TD Géométrie 11/02/2024 TD II

Exercice 1

Soit $n \geq 1$ et $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

a) [Montrer que $\det$ est $\mathcal{C}^\infty$.]

$\det$ est polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ donc $\mathcal{C}^\infty$.

b) [Calculer $d(\det)_{I_n}$.]

2 méthodes (au moins)

$\det$ est différentiable et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$d(\det)_{I_n}(M) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{\det(I_n + \varepsilon M) - \det I_n}{\varepsilon}$$

car $\det(I_n + tM) = \det(I_n) + d(\det)_{I_n}(tM)$

$+ o(t)$

et par linéarité $d(\det)_{I_n}(tM) = t\, d(\det)_{I_n}(M)$.

Or,

$$\det(I_n + tM) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i)$$

par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$ et non nécessairement distinctes) de M.

On a donc

$$\det(I_n + tM) - \det I_n = t\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) + O(t^2)$$

et $d(\det)_{I_n}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Tr}(M)$.

CQ

$$\frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(I_n) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\det(I_n + tE_{ij}) - \det I_n}{t}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

car $\det(I_n + tE_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 1+t & \text{si } i = j \end{cases}$

(matrice triangulaire)

Ainsi

$$d(\det)_{I_n}(M) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(I_n)\, m_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = \operatorname{Tr}(M).$$

c) [En déduire $d(\det)_M$.]

Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ (qui est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

$$\det(M+H) = \det M \det(I_n + M^{-1}H)$$

$$= \det M \left(1 + d(\det)_{I_n}(M^{-1}H) + o(\|H\|)\right)$$

$$= \det M + \det M \, \mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(\|H\|)$$

$$= \det M + \mathrm{Tr}\big(\underbrace{\det M \, M^{-1}}_{= {}^t\tilde{M}} H\big) + o(\|H\|)$$

où $\tilde{M}$ est la comatrice

$$= \det M + \underbrace{\mathrm{Tr}({}^t\tilde{M} H)}_{\text{linéaire en } H} + o(\|H\|)$$

donc $\quad d(\det)_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$H \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\tilde{M} H)$$

$\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$.

On conclut par densité + continuité de $d(\det)$.

En effet $\quad M \mapsto d(\det)_M$ est continue et

$$M \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\tilde{M}\, \cdot)$$ aussi

et ces 2 applications coïncident sur un ouvert dense donc elles sont égales et

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad d(\det)_M : H \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\tilde{M} H)$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2 + z^2$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $M_t = f^{-1}(\{t\}) \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) On calcule pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}$

$$\operatorname{Jac}_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} \dfrac{2x\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{2y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \end{pmatrix}$$

qui est bien défini car f différentiable partout sauf lorsque $x^2+y^2=0$.

b) Commençons par dessiner M_t (ce qui traitera la question **c)** du même coup).

1ère remarque : On peut supposer $t \geq 0$ sinon $M_t = \emptyset$.

Si $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$

est une rotation d'axe (Oz) et d'angle θ, on vérifie que

$$\theta(R_\alpha(x,y,z)) = \theta(x,y,z).$$

On a donc qu'il suffit de connaître M_t sur le plan $y=0$ puis de faire tourner ce tracé autour de l'axe (Oz) pour obtenir M_t.

Dans le plan $y=0$, M_t est donné par

$$\left(\sqrt{x^2}-1\right)^2 + z^2 = t$$

$$\Updownarrow$$

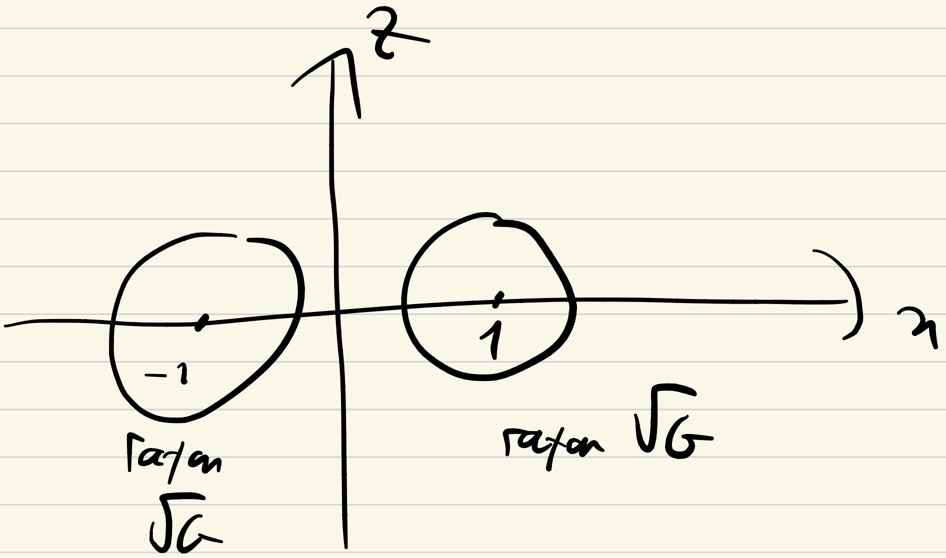
$$(|x|-1)^2 + z^2 = t \iff (x-1)^2 + z^2 = t \quad \text{si } x>0$$

ou

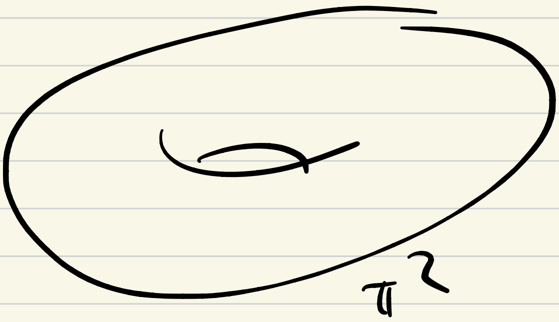
$$(x+1)^2 + z^2 = t \quad \text{si } x<0.$$

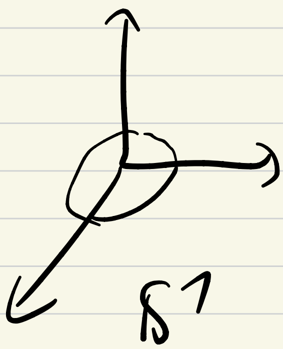
et on a la réunion de 2 cercles.
(ou portions de cercles)

1er cas : $0 \leq t < 1$



et en tournant autour de (Oz) on obtient





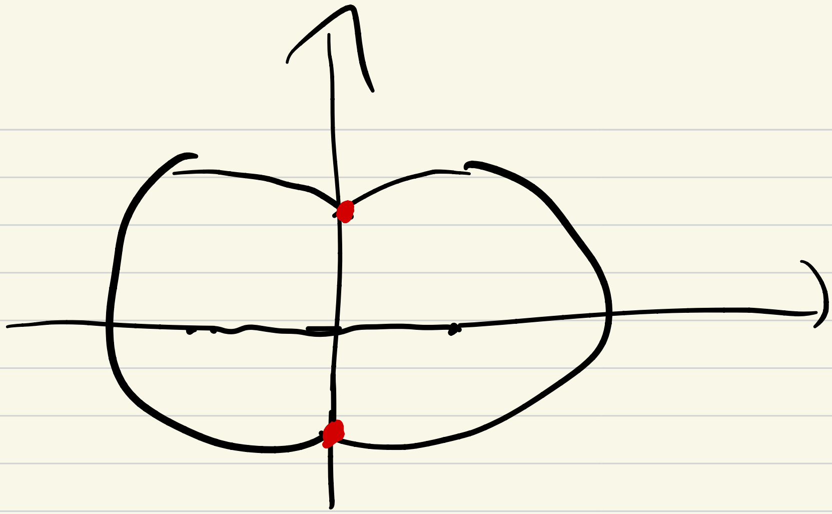
si $1 > t > 0$

si $t = 0$

$\Rightarrow$ on a une ss-variété

2ème cas $t \geq 1$

(f) 1)



$\Rightarrow$ on sent qu'on n'a pas une ss-variété à cause des points rouges notamment

Commençons par le cas $0 \leq t < 1$.

On veut mq M_t est une ss-variété.

Pour cela il suffit (à pas équivalence comme on le verra pour $t=0$) de mq f est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus de M_t. Supposons pour commencer $0 < t < 1$

Soit donc $(x,y,z) \in M_t$ soit $(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2+z^2=t$

On a alors (notons que si $t>0$,

$$\{x=y=0\} \cap M_t = \emptyset$$

(donc f diff. en (x,y,z))

$df_{(x,y,z)}$ non surjective

$$\iff \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$$

$$\iff z = 0 \quad \text{et} \quad x\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right) = y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right) = 0$$

Comme sur M_ε, x et y ne sont pas simultanément nuls, on a $x^2+y^2 = 1$ et $z = 0$ ce qui est absurde car

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 + z^2 = \varepsilon > 0$$

Ainsi $df_{(x,y,z)}$ est surjective et

f est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus de M_ε qui est par conséquent une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension $3-1=2$.

(et en fait un tore).

Si $t=0$, $dB_{(x,y,z)}$ n'est pas toujours

surjective ! (pas en $(x,y,0)$ où $x^2+y^2=1$)
Car s'y attendait, le dessin montre l'unicité de dim 1).
Mais si $t=0$

$$M_0 : \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2+z^2=0$$ pas la bonne façon de définir M_0

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-1=z=0$$ bonne façon

et cela incite plutôt à poser

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (x^2+y^2-1, z)$$

$$M_0 = g^{-1}(\{0\})$$

et g C^∞ et $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$dg_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est toujours de rang 2 au-dessus de M_0 car $(x,y) \neq (0,0)$ car $x^2+y^2=1$

donc g est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus de M_0 qui est une ss-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension $3-2=1$. (un cercle !).

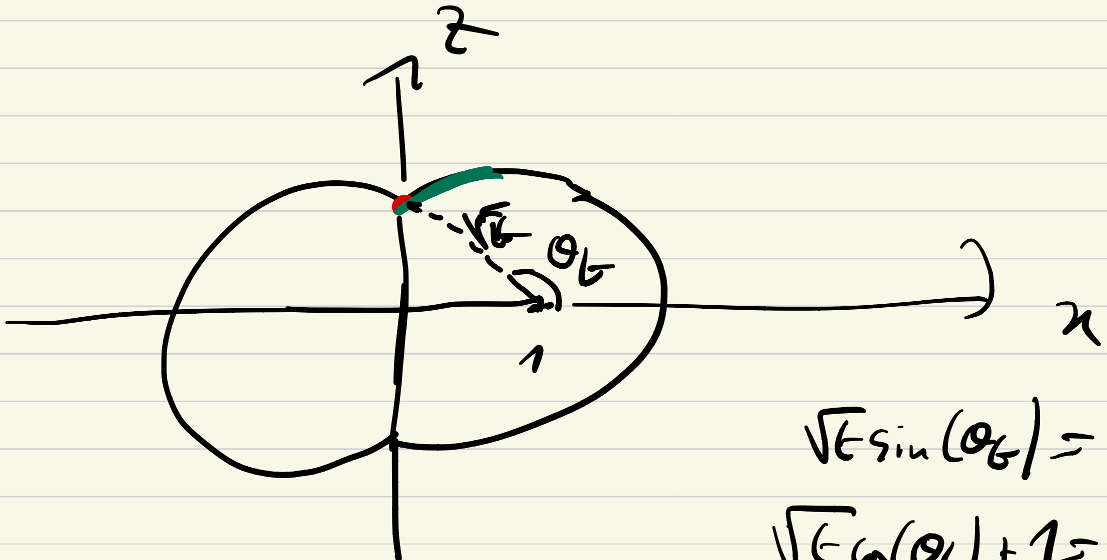
Soit maintenant $t>1$. Mq M_t n'est pas une ss-variété.

Raisonnons par l'absurde. Si M_t est une ss-variété, étudions l'espace tgt en M_t au pt rouge

$$(0,0,\sqrt{t-1})$$

(en fait, localement on a

)



$\sqrt{t}\sin(\theta_t) = \sqrt{t-1}$

$\sqrt{t}\cos(\theta_t) + 1 = 0$

Puisque en les points non rouge, on a que f est une submersion, on obtient une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 2 en ces pts.

Par connexité, si M_ε est une ss-variété $\mathcal{C}^\infty$, alors en le pt rouge, c'est une ss-variété de dimension 2.

D'où, $\exists\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ submersion et U ouvert de $\cdot$ de $\mathbb{R}^3$ tq

$U \cap M_\varepsilon = g^{-1}(0)$.

Puisque g est une submersion, $Dg(0,0,\sqrt{\varepsilon-1}) \neq (0,0,0)$.
La contre vecteur est donné par

$$\gamma_v : [0,\varepsilon[\to M_\varepsilon \qquad \text{pour } \varepsilon > 0 \text{ assez petit}$$
$$s \mapsto \left(\sqrt{\varepsilon}\cos(\theta_\varepsilon - s) + 1,\ 0,\ \sqrt{\varepsilon}\sin(\theta_\varepsilon - s)\right)$$

γ_v est dérivable, $\gamma_v(0) = (0,0,\sqrt{\varepsilon-1})$

et $\gamma_v'(0) = \left(\sqrt{\varepsilon}\sin(\theta_\varepsilon),\ 0,\ -\sqrt{\varepsilon}\cos(\theta_\varepsilon)\right)$

$= \left(\sqrt{\varepsilon-1},\ 0,\ 1\right)$

On a alors pour ε assez petit que

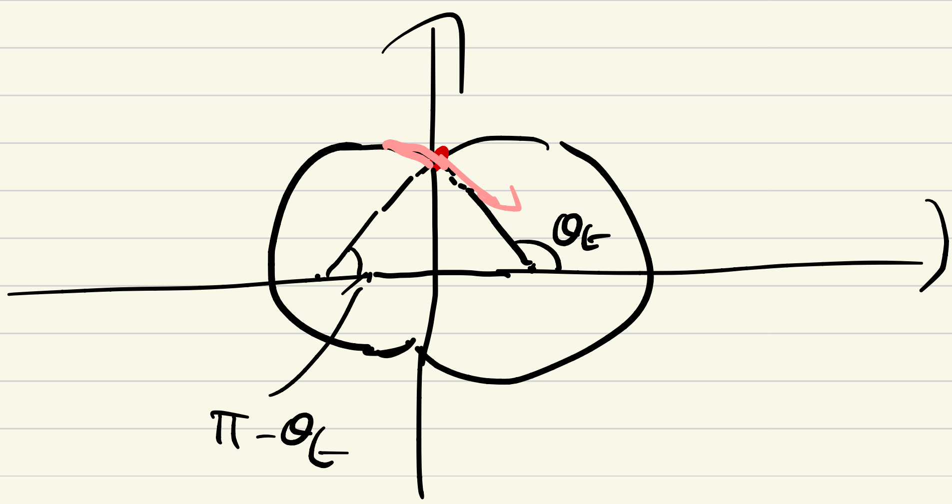
$$\gamma_v([0,\varepsilon[) \subseteq U.$$

D'où $g(\gamma_v(t)) = 0$ et en différentiant

$$\nabla g(0,0,\sqrt{t-1}) \cdot \gamma_v'(0) = 0$$

soit $\nabla g(0,0,\sqrt{t-1}) \perp (+\sqrt{t-1}, 0, +1)$.

On procède de même avec la courbe rose



$\gamma_r : \left[0, \varepsilon\right[\to M_G$

$s \mapsto \left(\sqrt{G}\cos(\pi - \theta_G + s) - 1, 0, \sqrt{G}\sin(\pi - \theta_G + s)\right)$

γ_r dérivable, $\gamma_r(0) = (0, 0, \sqrt{G-1})$

et $\gamma_r'(0) = \left(-\sqrt{G}\sin(\theta_G), 0, \sqrt{G}\cos(\pi - \theta_G)\right)$

$= (-\sqrt{G-1}, 0, 1)$

et $\nabla g(0,0,\underset{\sqrt{G-1}}{\underbrace{a}}) \perp (-\sqrt{G-1}, 0, 1)$.

En faisant de m̂ ds le plan $x = 0$,

on obtient un vecteur $(0, -\sqrt{G-1}, 1) \perp \nabla g(0,0,a)$.

Finalement, $(-\sqrt{G-1}, 0, 1)$

$(+\sqrt{G-1}, 0, +1)$

$(0, -\sqrt{G-1}, 1)$

sinon $\exists$ vecteurs indépendants (car $t>1$)
orthogonaux à $\nabla g(0,0,\underset{\sqrt{c-1}}{0}) \neq (0,0,0)$.

Absurde!

Remarque: Il est clair par définition que tout ouvert est une ss-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si M est une ss-variété $\mathcal{C}^\infty$ de

$\mathbb{R}^n$ de dimension n. Soit $x \in M$.

$\exists$ U voisinage ouvert de x de $\mathbb{R}^n$ et

$f : U \to \mathbb{R}^{n-n} = \{0\}$ $\mathcal{C}^\infty$ qui est une

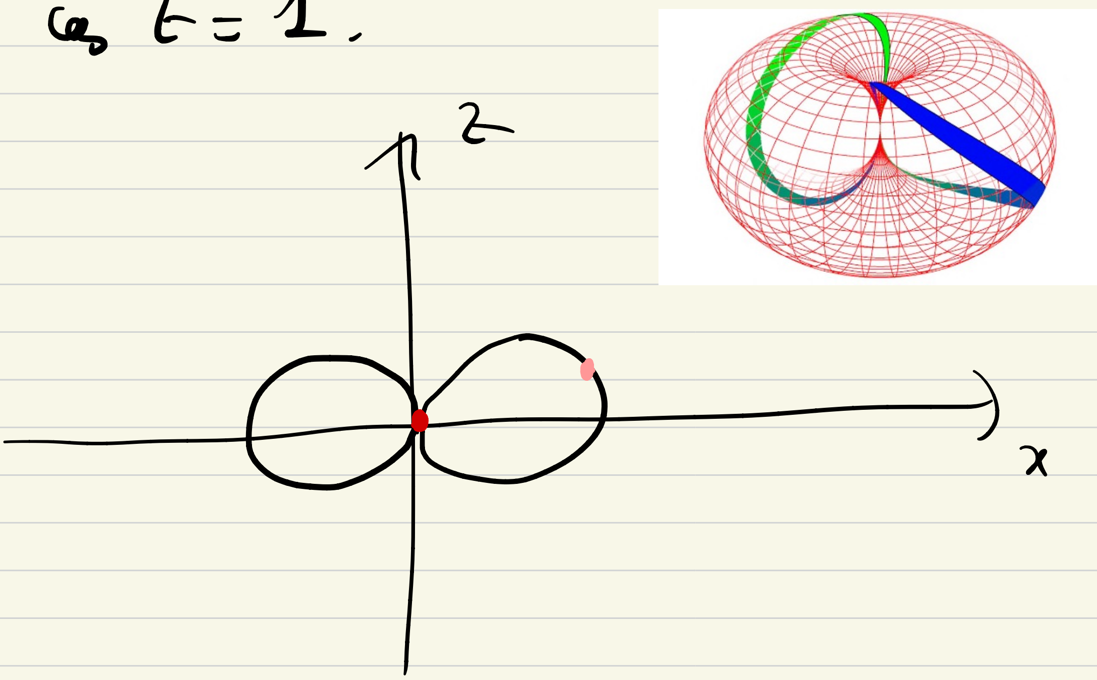
submersion en x tq $U \cap M = f^{-1}(0)$.

Mais f étant constante, $f^{-1}(0) = U$

et $U \cap M = U$ soit $U \subseteq M$ et

M est ouvert.

Reste le cas $k = 1$.



On peut alors montrer que tout vecteur tangent en $(0,0,0)$ est porté par (Oz) tandis qu'en le

point rose on a que g est une submersion donc l'espace tangent est de dim 2, contradiction et M_1 n'est pas une ss-variété C^∞. (ou) localement ça ressemble à  non lisse en enlevant.
On pouvait aussi contredire la définition par graphe.

c) Soit $0<t<1$ et $(x,y,z)\in M_t$.

Alors on sait d'après le cas que

$T_{(x,y,z)} M_t$ est le plan d'équation

$$\frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} X + \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2}-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} Y + 2zZ = 0$$

(noyau de $dg_{(x,y,z)}$).

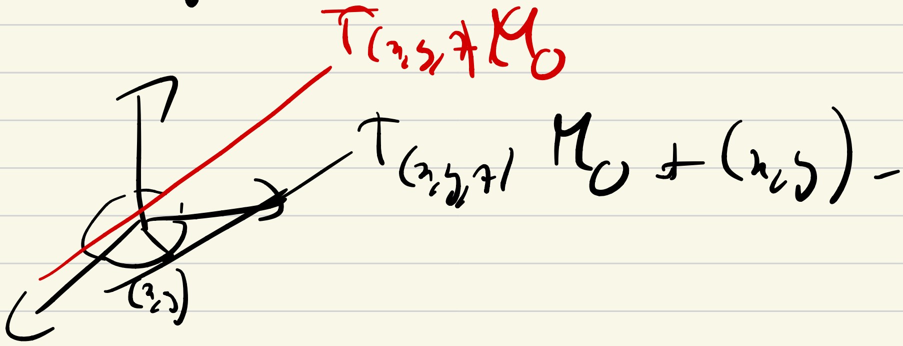
et si $t=0$ on a le noyau de

$dg_{(x,y,z)}|$

soit $z = 0$

$$Xx + Yy = 0$$

autrement dit l'orthogonal de (x,y) dans le plan $z = 0$



⚠ $T_{(x,y,z)} M_t$ est un espace vectoriel passant par $(0,0,0)$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

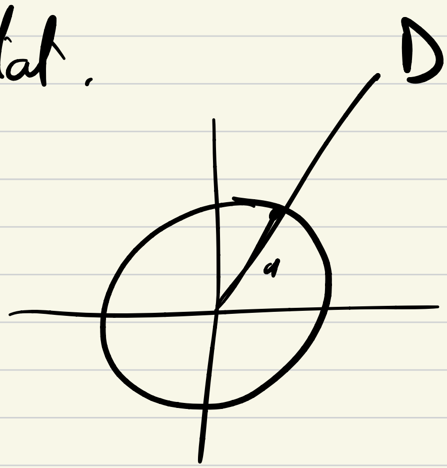
a) f_1 est $\mathcal{C}^\infty$ et $f_1(\mathbb{R}) = S^1$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$Df_1(x) = (-\sin x, \cos x) \neq (0,0)$$

donc $d(f_1)_x$ est injective et f_1 est une immersion $\mathcal{C}^\infty$.

Mq $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad b_1 :]a, a+2\pi[\to S^1 \setminus \{(\cos a, \sin a)\}$

est un homéo sur son image, ce qui impliquera le résultat.



b_1 continue bijective et c'est un homéo

soit par détermination continue de l'argument

sur $\mathbb{C}$ privé de la demi droite D (a)

$$S^1 \setminus \{(1, 0)\} \longrightarrow]0, 2\pi[$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \arccos x & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos x & y \leq 0 \end{cases}$$

que l'on adapte facilement au cas général.

b) On a clairement $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{S}^2$

et si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{S}^2$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

$-1 \leq \gamma \leq 1$ donc $\exists y \in \mathbb{R}$
(non unique)

tq $\gamma = \sin y$.

Ainsi $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2 = \cos^2 y$

Si $\cos y \neq 0$ $\left(\frac{\alpha}{\cos y}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sin y}\right)^2 = 1$

et $\exists x \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha = \cos y \cos x$

$\beta = \cos y \sin x$.

Si $\cos y = 0$, $\gamma = \pm 1$ donc $\alpha = \beta = 0$

et on a toujours le résultat.

Finalement $\varphi_2(\mathbb{R}^2) = S^2$.

c) φ_2 est C^∞ et

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg} \in \{0, 1, 2\}$.

Si $\cos y \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} -\sin x \cos y \\ \cos x \cos y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc clairement $\mathrm{rg}(\mathrm{Jac}_{(x,y)}(\varphi_2)) = 2$

(on a 2 lignes indépendantes)

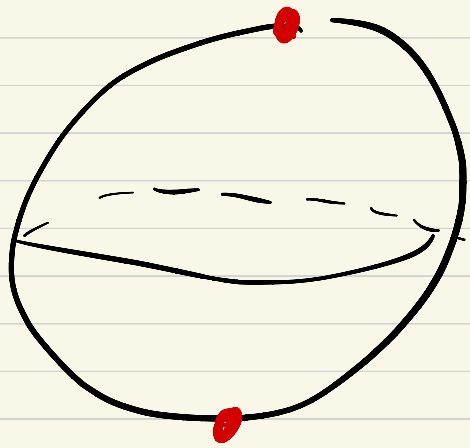
Si $\cos y = 0$

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 0 & \pm\cos x \\ 0 & \pm\sin x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de rang 1.

Ainsi $d(\varphi_2)_{(x,y)}$ est injective ssi

$$y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$



On a donc une immersion sauf en les pôles $(0, 0, \pm 1)$.

On peut alors vérifier que

$$]0,2\pi[\times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\to S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\gamma\end{pmatrix} / \alpha \geq 0 \right\}$$

$]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ $\quad S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\gamma\end{pmatrix} / \alpha < 0 \right\}$

$$(x,y) \mapsto (\cos y \cos x, \cos y \sin x, \sin y)$$

est continue d'inverse

$$(\alpha,\beta,\gamma) \mapsto \left(b_1^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right), \arcsin \gamma \right)$$

où b_1^{-1} est la réciproque construite plus haut $b_1^{-1} : S^1 \setminus \{(1,0)\} \to]0,2\pi[$

$]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$

et de façon analogue $]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$$\downarrow$$

$$S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix}0\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} / \beta \geq 0 \right\}$$

$S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix}0\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} / \beta < 0 \right\}$

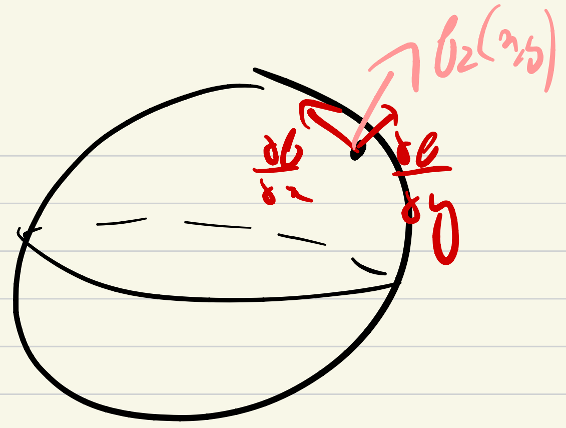
si bien qu'on a un paramétrage local en tt point différent des 2 pôles.

On peut raisonner sinon en utilisant le th. d'inversion locale.

$$b_2 : \mathbb{R}^2 \to S^2$$

et $$db_{2(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to T_{b_2(x,y)} S^2 = b_2(x,y)^{\perp}$$

et en tt point tq b_2 est une immersion, db_2 est alors un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $T_{b_2(x,y)} S^2$ et l'inversion locale garantit que b_2 est un difféo. localement au voisinage de (x,y) donc un paramétrage local!



si (x,y) est tel que

$d(b_2)_{(x,y)}$ injective

alors $\frac{\partial b_2}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial b_2}{\partial y}(x,y)$ sont

libres et forment une base de l'espace tgt.

Un moyen de détecter si $d(b_2)_{(x,y)}$ est

injective est alors de calculer

$$\det\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial b_2}{\partial y}(x,y), b_2(x,y)\right)$$

et de regarder quand ce déterminant

s'annule !

d) On a clairement $\theta_3(\mathbb{R}^3) \subseteq S^3$.

En écrivant $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 / |z|^2 + |w|^2 = 1\}$

on écrit
$$|z| = \cos x$$
$$|w| = \sin x$$

puis
$$z = \cos x \, e^{iy} = \cos x \cos y + i \cos x \sin y$$
$$w = \sin x \, e^{iz} = \sin x \cos z + i \sin x \sin z$$

ce qui permet de conclure !

e) On calcule,

$$\operatorname{Jac}(\theta_3)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -\sin x \cos z & 0 & -\cos x \sin z \\ \cos x & \cos z & 0 & -\sin x \sin z \\ 0 & -\sin y \sin z & \cos y \cos z \\ 0 & \cos y \sin z & \sin y \cos z \end{pmatrix}$$

Si $\cos z \sin z \neq 0$, alors

$$\det\left(\operatorname{Jac}(\theta_3)_{(x,y,z)} - L_3\right) = -\sin y \cos z \sin z$$

$$\det\left(\mathrm{Jac}(\varphi_3)|_{(x,y,z)} - L_6\right) = +\cos y \cos z \sin z$$

et l'un des 2 est non nul donc

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{Jac}(\varphi_3)|_{(x,y,z)}\right) = 3.$$

Si $\cos z = 0$ ou ($\sin z = 0$ de même)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm\cos x \\ 0 & 0 & \pm\sin x \\ 0 & \pm\sin y & 0 \\ 0 & \pm\cos y & 0 \end{pmatrix}$$

et ça est de rg 2

Ainsi on obtient une immersion ssi

$$\cos z \sin z \neq 0$$

En plus, on obtient un paramétrage local par inversion locale.

On a aussi $\det\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}, \varphi_3\right) = -\cos z \sin z$

On voit que même pour les sphères, on a besoin de plusieurs "cartes".

Exercice 4.

a) On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto y^2 - x^3 - ax - b$

On sait que f est C^∞ et $H(a,b) = f^{-1}(\{0\})$.

On a pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{Jac}\, f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -3x^2 - a & 2y \end{pmatrix}$$

qui est nulle ssi $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = -\frac{a}{3} \end{cases}$

Soit alors $(x,y) \in H(a,b)$, soit

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Si $y=0$, $x^2 = -\frac{a}{3}$ alors

$$0 = x \times -\frac{a}{3} + ax + b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3b}{2a} \quad \text{si } a \neq 0$$

On a donc $x^2 = \frac{9b^2}{4a^2} = -\frac{a}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^3 + 27b^2 = 0$$

ce qui est exclu !

Ainsi $a=0$ mais alors $(0,0) \in H(a,b)$

et $b=0$ donc $4a^3+27b^2=0$ ce qui est exclu !

Dans les deux cas, si $\delta(a,b) \neq 0$,

alors $d\ell_{(a,b)}$ est une surjection et

ℓ est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus

de $H(a,b)$ qui est une ss-variété $\mathcal{C}^\infty$

de dimension $2-1=1$.

b) On peut démontrer que si

$P(X) = X^3 + aX + b$, le discriminant de P

$$4a^3 + 27b^2 = \underbrace{\mathrm{Res}(P, P')}_{\text{résultant}}$$

$$= \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les 3 racines complexes (non nécessairement distinctes) de P.

(N'hésitez pas à me demander si vous souhaitez une référence !)

Ainsi $\Delta(a,b) = 0 \iff$ P a une racine de multiplicité au moins 2.

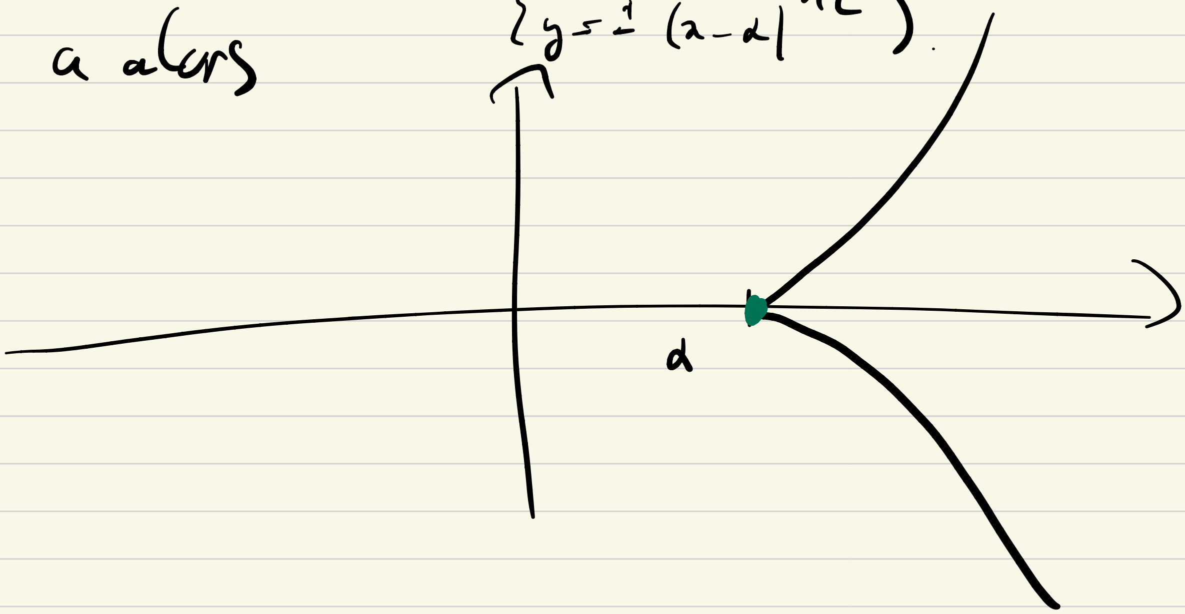
On a alors 2 cas. (on ne peut avoir une racine double non réelle car P a coeff. réels.)

<u>1er cas :</u> P a une racine triple. $\alpha \in \mathbb{R}$

$$H(a,b) = \{ y^2 = (x-\alpha)^3 \;/\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\{ y = \pm (x-\alpha)^{3/2} \}.$$

On a alors



et on n'obtient pas une ss-variété $\mathcal{C}^\infty$.

car • pose un problème de différentiabilité !

On a en revanche une variété topologique!

2ème cas: On a 1 racine réelle double.

$$y^2 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2 \qquad \text{si } \alpha_2 > \alpha_1$$

"

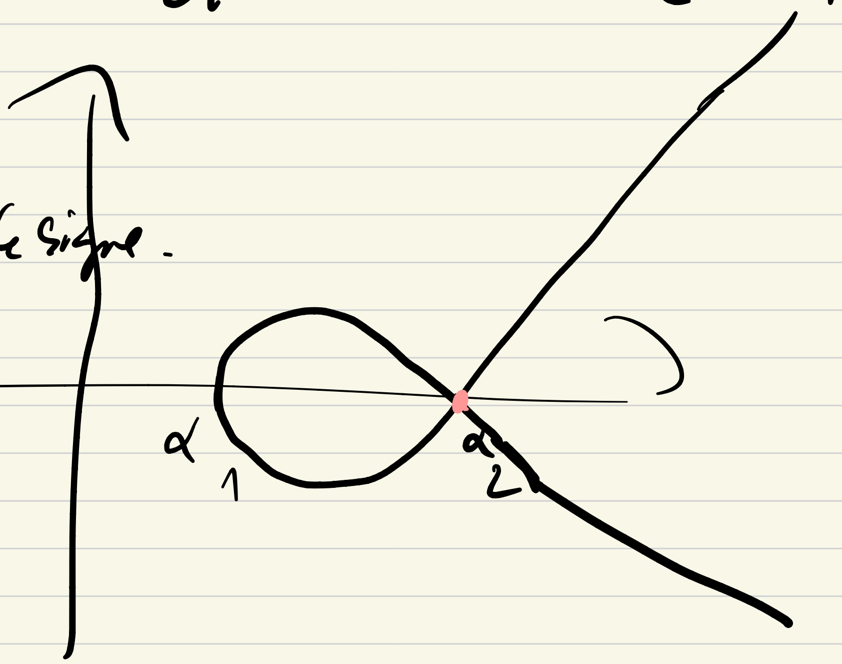
$y = \sqrt{x-\alpha_1}\,(x-\alpha_2)$

chge de signe.

$\cup$

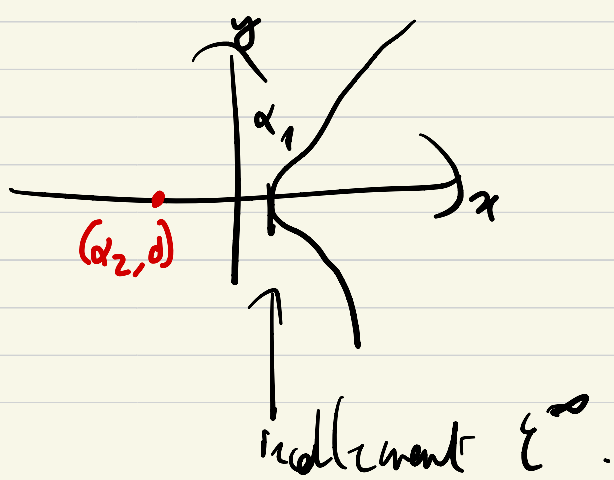
$y = -\sqrt{x-\alpha_1}\,(x-\alpha_2)$

pour $x \geq \alpha_1$



qui n'est pas une sous-variété C^∞ topologique.
Tout voisinage autour de $\cdot$ assez petit privé de $\cdot$ a 4 composantes connexes contrairement à $\mathbb{R}\setminus\{pt\}$ qui en a 2!

Si $\alpha_2 < \alpha_1$



$$y = \sqrt{x-\alpha_1}\,(x-\alpha_2)$$ (graphe d'1 fct $\mathcal{C}^\infty$).

$$\cup \qquad \text{pour } x \geq \alpha_1$$

$$y = -\sqrt{x-\alpha_1}\,(x-\alpha_2)$$

où $x-\alpha_2$ ne change pas de signe.

On obtient ici une ss-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dim 1 pour $H(a,b) \cap \{x > \alpha_2\}$ et un pt (donc une ss-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dim 0) pour $H(a,b) \cap \{x < \alpha_1\}$.

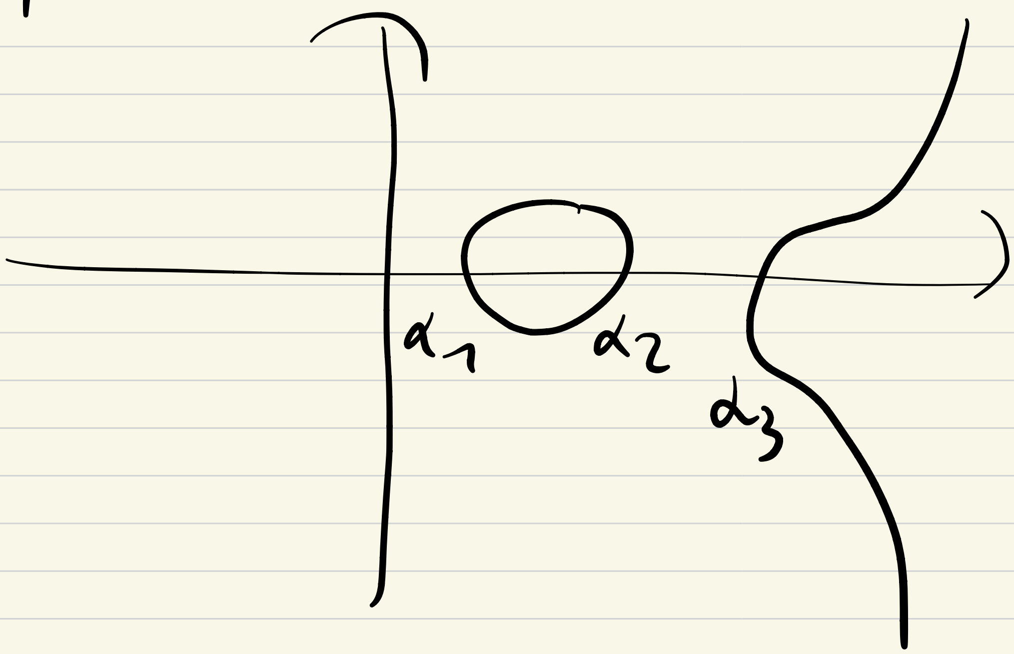
On n'a donc pas non plus une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$ dans ce cas !

Je vous renvoie au corrigé de l'exercice 6.61 du polycopié pour plus de détails !

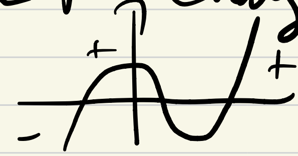
c) Si $\mathrm{disc}(P) = -\frac{1}{16}\Delta(a,b) > 0$ alors

P a 3 racines réelles distinctes et

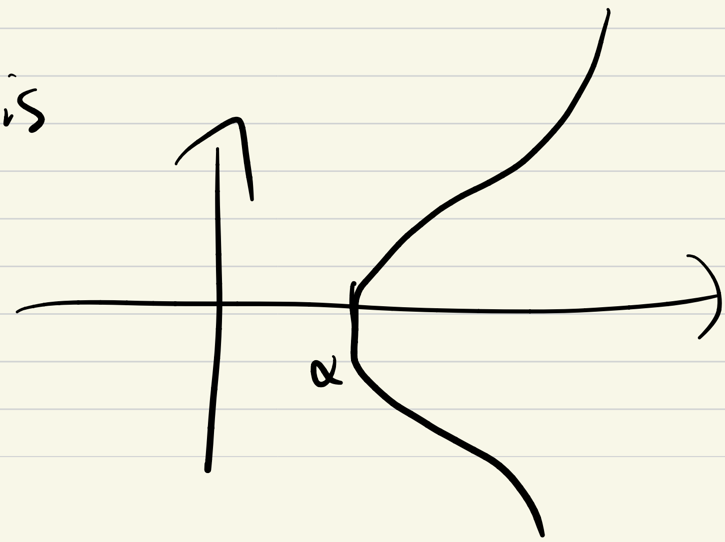
$H(a,b)$



et non connexe ! (P change de signe 3 fois)



Si $\mathrm{disc}(P) = -\frac{1}{16}\Delta(a,b) < 0$ alors P a 1 racine réelle α et 2 complexes conjugués et P change de signe une fois



et $H(a,b)$ convexe.

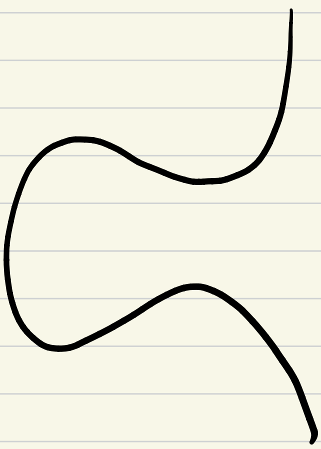
si $\Delta(a,b) = 0$, on est toujours convexe!

d) $H(-1,b) = ?$

$$\Delta(-1,b) = -16(-4+27b^2)$$
$$= 0$$

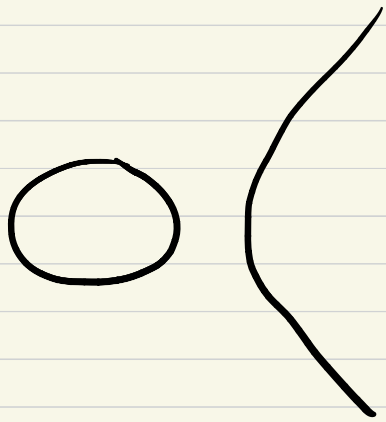
$\Leftrightarrow$ $b = \pm\sqrt{\frac{27}{4}}$ auquel cas

$b = \sqrt{\frac{27}{4}}$ $\qquad$ $b = -\sqrt{\frac{27}{4}}$



Sinon si $|b| > \sqrt{\frac{27}{4}}$

et si $-\sqrt{\frac{2a}{4}} < b < \sqrt{\frac{2a}{4}}$



Remarque : $H(a,b)$ est une courbe elliptique qui sont de très jolis objets et je vous conseille sur le sujet l'excellent livre de Marc Hindry !

Exercice 5

a) Il s'agit de l'ens. des app. linéaires laissant une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de signature $(p, n-p)$ invariante.

On pose

$$\varphi : \underset{\simeq \mathbb{R}^{n^2}}{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \longrightarrow \underset{\simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$$

$$A \longmapsto {}^tA I_{p,n-p} A - I_{p,n-p}$$

qui est $\mathcal{C}^\infty$ et $O(p, n-p) = \varphi^{-1}(\{0\})$.

$$\varphi(A+H) = \varphi(A) + {}^tH I_{p,n-p} A + {}^tA I_{p,n-p} H + o(\|H\|)$$

si bien que

$$d\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$H \mapsto {}^tH I_{p,n-p} A + {}^tA I_{p,n-p} H.$$

Montrons que si $A \in O(p, n-p)$ soit

$$ {}^tA I_{p,n-p} A = I_{p,n-p} , $$

df_A est surjective.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

On vérifie que

$$ df_A\left(\frac{A I_{p,n-p} S}{2}\right) = \frac{S I_{p,n-p} {}^tA I_{p,n-p} A + {}^tA I_{p,n-p} A I_{p,n-p} S}{2} $$

$$ = \frac{S I_{p,n-p}^2 + I_{p,n-p}^2 S}{2} $$

$$ = S $$

et f est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus de $O(p, n-p)$ donc on a une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

$O(p, n-p)$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f.

Si $p = 0$ ou $n = p$,

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = n$$

donc $|a_{ij}| \leq \sqrt{n}$ sont bornés et $O(0,n)$ et $O(n,0)$ sont compacts !

Si $p(n-p) \neq 0$, $O(p, n-p)$ n'est pas bornée car

$$M_k \begin{pmatrix} \sqrt{k+1} & \sqrt{k} \\ \sqrt{k} & \sqrt{k+1} \end{pmatrix} \in O(1,1)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ permet de construire une famille non bornée !

$$\begin{pmatrix} -I & & \\ & M_n & \\ & & I \end{pmatrix}.$$

On peut en fait mq

$$O(p, n-p) \underset{\text{homéo}}{\simeq} O(p) \times O(n-p) \times \mathbb{R}^{p(n-p)}$$

On a alors

$$T_{I_n} O(p, n-p) = \ker d\, b_{I_n}$$

$$= \{ H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \, / \, {}^tH I_{p,n-p} + I_{p,n-p} H = 0 \}$$

b) On procède de même avec

$$f : \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto {}^tA J_n A - J_n$$

où

$$d\theta_A(H) \underset{\text{si } A \in Sp_n(\mathbb{R})}{=} {}^tH J_n A + {}^tA J_n H$$

est surjective $\forall$ car $\forall M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$

$$d\theta_A\left(\frac{-AJ_nM}{2}\right)$$

$$= \frac{-M J_n {}^tA J_n A - {}^tA J_n A J_n M}{2}$$

$$= \frac{-M J_n^2 - J_n^2 M}{2} = M$$

car $J_n^2 = -I_n$.

$Sp_n(\mathbb{R})$ est alors fermé non borné car contenant $GL_n(\mathbb{R})$ via

$$GL_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow Sp_n(\mathbb{R})$$

$$M \longmapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & {}^tM^{-1} \end{pmatrix}$$

et par exemple $\begin{pmatrix} k & k \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$ est une

famille non bornée par $k \in \mathbb{N}^*$.

Enfin

$$T_{I_n} Sp_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d\theta_{I_n}$$

$$= \{ H \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \,/\, {}^tH J_n + J_n H = 0 \}$$

et $\dim Sp_n(\mathbb{R}) = (2n)^2 - \frac{2n(2n-1)}{2}$

$$= 4n^2 - n(2n-1)$$

$$= n(2n+1)$$

On appelle ce groupe le groupe symplectique.

c) Notons que $A \in V_{n,k}(\mathbb{R})$

$\iff$ les k colonnes de A forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$

Ainsi la condition $k \leq n$ assure que $V_{n,k}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Si $k \leq n$, on pose

$$\theta : \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \to S_k(\mathbb{R})$$
$$A \mapsto {}^tAA - I_k$$

On a $d\theta_A(H) = {}^tHA + {}^tAH$

et si $A \in V_{n,k}(\mathbb{R})$, $S \in S_k(\mathbb{R})$

$$d\varphi_A\Big(\overset{n,k \times k,k}{\frac{AS}{2}}\Big) = \frac{S\,{}^tAA + {}^tAA\,S}{2}$$

$$= S.$$

et $V_{n,k}(\mathbb{R})$ est une variété $\mathcal{C}^\infty$ de

dimension $nk - \frac{k(k+1)}{2} = k\left(n - \frac{k+1}{2}\right) \geq 0$

$V_{n,k}(\mathbb{R})$ est fermé et borné donc compact.

$(\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum a_{ij}^2 = k)$

$I_n \notin V_{n,k}(\mathbb{R})$ donc $T_{I_n} V_{n,k}(\mathbb{R})$

n'a pas de sens !

d) On a

$$V_{n,1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle/\, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \right\}$$

$\simeq S^{n-1}$.

et $V_{n,n}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})$.

e) Soit $x \in V_{n,\ell}(\mathbb{R})$. Par définition,

$$\pi_{n,\ell}^{-1}(x) = \left\{ \left(x \mid c_1 \mid \cdots \mid c_{n-\ell} \right) \;\middle/\; c_1, \dots, c_{n-\ell} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_\ell)^{\perp} \right.$$

si $x = (x_1 | \cdots | x_\ell)$

ℓ colonnes orthonormées

Fixons une base ON $b_1, \dots, b_{n-\ell}$ de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_\ell)^{\perp}$, on pose alors

$$\pi_{k,\ell}^{-1}(x) \longrightarrow V_{n-\ell,n-\ell}(\mathbb{R})$$

$$(x|c_1|\cdots|c_{n-\ell}) \longmapsto \Big((c_j|b_i) \Big)$$

qui est bien défini car

$$\begin{pmatrix} (c_i|b_1) \\ \vdots \\ (c_i|b_{n-\ell}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (c_j|b_1) \\ \vdots \\ (c_j|b_{n-\ell}) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{s=1}^{n-\ell} (c_i|b_s)(c_j|b_s)$$

$$= (c_i|c_j) = \delta_{ij}.$$

avec $c_i = \sum_{s=1}^{n-\ell} (c_i|b_s)\, b_s$

$$c_j = \sum_{s=1}^{n-\ell} (c_j|b_s)\, b_s$$

continue et d'inverse

$$\left(C_1 | \cdots | C_{n-\ell}\right) \mapsto \left(x \,|\, C'_1 | \cdots | C'_{n-\ell}\right)$$

où

si $C_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{n-\ell\, i} \end{pmatrix}$, $C'_i = x_{1i} b_1 + \cdots + x_{n-\ell, i} b_{n-\ell}$

qui est bien définie et continue.

Ainsi $\pi_{n,\ell}^{-1}(x) \underset{\text{homéo.}}{\simeq} V_{n-\ell, n-\ell}(\mathbb{R})$.

En fait, on verra qu'il s'agit d'un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme et $\pi_{n,\ell}^{-1}(x)$ est une variété $\mathcal{C}^\infty$ mais on y reviendra à la rentrée !