

ANALYSE DE FOURIER ET GÉOMÉTRIE : EXERCICES SUR LE COURS 3

►► **MODE D'EMPLOI** – Merci de rendre vos réponses sous forme d'un **unique fichier pdf** via le formulaire que vous trouverez en cliquant **ici**. Pour convertir des formats png, jpeg ou autres au format pdf ou fusionner différents pdfs en un seul, je vous renvoie (par exemple) au site **sui-vant**. Un **corrigé** sera ensuite disponible **ici**, sur la page web du cours, à la fin du cours 4. ◀◀

EXERCICE 1 — NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE.

1. Calculer $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
On pourra distinguer selon que $n = 2k$ est pair ou selon que n est impair.
2. Donner le conjugué de $z = 3 - i$ puis de $e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Mettre sous forme algébrique $\frac{1+2i}{2-i}$.

EXERCICE 2 — CONTINUE VS CONTINUE PAR MORCEAUX. Dessiner le graphe d'une fonction continue et le graphe d'une fonction continue par morceaux. Expliquer la différence.

EXERCICE 3 — FONCTIONS PÉRIODIQUES.

1. Dire si les fonctions suivantes sont périodiques ou non et si oui préciser la période¹ :

$$t \mapsto e^t, \quad t \mapsto \cos(t) + \sin(2t), \quad t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right), \quad t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)e^{-\frac{4i\pi t}{3}}, \quad t \mapsto \cos(\pi t) + \cos(t).$$

2. Tracer le graphe de la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$. La fonction est-elle continue?
3. A-t-on pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et f une fonction continue par morceaux 2π -périodique l'égalité

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{10-\pi}^{10+\pi} f(t)e^{-int} dt?$$

EXERCICE 4 — COEFFICIENTS DE FOURIER.

Soit f une fonction continue par morceaux 2 -périodique.

1. Que signifie calculer les coefficients de Fourier réels de f ?
2. A-t-on pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$a_n(f) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) \cos(n\pi t) dt?$$

3. Que dire des coefficients de Fourier (réels et complexes) si la fonction est impaire?
4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{i}{n}$. Que pouvez-vous en déduire sur la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier complexes?

EXERCICE 5 — POUR PRÉPARER LE COURS SUIVANT.

Finir le calcul de coefficients de Fourier entamé à la fin du dernier cours. Autrement dit, calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction 2π -périodique définie pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ par $f(t) = |t|$.

1. Le dernier exemple est difficile!