TD 03 : Revêtements

► ***Cette feuille de TD 3 nous occupera deux semaines.***

Première semaine

Exercices fondamentaux

1. **Exemples de revêtements**

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit $p : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ définie par $p(x) = nx \pmod 1$, qui est un revêtement à n feuillets de $\mathbf{T}^1$ par $\mathbf{T}^1$.

(a) Donner une condition sur le degré d'une application continue $f : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ pour qu'elle admette un relèvement par le revêtement p.

(b) Pour $k \in \mathbf{N}$, soit $f_k : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ définie par $f_k(x) = kx \pmod 1$. Trouver tous les k tels que f_k se relève par p.

2. **Bouteille de Klein**

Soit $\sim_K$ la relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^2$ engendrée par $(x, y) \sim_K (x + 1, -y)$ et $(x, y) \sim_K (x, y + 1)$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Soit K l'espace quotient, et soit $\pi_K : \mathbf{R}^2 \to K$ la projection canonique.

Soit $\sim_T$ la relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^2$ engendrée par $(x, y) \sim_T (x + 2, y)$ et $(x, y) \sim_T (x, y + 1)$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Soit T l'espace quotient, et soit $\pi_T : \mathbf{R}^2 \to T$ la projection canonique.

(a) Montrer que π_K est un revêtement. En déduire le groupe fondamental de K.
(b) Montrer que T est homéomorphe au tore $\mathbf{T}^2$.
(c) Montrer qu'il existe un revêtement double $p : \mathbf{T}^2 \to K$ tel que $p \circ \pi_T = \pi_K$. Expliciter l'image de $\pi_1(\mathbf{T}^2)$ par p_*.

3. **L'anneau hawaïen**

Considérons le cercle C_n de centre $(\frac{1}{n+1}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{n+1}$ dans $\mathbf{R}^2$. Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n$, muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^2$, appellé l'anneau hawaïen.

(a) Montrer que B n'admet pas de revêtement simplement connexe.
(b) On note $x \in \mathbf{R}^2$ l'intersection de tous les cercles C_n. Pour tout cercle C_n de B, on note X_n l'espace topologique obtenu par recollement en son point base d'une copie de $\overline{B - C_n}$ sur chaque point entier de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe un revêtement $p_n : X_n \to B$ tel que la restriction de p_n à chaque copie de $\overline{B - C_n}$ soit un homéomorphisme sur son image, et la restriction de p_n à $\mathbf{R}$ soit un revêtement de C_n.
(c) Soient X, Y, Z des espaces topologiques et $q : X \to Y$ et $p : Y \to Z$ des revêtements, tels que p soit fini. Montrer que $p \circ q : X \to Z$ est un revêtement.
(d) Soit $n \in \mathbf{N}$. Construire un revêtement double $q : \widetilde{X_n} \to X_n$ tel que $p_n \circ q : \widetilde{X_n} \to B$ ne soit pas un revêtement.

Exercice complémentaire

1. **Les groupes $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SO}(3)$**

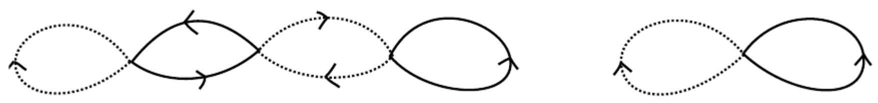
(a) Montrer que $\mathrm{SU}(2) = \{x \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \,:\, {}^t\bar{x}x = \mathrm{Id}\}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,,\, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.
(b) Soit $V = \{x \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C}) \,:\, {}^t\bar{x} = -x, \quad \mathrm{Tr}(x) = 0\}$. Montrer que $\langle v, v' \rangle = \mathrm{Tr}({}^t\bar{v}v')/2$ est un produit scalaire sur V invariant par conjugaison de $\mathrm{SU}(2)$.
(c) En déduire l'existence d'un revêtement $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$. Quel est le groupe fondamental de $\mathrm{SO}(3)$?

Deuxième semaine

Exercices fondamentaux

1. **Quelques revêtements du bouquet de deux cercles**

On considère les graphes orientés X et Y ci-dessous, respectivement à gauche et à droite.



(a) Construire un revêtement $p : X \to Y$ en envoyant les arêtes pleines (resp. hachurées) de X sur les arêtes pleines (resp. hachurées) de Y par des homéomorphismes respectant l'orientation.
(b) Ce revêtement est-il galoisien ?
(c) Construire un revêtement $\overline{X}$ de X de degré 2, tel que $\overline{X}$ soit un revêtement galoisien de Y.
(d) Construire un revêtement $\overline{Y}$ de Y de degré 2, tel que $\overline{X}$ soit un revêtement galoisien de $\overline{Y}$ de degré 3.
(e) Calculer les groupes fondamentaux des quatre espaces topologiques en présence.
(f) Décrire les morphismes et les sous-groupes en présence (générateurs et relations, indice, normalité).
(g) En s'inspirant de ces revêtements, construire un sous-groupe de F_2 qui soit distingué et isomorphe à F_ω (le sous-groupe libre à une infinité dénombrable de générateurs). On en donnera les générateurs.

2. **Classification de revêtements**

Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de $\mathbf{S}^1$, de $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, du ruban de Möbius M, et de $\mathbf{T}^2$.

Exercices complémentaires

1. **Espace de configurations**

Soient (X, d) un espace métrique connexe et $n \geqslant 1$ un entier. On définit :

$$\begin{array}{lcl} C_n & := & \{z = (z_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in X^n : z_j \neq z_k \ \forall j \neq k\}, \\ P_n & := & \{S \subset X : |S| = n\}. \end{array}$$

On équipe C_n et P_n des distances suivantes (d_{P_n} est la distance de Hausdorff) :

$$\begin{array}{lcl} d_{C_n}(S,T) & := & \max_{1\leqslant i\leqslant n} d(S_i, T_i), \\ d_{P_n}(S,T) & := & \max\left\{\max_{z\in S}\min_{z'\in T} d(z,z'), \max_{z'\in T}\min_{z\in S} d(z',z)\right\}. \end{array}$$

Soit $p_n : C_n \to P_n$ l'application qui envoie $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ sur $\{z_k : 1 \leq k \leq n\}$. On supposera de plus que C_n est connexe.

(a) Montrer que, pour tout $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \in P_n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $p : B_{C_n}((x_1, \dots, x_n), \varepsilon) \to B_{P_n}(\mathcal{X}, \varepsilon)$ soit bien définie, et soit une isométrie surjective.
(b) En déduire que p_n est un revêtement. Quel est son degré ? Quel est son groupe d'automorphismes ? Est-il galoisien ?
(c) Décrire C_2, P_2 et $p_2 : C_2 \to P_2$ quand X est le cercle.

2. **Revêtement universel d'un groupe topologique**

Soit G un groupe topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, de revêtement universel $(\widetilde{G}, p)$. Soient x, y dans $\widetilde{G}$, et $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Soient γ_x, γ_y des chemins de $\tilde{e}$ à x et y respectivement. Soit γ_{xy} le relèvement de $(p \circ \gamma_x) \cdot (p \circ \gamma_y)$ tel que $\gamma_{xy}(0) = \tilde{e}$. On pose $x \cdot y := \gamma_{xy}(1)$.

(a) Vérifier que $x \cdot y$ ne dépend pas des chemins γ_x et γ_y choisis.
(b) Montrer que, muni de cette loi de multiplication, $\widetilde{G}$ est un groupe, et p est un morphisme de groupes.
(c) Montrer que le noyau de p est un sous-groupe central de $\tilde{G}$.
(d) Montrer que le noyau de p s'identifie au groupe fondamental de G.
(e) Pour $n \in \{2, 3\}$, calculer les groupes fondamentaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$.
Remarque : pour $n = 2$ les revêtement universels de ces groupes ne sont pas linéaires c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas être vus comme des groupes matriciels.