ANALYSE DE FOURIER ET GÉOMÉTRIE : EXAMEN FINAL

19 mai 2020 (4 heures)

►► *L'examen dure* ***4 heures*** *et le sujet comporte* ***4 exercices sur 2 pages*** *plus un bonus sur la troisième page. Les calculatrices ainsi que tous les documents (que ce soient notes de cours ou de TD) sont* ***autorisés*** *mais* ***pas internet*** *et vous* ***devez composer seul(e)s****. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Toutes les réponses doivent être* ***justifiées*** *et on attachera un soin particulier à la* ***rédaction****.* ***Vous m'enverrez par mail votre copie scannée ou photographiée*** *comme le DM 2, en* ***un seul document pdf avec votre nom et prénom dans le nom du fichier*** *avant* ***18 heure****. Je reste* ***disponible*** *en cas de questions ou de problème jusqu'à 18h* ***par mail*** *ou* ***sur BigBlueButton*** *via le lien* `https://bbb.imo.universite-paris-saclay.fr/b/kev-wch-4c3` *ou* ***sur Discord*** *via le lien* `https://discord.gg/s7cxKY` *où vous pourrez* ***m'écrire dans les chats ou me parler directement****.* ◄◄

► EXERCICE 1 – (APPLICATIONS DU COURS), **environ 2 points**

a) Préciser si les séries suivantes convergent ou divergent :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{100}}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans les cas où les séries convergent, convergent-t-elle absolument ?

b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base orthonormée formée de $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Que pouvez-vous dire de la nature géométrique de f ?

► EXERCICE 2 – (CONVERGENCE DE SÉRIES), **environ 3 points**

a) Soit $x > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge pour $0 < x < 1$ et diverge pour $x > 1$. Que se passe-t-il pour $x = 1$?

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)$ converge.
Indication : On pourra commencer par établir que

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

et penser à considérer $x = \frac{1}{n^4}$.

► EXERCICE 3 – (SÉRIES DE FOURIER), **environ 12 points**

Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par

$$\forall t \in [0,\pi], \quad f(t) = t(\pi - t).$$

a) Tracer le graphe de f sur $[0,\pi]$ puis sur $[-\pi,\pi]$ et enfin sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? Continue par morceaux ? $\mathcal{C}^1$ par morceaux ? Donner le cas échéant les points en lesquels f est continue et ceux en lesquels elle admet une discontinuité.

TPSV!

b) Justifier que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est paire et en déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

d) En effectuant une intégration par parties où vous dériverez $t \mapsto t(\pi - t)$ et intégrerez $t \mapsto \sin(nt)$, montrer que

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} (\pi - 2t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

e) Déduire des questions c) et d) que

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}.$$

f) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)^3}.$$

g) En déduire la valeur de la somme et la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^3}$.

h) Montrer que $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

i) Déduire des questions g) et h) la convergence et la valeur de la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

j) Étudier, en utilisant l'égalité de Parseval, la convergence et la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^6}$. En déduire la convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^6}$.

►EXERCICE 4 – (GÉOMÉTRIE), environ 6 points

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right).$$

a) Écrire la matrice M de f dans la base canonique.

b) Calculer ${}^tMM$ et $\det(M)$. Que pouvez-vous en conclure quand à l'application linéaire f ?

c) En déduire qu'il existe un $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Déterminer θ et décrire géométriquement l'application linéaire f.

d) Mêmes questions avec l'application linéaire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).$$

On notera N la matrice de g dans la base canonique.

e) Justifier que la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $f \circ g$ soit donnée par MN. Déduire alors des questions c) et d) (et **sans calculs**) que $f \circ g$ est une rotation d'angle φ (que l'on précisera) et de centre l'origine. En déduire la matrice MN en fonction de φ (à nouveau **sans calculs**).

f) Calculer alors à la main le produit MN et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

g) Construire l'image du point $P = (1,1)$ par f.

!! The End !!

◀BONUS▶

Il est alors temps de vous avouer la véritable raison d'être de ce cours de Maths 254 : être enfin capable de comprendre toutes les subtilités des épisodes des *Simpsons* qui font très souvent des clins d'œil à des mathématiques, parfois très poussées. L'image ci-dessous est tirée de l'épisode *Sky Police*, seizième épisode de la saison 26, au cours de laquelle Apu se remémore comment il a triché pour intégrer le célèbre MIT et en particulier il se souvient d'un des cours de maths qu'il a pu y suivre. **Uniquement si vous avez fini tout le reste** et **pour 1 point bonus**, expliquer et détailler le raisonnement au tableau et présenter la conclusion du professeur. Expliquer pourquoi ce résultat est surprenant! La démonstration du professeur du MIT est-elle correcte ?