TD 08 — Géométrie

Exercice 1 — Théorème de Lancret

⚠ Il manque l'hypothèse que T ne s'annule pas!

Soit $c : I \to \mathbb{R}^3$ régulière $\hookrightarrow c'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

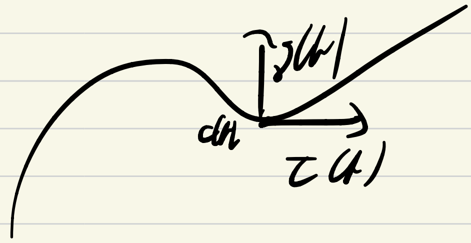
courbe gauche.

On suppose c paramétrée par longueur d'arc, i.e $\|c'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$

birégulière $(c'(t), c''(t))$ libre $\forall t \in I$.

$\tau(t) = c'(t)$

$\nu(t) = \dfrac{c''(t)}{\|c''(t)\|} \perp \tau$ → dériver $\langle \tau(t), \tau(t) \rangle = 1$



$\beta(t) = \tau(t) \wedge \nu(t)$

$\odot\ \beta(t)$

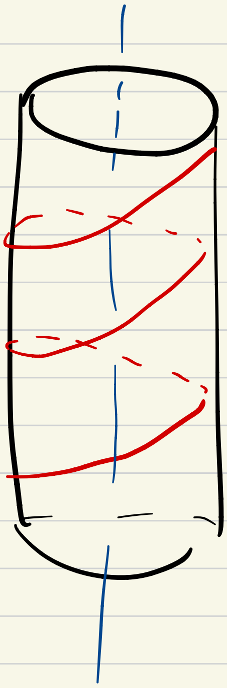
courbure $= \|c''(t)\|$

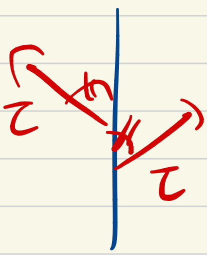
On a $\begin{cases} \tau'(t) = K(t)\,\nu(t) \\ \nu'(t) = -K(t)\tau(t) - T(t)\beta(t) \end{cases}$

$$\beta'(t) = \tau(t)\,\nu(t)$$

↳ torsion.

Repère de Frenet.





τ fait un angle constant avec une droite (que l'on suppose dirigée par v unitaire)

$\iff$ $\langle \tau, v \rangle = c$ constant.

(car τ unitaire)

En dérivant, on a

$$\langle \tau'(t), v \rangle = 0$$

$$\underbrace{k(t)}_{\substack{= \\ \|c''(t)\| \\ \neq \\ 0}} \langle \gamma(t), v \rangle = 0$$

car c birégulière

donc $$\langle \gamma(t), v \rangle = 0 .$$

En fait en intégrant

$$\langle \gamma, v \rangle = 0 \iff \langle \tau, v \rangle = cst$$

Mais on a aussi

$$\langle \tau, v \rangle = cst \iff \langle \beta, v \rangle = cst$$

$\Rightarrow$)

En effet, en dérivant $t \mapsto \langle \beta(t), v \rangle$,

on obtient

$$\langle \beta'(t), v \rangle$$

$$\shortparallel$$

$$T(t) \langle \gamma(t), v \rangle = 0.$$

si $\langle \tau, v \rangle = cst$ car $\langle \gamma(t), v \rangle = 0.$

$\Leftarrow$ Si $\langle \beta, v \rangle = cst$ et qu'on a supposé

que T ne s'annule pas

alors en dérivant

$$T(t) \langle \gamma(t), v \rangle = 0$$

et $\langle \gamma(t), v \rangle = 0$ donc $\langle K(t) \gamma(t), v \rangle = 0$

et $\langle T(t), v \rangle = cst.$

On a donc (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow \dfrac{T}{k} = cst$.

car si on a (1), $\langle \tau(t), v \rangle = c_1$, $\langle \beta(t), v \rangle = c_2$, $\langle \gamma(t), v\rangle = 0$

donc $\langle \gamma'(t), v \rangle = 0$ Et $c_2 \neq 0$ sinon $c_1 = c_2 = 0$

$-k(t)c_1 - T(t)c_2$ par Frénet. et $\langle \tau, v \rangle = \langle \gamma, v \rangle = \langle \beta, v \rangle = 0$

Réciproquement, si $\dfrac{T}{k} = cst$ alors Absurde!

$$\tau' = c\beta'$$

et $\tau = c\beta + v$ où $v \in \mathbb{R}^3$

et $1 = \langle \tau, \tau \rangle = c\underbrace{\langle \beta, \tau \rangle}_{0} + \langle v, \tau \rangle$

et $\langle v, \tau \rangle = 1$ et on a bien une hélice.

Le cas T s'annulant fournit des portions de courbes contenues dans un plan.

$\boxed{\text{Exercice } \mathbf{2}}$ On vérifie que f est une immersion comme page 236 du pdf.

Par ailleurs, $f(\sqrt{3},0) = (0,0,3) = f(-\sqrt{3},0)$

donc f n'est pas une bijection sur son image !

et $f(\mathbb{R}^2)$ n'est pas un plongement. On a des auto intersections ! cf la figure en fin d'exo !

Mais f est localement un plongement !

Ainsi localement, $f(\mathbb{R}^2)$ est une surface dont f est un paramétrage local.

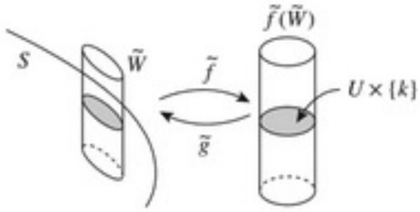
Theorem 1 *Let $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^n$ be a smooth map defined on an open subset U of $\mathbb{R}^2$, and assume that $q \in U$ is such that the vectors $\boldsymbol{x}_u(q)$, $\boldsymbol{x}_v(q)$ are linearly independent (or, equivalently for a surface in $\mathbb{R}^3$, $(\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v)(q) \neq 0$). Then U contains an open neighbourhood U_0 of q such that $\boldsymbol{x}(U_0)$ is a surface S in $\mathbb{R}^n$ and the restriction of $\boldsymbol{x}$ to U_0 is a parametrisation of the whole of S.*

Proof of Theorem 1 of §2.4 As already mentioned, the basic idea is to show that (maybe after re-labelling the axes of $\mathbb{R}^3$) each sufficiently small piece of S is the graph of a function. If $p \in S$ then the determinant of the Jacobian matrix at p of the map $\tilde{f}$ defined by $\tilde{f}(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ is equal to $(\partial f/\partial z)(p)$, which, by re-labelling the axes if necessary, we may assume is non-zero. The Inverse Function Theorem applied to $\tilde{f}$ now shows that W contains an open neighbourhood $\tilde{W}$ of p in $\mathbb{R}^3$ such that $\tilde{f}(\tilde{W})$ is open in $\mathbb{R}^3$ and $\tilde{f} : \tilde{W} \to \tilde{f}(\tilde{W})$ has a smooth inverse $\tilde{g} : \tilde{f}(\tilde{W}) \to \tilde{W}$, which in this case is necessarily of the form $\tilde{g}(u, v, w) = (u, v, g(u, v, w))$ for some smooth function $g(u, v, w)$. By taking $\tilde{W}$ smaller if necessary, we may assume that $\tilde{f}(\tilde{W})$ is of the form $U \times (k - \epsilon, k + \epsilon)$ for some open subset U of $\mathbb{R}^2$ and some $\epsilon > 0$ (Figure 2.14). We now show that $S \cap \tilde{W}$ is the graph of the function $(u, v) \mapsto g(u, v, k)$.

To do this, we define $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ by

$$\boldsymbol{x}(u, v) = \tilde{g}(u, v, k) = (u, v, g(u, v, k)) . \tag{2.7}$$

Then $\tilde{f}\boldsymbol{x}(u, v) = \tilde{f}\tilde{g}(u, v, k) = (u, v, k)$, so that $f(\boldsymbol{x}(u, v)) = k$ from which it is clear that $\boldsymbol{x}$ satisfies (S1), and it follows immediately from (2.7) that (S2) is satisfied with $\boldsymbol{F} : \tilde{W} \to \mathbb{R}^2$ defined by $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y)$. □



D'après le cours, dans le paramétrage φ, la matrice de la première forme fondamentale en $\varphi(u,v)$ dans la base $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ de $T_{\varphi(u,v)} S$ est donnée par

$$I_{f(u,v)} = \begin{pmatrix} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \right\|^2 & \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\rangle & \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= (1+u^2+v^2)^2 \, I_2$$

après calculs (cf le polycopié p234 pour les calculs)

On sait alors que (cf cours) la matrice de la seconde Forme Fondamentale est donnée par

$$II_{f(u,v)} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v), \vec{n} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v), \vec{n} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v), \vec{n} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v), \vec{n} \right\rangle \end{pmatrix}$$

où $\vec{n} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\|}$ est le vecteur normal

$$= \begin{pmatrix} -\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \vec{n}}{\partial u}(u,v) \rangle, & -\langle \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \vec{n}}{\partial v}(u,v)}_{①} \rangle \\ -\langle \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \vec{n}}{\partial u}(u,v)}_{②} \rangle, & -\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \vec{n}}{\partial v}(u,v) \rangle \end{pmatrix}$$

où ① = ② et

où l'égalité vient de la dérivation de

$$\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \vec{n} \rangle = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v), \vec{n} \rangle = 0.$$

Ici on travaille donc avec la seconde forme fondamentale scalaire.

$I_{\varphi(u,v)}$ défini un pdt scalaire sur $T_{\varphi(u,v)}S$

et par Riesz-Fréchet, $\exists\, W_p : T_{\varphi(u,v)}S \to T_{\varphi(u,v)}S$

auto-adjoint pour $I_{\varphi(u,v)}$ tq

$$II_{\varphi(u,v)}(x,y) = I_{\varphi(u,v)}(W_p(x), y)$$

$\forall (x,y) \in T_{\varphi(u,v)} S$.

On a alors si X, Y, W sont les matrices de x, y et W_p dans la base $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$ de $T_{\varphi(u,v)} S$, alors

$$^tY \, \mathrm{II}_{\varphi(u,v)} X = {}^tY \, \mathrm{I}_{\varphi(u,v)} W X$$

donc $W = \mathrm{I}_{\varphi(u,v)}^{-1} \, \mathrm{II}_{\varphi(u,v)}$. On parle de l'opérateur de Weingarten.

On peut aussi montrer que $W_{\varphi(u,v)}$ est donné par

$$\begin{aligned} T_{\varphi(u,v)} S &\longrightarrow T_{\varphi(u,v)} S \\ v &\longmapsto -d\vec{n}_{\varphi(u,v)}(v) \end{aligned}$$

où $\vec{n} : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$

$\varphi(u,v) \longmapsto \vec{n}_{\varphi(u,v)}$

et $d_{\varphi(u,v)} \vec{n} : T_{\varphi(u,v)} S \longrightarrow T_{\vec{n}_{\varphi(u,v)}} \mathbb{S}^2$

$$T_{\vec{n}_{\varphi(u,v)}} \mathbb{S}^2 = \vec{n}_{\varphi(u,v)}^{\perp} = T_{\varphi(u,v)} S.$$

On peut mq $-dn_{\varphi(u,v)}$ est autoadjoint pour $I_{\varphi(u,v)}(\cdot,\cdot)$ et que la matrice de $-d_{\varphi(u,v)} \vec{n}$ dans la base $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$ est $I_{\varphi(u,v)}^{-1} \, II_{\varphi(u,v)}$.

Pour cela on va montrer que

$$d_{\varphi(u,v)}\vec{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\right) = \frac{\partial \vec{n}\circ\varphi}{\partial u}(u,v)$$

et idem en v.

On prend $\left(\gamma : t \mapsto \varphi(u(t), v(t))\right)$ chemin tq

$$\gamma(0) = \varphi(u,v) \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)$$

soit $u(0) = u$ et $u'(0) = 1$

$v(0) = v$ $\quad$ $v'(0) = 0$

On a alors

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{n}(\gamma(t))\right)\Big|_{t=0} = d_{\varphi(u,v)}\vec{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial(\vec{n}\circ\varphi)}{\partial u}(u,v)\, u'(0) + \frac{\partial(\vec{n}\circ\varphi)}{\partial v}(u,v)\, v'(0)$$

$$= \frac{\partial(\vec{n}\circ\varphi)}{\partial u}(u,v).$$

On écrit alors $\dfrac{\partial \vec{n}}{\partial u}$ pour $\dfrac{\partial(\vec{n}\circ\varphi)}{\partial u}$

$\dfrac{\partial \vec{n}}{\partial v}$ pour $\dfrac{\partial(\vec{n}\circ f)}{\partial v}$

⚠ à la différence entre $\vec{n} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$

$$(u,v) \mapsto \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{\| \qquad\qquad \|}$$

et $\vec{n} : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$

$\varphi(u,v) \longmapsto$ m̂ chose.

Ainsi la matrice de $-d_{\varphi(u,v)}n$ est donnée par $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ où

$$-d_{\varphi(u,v)}n\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = -\frac{\partial \vec{n}}{\partial u} = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$-d_{\varphi(u,v)}n\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = -\frac{\partial \vec{n}}{\partial v} = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_4 \frac{\partial f}{\partial v}$$

Prenant les prdts scalaires avec $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ et en résolvant le système

on constate qu'on tombe sur $I_{f(u,v)}^{-1} \, II_{f(u,v)}$.

En conclusion, on a

$$II_p(x,y) = I_p(-d_p n(x), y)$$

$\forall (x,y) \in T_pS \times T_pS.$

Ici après calculs, il vient

$$II_{f(u,v)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Retour sur la matrice $d_p(-\vec{n})$.

On a

$$l = \lambda_1 E + \lambda_2 F$$
$$m = \lambda_1 F + \lambda_2 G$$

donc
$$\lambda_1 = \frac{lG - mF}{EG - F^2} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

et idem pour les autres.

Notons alors que I_p est simplement la restriction du pdt scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ sur T_pS.

En effet si $x = x_1 \frac{\partial f}{\partial u} + x_2 \frac{\partial f}{\partial v}$, $y = y_1 \frac{\partial f}{\partial u} + y_2 \frac{\partial f}{\partial v}$,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 E(u,v) + (x_2 y_1 + x_1 y_2) F(u,v) + x_2 y_2 G(u,v)$$

$$= I_p(x,y).$$

(1) les valeurs propres de la matrice de la forme quadratique $\mathrm{II}_{f(u,v)}$ dans une base ON pour $I_{f(u,v)}$.

Si P est la matrice de chgt de base de $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ à une BON pour $I_{f(u,v)}$ alors

k_1, k_2 = v.p. de ${}^tP \, \mathrm{II}_{f(u,v)} \, P$

ce qui change trace et dét !

Ici $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ est orthogonale seulement

et donc $P = \frac{1}{(1+u^2+v^2)} I_2$

de sorte que ${}^tP \, \mathrm{II}_{f(u,v)} \, P = \begin{pmatrix} \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$

et $k_1 = -k_2 = \dfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$

On a donc $\underset{\text{Courbure de Gauss}}{H} = k_1 k_2 = \dfrac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}$

et $\underset{\substack{\text{Courbure} \\ \text{moyenne}}}{H} = \dfrac{1}{2}(k_1+k_2) = 0$

Au 2) k_1, k_2 = valeurs propres de

$$W_{\varphi(u,v)} = I_{\varphi(u,v)}^{-1} \, II_{\varphi(u,v)}$$

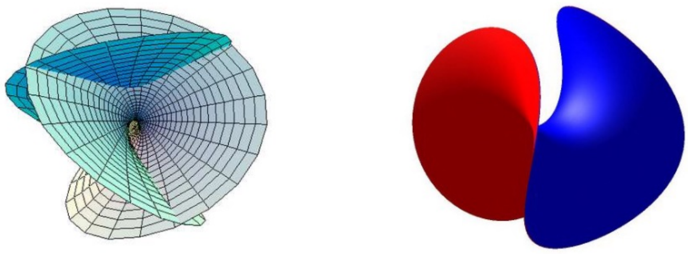
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$$

et on retrouve le résultat avec

$$K = \det(W_{(u,v)}) \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(W_{(u,v)}).$$

Finalement $H = 0$ et d'après le cours, on a cette surface minimale !

On obtient la surface bordant la couture d'une balle de tennis.



Voir aussi

https ://en.wikipedia.org/wiki/Enneper_surface♯/media/File :EnneperSurfaceAnimated.gif

Exercice 3

Formule de Meusnier

Supposons $\alpha(0) = p$ α paramétrée par

$\alpha'(0) = v$ longueur d'arc.

On a alors vu que $k = \| \alpha''(0) \|$

et on choisit un paramétrage φ autour de p.

On pose alors $\vec{n} = \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\| \text{---} \|}$ le vecteur

normal unitaire.

On a alors

$$k \cos\theta = \| \alpha''(0) \| \times \| \vec{n} \| \times \cos(\alpha''(0), \vec{n})$$

$$= \langle \alpha''(0), \vec{n} \rangle .$$

Mais $\langle \alpha'(t), \vec{n}(\alpha(t)) \rangle = 0 \ \forall t$

donc en dérivant en $t=0$ il vient

$$\langle \alpha''(0), \vec{n}_p \rangle + \langle \underbrace{\alpha'(0)}_{= v}, d_p\vec{n}(v) \rangle = 0$$

soit $k \cos\theta = -\langle v, d_p\vec{n}(v) \rangle$

$$= \mathrm{I}_p(v, -d_p\vec{n}(v))$$

$$= \mathrm{II}_p(v,v).$$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

a) Supposons γ paramétrée par longueur d'arc, $p=\gamma(0)$ et $v=\gamma'(0)$.

Par l'exo 6, on a

$$k \cos\theta = \mathrm{II}_p(v,v).$$

Or, si e_i est un vecteur propre associé à k_i.

On a $\underset{\text{"}}{v} \in T_pS$

$\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2$ car $\|v\| = 1$

et $W_p(e_i) = k_i e_i$ donc

$$\mathrm{II}_p(v,v) = \langle v, W_p(v) \rangle$$

$$= k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha$$

(identité d'Euler)

Puisque $K = k_1 k_2 > 0$ on a 2 cas :

(1) $k_1 > k_2 > 0$

$k_1 \geq k_1 \cos\alpha = k_1 \cos\alpha^2 + k_2 \sin\alpha^2$

$$\geq k_2 (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$\shortparallel$$

$$k_2$$

$$\shortparallel$$

$$\min(|k_1|, |k_2|)$$

② Si $k_1 < k_2 < 0$

$-k \leq k\cos\theta \leq k_2$ et $k \geq -k_2 = \min(|k_1|, |k_2|)$

L'inégalité est optimale avec $S = S^n$,

$k_1 = k_2 = 1$ et γ un grand cercle.

b) Si $k_1 > 0 > k_2$, on peut

obtenir $k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha = 0$

et donc $k\cos\theta = 0$ et on ne

peut rien en déduire sur k_2 si $\cos\theta = 0$

par exemple et si $\cos\theta \neq 0$, $k_2 = 0$

et donc dans tous les cas on n'aura pas $k_2 \geq \min(|k_1|, |k_2|)$.

Il suffit de prendre une droite sur une surface de courbure de Gauss < 0.

Une droite étant de courbure nulle.

Par exemple un hyperboloïde à 1 nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{vérifie}$$

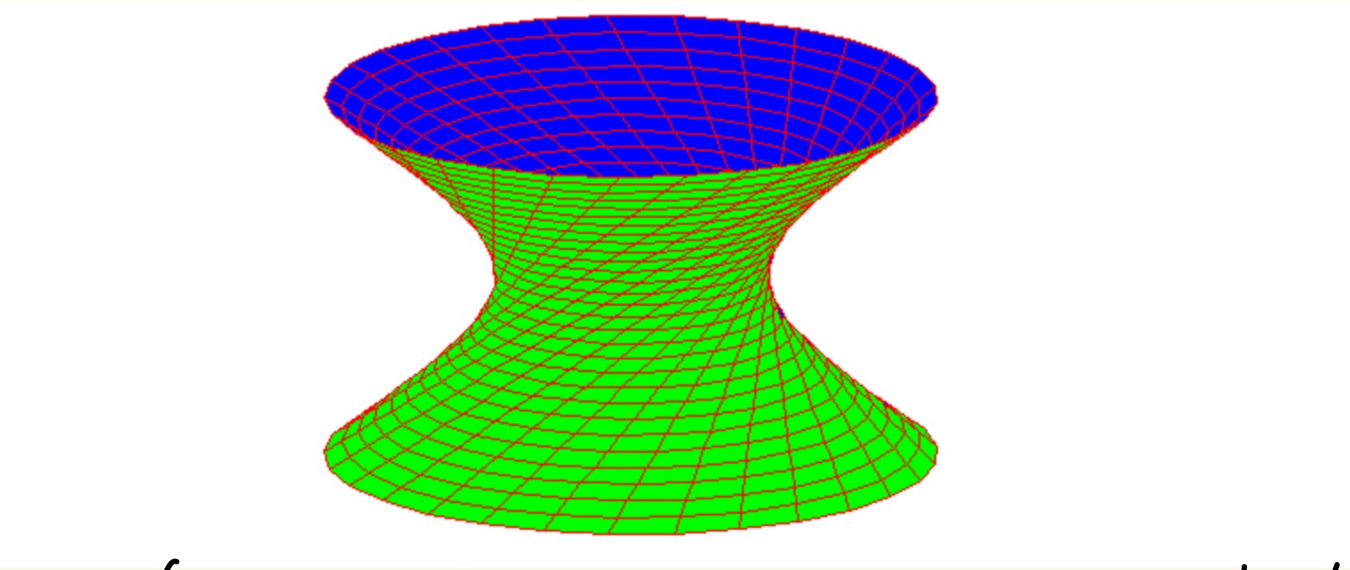
(paramétré par $(u,v) \mapsto (a\cosh v \cos u, b\cosh v \sin u, c \sinh v)$)

$K < 0$ et est une surface réglée.

(en fait $K = -1/a^2 \operatorname{ch}^2(2v)$)

On aura toutefois si $k_2 > 0 > k_2$

$k_2 \geq k_2$ et $k_2 \geq -k_1$.



Par ex, $\left\{ \frac{y}{b} = 1 \text{ et } \frac{x}{a} = -\frac{z}{c} \right.$ est une droite sur l'hyperboloïde!

Je vous renvoie à Do Carmo "Differential Geometry of Curves and Surfaces" page 188 et les suivantes pour plus de détails sur les surfaces réglées pour lesquelles on a tjrs $K \leq 0$.

$\boxed{\text{Exercice 5}}$

a) Dans le polycopié

Notons qu'une variété étant à base dénombrable, elle possède au + un nb dénombrable de composantes connexes! (Sinon il faudrait 1 ouvert de la base au moins par composante connexe)

Exercice E.68 Supposons que M est connexe, et montrons que M est un ouvert d'une sphère ou d'un plan affine de $\mathbb{R}^3$, ce qui conclut. Soit $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ un paramétrage local de M, où W est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$, et soit $\vec{\nu}$ le champs de vecteurs normaux à $\varphi(W)$ associé. Par l'hypothèse, il existe donc une application $\lambda : W \to \mathbb{R}$ (sans aucune condition de régularité a priori) telle que pour tous les $(x, y) \in W$, nous avons

$$\mathrm{II}_{(x,y)} = \lambda(x, y)\ \mathrm{I}_{(x,y)}\ .$$

Par les formules (24), et puisque les vecteurs de $T_{(x,y)}M$ sont déterminés par leur produit scalaire avec les vecteurs de base $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)$, nous avons donc le système

227

d'équations

$$-\frac{\partial\vec{\nu}}{\partial x} = \lambda\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$-\frac{\partial\vec{\nu}}{\partial y} = \lambda\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ .$$

En particulier, l'application $\lambda : W \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞. En dérivant la première équation par rapport à y et la seconde par rapport à x et en soustrayant, le lemme de Schwarz montre que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ .$$

Puisque les vecteurs $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)$ sont linéairement indépendants, nous obtenons donc que les différentielles partielles de λ sont nulles, donc par connexité de W que λ est constante.

Si λ est nulle, alors le vecteur normal ν est constant, et alors les plans vectoriels $T_{(x,y)}M$ le long de la surface $\varphi(W)$ sont constants, et donc par connexité la surface $\varphi(W)$ est contenue dans le plan affine $\varphi(x_0, y_0) + T_{(x_0,y_0)}M$ pour tout $(x_0, y_0) \in W$ fixé.

Si λ est non nulle, alors la fonction $\varphi + \frac{1}{\lambda}\vec{\nu}$, dont les dérivées partielles sont nulles, est constante sur l'ouvert connexe W. Notons c sa valeur. Donc $\|\varphi(x, y) - c\| = \frac{1}{\lambda}$ est constant et $\varphi(W)$ est contenue dans la sphère de centre c et de rayon $\frac{1}{\lambda}$.

Dans les deux cas ci-dessus, par le théorème d'invariance du domaine, la surface $\varphi(W)$ est un ouvert du plan affine ou de la sphère qui la contient. Par connexité, il en est de même de M.

DEFINITION 8. *If at* $p \in S$, $k_1 = k_2$, *then* p *is called an* umbilical point *of* S; *in particular, the planar points* ($k_1 = k_2 = 0$) *are umbilical points.*

All the points of a sphere and a plane are umbilical points. Using the method of Example 6, we can verify that the point $(0, 0, 0)$ of the paraboloid $z = x^2 + y^2$ is a (nonplanar) umbilical point.

We shall now prove the interesting fact that the only surfaces made up entirely of umbilical points are essentially spheres and planes.

PROPOSITION 4. *If all points of a connected surface* S *are umbilical points, then* S *is either contained in a sphere or in a plane.*

Proof. Let $p \in S$ and let $\mathbf{x}(u, v)$ be a parametrization of S at p such that the coordinate neighborhood V is connected.

Since each $q \in V$ is an umbilical point, we have, for any vector $w = a_1\mathbf{x}_u + a_2\mathbf{x}_v$ in $T_q(S)$,

$$dN(w) = \lambda(q)w,$$

where $\lambda = \lambda(q)$ is a real differentiable function in V.

We first show that $\lambda(q)$ is constant in V. For that, we write the above equation as

$$N_u a_1 + N_v a_2 = \lambda(\mathbf{x}_u a_1 + \mathbf{x}_v a_2);$$

hence, since w is arbitrary,

$$N_u = \lambda\mathbf{x}_u,$$
$$N_v = \lambda\mathbf{x}_v.$$

Differentiating the first equation in u and the second one in v and subtracting the resulting equations, we obtain

$$\lambda_u\mathbf{x}_v - \lambda_v\mathbf{x}_u = 0.$$

Since $\mathbf{x}_u$ and $\mathbf{x}_v$ are linearly independent, we conclude that

$$\lambda_u = \lambda_v = 0$$

for all $q \in V$. Since V is connected, λ is constant in V, as we claimed.

If $\lambda \equiv 0$, $N_u = N_v = 0$ and therefore $N = N_0 =$ constant in V. Thus, $\langle \mathbf{x}(u, v), N_0\rangle_u = \langle \mathbf{x}(u, v), N_0\rangle_v = 0$; hence,

$$\langle \mathbf{x}(u, v), N_0\rangle = \text{const.},$$

and all points $\mathbf{x}(u, v)$ of V belong to a plane.

If $\lambda \neq 0$, then the point $\mathbf{x}(u, v) - (1/\lambda)N(u, v) = \mathbf{y}(u, v)$ is fixed, because

$$(\mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v))_u = (\mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v))_v = 0.$$

Since

$$|\mathbf{x}(u, v) - \mathbf{y}|^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

all points of V are contained in a sphere of center $\mathbf{y}$ and radius $1/|\lambda|$.

This proves the proposition locally, that is, for a neighborhood of a point $p \in S$. To complete the proof we observe that, since S is connected, given any other point $r \in S$, there exists a continuous curve $\alpha: [0, 1] \to S$ with $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = r$. For each point $\alpha(t) \in S$ of this curve there exists a neighborhood V_t in S contained in a sphere or in a plane and such that $\alpha^{-1}(V_t)$ is an open interval of $[0, 1]$. The union $\bigcup \alpha^{-1}(V_t)$, $t \in [0, 1]$, covers $[0, 1]$ and since $[0, 1]$ is a closed interval, it is covered by finitely many elements of the family $\{\alpha^{-1}(V_t)\}$ (cf. the Heine-Borel theorem, Prop. 6 of the appendix to Chap. 2). Thus, $c([0, 1])$ is covered by a finite number of the neighborhoods V_t.

If the points of one of these neighborhoods are on a plane, all the others will be on the same plane. Since r is arbitrary, all the points of S belong to this plane.

If the points of one of these neighborhoods are on a sphere, the same argument shows that all points on S belong to a sphere, and this completes the proof. **Q.E.D.**

b) Soient un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avec $a > b > c > 0$

On a un paramétrage

$$(a \cos u \cos v, \ b \cos u \sin v, \ c \sin u)$$

obtenu aisément car $-1 \leq \frac{z}{c} \leq 1$ donc

$z = c \sin u$ et ainsi de suite..

On obtient

$$I_{\varphi(u,v)} = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u & F \\ F & a^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u \cos^2 v \end{pmatrix}$$

et $F = (a^2 - b^2)\sin u \cos u \sin v \cos v$

et $$\mathrm{II}_{\varphi(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{abc}{\Delta} & 0 \\ 0 & \frac{abc \cos^2 u}{\Delta} \end{pmatrix}$$

et $$\Delta = \left(a^2 b^2 \sin^2 u + b^2 c^2 \cos^2 u \cos^2 v + c^2 a^2 \cos^2 u \sin^2 v \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a alors que $W_{\varphi(u,v)}$ l'op. de Weingarten est auto-adjoint donc diagonalisable et en 1 pt ombilic $k_1 = k_2 = k$ donc

$W_{\varphi(u,v)} = k I_2$

or $W_{\varphi(u,v)} = I_{\varphi(u,v)}^{-1} \; \mathrm{II}_{\varphi(u,v)}$

donc $\varphi(u,v)$ ombilic $\iff$

$$\mathrm{I}_{\varphi(u,v)} = k\,\mathrm{II}_{\varphi(u,v)}$$

pour $k \in \mathbb{R}$.

Or, $m = 0$ donc

en un point ombilic $F = 0$

$\Downarrow$

$\sin u \cos u \sin v \cos v = 0$

1) Si $\sin u = 0$

$E = k\ell \iff \quad c^2 = k \dfrac{abc}{(b^2c^2\cos^2 v + c^2a^2\sin^2 v)^{\frac{1}{2}}}$

$G = kn \iff \quad a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v = k \dfrac{abc}{(\;\_\_\_\;)^{\frac{1}{2}}}$

donc $\quad a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v = \quad c^2$

Or $\quad a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v > b^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v$

$$b^2 > c^2$$

Contradiction !

(2) Idem si $\cos u = 0$ ou $\cos v = 0$

(3) Si $\sin v = 0$ on obtient C_4

où

$$a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u = b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^2 u = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

et

$$c\sin u = \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

~~et~~ on obtient les points ombilics

$$\left(\pm a \sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \right)$$

b) Pour $r < R$,

$$(u,v) \mapsto \left((R+r\cos u)\cos v, (R+r\cos u)\sin v, r\sin u \right)$$

On obtient $E = r^2$, $F = 0$

$$G = (R + r\cos u)^2$$

$$\ell = r, \quad m = 0, \quad n = (R + r\cos u)\cos u$$

$$K = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)} \qquad H = \frac{R + 2r\cos u}{r(R + r\cos u)}$$

$$K = \det W_p \qquad H = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(W_p)$$

donc $\chi_{W_p}(X) = X^2 - 2HX + K$

(polynôme caractéristique)

Si le point p est ombilic $h_1 = h_2$ et

$$\chi_{W_p}(X) = (X - h)^2 = X^2 - 2hX + h^2$$

et donc $H^2 = K$.

or $$H^2 - K = \frac{\frac{R^2}{4} + 3\left(\frac{R}{2} + r\cos u\right)^2}{r^2(R + r\cos u)^2} > 0$$

donc on n'a aucun point ombilic sur le tore !