Cours du 28 janvier

K. Destagnol

Université Paris Saclay

28 janvier 2021

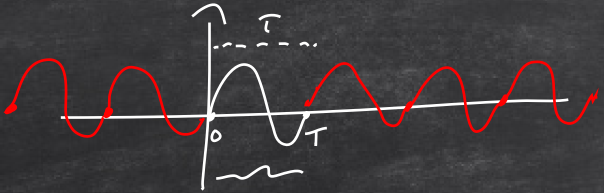
Rappels– Fonctions périodiques, continues, continues par morceaux

2π-périodique :
- $\cos(t)$
- $\sin(t)$
- e^{it}.

Périodique de période $T > 0$:

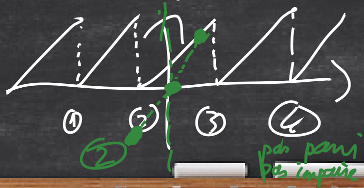
$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

graphe



Continue

Continue par morceaux



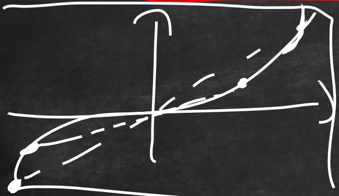
Rappels– Coefficients de Fourier complexes

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique.

Coefficients de Fourier complexes de f : $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

où $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.}$$



$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{n'importe quel intervalle de longueur } 2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

f paire $\Rightarrow c_n(f) = c_{-n}(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

f impaire $\Rightarrow c_n(f) = -c_{-n}(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Rappels– Coefficients de Fourier réels

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique

coefficients de Fourier réels : $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$.

$(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$

① $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$

② $\forall n \geqslant 1$,

$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\,dt$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\,dt$

f paire $\Rightarrow$ $b_n(f) = 0$ $\forall n \geqslant 1$	f impaire $\Rightarrow$ $a_n(f) = 0$ $\forall n \geqslant 0$.

Rappels– Lien entre les deux types de coefficients

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique

$$c_n(f) = \begin{cases} a_0(f) & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n(f) - i b_n(f)) & \text{si } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + i b_{-n}(f)) & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

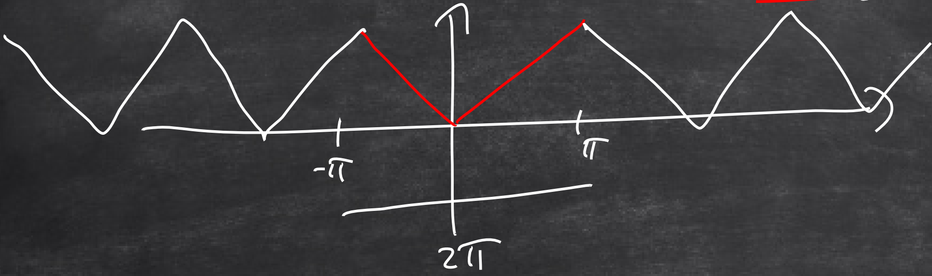
calculer $c_n(f)$ à partir des $a_n(f)$ et des $b_n(f)$.

$$a_n(f) = 2\,\mathrm{Re}(c_n(f)) \quad \text{et} \quad b_n(f) = -2i\,\mathrm{Im}(c_n(f))$$

calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ à partir des $c_n(f)$.

$\boxed{\text{Fin du calcul commencé la dernière fois}}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π - périodique, $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$.



f paire $\Rightarrow$ $\boxed{b_n(f) = 0 \quad \forall n \geqslant 1.}$

$\left[a_0(f) = \frac{\pi}{2} \right]$.

Soit $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(t)\cos(nt)}\, dt$

$f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$

$|t|$?? NON

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt$$

(car $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$) $= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(nt)\, dt$.

$|t| = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ -t & \text{si } \boxed{t \leq 0} \end{cases}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(nt)\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \underbrace{|t|}_{-t} \cos(nt)\, dt + \int_0^{\pi} \underbrace{|t|}_{t} \dots$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos(nt)\,dt = \boxed{\frac{1}{\pi}\times 2\int_0^{\pi} |t|\cos(nt)\,dt.}$$

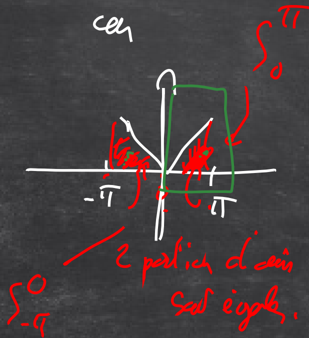
$t \mapsto |t|\cos(nt)$ est paire

$$|-t|\cos(-nt) = |t|\cos(nt)$$

$|-t| = |t|$

$\cos$ paire

car



$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} g(t)\,dt \text{ si } g \text{ est une fonction paire.}}$$

$a_n(\ell) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |t| \cos(nt)\,dt = \boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{t}_{v}\ \underbrace{\cos(nt)}_{u'}\,dt}$

$|t| = t$ si $t \geq 0$

[IPP : intègre $t^n \times \cos$, $t^n \times \sin$, $t^n \times e$, $\boxed{IPP}$ en dérivant t^n et en primitive $\cos$, $\sin$, e]

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

Ici on pose $v(t) = t$ ⟹ $v'(t) = 1$

$u'(t) = \cos(nt)$ ⟸ $u(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$.

$$a_n(\ell) = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(nt)}{n} \times t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right)$$

$$a_n(\ell) = -\frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} -\frac{2}{n^2\pi}(1-1) = 0 & n \text{ pari} \\ -\frac{2}{n^2\pi}(1+1) = -\frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impari} \end{cases}$$

$n \geq 1$

$$\boxed{a_0(\ell) = \frac{\pi}{2}}, \quad b_n(\ell) = 0$$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & \text{si } n \text{ impari} \end{cases}$$

$$\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$\left(-\frac{\cos(0)}{n}\right)$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(0)}{n}\right) = -\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{a_n(\ell) = -\frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right).}$$

Coefficients de Fourier et dérivation

Proposition

Soit f une fonction T-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux On a alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} c_n(f), \quad a_0(f') = 0, \quad \forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_n(f') = \frac{2n\pi}{T} b_n(f) \\ b_n(f') = -\frac{2n\pi}{T} a_n(f). \end{cases}$$

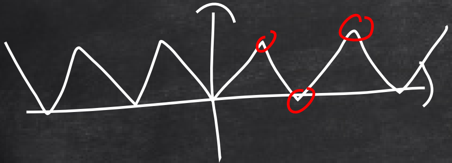
En particulier, si on a déjà calculé les coefficients de Fourier d'une fonction f et que l'on vous demande de calculer ceux de f', on ne se fatigue pas à les calculer !

C^1 par morceaux : continue par morceaux + dérivable sauf évt en un nbre fini de points (pas de tgte verticale et un nombre fini de pics / angles).

pas dérivable → pas continue.

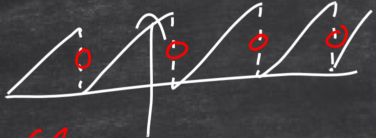
→ tgte verticale) exclu

→ pic.



C^1 par morceaux.

continue, dérivable sauf



C^1 par morceaux

continue par morceaux.

x réel $\rightsquigarrow$ (x_n) décimales $\rightsquigarrow$ $\sum \frac{x_n}{10^n}$ $\rightsquigarrow$

Série de Fourier associée à une fonction périodique

Définition

Soit f continue par morceaux et T-périodique. On appelle série de Fourier de f la série définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

truc qui rappelle cos $\quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt$

$$a_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \left[a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right]$$

ou de manière équivalente

$$c_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \left[c_n(f) e^{\frac{2i\pi n t}{T}} + c_{-n}(f) e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} \right].$$

Cette dernière série est notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$.

Série de Fourier associée à une fonction périodique

Définition

Soit f continue par morceaux et T-périodique. On appelle **série de Fourier**de f la série définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$a_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \left[a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]$$

ou de manière équivalente

$$c_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \left[c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T}} + c_{-n}(f) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \right].$$

Cette dernière série est notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T}}$.

Pour le moment, on ne dit rien de la convergence de ces séries de Fourier.

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique, $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$

$a_0(f) = \frac{\pi}{2}$

$$a_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$b_n(f) = 0$

Quelle est la série de Fourier de f ??

Par définition, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\left(\underline{a_0(f)} + \sum_{n \geq 1} \left(\underline{a_n(f)} \cos(nt) + \underline{b_n(f)} \sin(nt) \right) \right)$$

$$a_0(\ell) + \sum_{n\geq 1} \left(a_n(\ell)\cos(nt) + \cancel{b_n(\ell)\sin(nt)} \right)$$

$$a_0(\ell) = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n(\ell) = 0$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(\ell)\cos(nt)$$

$$a_n(\ell) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & n \text{ impari} \end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impari}}} a_n(\ell)\cos(nt)$$

n impari

$n = 2k+1$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impari}}} -\frac{4}{n^2\pi}\cos(nt)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impari}}} \frac{\cos(nt)}{n^2}} = \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}}$$

(Q1) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier converge-t-elle ?

(Q2) Si on a convergence pour une valeur de t, la somme de la série de Fourier est-elle égale à $f(t)$?

$$S_f(t) = a_0(f) + \sum_{n \geq 1} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$$

Théorème de Dirichlet I

continue + pas de saut vertical
+ nbre fini de pics.

Théorème de Dirichlet continu

Soit f une fonction T-périodique continue et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge pour tout réel t et

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) = \underbrace{a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right]} = \underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{\frac{2in\pi t}{T}}}.$$

fct périodique qcque.

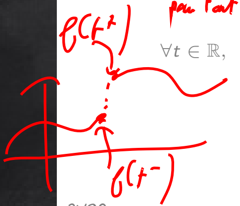
= somme de fcts périodiques de base.

Théorème de Dirichlet II

pas [illegible] et un nbre fini de points où elle est non continue + 1 nbre fini de pics

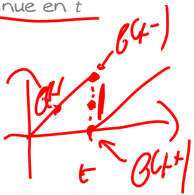
Théorème de Dirichlet non continu

Soit f une fonction T-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier converge ~~simplement~~ et pour tout $t \in \mathbb{R}$



$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{2in\pi t}{T}} = \begin{cases} f(t) \text{ si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$



avec

$$f(t^+) = \lim_{\substack{s \to t \\ s > t}} f(s) \quad \text{et} \quad f(t^-) = \lim_{\substack{s \to t \\ s < t}} f(s)$$

les limites respectivement à droite et à gauche de f.

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π - périodique. $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$.

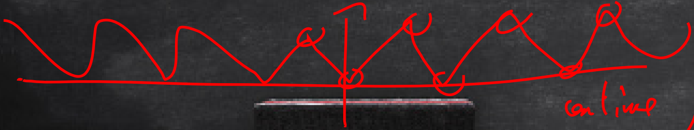
La série de Fourier de f

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

converge ?

Appliquer Dirichlet. → continue $\mathcal{C}^1$ par morceaux ;

↘ non continu $\mathcal{C}^1$ ______ ,



continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exemple 1

$f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$

Par Dirichlet, la série converge pour tout réel t et

$$\boxed{f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}}.$$

Pour $t = 0$

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

0

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{soit} \quad \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

donc $$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

avec convergence.

On peut en déduire que $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(ℓ plus . , on le fera en TD .)

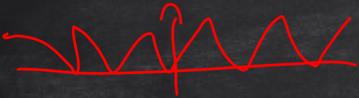
$f(t) = e^t$ sur $[0,2\pi)$ 2π-périodique

$c_n(f)$ calculés la semaine.

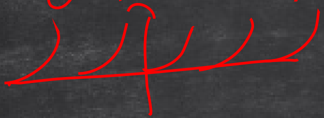
Série de Fourier associée et appliquer Dirichlet.

Cpdt, DM II ou demain).

$f(t) = |t|$ $[-\pi,\pi)$



$f(t) = e^t$ sur $[0,2\pi)$



$$f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right)$$

$N = 1000$

$$f(t) \approx a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right)$$

Exemple 2

Je vous renvoie au corrigé du DM II de l'an dernier sur Ecampus ou le site web du cours pour la série de Fourier et l'application du théorème de Dirichlet pour la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = e^t$ $\forall t \in [0, 2\pi)$.

Égalité de Parseval

Égalité de Parseval

Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux. Alors les séries numériques

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$$

convergent et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

⚠ À ne pas oublier.

Exemple 1

$f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$, f 2π-périodique

$a_0(f) = \frac{\pi}{2}$

$b_n(f) = 0$

$a_n(f) = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} & n \text{ impair} \end{cases}$

On veut appliquer Parseval. On a

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$$

(1) remplacer a_n, b_n

(2) à calculer.

avec convergence de la série.

①

$$|a_0(\ell)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n(\ell)|^2 + \underbrace{|b_n(\ell)|^2}_{0}\right) \;\Big|\Big|\Big|$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impari}}}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi n^2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impari}}}^{\infty}\frac{16}{\pi^2 n^4} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impari}}}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}}$$

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

reste à calculer.

$[f(t) = t$ sur $[0, 2\pi)$ 2π-périodique$\}$.

$f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi)$.

Mais f 2π-périodique, pair

donc $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$

$= 2 \int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\int_0^{\pi} t^2 dt$

On a donc $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Ainsi $$\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{3}$$

Soit $$\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{12}$$

$\boxed{\text{Exemple 27}}$

et finalement $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^3}{8\times 12} = \frac{\pi^3}{96}$$

avec convergence de la série automatique.

Voir DM II de l'an dernier pour Parseval pour $f(t)=e^t$ sur $[0,2\pi)$, 2π-périodique.

Voir polycopié pour calcul des coefficients de Fourier, Dirichlet et Parseval pour $f(t)=|t|$ $\forall t\in[0,2\pi)$, 2π-périodique.

Application des séries de Fourier au traitement de signal

Chapitre 5

Rappels d'algèbre linéaire