Analyse de Fourier et géométrie : DM 2

►►*Merci de rendre votre copie **pour le 19 mars 2021** sous forme d'un **unique fichier pdf** à votre chargé de TD. Merci d'utiliser le formulaire que vous trouverez en cliquant ici pour le groupe C2 et l'adresse mail elodie.maignant@ens-paris-saclay.fr pour le groupe C1. Pour convertir des formats png, jpeg ou autres au format pdf ou fusionner différents pdfs en un seul, je vous renvoie (par exemple) au site suivant. Un **corrigé** sera ensuite disponible ici, sur la page web du cours. Vous pouvez rédiger votre travail **par groupe de 3 maximum** à condition que **chacun ou chacune d'entre vous rédige une partie du devoir.***◄◄

Exercice 1 — Séries numériques.

1. Établir que pour tout $x \in [0,1]$, on a $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{2}$. Établir alors la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{n!}$? Est-ce que la réponse dépend de la valeur de x ?

Exercice 2 — Séries de Fourier. Soit f la fonction 2π-périodique paire définie par

$$\forall t \in [0,\pi], \quad f(t) = 1 - \frac{t^2}{\pi^2}.$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? Continue par morceaux ? $\mathcal{C}^1$ par morceaux ? Donner le cas échéant les points en lesquels f est continue et ceux en lesquels elle admet une discontinuité.
2. Justifier que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est paire et en déduire que
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$
En déduire que $a_0(f) = \frac{2}{3}$ et que
$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = -\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}.$$
4. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f(t) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos(nt)}{n^2}.$$
5. Retrouver la valeur bien connue de la somme et la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.
6. Montrer la convergence et donner la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
7. Étudier, en utilisant l'égalité de Parseval, la convergence et la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3 — Géométrie. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(2x+2y-z, -2x+y-2z, x-2y-2z). \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est une application linéaire et donner sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer ${}^tMM$ et $\det(M)$. Que pouvez-vous en conclure ?

3. Déterminer

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Justifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel, le décrire géométriquement et montrer que $f_1 = (0, 1, 2)$ en est un vecteur directeur. En déduire un vecteur directeur e_1 de norme 1.

4. Déterminer $F^\perp$ et le décrire géométriquement. Montrer que $e_2 = (1, 0, 0)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$ sont deux vecteurs orthogonaux de $F^\perp$ et que (e_1, e_2, e_3) constitue une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

5. Justifier que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

6. On considère la matrice

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Justifier qu'il existe un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

7. En déduire la nature géométrique de f et expliquer comment construire l'image du point $(1, 1, 1)$.
Indication : On donne $\theta \approx -0,84$ radians.