TD I : Suites et Séries numériques

► **Exercice 1 — Limites de suites.**
Déterminer les limites (lorsqu'elles existent) des suites suivantes :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}, \quad u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{6n^2 + 5}, \quad u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{4^n + 3^n},$$

$$u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad u_n = \frac{n \sin(n)}{n^2 + 1}, \quad u_n = (-1)^n n, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{10^n}.$$

Les deux dernières suites ci-dessus sont-elles monotones ? Bornées ?

► **Solution.**

1. On a que

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

et par conséquent on constate une limite de la forme $1^{+\infty}$, qui est une **forme indéterminée**[1]. Pour lever une indétermination, on a globalement quatre méthodes (que l'on peut combiner) :

— Soit utiliser une forme exponentielle dans le cas d'une suite donnée naturellement sous forme d'une puissance ;

— Deviner quel est le terme dominant et forcer la factorisation par ce terme dominant ;

— Utiliser des limites classiques telles que les croissances comparées[2] ;

— Utiliser des développements limités.

Ici, on a clairement une puissance et il semble raisonnable de tenter d'utiliser la forme exponentielle. On a alors[3]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right) n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Or, on sait d'après le cours[4] que

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

1. Pour mémoire, la liste **à connaître** des formes indéterminées est fournie dans la remarque en bas de la page 9 du polycopié de cours https://kevindestagnol.github.io/maths254.github.io/cours_maths_254.pdf.
2. En gros, la Proposition 1.2 page 8 du polycopié avec les deux limites suivantes **à connaître**

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

qui découlent des limites classiques pour les fonctions

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

où $\frac{1}{n}$ joue le rôle de x.
3. Je rappelle que pour tout $a > 0$ et pour tout réel x, on a $a^x = e^{x \ln(a)}$.
4. Vous savez sans doute que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

qui peut se redémontrer en utilisant le DL de $\ln(1 + x)$ au voisinage de 0 ou plus simplement en remarquant que

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{\ln(1 + x) - \ln(1 + 0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f'(0)$$

où $f(x) = \ln(1 + x)$ car on a reconnu le taux d'accroissement en 0 de cette fonction dérivable f. On a alors facilement que $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$. Posant $n = \frac{1}{x}$ soit $x = \frac{1}{n}$ de sorte que quand $n \to +\infty$, $x \to 0$, il vient

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Or, la fonction exponentielle est continue en 1 si bien que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1$$

et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Vous pouvez essayer de démontrer que de la même façon, pour tout nombre réel x, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2. On a que

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

mais que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite (elle oscille constamment entre -1 et 1). Mais on sent bien que $n+(-1)^n$, qui vaut soit $n-1$ soit $n+1$, devient dans tous les cas très grand quand n est grand et on sent que $(n+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit tendre vers $+\infty$ et de même pour $(n-(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Intuitivement, cela traduit le fait que quand n est grand, le terme n domine (est vraiment plus grand que) le terme $(-1)^n$ si bien que tout se passe comme si on n'avait en réalité pas le terme $(-1)^n$. Pour le voir proprement, la méthode est de forcer la factorisation par le terme dominant (ici donc n) :

$$\forall n>0, \quad n+(-1)^n = n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad \text{et} \quad n-(-1)^n = n\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right). \qquad (*)$$

On sent alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

En effet, le signe alterne mais le facteur $\frac{1}{n}$ rend cette quantité aussi proche de 0 que voulu. Pour le démontrer, on utilise le fait que $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ de sorte que

$$\forall n>0, \quad -\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

de sorte que le théorème des gendarmes[5] fournit bien

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Il s'agit là d'une limite **à connaître** absolument. On déduit alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$$

et ainsi de $(*)$ que

$$\lim_{n\to+\infty} (n+(-1)^n) = \lim_{n\to+\infty} (n-(-1)^n) = +\infty.$$

On a donc une forme indéterminée pour u_n du type "$\frac{+\infty}{+\infty}$". Pour lever cette indétermination, on utilise la technique classique dans le cas d'un quotient de suite tendant vers l'infini, à savoir la factorisation par le terme dominant au numérateur et au dénominateur. C'est ce que l'on a déjà fait ci-dessus, le terme dominant au numérateur et au dénominateur est n et on obtient ainsi

$$u_n = \frac{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)} = \frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1-\frac{(-1)^n}{n}}$$

après simplification par n. On a alors vu que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5. Proposition 1.5 page 10 du polycopié.

3. On a immédiatement que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2+3n+1\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(6n^2+5\right)=+\infty.$$
On a donc une forme indéterminée pour u_n du type "$\frac{+\infty}{+\infty}$". Je rappelle alors la règle importante suivante : **La limite en $+\infty$ d'un polynôme est donnée par la limite de son terme de plus haut degré. Ainsi dans le cas d'un quotient, la limite est donnée par la limite du quotient des deux termes de plus haut degré.** Ici, il vient immédiatement
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n+1}{6n^2+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{6n^2}$$
puisque le terme de plus haut degré du numérateur est n^2 et celui du dénominateur est $6n^2$. Finalement,
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{6n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

4. On a clairement que [6]
$$\lim_{n\to+\infty}2^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}3^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}4^n=\lim_{n\to+\infty}3^n=+\infty$$
donc on a affaire à une forme indéterminée pour u_n du type "$\frac{+\infty}{+\infty}$". On cherche donc quel est le terme dominant au numérateur : puisque 3 est plus grand que 2, on sent que 3^{n+1} tendra plus vite vers l'infini que 2^{n+1}. On force donc la factorisation par ce terme et il vient
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 2^{n+1}+3^{n+1}=3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right).$$
De même, on sent que 4^n est le terme dominant du dénominateur et ainsi
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 4^n+3^n=4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right).$$
Il vient alors
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}=\frac{3^{n+1}}{4^n}\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$
On a alors
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{3^{n+1}}{4^n}=3\times\frac{3^n}{4^n}=3\left(\frac{3}{4}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
car $-1<\frac{3}{4}<1$ d'après la Proposition 1.4 page 10 du polycopié. Par ailleurs,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$$
car $-1<\frac{2}{3}<1$ et d'après la Proposition 1.4 page 10 du polycopié. Il s'ensuit que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=1$$
et finalement $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

6. On applique soit la Proposition 1.4 page 10 du polycopié soit on le voit en passant en forme exponentielle. Par exemple,
$$4^n=e^{n\ln(4)}\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}n\ln(4)=+\infty$$
car $\ln(4)>0$.

5. Il s'agit d'une limite classique rappelée dans la première note de bas de page en première page. On a

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

6. Ici, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty}(n^2+1) = +\infty$$

mais $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ nous embête car elle n'admet pas de limite (elle oscille sans cesse). On voudrait donc s'en débarasser et pour cela on va utiliser le fait que l'on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1.$$

Or, puisque $\frac{n}{n^2+1} \geqslant 0$, on peut multiplier notre inégalité par cette quantité sans changer le sens des inégalités et obtenir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{n}{n^2+1} \leqslant \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \leqslant \frac{n}{n^2+1}.$$

Maintenant, on peut appliquer notre règle concernant la limite de polynômes en $+\infty$ rappelée en **3.** pour obtenir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Le théorème des gendarmes (Proposition 1.5 page 10 du polycopié) fournit alors que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. La morale de cette histoire est qu'il est souvent utile d'utiliser la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$

pour se débarasser d'un sinus (ou d'un cosinus!) trop encombrant et ensuite utiliser le théorème des gendarmes.

7. On voit que la suite oscille quand n est très grand entre valeurs positives arbitrairement grandes et valeurs négatives arbitraires négatives. On devine donc qu'elle n'admettra pas de limite ni finie (puisqu'elle prend des valeurs arbitrairement grandes) ni infinie (puisque son signe oscille et que si elle tendait vers $+\infty$ par exemple, elle devrait être positive à partir d'un certain rang et de même si elle tendait vers $-\infty$ par exemple, elle devrait être négative à partir d'un certain rang). On a $u_0 > u_1$ puis $u_1 < u_2$ puis $u_2 > u_3$, etc... Autrement dit, $u_{2n} = 2n > u_{2n+1} = -(2n+1)$ et $u_{2n+1} = -(2n+1) < u_{2n+2} = 2n+2$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone. On a vu qu'elle prenait des valeurs arbitrairement grandes et arbitrairement négatives donc elle n'est pas non plus bornée!

8. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{10^n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{e^{n\ln(10)}}.$$

On a alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(10)} = +\infty$ car $\ln(10) > 0$. On a donc une forme indéterminée que les croissances comparées permettent de lever. L'exponentielle gagne et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n\ln(10)}} = 0.$$

On a clairement que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est minorée par 0. Pour savoir si la suite est monotone, étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{10^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{10^n} = \frac{1}{10^n}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{10} - \sqrt{n}\right).$$

Or,

$$\frac{\sqrt{n+1}}{10} - \sqrt{n} < 0 \iff \sqrt{n+1} < 10\sqrt{n}.$$

Or, pour tout $n > 0$, $n+1 < 100n$ (car $99n > 1$) donc en prenant les racines carrées $\sqrt{n+1} < 10\sqrt{n}$ et $\frac{\sqrt{n+1}}{10} - \sqrt{n} < 0$. Ainsi, pour tout $n > 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ et $u_{n+1} < u_n$ si bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir du rang 1. On a donc pour tout $n > 0$ que $u_n < u_1 = \frac{1}{10}$. Comme $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{1}{10}$ et la suite est majorée par $\frac{1}{10}$. Elle est donc majorée et minorée donc bornée.

► **EXERCICE 2 — VERS LES SÉRIES.**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ainsi que $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
   Indication : On pourra penser aux suites adjacentes.
2. Que pouvez-vous déduire de la question précédente concernant le série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$.

► **SOLUTION.**

1. On va suivre l'indication et appliquer la Proposition 1.9 page 12, autrement dit, on va établir que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, ce qui montrera bien qu'elles convergent et ont même limite par la Proposition 1.9.
   Il faut donc vérifier quatre choses. Pour commencer, on voit immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant u_n$$

car $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ et $\frac{1}{n!} \geqslant 0$. Par ailleurs

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et car[7] $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$. Il reste donc à vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Commençons par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n, on a[8]

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

puisque tous les termes se simplifient sauf le terme $\frac{1}{(n+1)!}$. Une autre façon de voir les choses est de remarquer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

de sorte qu'on retrouve bien

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$$

si bien que $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Passons alors à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n, on étudie le signe de

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}.$$

Or, on a vu que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$$

7. Pour s'en convaincre, il suffit de voir que

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \geqslant n$$

et on peut conclure par la Proposition 1.6 (i) page du polycopié.

8. Je rappelle que par convention $0! = 1$.

si bien que [9]

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) = \frac{1}{n!} \times \frac{1-n}{n+1}.$$

On constate alors que pour tout $n \geqslant 1$, $n! \geqslant 0$, $n+1 \geqslant 0$ et $1-n \leqslant 0$ si bien que

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \times \frac{1-n}{n+1} \leqslant 0$$

si bien que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1. On peut donc appliquer la Proposition 1.9 des suites adjacentes et en déduire que les deux suites convergent et ont la même limite !

2. On constate [10] que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est rien d'autre que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$. On vient de voir que cette suite des sommes partielles converge et on déduit donc de la Définition 2.1 que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ converge. Sa somme est alors le nombre réel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

qui est en fait égal à $\exp(1) = e$ et de manière plus générale on peut établir que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

► **EXERCICE 3 — CONVERGENCE DE SÉRIES NUMÉRIQUES.** Déterminer si les séries suivantes convergent/ convergent absolument :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3}{n^3+1}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n)}{10^n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

► **SOLUTION.** La stratégie est d'appliquer l'algorithme page 23 du polycopié.

1. On commence par l'étape 0 de l'algorithme page 23. On a [11]

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$$

donc on sait que la série diverge grossièrement !

2. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

donc on applique la Proposition 2.1 (i) du polycopié. Il s'agit d'une série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc la série diverge.

c) On commence par l'étape 0 de l'algorithme page 23. On a

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n^2\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} = 0$$

9. En effet, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
10. Voir la Définition 2.1 du polycopié.
11. Voir exercice 1, **3**.

car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1.$$

On n'a donc pas divergence grossière et il faut passer à l'étape 1. Ici, la série est à termes positifs ($\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \geqslant 0$) donc la convergence absolue de la série est la convergence de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}.$$

Ainsi convergence absolue et convergence sont les mêmes notions car $\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \geqslant 0$ pour tout entier naturel n non nul. Pour étudier cette convergence, l'étape 0 semble indiquer que la quantité

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \approx \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

et cette série converge d'après la Proposition 2.1. On va donc essayer de montrer la convergence et de se ramener à cette intuition en utilisant la Proposition 2.5. Pour cela, on essaye de majorer la quantité $\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ par une suite dont on sait étudier la série. On voit alors que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2}$$

car[12] $n^2+\sqrt{n} \geqslant n^2$ car $\sqrt{n} \geqslant 0$ et ainsi $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^2}$. On a donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente d'après la Propositon 2.1 (i) en tant que série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. La Proposition 2.5 garantit alors, puisque $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ est à termes positifs, que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge !

4. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$$

et on applique la Proposition 2.1 page 15 (ii) du polycopié. il s'agit d'une série de Riemann alternée avec $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ donc la série converge. On pouvait aussi appliquer le critère de Leibniz[13] à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour tout entier naturel n non nul $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Cette suite est clairement décroissante et tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$. Il s'ensuit que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge par le critère de Leibniz.

5. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

donc on applique la Proposition 2.1 (i) du polycopié. il s'agit d'une série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc la série converge.

12. En gros, on se débarrasse du terme négligeable $\sqrt{n}$ pour garder le terme dominant.
13. Proposition 2.8 page 21 du polycopié.

6. On commence par l'étape 0. La limite à calculer est une forme indéterminée car

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

de sorte que par continuité de sinus

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \sin(0) = 0.$$

Pour lever l'indétermination, on remarque que la limite à calculer nous fait penser à la limite

$$\lim_{N\to+\infty} N \sin\left(\frac{1}{N}\right) = 1.$$

On écrit alors pour tout $n \geqslant 1$

$$n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^2} \times n^3 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^3 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1$$

si bien que

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$$

et on n'a pas divergence grossière. On étudie alors le signe de $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On a $n \geqslant 1 > 0$ et $\frac{1}{n^3} \in]0, 1]$, intervalle sur lequel le sinus est positif[14]. Il s'ensuit que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$. On va alors appliquer la Proposition 2.5 et pour cela on a besoin de majorer la fonction sinus. On va donc démontrer le résultat suivant :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \sin(x) \leqslant x.$$

Pour ce faire, on pose $f(x) = \sin(x) - x$ sur $[0, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \geqslant 0, \quad f'(x) = \cos(x) - 1.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leqslant 1$ de sorte que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ soit $\sin(x) - x \leqslant 0$ soit

$$\forall x \geqslant 0, \quad \sin(x) \leqslant x.$$

On peut alors appliquer cette inégalité à $x = \frac{1}{n^3}$ de sorte que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leqslant \frac{1}{n^3} \quad \text{soit} \quad n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leqslant \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente d'après la Propositon 2.1 (i) en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. La Proposition 2.5 garantit alors, puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est **à termes positifs**, que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge !

14. Faire un dessin pour s'en convaincre !

7. On obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+(-1)^n}{n^2+1} = \frac{n}{n^2} \times \frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n^2+1} = 0$ car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

comme on l'a établi lors de l'exercice 1 **2**. On n'a donc pas divergence grossière. On commence alors par constater que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \geqslant 0$. Pour étudier la convergence, l'étape 0 nous dit que la quantité

$$\frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \approx \frac{1}{n}$$

et cette série diverge d'après la Proposition 2.1. On va donc essayer de montrer la divergence et de se ramener à cette intuition en utilisant la Proposition 2.5. Pour cela, on essaye de minorer la quantité $\frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ par une suite dont on sait étudier la série. On va alors établir que pour tout entier naturel[15] $n \geqslant 3$

$$\frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

En effet, on a

$$\forall n \geqslant 3, \quad \frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \geqslant \frac{n-1}{n^2+1}$$

et il suffit donc de démontrer que

$$\forall n \geqslant 3, \quad \frac{n-1}{n^2+1} \geqslant \frac{1}{3n}.$$

Cette dernière inégalité équivaut à

$$2n(n-1) \geqslant n^2+1 \quad \Longleftrightarrow \quad n^2-2n-1 \geqslant 0.$$

Mais le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = 8$ et ainsi ce trinôme s'annule en $x_1 = 1-\sqrt{2}$ et en $x_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2,14\ldots$ Il s'ensuit en particulier que

$$\forall x \geqslant x_2 \approx 2,14\ldots \quad x^2-2x-1 \geqslant 0$$

si bien que pour tout $n \geqslant 3$, on a bien $n^2-2n-1 \geqslant 0$ et en remontant les équivalences

$$\frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n}$ est divergente d'après la Propositon 2.1 (i) en tant que série de Riemann avec $\alpha = 1$. La Proposition 2.5 garantit alors, puisque $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ est à termes positifs, que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ diverge !

8. On commence par l'étape 0. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

soit car $10^n > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{\cos(n)}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^n}$$

où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$$

15. Pas de panique ici, dans un exercice d'examen, vous auriez eu une indication !

car $-1 < \frac{1}{10} < 1$ et en utilisant la Proposition 1.4 du polycopié. Par le théorème des gendrames, il vient alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{10^n} = 0$$

et on n'a donc pas divergence grossière. On passe alors à l'étape 1 et puisque $u_n = \frac{\cos(n)}{10^n}$ change de signe, on étudie la convergence absolue, c'est-à-dire la convergence de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{\cos(n)}{10^n}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\cos(n)|}{10^n}.$$

On a alors

$$\frac{|\cos(n)|}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^n}$$

où la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{10^n}$ converge par la Proposition 2.1 (iii) car $-1 < \frac{1}{10} < 1$. On déduit alors la Proposition 2.5 que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{\cos(n)}{10^n}\right|$ converge. Autrement dit, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n)}{10^n}$ converge absolument et donc elle converge d'après la Proposition 2.7 du polycopié.

9. Commençons par le cas $|x| < 1$. On sait d'après la Proposition 1.4 du polycopié que

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

car $-1 < x < 1$. Or, puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} = 0$$

et on n'a pas divergence grossière. Puisque pour un x général dans $]-1,1[$, la quantité $u_n = \frac{x^n}{n}$ n'est pas toujours positive, on étudie la convergence absolue, à savoir la convergence de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x|^n}{n}.$$

Au vu de la nature multiplicative de u_n, il semble raisonnable de tenter d'appliquer le critère de d'Alembert. Pour ce faire, on calcule

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \times \frac{n}{n+1} = |x| \times \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

Or, par hypothèse, on a $|x| < 1$ car $-1 < x < 1$. On déduit donc du critère de d'Alembert que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x^n}{n}\right|$ converge. Autrement dit, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n}$ converge absolument et donc converge d'après la Proposition 2.7 du polycopié et ce pour tout $-1 < x < 1$. On peut établir

$$\forall |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Lorsque $|x| > 1$, on a pour tout $n > 0$

$$\left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n} = \frac{e^{n\ln(|x|)}}{n}.$$

Or, $|x| > 1$ donc $\ln(|x|) > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(|x|)} = +\infty$ et par croissances comparées $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x^n}{n}\right| = +\infty$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n}$ diverge grossièrement!

► **Exercice 4 — Sommes de séries.**

1. Justifier de la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{in}}{2^n}$.

2. En déduire la convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n)}{2^n}$.

► **Solution.**

1. On peut bien sûr appliquer comme d'habitude l'algorithme du polycopié mais ici le plus simple est de voir que [16]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{e^{in}}{2^n} = \left(\frac{e^i}{2}\right)^n$$

et ainsi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{in}}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{e^i}{2}\right)^n$$

de sorte qu'on reconnaît une série géométrique (voir Proposition 2.1 (iii)). Or [17],

$$\left|\frac{e^i}{2}\right| = \frac{|e^i|}{2} = \frac{1}{2}$$

où $-1 < \frac{1}{2} < 1$ si bien que la Proposition 2.1 (iii) fournit immédiatement la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{in}}{2^n}$. Pour le calcul de la somme, on fait à nouveau appel au cours et à la Proposition 2.1 (iii) que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^i}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^i}{2}} = \frac{2}{2-e^i}.$$

Si vous ne vous souvenez plus de cette formule, on peut la redémontrer de la façon suivante. On note S_n la somme partielle de rang n associée à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{in}}{2^n}$ pour tout entier naturel n. Par définition, on a [18]

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^i}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{e^i}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^i}{2}}.$$

La somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{in}}{2^n}$ est alors définie comme (voir Définition 2.1) par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in}}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

16. Je rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$ et que

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et en particulier} \quad e^i = \cos(1) + i\sin(1)$$

avec $\theta = 1$.

17. Je rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$. Pour le voir, on a

$$\left|e^{i\theta}\right| = |\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

car $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

18. Je rappelle que pour tout $q \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Or, la Proposition 1.4 et le fait que $-1 < \left|\frac{e^i}{2}\right| < 1$ fournit alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^i}{2}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{e^i}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^i}{2}} = \frac{1}{1-\frac{e^i}{2}}$$

de sorte qu'on retrouve bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in}}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{e^i}{2}} = \frac{2}{2-e^i}.$$

2. On commence par constater que pour tout entier naturel n, $e^{in} = \cos(n) + i\sin(n)$. On a alors convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\cos(n)}{2^n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\sin(n)}{2^n}$ de la même manière que dans l'Exercice 4 **8**. En effet,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \left|\frac{\cos(n)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin(n)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

où la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}$ converge par la Proposition 2.1. On déduit alors de la Proposition 2.5 la convergence absolue des deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\cos(n)}{2^n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\sin(n)}{2^n}$ et par conséquent leur convergence par la Proposition 2.7. On a alors, grâce à la Proposition 2.2, que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n} + i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)+i\sin(n)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in}}{2^n}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in}}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{2^n} = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in}}{2^n}\right).$$

Ainsi, la question précédente fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2-e^i}\right).$$

Il s'agit alors à présent de calculer

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2}{2-e^i}\right).$$

Pour ce faire, on va mettre le nombre complexe $\frac{2}{2-e^i}$ sous forme algébrique. On multiplie ainsi le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $2-e^i$, à savoir $2-e^{-i}$ de sorte que

$$\frac{2}{2-e^i} = \frac{2(2-e^{-i})}{(2-e^i)(2-e^{-i})}.$$

On a alors

$$(2-e^i)(2-e^{-i}) = 4-2(e^i+e^{-i})+e^{i-i} = 4-4\cos(1)+1 = 5-4\cos(1)$$

car $e^{i-i} = e^0 = 1$ et $e^i + e^{-i} = 2\mathrm{Re}(e^i) = 2\cos(1)$. Ainsi

$$\frac{2}{2-e^i} = \frac{4-2\cos(1)+2i\sin(1)}{5-4\cos(1)} \quad \text{donc} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2-e^i}\right) = \frac{4-2\cos(1)}{5-4\cos(1)}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n} = \frac{2(2-\cos(1))}{5-4\cos(1)}.$$

Je vous laisse démontrer de manière analogue à titre d'exercice que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{2^n} = \frac{2\sin(1)}{5-4\cos(1)}.$$

► EXERCICE 5 — UNE SÉRIE DE RIEMANN PARTICULIÈRE.

1. En utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$
justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ et encadrer sa somme.
2. En déduire la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et comparer la somme de cette série avec celle de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.

► SOLUTION.

1. Voir le polycopié de cours page 19.
2. La convergence des deux séries découle immédiatement de la Proposition 2.1. Par ailleurs, pour tout entier naturel k non nul
$$\frac{(-1)^k}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \qquad (*)$$
de sorte qu'en sommant ces inégalités pour $k = 1, 2, \ldots, n$, il vient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$
Alors, par définition de la convergence d'une série, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
de sorte qu'en passant à la limite dans $(*)$, il vient
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
De manière générale, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent et telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$
alors on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

► EXERCICE 6 — VERS LES SÉRIES DE FONCTIONS.

Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$ converge.

Indication : On pourra établir que
$$\forall t > -1, \quad \ln(1+t) \leqslant t \quad \textit{et} \quad \forall t \in [0,1], \quad \ln(1+t) \geqslant \frac{t}{2}.$$

► SOLUTION. On commence par établir la première relation donnée en indication, à savoir
$$\forall t > -1, \quad \ln(1+t) \leqslant t \quad \text{soit} \quad \ln(1+t) - t \leqslant 0.$$
On pose alors $f(t) = \ln(1+t) - t$ pour $t \in]-1, +\infty[$. Cette fonction est bien définie car $t > -1$ dont $1 + t > 0$ et elle est dérivable sur son domaine de définition et
$$\forall t > -1, \quad f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}.$$
Pour $t > -1$, $1 + t > 0$ donc $f'(t)$ du signe opposé de t. On a donc le tableau de variations suivant

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

En effet,

$$\lim_{\substack{t\to-1\\t>-1}}(1+t)=0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{t\to-1\\t>-1}}\ln(1+t)=-\infty.$$

Par ailleurs,

$$\forall t>-1,\quad f(t)=t\left(\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)$$

et par croissances comparées

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=0 \quad \text{si bien que} \quad \lim_{t\to+\infty}=-\infty.$$

Il s'ensuit que pour tout $t>-1$, on a $f(t)\leqslant 0$ soit $\ln(1+t)\leqslant t$. Passons alors à la deuxième inégalité de l'indication, à savoir

$$\forall t\in[0,1],\quad \ln(1+t)\geqslant \ln(2)t \quad \text{soit} \quad \ln(1+t)-\ln(2)t\geqslant 0.$$

Pour ce faire, considérons la fonction $g(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{2}$ pour $t\in[0,1]$. Cette fonction est bien définie et elle est dérivable sur son domaine de définition et

$$\forall t\in[0,1],\quad g'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2}=\frac{1-\frac{1}{2}-\frac{t}{2}}{1+t}=\frac{1-t}{2(1+t)}.$$

On voit alors puisque pour $t\in[0,1]$, $2(1+t)\geqslant 0$ et $1-t\geqslant 0$ si bien que $g'(t)\geqslant 0$ pour tout $t\in[0,1]$. On a ainsi la tableau de variations suivant

x	0		1
$g'(x)$		$+$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2)-\frac{1}{2}$

de sorte que pour tout $t\in[0,1]$, on a $g(t)\geqslant 0$ soit $\ln(1+t)\geqslant\frac{t}{2}$.

Pour étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$, on applique l'algorithme du polycopié. Commençons par étudier la limite quand $n\longrightarrow+\infty$ de $\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$. Lorsque $x\leqslant 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)=\begin{cases}2 \text{ si } x=0\\ +\infty \text{ si } x<0\end{cases} \qquad \text{de sorte que} \qquad \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)=\begin{cases}\ln(2) \text{ si } x=0\\ +\infty \text{ si } x<0\end{cases}$$

si bien que dans tous ces cas, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)\neq 0$ et on sait alors que la série diverge grossièrement. Lorsque $x>0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)=1 \quad \text{de sorte que} \quad \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)=0$$

et il faut donc passer à l'étape suivante de l'algorithme. Ici, $\frac{1}{n^x}>0$ de sorte que $1+\frac{1}{n^x}>1$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)>0$. la série est donc à termes positifs. Par ailleurs, on a vu que

$$\forall t>-1,\quad \ln(1+t)\leqslant t$$

de sorte que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) \leqslant \frac{1}{n^x}.$$
On sait alors par la Proposition 2.1 que si $x > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ converge et ainsi on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$ converge. À l'inverse, lorsque $0 < x < 1$, on sait que
$$\forall t \in [0,1], \quad \ln(1+t) \geqslant \frac{t}{2}$$
de sorte que pour tout $0 < x < 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) \geqslant \frac{\ln(2)}{n^x} > 0$$
et on sait alors par la Proposition 2.1 que si $0 < x < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ diverge et ainsi on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$ diverge grâce à la Proposition 2.5. En conclusion, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$.

Pour terminer, un mot concernant les raisons pour lesquelles on pense à effectuer cette disjonction de cas. La disjonction $x \leqslant 0$ et $x > 0$ apparaît naturellement quand on applique l'algorithme du polycopié et notamment l'étape 0. Lorsque $x > 0$, pour sentir pour quels x on va avoir convergence et pour quels x on va avoir divergence, on peut utiliser que pour $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$ et qu'on connaît un développement limité à l'ordre 1 de $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de $x = 0$ donné par
$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$, cela implique que
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) = \frac{1}{n^x} + \frac{1}{n^x} \times \varepsilon\left(\frac{1}{n^x}\right).$$
Or,
$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n^x}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} \times \varepsilon\left(\frac{1}{n^x}\right) = 0$$
et cette dernière quantité tend plus vite vers 0 que $\frac{1}{n^x}$ car elle est de la forme $\frac{1}{n^x}$ mutliplié par quelque chose qui tend vers 0. Ainsi, lorsque n est grand, on a [19]
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) \approx \frac{1}{n^x}$$
et on s'attend alors à ce que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ converge, ce qui n'arrive que si, et seulement si, $x > 1$ d'après le cours. Pour $x > 1$, on s'attend donc à la convergence et donc une méthode est d'essayer de majorer $\ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$ par le terme général d'une série convergente, or une majoration de $\ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$ est précisément ce que

19. Ce que vous pouvez retrouver en utilisant la limite classique
$$\lim_{N\to+\infty} N \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = 1$$
avec $N = n^x$ qui tend bien vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et quand $x > 0$ de sorte que
$$\lim_{n\to+\infty} n^x \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) = 1$$
et donc
$$n^x \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) \approx 1 \quad \text{soit} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) \approx \frac{1}{n^x}.$$

fournit la première partie de l'indication tandis que pour $0 < x < 1$, on cherche à montrer la divergence et une méthode est d'essayer de minorer $\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ par le terme général d'une série divergente, or une minoration de $\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ est précisément ce que fournit la deuxième partie de l'indication !

Pour finir, pour celles et ceux qui veulent aller plus loin, cela implique que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.

► **EXERCICE 7 — SUITES, SÉRIES ET INTÉGRALES.**
On rappelle que la fonction arctan est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le fait que $\arctan(x)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(\arctan(x)) = x$. Par ailleurs, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $\arctan(0)$ et $\arctan(1)$ et en déduire la valeur de I_0.
2. Calculer la valeur de I_1. *Indication : On pourra penser à écrire* $\frac{t^2}{1+t^2}$ *sous la forme* $\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}.$$
5. En déduire que pour tout entier naturel n, on a
$$(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$
6. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et la valeur de sa somme.

REMARQUE : On pourrait alors approximer π en utilisant les sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. En pratique, on utilise plutôt la formule de Machin[20] $\pi = 16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ à laquelle on peut également associer des séries convergentes mais dont la convergence a lieu beaucoup plus rapidement.

► **SOLUTION.**

1. Par définition, $\theta = \arctan(0)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(\theta) = 0$. Or, $\tan(0) = 0$ et $0 \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de sorte que nécessairement $\boxed{\arctan(0) = 0}$. De même, par définition, $\theta = \arctan(1)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant[21] $\tan(\theta) = 1$. Or, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de sorte que nécessairement $\boxed{\arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$.
   Passons alors au calcul de I_0. Par définition, on a
$$I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$
   D'après le rappel, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est la fonction arctan de sorte que
$$I_0 = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$$
   si bien que les calculs précédents fournissent $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{4}}$.

20. Datant de 1706.
21. L'équation $\tan(\theta) = 1$ implique par définition de la tangente que $\cos(\theta) = \sin(\theta)$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Il n'est alors plus difficile de lire la réponse sur un dessin du cercle trigonométrique.

2. Par définition, on a

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

On utilise alors l'indication qui fournit que pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient alors

$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [t]_0^1 - I_0.$$

Finalement, la question précédente donne la valeur $\boxed{I_1 = 1 - \frac{\pi}{4}}$.

3. Pour établir que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on étudie le signe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la quantité $I_{n+1} - I_n$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a [22]

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}-t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

On factorise alors l'intégrande

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

On a alors que pour $t \in [0,1]$, $t^{2n} \geqslant 0$, $1+t^2 \geqslant 0$ et $t^2 - 1 \leqslant 0$ de sorte que

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2} \leqslant 0.$$

On sait alors que cela implique que [23]

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{n+1} - I_n \leqslant 0}.$$

On en déduit donc bien que $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$
Passons alors au calcul de la limite. Ici, on constate que [24]

$$\lim_{n\to+\infty} t^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(t^2\right)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases}$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t^{2n}}{1+t^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\\ \frac{1}{2} \text{ si } t = 1. \end{cases}$$

On a alors bien évidemment envie de dire que [25]

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t = 0.$$

22. La dernière égalité provenant de la linéarité de l'intégrale.
23. Je rappelle que si $a < b$ et qu'une fonction f est continue par morceaux et positive (*resp.* négative) sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \left(resp. \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0\right).$$

Ces relations étant naturelles si l'on intérprète l'intégrale entre a et b de f comme l'aire algébrique comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre $x = a$ et $x = b$.
24. C'est par exemple la Proposition 1.4 du polycopié de cours.
25. Voir ici que la valeur d'une fonction en un point, ici en $t = 1$, ne change pas la valeur de l'intégrale, ce qui est encore assez naturelle en intérprétant l'intégrale comme une aire.

Malheureusement, ce raisonnement souvent juste est **en général FAUX**. On peut ici le faire fonctionner mais il nécessiterait l'utilisation du théorème de convergence dominé dont j'ignore si vous l'avez déjà vu ou non et donc on va éviter d'y recourir mais dans tous les cas, ce raisonnement permet d'avoir l'intuition que la suite $(I_n)_{n\to+\infty}$ tend vers 0. Pour le démontrer, tentons d'encadrer I_n par deux quantités qui tendent vers 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et appliquons le théorème des gendarmes. Soit $n \in \mathbb{N}$. On voit immédiatement que pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{t^{2n}}{1+t^2} \geqslant 0$ ce qui implique[26] que

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Par ailleurs, on souhaite une majoration qui tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour majorer une intégrale, on majore d'abord l'intégrande. Pour cela[27], on a

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 < 1+t^2 \geqslant 1 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leqslant t^{2n}$$

si bien que par positivité de l'intégrale, il vient

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}.$$

Finalement, on a donc établi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ de sorte que le théorème des gendarmes implique que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition et linéarité de l'intégrale, il vient

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}+t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Comme en question c), on a alors le réflexe de factoriser

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2+1)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t$$

après simplification des termes en $1+t^2$. Il s'ensuit alors bien que

$$I_{n+1} + I_n = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \quad \text{puis l'égalité} \quad \boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}.}$$

5. Établissons par récurrence, pour tout[28] $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression

$$(\mathbf{HR}_n) \qquad (-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$

Lorsque $n = 1$, on a d'après la question b)

$$(-1)^{1-1} I_1 = I_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

26. Voir la note de bas de page numéro 3.
27. Noter qu'on garde le terme faisant apparaître n car on veut ensuite une quantité qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
28. L'expression est mal définie pour $n = 0$ mais par convention, on peut prendre

$$\sum_{k=0}^{0-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 0$$

et alors on obtient une formule valable pour tout entier naturel n mais qui n'est intéressante que lorsque $n \geqslant 1$.

tandis que la question a) implique

$$\sum_{k=0}^{1-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0 = \frac{(-1)^0}{2\times 0+1} - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

de sorte qu'on a bien

$$(\mathbf{HR}_1) \qquad (-1)^{1-1} I_1 = \sum_{k=0}^{1-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0$$

et on a intialisé notre récurrence ! Soit alors $n \geqslant 1$ et supposons ($\mathbf{HR}_n$) vérifiée, autrement dit supposons que

$$(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$

On cherche alors à établir ($\mathbf{HR}_{n+1}$), autrement dit

$$(-1)^n I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$

On cherche donc une expression de $(-1)^n I_{n+1}$. Cela tombe bien puisque la question d) fournit[29]

$$(-1)^n I_{n+1} + (-1)^n I_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{soit} \quad (-1)^n I_{n+1} = -(-1)^n I_n + \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^{n-1} I_n + \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

car $-(-1)^n = (-1)^{n-1}$. Mais par ($\mathbf{HR}_n$), on a

$$(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0$$

si bien que

$$(-1)^n I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0 + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

On remarque alors que le terme $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ correspond au terme $k = n$ de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ si bien que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

et par conséquent

$$(-1)^n I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$

On a ainsi établi ($\mathbf{HR}_{n+1}$). En conclusion, on a bien démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.}$$

6. Noter que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est de la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{1}{2n+1}$ pour tout entier naturel n. La convergence de la série découle donc du critère de Leibniz[30] puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ mais remarquer alors que ce critère ne fournit pas la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

29. Après multiplication par $(-1)^n$.
30. Proposition 2.8 du polycopié.

contrairement à cet exercice.
Si l'on revient à la définition de la convergence de la série[31] $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, il s'agit d'étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

D'après la question e), on a pour tout entier naturel n,

$$(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0 \quad \text{soit} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^{n-1} I_n.$$

D'où, pour tout entier naturel n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^n}{2n+1} = I_0 + (-1)^{n-1} I_n + \frac{(-1)^n}{2n+1}. \qquad (*)$$

On a alors pour tout entier naturel n

$$-I_n \leqslant (-1)^{n-1} I_n \leqslant I_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

d'après la question c). Le théorème des gendarmes fournit alors $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} I_n = 0$. De même,

$$-\frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

de sorte que le théorème des gendarmes fournit aussi $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$. L'expression $(*)$ et la question a) fournissent alors que la suite $(S_n)_{n\to+\infty}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$

La Définition 2.1 du polycopié fournit alors que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ converge}}$ et que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Remarque : On peut constater que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1)$$

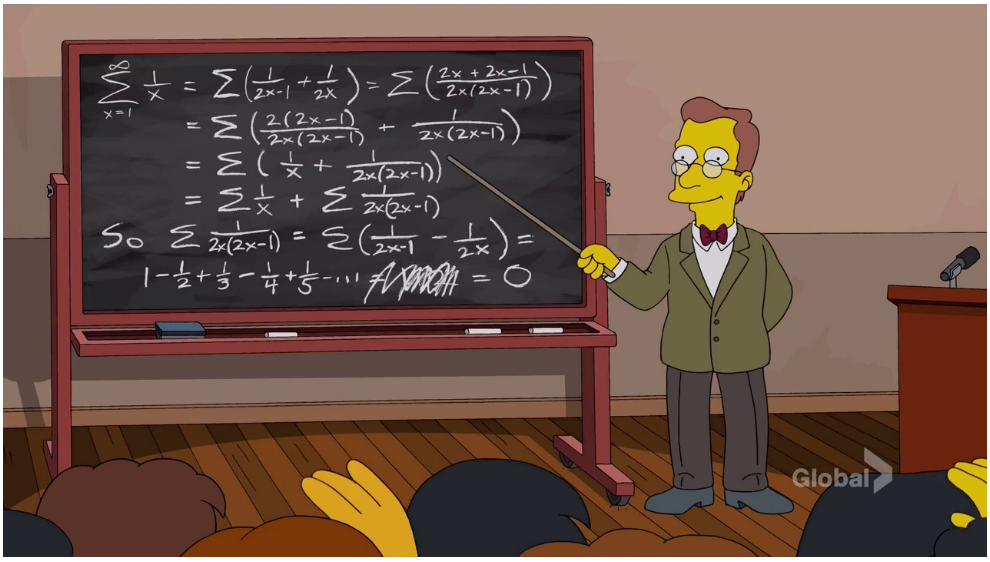
et de manière plus générale, on peut établir de façon analogue que pour tout $x \in [-1,1]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x).$$

► **EXERCICE 8 — SÉRIES NUMÉRIQUES *VS* SÉRIES TÉLÉVISÉES.**
Les séries numériques permettent également d'être capable de comprendre toutes les subtilités des épisodes des *Simpsons* qui font très souvent des clins d'œil à des mathématiques, parfois très poussées. L'image ci-dessous est tirée de l'épisode *Sky Police*, seizième épisode de la saison 26, au cours de laquelle Apu se remémore comment il a triché pour intégrer le célèbre MIT et en particulier il se souvient d'un des cours de maths qu'il a pu y suivre.

Expliquer et détailler le raisonnement au tableau et présenter la conclusion du professeur. Expliquer pourquoi ce résultat est surprenant ! La démonstration du professeur du MIT est-elle correcte ?

31. Voir Définition 2.1 du polycopié de cours.



► **Solution.** Le professeur commence par séparer les termes pairs et les termes impairs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1}\right).$$

Il écrit ensuite que pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1} = \frac{2k-1+2k}{2k(2k-1)} = \frac{2(2k-1)+1}{2k(2k-1)}$$

soit que

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1} = \frac{2(2k-1)}{2k(2k-1)} + \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(2k-1)}{2k(2k-1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

On a alors pour tout entier $k \geqslant 1$

$$\frac{2(2k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{1}{k}$$

de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = 0.$$

Le professeur écrit alors que pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

si bien que

$$0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right).$$

Mais cela n'est rien d'autre que dire que

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

où l'on remarque que $1-\frac{1}{2}>0$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}>0$, $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}>0$ et ainsi de suite. Ainsi il semblerait qu'on ait démontré qu'une somme infinie de nombre strictement positifs finisse par donner 0. Surprenant non ?
En effet, ça l'est et c'est même tellement surprenant que c'est faux ! La somme d'une série à termes strictement positifs est nécessairement strictement positive. Alors d'où vient l'erreur ? Du fait que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann qui diverge vers $+\infty$ et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

et on n'a pas le droit de manipuler des sommes de séries divergentes !! Notamment à l'étape

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}$$

en réalité la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2k(2k-1)}$ converge. Notons S sa somme et l'égalité ci-dessus se réécrit

$$+\infty=+\infty+S$$

ce qui est vrai mais en revanche on n'a pas le droit de simplifier par $+\infty$! Pour vous en convaincre, pensez aux calculs de limites où on a

$$1++\infty=+\infty=2++\infty$$

sans pour autant avoir $1=2$. La morale de cette histoire est qu'il est donc important de vérifier la convergence de séries avant de manipuler leurs sommes sous peine d'écrire des bêtises, même lorsqu'on est professeur au prestigieux MIT. À Moins que ce ne soit la mémoire d'Apu qui lui joue des tours ou les scénaristes des *Simpsons* qui s'amusent à vous proposer de subtils exercices !