Cours du 4 février

K. Destagnol

Université Paris Saclay

4 février 2021

Rappel série de Fourier

Rappel théorème de Dirichlet

Retour sur l'application de Parseval

Bilan du chapitre sur les séries de Fourier

(i) Construire une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ à partir d'une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$;

(ii) Déterminer à partir de son graphe si une fonction est paire ou impaire (ou rien du tout !) mais aussi si une fonction est continue, continue par morceaux ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux ;

(iii) Calculer les coefficients de Fourier d'une fonction complexes ou réels et savoir utiliser des propriétés de symétrie pour se simplifier la vie. Savoir reconstruire la série de Fourier à partir de ces coefficients ;

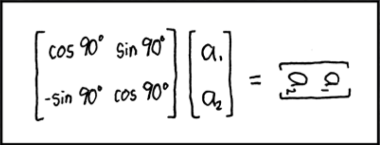
(iv) Connaître et appliquer les théorèmes de Dirichlet pour en déduire la convergence et la somme de certaines séries en choisissant un $t \in \mathbb{R}$ judicieux.

(v) Connaître et appliquer l'égalité de Parseval pour en déduire la convergence et la somme d'une série.

Application des séries de Fourier au traitement de signal

Chapitre 5

Rappels d'algèbre linéaire



Espaces vectoriels

Un espace vectoriel est un espace dans lequel on a l'élément nulet dans lequel on peut ajouter des vecteurset multiplier des vecteurs par des scalaires(autrement dit les multiplier par 2, -1, 3, etc...).

Les deux espaces vectoriels de base qui vont nous intéresser dans cette partie du cours sont

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}\,.$$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$. L'ensemble E est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si,

1. $(0,0) \in E$;
2. $\forall (x,y), (x',y') \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a que $\lambda(x,y) + (x',y') = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in E$.

On a alors trois cas de figure.

1. Soit $E = \{(0,0)\}$ auquel cas E est de dimension 0 ;
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ auquel cas E est de dimension 2 ;
3. Soit E est de dimension 1 et E est alors une droite passant par l'origine et il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax + by = 0\right\}.$$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ I

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^3$. L'ensemble E est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si,

1. $(0, 0, 0) \in E$;
2. $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a que

$$\lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \in E.$$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ II

On a alors quatre cas de figure.

1. Soit $E = \{(0,0,0)\}$ auquel cas E est de dimension 0 ;
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ auquel cas E est de dimension 3 ;
3. Soit E est de dimension 2 et E est alors un plan passant par l'origine et il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\}$ tels que $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = 0\}$;
4. Soit E est de dimension 1, auquel cas E est une droite de l'espace passant par l'origine. Une droite de l'espace passant par l'origine est donnée soit en tant qu'intersection de deux plans passant par l'origine, autrement dit par deux équations $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$ avec (a,b,c) et (α,β,γ) deux éléments non colinéaires de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ou alors sous sa forme paramétrique comme l'ensemble des

$$E = \{(at, bt, ct) \ : \ t \in \mathbb{R}\} \quad \text{pour} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Bases et dimensions

Base canonique

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la famille (e_1, e_2) où $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

De même, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

Colinéarité

Deux vecteurs non nuls (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$ sont dits colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y) = \lambda(x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda x' \\ y = \lambda y'. \end{cases}$$

De même, deux vecteurs non nuls (x, y, z) et (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ sont dits colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z) = \lambda(x', y', z') \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda x' \\ y = \lambda y' \\ z = \lambda z'. \end{cases}$$

Bases des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$

Bases des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

Produit scalaire et orthogonalité

Produit scalaire

(i) On définit le produit scalaire de deux vecteurs (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$, et l'on note $(x, y) \cdot (x', y')$ le nombre réel $(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$. On définit alors la norme d'un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et l'on note $||(x, y)||$ le réel positif $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(ii) De même, on définit le produit scalaire de deux vecteurs (x, y, z) et (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$, et l'on note $(x, y, z) \cdot (x', y', z')$ le nombre réel $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'$. On définit alors la norme d'un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et l'on note $||(x, y, z)||$ le réel positif $||(x, y, z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) d'angle $\theta \in [0, \pi]$, alors on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta).$$

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux (ou perpendiculaires) et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). On appelle alors orthogonal de E et on note $E^{\perp}$ l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) orthogonaux à tous les vecteurs de E.

Orthogonaux des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$

Orthogonaux des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

Bases orthonormées

Bases orthonormées (BON)

Une base d'un espace vectoriel est dite orthonormée si tous les vecteurs qui la composent sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. On notera souvent BON pour base orthonormée.

Applications linéaires

Applications linéaires

(i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$f\left(\lambda(x, y) + (x', y')\right) = f\left('\lambda x + x', \lambda y + y'\right) = \lambda f(x, y) + f(x', y').$$

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une application linéaire si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f\left(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')\right) &= f\left('\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\right) \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$

Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une application linéaire dans la base canonique I

(i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de f dans la base canonique est alors la matrice dont la première colonne est le vecteur $f(e_1) = f(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ et la seconde colonne est le vecteur $f(e_2) = f(0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit,

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} | & | \\ | & | \end{pmatrix} \end{array}.$$

Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une application linéaire dans la base canonique II

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de f dans la base canonique est alors la matrice dont la première colonne est le vecteur $f(e_1) = f(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$, la deuxième colonne est le vecteur $f(e_2) = f(0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ et la troisième colonne est le vecteur $f(e_3) = f(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Autrement dit,

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{array} \right) \end{array}.$$

Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une application linéaire dans une base quelconque I

(i) Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et (b_1, b_2) une base. Alors il existe $(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 \quad \text{et} \quad f(b_2) = m_{12}b_1 + m_{22}b_2$$

et la matrice M de f dans la base (b_1, b_2) est donnée par

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(b_1) & f(b_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} & \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une application linéaire dans une base quelconque II

(ii) Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et (b_1, b_2, b_3) une base (potentiellement différente de la base canonique). Alors il existe $(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathbb{R}^9$ tels que

$$f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 + m_{31}b_3, \quad f(b_2) = m_{12}b_1 + m_{22}b_2 + m_{32}b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = m_{13}b_1 + m_{23}b_2 + m_{33}b_3$$

et la matrice M de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est donnée par

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Matrice et composition

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) deux applications linéaires dont les matrices dans la base canonique sont données par M et N respectivement. Alors la matrice de l'application linéaire $f \circ g$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f \circ g(x, y) = f(g(x, y))$ est donné par le produit matriciel $M \times N$.