TD II : Séries de Fourier

► **Exercice 1 — Un premier exemple.** On considère la fonction 2π-périodique paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est définie par

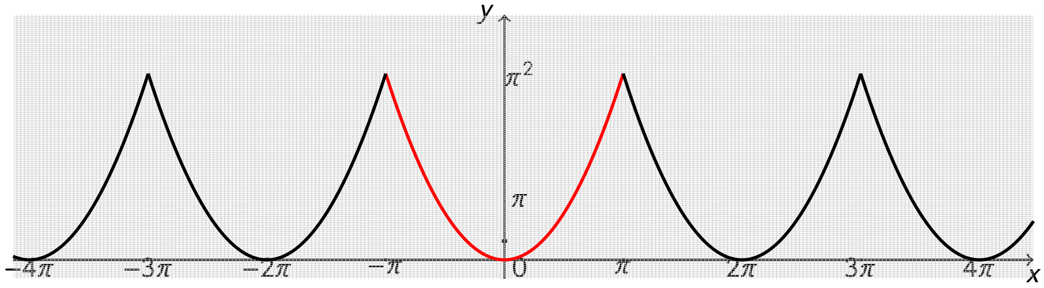
$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = t^2.$$

1. Dessiner le graphe de f, d'abord sur $[-\pi, \pi[$ puis sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? C^1 par morceaux ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la convergence et la somme des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

► **Solution.**

1. Voici le graphe en question (la portion en rouge correspond à l'intervalle $[-\pi, \pi[$).



On constate que la fonction est continue (on peut tracer le graphe sans lever le crayon) et on constate sur la portion de graphe tracée un nombre fini de pics avec une dérivée à gauche et à droite à chaque fois et aucune tangente verticale donc la fonction est bien de classe C^1 par morceaux.

2. On constate que le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui signifie que la fonction f est paire. Le cours nous assure alors que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = 0.}$$

Par ailleurs, on a par définition que

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$$

où l'on va utiliser l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi[$ de longueur 2π pusique c'est sur cet intervalle que la fonction f est donnée[1] par $f(t) = t^2$. Ainsi, il vient

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{6\pi}[t^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a alors[2]

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On a alors

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t$$

1. Je rappelle en effet que pour $t \notin [-\pi, \pi]$, on a $f(t) \neq t^2$!!!
2. Je rappelle que la définition de $a_0(f)$ qui fait intervenir un $\frac{1}{2\pi}$ est différente de celle de $a_n(f)$ ou de $b_n(f)$ pour $n \geqslant 1$ qui font intervenir un $\frac{1}{\pi}$ et qu'il faurt donc toujours traiter le cas de $a_0(f)$ à part !

car pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = t^2$. On utilise alors le fait que $t \mapsto t^2 \cos(nt)$ est paire pour déduire du cours que

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{si bien que} \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On doit alors intégrer un polynôme de degré deux fois un cosinus et on va donc effectuer deux intégrations par parties successives en dérivant à chaque fois le polynôme et en intégrant le cosinus ou le sinus. Commençons donc par une première intégration par parties avec

$$\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \cos(nt) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

car $n \geqslant 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t &= \left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t \\ &= \pi^2 \frac{\sin(n\pi)}{n} - 0 - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale et car $\sin(n\pi) = 0$ pour tout entier n. On a alors affaire à l'intégrale

$$\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t$$

qui est encore de la forme un polynôme fois un sinus. On effectue par conséquent une nouvelle intégration par parties avec

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(nt) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

car $n \geqslant 1$. Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t &= \left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} - 0 + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale. On sait alors que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t = -\frac{2\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

Enfin, on a puisque $n \geqslant 1$ que

$$\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Finalement,

$$\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

et donc

$$\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$$

et enfin

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.}$$

3. Le théorème de Dirichlet (dans sa version continue, autrement dit (i) du polycopié de cours) garantit puisque la fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right]$$

avec convergence de la série en jeu. La question b) fournit alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nt) \quad \text{soit} \quad f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt). \qquad (*)$$

Pour faire apparaître la quantité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

on va appliquer $(*)$ pour $t = \pi$. On obtient alors

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)$$

mais on sait que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $(-1)^n \cos(n\pi) = (-1)^n \times (-1)^n = 1$ et

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On a alors par définition de f que $f(\pi) = \pi^2$ si bien que

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

ce qui donne finalement la valeur bien connue désormais

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

avec convergence de la série.
De même, pour faire apparaître la quantité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

on va choisir $t = 0$ dans $(*)$. On obtient alors

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Mais $f(0) = 0$ si bien que

$$\frac{\pi^2}{3} = -4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On a alors

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

de sorte qu'on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

avec convergence de la série en jeu.

Pour la dernière somme, on veut faire apparaître la quantité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

et donc on voit qu'on a besoin de mettre les coefficients de Fourier $a_n(f)$ au carré pour faire apparaître cette puissance 4. Cela suggère l'utilisation de la formule de Parseval. La fonction f étant continue, on peut appliquer l'égalité de Parseval qui fournit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] \qquad (**)$$

avec convergence de la série en jeu. Les calculs de la question b) fournissent immédiatement

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16(-1)^{2n}}{n^4} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

par linéarité et car $(-1)^{2n} = 1$ pour tout entier n. Il nous reste donc à calculer

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

en utilisant le fait qu'on peut intégrer une fonction 2π-périodique sur tout intervalle de longueur 2π. On a alors par définition de la fonction f

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^4\mathrm{d}t = \frac{1}{10\pi}[t^5]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}.$$

L'égalité de Parseval $(**)$ fournit alors

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \quad \text{soit} \quad 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{4\pi^4}{45}$$

ce qui donne alors

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

► **Exercice 2 — Un second exemple.** On considère la fonction 2π-périodique paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[0,\pi]$ est définie par

$$\forall t \in [0,\pi], \quad f(t) = \pi - t.$$

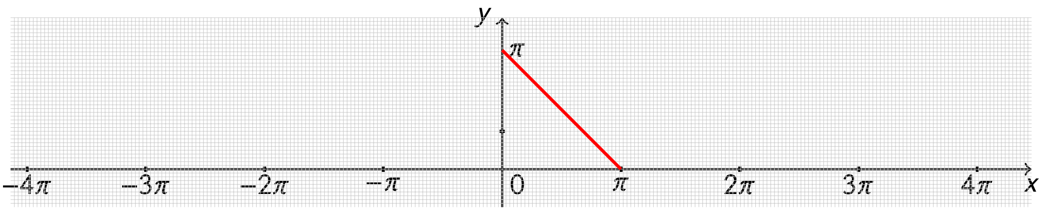
1. Dessiner le graphe de f, d'abord sur $[-\pi,\pi]$ puis sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? C^1 par morceaux ?
2. Calculer les coefficients réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Fourier de f.
3. Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n(f)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n(f)$. Donner également les coefficients de Fourier complexes de f.
4. Déduire du théorème de Dirichlet la convergence et la somme des séries $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{(2p+1)^2}$.
5. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ ainsi que la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
6. Que donne l'égalité de Parseval appliquée à la fonction f ? En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{(2p+1)^4}$.
7. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}$.
8. Reprendre l'exercice avec la fonction 2π-périodique impaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $[0,\pi]$ est définie par

$$\forall t \in]0,\pi], \quad g(t) = \pi - t \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$$

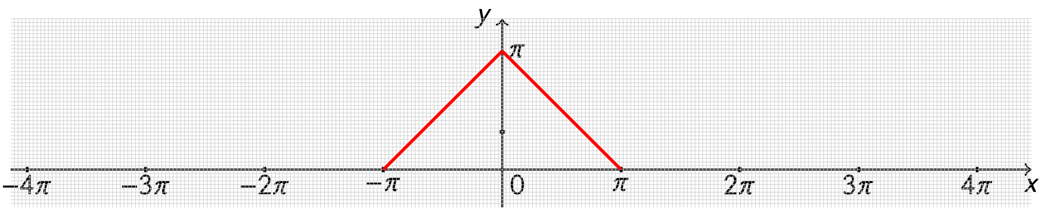
   Et en déduire la convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n}$. Que fournit Dirichlet pour $t = \frac{\pi}{2}$?

► **SOLUTION.**

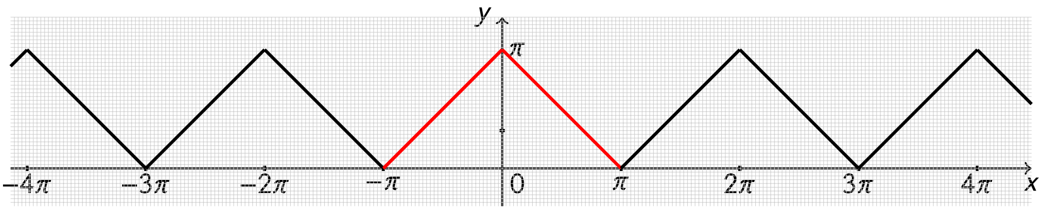
1. On commence par tracer le graphe de f sur $[0, \pi]$, intervalle sur lequel on sait que $f(t) = \pi - t$. On obtient alors une droite qui passe par $(0, f(0)) = (0, \pi)$ et $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 0)$.



Pour ensuite obtenir le graphe sur $\mathbb{R}$ tout entier, on doit décaler une portion de graphe sur un intervalle de longueur **une période**. Or, ici on précise que la fonction cherchée est 2π-périodique donc on doit translater une portion de graphe sur un intervalle de longueur 2π. Or, ici, on n'a tracé le graphe que sur un intervalle de longueur π, ce qui n'est pas suffisant ! Mais on n'a pas encore exploité le fait que la fonction cherchée doit être paire et son graphe doit donc être symétrique par apport à l'axe des ordonnées. On peut donc dans un premier temps compléter ce graphe sur $[-\pi, 0]$ en traçant le symétrique de la portion de graphe ci-dessus par rapport à l'axe des ordonnées.



On a alors le tracé du graphe de f sur un intervalle de longueur la période, à savoir 2π et pour obtenir le tracé total, il suffit de reporter successivement cette portion de graphe vers la gauche et vers la droite. On obtient ainsi le graphe suivant.



On constate que la fonction est continue (on peut tracer le graphe sans lever le crayon) et on constate sur la portion de graphe tracée un nombre fini de pics avec une dérivée à gauche et à droite à chaque fois et aucune tangente verticale donc la fonction est bien de classe C^1 par morceaux.

2. On sait que la fonction f est paire donc d'après le cours

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = 0.}$$

On a alors

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$$

par 2π-périodicité. On sait alors d'après le cours que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$$

de sorte que

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\pi - t)\mathrm{d}t$$

car à présent, on est sur l'intervalle $[0, \pi]$ sur lequel on sait que[3] $f(t) = \pi - t$. On calcule alors immédiatement que

$$\boxed{\mathrm{a}_0(f) = \tfrac{1}{\pi}\left[\pi t - \tfrac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \tfrac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \tfrac{\pi^2}{2}\right) = \tfrac{\pi}{2}.}$$

Soit à présent $n \geqslant 1$. Par définition, on a alors

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

Puisque f et cosinus sont paires, on en déduit que $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est aussi paire. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-t)\cos(-nt) = f(t)\cos(nt).$$

On a donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

et ainsi

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

car $f(t) = \pi - t$ sur $[0, \pi]$. On a alors par linéarité

$$\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On a alors par un calcul direct (voir l'exercice précédent question **2.** pour plus de détails) que

$$\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t = 0$$

et une intégration par parties

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \cos(nt) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

fournit que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t &= \left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t \\ &= \pi\frac{\sin(n\pi)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car $\sin(n\pi) = 0$ pour tout entier n. Finalement, on a par un calcul direct

$$\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = +\frac{\cos(0)}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{-(-1)^n + 1}{n}$$

car $n \geqslant 1$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout entier naturel n. En regroupant tous ces calculs, il vient que

$$\int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{-1 + (-1)^n}{n^2}$$

et finalement

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2}.}$$

3. À nouveau, cette égalité $f(t) = \pi - t$ n'est valable **QUE** sur $[0, \pi]$ et il est donc capital de s'y ramener !

3. On a évidemment que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$ puisque pour tout $n \geqslant 1$, $b_n(f) = 0$ d'après la question **1**. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, on a avec le résultat de la question **2.**

$$0 \leqslant 1-(-1)^n \leqslant 2 \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant 2(1-(-1)^n) \leqslant 4 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant a_n(f) \leqslant \frac{4}{n^2}$$

et le théorème des gendarmes fournit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n(f) = 0$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Noter que cela est tout à fait normal et automatique. En effet, pour toute fonction continue par morceaux, l'égalité de Parseval fournit que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right]$$

converge. On sait que cela implique alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] = 0.$$

Et, on a alors

$$0 \leqslant |a_n(f)|^2 \leqslant \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |b_n(f)|^2 \leqslant \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right]$$

et le lemme d'encadrement permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0.}$$

Pour obtenir les coefficients de Fourier complexes de f, on utilise les relations entre les coefficients réels et complexes (voir Proposition 4.4 du polycopié de cours). On a alors $c_0(f) = a_0(f) = \frac{\pi}{2}$ tandis que

$$\forall n > 0, \quad c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) = \frac{a_n(f)}{2} = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$

et

$$\forall n < 0, \quad c_n(f) = \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)) = \frac{a_{-n}(f)}{2} = \frac{1-(-1)^{-n}}{\pi(-n)^2} = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$

car $(-n)^2 = n^2$ et $(-1)^{-n} = (-1)^n$. Noter qu'on retrouve le fait que $c_{-n}(f) = c_n(f)$ qui découle du fait que la fonction est paire (voir Proposition 4.2 du polycopié de cours).

4. La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et le théorème de Dirichlet (dans sa version continue, autrement dit (i) du polycopié de cours) garantit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)]$$

avec convergence de la série en jeu. La question **2.** fournit alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos(nt) \quad \text{soit} \quad f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nt). \qquad (*)$$

On constate que la quantité $\frac{1-(-1)^n}{n^2}$ peut se réécrire

$$\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n^2} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On voit alors apparaître les quantités $\frac{1}{(2p+1)^2}$ puisque si n est impair, n est de la forme $n = 2p+1$ pour un certain entier naturel p. On va alors appliquer l'égalité $(*)$ avec $t = 0$ de sorte que

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

On a alors puisque $f(0) = \pi$

$$\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

et ce qui précède fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

soit

$$\boxed{\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

avec convergence de la série.

5. On a déjà effectué le passage de la question c) à la valeur

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Je ne le rédige alors pas à nouveau et vous renvoie au corrigé du DM 1 de l'an dernier ou au polycopié de cours.

Pour la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, on procède de façon analogue. La série converge en tant que série de Riemann alternée et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+1+1}}{(2p+1)^2}$$

car tout entier $n \geqslant 1$ pair s'écrit sous la forme $n = 2p$ avec $p \geqslant 1$ et tout entier $n \geqslant 1$ impair s'écrit sous la forme $n = 2p+1$ avec $p \geqslant 0$. Il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

car $(-1)^{2p+1} = -1$ et $(-1)^{2p+2} = 1$. Or, on a vu en question d) que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et on vient de voir que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

si bien que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}.}$$

Noter que, fort heureusement, on retrouve le résultat de l'exercice précédent !

6. La fonction f étant continue, on peut appliquer l'égalité de Parseval qui fournit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right] \qquad (**)$$

avec convergence de la série en jeu. Les calculs de la question **2.** fournissent immédiatement

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4}.$$

On en déduit comme en question précédente que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(2)^2}{n^4} = 4 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = 4 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Ainsi,

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Il nous reste donc à calculer

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

par périodicité puis par parité de f. Sur $[0, \pi]$, on a alors que $f(t) = \pi - t$ de sorte que[4]

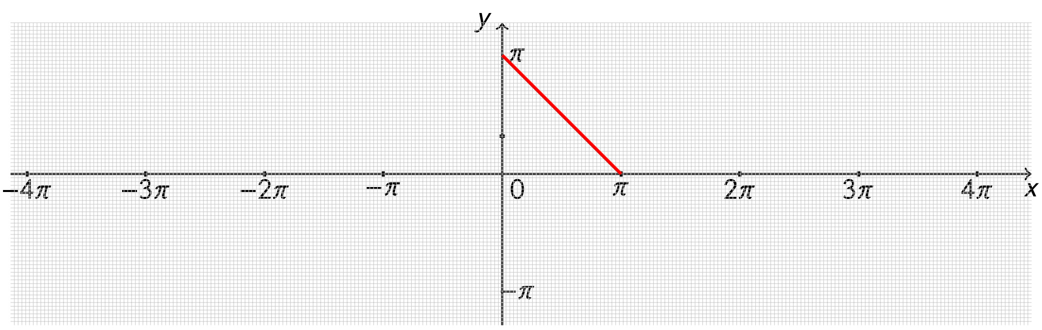
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t)^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{(\pi - t)^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

4. Ici, j'utilise la fait qu'une primitive de $t \mapsto (\pi - t)^2$ est donnée par $t \mapsto -\frac{(\pi-t)^3}{3}$ mais si vous ne voyez pas cela, développez $(\pi - t)^2 = \pi^2 - 2\pi t + t^2$ et utilisez la linéarité de l'intégrale pour faire le calcul. Normalement vous devriez aboutir au même résultat !

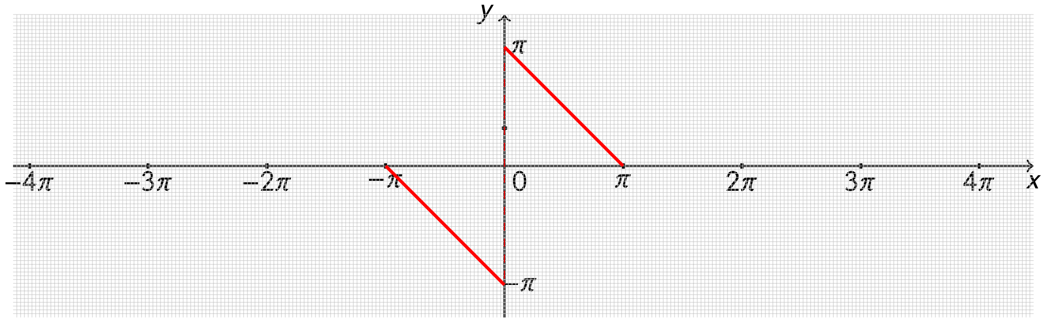
Finalement, $(**)$ fournit
$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} \quad \text{soit} \quad \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{12}$$
et enfin
$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.}$$

7. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}$ converge en tant que série de Riemann et on procède comme d'habitude pour se ramener au calcul de la question précédente. On a
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$
soit d'après la question précédente
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4} + \frac{\pi^4}{96}.$$
Posant $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$, on a
$$S = \frac{S}{16} + \frac{\pi^4}{96} \quad \text{soit} \quad \frac{15}{16}S = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{soit} \quad S = \frac{\pi^4}{90}.$$
On retrouve donc (et heureusement)
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$
de l'exercice précédent.

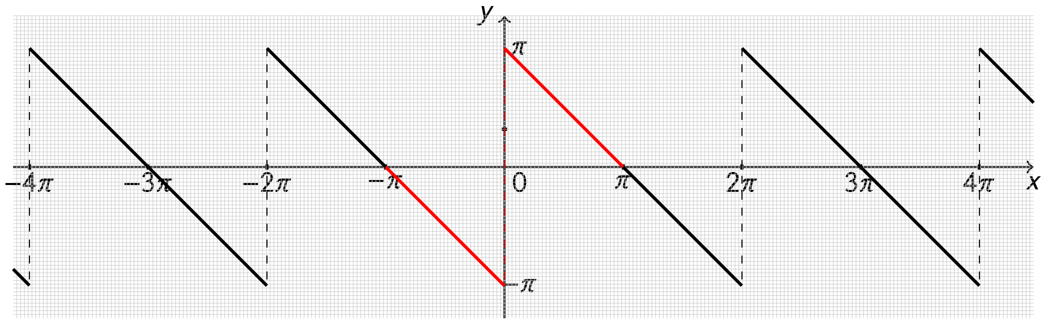
8. On commence alors par tracer le graphe de g sur $[0, \pi]$.



Pour ensuite obtenir le graphe sur $\mathbb{R}$ tout entier, on doit décaler une portion de graphe sur un intervalle de longueur **une période**. Or, ici on précise que la fonction cherchée est 2π-périodique donc on doit translater une portion de graphe sur un intervalle de longueur 2π. Or, ici, on n'a tracé le graphe que sur un intervalle de longueur π, ce qui n'est pas suffisant ! Mais on n'a pas encore exploité le fait que la fonction cherchée doit être impaire et son graphe doit donc être symétrique par rapport à l'origine. On peut donc dans un premier temps compléter ce graphe sur $[-\pi, 0]$ en traçant le symétrique de la portion de graphe ci-dessus par rapport à l'origine.



On a alors le tracé du graphe de f sur un intervalle de longueur la période, à savoir 2π et pour obtenir le tracé total, il suffit de reporter successivement cette portion de graphe vers la gauche et vers la droite. On obtient ainsi le graphe suivant.



Ici la fonction n'est pas continue mais continue par morceaux (car on doit lever le crayon un nombre fini de fois sur le tracé ci-dessus pour tracer le graphe) et de classe C^1 par morceaux. Les points de discontinuité sont les $t = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

On sait que la fonction g est impaire donc d'après le cours

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad a_n(g) = 0.}$$

Soit alors $n \geqslant 1$. Par définition, on a alors

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

Puisque g et sinus sont impaires, on en déduit que $t \mapsto g(t)\sin(nt)$ est, elle, paire. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g(-t)\sin(-nt) = (-g(t)) \times (-\sin(nt)) = g(t)\sin(nt).$$

On a donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

et ainsi
$$b_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$
car $g(t) = \pi - t$ sur $[0, \pi]$. On a alors par linéarité
$$\int_0^\pi (\pi - t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \pi\int_0^\pi \sin(nt)\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t.$$
On a alors par un calcul direct que
$$\int_0^\pi \sin(nt)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = -\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1-(-1)^n}{n}$$
et une intégration par parties
$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(nt) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{cases}$$
fournit que
$$\begin{aligned}\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t &= \left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos(nt)}{n}\mathrm{d}t \\ &= -\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
On vérifie alors (voir les exercices précédents) que
$$\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{si bien que} \quad \int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$
En regroupant tous ces calculs, il vient que
$$\int_0^\pi (\pi - t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \pi\frac{1-(-1)^n}{n^2} + \frac{\pi(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}.$$
Finalement
$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(g) = \frac{2}{n}.}$$
Il est alors immédiat d'en déduire que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n(g) = \lim_{n\to+\infty} b_n(g) = 0.}$$
Par ailleurs, $c_0(g) = a_0(g) = 0$ tandis que
$$\forall n > 0, \quad c_n(g) = \frac{1}{2}(a_n(g) - ib_n(g)) = -i\frac{b_n(g)}{2} = -\frac{i}{n}$$
et
$$\forall n < 0, \quad c_n(g) = \frac{1}{2}(a_{-n}(g) + ib_{-n}(g)) = i\frac{b_{-n}(g)}{2} = -\frac{i}{n}.$$
Ainsi, pour tout $n \neq 0$, on a $c_n(g) = -\frac{i}{n}$. Noter qu'on retrouve bien que $c_{-n}(g) = -c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ce qui découle du fait que g soit impaire.

La fonction f est continue par morceaux et de classe C^1 par morceaux et le théorème de Dirichlet (dans sa version continue par morceaux, autrement dit (ii) du polycopié de cours) garantit que

$$\forall t \neq 2k\pi, \quad g(t) = a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(g)\cos(nt) + b_n(g)\sin(nt)]$$

tandis que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{g(2k\pi^+) + g(2k\pi^-)}{2} = a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(g)\cos(nt) + b_n(g)\sin(nt)]$$

avec convergence de la série en jeu. On lit sur le dessin que

$$\frac{g(2k\pi^+) + g(2k\pi^-)}{2} = 0$$

et la question b) fournit alors

$$a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(g)\cos(nt) + b_n(g)\sin(nt)] = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Lorsque $t = 2k\pi$, on obtient donc

$$0 = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2kn\pi)}{n}$$

qui est une tautologie puisque $\sin(2kn\pi) = 0$ tandis que pour tout $t \neq 2k\pi$, il vient

$$g(t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

On voit que le choix $t = 1$ (qui n'est pas de la forme $2k\pi$!) fournit que

$$g(1) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

avec convergence de la série en jeu. Comme $g(1) = \pi - 1$ car $1 \in [0, \pi]$, il s'ensuit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.}$$

La fonction g étant continue par morceaux, on peut lui appliquer l'égalité de Parseval qui fournit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \mathrm{d}t = |a_0(g)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(g)|^2 + |b_n(g)|^2\right] \qquad (**)$$

avec convergence de la série en jeu. Les calculs de la question b) fournissent immédiatement

$$|a_0(g)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(g)|^2 + |b_n(g)|^2\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Il nous reste donc à calculer

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |g(t)|^2 \mathrm{d}t$$

par périodicité et car $|g|^2$ est paire puisque g est impaire. En effet, pour tout réel t, on a

$$|g(-t)|^2 = (-g(t))^2 = |g(t)|^2.$$

On a alors

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - t)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}.$$

Noter que le calcul est ici le même qu'en question f). On obtient finalement de $(**)$ l'égalité bien connue

$$\boxed{\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{soit} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

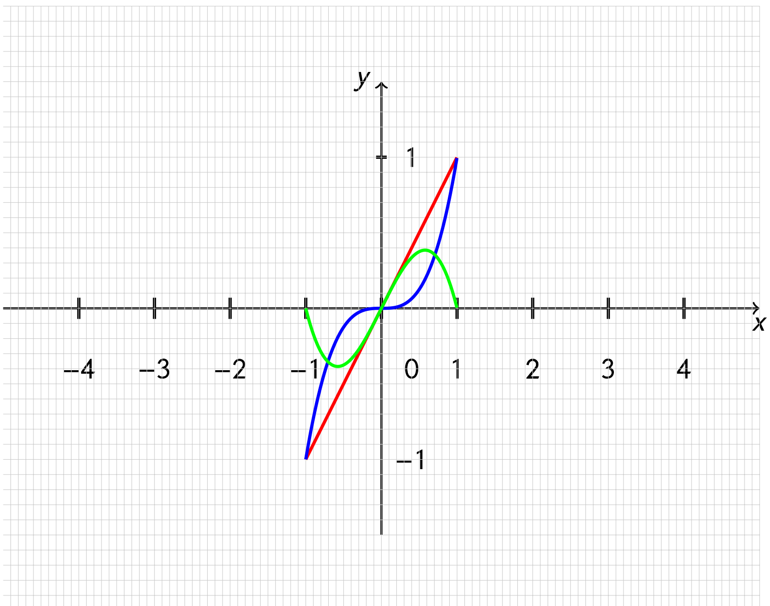
► **EXERCICE 3 — UN EXEMPLE 2-PÉRIODIQUE.** On considère les fonctions 2-périodiques $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dont les restrictions à $]-1, 1]$ sont définies par

$$\forall t \in]-1, 1], \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^3, \quad f_3(t) = t - t^3.$$

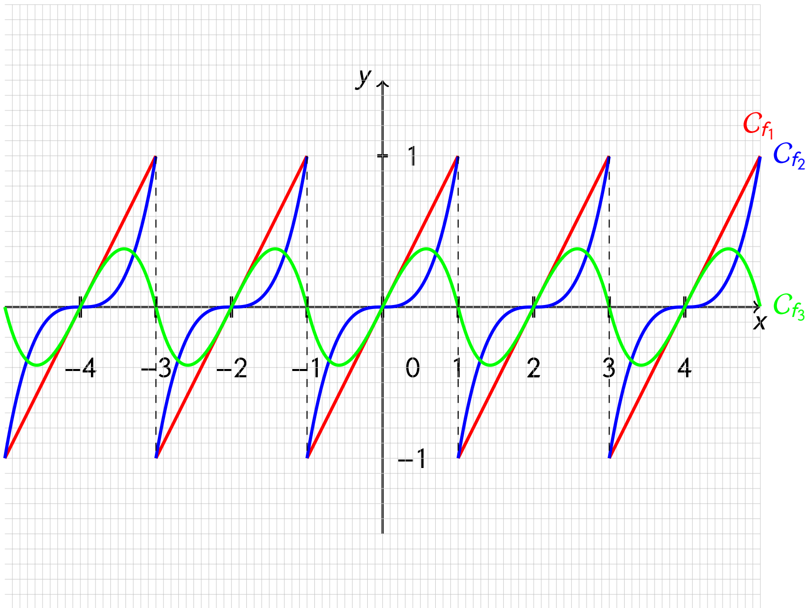
1. Dessiner le graphe de f_1, f_2, f_3, d'abord sur $]-1, 1]$ puis sur tout $\mathbb{R}$. Ces fonctions sont-elles continues ? $\mathcal{C}^1$ par morceaux ?
2. Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont-elles paires ? Impaires ? Quelles implications cela a-t-il concernant les coefficients de Fourier de ces fonctions ?
3. Calculer les coefficients de Fourier de f_1 puis ceux de f_2. En déduire ceux de f_3.
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f_3(t) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin(\pi n t)}{n^3}$$
avec convergence des séries en jeu.
5. Que donne l'égalité de la question précédente en $t = \frac{1}{2}$? En déduire la convergence et la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.
6. Appliquer l'égalité de Parseval et en déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$
avec convergence de la série en jeu.

► **SOLUTION.**

1. On dessine dans un premier temps les graphes de f_1 (en rouge), de f_2 (en bleu) et de f_3 (en vert) sur $]-1, 1]$.



Puis on complète par 2-périodicité en gardant le même code couleur.



On constate que les fonctions f_1 et f_2 ne sont pas continues en tout $t = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ mais qu'elles sont continues par morceaux et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En revanche, la fonction f_3 est, elle, continue sur $\mathbb{R}$ et également de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

2. Les trois graphes de la question précédente sont symétriques par rapport à l'origine si bien que cela implique que les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont impaires. Le cours garantit alors que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad a_n(f_1) = a_n(f_2) = a_n(f_3) = 0.}$$

3. Commençons par les coefficients de Fourier de f_1. D'après la question précédente, il ne reste qu'à calculer les coefficients $(b_n(f_1))_{n\geqslant 1}$. Soit alors $n \geqslant 1$ et par définition, on a

$$b_n(f_1) = \frac{2}{2}\int_0^2 f_1(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 f_1(t)\sin(\pi n t)\,\mathrm{d}t$$

où l'on a utilisé la 2-périodicité pour changer l'intervalle d'intégration. On sait alors que sur $[-1,1]$, $f_1(t) = t$ de sorte que

$$b_n(f_1) = \int_{-1}^1 t\sin(\pi n t)\,\mathrm{d}t.$$

Il s'agit d'un polynôme de degré un fois un sinus et donc on va effectuer une intégration par parties avec

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(\pi n t) \end{array}\right. \quad \text{soit} \left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos(\pi n t)}{n\pi} \end{array}\right.$$

car $n \geqslant 1$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} b_n(f_1) &= \left[-t\frac{\cos(\pi n t)}{n\pi}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\frac{\cos(\pi n t)}{n\pi}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\cos(\pi n)}{n\pi} - \frac{\cos(-\pi n)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^1 \cos(\pi n t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^1 \cos(\pi n t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

car $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout entier n et par parité de la fonction cosinus.

On a alors
$$\int_{-1}^{1}\cos(\pi nt)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(\pi nt)}{n}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sin(\pi n)}{n} - \frac{\sin(-\pi n)}{n} = 0$$
car $\sin(-\pi n) = \sin(\pi n) = 0$ pour tout entier naturel n. On a donc finalement
$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f_1) = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}.}$$
On procède de même pour f_2. D'après la question précédente, il ne reste qu'à calculer les coefficients $(b_n(f_2))_{n\geqslant 1}$. Soit alors $n \geqslant 1$ et par définition, on a
$$b_n(f_2) = \frac{2}{2}\int_0^2 f_2(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f_2(t)\sin(\pi nt)\,\mathrm{d}t$$
où l'on a utilisé la 2-périodicité pour changer l'intervalle d'intégration. On sait alors que sur $[-1, 1]$, $f_2(t) = t^3$ de sorte que
$$b_n(f_2) = \int_{-1}^{1} t^3\sin(\pi nt)\,\mathrm{d}t.$$
Il s'agit d'un polynôme de degré trois fois un sinus et donc on va effectuer successivement trois intégrations par parties. On commence par une première intégration par parties avec
$$\begin{cases} u(t) = t^3 \\ v'(t) = \sin(\pi nt) \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} u'(t) = 3t^2 \\ v(t) = -\frac{\cos(\pi nt)}{n\pi} \end{cases}$$
car $n \geqslant 1$. Il s'ensuit que
$$\begin{aligned} b_n(f_2) &= \left[-t^3\frac{\cos(\pi nt)}{n\pi}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 3t^2\left(-\frac{\cos(\pi nt)}{n\pi}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\cos(\pi n)}{n\pi} - \frac{\cos(-\pi n)}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}\int_{-1}^{1} t^2\cos(\pi nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}\int_{-1}^{1} t^2\cos(\pi nt)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
On calcule alors
$$\int_{-1}^{1} t^2\cos(\pi nt)\mathrm{d}t$$
à l'aide d'une seconde intégration par parties avec
$$\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \cos(\pi nt) \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = \frac{\sin(\pi nt)}{n\pi} \end{cases}$$
de sorte que
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} t^2\cos(\pi nt)\mathrm{d}t &= \left[t^2\frac{\sin(\pi nt)}{n\pi}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2t\left(\frac{\sin(\pi nt)}{n\pi}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin(\pi n)}{n\pi} - \frac{\sin(-\pi nt)}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1} t\sin(\pi nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{n\pi}b_n(f_1) \end{aligned}$$
car $\sin(-\pi n) = \sin(n\pi) = 0$ pour tout entier naturel n. On déduit alors du début de la question que
$$\int_{-1}^{1} t^2\cos(\pi nt)\mathrm{d}t = -\frac{2}{n\pi}b_n(f_1) = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$
et finalement
$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f_2) = -\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}\int_{-1}^{1} t^2\cos(\pi nt)\mathrm{d}t = -\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{12(-1)^n}{n^3\pi^3}.}$$

On passe alors aux coefficients de Fourier de f_3, qui est en réalité la fonction qui va nous intéresser. D'après la question précédente, il ne reste qu'à calculer les coefficients $(b_n(f_3))_{n\geqslant 1}$. Soit alors $n \geqslant 1$ et par définition, on a

$$b_n(f_3) = \frac{2}{2}\int_0^2 f_3(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 f_3(t)\sin(\pi nt)\,\mathrm{d}t$$

où l'on a utilisé la 2-périodicité pour changer l'intervalle d'intégration. On sait alors que sur $[-1,1]$, $f_3(t) = t - t^3$ de sorte que

$$b_n(f_3) = \int_{-1}^1 (t-t^3)\sin(\pi nt)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 t\sin(\pi nt)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^1 t^3\sin(\pi nt)\,\mathrm{d}t$$

par linéarité. On remarque donc que

$$b_n(f_3) = b_n(f_1) - b_n(f_3)$$

si bien que les calculs précédents fournissent

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f_3) = -\frac{12(-1)^n}{n^3\pi^3} = \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}.}$$

4. La fonction f_3 est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et le théorème de Dirichlet (dans sa version continue, autrement dit (i) du polycopié de cours) garantit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_3(t) = a_0(f_3) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f_3)\cos(nt) + b_n(f_3)\sin(nt)\right]$$

avec convergence de la série en jeu. Les questions **2.** et **3.** fournissent alors

$$f_3(t) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(\pi nt)}{n^3}$$

avec convergence de la série en jeu.

5. L'égalité précédente en $t = \frac{1}{2}$ fournit

$$f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^3}.$$

On a alors, puisque $\frac{1}{2} \in [-1,1]$, que

$$f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Par ailleurs, lorsque n est pair, n est de la forme $n = 2p$ avec p un entier et alors $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sin(\pi p) = 0$ tandis que si n est impair, n est de la forme $n = 2p+1$ avec p entier et alors $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right)$. Un cercle trigonométrique fournit alors immédiatement que si p est pair, on a

$$\sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

tandis que si p est impair, on a

$$\sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Il s'ensuit que que

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p.$$

On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^3} = \sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{impair}}}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^3} + \sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{pair}}}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^3}.$$

D'après la discussion qui précède, on a

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^3} = 0 \quad \text{car} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 0$$

tandis que

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+1+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}+p\pi\right)}{(2p+1)^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

car $(-1)^{2p+2} = 1$ et $\sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$. Finalement, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

et l'égalité de la question **4.** fournit la convergence de la série ainsi que la relation

$$\frac{3}{8} = \frac{12}{\pi^3}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

soit

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.}$$

Petite remarque culturelle, on pourrait se demander si cela ne permet pas d'en déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

mais on sait en réalité très peu de choses sur cette valeur et **personne** ne sait à l'heure actuelle en donner une expression comme dans le cas de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. La fonction f_3 étant continue, on peut appliquer l'égalité de Parseval qui fournit que

$$\frac{1}{2}\int_0^2 |f_3(t)|^2 \mathrm{d}t = |a_0(f_3)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f_3)|^2 + |b_n(f_3)|^2\right] \qquad (**)$$

avec convergence de la série en jeu. Les calculs des questions **2.** et **3.** fournissent immédiatement

$$|a_0(f_3)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f_3)|^2 + |b_n(f_3)|^2\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{144(-1)^{2(n+1)}}{\pi^6 n^6} = \frac{72}{\pi^6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$$

car $(-1)^{2(n+1)} = 1$. Il nous reste donc à calculer

$$\frac{1}{2}\int_0^2 |f_3(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 |f_3(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

par 2-périodicité . Sur $[-1, 1]$, on a alors que $f_3(t) = t - t^3$ de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-1}^1 |f_3(t)|^2 \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^1 (t-t^3)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^1 (t^2 - 2t^4 + t^6)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^7}{7}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105}.\end{aligned}$$

Finalement, $(**)$ fournit alors

$$\frac{8}{105} = \frac{72}{\pi^6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.}$$

► **EXERCICE 4 — UNE RELATION UTILE.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f') = inc_n(f)$.
Indication : On pourra intégrer par parties.
2. Déduire de l'Exercice 1 et de la question précédente les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in]0,\pi[, \quad h(t) = -1 \quad \text{et} \quad h(0) = h(\pi) = 0.$$
Écrire la série de Fourier associée. Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de h ? En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.
3. Utiliser la question précédente pour obtenir la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

► **SOLUTION.**

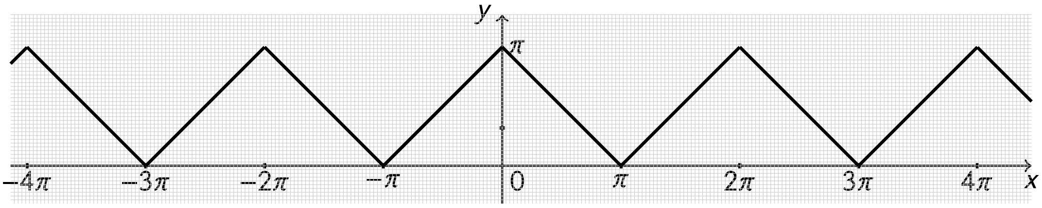
1. **Attention** : Pour simplifier, on supposera que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. Le cas général se démontre de la même façon mais simplement de manière plus technique.

   On commence par remarquer que la dérivée d'une fonction $2\pi-$péridioque est aussi 2π-périodique. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$
de sorte que
$$f'(t+2\pi) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+2\pi+h)-f(t+2\pi)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t)$$
par 2π-périodicité de f. La démonstration repose alors sur une intégration par parties. On a, par définition, pour tout entier relatif n
$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$
Lorsque $n \neq 0$, une intégration par parties en intégrant f' en f et en dérivant $t \mapsto e^{-i\pi nt}$ en $t \mapsto -ine^{-int}$ fournit alors le résultat. En effet,
$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\left[-inf(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\times\left(-ine^{-int}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(-inf(2\pi)e^{-2i\pi n} + inf(0)e^0\right) + in\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t \\ &= \frac{in}{2\pi}(-f(2\pi)+f(0)) + inc_n(f) \end{aligned}$$
car $e^{-2i\pi n} = \cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n) = 1$. On conclut alors en utilisant la 2π-périodicité de la fonction f qui assure que $f(2\pi) = f(0)$.
2. **Attention** : Il faut ici modifier l'énoncé et considérer la fonction h comme l'unique fonction impaire 2π-périodique vérifiant
$$h(0) = h(\pi) = 0 \quad \text{et} \forall t \in]0,\pi[, \quad h(t) = -1.$$

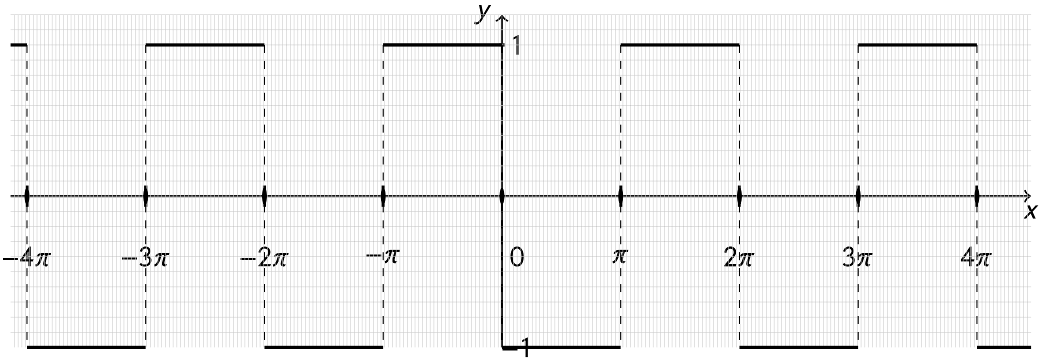
On rappelle que la fonction f définie lors de l'Exercice 2.3 est l'unique fonction paire 2π-périodique vérifiant

$$\forall t \in [0,\pi], \quad f(t) = \pi - t.$$

Le graphe de cette fonction est donné par



On a vu dans l'Exercice 2 que la fonction était de classe C^1 par morceaux et on constate que la fonction est une succession de droites de pente 1 ou -1 si bien que la fonction dérivée est donnée par[5]



On constate alors qu'il s'agit de la fonction h ! Par ailleurs, vous pouvez constater qu'il s'agit de l'opposée de la fonction du DM 1 de l'an dernier ! Ainsi $h = f'$ et la question **1.** fournit immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(h) = inc_n(f).$$

On a vu dans l'exercice 2 que

$$c_0(f) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \neq 0, \quad c_n(f) = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$

de sorte que

$$c_0(h) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \neq 0, \quad c_n(h) = i\frac{1-(-1)^n}{\pi n}.$$

Puisque h est impaire, on a

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n(h) = 0$$

et par conséquent les relations entre coefficients complexes et réels garantissent que

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n(h) = 2ic_n(h) = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n}.$$

Noter que l'on retrouve (et c'est normal !) l'opposé des coefficients du DM 1 de l'an dernier ! On conclut alors comme dans le DM 1 de l'an dernier en utilisant le théorème de Dirichlet que pour tout $t \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$h(t) = a_0(h) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(h)\cos(nt) + b_n(h)\sin(nt)]$$

5. Noter que la dérivée n'est bien définie que sur les intervalles du type $]k\pi,(k+1)\pi[$ sur lesquels elle vaut 1 ou -1 mais qu'elle n'est pas définie en $t = k\pi$. Par convention, lorsqu'on travaille avec des séries de Fourier (parce que cela simplifie le théorème de Dirichlet), on posera en ces valeurs

$$f'(k\pi) = \frac{f'(k\pi^+) + f'(k\pi^-)}{2}.$$

Mais on pourrait faire un autre choix, cela ne changerait rien aux coefficients de Fourier puisque changer la valeur d'une fonction en un nombre fini de point ne change rien lorsqu'on intègre !

soit d'après les calciuls précédents

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n} \sin(nt) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} \qquad (*)$$

avec convergence de la série en jeu tandis que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad h(k\pi) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n} \sin(nk\pi)$$

qui est une tautologie car $\sin(nk\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. En raisonnant comme dans l'exercice 2 question **8**. et en choisissant $t = \frac{\pi}{2}$ dans $(*)$, il vient

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1}.$$

On a alors vu que

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^k$$

et puisque $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, on a $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ de sorte que

$$-1 = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

soit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

avec convergence de la série.

3. Pour faire apparaître du $\frac{1}{n^2}$, on voit qu'on a besoin de prendre les coefficients de Fourier au carré ce qui suggère qu'il faut recourir à l'égalité de Parseval. La fonction h étant continue par morceaux, cette égalité de Parseval fournit que

$$\frac{1}{2} \int_0^2 |h(t)|^2 \mathrm{d}t = |a_0(h)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(h)|^2 + |b_n(h)|^2\right] \qquad (**)$$

avec convergence de la série en jeu. Les calculs précédents fournissent immédiatement

$$|a_0(h)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(h)|^2 + |b_n(h)|^2\right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4((-1)^{(n)} - 1)}{\pi^2 n^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Or, le même calcul qu'en question f) de l'exercice 2 du DM 1 de l'an dernier donne que

$$\frac{1}{2} \int_0^2 |h(t)|^2 \mathrm{d}t = 1$$

ce qui fournit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

avec convergence de la série. On conclut comme en question f) du DM 1 de l'an dernier au fait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'exercice suivant est plus difficile et un peu au-delà de ce qui sera attendu de vous à l'examen. Cela dit, il permet de voir une application importante des séries de Fourier : la résolution d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui est, comme vous le savez sûrement très utile en physique, chimie ou biologie puisqu'en général les modélisations de phénomènes dans ces discplines conduisent naturellement à ce types d'équations. Par ailleurs cet exercice utilise toutes les notions d'analyse vues lors de la première partie du cours. La correction est par conséquent un peu moins détaillée mais si jamais vous regardez ces exercices et que vous avez des questions, je reste bien évidemment à votre disposition par mail!

► **EXERCICE 5 — UNE APPLICATION.** On considère l'équation différentielle suivante

$$y''(t) + e^{it}y(t) = 0 \qquad (E).$$

1. Montrer que toute fonction f solution de (E) de classe $\mathcal{C}^2$ est 2π-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.
   Indication : On pourra utiliser le fait qu'il existe une unique solution à (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
2. Soit f une solution de (E) 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$. Écrire les séries de Fourier associées à f et à f'' et justifer que f et f'' sont sommes de leur série de Fourier.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \frac{1}{n^2}c_{n-1}(f)$.
   Indication : On admettra que (sous de bonnes hypothèses qui sont satisfaites ici) les coefficients de Fourier complexes d'une fonction définie par
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \textit{avec} \quad (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$
   sont donnés par $c_n(f) = c_n$ pour tout entier relatif n.
4.] Calculer $c_{-1}(f)$ et en déduire que pour tout $n < 0$, $c_n(f) = 0$.
5. Montrer que pour $n \geqslant 0$, $c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2}c_0(f)$ et en déduire que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = c_0(f)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{(n!)^2}.$$
6. Réciproquement, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction définie par
   $$t \longmapsto c\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$$
   est une solution 2π-périodique de (E).
   Indication : On admettra qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ et que l'on a le droit de dériver terme à terme.
7. Déterminer toutes les solutions 2π-périodiques de (E).

► **SOLUTION.**

1. **Attention** ici, l'énoncé contenait une erreur et il s'agit en réalité de montrer que toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ et **solution** de (E) est 2π-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.

   Évidemment si une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est solution de (E) et est 2π-périodique, on a que $f(0) = f(2\pi)$ et f' est également 2π-périodique si bien que $f'(0) = f'(2\pi)$. Réciproquement, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ solution de (E). Supposons que $f(0) = f(2\pi)$ et que $f'(0) = f'(2\pi)$. On veut alors montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(t + 2\pi)$. On pose pour ce faire $g(t) = f(t) - f(t + 2\pi)$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ et

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = f'(t) - f'(t + 2\pi), \quad g''(t) = f''(t) - f''(t + 2\pi).$$

   Mais, f est solution de (E) donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

   $$f''(t) + e^{it}f(t) = 0 \qquad (*)$$

donc en particulier aussi $f''(t+2\pi) + e^{i(t+2\pi)}f(t+2\pi) = 0$. Mais, $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$ de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t+2\pi) + e^{it}f(t+2\pi) = 0. \qquad (**)$$

Ainsi $(*)$ et $(**)$ impliquent que g est solution de (E) car

$$g''(t) + e^{it}g(t) = \left[f''(t) + e^{it}f(t)\right] - \left[f''(t+2\pi + e^{it}f(t+2\pi)\right] = 0.$$

De plus $g(0) = g'(0) = 0$ par hypothèse. On utilise alors le résultat admis suivant que vous avez peut être déjà rencontré sous le nom de théorème de Cauchy-Lipschitz ,qui indique qu'il existe une **unique** solution y à (E) de classe C^2 vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$. Mais la fonction constante égale à 0 convient de manière évidente et on vient de voir que g également. Ces deux fonctions sont donc nécessairement égales et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = 0 \quad \text{soit} \quad f(t) = f(t+2\pi)$$

et f est bien 2π-périodique !

2. Soit f une solution de (E) 2π-périodique et de classe C^2. Puisque f est de classe C^2, elle est en particulier continue et de classe C^1 par morceaux et puisque $t \mapsto e^{it}$ aussi et que $f''(t) = -e^{it}f(t)$ pour tout réel t, on en déduit que f'' est aussi continue et de classe C^1 par morceaux. Le théorème de Dirichlet fournit alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} \quad \text{et} \quad f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f'')e^{int}.$$

Mais l'exercice précédent garantit que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f'') = inc_n(f') \quad \text{et} \quad c_n(f') = inc_n(f)$$

si bien que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f'') = -n^2c_n(f)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2c_n(f)e^{int}.$$

3. On admettra ici que (sous de bonnes hypothèses qui sont satisfaites ici) les coefficients de Fourier complexes d'une fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_ne^{int} \quad \text{avec} \quad (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

sont donnés par $c_n(f) = c_n$ pour tout entier relatif n.

On a vu en question précédente que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} \quad \text{et} \quad f''(t) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2c_n(f)e^{int}$$

mais par ailleurs on sait que f est solution de (E) de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = -e^{it}f(t).$$

On obtient donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2c_n(f)e^{int} = e^{it}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int}.$$

Or,

$$e^{it}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{i(n+1)t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k-1}(f)e^{ikt}$$

après le changement d'indice $k = n + 1$. On a ainsi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(f) e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n-1}(f) e^{int}$$

et en utilisant le résultat admis d'unicité des coefficients de Fourier, il s'ensuit bien que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{n^2} c_{n-1}(f).$$

4. Par définition

$$c_{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{it} \mathrm{d}t.$$

Mais puisque f est solution de (E), on a vu que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = -e^{it} f(t)$$

de sorte que

$$c_{-1}(f) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f''(t) \mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi} \left[f'(t) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (f'(0) - f'(2\pi)) = 0$$

d'après la qestion **1.** car f est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique. On a donc $c_{-1}(f) = 0$. On en déduit que $c_{-2}(f) = c_{-1}(f) = 0$ d'après c) puis $c_{-3}(f) = 4c_{-2}(f) = 0$ et de proche en proche ou en effectuant un raisonnement par récurrence, il vient que $c_n(f) = 0$ pour tout $n < 0$.

5. On montre alors par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2}c_0(f)$. Cela peut aussi se voir de proche en proche : $c_1(f) = c_0(f)$ puis $c_2(f) = \frac{1}{4}c_1(f) = \frac{1}{4}c_0(f)$ puis $c_3(f) = \frac{1}{9}c_2(f) = \frac{1}{9\times 4}c_0(f)$ et ainsi de suite ce qui fournit bien $c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2}c_0(f)$ en utilisant la relation de la question **3**. On déduit alors de la question **2.** que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = c_0(f)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{int}}{(n!)^2}.$$

6. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{int}}{(n!)^2}$ converge absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, sa convergence absolue revient à étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{e^{int}}{(n!)^2}\right| = \sum_{n\geqslant 0}\frac{|e^{int}|}{(n!)^2} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n!)^2}$$

car $|e^{int}| = 1$. Le critère de d'Alembert permet alors de conclure car

$$\frac{\frac{1}{((n+1)!)^2}}{\frac{1}{(n!)^2}} = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Cela entraîne donc la convergence et l'on peut considérer la fonction $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f_c(t) = c\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{int}}{(n!)^2}$ pour $c \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'une série de fonctions.

On admet[6] qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ et que l'on a le droit de dériver terme à terme. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_c'(t) = ic\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{e^{int}}{(n!)^2} \quad \text{et} \quad f_c''(t) = -c\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{e^{int}}{(n!)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{int}}{((n-1)!)^2}.$$

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f_c''(t) + e^{it}f_c(t) = c\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{int}}{((n-1)!)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i(n+1)t}}{(n!)^2}\right) = 0$$

car

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{int}}{((n-1)!)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{i(k+1)t}}{((k!)^2}$$

avec le changment d'indice $k = n - 1$. Ainsi, la fonction f_c est solution de (E) de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors aisément grâce aux expressions de f_c et à la 2π-périodicité de $t \mapsto e^{int}$ que f_c est 2π-périodique.

7. On a vu en question e) qu'une solution de (E) de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique est égale à $f_{c_0(f)}$ et on montré réciproquement que toute fonction de la forme f_c était une solution de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique de (E). En conclusion, toutes les solutions de (E) de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique sont de la forme

$$f_c : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & c\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{int}}{(n!)^2} \end{array}\right. \quad \text{pour un certain} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarque : On peut se demander à quoi sert une telle expression d'une solution qui ne paraît pas très explicite en tant que somme infinie. Mais on peut numériquement approcher cette fonction par des sommes finies du type

$$c\sum_{n=0}^{N}\frac{e^{int}}{(n!)^2} \quad \text{avec} \quad N \quad \text{assez grand}$$

et ainsi se faire une bonne idée de la tête des fonctions solutions de (E) et 2π-périodiques !

6. Les outils pour le démontrer sont présentés dans le chapitre sur les séries de fonctions du polycopié de cours.