DM 2 : Analyse de Fourier et géométrie

À rendre lors du cours du 23 mars.

Voici trois exercices types pour vous entraîner en en vue de l'examen.

Exercice 1.1.— (Convergence de séries) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la suite $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$. *Indication : On distinguera $\alpha \leqslant 0$ et $\alpha > 0$.*

En déduire la divergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ pour $\alpha \leqslant 0$.

b) Établir que pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{x}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant x$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 0$.
Indications : On pourra étudier les fonctions $x \mapsto \sin(x) - x$ et $x \mapsto \sin(x) - \frac{x}{2}$. Enfin, on pourra penser à utiliser $x = \frac{1}{n^\alpha}$.

c) Déduire de l'inégalité de droite de la question b) la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ pour $\alpha > 1$.

Indication : On pourra penser à utiliser $x = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Déduire de même de l'inégalité de gauche de la question b) la divergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ pour $0 < \alpha \leqslant 1$.

Exercice 1.2.— (Séries de Fourier) On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[0, 2\pi[$ est définie par

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad f(t) = e^t.$$

a) Dessiner le graphe de f, d'abord sur $[0, 2\pi[$ puis sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue? $\mathcal{C}^1$ par morceaux?

b) Calculer les coefficients de Fourier complexes de f.

c) En déduire les coefficients de Fourier réels de f.

d) Montrer que pour tout $t \neq 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$f(t) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{int}}{1 - in} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos(nt) - 2n\sin(nt)}{1 + n^2}\right)$$

avec convergence des séries en jeu.

e) Justifier de la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et donner la valeur de leur somme.

f) (**Bonus**) Que fournit l'égalité de Parseval?

Exercice 1.3.— (GÉOMÉTRIE) On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(2x-y+2z, 2x+2y-z, -x+2y+2z)). \end{array} \right.$$

a) Montrer que f est une application linéaire et donner sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer ${}^tMM$ et $\det(M)$.

c) Déterminer

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Justifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel, le décrire géométriquement et en donner sa dimension. Montrer que $f_1 = (1,1,1)$ en constitue une base. En déduire une base orthonormée e_1.

d) Déterminer $F^{\perp}$, le décrire géométriquement et en donner sa dimension. Montrer que $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ sont deux vecteurs orthogonaux de $F^{\perp}$ et que (e_1, e_2, e_3) constitue une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

e) Justifier que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

f) On considère la matrice

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Déterminer un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

g) En déduire la nature géométrique de f.