TD II : SÉRIES DE FOURIER

► **EXERCICE 1 — UN PREMIER EXEMPLE.** On considère la fonction 2π-périodique paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est définie par

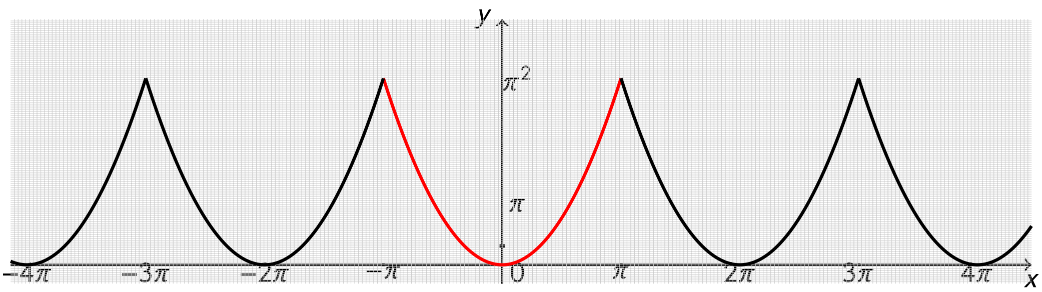
$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = t^2.$$

1. Dessiner le graphe de f, d'abord sur $[-\pi, \pi[$ puis sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? C^1 par morceaux ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la convergence et la somme des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

► **SOLUTION.**

1. Voici le graphe en question (la portion en rouge correspond à l'intervalle $[-\pi, \pi[$).



On constate que la fonction est continue (on peut tracer le graphe sans lever le crayon) et on constate sur la portion de graphe tracée un nombre fini de pics avec une dérivée à gauche et à droite à chaque fois et aucune tangente verticale donc la fonction est bien de classe C^1 par morceaux.

2. On constate que le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui signifie que la fonction f est paire. Le cours nous assure alors que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = 0.}$$

Par ailleurs, on a par définition que

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$$

où l'on va utiliser l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi[$ de longueur 2π pusique c'est sur cet intervalle que la fonction f est donnée[1] par $f(t) = t^2$. Ainsi, il vient

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{6\pi}[t^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a alors[2]

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On a alors

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t$$

1. Je rappelle en effet que pour $t \notin [-\pi, \pi]$, on a $f(t) \neq t^2$!!!
2. Je rappelle que la définition de $a_0(f)$ qui fait intervenir un $\frac{1}{2\pi}$ est différente de celle de $a_n(f)$ ou de $b_n(f)$ pour $n \geqslant 1$ qui font intervenir un $\frac{1}{\pi}$ et qu'il faurt donc toujours traiter le cas de $a_0(f)$ à part !

car pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = t^2$. On utilise alors le fait que $t \mapsto t^2 \cos(nt)$ est paire pour déduire du cours que

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{si bien que} \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On doit alors intégrer un polynôme de degré deux fois un cosinus et on va donc effectuer deux intégrations par parties successives en dérivant à chaque fois le polynôme et en intégrant le cosinus ou le sinus. Commençons donc par une première intégration par parties avec

$$\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \cos(nt) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

car $n \geqslant 1$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t &= \left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t \\ &= \pi^2\frac{\sin(n\pi)}{n} - 0 - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale et car $\sin(n\pi) = 0$ pour tout entier n. On a alors affaire à l'intégrale

$$\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t$$

qui est encore de la forme un polynôme fois un sinus. On effectue par conséquent une nouvelle intégration par parties avec

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(nt) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

car $n \geqslant 1$. Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t &= \left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} - 0 + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale. On sait alors que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t = -\frac{2\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

Enfin, on a puisque $n \geqslant 1$ que

$$\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Finalement,

$$\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

et donc

$$\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$$

et enfin

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.}$$

3. Le théorème de Dirichlet (dans sa version continue, autrement dit (i) du polycopié de cours) garantit puisque la fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right]$$

avec convergence de la série en jeu. La question b) fournit alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nt) \quad \text{soit} \quad f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt). \qquad (*)$$

Pour faire apparaître la quantité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

on va appliquer $(*)$ pour $t = \pi$. On obtient alors

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)$$

mais on sait que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $(-1)^n \cos(n\pi) = (-1)^n \times (-1)^n = 1$ et

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On a alors par définition de f que $f(\pi) = \pi^2$ si bien que

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

ce qui donne finalement la valeur bien connue désormais

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

avec convergence de la série.
De même, pour faire apparaître la quantité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

on va choisir $t = 0$ dans $(*)$. On obtient alors

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Mais $f(0) = 0$ si bien que

$$\frac{\pi^2}{3} = -4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On a alors

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

de sorte qu'on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

avec convergence de la série en jeu.

Pour la dernière somme, on veut faire apparaître la quantité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

et donc on voit qu'on a besoin de mettre les coefficients de Fourier $a_n(f)$ au carré pour faire apparaître cette puissance 4. Cela suggère l'utilisation de la formule de Parseval. La fonction f étant continue, on peut appliquer l'égalité de Parseval qui fournit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = |a_0(f)|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right] \qquad (**)$$

avec convergence de la série en jeu. Les calculs de la question b) fournissent immédiatement

$$|a_0(f)|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right] = \frac{\pi^4}{9}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16(-1)^{2n}}{n^4} = \frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

par linéarité et car $(-1)^{2n}=1$ pour tout entier n. Il nous reste donc à calculer

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

en utilisant le fait qu'on peut intégrer une fonction 2π-périodique sur tout intervalle de longueur 2π. On a alors par définition de la fonction f

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^4\mathrm{d}t = \frac{1}{10\pi}[t^5]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}.$$

L'égalité de Parseval $(**)$ fournit alors

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \quad \text{soit} \quad 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{4\pi^4}{45}$$

ce qui donne alors

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

► **EXERCICE 2 — UN SECOND EXEMPLE.** On considère la fonction 2π-périodique paire $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dont la restriction à $[0,\pi]$ est définie par

$$\forall t\in[0,\pi],\quad f(t)=\pi-t.$$

1. Dessiner le graphe de f, d'abord sur $[-\pi,\pi]$ puis sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? C^1 par morceaux ?
2. Calculer les coefficients réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Fourier de f.
3. Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n(f)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n(f)$. Donner également les coefficients de Fourier complexes de f.
4. Déduire du théorème de Dirichlet la convergence et la somme des séries $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{(2p+1)^2}$.
5. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ ainsi que la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
6. Que donne l'égalité de Parseval appliquée à la fonction f ? En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{(2p+1)^4}$.
7. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}$.
8. Reprendre l'exercice avec la fonction 2π-périodique impaire $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dont la restriction à $[0,\pi]$ est définie par

$$\forall t\in]0,\pi],\quad g(t)=\pi-t \quad \text{et} g(0)=0.$$

Et en déduire la convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n}$.

► **Exercice 3 — Un exemple 2-périodique.** On considère les fonctions 2-périodiques $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont les restrictions à $]-1,1]$ sont définies par

$$\forall t \in]-1,1], \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^3, \quad f_3(t) = t - t^3.$$

1. Dessiner le graphe de f_1, f_2, f_3, d'abord sur $]-1,1]$ puis sur tout $\mathbb{R}$. Ces fonctions sont-elles continues ? $\mathcal{C}^1$ par morceaux ?
2. Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont-elles paires ? Impaires ? Quelles implications cela a-t-il concernant les coefficients de Fourier de ces fonctions ?
3. Calculer les coefficients de Fourier de f_1 puis ceux de f_2. En déduire ceux de f_3.
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f_3(t) = \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(\pi n t)}{n^3}$$
avec convergence des séries en jeu.
5. Que donne l'égalité de la question précédente en $t = \frac{1}{2}$? En déduire la convergence et la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.
6. Appliquer l'égalité de Parseval et en déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$
avec convergence de la série en jeu.

► **Exercice 4 — Une relation utile.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f') = inc_n(f)$.
Indication : On pourra intégrer par parties.
2. Déduire de l'Exercice 1 et de la question précédente les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in]0, \pi[, \quad h(t) = -1 \quad \text{et} \quad h(0) = h(\pi) = 0.$$
Écrire la série de Fourier associée. Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de h ? En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
3. Utiliser la question précédente pour obtenir la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

► **Exercice 5 — Une application.** On considère l'équation différentielle suivante

$$y''(t) + e^{it} y(t) = 0 \qquad (E).$$

1. Montrer que toute fonction f solution de (E) de classe $\mathcal{C}^2$ est 2π-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.
Indication : On pourra utiliser le fait qu'il existe une unique solution à (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
2. Soit f une solution de (E) 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$. Écrire les séries de Fourier associées à f et à f'' et justifer que f et f'' sont sommes de leur série de Fourier.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \frac{1}{n^2} c_{n-1}(f)$.
Indication : On admettra que (sous de bonnes hypothèses qui sont satisfaites ici) les coefficients de Fourier complexes d'une fonction définie par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \textit{avec} \quad (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$
sont donnés par $c_n(f) = c_n$ pour tout entier relatif n.

4.] Calculer $c_{-1}(f)$ et en déduire que pour tout $n < 0$, $c_n(f) = 0$.

5. Montrer que pour $n \geqslant 0$, $c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2} c_0(f)$ et en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = c_0(f) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{(n!)^2}.$$

6. Réciproquement, montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$t \longmapsto c \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$$

est une solution 2π-périodique de (E).
Indication : On admettra qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ et que l'on a le droit de dériver terme à terme.

7. Déterminer toutes les solutions 2π-périodiques de (E).