Correction du DM 2
2024-2025

1

i) Cas de X

Il s'agit de résoudre

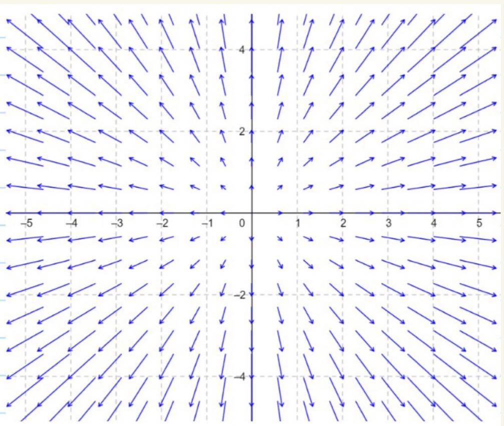
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

pour $t \mapsto (x(t), y(t))$ $\mathcal{C}^1$ et $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

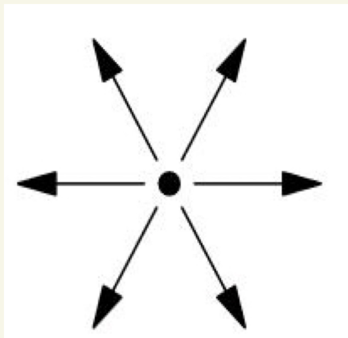
Soit $\begin{cases} x(t) = x_0 e^t \\ y(t) = y_0 e^t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Notons que $\lim_{t \to -\infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$.

On obtient un flot complet qui ne s'annule qu'en $(0,0)$ (en un pt qui est donc isolé).



schématisé par



Par l'indice, on peut prendre $\varepsilon = 1$ et

$$\mathrm{Ind}\left(X,(0,0)\right) = \deg\begin{pmatrix} S_1 \longrightarrow S_1 \\ \underset{\substack{\| \\ (x,y) \\ \updownarrow \\ x+iy}}{v} \longmapsto \dfrac{X(v)}{\|X(v)\|} = (x,y) = x+iy \end{pmatrix}$$

$$= \deg\begin{pmatrix} S_1 \longrightarrow S_1 \\ z \longmapsto z \end{pmatrix} = 1$$

(voir TD 2 + TD 6).

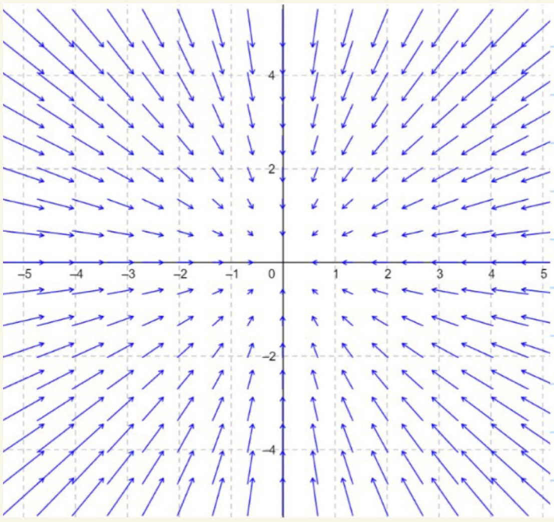
ii) Cas de Y. Pour $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$,

on doit résoudre

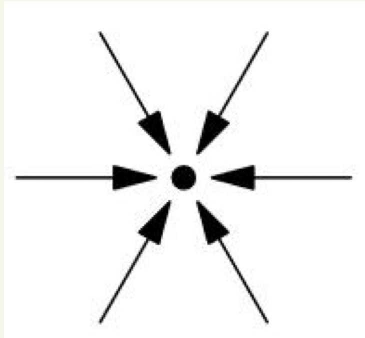
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}x_0 \\ e^{-t}y_0 \end{pmatrix}$.

On a un flot complet avec un unique zéro (donc isolé) en $(0,0)$.



schématisé par



On a (tjrs avec [: 1)

$$\mathrm{Ind}(Y,(0,0)) = \deg\left(\begin{array}{ccl} S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ v=(x,y) & \longmapsto & \dfrac{Y\binom{x}{y}}{\|Y\binom{x}{y}\|} = -(x,y) \\ \cup\!\!\!\!\cdot & & \\ x+iy & & = -(x+iy) \end{array}\right)$$

$$= \deg\left(\begin{array}{ccc} S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ z & \longmapsto & -z \end{array}\right)$$

$$= +1$$

Par exemple, cf TD 6 + TD 2 (ou) directement. Si $f : S_1 \to S_1$,
$z \mapsto -z$

$$T_z f : T_z S_1 \longrightarrow T_{-z} S_1$$
$$h \longmapsto -h$$

et par e_1 une base directe de δ_1
($\Leftrightarrow$ $\det(e_1, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) > 0$ si $z = x + iy$)

alors $-e_1$ est une base directe de $T_{-z}\delta_1$
(qui est le m ev que $T_z \delta_1$ mais orienté directement par v $\Leftrightarrow$ $\det(v, -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) > 0$).

On pouvait aussi utiliser le cas sur le degré de l'antipodie : $\beta = i$ et
$$\deg(\beta) = \deg(i) = (-1)^{1+1} = 1.$$

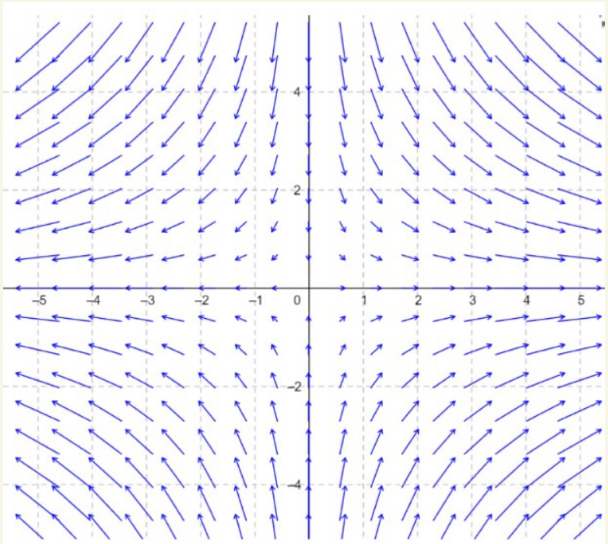
iii) Cas de $\mathbb{Z}$

On obtient de m
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} x_0 \\ e^{-t} y_0 \end{pmatrix}$$

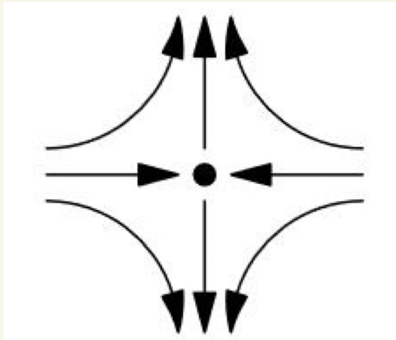
avec un unique zéro (isolé) en $(0,0)$.
Les courbes intégrales qui passent par (x_0, y_0) avec $x_0 y_0 \neq 0$ sont des hyperboles données par

$x(t)\, y(t) = x_0 y_0$ tandis que

Si $x_0 = 0$ on obtient les $\frac{1}{2}$ axe des ordonnés selon le signe de y_0 et de $\hat{\imath}$ en inversant x_0 et y_0 et abscisse et ordonnée.



ou



Finalement, avec $\varepsilon = 1$

$$\mathrm{Ind}\left(Z, (0,0)\right) = \deg \begin{pmatrix} S_1 \longrightarrow S_1 \\ \underset{\underset{x+iy}{\shortparallel}}{z} = (x,y) \longmapsto \dfrac{Z\binom{x}{y}}{\left\|\underset{\underset{x-iy}{\shortparallel}}{Z\binom{x}{y}}\right\|} \end{pmatrix}$$

$$= \deg \begin{pmatrix} S_1 \longrightarrow S_1 \\ z \longmapsto \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$= -1$$

soit par TD2 + TD6 soit à la main

$T_z\phi : T_z\delta_1 \longrightarrow T_{\bar z}\delta_1$ avec $z = x+iy$

$z \longmapsto \bar z$

et si $\det\left(v, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0$, alors

$$\det\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\right) = -\det\left(v, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) < 0$$

si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

2) a) Cf le corrigé du TD6, semaine 2, exo 2, question c).

b) Idem.

Notez que la convexité de $\psi(U\cap V)$ est capitale (on a besoin que si $0, x \in \psi(U\cap V)$, pour $t\in[0,1]$, $tx \in \psi(U\cap V)$).

$d\phi_0 \in GL_n^+(\mathbb{R})$ qui est connexe par cas. Une inspection de la preuve de la connexité par arcs de $GL_n^+(\mathbb{R})$ (voir par ex. http://vonbuhren.free.fr/Agregation/Documents/agreg_document_topologie_matrices.pdf) garantit l'existence de

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R}) \quad \mathcal{C}^\infty$$

avec $\alpha(0) = d\beta_0$, $\alpha(1) = I_n$.

On vérifie qu'on a bien une $\mathcal{C}^\infty$-isotopie

$$H : [0,1] \times \psi(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tq $H(0,\cdot) = \beta|_{\psi(U\cap V)}$. Notons $\beta_t = H(t,\cdot)$.

et $H(1,\cdot) = Id|_{\psi(U\cap V)}$

Quitte à restreindre les cartes, on peut supposer $\psi(U \cap V)$ convexe et $\varphi(x) = \psi(x) = 0$.

On a envie de poser

$$\hat{H} : [0,1] \times S_{n-1} \longrightarrow S_{n-1}$$

$$(t, v) \longmapsto \frac{d_{b_t^{-1}(\varepsilon v)}\, b_t \circ (\psi^{-1})^* X \circ b_t^{-1}(\varepsilon v)}{\| \qquad\qquad\qquad \|}$$

qui est une C^∞-homotopie entre $(\psi^{-1})^* X$ et $(\varphi^{-1})^* X$ et qui permet de conclure par invariance du degré par C^∞-homotopie.

Pour cela, on a besoin d'un $\varepsilon > 0$ tq $\forall t \in [0,1]$, $B(0,\varepsilon) \subseteq b_t(\psi(U \cap V))$ ce qui est un peu pénible à démontrer.

On va plutôt utiliser

$$\tilde{H} : [0,1] \times S_{n-1} \longrightarrow S_{n-1}$$
$$(t, v) \longmapsto \frac{d_{b_t^{-1}(\varepsilon v)}\, b_t \circ (\psi^{-1})^* X(\varepsilon v)}{\| \qquad\qquad \|}$$

où $B(0,\varepsilon) \subseteq \psi(U \cap V)$.

$\tilde{H}$ est alors une $\mathcal{C}^\infty$-homotopie entre

$$\psi_1 : S_{n-1} \longrightarrow S_{n-1}, \quad v \longmapsto \frac{(\varphi^{-1})^* X(\xi_v)}{\|\qquad\|}$$

et

$$\psi_2 : S_{n-1} \longrightarrow S_{n-1}, \quad v \longmapsto \frac{c(\theta^{-1}(\xi_v))\,\theta \circ (\varphi^{-1})^* X(\xi_v)}{\|\qquad\|}$$

de sorte que

$$\mathrm{Ind}((\varphi^{-1})^* X, 0) = \deg \psi_1 = \deg \psi_2 \underset{\substack{\text{par la} \\ \text{question précédente}}}{=} \deg \left(\underbrace{S_{n-1} \longrightarrow S_{n-1}, \quad v \longmapsto \frac{(\varphi^{-1})^* X \circ \theta(\xi_v)}{\|\qquad\|}}_{=:\ \psi_3} \right)$$

On a $\Psi_3 = \Psi_4 \circ \theta$ par

$$\Psi_4(v) = \frac{(\varphi^{-1})^* X(v)}{\|(\varphi^{-1})^* X(v)\|}.$$

de sorte que $\deg \Psi_3 = \deg \Psi_4 \underbrace{\deg \theta}_{=1}$,

car θ $\mathcal{C}^\infty$-difféo. préservant l'orientation.

En conclusion, $\mathrm{Ind}(((\varphi^{-1})^* X, 0)$
$= \mathrm{Ind}(((\psi^{-1})^* X, 0)$.

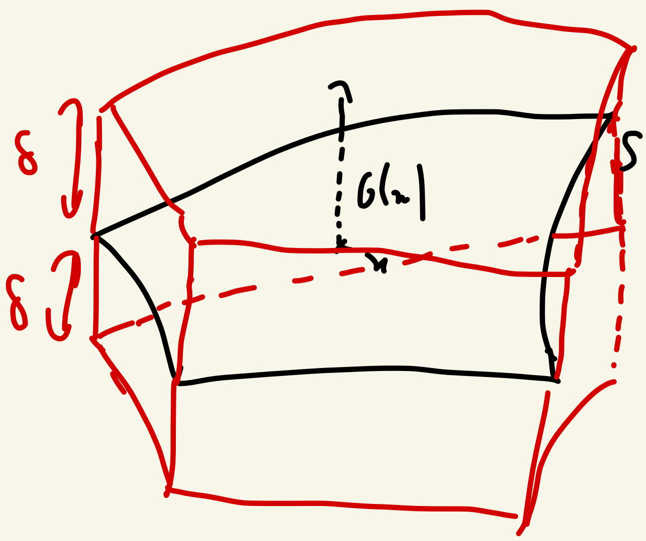
c) Voir le corrigé du TD6.

3) C'est du cours puisque $N|_{S \times [-\delta, \delta]}$ est un plongement que S_δ est une ss-variété de $\mathbb{R}^3$ de dim 3 à bord de bord

$$N(S \times \{-\delta\}) \sqcup N(S \times \{\delta\})$$

compacte car $S \times [-\delta, \delta]$ l'est, N continue et $\mathbb{R}^3$ séparé, connexe car $S \times [-\delta, \delta]$ l'est et N continue.

On parle de voisinage tubulaire, on "épaissit" un peu S dans la direction normale.



④ Comme $X(x) \in T_x S$ $\qquad$ $T_x S \oplus (T_x S)^{\perp} = \mathbb{R}^3$

et $G(x) \perp T_x S$,

et $\tilde{X}(N(x,t)) = 0$ (G)

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{2\delta}\right) X(x) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi t}{2\delta}\right) G(x) = 0 \end{cases}$$

or $\|G(x)\| = 1$ donc $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{2\delta}\right) = 0 \\ X(x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow X(x) = 0$ et $t = 0$

Les zéros de $\tilde{X}$ sont donc les

$N(x, 0) = x$ pour x zéro de X.

S La première partie découle du caractère isolé des zéros de X.

Les zéros de $\tilde{X}$ sont isolés dans S compact donc en nombre fini.

Posons $\{x_1, \dots, x_s\}$ l'ens. de ces zéros.

$\exists\, \varepsilon > 0$ tq $B_3(x_i, \varepsilon)$ soit 2 à 2 d'adhérence disjointes.

Comme ∂S_δ est fermé dans S_δ, on peut supposer ces boules d'adhérence ne rencontrant pas ∂S_δ.

Pour le reste, voir la correction du TD00, semaine 2, exercice 6.

6 $N|_{S \times [-\delta, \delta]}$ est $\mathcal{C}^\infty$, un homéo. sur son image et une immersion.

On a donc

$$T_{(x,t)} N|_{U \times]-\delta,\delta[} : T_x S \times \mathbb{R} \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{R}^3}}{T_{(x,t)} S_\delta}$$

est un isomorphisme si bien que $N|_{U \times]-\delta,\delta[}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféo local.

Ainsi $\tilde{\varphi} \circ N|_{U \times]-\delta,\delta[}^{-1} : U \times]-\delta,\delta[\longrightarrow V \times]-\delta,\delta[$

$$(y,t) \longmapsto (\varphi(y), t)$$

est clairement un homéo sur son image, de sorte que $\tilde{\varphi}$ est bien une carte locale en $N(x,t) \in \partial S_\delta$.

Enfin $\overline{B}_3(0,\varepsilon) \subseteq \overline{B}_2(0,\varepsilon) \times [-\varepsilon,\varepsilon]$

$$\subseteq V \times]-\delta,\delta[.$$

Établissons alors les indications.

On a pour (x,t) que

$$d_{N(x,t)}\tilde{\varphi} : T_{N(x,t)} S_\delta = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 .$$

Soit $v \in T_x S$. Mq $d_{N(x,t)} \tilde{\varphi}(v) = (*, *, 0)$.

Par définition, on peut choisir

$\alpha : \underset{0}{\underset{\cup}{I}} \to S$ $\mathcal{C}^1$ avec $\alpha(0) = x$
$\alpha'(0) = v$.

On a alors que $\beta : I \longrightarrow S_\delta$
$s \longmapsto N(\alpha(s), t)$

pour $t \in]-\delta, \delta[$ est $\mathcal{C}^1$ avec

$\beta(0) = N(x, t)$ et $\beta'(0) = d_{(0,t)} N(v, 0)$

Par ailleurs $\tilde{\varphi} \circ N : U \times]-\delta, \delta[\to V \times]-\delta, \delta[$

et $d_{(x,t)}(\tilde{\varphi} \circ N) = d_{N(x,t)} \tilde{\varphi} \circ d_{(x,t)} N ; T_x S \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$

Par ailleurs,

$$d_x G : T_x S \longrightarrow T_{G(x)} S_2 = G(x)^\perp = T_x S$$

et

$$d_{(x,t)} N : T_x S \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$$

On a pour $v \in T_x S$, $h \in \mathbb{R}$,

$\gamma : I \longrightarrow S \times \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$

$s \longmapsto (\alpha(s), t + hs)$

avec $\gamma(0) = (x, t)$

$\gamma'(0) = (v, h)$.

On a alors

$$d_{(x,t)} N(v,h) = \frac{d\left(\alpha(s) + (t+hs)\, G(\alpha(s))\right)}{ds}\bigg|_{s=0}$$

$$= v + h\, G(x) + t\, d_x G(v).$$

On identifie alors $T_x S$ avec $d_{(x,t)} N(T_x S, 0)$ et $T_x S^\perp$ avec $d_{(x,t)} N(0, \mathbb{R})$.

Par ailleurs $d_{(x,t)}(\varphi \circ N) : T_x S \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(v, h) \longmapsto (d_x \varphi(v), h)$

On a donc immédiatement les résultats de l'indication.

Soit maintenant $v \in \mathcal{B}_1$ une valeur régulière de Ψ_1.

On a bien $(v, 0) \in \mathcal{B}_2$.

On dispose donc de v' tq $\Psi_2(v') = v$ et $d_{v'}\Psi_1$ est une submersion.

Soit $\ddot{w}$ un antécédent de $(v, 0)$ par Ψ_2.

Notons que l'on a

$$\Psi_2(v', 0) = \frac{d\left(\tilde{\rho}^{-1}(\varepsilon v', 0)\right)\left(\tilde{X}\left(\tilde{\rho}^{-1}\overbrace{(\varepsilon v', 0)}^{\in \mathcal{B}_3(0,\varepsilon)}\right)\right)}{\|\text{———}\|}$$

On a alors

$$\tilde{p}^{-1}(\underset{\varphi(y)}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon v'}}, 0) = y$$

si bien que

$$\Psi_2(v', 0) = \frac{d_y X(y)}{\| \_\_ \|} = \frac{d_{\varphi^{-1}(\varepsilon v')} X(\varphi^{-1}(\varepsilon v'))}{\| \_\_ \|}$$

$$= \Psi_1(v').$$

Ainsi $(v', 0)$ est un antécédent de $(v, 0)$.

Soit $w' = (v', t)$ avec $v' \in \mathbb{R}^2$ et $\|v\|_2^2 + t^2 \leq 1$

un antécédent de $(v, 0)$ par Ψ_2.

On a

$$\psi_2(v',t) = d_{\varphi^{-1}(\varepsilon v') + t\varepsilon G(\varphi^{-1}(\varepsilon v'))}\tilde{\varphi}\ \frac{\left(\cos\left(\frac{\varepsilon \pi t}{2\delta}\right) \underbrace{X(\varphi^{-1}(\varepsilon v'))}_{\in T_x S} + \sin\left(\frac{\varepsilon\pi t}{2\delta}\right) \underbrace{G(\varphi^{-1}(\varepsilon v'))}_{\in (T_x S)^\perp} \right)}{\| \quad \|}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\varepsilon\pi t}{2\delta}\right)(*,*,0) + \sin\left(\frac{\varepsilon\pi t}{2\delta}\right)(0,0,\underbrace{*}_{\neq 0})}{\| \quad \|}$$

par l'indication,

On en déduit que si $\psi_2(v',t) = (v,0)$, alors $t=0$ et v' est de la forme $(v',0)$.

On a après des calculs un peu laborieux que $\varepsilon_{(v',0)} \psi_2$ est surjective si $\varepsilon_{v'} \psi_1$ l'est et que

$$\varepsilon_{v'} = \varepsilon_{(v',0)}$$

On a donc par définition que

$$\mathrm{Ind}(X, x) = \deg(\psi_1)$$

$$= \sum_{v' \in \psi_1^{-1}(v)} \varepsilon_{v'}$$

$$\mathrm{Ind}(\tilde{X}, x) = \deg \psi_2$$

$$= \sum_{w' \in \psi_2^{-1}(v,0)} \varepsilon_{w'}$$

$$= \sum_{v' \in \varphi_1^{-1}(v)} \varepsilon_{(v',0)}$$

et par les calcul ci-dessus, il vient que $\varepsilon_{(v',0)} = \varepsilon_v$, et

$$\mathrm{Ind}(\tilde{X}, x) = \mathrm{Ind}(X, x).$$

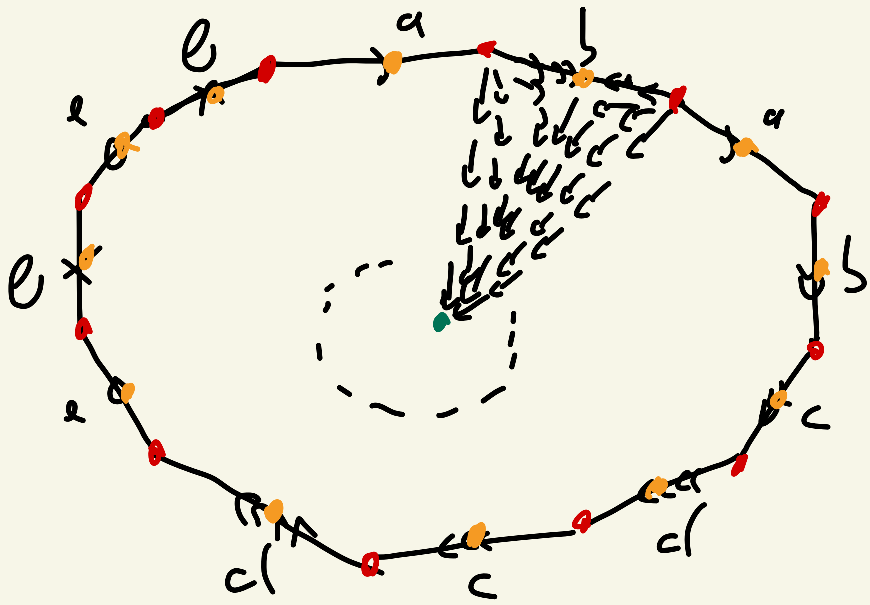
Pour 5), on a donc

$$\sum_{\substack{x \in S \\ X(x)=0}} \mathrm{Ind}(X, x) = \deg G$$

et est donc indépendant de X.

7 On utilise que la surface Σ_g

peut être réalisé par un 4g-gone si $g > 0$.



- 1 cellule
- centre de l'unique 2 cellule.
- centre des 2g 1-cellules.

S'inspirant de la question 1), on a un champ de vecteurs X_0 qui convient.

Ainsi

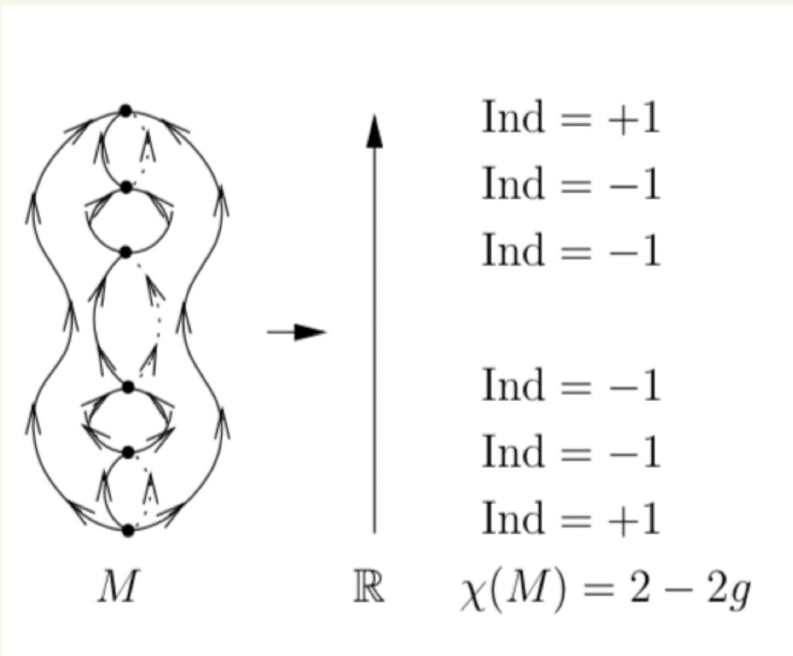
$$\sum_{\substack{x \in S \\ X(x) = 0}} \mathrm{Ind}(X, x) = \sum_{\substack{x \in S \\ X_0(x) = 0}} \mathrm{Ind}(X_0, x)$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k$$

$$= \chi(S)$$

et on a la Formule de Poincaré-Hopf.

On pourrait aussi choisir le gradient d'1 fct de hauteur.



Pour le cas $g = 0$, voir le TDG!

On constate que pour que Σ_g possède un champ de vecteurs qui ne s'annule pas, on doit avoir

$$\sum_{\substack{x\in S \\ X(x)=0}} \mathrm{Ind}(X,x) = 0 = \chi(S) = 2-2g$$

soit ssi $g=1$.

Compliments pour celles et ceux qui veulent aller plus loin, un bonus que j'ai supprimé pour démontrer l'existence de voisinages tubulaires.

Cette partie vise à établir l'affirmation admise à partir de la question **3.** Elle ne fait pas partie du barème et ne doit être traitée que si vous en avez le temps (et l'envie) !

9. **a)** Montrer que pour tout $(x,t) \in S \times \mathbb{R}$, on a $T_{(x,t)}N(T_xS \times \{0\}) \subseteq T_xS$ et $T_{(x,t)}N(\{0\} \times \mathbb{R}) \subseteq (T_xS)^\perp$ et que pour tout $x \in S$, $(x,0)$ est un point régulier de N.
Indication : On pourra écrire $\mathbb{R}^3 = T_xS \oplus (T_xS)^\perp$ et montrer que tout vecteur de T_xS ainsi que tout vecteur de $(T_xS)^\perp$ admet un antécédent par $T_{(x,0)}N$.

b) Justifier que pour tout $x \in S$, il existe $\delta_x > 0$ et un ouvert U_x de S contenant x tel que $N_{|U_x \times]-\delta_x,\delta_x[}$ soit un C^∞-difféomorphisme sur son image puis qu'il existe $\delta > 0$ tel que $N_{|S\times]-\delta,\delta[}$ soit un C^∞-difféomorphisme local.

c) On fixe $\delta > 0$ tel que la conclusion de la question précédente soit valable. Supposons que pour tout $\delta > \delta' > 0$, $N_{|S\times[-\delta',\delta']}$ ne soit pas injective et soit r un entier naturel non nul tel que $1 < \delta r$. Considérons alors deux suites $((p_n,t_n))_{n\geqslant r}$ et $((q_n,s_n))_{n\geqslant r}$ telles que pour tout $n \geqslant r$, $(p_n,t_n) \neq (q_n,s_n) \in S \times \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$ et $N(p_n,t_n) = N(q_n,s_n)$. Montrer que ces deux suites admettent deux sous-suites convergeant respectivement vers $(p,0)$ et $(q,0)$ avec $p,q \in S$. En déduire que $p=q$ puis aboutir à une contradiction en utilisant la question précédente. Conclure.