TD 05 : Sous-variétés différentielles

► ***Cette feuille de TD 05 nous occupera deux semaines.***

Première semaine

Exercices fondamentaux

1. **Calcul différentiel dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$**

   Soit $n \geqslant 1$. On s'intéresse à l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$.

   (a) Montrer que $\det$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Calculer $d(\det)_{I_n}$ (on pourra calculer les dérivées partielles de $\det$ dans une base bien choisie).
   (c) En déduire la différentielle de $\det$ sur $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$, puis sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. **Ensembles de niveau**

   On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + z^2 \end{array} \right. .$$

   (a) Déterminer les points où f est différentiable et calculer sa différentielle en ces points.
   (b) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose $M_t = f^{-1}(\{t\}) \subset \mathbf{R}^3$. Pour quelles valeurs de t l'espace M_t est-il une sous-variété de $\mathbf{R}^3$?
   (c) Soit $t \in \mathbf{R}$ tel que M_t est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$. Pour $(x,y,z) \in M_t$, déterminer l'espace tangent de M_t en (x,y,z).
   (d) Dessiner $M_{1/4}$.
   Indication : regarder d'abord ce qu'il se passe dans $\mathbf{R}_+ \times \{0\} \times \mathbf{R}$, puis utiliser le fait que $M_{1/4}$ est une surface de révolution.

3. **Paramétrage de sphères**

   Le but de cet exercice est de paramétrer les sphères de dimension 1, 2 et 3. On commence par la dimension 1, en posant :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ x & \longmapsto & (\cos(x), \sin(x)) \end{array} \right. .$$

   (a) Montrer que f_1 est une immersion et un paramétrage local en restriction à tout intervalle ouvert de longueur strictement inférieure à 2π.

   Maintenant, on étudie la dimension 2 et les coordonnées sphériques. On pose :

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (\cos(x)\cos(y), \sin(x)\cos(y), \sin(y)) \end{array} \right. .$$

   (b) Vérifier que l'image de f_2 est la sphère unité $\mathbf{S}^2$.
   (c) Déterminer le rang de $d(f_2)_{(x,y)}$ pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. En quels points f_2 est-elle une immersion ? Aux voisinages de quels points de $\mathbf{S}^2$ l'application f_2 est-elle un paramétrage local de $\mathbf{S}^2$?

   Pour tout $n \geqslant 1$, il existe des coordonnées sphériques généralisées qui paramètrent la sphère unité de dimension n. Il peut d'ailleurs être instructif de trouver la formule correspondante. Cependant, il existe un autre paramétrage intéressant en dimension 3, le paramétrage de Hopf. On pose :

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (\cos(x)\cos(z), \sin(x)\cos(z), \cos(y)\sin(z), \sin(y)\sin(z)) \end{array} \right. .$$

   (d) Vérifier que l'image de f_3 est la sphère unité $\mathbf{S}^3$.
   (e) En quels points f_3 est-elle une immersion ? Aux voisinages de quels points f_3 est-elle un paramétrage local de $\mathbf{S}^3$?

4. **Quelques groupes et espaces matriciels**

   Soient $1 \leqslant p, k \leqslant n$ des entiers. On note $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices à coefficents réels, à n lignes et à k colonnes. Soient
   - I_n la matrice identité ;

- pour tout $p \in [\![0, n]\!]$,

$$I_{p,n-p} := \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix};$$

- pour tout $n \geq 1$:

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés lisses, calculer leur dimension et expliciter leur espace tangent en I_n quand c'est possible. Déterminer si ces variétés sont compactes.

(a) $O(p, n-p) = \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R}) \ : \ {}^tAI_{p,n-p}A = I_{p,n-p}\}$;
(b) $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{2n,2n}(\mathbf{R}) \ : \ {}^tAJ_nA = J_n\}$;
(c) $V_{n,k} = \{A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbf{R}) \ : \ {}^tAA = I_k\}$.

On note $O(n) = O(0, n)$. Pour finir, on s'intéresse de plus près aux variétés de Stiefel $V_{n,k}$. À n fixé, pour tous $1 \leqslant \ell \leq k \leqslant n$, on note $\pi_{k,\ell} : V_{n,k} \to V_{n,\ell}$ l'application qui consiste à ne conserver que les ℓ premières colonnes des matrices.

(d) À quels espaces correspondent $V_{n,1}$ et $V_{n,n}$?
(e) Montrer que, pour tout $x \in V_{n,\ell}$, l'espace $\pi_{k,\ell}^{-1}(x)$ est une sous-variété homéomorphe à $V_{n-\ell,k-\ell}$.

Exercice complémentaire

1. **Courbes elliptiques**

Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, posons $H(a, b) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\}$. On définit le *discriminant* comme étant la quantité $\Delta(a, b) := -16(4a^3 + 27b^2)$.

(a) Montrer que si $\Delta(a, b) \neq 0$, alors $H(a, b)$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.
(b) Supposons que $\Delta(a, b) = 0$. Pour quelles valeurs de (a, b) la courbe $H(a, b)$ est-elle une sous-variété de $\mathbf{R}^2$? Quel est sa régularité ?
(c) Pour quelles valeurs de (a, b) le sous-ensemble $H(a, b)$ est-il connexe ?
(d) Dessiner l'allure de $H(-1, b)$ en fonction de b.

Deuxème semaine

Exercices fondamentaux

1. Application de Gauss

Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit M une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n de $\mathbf{R}^{n+1}$ compacte. Pour tous $x, y \in \mathbf{R}^{n+1}$, on note $\langle x, y\rangle$ leur produit scalaire. On définit une application ψ de M dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ en associant à $x \in M$ la droite vectorielle orthogonale à $T_x M$.

(a) Montrer que ψ est $\mathcal{C}^\infty$.
(b) Soit $v \in \mathbf{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. Calculer la différentielle de $x \in M \mapsto \langle x, v\rangle \in \mathbf{R}$.
(c) En déduire que ψ est surjective.
(d) En déduire que si V est un hyperplan vectoriel de $\mathbf{R}^{n+1}$ alors il existe $x \in M$ tel que $T_x M = V$.

2. Surface de Veronese

Pour $n \geqslant 1$, on note $\pi_n : \mathbf{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ la projection canonique. Soit

$$\nu : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 \smallsetminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{R}^6 \smallsetminus \{0\} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy) \end{array} \right. .$$

(a) Montrer que ν est une immersion.
(b) Montrer, par exemple en dérivant la fonction $\lambda \mapsto P(\lambda x)$, que, pour tout polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables,

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_n) = d \cdot P(x_0, \ldots, x_n).$$

(c) Montrer que π_n est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $u \in \mathbf{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ décrire l'espace $\mathrm{Ker}(d(\pi_n)_u)$. Pour $u \in \mathbf{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ décrire l'espace $\mathrm{Ker}(d(\pi_5 \circ \nu)_u)$.
(d) En déduire que $(\pi_5 \circ \nu)_{|\mathbf{S}^2}$ est une immersion.
(e) Montrer que $(\pi_5 \circ \nu)_{|\mathbf{S}^2}$ passe au quotient en une application $V : \mathbf{P}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{P}_5(\mathbf{R})$, et que l'application obtenue est un plongement (*i.e.* une immersion qui est un homéomorphisme sur son image).

3. Sous variétés disjointes

Soit $d \geqslant 1$ et soient M et N deux sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^d$ telles que $\dim(M) + \dim(N) < d$. Montrer que l'ensemble

$$\{v \in \mathbf{R}^d \mid (M + v) \cap N \neq \emptyset\}$$

est de mesure nulle.

Exercice complémentaire

1. Diagrammes de Noeuds

Soit f un plongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}^3$.
Pour tout $X \in \mathbf{S}^2$, on note π_X la projection orthogonale parallèlement à la droite $\mathbf{R}X$. On dit que les auto-intersections de $\pi_X \circ f$ sont *transverses* si pour tout $x \neq y$ tel que $\pi_X \circ f(x) = \pi_X \circ f(y)$, les vecteurs $\pi_X(f'(x))$ et $\pi_X(f'(y))$ sont linéairement indépendants.

(a) Montrer que $\pi_X \circ f$ est une immersion pour tout X dans un ouvert de $\mathbf{S}^2$ de mesure plein.
(b) Montrer que les auto-intersections de $\pi_X \circ f$ sont transverses pour presque tout $X \in \mathbf{S}^2$.
(c) Justifier que l'ensemble des X tels que les auto-intersections de $\pi_X \circ f$ sont transverses est ouvert.
(d) Justifier le fait qu'il existe un ouvert dense $U \subset \mathbf{S}^2$ tel que, pour tout $X \in U$, la courbe $\pi_X \circ f$ est une immersions dont les auto-intersections sont transverses, et que $(\pi_X \circ f)^{-1}(u)$ est de cardinal au plus 2 pour tout u orthogonal à X.