Analyse de Fourier et géométrie : Exercices sur le cours 3

►►**Mode d'emploi** – *Merci de rendre vos réponses sous forme d'un **unique fichier pdf** via le formulaire que vous trouverez en cliquant ici. Pour convertir des formats png, jpeg ou autres au format pdf ou fusionner différents pdfs en un seul, je vous renvoie (par exemple) au site suivant. Un **corrigé** sera ensuite disponible ici, sur la page web du cours, à la fin du cours 4.*◄◄

Exercice 1 — Nombres complexes et trigonométrie.

1. Calculer $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ et $e^{2i\pi n}$ pour n un entier.
   On pourra distinguer selon que $n = 2k$ est pair ou selon que n est impair.
2. Donner le conjugué de $z = 3 - i$ puis de $e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Mettre sous forme algébrique $\frac{1+2i}{2-i}$.

Exercice 2 — Continue *vs* continue par morceaux. Dessiner le graphe d'une fonction continue et le graphe d'une fonction continue par morceaux. Expliquer la différence.

Exercice 3 — Fonctions périodiques.

1. Dire si les fonctions suivantes sont périodiques ou non et si oui préciser la période[1] :

$$t \mapsto e^t, \quad t \mapsto \cos(t) + \sin(2t), \quad t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right), \quad t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) e^{-\frac{4i\pi t}{3}}, \quad t \mapsto \cos(\pi t) + \cos(t).$$

2. Tracer le graphe de la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$. La fonction est-elle continue ?
3. A-t-on pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et f une fonction continue par morceaux 2π-périodique l'égalité

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{10-\pi}^{10+\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t?$$

Exercice 4 — Coefficients de Fourier.
Soit f une fonction continue par morceaux 2-périodique.

1. Que signifie calculer les coefficients de Fourier réels de f ?
2. A-t-on pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$a_n(f) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) \cos(n\pi t) \, \mathrm{d}t?$$

3. Que dire des coefficients de Fourier (réels et complexes) si la fonction est impaire ?
4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{i}{n}$. Que pouvez-vous en déduire sur la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier complexes ?

Exercice 5 — Pour préparer le cours suivant.
Finir le calcul de coefficients de Fourier entamé à la fin du dernier cours. Autrement dit, calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction 2π-périodique définie pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ par $f(t) = |t|$.

1. Le dernier exemple est difficile !