TD 07 : Champs de vecteurs et topologie des surfaces

► ***Cette feuille de TD07 nous occupera deux semaines.***

Première semaine

Exercices fondamentaux

1. Crochet de Lie

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^d$. Soient X et Y deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On note $\varphi_{X,t}$ le flot associé au temps t, là où il est défini. Pour $x \in U$, on note :

$$g_{X,Y}(t) := \varphi_{X,t} \circ \varphi_{Y,t} \circ \varphi_{X,-t} \circ \varphi_{Y,-t}(x),$$
$$[X,Y](x) := \frac{g''_{X,Y}(0)}{2}.$$

(a) Faire un développement limité à l'ordre 2 de $t \mapsto \varphi_{X,t}(y)$, pour $y \in U$.

(b) Montrer que $[X,Y](x) = d_xX(Y(x)) - d_xY(X(x))$ pour tout $x \in U$.

(b) Montrer que l'application de $\Gamma(TU) \times \Gamma(TU)$ dans $\Gamma(TU)$ définie par $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ est bilinéaire et antisymétrique.

2. Courbe de Fermat

Soit $d \geq 2$ fixé, $X = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \,|\, x^d + y^d = z^d\}$ et $\pi : X \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ définie par $\pi([x:y:z]) = [x:y]$.

(a) Soit C un CW-complexe fini et $p : \tilde{C} \to C$ un revêtement fini de degré n. Déterminer $\chi(\tilde{C})$ en fonction $\chi(C)$ et n.

(b) Montrer que X est une sous-variété lisse compacte de dimension 2 de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, l'application $[x:y:z] \mapsto [x:y:ze^{2i\pi k/d}]$ est un C^∞-difféomorphisme de X.

(d) Montrer que π est un C^∞-difféomorphisme local en tout point de $X - F$ où $F = \{[x:y:z] \in X : z = 0\}$.

(e) Montrer que la sphère $\mathbb{S}_2$ privée de d points a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe fini de dimension 1 et donner sa caractéristique d'Euler.

(f) Montrer que la surface réelle X est connexe et orientable.

(g) Montrer que si une surface lisse S compacte connexe privée de d points a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe de dimension 1 fini de caractéristique d'Euler N, alors S a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe fini de caractéristique d'Euler $N + d$.

(h) En déduire la caractéristique d'Euler de X.

Exercices complémentaires

3. Groupe de Heisenberg

On note $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices 3×3 réelles, triangulaires supérieures, de diagonale 1 :

$$\mathbb{H}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On note I la matrice identité de $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{H}_3(\mathbb{R})$, on note $G_x : \mathbb{H}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}_3(\mathbb{R})$ la multiplication par x à gauche. Finalement, on pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, vu en tant qu'éléments de $T_I\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$ (i.e. en tant que vecteurs tangents en l'identité).

(a) Expliciter la loi de groupe sur $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$, et l'application G_x.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{H}_3(\mathbb{R})$, calculer les vecteurs tangents $d(G_x)_I(e_1)$, $d(G_x)_I(e_2)$ et $d(G_x)_I(e_3)$. Pour $i \in \{1,2,3\}$ on notera E_i, le champ de vecteurs $x \mapsto d(G_x)_I(e_i)$.

(c) Calculer les flots des champs de vecteurs E_1, E_2 et E_3.

(d) En déduire $[E_1, E_2]$, $[E_1, E_3]$ et $[E_2, E_3]$.

4. Flots périodiques sur le tore

Soit X un champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{R}^2$ qui est $\mathbb{Z}^2$-périodique, c'est-à-dire tel que $X(x+k) = X(k)$ pour tous les $x \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{Z}^2$. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique.

(a) Montrer que X est l'image réciproque par π d'un champ de vecteurs lisse Y sur $\mathbb{T}^2$. Montrer que X et Y sont complets. Exprimer le flot local maximal de Y en fonction du flot local maximal de X.

(b) Supposons maintenant que X est un champ de vecteurs constant sur $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le flot de X' soit périodique, c'est à dire qu'il existe T tel que $\varphi_{X',t+T} = \varphi_{X',t}$.

Deuxième semaine

Exercices fondamentaux

5. Courbes simples fermées séparantes sur une surface

Soit Σ_g une surface compacte orientée connexe sans bord de genre $g \geq 0$. Une courbe simple fermée est un plongement C^∞ de $\mathbb{S}^1$ dans Σ_g. On dit qu'une courbe simple fermée $c : \mathbb{S}^1 \to \Sigma_g$ est essentielle si $c_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\Sigma_g)$ est injective. On dit qu'une courbe simple fermée $c : \mathbb{S}^1 \to \Sigma_g$ est séparante si $\Sigma_g - c(\mathbb{S}^1)$ n'est pas connexe.

(a) Montrer qu'il n'existe pas de courbe simple fermée essentielle sur Σ_0.

(b) Montrer que si $g = 1$ alors toute courbe fermée séparante n'est pas essentielle.

(c) Soit $\mathcal{C}_g$ l'ensembles courbes simples fermées sur Σ_g. Soit $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ le groupe de difféomorphismes lisses de Σ_g. On définit l'action suivante de $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ sur $\mathcal{C}_g$:

$$\varphi.c = \varphi \circ c \quad \forall (\varphi, c) \in \mathrm{Diff}(\Sigma_g) \times \mathcal{C}_g$$

Montrer que l'ensemble $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)\backslash\mathcal{C}_g$ est fini et calculer son cardinal.

On suppose maintenant que $g \geq 2$ et on fixe c une courbe simple fermée séparante.

(d) Montrer que $c_*(\pi_1(\mathbb{S}^1)) \subset [\pi_1(\Sigma_g), \pi_1(\Sigma_g)]$.

(e) On suppose de plus que c est essentielle. Construire un revêtement double $\widetilde{\Sigma}_g \to \Sigma_g$ tel que c se relève sur $\widetilde{\Sigma}_g$ en une courbe fermée non séparante.

Exercices complémentaires

6. Décomposition en pantalons

Pour $g \geq 0$ et $b \geq 0$, on note $\Sigma_{g,b}$ la surface compacte orientable connexe de genre g avec b composantes de bord.

(a) Calculer $\chi(\Sigma_{g,b})$.

(b) Soit $g, g' \geq 0$ et $b, b' \geq 1$. Soit D une composante de bord de $\Sigma_{g,b}$ et D' une composante de bord de $\Sigma_{g',n'}$. Soit $f : D \to D'$ un homéomorphisme et $\Sigma' = \Sigma_{g,b} \underset{f}{\cup} \Sigma_{g',b'}$. Calculer $\chi(\Sigma')$ en fonction de $\chi(\Sigma_{g,b})$ et $\chi(\Sigma_{g',b'})$.

(c) Soit $g \geq 0$ et $b \geq 2$. Soit D et D' deux composantes de bord distinctes de $\Sigma_{g,b}$. Soit Σ' la surface obtenue à partir de $\Sigma_{g,n}$ en recollant D et D' avec un homéomorphisme. Calculer $\chi(\Sigma')$ en fonction de $\chi(\Sigma_{g,b})$.

Un pantalon est surface homéomorphe à une sphère privée de 3 points. Une décomposition en pantalons de $\Sigma_{g,n}$ est un ensemble fini de courbes simples fermées $\{c_1, \dots, c_k\}$ deux à deux disjointes tel que $\Sigma_{g,b} - (c_1 \cup \dots \cup c_k)$ est homéomorphe à une union disjointe de pantalons.

(d) Montrer que si $\Sigma_{g,b}$ admet une décomposition en pantalons alors $\chi(\Sigma_{g,b}) < 0$.

(e) Soit $\{c_1, \dots, c_k\}$ une décomposition en pantalons de $\Sigma_{g,b}$. Montrer que $\Sigma_{g,b} - (c_1 \cup \dots \cup c_k)$ a $2g - 2 + b$ composantes connexes et que $k = 3g - 3 + b$.

7. Revêtement ramifié sur la sphère

Soit $G = \{\pm 1\}$ le groupe à deux éléments. On définit une action de G sur $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ par

$$\alpha.(u, v) = (u^\alpha, v^\alpha)$$

pour tout $\alpha \in G$ et $(u, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Soit S l'espace topologique quotient $G\backslash T$ et $\pi : T \to S$ la projection canonique.

(a) Calculer $\pi_1(T - \{x_1, \dots, x_k\})$, où $x_1, \dots, x_k$ sont des points deux à deux distincts de T.

(b) Montrer que G laisse fixe exactement quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 de T, et que $\pi : T - \{x_1, \dots, x_4\} \to S - \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_4)\}$ est un revêtement galoisien et calculer son groupe des automorphismes.

(c) Montrer, à l'aide de dessins, que S est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.

(d) Soit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et soit $\gamma_i : [0, 1] \to S - \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_4)\}$ un lacet simple (γ_i restreint à $]0, 1[$ est injective) qui fait le tour de $\pi(x_i)$ (c'est à dire que $S - \gamma(\mathbb{S}^1) = S_1 \sqcup S_2$ avec $\pi(x_i) \in S_1$ et $\pi(x_j) \in S_2$ pour tout $j \neq i$). Décrire un relevé de γ_i à T.

(e) Soit Σ_g une surface compacte orientable connexe de genre $g \geq 2$. Construire un difféomorphisme C^∞ $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ d'ordre 2 tel que $\mathrm{Fix(f)} = \{x \in \Sigma_g \mid f(x) = x\}$ soit de cardinal $2g + 2$ et tel que $\langle f \rangle \backslash (\Sigma_g - \mathrm{Fix(f)})$ soit homéomorphe à une sphère privé de $2g + 2$ points.