Analyse de Fourier et géométrie : Examen final

2 avril 2021 (2 heures)

►Exercice 1 – (Applications du cours et séries numériques), **environ 4 points**, $\leqslant 20$ *min*

a) Préciser si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$ converge et si elle converge absolument.

b) Dire si les séries suivantes convergent ou divergent :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{3^n}{n!}.$$

c) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Que pouvez-vous dire de la nature géométrique de f ?

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1+\sqrt{n}}{n^3+\sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

Qu'en déduisez-vous quant à la convergence ou la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1+\sqrt{n}}{n^3+\sqrt{n}}$?

Indication : On pourra chercher à majorer le numérateur et minorer le dénominateur.

Correction – sur 4 points

a) (**sur 0,75 point**) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$ est une série de Riemann alternée avec $\alpha = \frac{2}{3} > 0$ donc elle converge. La convergence absolue revient à la convergence de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

qui est une série de Riemann avec $\alpha = \frac{2}{3} \leqslant 1$ donc divergente. Ainsi, on n'a pas convergence absolue !

b) (**sur 1 point**) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n$ est une série géométrique de raison $q = 2 \geqslant 1$ donc divergente d'après le cours !

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{3^n}{n!}$ est à termes positifs et de nature multiplicative. On calcule alors

$$\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

et la série converge d'après le critère de d'Alembert !

c) (**sur 0,75 point**) On voit immédiatement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$$

Le cours garantit ainsi qu'il s'agit d'une rotation autour de l'axe (Ox) des abscisses dans la direction de y vers z d'angle $\frac{\pi}{6}$.

d) (**sur 1 point**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $1+\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}$ tandis que[1] $n^3+\sqrt{n} \geqslant n^3 > 0$ de sorte que $\frac{1}{n^3+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^3}$. Ainsi, il vient que
$$0 \leqslant \frac{1+\sqrt{n}}{n^3+\sqrt{n}} \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{n^3} = \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}.$$
On sait alors par le cours que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = \frac{5}{2} > 1$ et donc que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}$ converge. Comme on a affaire à une série à termes positifs, on déduit du cours que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1+\sqrt{n}}{n^3+\sqrt{n}}$ converge.

►EXERCICE 2 – (SÉRIES DE FOURIER), **environ 12 points**, $\approx 1h10$

Soit f la fonction 2π-périodique **paire** définie par
$$\forall t \in [0,\pi], \quad f(t) = \sin(t).$$

a) Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

b) Justifier que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $n \geqslant 0$. Justifier que
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$
En déduire que $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}$.

d) Soit $t \in \mathbb{R}$. En calculant de deux manière la partie imaginaire de e^{2it}, montrer que $\sin(t)\cos(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$. En déduire que $a_1(f) = 0$.

e) En admettant le fait que
$$\forall n > 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(t)\cos(nt) = \frac{1}{2}(\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)),$$
établir que
$$\forall n \geqslant 2, \quad a_n(f) = -\frac{2\,(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}.$$

f) Supposons que $n = 2k$ soit pair avec $k \in \mathbb{N}^*$. Préciser la valeur de $a_n(f) = a_{2k}(f)$.
De même, supposons que $n = 2k+1$ soit impair avec $k \in \mathbb{N}$. Préciser la valeur de $a_n(f) = a_{2k+1}(f)$.

g) Justifier que pour tout réel t, on ait l'égalité
$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$$
avec convergence de la série en jeu.
Indication : On pourra séparer la somme selon que $n = 2k$ est pair ou $n = 2k+1$ est impair.

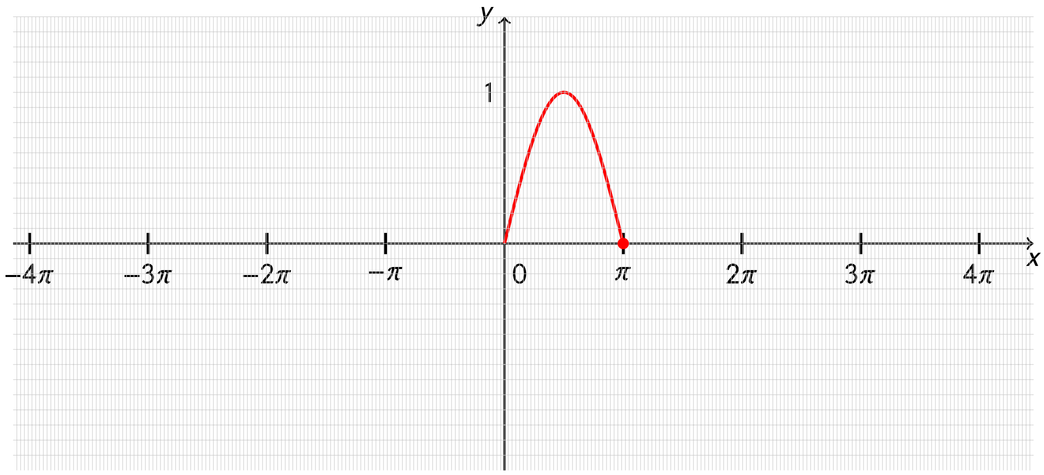
h) En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{4k^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$ convergent ainsi que la valeur de leur somme.

i) Étudier, en utilisant l'égalité de Parseval, la convergence et la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.
Indication : On admettra ici que pour tout réel t, $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$.

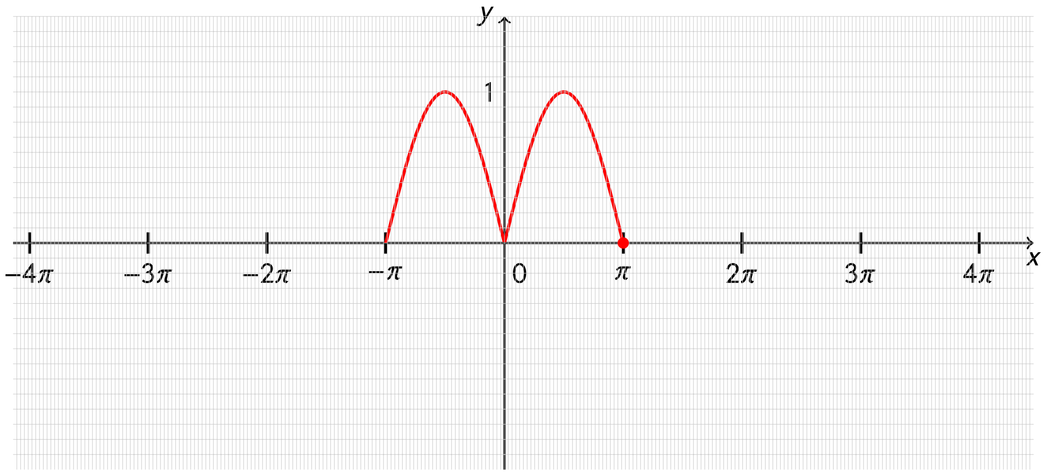
1. Noter qu'on garde le terme dominant ici !

CORRECTION – sur 12,5 points

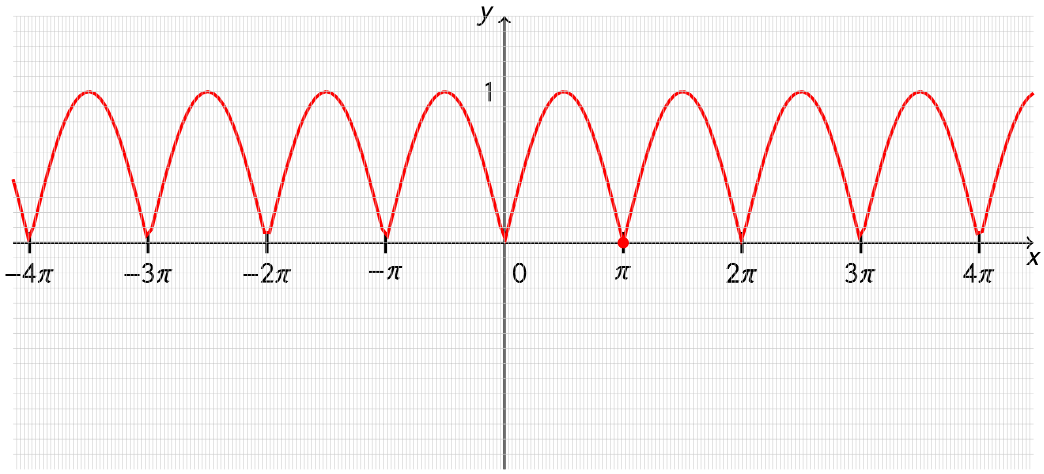
a) (**sur 1 point**) Comme d'habitude on commence par tracer sur $[0, \pi]$:



puis sur $[-\pi, 0]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :



et enfin sur $\mathbb{R}$ en reportant cette portion de graphe[2]



On voit qu'on trace le graphe sans lever le crayon et qu'on a une fonction dérivable partout sauf en un nombre fini de "pics" sur la portion tracée où la fonction admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

b) (**sur 0,5 point**) La fonction est paire donc le cours garantit que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Noter qu'en fait f est π-périodique !

c) (**sur 1,5 point**) Soit $n \geqslant 0$. On obtient le résultat par parité et 2π-périodicité[3]

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On a par définition et en utilisant ce qui précède que

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\cos(0)-\cos(\pi)).$$

Finalement, puisque $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, il vient $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}$.

d) (**sur 1,5 point**) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a d'une part $e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t)$ et d'autre part

$$e^{2it} = (e^{it})^2 = (\cos(t) + i\sin(t))^2 = \cos^2(t) - \sin^2(t) + 2i\sin(t)\cos(t).$$

En identifiant les parties imaginaires, on obtient que $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$ soit que $\sin(t)\cos(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$. Par définition et la question précédente, on a

$$a_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(2t)\mathrm{d}t.$$

D'où,

$$a_1(f) = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi}(\cos(0)-\cos(2\pi)) = 0$$

car $\cos(0) = \cos(2\pi)$.

e) (**sur 2,5 points**) On admet la formule de trigonométrie suivante qui se démontrerait en utilisant les mêmes idées que celle de la question précédente :

$$\forall n > 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(t)\cos(nt) = \frac{1}{2}(\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)).$$

Soit $n \geqslant 2$. Par définition et la question c), on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

La formule admise et la linéarité de l'intégrale fournissent alors[4]

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((n+1)t)\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((n-1)t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(0)-\cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{\cos(0)-\cos((n-1)\pi)}{n-1}\right). \end{aligned}$$

On a alors $\cos(0) = 1$ et $\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$ et $\cos((n-1)\pi) - (-1)^{n-1} = -(-1)^n$ de sorte que

$$a_n(f) = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = -\frac{2\,(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}.$$

f) (**sur 0,5 points**) Supposons que $n = 2k$ soit pair avec $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors $(-1)^n = (-1)^{2k} = 1$ et $a_n(f) = a_{2k}(f) = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}$.
De même, supposons que $n = 2k+1$ soit impair avec $k \in \mathbb{N}$. On a alors $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = -1$ et $a_n(f) = a_{2k+1}(f) = 0$ si $k > 0$ d'après la question précédente et si $k = 0$, la question d) garantit que le résultat vaut toujours avec $a_1(f) = 0$.

3. Voir les corrigés précédents pour plus de détails!
4. Ce qui est bien licite car $n+1 \neq 0$ et $n-1 \neq 0$ car on a traité le cas $n = 1$ à part!

g) (**sur 1 point**) Soit t un réel. Comme f est continue et C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet garantit que

$$f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)] = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt)$$

avec convergence de la série en jeu et par la question b). On sépare alors la somme entre les termes pairs et impairs de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}(f)\cos(2kt) + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}(f)\cos((2k+1)t)$$

et d'après la question précédente et les questions d) et e)

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-4\cos(2kt)}{\pi(4k^2-1)} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$$

avec convergence de la série en jeu.

h) (**sur 2 points**) On applique la question précédente avec $t = 0$ pour obtenir que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{4k^2-1}$ converge et que

$$f(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

ce qui entraîne, puisque $f(0) = 0$, que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

De même, on applique la question précédente avec $t = \frac{\pi}{2}$ de sorte que $\cos(2kt) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ pour obtenir que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$ converge et que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$$

ce qui entraîne, puisque $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(1) = 1$ car $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$, que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2-\pi}{4}.$$

i) (**sur 2 points**) On admet ici que pour tout réel t, $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$. Puisque f est continue et donc en particulier continue par morceaux, l'égalité de Parseval assure que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right]$$

avec convergence de la série. On obtient comme en c) que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos(2t))\mathrm{d}t$$

en utilisant l'égalité admise. La linéarité fournit alors

$$\int_0^{\pi}(1-\cos(2t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi}\cos(2t)\mathrm{d}t = \pi - \left[-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

car $\sin(0) = \sin(2\pi)$. On a donc en utilisant la question f) que

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

avec convergence de la série et finalement

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

►Exercice 3 – (Géométrie), environ 6 points, ≈ 35 *min*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_a(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + ay, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right).$$

a) Écrire la matrice M_a de f_a dans la base canonique.

b) Calculer ${}^tM_aM_a$ et $\det(M_a)$ en fonction de a. En déduire que l'application linéaire f_a préserve angles et distances sans "retourner" le plan si, et seulement si, $a = -\frac{1}{2}$.
Dans la suite, on se fixe cette valeur de $a = -\frac{1}{2}$.

c) Décrire géométriquement l'application linéaire $f_{-\frac{1}{2}}$.

d) On considère à présent l'application linéaire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right).$$

Écrire N la matrice de g dans la base canonique et décrire géométriquement g.

e) Construire l'image P' du point $P = (1,1)$ par $f_{-\frac{1}{2}}$. Deviner sans calculs ce que devient alors P' si on lui applique g ?

f) Justifier que la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $g \circ f_{-\frac{1}{2}}$ est donnée par $NM_{-\frac{1}{2}}$. Calculer alors ce produit $NM_{-\frac{1}{2}}$ et démontrer votre intuition de la question précédente sur l'image de P'.

Correction – sur 6 points

a) (**sur 0,75 points**) On calcule $f_a(1,0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $f_a(0,1) = \left(a, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ si bien que la matrice M_a est donnée par

$$M_a = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

b) (**sur 1 points**) On obtient

$${}^tM_aM_a = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right) & a^2+\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

et $\det(M_a) = \frac{3}{4} - \frac{a}{2}$. L'application linéaire f_a préserve angles et distances sans "retourner" le plan si, et seulement si, ${}^tM_aM_a = I_3$ et $\det(M_a) = 1$et on voit immédiatement que cela équivaut à $a = -\frac{1}{2}$.
Dans la suite, on se fixe cette valeur de $a = -\frac{1}{2}$.

c) (**sur 0,75 points**) Le cours garantit alors que f_a est une rotation de centre O et d'angle car

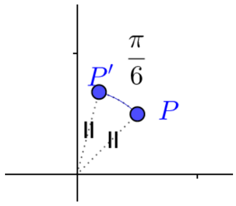
$$M_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}.$$

d) (**sur 1,5 points**) On obtient immédiatement que

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$$

et g est une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

e) (**sur 1 point**) Le point P' est obtenu en faisant tourner le point $P = (1, 1)$ d'un angle $\frac{\pi}{6}$ dans le sens trigonométrique. En appliquant g à P', on le fait tourner de $-\frac{\pi}{6}$ dans le sens trigonométrique soit de $\frac{\pi}{6}$ dans le sens horaire (ou anti-trigonométrique) et donc on devrait annuler la première rotation et retomber sur le point P de départ.



f) (**sur 1 point**) D'après le cours, la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $g \circ f_a$ est donnée par NM_a car N est celle de g dans la base canonique et M_a celle de f_a dans la base canonique. On calcule immédiatement que[5] $NM_a = I_2$ et ainsi $g(P') = g \circ f(P) = NM_aP = I_2P = P$ et on retombe bien sur le point P de départ comme prévu géométriquement !

5. On dit que N et M_a sont inverses l'une de l'autre !