Analyse de Fourier et géométrie : Exercices sur les cours 5 et 6

►►**Mode d'emploi –** *Merci de rendre vos réponses sous forme d'un* ***unique fichier pdf*** *via le formulaire que vous trouverez en cliquant ici. Pour convertir des formats png, jpeg ou autres au format pdf ou fusionner différents pdfs en un seul, je vous renvoie (par exemple) au site suivant. Un* ***corrigé*** *sera ensuite disponible ici, sur la page web du cours, après les vacances.*◄◄

Exercice 1.
Est-ce que l'ensemble $F = \left\{(2\lambda, \mu, \lambda+\mu) \ : \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Décrire géométriquement F et en donner une équation ainsi qu'une base.

Exercice 2.

1. Représenter le sous-espace vectoriel donné par $y = 2x$ dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver deux vecteurs non colinéaires du plan d'équation $x - y = 0$.
3. Montrer que $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y = 0\right\}$ est un espace vectoriel. Le décrire géométriquement, le dessiner. En préciser la dimension et en donner une base.
4. Mêmes questions avec $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z - y + 2x = 2z + x + y = 0\right\}$.
5. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $3y - x = 0$. Préciser un vecteur non nul orthogonal à $\mathcal{D}$ et décrire $\mathcal{D}^\perp$.

Exercice 3.
Soient $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que les vecteurs u et $v(1)$ sont colinéaires ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$ pour que $(u, v(x))$ forme deux vecteurs orthogonaux ? En déduire une famille orthonormée.

Exercice 4.
Soient $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que (u,v,w) forme une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.
Soient $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer le produit scalaire de u et v puis de v et w. En déduire l' angle entre les vecteurs u et v puis l'angle entre les vecteurs v et w.

Exercice 6.
On considère $F = \{(t, 2t, -t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser sa dimension. Déterminer $F^\perp$ et donner sa dimension. Décrire géométriquement F et $F^\perp$. Exhiber un vecteur u de F de norme 1. Trouver une famille orthonormée[1] (v,w) de $F^\perp$.

Exercice 7.
On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (5x - y, x). \end{array} \right.$$

Montrer que f est une application linéaire et donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer $f(5,-1)$ de deux manières.

1. C'est-à-dire deux vecteurs v et w de $F^\perp$ de norme 1 et orthogonaux.

EXERCICE 8.
On pose

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (5x - y + 2z, z - x, y). \end{array} \right.$$

Montrer que g est une application linéaire et donner la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $g(2, 0, 1)$ de deux manières.
On suppose désormais qu'on a une famille orthonormée (b_1, b_2, b_3) telle que

$$g(b_1) = -b_3, \quad g(b_2) = 3b_1 - b_2 \quad \text{et} \quad g(b_3) = b_1 + b_2.$$

Donner la matrice de g dans la base (b_1, b_2, b_3) et calculer son déterminant.

EXERCICE 9 — UN SYSTÈME LINÉAIRE.
Résoudre le système linéaire suivant

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et décrire géométriquement l'ensemble des solutions.

EXERCICE 10. Traiter un exercice sur les séries de Fourier parmi l'exercice 2, l'exercice 3 ou un sujet d'annales de l'an dernier !