TD II : SÉRIES DE FOURIER

► **EXERCICE 1 — UN PREMIER EXEMPLE.** On considère la fonction 2π-périodique paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = t^2.$$

1. Dessiner le graphe de f, d'abord sur $[-\pi, \pi[$ puis sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? C^1 par morceaux ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la convergence et la somme des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

► **EXERCICE 2 — UN SECOND EXEMPLE.** On considère la fonction 2π-périodique paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[0, \pi]$ est définie par

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f(t) = \pi - t.$$

1. Dessiner le graphe de f, d'abord sur $[-\pi, \pi]$ puis sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? C^1 par morceaux ?
2. Calculer les coefficients réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Fourier de f.
3. Préciser $\lim_{n\to+\infty} a_n(f)$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n(f)$. Donner également les coefficients de Fourier complexes de f.
4. Déduire du théorème de Dirichlet la convergence et la somme des séries $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
5. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ ainsi que la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
6. Que donne l'égalité de Parseval appliquée à la fonction f ? En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^4}$.
7. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$.
8. Reprendre l'exercice avec la fonction 2π-périodique impaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[0, \pi]$ est définie par

$$\forall t \in]0, \pi], \quad g(t) = \pi - t \quad \text{et} g(0) = 0.$$

   Et en déduire la convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n}$.

► **EXERCICE 3 — UN EXEMPLE 2-PÉRIODIQUE.** On considère les fonctions 2-périodiques $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont les restrictions à $]-1, 1]$ sont définies par

$$\forall t \in]-1, 1], \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^3, \quad f_3(t) = t - t^3.$$

1. Dessiner le graphe de f_1, f_2, f_3, d'abord sur $]-1, 1]$ puis sur tout $\mathbb{R}$. Ces fonctions sont-elles continues ? C^1 par morceaux ?
2. Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont-elles paires ? Impaires ? Quelles implications cela a-t-il concernant les coefficients de Fourier de ces fonctions ?
3. Calculer les coefficients de Fourier de f_1 puis ceux de f_2. En déduire ceux de f_3.
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f_3(t) = \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(\pi n t)}{n^3}$$

   avec convergence des séries en jeu.

5. Que donne l'égalité de la question précédente en $t = \frac{1}{2}$? En déduire la convergence et la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.
6. Appliquer l'égalité de Parseval et en déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$
avec convergence de la série en jeu.

► **EXERCICE 4 — UNE RELATION UTILE.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f') = inc_n(f)$.
Indication : On pourra intégrer par parties.
2. Déduire de l'Exercice 1 et de la question précédente les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in]0, \pi[, \quad h(t) = -1 \quad \text{et} \quad h(0) = h(\pi) = 0.$$
Écrire la série de Fourier associée. Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de h ? En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
3. Utiliser la question précédente pour obtenir la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

► **EXERCICE 5 — UNE APPLICATION.** On considère l'équation différentielle suivante
$$y''(t) + e^{it} y(t) = 0 \qquad (E).$$

1. Montrer que toute fonction f solution de (E) de classe $\mathcal{C}^2$ est 2π-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.
Indication : On pourra utiliser le fait qu'il existe une unique solution à (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
2. Soit f une solution de (E) 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$. Écrire les séries de Fourier associées à f et à f'' et justifer que f et f'' sont sommes de leur série de Fourier.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \frac{1}{n^2} c_{n-1}(f)$.
Indication : On admettra que (sous de bonnes hypothèses qui sont satisfaites ici) les coefficients de Fourier complexes d'une fonction définie par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \textit{avec} \quad (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$
sont donnés par $c_n(f) = c_n$ pour tout entier relatif n.
4.] Calculer $c_{-1}(f)$ et en déduire que pour tout $n < 0$, $c_n(f) = 0$.
5. Montrer que pour $n \geqslant 0$, $c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2} c_0(f)$ et en déduire que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = c_0(f) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{(n!)^2}.$$
6. Réciproquement, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction définie par
$$t \longmapsto c \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$$
est une solution 2π-périodique de (E).
Indication : On admettra qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ et que l'on a le droit de dériver terme à terme.
7. Déterminer toutes les solutions 2π-périodiques de (E).