Devoir numéro 1 : Les nœuds du problème

Le but de ce devoir est d'étudier le groupe fondamental et certains revêtements des nœuds toriques.
Le devoir est à rendre pour le vendredi **7 février 2024**. Les *questions étoilées* sont des questions **hors barème et facultatives** pour celles et ceux qui veulent aller plus loin.

Notations

Dans ce devoir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{S}_n$ désignera la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $N = (0, \ldots, 0, 1)$ son pôle nord, $\mathbb{B}_n$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On considèrera également $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore de dimension 2 muni de sa projection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Enfin, pour p et q deux entiers naturels premiers entre eux et non tous deux nuls, on posera $D_{p,q}$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $qy = px$ ainsi que $C_{p,q} = \pi\left(D_{p,q}\right)$.
On rappelle pour finir qu'une application $f : U \to V$ avec $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ deux ouverts est une *immersion* C^∞ si elle est de classe C^∞ et si sa différentielle est injective en tout point de U.

Questions

1. Montrer que l'application
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\left(\sqrt{2} + \cos(2\pi y)\right)\cos(2\pi x), \left(\sqrt{2} + \cos(2\pi y)\right)\sin(2\pi x), \sin(2\pi y)\right) \end{array} \right.$$
est une immersion C^∞ qui passe au quotient en une application $\tilde{\varphi} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ qui est un homéomorphisme sur son image.
On identifiera ainsi dans la suite $C_{p,q}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ via $\tilde{\varphi}$.

2. Rappeler à quel espace connu est homéomorphe $C_{p,q}$ et tenter d'esquisser $\tilde{\varphi}(C_{1,2})$, $C_{2,3}$ et $\tilde{\varphi}(C_{2,3})$.
On parle de nœud de trèfle pour $C_{2,3}$.

3. Montrer que les espaces topologiques $\mathbb{R}^3 \setminus C_{1,q}$ sont tous homéomorphes pour $q \geqslant 0$.

4. On note $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}_3 \setminus \{N\}$ l'inverse de la projection stéréographique. Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q}$ et $\mathbb{S}_3 \setminus s(C_{1,q})$ sont connexes par arcs et que, pour tout $\mathbf{x} \notin C_{p,q}$, $\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q}, \mathbf{x}\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}_3 \setminus s(C_{p,q}), N\right)$.

5. On pose
$$A = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}_3 \;:\; x_1^2 + x_2^2 \geqslant \frac{1}{2}\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}_3 \;:\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$
Établir que A est B sont homéomorphes à[1] $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2$ et que
$$\mathbb{S}_3 \cong (\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2) \bigcup_{\mathbb{S}_1\times\mathbb{S}_1} (\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2), \quad \text{où} \quad (\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2) \bigcup_{\mathbb{S}_1\times\mathbb{S}_1} (\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2) = (\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2) \bigsqcup (\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2)/\mathcal{R}$$
avec $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence engendrée par $i_1(z_1, z_2) \sim i_2(z_2, z_1)$ pour tous $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ et où i_j est l'inclusion canonique de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ dans la j-ème copie de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2$ de la somme disjointe $(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2) \bigsqcup (\mathbb{S}_1 \times \mathbb{B}_2)$ pour $j \in \{1, 2\}$.

6. Calculer $\pi_1\left(\mathbb{T}^2 \setminus C_{p,q}, \mathbf{x}\right)$ pour tous p, q et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2 \setminus C_{p,q}$.

7. Déduire des questions précédentes que le *groupe fondamental du nœud torique* $\pi_1\left(\mathbb{S}_3 \setminus s(C_{p,q}), N\right)$ admet comme présentation $\langle a, b \mid a^p b^{-q}\rangle$. Reconnaître ce groupe lorsque p ou q vaut 1.
On notera $G_{p,q}$ ce groupe.

8. $(*)$ Montrer que les sous-groupes $\langle a^p\rangle$ et $\langle b^q\rangle$ de $G_{p,q}$ sont égaux.
On notera alors $C = \langle a^p\rangle = \langle b^q\rangle$. Montrer que C est distingué dans $G_{p,q}$ et que $G_{p,q}/C \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

9. $(*)$ Montrer que l'abélianisé de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ puis que l'ordre maximal d'un élément de torsion[2] dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est donné par $\max(p, q)$. En déduire que les groupes $G_{p,q}$ avec $1 < p < q$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ sont deux à deux non isomorphes. Qu'en déduisez-vous quant aux espaces topologiques $\mathbb{S}_3 \setminus s(C_{p,q})$ avec $1 < p < q$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$?

Soient X un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe ayant un groupe fondamental de présentation finie, $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}\left(\pi_1(X, x), \mathfrak{S}_n\right)$ l'ensemble des homomorphismes de groupes $\rho : \pi_1(X, x) \to \mathfrak{S}_n$ tel que le groupe image agisse transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$. Cela fournit une action transitive de $\pi_1(X, x)$ sur $\{1, \ldots, n\}$ via $[\alpha] \cdot k = \rho([\alpha])(k)$ pour $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$.

10. Soient $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}\left(\pi_1(X, x), \mathfrak{S}_n\right)$ et H_1 le stabilisateur de 1. Montrer que H_1 est d'indice n dans $\pi_1(X, x)$. Que pouvez-vous en déduire pour le revêtement connexe $p : E \to X$ associé à H_1 ? Préciser notamment le groupe $p_*(\pi_1(E, 1))$ en identifiant la fibre $p^{-1}(x)$ avec $\{1, \ldots, n\}$ et quand il est galoisien. Montrer que, réciproquement, à tout revêtement connexe p à n feuillets de X correspond un morphisme $\rho_p \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}\left(\pi_1(X, x), \mathfrak{S}_n\right)$.

1. On parle de *tore plein*.
2. On pourra commencer par établir par récurrence sur la longueur d'un mot qu'un élément de torsion est conjugué à un élément de torsion de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

11. On définit une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\pi_1(X,x),\mathfrak{S}_n)$ par $\rho \sim \rho'$ si, et seulement s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que pour tout $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$, $\rho([\gamma]) = \sigma\rho'([\gamma])\sigma^{-1}$. Montrer que deux revêtements connexes p et p' à n feuillets de X sont isomorphes si, et seulement si $\rho_p \sim \rho_{p'}$.

12. En déduire l'ensemble des classes d'isomorphismes de revêtements connexes à 3 feuillets du nœud de trèfle $C_{2,3}$, autrement dit de revêtements connexes à 3 feuillets de $\mathbb{S}_3 \setminus s(C_{2,3})$, en précisant lesquels sont galoisiens.