TD I, Analyse de Fourier et Géométrie, 19/01/2021

Exercice 1 — Limites de suites.

① $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

On a "1^∞" Forme Indéterminée

Lever l'indétermination

$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\text{Forme exponentielle}}{=} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

[Rappel : Si $a>0$, $x\in\mathbb{R}$, $a^x = e^{x\ln a}$]

D'où, $u_n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Q : $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\ln\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow n\to+\infty\ 0}\right)}_{\downarrow n\to+\infty\ 0} = ?$

$\ln(1) = 0$.

"$+\infty \times 0$" F.I.

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ ?$$

Pour $n \geq 1$, $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

$u = \frac{1}{n}$.

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc on est de la forme

$\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ avec $\underline{\underline{u \to 0}}$

et $\boxed{\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1}$ (à connaître)

$$\left[\frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{\ln(1+u) - \ln(1+0)}{u - 0} \xrightarrow[u \to 0]{} f'(0) \right.$$

$$\text{"} \quad \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} \qquad\qquad f'(0) \text{ "} 1$$

$$\left. \text{avec } f(u) = \ln(1+u), \ f'(u) = \frac{1}{1+u} \right]$$

[Question Mathilde :

$$\frac{\ln(1+u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(2)}{1} = \ln 2.$$

① $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

② $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ croissance comparées

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0 \quad]$$

En résumé, $u_n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

et $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$

Finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e.$

[Croissances comparées : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n \to +\infty}{n \to +\infty} = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$\downarrow \quad \downarrow x \to 0^+$

$" 0 \times -\infty "$ F.I.

en $+\infty$ tjrs pour exp vs polynôme.

en $+\infty$ ou en 0 pour ln vs polynôme.

$$\ln \to \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ 0}} \times \underbrace{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ -\infty}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$" 0 \times -\infty "$

② $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n + (-1)^n\right) = ?$$

$n \downarrow +\infty$

$(-1)^n \downarrow$ pas de limite oscille entre -1 et 1

$$n + (-1)^n = n\left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\right)$$

Force la factorisation par n

où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (cf cours).

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n + (-1)^n\right) = +\infty$.

De même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n - (-1)^n\right) = +\infty$.

On a une F.I du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

le terme dominant de $n+(-1)^n$ est n.

———————————— $n-(-1)^n$ — n.

Ainsi
$$u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} = \frac{\cancel{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (cf cours)

D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

③ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{6n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{6n^2}$

on garde les termes de + haut degré

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

④ $u_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{4^n+3^n}$.

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} = +\infty = \lim_{n\to+\infty} 3^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} 4^n$

$= \lim_{n\to+\infty} 3^n$

car $2, 3, 4 > 1$

[Rappel : $\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q|<1 \\ +\infty & \text{si } q>1 \\ 1 & \text{si } q=1 \end{cases}$]

$\frac{"+\infty}{+\infty}"$ F.I.

Terme dominant $2^{n+1}+3^{n+1}$ est 3^{n+1}

4^n+3^n est 4^n.

On a donc

$$u_n = \frac{3^{n+1}\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+1\right)}{4^n\left(1+\frac{3^n}{4^n}\right)}$$

$$= \frac{3^{n+1}}{4^n} \times \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

car $0<\frac{2}{3}<1$ car $0<\frac{3}{4}<1$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 1.$

Reste la limite rouge.

$$\frac{3^{n+1}}{4^n} = \frac{3 \times 3^n}{4^n} = 3 \times \frac{3^n}{4^n}$$
$$= 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{3}{4} < 1.$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3^{n+1}}{4^n} = 0.$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

5 $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ [Rappel : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$]

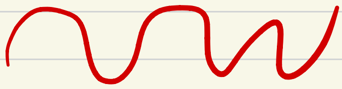
$$= \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

sin en 0

⑥ $u_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1} = \dfrac{n}{n^2+1} \times \sin(n)$

$\dfrac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\sin(n)$: pas de limite en ∞.



sin en $+\infty$ $\Longrightarrow$ lemme d'encadrement.

On sait que $\forall n \geq 0$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$n^2+1 \neq 0$ et $\dfrac{n}{n^2+1} > 0$

donc
$$-\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

$-\dfrac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1} = u_n$, $\dfrac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par le lemme d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

⑦ u_n n'a pas de limite.

⑧ exercices sur le cas 1. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}\right)$

Exercice 2

① $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k$, avec $0! = 1$

$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

② $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

a) Mq (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

↳ suites adjacentes.

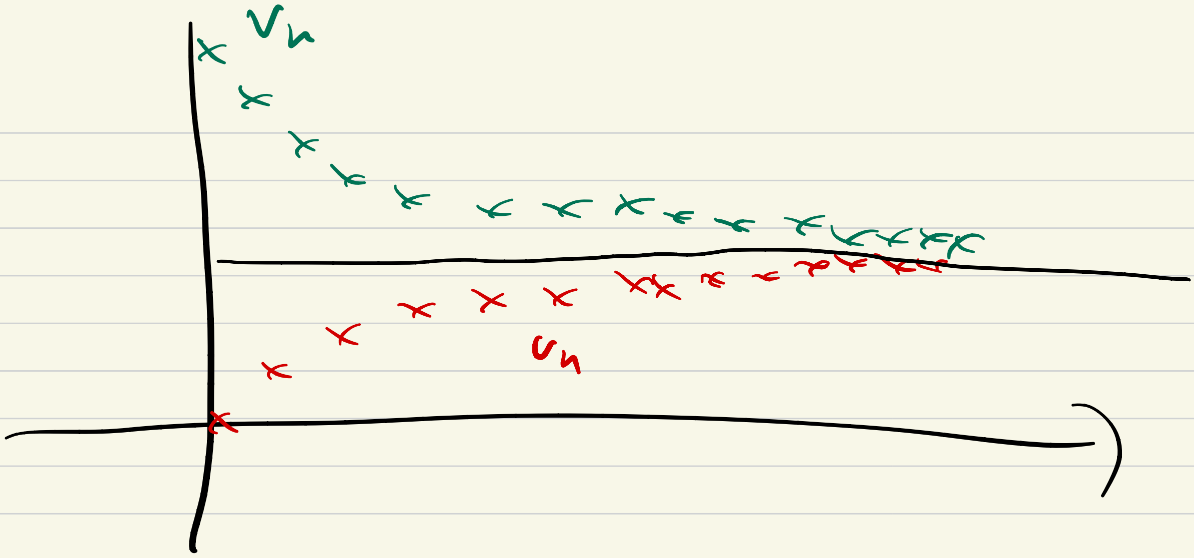
[Rappel : On doit vérifier que

i) $u_n \leq v_n$ ✓

ii) $(u_n) \nearrow$ ✓

iii) $(v_n) \searrow$ ✓

iv) $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$. ✓



Alors (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite

i) $u_n \leq v_n$

$$\boxed{u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

on ajoute $\frac{1}{n!} \geq 0$

$v_n = u_n +$ truc positif

Donc $v_n \geq u_n$.

ii) $(u_n) \nearrow$.

Autrement dit, on doit montrer que

$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ $\quad (u_{n+1} \geqslant u_n)$

Calculons $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$$= \cancel{\frac{1}{0!}} + \cancel{\frac{1}{1!}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n!}} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(\cancel{\frac{1}{0!}} + \cancel{\frac{1}{1!}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n!}} \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}$$

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$

et $(u_n) \nearrow$.

iii) $(v_n) \searrow$ $\qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

Il s'agit de mq $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.

Calculons $v_{n+1} - v_n = \underline{u_{n+1}} + \underline{\frac{1}{(n+1)!}} - \left(\underline{u_n} + \underline{\frac{1}{n!}} \right)$

$$= \underbrace{u_{n+1} - u_n}_{= \frac{1}{(n+1)!}} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

D'où, $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

↳ on cherche le signe.

On cherche à factoriser $\dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

$$(n+1)! = \underbrace{1 \times 2 \times \dots \times n}_{n!} \times (n+1) = n! \times (n+1)$$

$$\boxed{(n+1)! = n! \times (n+1)}$$

D'où $\quad \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{n! \times (n+1)} - \dfrac{1}{n!}$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{n+1} - 1 \right)$$

Donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{2-(n+1)}{n+1}\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \times \frac{1-n}{n+1}$$

Or, $n! \geq 0$ et $1-n \leq 0$
$n+1 \geq 0$ pour $n \geq 1$.

Ainsi $v_{n+1} - v_n \leq 0 \quad \forall n \geq 1$

et $(v_n) \searrow$ à partir du rang 1.

iv) Mq $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

Or $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ donc $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$

La question est de voir que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$

$$n! = 1\times 2\times 3\times \dots \times n \geq n > 0$$

donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n!} \geq 0$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} |v_n - u_n| = 0$.

Par le th. des suites adjacentes, (u_n) et (v_n) convergent donc vers une même limite.

2) Que pouvez-vous en déduire sur la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \;??$$

$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et par 1) on a que

$(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

<u>Rappel</u>: Étudier la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ c'est

étudier si la suite (S_n) de ses sommes

partielles converge où

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$$

On retrouve en fait la suite (u_n) !!

Or (u_n) converge donc (S_n) converge

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est une série convergente.

et on peut montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = e.$$

Exercice 3

Algorithme / recette pour étudier la série $\sum_{n\geq 0} u_n$

0) $\lim_{n\to+\infty} u_n = ?$

Si la limite est non nulle, la série diverge.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on passe à 1)

1) A-t-on une série connue ? Riemann
Riemann alternée
Géométrique

Si non on passe à 2)

2) Est-ce que $u_n \geq 0$?

Si oui on applique les critères pour les séries positives : i) (S_n) est majorée (à éviter)

ii) D'Alembert

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

$\ell > 1$ la série diverge

$\ell < 1$ ——— converge

$\ell = 1$ On ne peut rien dire

$\left(n! \ , \ \frac{2^n}{n} \ , \ \frac{2^n}{n^2} \ , \ \ldots \right)$

iii) $0 \leq u_n \leq v_n$

avec $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors

$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

(ou)

trouver $0 \leq v_n \leq u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$

diverge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Si (u_n) n'est pas positive on passe à 3

3 Remplacer $\sum_{n\geq 0} u_n$ par $\sum_{n\geq 0} |u_n|$

et on étudie la convergence de $\sum_{n\geq 0} |u_n|$

(convergence absolue)

Si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$

↳ $|u_n| \geq 0$ donc on applique converge.

les critères cv 2

Si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ diverge, on ne peut rien dire sur $\sum_{n\geq 0} u_n$ et on passe à 4

4 On applique Leibniz.

Si $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ avec $u_n \geq 0$

$(u_n) \searrow$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

alors $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ converge.

1 $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^3+1}$.

On applique l'algorithme

On calcule $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1 \neq 0$

Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n^3+1}$ diverge.

② $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(0) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$

On reconnait une série de Riemann $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$

avec $\alpha = \frac{1}{2}$

[Rappel : Une série de Riemann converge

$\Leftrightarrow \quad \alpha > 1$]

Ici $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ donc la

série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

④ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

(0) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$

$-\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par encadrement.

(1) On reconnaît une série de Riemann alternée $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

[Rappel: Série de Riemann alternée converge $\iff \alpha > 0$].

Ici $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.