Cours du 28 janvier

K. Destagnol

Université Paris Saclay

28 janvier 2021

Rappels– Fonctions périodiques, continues, continues par morceaux

Rappels– Coefficients de Fourier complexes

Rappels– Coefficients de Fourier réels

Rappels– Lien entre les deux types de coefficients

Fin du calcul commencé la dernière fois

Coefficients de Fourier et dérivation

Proposition

Soit f une fonction T-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux On a alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} c_n(f), \quad a_0(f') = 0, \quad \forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_n(f') = \frac{2n\pi}{T} b_n(f) \\ b_n(f') = -\frac{2n\pi}{T} a_n(f). \end{cases}$$

En particulier, si on a déjà calculé les coefficients de Fourier d'une fonction f et que l'on vous demande de calculer ceux de f', on ne se fatigue pas à les calculer !

Série de Fourier associée à une fonction périodique

Définition

Soit f continue par morceaux et T-périodique. On appelle **série de Fourier**de f la série définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$a_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \left[a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]$$

ou de manière équivalente

$$c_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \left[c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T}} + c_{-n}(f) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \right].$$

Cette dernière série est notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T}}$.

Série de Fourier associée à une fonction périodique

Définition

Soit f continue par morceaux et T-périodique. On appelle série de Fourierde f la série définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$a_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \left[a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]$$

ou de manière équivalente

$$c_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \left[c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T}} + c_{-n}(f) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \right].$$

Cette dernière série est notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T}}$.

Pour le moment, on ne dit rien de la convergence de ces séries de Fourier.

Exemple

(Q1) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier converge-t-elle ?

(Q2) Si on a convergence pour une valeur de t, la somme de la série de Fourier est-elle égale à $f(t)$?

Théorème de Dirichlet I

Théorème de Dirichlet continu

Soit f une fonction T-périodique continue et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge pour tout réel t et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{2in\pi t}{T}}.$$

Théorème de Dirichlet II

Théorème de Dirichlet non continu

Soit f une fonction T-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier converge pour tout réel t et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{2in\pi t}{T}} = \begin{cases} f(t) \text{ si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

avec

$$f(t^+) = \lim_{\substack{s\to t \\ s>t}} f(s) \quad \text{et} \quad f(t^-) = \lim_{\substack{s\to t \\ s<t}} f(s)$$

les limites respectivement à droite et à gauche de f.

Exemple 1

Exemple 2

Égalité de Parseval

Égalité de Parseval

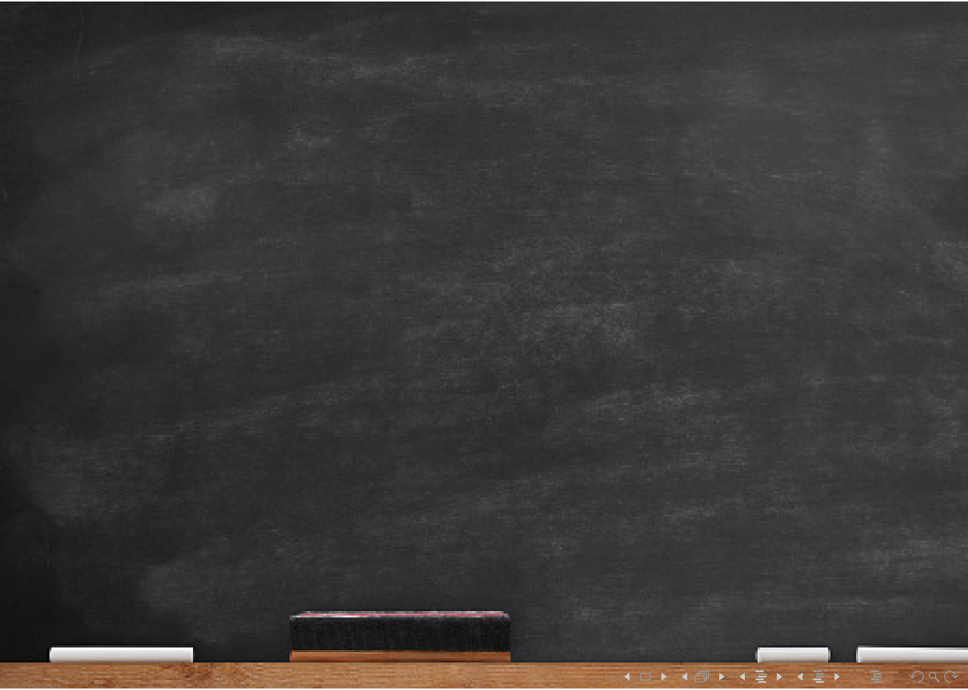
Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux. Alors les séries numériques

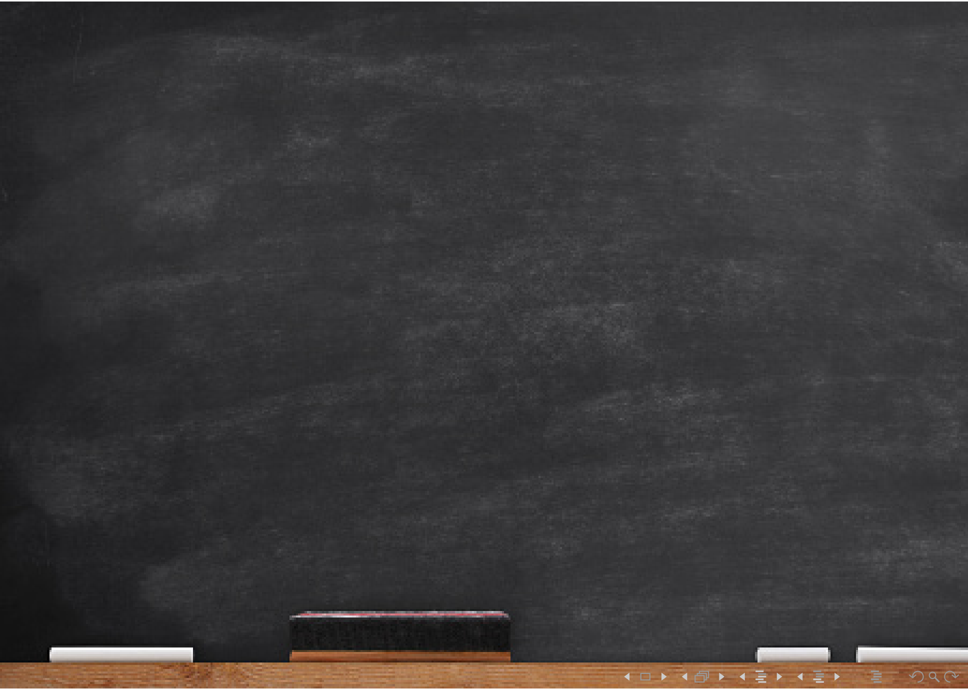
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$$

convergent et

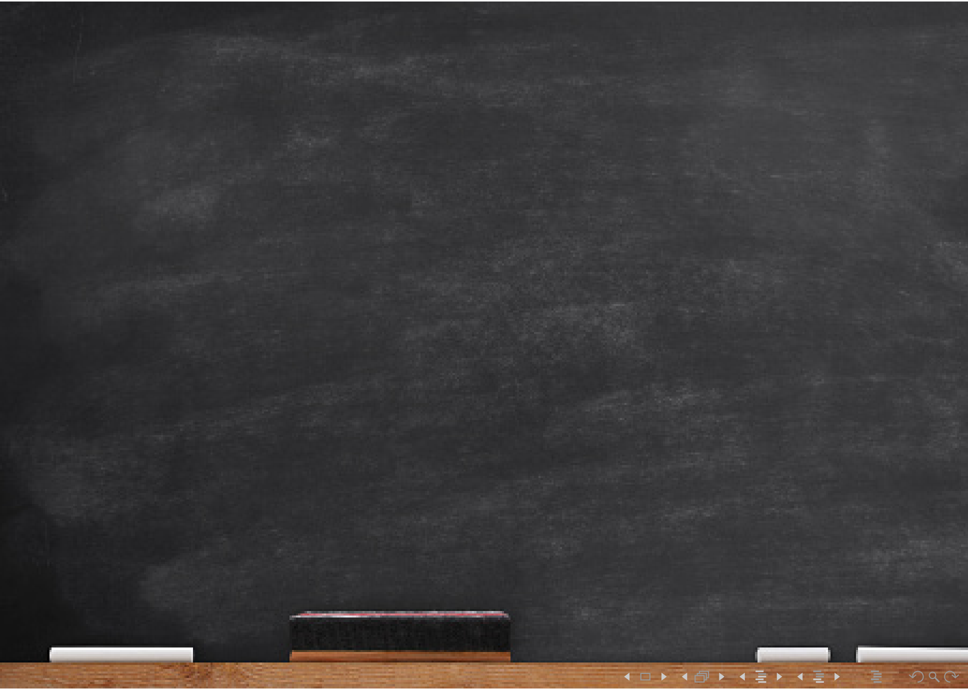
$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Exemple 1





Exemple 2



Application des séries de Fourier au traitement de signal

Chapitre 5

Rappels d'algèbre linéaire