magnétique de certains noyaux atomiques dans le but de confirmer la présence d'une molécule dans un milieu ou la présence d'impuretés. Elles constituent également un analogue discret de la transformée de Fourier d'utilité notable en cristallographie.

La deuxième partie du cours traitera de groupes et de symétries qui laissent invariants un objet tel un tétraèdre ou un cube avec applications à la cristallographie et aux propriétés électroniques des molécules. En effet, la structure géométrique d'une molécule est liée à sa structure électronique, ce qui est très utile en spectroscopie et permet de déterminer un certain nombre de propriétés de la molécule sans calculs tels que le moment dipolaire et les modes de vibrations nécessaires à la détection par spectroscopie infrarouge. Certains éthylotests peuvent par exemple fonctionner sur ce principe. Ces notions sont également centrales en cristallographie.

1. Vous avez peut être déjà rencontré certaines équations aux dérivées partielles, sinon ce n'est pas grave on y reviendra en TD et dites-vous pour le moment qu'il s'agit d'une généralisation des équations différentielles que vous avez vu en L1 dans le cas de fonctions de plusieurs variables et que ce sont, comme les équations différentielles, un outil très utile pour modéliser toute sorte de phénomènes physiques ou chimiques.

"L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré de former l'analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels." Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur, discours préliminaire, 1822.

Première Partie

Séries de Fourier

Mais tout le monde n'était pas de l'avis de Fourier, caricaturé ici par Boilly.
"Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que, sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.". Carl G.J. Jacobi, lettre à Legendre, 2 juillet 1830.

Chapitre 1

Rappels sur les suites

1.1 Limite d'une suite

► **Exemples :**

(i) On a par exemple

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

tandis que les suites $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(ii) On a également

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}=1.$$

En effet, je rappelle que pour calculer la limite en $+\infty$ d'un quotient de deux polynômes, il suffit de considérer la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Vous pouvez alors utiliser tous les résultats auxquels vous êtes habitués dans le cas des fonctions, notamment les croissances comparées suivantes [1].

Proposition 1.1 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-\beta n}=0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta}=0.$$

► **Remarque** :

(i) Toujours établir l'existence d'une limite avant d'en parler !

(ii) La limite (lorsqu'elle existe) d'une suite positive (*resp.* négative) est toujours positive (*resp.* négative). De manière plus générale, si pour tout entier naturel [2] n, $m < u_n$, et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors [3] $m \leqslant \ell$. De même, si pour tout entier naturel n, $u_n < M$, et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $\ell \leqslant M$.

► **Exemple** : Bien sûr, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(-e^n)=-\infty.$$

1. Où il faut se souvenir que l'exponentielle l'emporte toujours sur les polynômes et qu'à l'inverse, le logarithme est toujours battu par les polynômes.
2. En fait si l'inégalité vaut à partir d'un certain rang, on a un résultat analogue.
3. Bien noter le passage à l'inégalité large à la limite ! En effet, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = 1+\frac{1}{n} > 1$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \geqslant 1.$$

tandis que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, finie ou infinie.

► **Remarque** : Pour mémoire, les formes indéterminées sont les suivantes

$$+\infty-\infty, \quad -\infty+\infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad \pm\infty\times 0, \quad 0\times\pm\infty.$$

Pour lever une indétermination, on peut utiliser des méthodes analogues que dans le cas des limites en $+\infty$ de fonctions et notamment soit forcer la factorisation par le terme dominant (qui est donc à identifier) soit se ramener à des limites du cours du type croissances comparées. Enfin, dans le cas d'une limite $\frac{\ell}{0}$ avec $\ell\neq 0$, se souvenir qu'il faut déterminer si le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^-.

► **Exemples** :

(i) Considérons la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. On a alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Par ailleurs, la fonction cosinus est continue en 0 et vaut $\cos(0)=1$, par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\cos(0)=1.$$

(ii) On a vu que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

si bien que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1.$$

1.1.1 Calculs de limites et comparaisons

Commençons par limite importante à connaître.

Proposition 1.2 *Soit $q\in\mathbb{R}$. On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty}q^n=\begin{cases}0 \text{ si } |\ell|<1\\ 1 \text{ si } \ell=1\\ +\infty \text{ si } \ell>1.\end{cases}$$

DÉMONSTRATION.– Commençons par le cas $q>0$. On a alors $q^n=e^{n\ln(q)}$. Si alors, $0<q<1$, on a $\ln(q)<0$ si bien que

$$\lim_{n\to+\infty}n\ln(q)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}q^n=0$$

car l'exponentielle tend vers o en $-\infty$. De même, si $q>1$, on a $\ln(q)>0$ et

$$\lim_{n\to+\infty}n\ln(q)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}q^n=+\infty$$

car l'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Le cas $q=1$ est évident puisque dans ce cas

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad q^n=1.$$

De même pour $q=0$ où pour tout $n\geqslant 1$, $q^n=0$. Il reste donc à traiter le cas $-1<q<0$. Pour ce faire, on remarque que

$$|q^n|=|q|^n\leqslant|q|^n.$$

Or, $0<|q|<1$ donc on a vu que

$$\lim_{n\to+\infty}|q|^n=0$$

et on conclut par le Corollaire 1.1 ci-dessous. $\square$

Ensuite, le premier théorème que vous connaissez bien et qui permet de calculer une limite est le célèbre théorème des gendarmes ou lemme d'encadrement qui prend en sandwich une suite entre deux suites ayant la même limite, forçant ainsi la suite du milieu à avoir elle aussi, la même limite.

Proposition 1.3 (Théorème des gendarmes/Lemme d'encadrement)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

On a alors le corollaire suivant qui découle immédiatement[4] de la Proposition 1.3 suivant mais qui s'avère très utile.

Corollaire 1.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

► **Exemple** : Considérons la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Le premier réflexe est d'essayer de calculer la limite du numérateur et celle du dénominateur et de voir si on peut conclure mais ici on est bloqué du fait que le numérateur n'admet pas de limite, ni finie ni infinie. On procède donc en remarquant que[5]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et ainsi le Corollaire 1.1 fournit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Terminons alors cette section par un analogue du théorème des gendarmes pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposition 1.4

(i) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(ii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

1.2 Monotonie

De la même façon que le sens de variations des fonctions apporte de nombreuses informations intéressantes, la monotonie d'une suite est également un aspect intéressant à étudier. On donne les définitions suivantes qui je l'espère vous paraissent tout à fait naturelles.

4. En effet, se souvenir que $|u_n| \leqslant v_n$ équivaut à $-v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$.
5. En effet, $(-1)^n$ vaut toujours 1 ou -1 selon la parité de n et ainsi $|(-1)^n| = 1$.

Définition 1.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que :*

*(i) La suite est **croissante** (resp. strictement croissante) si pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$);*

*(ii) La suite est **décroissante** (resp. strictement décroissante) si pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$);*

*(iii) La suite est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$;*

*(iv) La suite est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$;*

*(v) La suite est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

► **Exemples :**

(i) On a que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$

de sorte que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 et majorée par 1. Elle est ainsi bornée.

(ii) Pour savoir si une suite est croissante ou décroissante, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si ce signe est positif, la suite est croissante et s'il est négatif, la suite est décroissante. Dans le cas de $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$, on doit étudier

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{(n+1)n} < 0$$

de sorte que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et même strictement décroissante.

(iii) Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M$$

pour $m, M \in \mathbb{R}$. Alors, si la suite converge vers une limite finie ℓ, cette limite vérifie $m \leqslant \ell \leqslant M$. Par ailleurs, une suite bornée ne peut pas diverger vers $\pm\infty$ et une suite convergente est bornée. En revanche, une suite non bornée ne diverge pas nécessairement vers $\pm\infty$ comme en témoigne l'exemple de $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite bornée ne converge pas nécessairement comme en témoigne l'exemple de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais on va voir plus bas qu'au prix d'une hypothèse supplémentaire, ces réciproques deviennent vraies !

Proposition 1.5 *Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.*

On a évidemment le pendant de ce théorème pour les suites non bornées.

Proposition 1.6 *Toute suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) est divergente vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Terminons alors ce chapitre sur les suites par un théorème dans la même veine que le théorème des gendarmes.

Proposition 1.7 (Suites adjacentes) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiantque*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n,$$

que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. Alors les deux suites sont convergentes et ont la même limite ℓ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Introduction

Passons alors à l'objet essentiel de cette première partie du cours, à savoir les séries et commençons par les plus simples d'entre elles, à savoir les séries numériques.

Rappelons pour bien débuter ce chapitre que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

représente la somme des u_k pour k variant de 0 à n.

Pour introduire le concept de série, considérons pour commencer le paradoxe célèbre suivant dû au philosophe grec Zénon [1]. Imaginez que vous vous déplacer à la vitesse de 1 m/s et que vous devez parcourir un mètre. Combien de temps vous faut-il pour parcourir la distance d'un mètre ? Question facile, une seconde bien sûr ! Mais alors comment expliquer le raisonnement suivant : il vous faut d'abord parcourir la moitié de la distance et pour cela il vous faut $\frac{1}{2}$ seconde. Puis il faut parcourir la la moitié du trajet restant (soit $\frac{1}{4}$ de mètre) et pour cela il vous faut $\frac{1}{4}$ de seconde supplémentaire. On peut alors continuer le raisonnement en disant que pour arriver, il faut alors parcourir la moitié du chemin restant et ainsi de suite. Ce faisant, le temps nécessaire semble être

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

L'objectif de cette section est de donner un sens à cette somme infinie de termes positifs dont on a l'impression qu'elle devrait être infinie mais comme on va le voir, ce n'est pas toujours le cas, ce qui nous permettra de résoudre le paradoxe. De manière générale, pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, on voudrait donner un sens (au moins dans certains cas) à la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots .$$

Cela correspondra à l'analogue discret d'une intégrale pour les fonctions et on aura beaucoup de propriétés en commun.

2.2 Premières définitions

Une idée naturelle pour définir de tels objets est de procéder comme dans le paradoxe et de considérer des sommes finies avec de plus en plus de termes et de se dire que si cette suite de sommes finies converge, la limite est une bonne définition pour la somme infinie.

1. Que j'ai ici un peu remodifier puisque sa version originale concerne Achille et la tortue. L'objectif de ce paradoxe pour Zénon (que l'on va résoudre en utilisant les séries mais les séries étaient bien sûr inconnues de Zénon à l'époque) était de démontrer que tout est illusion et que parcourir un mètre est en réalité impossible.

Définition 2.1 *À une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe une nouvelle suite, appelée suite des* ***sommes partielles*** *et définie pour tout entier n par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

On appelle ***série de terme général*** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.*
On dit alors que la série ***converge*** *si la suite des sommes partielles converge et on note alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

sa limite, appelée somme de la série. Une série non convergente est alors dite ***divergente****.*

► **Remarques** :

(i) ⚠ Attention à différencier les deux notations $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ qui représente la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui la limite de cette suite des sommes partielles et donc est un nombre réel ou complexe. On peut par ailleurs toujours parler d'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ mais on ne peut parler de sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ que dans le cas d'une série **convergente**. ⚠

(ii) Les séries convergentes sont alors le cadre dans lequel on peut donner un sens à la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

► **Retour sur l'exemple introductif** : Revenons à l'exemple du paradoxe de Zénon. Il s'agit de s'intéresser à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$. Pour cela, on doit étudier la convergence de la suite des sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang n est donnée par définition par[2]

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

On remarque alors que d'après la Proposition 1.2 du chapitre précédent que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

car $0 < \frac{1}{2} < 1$ de sorte que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Il s'ensuit alors que[3]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = 2 - 1 = 1$$

2. Je rappelle qu'il faut savoir reconnaître les séries géométriques et savoir que

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

dès que $q \neq 1$.

3. La somme de 1 à $+\infty$ est la somme de 0 à $+\infty$ moins le terme pour $n = 0$, qui vaut 1.

et on retrouve bien (mais avec peine!) qu'il faut 1 seconde pour parcourir 1 mètre à la vitesse de 1 m/s! En général on ne sait pas donner de formules explicites pour la somme d'une série mais on peut quand même parvenir à dire des choses sur ces objets. La suite des sommes partielles est ici donnée par

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & \frac{1}{2^0} \\ S_1 & = & \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} \\ S_2 & = & \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \\ S_3 & = & \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \\ S_4 & = & \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \\ & \vdots & \end{array}$$

► **Exemples** :

(i) Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$. Pour étudier cette série, on s'intéresse à la suite des sommes partielles. Pour cela, soit $n \in \mathbb{N}$, alors par définition [4]

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On a alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série diverge. La suite des sommes partielles est ici donnée par

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & 0 \\ S_1 & = & 0+1 \\ S_2 & = & 0+1+2 \\ S_3 & = & 0+1+2+3 \\ S_4 & = & 0+1+2+3+4 \\ & \vdots & \end{array}$$

(ii) Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$. Pour étudier cette série, on s'intéresse à la suite des sommes partielles. Pour cela, soit $n \in \mathbb{N}$, alors par définition

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.$$

On a alors deux cas, si n est pair S_n est une succession de 1 et de -1 avec autant de 1 que de -1 si bien que $S_n = 0$ tandis que si n est impair, S_n est une succession de 1 et de -1 en nombre égal suivi d'un 1 si bien que $S_n = 1$. La suite des sommes partielles oscille donc constamment entre 0 et 1 et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ diverge. La suite des sommes partielles est ici donnée par

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & 1 \\ S_1 & = & 1-1 \\ S_2 & = & 1-1+1 \\ S_3 & = & 1-1+1-1 \\ S_4 & = & 1-1+1-1+1 \\ & \vdots & \end{array}$$

4. Le calcul suivant utilise le calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique classique

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

que l'on peut démontrer par exemple par récurrence.

En général, on ne sait même pas calculer explicitement les sommes partielles et on va avoir besoin d'autres méthodes pour pouvoir malgré tout établir la convergence de séries et dire quelque chose de la somme. Pour cela, commençons par la convergence et la divergence de deux familles de séries essentielles[5].

Proposition 2.1

(i) ***(Série de Riemann)*** *La série*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

(ii) ***(Série de Riemann alternée)*** *La série*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

(iii) ***(Série géométrique)*** *La série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$$

converge si, et seulement si, $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

► **Exemples** : Ainsi, en prenant la série de Riemann pour $\alpha = 1$, la série **harmonique** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge tandis que le cas $\alpha = 2$ fournit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge[6]. On ne sait en revanche pas *a priori* la valeur de sa somme[7]. De même, considérant $\alpha = 1$ dans la série de Riemann alternée, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge. De même, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 3^n$ diverge car $3 > 1$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge car $0 < \frac{2}{3} < 1$.

On a bien évidemment les opérations suivantes sur les séries.

Proposition 2.2 *Soient $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors*

(i) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

5. Pour celles et ceux qui veulent aller plus loin, des éléments de démonstration sont fournis pages 24 et 25.
6. On renvoie à la page `https://www.math.u-psud.fr/~destagnol/series.html` pour une illustration de ces phénomènes.
7. On verra que les séries de Fourier permettent en réalité de calculer la valeur de cette somme.

► **Remarque** : Il s'agit de propriétés de linéarité comme pour l'intégrale. ⚠ Attention cependant au produit, ce n'est pas parce que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$ converge [8] et même dans le cas de la convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \neq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

au même titre que $(u_0 + u_1)(v_0 + v_1) \neq u_0 v_0 + u_1 v_1$! ⚠

► **Exemples** : Un réflexe doit donc être de vous demander si la série que l'on vous demande d'étudier est une série connue (de Riemann, de Riemann alternée ou géométrique) ou alors une combinaison linéaire de ces dernières. Par exemple, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{3-(-1)^n}{n^5}$ est une combinaison linéaire de la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^5}$ qui converge (car $\alpha = 5 > 1$) et de la série de Riemann alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^5}$ qui converge (car $\alpha = 5 > 0$). On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^5}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-(-1)^n}{n^5} = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}.$$

En revanche, on ne peut **rien** dire de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{3^n}{n}$ qui ferait intervenir un produit. On verra plus tard que le critère de d'Alembert permet d'étudier ces séries !

2.3 Une condition nécessaire de convergence

Un problème naturel est alors de trouver des critères assurant la convergence d'une série. On commence par une condition **nécessaire** (mais **PAS suffisante**).

Proposition 2.3 *Si la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

DÉMONSTRATION.– On note S_n la somme partielle de rang n. On a alors par définition pour tout $n \geqslant 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n + S_{n-1}$$

si bien que $u_n = S_n - S_{n-1}$. Mais par convergence de la série il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \ell$$

de sorte que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et on a ainsi le résultat. □

► **Remarque** : ⚠ Attention à bien voir que ce n'est qu'une condition nécessaire. En particulier, toute suite tendant vers 0 en $+\infty$ ne donne pas lieu à une série convergente comme le montre l'exemple de la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Le théorème ne permet donc que de montrer la divergence de séries. Si une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ vérifie que $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors nécessairement la série diverge mais si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, il faut un argument supplémentaire pour conclure à la convergence, ce n'est pas suffisant pour la garantir. ⚠ Un autre réflexe face à une série doit donc être de se demander si le terme général tend vers 0 ou non !

8. Considérer par exemple $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser la Proposition 2.1.

2.4 Séries à termes positifs et convergence absolue

2.4.1 Séries à termes positifs

Effectuons un court intermède autour des séries à termes positifs pour lesquels on a des critères plus agréables de convergence et auxquelles on va pouvoir souvent (mais pas toujours) se ramener pour étudier la convergence d'une série quelconque.

Proposition 2.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et supposons que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la série converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée, i.e.*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M.$$

Dans ce cas,

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant M.$$

DÉMONSTRATION.– Il s'agit tout simplement de voir que pour tout entier naturel n, on a $S_{n+1} = u_{n+1} + S_n$ de sorte que $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ et par conséquent la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de sorte que sa convergence est équivalente au fait qu'elle soit majorée par les Proposition 1.5 et Proposition 1.6.

□

► **Remarque** : Cela établit seulement la convergence et donne simplement un encadrement de la somme sans donner sa valeur exacte. Par ailleurs, dans l'énoncé de la Proposition 2.4, la positivité à partir d'un certain rang suffirait.

► **Exemple** : On peut utiliser cela pour montrer la convergence de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On utilise alors la majoration valable pour tout entier $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Ainsi,

$$S_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

On constate alors que

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

car tous les termes se simplifient 2 à 2 sauf le premier et le dernier. On a alors

$$S_n \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Ainsi la suite des sommes partielles est majorée et comme la série est à termes positifs, elle converge et

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2.$$

On a vu que pour qu'une série converge il faut que la suite tende vers 0 et que le terme général varie suffisamment peu quand n tend vers $+\infty$. Il n'est donc pas étonnant qu'une suite majorée par une autre qui varie suffisamment peu pour donner lieu à une série convergente, donne également lieu à une série convergente. Et inversement, il est assez intuitif qu'une suite minorée par une autre qui varie trop pour donner lieu à une série convergente, donne également lieu à une série divergente. L'objet de la proposition suivante est de rendre cette intuition rigoureuse. Encore une fois, l'énoncé qui suit reste valable si l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ vaut seulement à partir d'un certain rang.

Proposition 2.5 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à* ***termes positifs*** *telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$.*

(i) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

(ii) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

► **Exemple** : Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Le terme général de la série est la suite $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ à termes positifs car $\frac{1}{n^2} \in [0, 1]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est positive. On utilise alors[9] l'inégalité

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or, on sait[10] que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la Proposition 2.5 garantit la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Terminons cette section par un dernier critère très utile.

Proposition 2.6 (Critère de d'Alembert) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement* ***positifs*** *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Alors si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, si $\ell > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge tandis que si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

► **Exemples** :

(i) On peut déduire du critère de d'Alembert la convergence de la série[11] $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$. En effet, on a pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n!}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

donc la série converge !

(ii) De même pour la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{n}$. En effet, on a pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{n}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = 3 \times \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3 > 1$$

9. Vous pouvez en effet établir en étudiant le signe de la fonction $f(x) = \sin(x) - x$ sur $[0, +\infty[$ par exemple que

$$\forall x \geqslant 0, \quad \sin(x) \leqslant x.$$

10. Série de Riemann avec $\alpha = 2$, voir Proposition 2.1.

11. Je rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

donc la série diverge !

2.4.2 Convergence absolue

Voyons à présent comment on peut se ramener dans certains cas à l'étude de séries à termes positifs. On introduit pour ce faire la notion de convergence absolue qui consiste à remplacer

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{par} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

et on espère qu'étudier la seconde série, qui est à termes positifs, donne des informations sur la série originale.

Définition 2.2 *Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite* ***absolument convergente*** *si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente.*

► **Exemples** :

(i) Considérons la série de terme général $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^2}$. On a alors

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ est convergente donc par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

(ii) Considérons la série de terme général $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$. On a alors

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ est divergente donc par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente.

L'intérêt de la notion de convergence absolue vient de la proposition suivante.

Proposition 2.7 *Toute série absolument convergente est convergente.*

► **Remarques** :

(i) À nouveau, une série absolument convergente converge donc il s'agit là d'un bon moyen de montrer la convergence d'une série et cela doit être un réflexe. D'autant qu'on a des critères concernant les séries à termes positifs. Malheureusement, il existe des séries qui sont convergentes mais qui ne sont pas absolument convergentes, comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ par exemple. Ainsi, réciproquement la convergence n'implique **PAS** la convergence absolue.

(ii) Dans l'exemple ci-dessus, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc on peut en déduire que la série converge.

2.5 Un critère de convergence au-delà de la convergence absolue

On vient de voir que pour montrer la convergence d'une série, parfois étudier la convergence absolue ne suffit, comme dans l'exemple de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$. Voici alors un critère qui permet de s'en sortir malgré tout dans certains cas.

Proposition 2.8 (Critère de Leibniz) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs et tendant vers 0 en $+\infty$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ est convergente.*

► **Exemple** : On peut notamment appliquer ce critère au cas de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$. En effet, la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite de réels positifs, décroissante, et de limite nulle en $+\infty$ de sorte que le critère de Leibniz garantit la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$.

2.6 Kit de survie sur les séries

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série dont on vous demande d'étudier la convergence. Il faut alors suivre l'algorithme suivant :

(0) On calcule $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série diverge et on a répondu à la question par la Proposition 2.3 et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on passe à l'étape (0′).

(0′) On se demande si l'on a affaire à une combinaison linéaire de séries de Riemann, Riemann alternée ou géométrique, auquel cas on conclut directement par le cours et les Proposition 2.1 et Proposition 2.2. Sinon on passe à l'étape (1).

(1) On étudie le signe de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si à partir d'un certain rang, on a $u_n \geqslant 0$, alors on a affaire à une série à termes positifs. On utilise alors les critères de la Section 2.4.1 à cette série à termes positifs.

Le premier réflexe si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de nature multiplicative est d'appliquer à $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ le critère de d'Alembert (Proposition 2.6). Si vous obtenez que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

alors si $\ell < 1$, la série converge et vous avez fini. Si $\ell > 1$, la série diverge et vous avez également terminé et si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure et on essaye d'appliquer un autre critère.

Le second critère à tenter est celui de la Proposition 2.5.

Enfin, en dernier recours, on peut essayer d'appliquer la Proposition 2.4.

Si la série n'est **pas** à termes positifs, alors on passe directement à l'étape (2).

(2) On étudie la convergence absolue de la série, autrement dit la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$. Noter qu'on remplace donc u_n par $|u_n|$ qui devient positif [12]. On applique alors les critères de la Section 2.4.1 à cette série à termes positifs.

12. Dans le cas où u_n est positif, $|u_n| = u_n$ et convergence et convergence absolue sont les même notions.

Le premier réflexe si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de nature multiplicative est d'appliquer à $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ le critère de d'Alembert (Proposition 2.6). Si vous obtenez que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$$

alors si $\ell < 1$, la série converge absolument et donc converge par la Proposition 2.7 et vous avez fini. Si $\ell > 1$, la série ne converge pas absolument et il faut passer à l'étape [13] (3) et si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure et on essaye d'appliquer un autre critère.

Le second critère à tenter est celui de la Proposition 2.5. S'il vous permet de conclure à la divergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ vous devez passer à l'étape (3) et s'il vous permet de conclure à la convergence absolue, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge par la Proposition 2.7.

Enfin, en dernier recours, on peut essayer d'appliquer la Proposition 2.4. Si cela vous permet de conclure à la divergence vous devez passer à l'étape (3) et si cela vous permet de conclure à la convergence absolue, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

(3) On se retrouve alors avec une série qui ne converge pas absolument et on veut étudier si celle-ci converge ou pas. Pour ce genre de questions, vous serez soit guidés par l'énoncé soit il faut faire appel au seul critère dont vous disposez pour cela, à savoir le critère de Leibniz (Proposition 2.8). Si le critère s'applique, vous obtenez une série qui converge mais qui ne converge pas absolument.

13. Car peut être converge-t-elle sans converger absolument.

Chapitre 3

Séries de Fourier

On entre avec ce chapitre dans le cœur du programme d'analyse, à savoir les séries de Fourier.

3.1 Introduction et motivations

Commençons par une analogie que j'espère éclairante. Soit x un nombre réel. On peut associer à x la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses décimales. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \{0, \dots, 9\}$ et $x = x_0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots$ Par exemple, à $x = \frac{1}{3} = 0,3333\dots$, on associera la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 3, 3, 3, 3, 3, \dots)$ et à $\pi = 3,141592\dots$ on associera $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, \dots)$ On constate alors que

$$x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{x_3}{1000} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

On peut alors considérer à partir de cette suite de décimales la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$ qui converge par les Proposition 2.1 et Proposition 2.5 car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{x_n}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

On peut alors montrer que la somme de cette série vaut bien

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

En d'autres termes, lorsqu'on se représente un nombre réel par la suite de ses décimales, on suit globalement la suite d'étapes suivante :

$x \in \mathbb{R}$	$\rightsquigarrow$	$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des décimales de x	$\rightsquigarrow$	$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$	$\rightsquigarrow$	$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ la série converge et sa somme vaut x

Cette suite de décimales est alors un bon moyen que tout un chacun utilise pour se faire une représentation de nombres réels abstraits tels que $\sqrt{2}$ ou[1] π. Et cela même sans connaître la liste de toutes les décimales[2], tronquer cette liste permet déjà de se faire une bonne idée d'un nombre réel et bien sûr plus on tronque la lite loin plus on se fait une idée précise.

Tout l'objet des séries de Fourier va alors être de mettre en œuvre le même genre de procédés afin de comprendre non plus des nombres réels mais des *fonctions périodiques*[3], omniprésentes dès qu'il s'agit de modéliser des phénomènes ondulatoires ou vibratoires en physique ou en chimie.

f fonction périodique	$\rightsquigarrow$	$(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ coefficients de Fourier de f	$\rightsquigarrow$	Série de Fourier de f via ses coefficients de Fourier

1. Insister là-dessus ! Comment vous vous représentez $\sqrt{2}$? Probablement en tapant sur votre calculatrice qui vous renvoie une liste (tronquée) de décimales ! Pareil fonction périodique sera bien approchée par une somme finie de sinusoïdes ou de cosinusoïdes !
2. Ce qui est possible pour $\frac{1}{3}$ par exemple mais pas pour π !
3. On verra même que les séries de Fourier ont même des choses à dire dans le cas non périodique !

$\rightsquigarrow$ Étude de la convergence de la série vers la fonction f de départ

Ainsi, comme dans le cas des décimales pour un nombre réel, la série de Fourier tronquée (qui sera un objet plus simple à appréhender) modélisant par exemple un signal électromagnétique ou une note de violon, permettre de cerner certaines propriétés du signal. On verra de plus que les séries de Fourier peuvent servir à obtenir des relations numériques non triviales et à résoudre des équations aux dérivées partielles.

Pour finir citons une application possible de ce genre de procédés. Imaginons que l'on ait un bruit à une fréquence donnée qui pollue un signal périodique que l'on enregistre. Il sera alors possible de calculer la série de Fourier correspondant au signal bruité et de supprimer le coefficient de Fourier correspondant à la fréquence du bruit. On construit ainsi une nouvelle série de Fourier qui devrait s'approcher[4] du signal initial sans le bruit !

3.2 Rappels sur les nombres complexes et la trigonométrie

Je donne ici quelques rappels sur les nombres complexes et quelques formules trigonométriques à connaître et qui seront très utiles par la suite ! Un nombre complexe[5] $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme[6] $z = re^{i\theta}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module de z et θ l'argument de z vérifiant pour $z \neq 0$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r}. \end{cases}$$

La partie réelle de z est x et sa partie imaginaire est y. On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

et $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$. Pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Par ailleurs[7],

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$$

et

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(-\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

et

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b)).$$

Pour conclure ces rappels, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $f(t) = x(t) + iy(t)$ avec $x, y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et on dira que f est dérivable sur I si, et seulement si, x et y le sont auquel cas

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

En particulier, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et[8]

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t}.$$

4. Il n'y aura en général pas égalité du fait qu'on supprime aussi la contribution du signal associée à cette fréquence mais on peut espérer que celle-ci soit négligeable au sein du signal puisque correspondant à un coefficient de Fourier.

5. On parle de la forme algébrique.

6. C'est la forme trigonométrique.

7. Si vous ne voulez pas les apprendre, il faut savoir les retrouver ! On a que $\cos(a + b) = \mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)}\right)$. Or,

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i[\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)]$$

de sorte que

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

En changeant b en $-b$, on en déduit par exemple en utilisant la parité de cosinus et l'imparité de sinus

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

8. Autrement dit on a la même formule que pour le cas réel !

3.3 Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Entrons à présent dans le vif du sujet et voyons comment associer à une fonction périodique la suite de ses coefficients de Fourier. Commençons par définir ce qu'est une fonction périodique. Intuitivement c'est une fonction qui modélise un phénomène qui se répète à intervalle de temps réguliers et indéfiniment.

Définition 3.1 *Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est T-**périodique** si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = f(t).$$

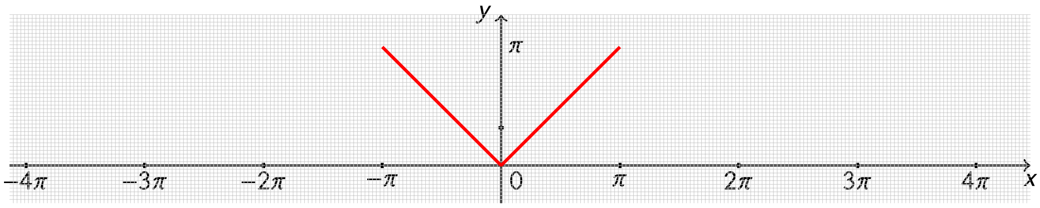
► **Remarques** :

(i) Une fonction T-périodique est entièrement déterminée par sa restriction à $[0, T[$ ou à tout intervalle de longueur T. Le graphe de f complet s'obtient alors en décalant le graphe de f sur un intervalle de longueur T vers la droite de 1,2,3,4,... puis vers la gauche de 1,2,3,4,...

(ii) Inversement, soit $g : [0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors g s'étend de manière unique en une fonction $\overline{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et T-périodique. On construit le graphe de $\overline{g}$ en translatant le graphe de g dans la direction de l'axe des abscisses de 1,2,3,... puis de -1,-2,-3,... Si la fonction g est continue, alors la fonction $\overline{g}$ est continue par morceaux[9] tandis que si

$$g(0) = \lim_{\substack{t \to T \\ t < T}} g(t)$$

et que g est continue, alors la fonction $\overline{g}$ est continue. On peut donc transformer une fonction non périodique en fonction périodique et lui appliquer la théorie des séries de Fourier avec ce procédé ! Traitons un exemple pour fixer les idées. Considérons la fonction $g : [-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = |t|$ pour tout $t \in [-\pi, \pi[$. Le graphe de g est donné par

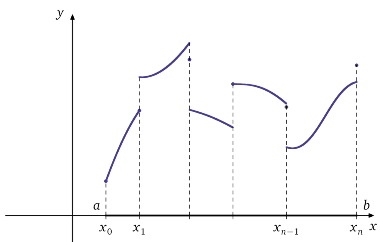


Une translation du graphe de[10] $(1, 0)$ donne lieu à

9. On rappelle qu'une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite *continue* par morceaux s'il existe un entier naturel n et

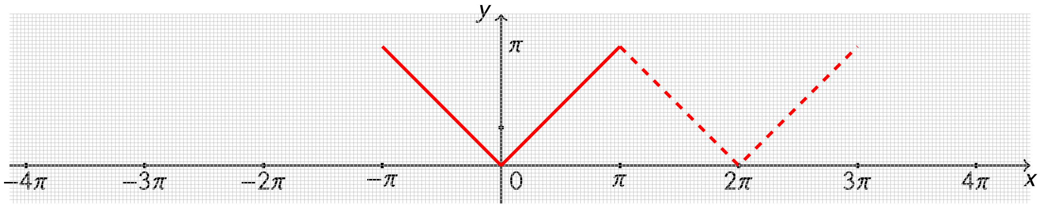
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tels que la restriction de f à tout $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ soit continue. Autrement dit, une fonction continue sur $[a, b]$ est une fonction dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon et une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est une fonction dont on peut tracer le graphe en levant le crayon un nombre fini de fois. Une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est alors une fonction continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ au sens précédent.

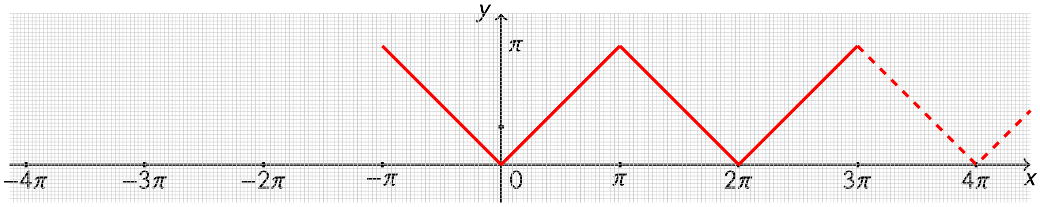


Fonction continue par morceaux sur un segment.

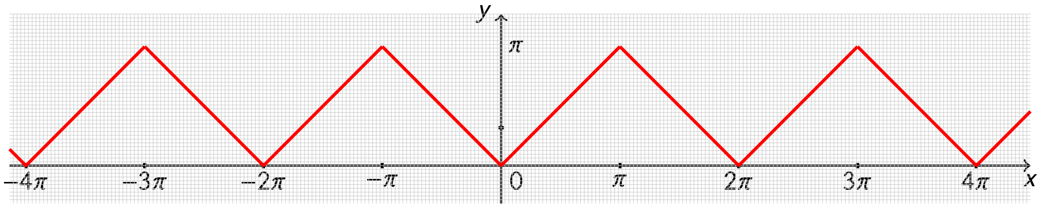
10. C'est-à-dire décaler la courbe de 1 vers la droite suivant l'axe des abscisses.



puis ajouter une translation de [11] $2(1,0)$ suivant l'axe des abscisses donne



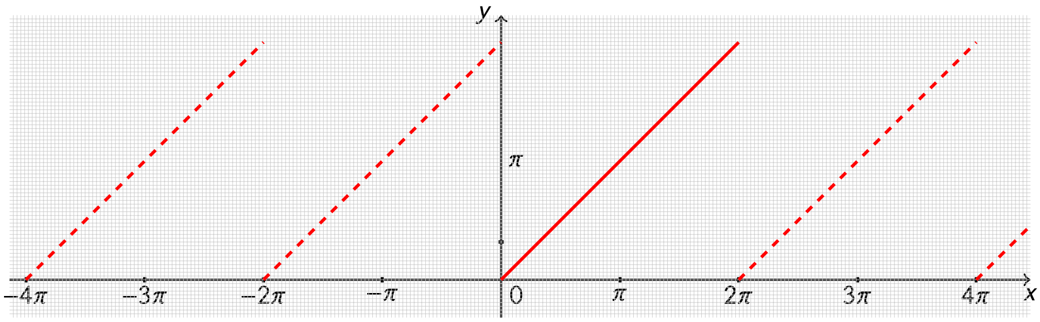
En procédant de même avec tous les $n(1,0)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on obtient que $\overline{g}$ est donnée par



On obtient ainsi une fonction $\overline{g}$ 2π-périodique [12]. Cette fonction est continue car

$$g(-\pi) = \pi = \lim_{t \to \pi} g(t) = \lim_{t \to \pi} |t|$$

ce qui se voit bien sur le graphe ci-dessus ! **Attention** cependant que la fonction périodique obtenu par le même procédé à partir de la même fonction g mais prise sur $[0, 2\pi[$ est une fonction 2π-périodique différente. On donne son graphe ci-dessous et en particulier elle n'est pas continue mais continue par morceaux !



► **Exemples** :

(i) Les fonctions constantes sont T-périodiques pour tout $T > 0$.

(ii) Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques et plus généralement les fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$t \longmapsto \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \quad \text{et} \quad t \longmapsto \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

sont T-périodique pour $T > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) La fonction $t \mapsto \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$ est 2π-périodique et la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) = e^{\frac{2ik\pi t}{T}}$ est T-périodique pour $T > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

11. C'est-à-dire décaler la courbe de 2 vers la droite suivant l'axe des abscisses.
12. La longueur de l'intervalle de départ de g, à savoir $[-\pi, \pi[$.

Ces fonctions forment nos fonctions périodiques de bases à partir desquelles on va comprendre les fonctions périodiques via les séries de Fourier. On a les propriétés suivantes de stabilité des fonctions périodiques qui permettent de construire d'autres fonctions périodiques avec les fonctions périodiques de base que l'on vient de voir.

Proposition 3.1 *Soient $T > 0$ et f, g deux fonctions T-périodiques. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors*

$$f+g, \quad \lambda f, \quad f \times g, \quad \frac{f}{g}$$

sont T-périodiques[13]. *De plus, la fonction définie par translation par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = f(t+a)$$

est T-périodique pour tout $a \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $f_a = f$ lorsque $a \in T\mathbb{Z}$.

Passons alors à présent à l'étape

$$f \text{ fonction périodique} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{coefficients de Fourier de } f\end{array}$$

de notre procédé décrit en introduction.

Définition 3.2 (Coefficients de Fourier complexes) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième* ***coefficient de Fourier complexe*** *de f est*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

On appelle alors ***coefficients de Fourier complexes*** *de f la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Bien noter que la suite est ici indexée par **les entiers relatifs** $\mathbb{Z}$! On peut alors utiliser le lemme suivant qui permet un peu de souplesse quant à l'intégrale définissant $c_n(f)$.

Lemme 3.1 *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Alors,*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION.– Soit $a \in \mathbb{R}$. On a alors

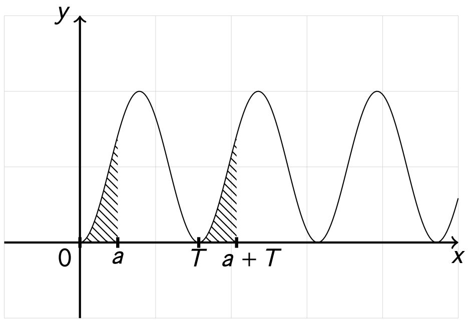
$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$$

par Chasles. Le changement de variable $s = T - t$ dans la dernière intégrale fournit

$$\int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(s)\mathrm{d}s = -\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t$$

de sorte qu'on a bien le résultat.[14]

14. Le résultat est évident sur un dessin, puisque f est T-périodique et $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre les abscisses 0 et a et $\int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre les abscisses T et $a+T$.



□

► **Remarque** : Puisque si f est continue par morceaux et T-périodique, $t \mapsto f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}$ est T-périodique continue par morceaux, on a par conséquent

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

Un choix utile est souvent $a = -\frac{T}{2}$ qui donne que

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\frac{2i\pi n}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

Les coefficients de Fourier complexes vérifient les propriétés de base suivantes.

Proposition 3.2 *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique.*

(i) Si f est à valeurs réelles, alors $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Si f est paire, $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si f est impaire, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Soient g une autre fonction continue par morceaux et T-périodique et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g), \quad c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f).$$

► **Remarque** : En revanche, en général, on a $c_n(fg) \neq c_n(f)c_n(g)$.

► **Exemples** :

(i) Considérons le cas de la fonction f constante égale à 1, soit de la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $f(t) = 1$. On veut calculer les coefficients de Fourier de f. Pour cela, on fixe $n \in \mathbb{Z}$ et on calcule

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

On voit alors que

$$c_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = \frac{1}{T}[t]_0^T = \frac{T}{T} = 1.$$

Si maintenant $n \neq 0$, on a [15]

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}}{-\frac{2i\pi n}{T}}\right]_0^T = -\frac{1}{2in\pi}\left(e^{-2i\pi n} - e^0\right) = 0$$

car $e^0 = e^{-2i\pi n} = 0$. En effet, on a [16]

$$e^{-2i\pi n} = \cos(-2\pi n) + i\sin(-2\pi n) = 1 + i \times 0 = 1.$$

15. Se souvenir que pour tout $a \neq 0$, une primitive de $t \mapsto e^{at}$ est donnée par $t \mapsto \frac{e^{at}}{a}$ et considérer ici $a = -\frac{2i\pi n}{T}$.
16. Dessiner un cercle trigonométrique pour s'en convaincre !

En conclusion, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = c_0(f).$$

(ii) Fixons $k \in \mathbb{Z}$ et posons $f_k(t) = e^{\frac{2i\pi kt}{T}}$ qui est T-périodique et calculons ses coefficients de Fourier. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f_k) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{2i\pi kt}{T}} e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{2i\pi(k-n)t}{T}} \mathrm{d}t.$$

On a alors comme ci-dessus lorsque $k = n$ que

$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = 1$$

tandis que pour $n \neq k$,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{\frac{2i\pi(k-n)t}{T}}}{\frac{2i\pi(k-n)}{T}}\right]_0^T = -\frac{1}{2i(k-n)\pi}\left(e^{-2i\pi(k-n)} - e^0\right) = 0$$

de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_k) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(iii) Considérons pour terminer le cas de la fonction 2π-périodique définie pour tout $t \in [0, 2\pi]$ par $f(t) = e^t$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$ et calculons

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Or, sur $[0, 2\pi]$ (qui est ici l'intervalle d'intégration), on a $f(t) = e^t$ si bien que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^t e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-in)t}\mathrm{d}t.$$

On sait alors qu'une primitive de $t \mapsto e^{(1-in)t}$ est donnée par $t \mapsto \frac{e^{(1-in)t}}{1-in}$ si bien que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{(1-in)2\pi} - 1\right).$$

On a alors

$$e^{(1-in)2\pi} = e^{2\pi - 2in\pi} = e^{2\pi}e^{-2in\pi}$$

et, par définition [17]

$$e^{-2in\pi} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1 + 0 \times i = 1$$

si bien que finalement

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi(1-in)}(e^{2\pi} - 1).$$

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, on utilise plutôt les coefficients de Fourier réels.

Définition 3.3 (Coefficients de Fourier réels) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et T-périodique. On pose*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

*et pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-ième **coefficients de Fourier réels** de f sont*

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

*On appelle alors **coefficients de Fourier réels** de f les suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

17. Tracer un cercle trigonométrique pour s'en convaincre ! Attention aussi qu'en revanche $e^{2\pi} \neq 1$! Cela ne marche que parce qu'on a le i !

► **Remarque** : ⚠ Bien noter que la suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est indexée par $\mathbb{N}$ et la suite $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est indexée par $\mathbb{N}^*$. Par ailleurs, attention à bien remarquer le facteur $\frac{2}{T}$ à ne pas confondre avec le facteur $\frac{1}{T}$ dans le cas des coefficients de Fourier complexes. Par le Lemme 3.1, on a également

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

On démontre alors les propriétés suivantes de façon complètement analogue à la Proposition 3.2, qui permet souvent de s'épargner un certain nombre de calculs inutiles.

Proposition 3.3 *Soit f une fonction réelle continue par morceaux et T-périodique. Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$. Par ailleurs, si g est une autre fonction à valeurs réelles continue par morceaux et T-périodique et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f+g) = a_n(f) + a_n(g) \quad \text{et} \quad a_n(\lambda f) = \lambda a_n(f)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f+g) = b_n(f) + b_n(g) \quad \text{et} \quad b_n(\lambda f) = \lambda b_n(f).$$

► **Remarque** : Soit f une fonction T-périodique. À la question, calculer les coefficients de Fourier de f, si rien de plus n'est spécifié, on calculera soit la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier complexes définis en Définition 3.2 soit les suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ des coefficients de Fourier réels définis en Définition 3.3. On verra que les deux donneront lieu en section suivante à un même objet, la série de Fourier. Le lien entre les deux types de coefficients de Fourier réside dans la proposition suivante. Traditionnellement, on utilisera plutôt les coefficients de Fourier complexes dans le cas d'une fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et les coefficients de Fourier réels dans le cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.4 *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$c_n(f) = \begin{cases} a_0(f) \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \text{ si } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)) \text{ si } n < 0. \end{cases}$$

Réciproquement, on a $c_0(f) = a_0(f)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = 2\mathrm{Re}(c_n(f)) = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f)) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

► **Exemple à connaître** :

(i) Reprenons l'exemple de la fonction constante égale à 1 de la page 40. On doit donc calculer

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

On a alors tout de suite que $a_0(f) = 1$. Par ailleurs, on peut remarquer que f est paire et par la Proposition 3.3, cela implique que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n(f) = 0$. Il reste alors à calculer pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

On a ainsi [18]

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n t}{T}\right)}{\frac{2\pi n}{T}}\right]_0^T = \frac{1}{\pi n}\left(\sin(2\pi n) - \sin(0)\right) = 0.$$

Ainsi, on a

$$a_0(f) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = b_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f).$$

(ii) Fixons $k \in \mathbb{N}$ et considérons les fonctions T-périodiques

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_k(t) = \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \quad \text{et} \quad v_k(t) = \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right).$$

On voit tout de suite que u_k est paire si bien que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n(u_k) = 0$ et v_k est impaire si bien que pour tout $n \geqslant 0$, $a_n(v_k) = 0$. Calculons alors pour tout $n \geqslant 0$,

$$a_n(u_k) = \frac{2}{T}\int_0^T u_k(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

D'après la partie de rappels trigonométriques, on sait que

$$\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi(k+n)t}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(k-n)t}{T}\right)\right)$$

de sorte que par linéarité de l'intégrale

$$a_n(u_k) = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k+n)t}{T}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-n)t}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

Or, les calculs précédents fournissent alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(u_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k. \end{cases}$$

On obtient de façon analogue que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(v_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k. \end{cases}$$

(iii) Revenons à l'exemple de la page 41 où l'on a établi que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1 - in)}.$$

Déduisons-en alors les coefficients de Fourier réels de f grâce à la Proposition 3.4. On a alors que $a_0(f) = c_0(f) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}$ tandis que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$a_n(f) = 2\mathrm{Re}(c_n(f)) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - in}\right).$$

On écrit alors le nombre complexe $\frac{1}{1-in}$ sous forme algébrique pour en déterminer la partie réelle et pour cela on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - in$, à savoir $1 + in$. On obtient

$$\frac{1}{1 - in} = \frac{1 + in}{(1 - in)(1 + in)} = \frac{1 + in}{1 + n^2}.$$

On a donc $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-in}\right) = \frac{1}{1+n^2}$ et

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)}$$

18. Se souvenir que pour tout $a \neq 0$, une primitive de $t \mapsto \cos(at)$ est $t \mapsto \frac{\sin(at)}{a}$. De même, une primitive de $t \mapsto \sin(at)$ est $t \mapsto -\frac{\cos(at)}{a}$.

(presque) sans calculs ! En tout cas avec beaucoup moins de calculs que s'il avait fallu recalculer l'intégrale définissant $a_n(f)$! De même, par la Proposition 3.4, on a que

$$b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f)) = -\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-in}\right).$$

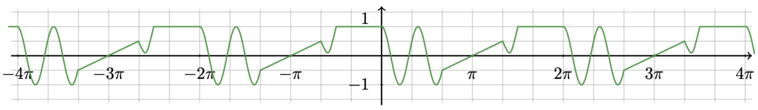
et ce qui précède montre que

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = -\frac{(e^{2\pi}-1)n}{\pi(1+n^2)} = \frac{(1-e^{2\pi})n}{\pi(1+n^2)}.$$

On a ainsi obtenu tous les coefficients de Fourier réels de f à partir de ceux complexes calculés préalablement !

Pour conclure cette section, on donne le comportement des coefficients de Fourier vis-à-vis de la dérivation. Cette définition fait intervenir la notion de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On ne donnera pas de définition rigoureuse de cette notion. La continuité signifie que l'on peut tracer la courbe de f sans lever le crayon et le caractère $\mathcal{C}^1$ par morceaux signifie que sur tout intervalle $[a, b]$, on peut éventuellement trouver un nombre fini d'angles, de pics où la fonction n'est pas dérivable mais admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche. En revanche, elle ne doit admettre aucune tangente verticale.

En d'autres termes, vous devez retenir qu'une fonction **continue** est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si, et seulement si, elle est dérivable partout sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet des pics et qu'une fonction **non continue** est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si, et seulement si, elle est continue par morceaux (admet un nombre fini de discontinuités) et est dérivable partout sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet des pics. Dans tous les cas, elle ne doit **pas** admettre de tangente verticale. Voici un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.



Proposition 3.5 *Soit f une fonction T-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux On a alors*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T}c_n(f), \quad a_0(f') = 0, \quad \forall n \geqslant 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n(f') = \frac{2n\pi}{T}b_n(f) \\ b_n(f') = -\frac{2n\pi}{T}a_n(f). \end{array} \right.$$

► **Remarque** : En particulier, si on a déjà calculé les coefficients de Fourier d'une fonction f et que l'on vous demande de calculer ceux de f', on ne se fatigue pas à les calculer mais on utilise la Proposition 3.5.

3.4 Série de Fourier d'une fonction périodique

Cette section est consacrée à la description de l'étape

$$\begin{array}{ccc} (a_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n(f))_{n\in\mathbb{N}} & \rightsquigarrow & \text{Série de Fourier de } f \\ \text{coefficients de Fourier de } f & & \text{via ses coefficients de Fourier} \end{array}$$

On a alors la définition suivante d'une série de Fourier.

Définition 3.4 (Série de Fourier.) *Soit f continue par morceaux et T-périodique. On appelle* ***série de Fourier*** *de f la série de fonctions*

$$a_0(f) + \sum_{n\geqslant 1}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]$$

ou de manière équivalente

$$c_0(f) + \sum_{n\geqslant 1}\left[c_n(f)e^{\frac{2i\pi nt}{T}} + c_{-n}(f)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\right].$$

Cette dernière série est notée $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\frac{2i\pi nt}{T}}$.

Pour le moment, on ne dit rien de la convergence de ces séries de Fourier.

Pour maintenant compléter notre procédé

$\rightsquigarrow$ Étude de la convergence de la série vers la fonction f de départ

il faut alors répondre aux deux questions suivantes.

(Q1) La série de Fourier converge-t-elle et pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$?

(Q2) Si on a convergence pour un certain réel t, la somme de la série de Fourier est-elle égale à $f(t)$?

Le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de Dirichlet permet de répondre par l'affirmative à cette question sous de bonnes hypothèses.

Théorème 3.1 (Théorèmes de Dirichlet) *Soit f une fonction T-périodique.*

(i) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge normalement (et donc en particulier simplement) vers f. En d'autres termes,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{\frac{2in\pi t}{T}}.$$

(ii) Si f est C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge simplement et

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_0(f)+&\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right]\\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{\frac{2in\pi t}{T}} = \begin{cases} f(t) \text{ si } f \text{ est continue en } t\\ \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \text{ sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

avec

$$f(t^+) = \lim_{\substack{s\to t\\ s>t}} f(s) \quad \text{et} \quad f(t^-) = \lim_{\substack{s\to t\\ s<t}} f(s)$$

les limites respectivement à droite et à gauche de f.

► **Remarque** : Je vous renvoie en bas de page 44 juste avant la Proposition 3.5 pour une "définition" de la notion de classe C^1 par morceaux. Par ailleurs, noter qu'on ne demande pas la continuité dans la version (ii) du Théorème 3.1. En revanche, si f est continue en t alors $f(t^+) = f(t^-) = f(t)$ et ainsi

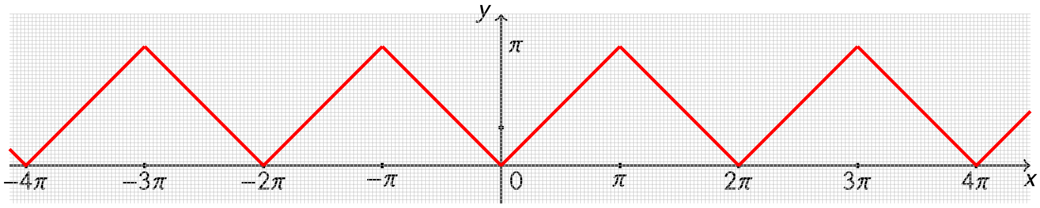
$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t)$$

si bien que la version (i) n'est en réalité qu'un cas particulier de la version (ii).

Ce théorème complète alors notre procédé décrit en introduction et on verra des exemples d'applications de ces théorèmes de Dirichlet en TD.

► **Exemples** :

(i) On reprend l'exemple de la page 34. On considère la fonction $g(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi]$ et $\overline{g}$ la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ comme expliqué page 35. Je rappelle que le graphe de $\overline{g}$ est donné par



Commençons alors par calculer les coefficients de Fourier de $\overline{g}$. Puisque la fonction est à valeurs réelles, on va calculer les, coefficients de Fourier réels de $\overline{g}$. Le graphe de $\overline{g}$ étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, $\overline{g}$ est paire et par la Proposition 3.3

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(\overline{g}) = 0.$$

Commençons par le cas

$$a_0(\overline{g}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Soit alors $n \geqslant 1$. Il reste alors, d'après la Définition 3.3, à calculer pour tout entier naturel n non nul, la quantité

$$a_n(\overline{g}) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g}(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g}(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $\overline{g}$ étant naturellement définie par g sur $[-\pi, \pi]$, on peut utiliser la remarque page 39 (ou directement le Lemme 3.1) qui fournit

$$a_n(\overline{g}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, sur $[-\pi, \pi]$, $\overline{g}(t) = g(t) = |t|$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \overline{g}(t)\cos(nt) = |t|\cos(nt)$ est paire [19] et

$$a_n(\overline{g}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |t|\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

car $t \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$. Pour intégrer une telle fonction on utilise alors une intégration par parties. Pour cela, on dérive $t \mapsto t$ en $t \mapsto 1$ et on primitive $t \mapsto \cos(nt)$ en [20] $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$ de sorte que

$$\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t$$

car $\sin(n\pi) = 0$ pour tout entier n. On a alors

$$\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(0)}{n}.$$

Or, $\cos(0) = 1$ et on voit en traçant un cercle trigonométrique, on se convainc que $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Il vient alors

$$\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n}$$

et

$$a_n(\overline{g}) = -\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} \text{ si } n \text{ impair.}\end{cases}$$

On peut alors construire la série de Fourier associée à $\overline{g}$ en utilisant la Définition 3.4

$$\begin{aligned} S(\overline{g}) &= a_0(\overline{g}) + \sum_{n\geqslant 1}\left[a_n(\overline{g})\cos(nt) + b_n(\overline{g})\sin(nt)\right] \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n(\overline{g})\cos(nt) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{impair}}}\frac{\cos(nt)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

19. Je rappelle que pour une fonction paire f, on a pour tout $a > 0$, $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{a} f(t)\mathrm{d}t$. En effet, l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre $-a$ et a est deux fois l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre 0 et a.

20. Car $n \neq 0$!

On voit sur le graphe de $\overline{g}$ que $\overline{g}$ est continue et C^1 par morceaux si bien que le théorème de Dirichlet (Théorème 3.1) fournit que la série de Fourier converge et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overline{g}(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

Noter que le théorème de Dirichlet fournit *gratuitement* et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$. On peut alors par exemple évaluer cette identité en $t = 0$ pour obtenir

$$0 = \overline{g}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(0)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Il s'ensuit que la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge et que sa somme vérifie

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{soit} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Voyons alors comment déduire de ce résultat la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Pour cela, on sépare la somme selon que n est pair ou que n est impair

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

où toutes les séries en jeu sont convergentes. On a alors

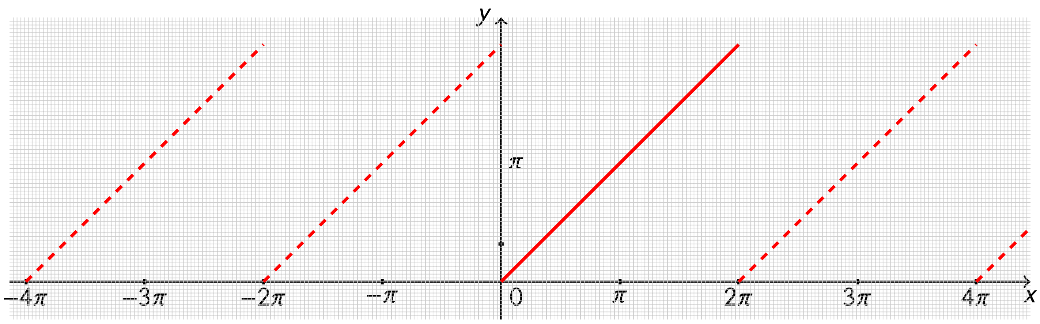
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \quad \text{soit} \quad \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(ii) On reprend l'exemple de la page 36. On considère la fonction $g(t) = |t|$ sur $[0, 2\pi]$ et $\overline{g}$ la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ comme expliqué page 35. Je rappelle que le graphe de $\overline{g}$ est donné par



Commençons alors par calculer les coefficients de Fourier de $\overline{g}$. Puisque la fonction est à valeurs réelles, on va calculer les, coefficients de Fourier réels de $\overline{g}$. Le graphe de $\overline{g}$ n'étant ni symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ni par rapport à l'origine, $\overline{g}$ n'est ni paire, ni impaire. Commençons alors par le cas

$$a_0(\overline{g}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Soit alors $n \geqslant 1$. Il reste alors, d'après la Définition 3.3, à calculer pour tout entier naturel n non nul, la quantité

$$a_n(\overline{g}) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g}(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

et la quantité

$$b_n(\overline{g}) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g}(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Comme dans l'exemple (i), une intégration par parties fournit [21]

$$a_n(\overline{g}) = 0 \quad \text{et} \quad b_n(f) = -\frac{2}{n}.$$

On peut alors construire la série de Fourier associée à $\overline{g}$ en utilisant la Définition 3.4

$$\begin{aligned} S(\overline{g}) &= a_0(\overline{g}) + \sum_{n\geqslant 1}\left[a_n(\overline{g})\cos(nt) + b_n(\overline{g})\sin(nt)\right] \\ &= \pi + \sum_{n\geqslant 1} b_n(\overline{g})\cos(nt) \\ &= \pi - 2\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nt)}{n}. \end{aligned}$$

On voit sur le graphe de $\overline{g}$ que $\overline{g}$ est non continue mais C^1 par morceaux si bien que le théorème de Dirichlet (Théorème 3.1 (ii)) fournit que la série de Fourier converge [22] et que

$$\forall t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}, \quad \overline{g}(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$$

puisqu'en tout point $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$, la fonction $\overline{g}$ est continue et

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \pi = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2kn\pi)}{n} = \pi - 2\times 0 = \pi$$

puisqu'en un point de la forme $2k\pi$, la fonction $\overline{g}$ est discontinue et vérifie

$$\frac{f(2k\pi^-) + f(2k\pi^+)}{2} = \frac{2\pi + 0}{2} = \pi.$$

Cette dernière égalité en alors une lapalissade. Noter que le théorème de Dirichlet fournit *gratuitement* la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nt)}{n}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ainsi que la valeur de sa somme.

(iii) Pour l'application du théorème de Dirichlet à l'exemple (iii) page 41, je vous renvoie au corrigé du DM II de l'an dernier.

► **Remarques :**

(i) Le théorème de Dirichlet (Théorème 3.1 (i)) implique donc en particulier que toute fonction f T-périodique, continue et C^1 par morceaux est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right].$$

Autrement dit, tout signal continu et C^1 par morceaux se décompose comme une somme d'un signal constant [23] et de signaux élémentaires [24] de période $\frac{2\pi}{n}$ (soit de fréquence $\frac{n}{2\pi}$) pour $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un tel signal est à *spectre discret* et pour connaître un tel signal il suffit donc de connaître chacun de ces signaux élémentaires, que l'on appelle en général *harmoniques*.

21. Les détails sont laissés à titre d'exercice et. constitueront l'objet d'un exercice de TD.
22. Dans le cas non continu, il faut être un peu précautionneux lors de l'application du théorème de Dirichlet et l'appliquer séparément aux points de continuité de la fonction et à ses points de discontinuité.
23. À savoir $a_0(f)$.
24. À savoir $a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$.

(ii) Pour une illustration du théorème de Dirichlet (Théorème 3.1 (i)), c'est-à-dire de la convergence de la série de Fourier vers une fonction périodique continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, voir ici (exemple (i) page 47), ici ou ici.
Pour une illustration du théorème de Dirichlet (Théorème 3.1 (ii)), voir ici (exemple (ii) page 48).

(iii) Si on considère deux fonctions f et g alors il est naturel que les coefficients de Fourier de f et de g coïncident. Réciproquement, le théorème de Dirichlet implique également dans le cas de deux fonctions f et g T-périodiques, continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, $f = g$. Autrement dit, les coefficients de Fourier déterminent complètement un signal T-périodiques, continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

3.5 Égalité de Parseval

Pour conclure cette partie d'analyse de Fourier du cours, on va voir une manière alternative de recombiner les coefficients de Fourier qui ne vont plus donner la fonction f initiale mais en quelque sorte l'énergie associée au signal périodique f, définie par

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Proposition 3.6 (Égalité de Parseval) *Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux. Alors les séries numériques*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \textit{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

convergent et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

► **Exemples :**

(i) On revient sur l'exemple (i) page 30. Appliquons la formule de Parseval (Proposition 3.6) à $\overline{g}$. Cela fournit

$$|a_0(\overline{g})|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(\overline{g})|^2 + |b_n(\overline{g})|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{g}(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

On a alors d'après les calculs effectués page 30 que

$$|a_0(\overline{g})|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(\overline{g})|^2 + |b_n(\overline{g})|^2) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{impair}}}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2 n^4} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}.$$

À nouveau la convergence des séries en jeu est obtenue *gratuitement* par la Proposition 3.6. On calcule alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{g}(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\overline{g}(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \mathrm{d}t$$

en utilisant le Lemme 3.1 et la parité de $\overline{g}$. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{g}(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

On a donc

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} \quad \text{soit} \quad \sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En raisonnant comme page 31, on en déduit la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$. Pour cela, on sépare la somme selon que n est pair ou que n est impair

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^4}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

où toutes les séries en jeu sont convergentes. On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}\quad\text{et}\quad\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{\pi^4}{96}\quad\text{soit}\quad\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

(ii) On revient sur l'exemple (ii) de la page 31. Appliquons la formule de Parseval (Proposition 3.6) à $\overline{g}$. Cela fournit

$$|a_0(\overline{g})|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(\overline{g})|^2+|b_n(\overline{g})|^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{g}(t)|^2\mathrm{d}t.$$

On a alors d'après les calculs effectués pages 31 et 32 que

$$|a_0(\overline{g})|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(\overline{g})|^2+|b_n(\overline{g})|^2)=\pi^2+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

À nouveau la convergence des séries en jeu est obtenue *gratuitement* par la Proposition 3.6. On calcule alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{g}(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t^2\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\pi^2.$$

Il s'ensuit donc que

$$\frac{4}{3}\pi^2=\pi^2+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\quad\text{soit}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

et on retrouve le résultat de la page 25.

(iii) Pour l'application de l'égalité de Parseval à l'exemple (iii) page 41, je vous renvoie au corrigé du DM II de l'an dernier.

On verra également d'autres exemples d'applications de cette formule en TD. Elle permet en particulier d'obtenir des égalités hautement non triviales et intéressantes comme, par exemple,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Cette valeur et plus généralement les valeurs

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\quad\text{pour}\quad x\in\left\{\frac{3}{2},2,3,4\right\}$$

sont très utiles et apparaissent en physique (condensat de Bose-Einstein, loi de Planck et loi de Stefan-Boltzmann entre autres).

3.6 Application des séries de Fourier

Pour une illustration simplifiée de l'utilisation des séries de Fourier au traitement du signal, voir ici où il est expliqué dans les grandes lignes comment l'analyse de Fourier peut permettre de supprimer un bruit dans un signal.

3.7 Kit de survie en séries de Fourier

Voici le minimum vital à absolument savoir faire concernant les séries de Fourier :

1. Construire une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ à partir d'une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ (voir pour cela page 22).
2. Déterminer à partir de son graphe si une fonction est paire ou impaire (ou rien du tout !) mais aussi si une fonction est continue, continue par morceaux ou C^1 par morceaux.
3. Calculer les coefficients de Fourier d'une fonction complexes (voir pour cela Définition 3.2) ou réels (voir Définition 3.3) et savoir utiliser des propriétés de symétrie pour se simplifier la vie (Proposition 3.2 et Proposition 3.3). Savoir reconstruire la série de Fourier à partir de ces coefficients (Définition 3.4).
4. Connaître et appliquer les théorèmes de Dirichlet (Théorème 3.1) pour en déduire la convergence et la somme de certaines séries en choisissant un $t \in \mathbb{R}$ judicieux.
5. Connaître et appliquer l'égalité de Parseval (Proposition 3.6) pour en déduire la convergence et la somme de certaines séries en choisissant un $t \in \mathbb{R}$ judicieux.

Les exemples pages 46-49 et pages 51-52 sont des exemples absolument **typiques** de ce qu'il faut savoir faire !