

FEUILLE TD 2 – EXERCICES ALGÈBRE – GROUPES II

Guide de survie sur le produit tensoriel

Le produit tensoriel est un outil fondamental en théorie des nombres, en géométrie algébrique ou en théorie des représentations mais aussi en physique théorique. Il permet par exemple d'étendre les scalaires ou encore, si B est un sous-anneau de A , de voir une matrice à coefficients dans B comme une matrice à coefficients dans A . Par ailleurs, il s'agit d'une machine à transformer le bilinéaire en linéaire. On présente ici un guide de survie dans le cadre de k -espaces vectoriels sur un corps k et on verra plus tard comment cela s'étend à des modules sur des anneaux commutatifs.

DÉFINITION. Soient V et W deux espaces vectoriels sur un corps k . On dit que $(V \otimes_k W, \Phi)$ ou généralement $V \otimes_k W$ en omettant l'application Φ sous-jacente est un produit tensoriel de V par W au-dessus de k si $V \otimes_k W$ est un k -espace vectoriel et $\Phi : V \times W \rightarrow V \otimes_k W$ est une application k -linéaire qui vérifient la propriété universelle suivante : pour toute application k -bilinéaire $B : V \times W \rightarrow L$ avec L un k -espace vectoriel, il existe une unique application $f : V \otimes_k W \rightarrow L$ telle que $f \circ \Phi = B$. Autrement dit, telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{B} & L \\ \Phi \downarrow & \nearrow f & \\ V \otimes_k W & & \end{array}$$

On note souvent $\Phi = \otimes$ et on appelle pour tout $(v, w) \in V \times W$, $\Phi(v, w) = v \otimes w$ un tenseur pur ou tenseur élémentaire ou tenseur décomposable. On a donc $f(v \otimes w) = B(v, w)$ pour tout $(v, w) \in V \times W$. On a alors existence et unicité à isomorphisme (canonique) près du produit tensoriel, ce qui autorise à parler "du" produit tensoriel de V par W . Commençons par l'unicité. Soient (H_1, Φ_1) et (H_2, Φ_2) deux produits tensoriels. Alors l'application $\Phi_2 : V \times W \rightarrow H_2$ est k -bilinéaire et par la propriété universelle satisfaite par (H_1, Φ_1) , il existe une unique application linéaire $f_1 : H_1 \rightarrow H_2$ telle que $f_1 \circ \Phi_1 = \Phi_2$. De même en inversant les rôles, on obtient une unique application linéaire $f_2 : H_2 \rightarrow H_1$ telle que $f_2 \circ \Phi_2 = \Phi_1$. On a donc

$$f_1 \circ \Phi_1 = f_1 \circ f_2 \circ \Phi_2 = \Phi_2.$$

Mais par unicité dans la propriété universelle de (H_2, Φ_2) appliquée à Φ_2 et puisque $\text{Id}_{H_2} \circ \Phi_2 = \Phi_2$, il vient $f_1 \circ f_2 = \text{Id}_{H_2}$ et par symétrie $f_2 \circ f_1 = \text{Id}_{H_1}$, ce qui montre bien l'unicité.

Montrons alors l'existence. On pose $X = k^{(V \times W)}$ l'ensemble des fonctions $\varphi : V \times W \rightarrow k$ presque nulles, c'est-à-dire telles que l'ensemble des $(v, w) \in V \times W$ tels que $\varphi(v, w) \neq 0$ soit fini. Une base du k -espace vectoriel X est donnée par les $\delta_{(v,w)}$ pour tout $(v, w) \in V \times W$ où

$$\forall (x, y) \in V \times W, \quad \delta_{(v,w)}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (v, w) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère alors Y le sous-espace vectoriel de X engendré par

- $\alpha_{v,v',w} = \delta_{(v+v',w)} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v',w)}$ pour tous $v, v' \in V$ et $w \in W$;
- $\alpha'_{v,w,\lambda} = \delta_{(\lambda v,w)} - \lambda \delta_{(v,w)}$ pour tous $v \in V, w \in W$ et $\lambda \in k$;
- $\beta_{v,w,w'} = \delta_{(v,w+w')} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v,w')}$ pour tous $v \in V$ et $w, w' \in W$;
- $\beta'_{v,w,\lambda} = \delta_{(v,\lambda w)} - \lambda \delta_{(v,w)}$ pour tous $v \in V, w \in W$ et $\lambda \in k$.

On pose alors $V \otimes_k W = X/Y$ le k -espace vectoriel quotient et on note $\pi : X \rightarrow V \otimes_k W$ la surjection canonique. Noter qu'on "tue" ainsi tous les générateurs de Y dans la quotient, on va voir que c'est ce qui fait marcher la construction. On pose par ailleurs $\Phi : V \times W \rightarrow V \otimes_k W$ définie par $\Phi(v, w) = \pi(\delta_{(v,w)})$ qui est surjective et k -bilinéaire car par exemple

$$\Phi(v + v', w) = \pi(\delta_{(v+v',w)}) = \pi(\delta_{(v,w)} + \delta_{(v',w)}) = \pi(\delta_{(v,w)}) + \pi(\delta_{(v',w)}) = \Phi(v, w) + \Phi(v', w).$$

On montre de même toutes les autres relations. Par ailleurs, si $B : V \times W \rightarrow L$ k -bilinéaire avec L un k -espace vectoriel, on a alors par bilinéarité que B donne lieu à une application de $X \rightarrow L$ qui à $\delta_{(v,w)}$ associe $B(v, w)$ qui passe au quotient modulo Y et fournit ainsi une application linéaire $f : V \otimes_k W \rightarrow L$ telle que $f \circ \Phi = B$. On a alors l'unicité car une telle application vérifie nécessairement $f(\pi(\delta_{(v,w)})) = B(v, w)$ et comme π est surjective et que les $\delta_{(v,w)}$ forment une base de X , les $\pi(\delta_{(v,w)})$ forment une famille génératrice de $V \otimes_k W$ et il existe ainsi au plus une telle application linéaire.

Ce qu'il faut retenir de cette preuve, c'est que les $v \otimes w$ (qui est égal à $\Phi(v, w) = \pi(\delta_{(v,w)})$) engendrent le k -espace vectoriel $V \otimes_k W$, autrement dit tout élément de $V \otimes_k W$ est de la forme

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i (v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^r (\lambda_i v_i) \otimes w_i = \sum_{i=1}^r v'_i \otimes w_i$$

avec $\lambda_i \in k$, $v_i \in V$, $w_i \in W$ et $v'_i = \lambda_i v_i \in V$. De plus, comme on construit le produit tensoriel comme un quotient (ou ce qui revient au même par la propriété universelle), il est souvent facile de construire des applications linéaires qui partent du produit tensoriel.

Passons au cas des espaces vectoriels de dimension finie¹. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. On se donne une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V et $(f_j)_{1 \leq j \leq m}$ une base de W . On va rédémontrer que le produit tensoriel existe (l'unicité se démontrant comme ci-dessus) de manière plus simple et en donner mieux qu'une famille génératrice, à savoir une base. Montrons alors que $k^{n \times m}$ vérifie la propriété universelle de $V \otimes_k W$. On fixe alors une base $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ de $k^{n \times m}$. Pour ce faire, on a besoin d'une application bilinéaire $\Phi : V \times W \rightarrow k^{n \times m}$. Une telle application linéaire est entièrement déterminée par l'image de (e_i, f_j) . On pose alors Φ l'unique application bilinéaire telle que $\Phi(e_i, f_j) = b_{ij}$. Soit à présent $B : V \times W \rightarrow L$ avec L un k -espace vectoriel. Une telle application bilinéaire est déterminée par les $B(e_i, f_j)$ et on cherche une application linéaire $f : k^{n \times m} \rightarrow L$ telle que $f \circ \Phi = B$ soit telle que pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$, $f(b_{ij}) = B(e_i, f_j)$, ce qui détermine une unique application linéaire faisant commuter le diagramme et permet de conclure. En particulier, on a montré que $(k^{n \times m}, \Phi)$ est (à unique isomorphisme près) le produit tensoriel $V \otimes_k W$. Avec les notations ci-dessus, on constate qu'une base de ce produit tensoriel est la famille $(\Phi(e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ que l'on a noté plus haut $(e_i \otimes f_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$. On peut aussi démontrer que cette famille forme une base directement en utilisant la construction ci-dessus du produit tensoriel. En effet, il est clair que la famille est génératrice puisque les tenseurs purs sont générateurs. Reste à montrer qu'elle est libre. Soient $(\lambda_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ une famille d'éléments de k tels que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} e_i \otimes f_j = 0.$$

Il existe alors une unique application bilinéaire $B_{i_0 j_0} : V \times W \rightarrow k$ telle que $B_{i_0 j_0}(e_{i_0}, f_{j_0}) = 1$ et $B_{i_0 j_0}(e_i, f_j) = 0$ sinon. Par propriété universelle, il vient alors une unique application linéaire $f_{i_0 j_0} : V \otimes_k W \rightarrow k$ telle que $f_{i_0 j_0} \circ \Phi = B_{i_0 j_0}$, soit $f_{i_0 j_0}(v \otimes w) = B_{i_0 j_0}(v, w)$. On en déduit par linéarité que

$$0 = f_{i_0 j_0} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} e_i \otimes f_j \right) = \lambda_{i_0 j_0}$$

et la famille est bien libre!

Pour terminer un petit exercice avec quelques propriétés élémentaires du produit tensoriel à absolument connaître et comprendre!

EXERCICE. Soient M et N deux k -espaces vectoriels.

1. Que représente $m \otimes n$ pour $m \in M$ et $n \in N$?
2. Que signifie le fait que $m \otimes n = 0$ pour $m \in M$ et $n \in N$?
3. Que signifie le fait que $M \otimes_k N = \{0\}$?
4. Que signifie le fait que

$$\sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i = \sum_{i=1}^{\ell} m'_i \otimes n'_i$$

avec $k, \ell \in \mathbf{N}^\times$, $m_1, \dots, m_k, m'_1, \dots, m'_\ell \in M$ et $n_1, \dots, n_k, n'_1, \dots, n'_\ell \in N$?

5. Soit $f : M \otimes_k N \rightarrow P$ un morphisme. Si $f(m \otimes n) = 0$ implique $m \otimes n = 0$ pour tous $m \in M$ et $n \in N$, l'application f est-elle injective?

Indication : On pourra considérer $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $z \otimes w \mapsto zw$.

SOLUTION.

1. Il s'agit de l'image de (m, n) par l'application $\Phi : M \times N \rightarrow M \otimes_k N$ définie ci-dessus. Plus informellement, il s'agit de l'élément $m \otimes n \in M \otimes_k N$ en lequel l'application linéaire $M \otimes_k N \rightarrow P$ associée à une application bilinéaire $B : M \times N \rightarrow P$ prend la valeur $B(m, n)$.
2. Cela est équivalent au fait que $B(m, n) = 0$ pour toute application bilinéaire $B : M \times N \rightarrow P$ pour tout k -espace vectoriel P . En effet, un sens est trivial et réciproquement $B(m, n) = 0$ pour toute application bilinéaire $B : M \times N \rightarrow P$ pour tout k -espace vectoriel P , alors l'application bilinéaire $\Phi : M \times N \rightarrow M \otimes_k N$ aussi et $\Phi(m, n) = m \otimes n = 0$. En particulier, on retiendra par exemple que pour montrer que $m \otimes n \neq 0$, il suffit d'exhiber un k -espace vectoriel P et une application bilinéaire $B : M \times N \rightarrow P$ telle que² $B(m, n) \neq 0$. Attention que cela n'implique pas $m = 0$ ou $n = 0$ en général mais qu'en revanche $0 \otimes n = m \otimes 0 = 0$. En revanche, dans le cas qui nous occupe ici, à savoir M et N deux k -espaces vectoriels, alors $m \neq 0 \neq n$ implique que $m \otimes n \neq 0$. En effet, on peut compléter m en une base de M et n en une base de N et alors $m \otimes n$ est élément d'une base de $M \otimes_k N$ donc non

¹. Notez que la démonstration ci-dessous s'applique en réalité au cas de la dimension infinie avec le lemme de Zorn.

². On peut retrouver de cette façon que $m \otimes 0 = 0 \otimes n = 0$ et montrer de façon analogue que $m_1 \otimes \dots \otimes m_k = 0$ si, et seulement si, pour toute application k -multilinéaire $M : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow P$, $M(m_1, \dots, m_k) = 0$.

nul. Mais ce raisonnement tombe en défaut en général car on n'a pas de théorème de la base incomplète. Une autre façon de le voir est de choisir une base (e_i) de M et (e'_j) de N . On écrit alors

$$m = \sum_i a_i e_i, \quad n = \sum_j a'_j e'_j \quad \text{de sorte que} \quad m \otimes n = \sum_{i,j} a_i a'_j e_i \otimes e'_j.$$

Puisque m et n sont non nuls, il existe i_0, j_0 tels que $a_{i_0} \neq 0 \neq a'_{j_0}$. On voit alors que le coefficient de $m \otimes n$ devant $e_{i_0} \otimes e'_{j_0}$ est non nul si bien que $m \otimes n \neq 0$.

3. On a $M \otimes_k N = \{0\}$ si, et seulement si, toute application bilinéaire $B : M \times N \rightarrow P$ est identiquement nulle pour tout k -espace vectoriel P . Cela découle immédiatement de la question précédente dans un sens et réciproquement si toute application bilinéaire $B : M \times N \rightarrow P$ est identiquement nulle pour tout k -espace vectoriel P , alors en particulier $\Phi : M \times N \rightarrow M \otimes_k N$ aussi et donc $m \otimes n = 0$ pour tous $m \in M$ et $n \in N$, ce qui implique que $M \otimes_k N = \{0\}$ car tout élément est combinaison linéaire de tenseurs purs.

Dans le cas de k -espaces vectoriels $M \otimes_A N = \{0\}$ si, et seulement si, $M = \{0\}$ ou $N = \{0\}$. En général, ce n'est pas le cas et on peut avoir $N \otimes_A M = \{0\}$ voire $M \otimes_A M = \{0\}$ avec $N \neq \{0\} \neq M$.

4. On a l'égalité si, et seulement si, pour toute application bilinéaire $B : M \times N \rightarrow P$ vers pour tout k -espace vectoriel P vérifie

$$\sum_{i=1}^k B(m_i, n_i) = \sum_{i=1}^{\ell} B(m'_i, n'_i).$$

5. Non en général! Le fait que $f(m \otimes n) = 0$ implique que $m \otimes n = 0$ n'implique pas l'injectivité car on n'a pas que des tenseurs purs et la propriété d'être dans le noyau n'a rien d'additif. On peut par exemple considérer l'application³ $f : \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $z \otimes w \mapsto zw$. Il est clair que $f(z \otimes w) = 0$ implique $z = 0$ ou $w = 0$ donc $z \otimes w = 0$ mais l'application n'est pas injective car

$$f(1 \otimes i - i \otimes 1) = i - i = 0$$

mais $1 \otimes i \neq i \otimes 1$ car par exemple une \mathbf{R} -base de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ est donnée par $1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i$ par le cours. On pouvait aussi considérer l'application \mathbf{R} -bilinéaire $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $(z_1, z_2) \mapsto \bar{z}_1 z_2$ par laquelle $(i, 1)$ est envoyé sur $-i$ et $(1, i)$ sur i . Cela dit, parfois il est possible d'étudier le noyau comme on le verra mais en général, il est plus simple de construire un inverse à gauche g tel que $g \circ f = \text{Id}$ ce qui établit l'injectivité et se vérifie en établissant que $g(f(m \otimes n)) = m \otimes n$ qui est bien dans ce cas une propriété additive qu'il suffit de vérifier sur les générateurs que sont les tenseurs purs.

Exercices fondamentaux de la semaine 1

EXERCICE 1 — QUELQUES ISOMORPHISMES CLASSIQUES. Soit k un corps.

- Montrer que si V est un k -espace vectoriel, alors $V \otimes_k k \cong V$.
- Soient V_1, V_2, V_3 trois k -espaces vectoriels. Montrer que $(V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 = V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$ et en préciser la dimension lorsque V_1, V_2, V_3 sont de dimension finie.
- Soient I un ensemble, $(V_i)_{i \in I}$ une famille de k -espaces vectoriels ainsi que V un k -espace vectoriel. Montrer que

$$V \otimes_k \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} V \otimes_k V_i.$$

SOLUTION.

- Plusieurs façons de faire. La première est de considérer l'application bilinéaire $B : V \times k \rightarrow V$ donnée par $B(v, \lambda) = \lambda v$. Par propriété universelle, elle donne lieu à une application linéaire $f : V \otimes_k k \rightarrow V$ telle que $f(v \otimes \lambda) = \lambda v$. Cette dernière est clairement surjective car $f(v \otimes 1) = v$ et elle est injective car tout élément de $V \otimes_k k$ est un tenseur pur. En effet, soit $x \in V \otimes_k k$, alors

$$x = \sum_{i=1}^r v_i \otimes \lambda_i = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \right) \otimes 1$$

par k -bilinéarité de \otimes avec $v_i \in V$ et $\lambda_i \in k$. On a par ailleurs que $f(v \otimes \lambda) = 0$ si, et seulement si, $v = 0$ ou $\lambda = 0$. Ainsi, tout élément du noyau est nul et f est injective. Noter qu'ici, cela ne fonctionne que parce qu'on a montré que tout élément du produit tensoriel est un tenseur pur, ce qui est faux en général! On pouvait aussi construire une réciproque $g : V \rightarrow V \otimes_k k$ définie par $g(v) = v \otimes 1$. Noter que par un argument de dimension, on peut simplifier la démonstration dans le cas de dimension finie.

3. Qui provient par propriété universelle du produit tensoriel de l'application \mathbf{R} -bilinéaire $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$.

Une autre manière de faire est de montrer que V vérifie la propriété universelle de $V \otimes_k k$. On a besoin pour commencer d'une application bilinéaire $\Phi : V \times k \rightarrow V$ que l'on va choisir comme le B ci-dessus, à savoir $\Phi(v, \lambda) = \lambda v$. Soit alors $B : V \times k \rightarrow L$ bilinéaire avec L un k -espace vectoriel. On cherche une application linéaire $f : V \rightarrow L$ telle que $f \circ \Phi = B$ soit telle que $f(\lambda v) = B(v, \lambda)$ soit $f(v) = B(v, 1)$. On vérifie alors immédiatement que ce choix de f convient et est bien linéaire. Intuitivement⁴, $V \otimes_k k$ revient à étendre les scalaires à k . Mais les scalaires ici sont déjà dans k donc cela revient à ne rien faire et donc naturellement $V \otimes_k k \cong V$!

2. On va utiliser dans cette question la première méthode vue en question 1. Je vous invite à vous exercer en rédigeant la seconde! On a clairement par le cours que dans le cas de dimension finie

$$\dim_k(V_1 \otimes_k V_2 \otimes_k V_3) = \dim_k(V_1) \dim_k(V_2) \dim_k(V_3).$$

Soit $v_1 \in V_1$ fixé. On considère l'application bilinéaire $B_{v_1} : V_2 \times V_3 \rightarrow (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3$ définie par $(v_2, v_3) \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$. Par propriété universelle de $V_2 \otimes_k V_3$, cela fournit une unique application linéaire $A_{v_1} : V_2 \otimes_k V_3 \rightarrow (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3$ telle que $A_{v_1}(v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$. On a alors une application bilinéaire

$$B : \begin{cases} V_1 \times (V_2 \otimes_k V_3) & \longrightarrow & (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 \\ (v_1, x) & \longmapsto & A_{v_1}(x). \end{cases}$$

Il est clair que cette application est linéaire à droite et que

$$B\left(v_1, \sum_{i=1}^r v_{2,i} \otimes v_{3,i}\right) = A_{v_1}\left(\sum_{i=1}^r v_{2,i} \otimes v_{3,i}\right) = \sum_{i=1}^r (v_1 \otimes v_{2,i}) \otimes v_{3,i}$$

par linéarité de A_{v_1} . En particulier, $B(v_1, v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$. Montrons la linéarité à gauche. Par exemple⁵, pour v_1, v'_1 dans V_1 , on obtient deux applications linéaires A_{v_1} et $A_{v'_1}$ telles que $A_{v_1}(v_2 \otimes v_3) = B_{v_1}(v_2, v_3)$ et $A_{v'_1}(v_2 \otimes v_3) = B_{v'_1}(v_2, v_3)$ pour tous $v_2 \in V_2$ et $v_3 \in V_3$. Par ailleurs, on obtient une unique application linéaire $A_{v_1+v'_1}$ telle que $A_{v_1+v'_1}(v_2 \otimes v_3) = B_{v_1+v'_1}(v_2, v_3)$ pour tous $v_2 \in V_2$ et $v_3 \in V_3$. Mais on remarque que par bilinéarité de \otimes , il vient que $B_{v_1+v'_1}(v_2, v_3) = B_{v_1}(v_2, v_3) + B_{v'_1}(v_2, v_3)$ et ainsi par unicité dans la propriété universelle, on en déduit que $A_{v_1+v'_1} = A_{v_1} + A_{v'_1}$. Finalement, la propriété universelle de $V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$ fournit, à partir de B , une application linéaire $f : V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3) \rightarrow (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3$ telle que $f(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$.

On construit de même une application linéaire $g : (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 \rightarrow V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$ telle que $g((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ dont on vérifie qu'elles sont inverses l'une de l'autre!

3. On va utiliser dans cette question la seconde méthode vue en question 1. Je vous invite à vous exercer en rédigeant la première! On va établir que $\bigoplus_{i \in I} (V \otimes_k V_i)$ vérifie la propriété universelle de $V \otimes_k \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)$. On commence par définir une application bilinéaire

$$\Phi : \begin{cases} V \times \bigoplus_{i \in I} V_i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} (V \otimes_k V_i) \\ \left(v, \sum_{i \in I \text{ finie}} v_i\right) & \longmapsto & \sum_{i \in I \text{ finie}} v \otimes v_i. \end{cases}$$

Soit alors $f : V \times \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow L$ bilinéaire avec L un k -espace vectoriel. Cela induit une famille d'applications bilinéaires $f_i : V \times V_i \rightarrow L$

pour tout $i \in I$ et par propriété universelle de $V \otimes_k V_i$, cela fournit une unique famille d'applications $\tilde{f}_i : V \otimes_k V_i \rightarrow L$ telles que $\tilde{f}_i(v \otimes v_i) = f_i(v, v_i)$ pour tous $v \in V$ et $v_i \in V_i$. Par propriété universelle de la somme directe⁶, il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : \bigoplus_{i \in I} V \otimes_k V_i \rightarrow L$. On a alors

$$\tilde{f} \circ \Phi \left(v, \sum_{i \in I \text{ finie}} v_i \right) = \sum_{i \in I \text{ finie}} \tilde{f}(v \otimes v_i) = \sum_{i \in I \text{ finie}} \tilde{f}_i(v \otimes v_i) = \sum_{i \in I \text{ finie}} f_i(v, v_i) = \sum_{i \in I \text{ finie}} f(v, v_i) = f \left(v, \sum_{i \in I \text{ finie}} v_i \right).$$

On a par conséquent $\tilde{f} \circ \Phi = f$. Noter que ce \tilde{f} est unique car $\tilde{f}|_{V \otimes_k V_i}(v \otimes v_i) = f_i(v, v_i)$.

Vous pouvez de même établir en exercice que $V \otimes_k W \cong W \otimes_k V$.

4. Voir l'exercice 3 pour plus de détails!

5. La multiplication par un scalaire s'obtenant de la même façon est laissée en exercice.

6. Pour toute famille d'applications linéaires $f_i : M_i \rightarrow L$, il existe une unique application linéaire $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow L$ telle que $f|_{M_i} = f_i$.

EXERCICE 2 — PRODUIT TENSORIEL ET APPLICATIONS LINÉAIRES. Soient k un corps et V, V', W, W' des k -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Construire une application linéaire $\varphi : \text{Hom}_k(V, V') \otimes_k \text{Hom}_k(W, W') \rightarrow \text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W')$. Donner pour $f \in \text{Hom}_k(V, V')$, $g \in \text{Hom}_k(W, W')$, la matrice de l'application $\varphi(f \otimes g)$ dans une base adaptée.
2. Montrer que c'est un isomorphisme.
3. Montrer que, si l'on note V^* le dual de V , alors on a un isomorphisme entre $\theta_{V,W} : V^* \otimes_k W \rightarrow \text{Hom}_k(V, W)$. Montrer alors que $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ est de rang r si, et seulement si, r est le plus petit entier naturel tel que $\theta_{V,W}^{-1}(f)$ s'écrit comme une somme de d tenseurs élémentaires non nuls.
4. Décrire un isomorphisme entre $V^* \otimes_k V^*$ et $(V \otimes_k V)^*$. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de G -modules si V est un G -module pour G un groupe fini.
5. Montrer que l'application

$$\begin{cases} V \times V^* & \longrightarrow k \\ (x, f) & \longmapsto f(x) \end{cases}$$

fournit une application $e : V \otimes_k V^* \rightarrow k$. Que vaut $e \circ \theta_{V,V}^{-1}$?

SOLUTION.

1. Soient $f \in \text{Hom}_k(V, V')$ et $g \in \text{Hom}_k(W, W')$. On a alors que l'application

$$\begin{aligned} V \times W &\longrightarrow V' \otimes_k W' \\ (v, w) &\longmapsto f(v) \otimes g(w) \end{aligned}$$

est bilinéaire par linéarité de f , de g et bilinéarité de \otimes . Par propriété universelle, il s'ensuit une application linéaire $f \otimes g : V \otimes_k W \rightarrow V' \otimes_k W'$ telle que $f \otimes g(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$ pour tous $v \in V$ et $w \in W$. Comme d'habitude, on part alors de l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \text{Hom}_k(V, V') \times \text{Hom}_k(W, W') &\longrightarrow \text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W') \\ (f, g) &\longmapsto f \otimes g \end{aligned}$$

qui donne lieu à une application k -linéaire

$$\varphi : \text{Hom}_k(V, V') \otimes_k \text{Hom}_k(W, W') \longrightarrow \text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W')$$

définie par $\varphi(f \otimes g) = f \otimes g$. On écrira $f \otimes_k g$ pour désigner le tenseur pur dans $\text{Hom}_k(V, V') \otimes_k \text{Hom}_k(W, W')$ et éviter les confusions avec l'application linéaire $f \otimes g$ qui vit dans $\text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W')$.

Passons à la matrice de $f \otimes g$. Notons $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_m, f_1, \dots, f_r$ et f'_1, \dots, f'_s des bases respectivement de V, V', W et W' . On sait alors que $(e_i \otimes f_k)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq r}}$ est une base de $V \otimes_k W$ et que $(e'_j \otimes f'_\ell)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq \ell \leq s}}$ est une base de $V' \otimes_k W'$. Notons B la matrice de f dans les bases (e_i) et (e'_j) et C celle de g dans les bases (f_k) et (f'_ℓ) . On calcule alors

$$f \otimes g(e_i \otimes f_k) = f(e_i) \otimes g(f_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^s b_{ji} c_{\ell k} e'_j \otimes f'_\ell$$

si bien que dans les bases $(e_1 \otimes f_1, \dots, e_1 \otimes f_r, \dots, e_n \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_r)$ et $(e'_1 \otimes f'_1, \dots, e'_1 \otimes f'_s, \dots, e'_m \otimes f'_1, \dots, e'_m \otimes f'_s)$, il vient que la matrice cherchée est donnée par⁷

$$B \otimes C = \begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1n}C \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}C & \cdots & b_{mn}C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nr,ms}(k).$$

Cette matrice est appelée le *produit de Kronecker* de B et C et on voit facilement qu'en général, $B \otimes C \neq C \otimes B$.

Considérons alors le cas de matrices carrées, à savoir $n = m$ et $r = s$. On vérifie aisément que si λ est valeur propre de B et μ valeur propre de C avec $BX = \lambda X$ et $CY = \mu Y$ où $X, Y \neq 0$, alors le vecteur $X \otimes Y$ défini par $(x_1 \otimes y_1, \dots, x_1 \otimes y_n, \dots, x_n \otimes y_1, \dots, x_n \otimes y_n)$ est non nul⁸ et on vérifie que

$$(B \otimes C)(X \otimes Y) = \lambda \mu X \otimes Y.$$

On peut alors mettre B et C sous leur forme de Jordan via P et Q (sur une clôture algébrique) et on vérifie que $P \otimes Q$ triangularise $B \otimes C$ avec sur la diagonale tous les produits possibles $\lambda \mu$. On en déduit immédiatement que

$$\text{Tr}(B \otimes C) = \text{Tr}(B)\text{Tr}(C) \quad \text{et} \quad \det(B \otimes C) = \det(B)^r \det(C)^n.$$

⁷. Traiter des exemples de petite dimension pour s'en convaincre!

⁸. Se souvenir que sur des espaces vectoriels si $v \neq 0$ et $w \neq 0$ alors $v \otimes w \neq 0$.

La formule sur la trace est claire et pour le déterminant on a

$$\det(B \otimes C) = \prod_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(B) \\ \mu \in \text{Spec}(C)}} \lambda \mu = \prod_{\lambda \in \text{Spec}(B)} \prod_{\mu \in \text{Spec}(C)} \lambda \mu = \prod_{\lambda \in \text{Spec}(B)} \lambda^r \det(C) = \det(B)^r \det(C)^n.$$

La formule donnant la trace est particulièrement importante du point de vue des représentations car vous savez que si la caractéristique est nulle ou première à l'ordre du groupe, alors on dispose de la forme bilinéaire sur les caractères

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1}).$$

On a alors que $\chi_W(g^{-1})$ est la caractéristique de la représentation contragrédiente. En effet, si $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ est la représentation de caractère χ_W , cela correspond à une action linéaire de G sur W et l'on peut en déduire une action linéaire de G sur W^* via $g \cdot f(w) = f(g^{-1} \cdot w)$ pour $f : W \rightarrow k$ linéaire et pour tout $w \in W$. On vérifie alors que le caractère associé vérifie $\chi_{W^*}(g) = \chi_W(g^{-1})$ de sorte que

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_{W^*}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V \otimes_k W^*}(g)$$

puisque les caractères sont simplement des traces et que si $\rho_V : G \rightarrow \text{GL}(V)$ et $\rho_{W^*} : G \rightarrow \text{GL}(W^*)$ sont les morphismes de groupes sous-jacents, on vérifie que $\rho_{V \otimes_k W^*}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_{W^*}(g)$ au sens défini au début de cette question. Cela sera capital quand on voudra utiliser les caractères pour étudier les représentations et je vous renvoie pour cela à l'exercice 10.

2. On a, avec les notations de la question précédente, que $\text{Hom}_k(V, V')$ et $\text{Hom}_k(W, W')$ admettent pour bases respectives $(f_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ qui envoie e_i sur e'_j et tous les autres e_k sur 0 et $(g_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq \ell \leq s}}$ qui envoie f_k sur f'_ℓ et tous les autres f_t sur 0 si bien que $\text{Hom}_k(V, V') \otimes_k \text{Hom}_k(W, W')$ admet pour base $(f_{ij} \otimes g_{k\ell})$ et de même une base de $\text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W')$ est donnée par les $(\theta_{ijk\ell})$ qui envoie $e_i \otimes f_k$ sur $e'_j \otimes f'_\ell$ et les autres $e_t \otimes f_h$ sur 0. On vérifie alors que

$$\begin{aligned} \varphi(f_{ij} \otimes g_{k\ell})(e_t \otimes f_h) &= f_{ij}(e_t) \otimes g_{k\ell}(f_h) \\ &= \delta_{it} \delta_{hk} (e'_j \otimes f'_\ell) \\ &= \begin{cases} e'_j \otimes f'_\ell & \text{si } i = t \text{ et } h = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Autrement dit, φ envoie une base sur une base et est donc un isomorphisme. Cela justifie l'abus de notation qui consiste à noter de la même façon $f \otimes_k g$ et $f \otimes g$.

Noter que cette démonstration ne se généralise pas au cas où tous les espaces sont de dimension infinie. La raison est que, même sous le lemme de Zorn, les familles construites restent libres mais ne sont plus génératrices. Pour s'en convaincre, si V est de dimension infinie, alors (modulo le lemme de Zorn), on peut en trouver une base $(e_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble infini I . La famille des $f_i : V \rightarrow k$ définies par $f_i(e_i) = 0$ et $f_i(e_j) = 1$ sinon est libre mais pas génératrice. En effet, la forme linéaire $F : V \rightarrow k$ définie par $F(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$ ne peut pas être combinaison linéaire finie des f_i car sinon

$$F = \sum_{\substack{j \in J \\ J \text{ fini}}} \lambda_j f_j \quad F(e_k) = 0$$

pour tout $k \in I \setminus J$. En revanche, on peut malgré tout démontrer que φ est un isomorphisme lorsque V et V' seulement sont supposés de dimension finie, ou lorsque W et W' seulement sont supposés de dimension finie ou lorsque V et W seulement sont supposés de dimension finie. Par exemple, dans le cas où V et W sont de dimension finie, on a

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^n k e_i \quad \text{et} \quad W \cong \bigoplus_{j=1}^m k f_j.$$

On a alors que⁹

$$\text{Hom}_k(V, V') \otimes \text{Hom}_k(W, W') \cong \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^m \text{Hom}_k(k, V') \otimes \text{Hom}_k(k, W')$$

9. On peut en effet démontrer que

$$\text{Hom}_k(V_1 \oplus V_2, W) \cong \text{Hom}_k(V_1, W) \times \text{Hom}_k(V_2, W).$$

En effet, se donner un morphisme qui part d'une somme directe est équivalent à se donner un morphisme qui part de chacun des termes de la somme directe et ensuite une somme directe finie est isomorphe au produit direct.

où on a utilisé l'exercice 1, question 3. ainsi que le fait que $\text{Hom}_k(kv, V') \cong \text{Hom}_k(k, V')$ pour tout $v \in V$. Mais, on montre facilement que $\text{Hom}_k(k, V') \cong V'$ et $\text{Hom}_k(k, W') \cong W'$. Par ailleurs, on a

$$\text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W') \cong \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^m \text{Hom}_k(k \otimes_k k, V' \otimes_k W')$$

où $\text{Hom}_k(k \otimes_k k, V' \otimes_k W') \cong \text{Hom}_k(k, V' \otimes_k W') \cong V' \otimes_k W'$. On a donc le résultat. On obtient de la même façon le résultat quand V et V' sont de dimension finie en écrivant V comme une somme directe et $V' \cong k^m$ et en utilisant que

$$\text{Hom}_k(V, V'_1 \times V'_2) \cong \text{Hom}_k(V, V'_1) \times \text{Hom}_k(V, V'_2).$$

Il s'ensuit que

$$\text{Hom}_k(V, V') \otimes \text{Hom}_k(W, W') \cong \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^n \text{Hom}_k(k, k) \otimes \text{Hom}_k(W, W') \cong \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^n \text{Hom}_k(W, W')$$

tandis que

$$\text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W') \cong \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^n \text{Hom}_k(W, W'),$$

ce qui fournit le résultat. On procède de même lorsque W et W' sont de dimension finie par symétrie. On utilise ici fortement les propriétés de l'exercice 1.

3. On pose

$$\begin{aligned} V^* \times W &\longrightarrow \text{Hom}_k(V, W) \\ (f, w) &\longmapsto [v \mapsto f(v)w] \end{aligned}$$

qui est bien définie et bilinéaire. Cette application donne donc lieu par propriété universelle à une application linéaire $\theta_{V,W} : V^* \otimes_k W \rightarrow \text{Hom}_k(V, W)$ telle que $\theta_{V,W}(f \otimes w)(v) = f(v)w$ pour tout $f \in V^*$, $w \in W$ et $v \in V$. Établissons qu'il s'agit d'un isomorphisme sous les hypothèses plus générales que V est de dimension finie uniquement ou que W est de dimension finie uniquement. Si V est de dimension finie, on en choisit une base (e_1, \dots, e_n) et soit (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. On pose alors $\alpha : \text{Hom}_k(V, W) \rightarrow V^* \otimes_k W$ définie par

$$\alpha(\varphi) = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \varphi(e_i).$$

On a alors (noter qu'il suffit de vérifier cette identité sur les tenseurs purs car ils forment une famille génératrice)

$$\alpha \circ \theta_{V,W}(f \otimes w) = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes f(e_i)w = \left(\sum_{i=1}^n f(e_i)e_i^* \right) \otimes w = f \otimes w$$

par bilinéarité de \otimes et puisque, par définition de la base duale, les applications linéaires f et $\sum_{i=1}^n f(e_i)e_i^*$ coïncident sur la base et sont donc égales. On a donc $\alpha \circ \theta_{V,W} = \text{Id}_{V^* \otimes_k W}$. De même,

$$\theta_{V,W} \circ \alpha(\varphi)(v) = \sum_{i=1}^n \theta_{V,W}(e_i^* \otimes \varphi(e_i))(v) = \sum_{i=1}^n e_i^*(v)\varphi(e_i)$$

pour tout $v \in V$. On a alors que cette application coïncide avec φ en les e_i et donc $\theta_{V,W} \circ \alpha = \text{Id}_{\text{Hom}_k(V,W)}$. Noter qu'on a besoin de l'inverse à droite et à gauche qui entraîne respectivement le caractère surjectif¹⁰ et injectif¹¹. En revanche, si on connaît déjà la bijectivité, alors on sait qu'on a un inverse à droite et un inverse à gauche et qu'ils sont égaux. On peut alors se contenter d'un sens pour exhiber un inverse.

Passons au cas où W est de dimension finie. On en fixe une base (f_1, \dots, f_m) de W et (f_1^*, \dots, f_m^*) sa base duale. On pose alors $\beta : \text{Hom}_k(V, W) \rightarrow V^* \otimes_k W$ définie par

$$\beta(\varphi) = \sum_{j=1}^m (f_j^* \circ \varphi) \otimes f_j.$$

On a alors

$$\beta \circ \theta_{V,W}(g \otimes w) = \sum_{j=1}^m \psi_j \otimes w$$

10. Qui est équivalente à l'existence d'un inverse à droite.

11. Qui est équivalente à l'existence d'un inverse à gauche.

où $\psi_j \in V^*$ telle que pour tout $v \in V$, $\psi_j(v) = g(v)f_j^*(w)$. On a donc

$$\beta \circ \theta_{V,W}(g \otimes w) = g \otimes \left(\sum_{j=1}^m f_j^*(w)w \right) = g \otimes w$$

tandis que

$$\theta_{V,W} \circ \beta(\varphi)(v) = \sum_{j=1}^m \theta_{V,W}((f_j^* \circ \varphi) \otimes f_j)(v) = \sum_{j=1}^m f_j^*(\varphi(v)) f_j = \varphi(v)$$

pour tout $v \in V$, ce qui permet de conclure.

Noter que si V et W sont munis d'une structure de G -module, alors $V^* \otimes_k W$ via ¹² $g \cdot (f \otimes w) = f_g \otimes (g \cdot w)$ où $f_g(v) = f(g^{-1} \cdot v)$. Noter que $v \mapsto f(g \cdot v)$ ne définit pas une action à gauche sur V^* . On peut aussi munir d'une structure de G module $\text{Hom}_k(V, W)$ via $g \cdot f(v) = g \cdot f(g^{-1} \cdot v)$. En particulier pour cette action, $\text{Hom}_k(V, W)^G = \text{Hom}_G(V, W)$. On a alors que $\theta_{V,W}$ est un isomorphisme de G -modules puisque pour tous $g \in G$, $f \in V^*$, $w \in W$ et $v \in V$, on a

$$\theta_{V,W}(g \cdot (f \otimes w))(v) = f(g^{-1} \cdot v) g \cdot w = g \cdot (f(g^{-1} \cdot v) w) = g \cdot \theta_{V,W}(f \otimes w)(v),$$

la dernière égalité provenant de la k -linéarité de l'action de G .

Soit à présent $f \in \text{Hom}_k(V, W)$. Si f est de rang 0, elle est nulle et on a clairement le résultat. Supposons donc $f \neq 0$ et que

$$\theta_{V,W}^{-1}(f) = \sum_{i=1}^d \varphi_i \otimes w_i$$

avec $\varphi_i \in V^*$ non nuls, $w_i \in W$ non nuls et d un entier. On a alors pour tout $v \in V$ que

$$f(v) = \sum_{i=1}^d \varphi_i(v) w_i$$

de sorte que $\text{Im}(f) \subseteq \text{Vect}(w_1, \dots, w_d)$ et par conséquent $\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \leq d$. Il suffit donc d'établir que $\theta_{V,W}^{-1}(f)$ est une somme de r tenseurs purs et ceux-ci seront nécessairement non nuls d'après ce qui précède et on aura obtenu que r est le plus petit entier d tel que $\theta_{V,W}^{-1}(f)$ s'écrive comme une somme de d tenseurs purs non nuls. On sait que $\text{Im}(f)$ est de dimension r et on en fixe une base (e_1, \dots, e_r) . On a alors pour tout $v \in V$ que

$$f(v) = \sum_{i=1}^r c_i(v) e_i \quad c_i(v) \in k.$$

Cela permet de définir une application $c_i : V \rightarrow k$. Cette dernière est linéaire car

$$f(\lambda v + v') = \sum_{i=1}^r c_i(\lambda v + v') e_i \quad \text{et} \quad f(\lambda v + v') = \lambda f(v) + f(v') = \sum_{i=1}^r (\lambda c_i(v) + c_i(v')) e_i$$

pour tous $v, v' \in V$ et $\lambda \in k$. Comme la famille (e_i) est libre, il vient $c_i(\lambda v + v') = \lambda c_i(v) + c_i(v')$. Finalement, les $c_i \in V^*$ et vérifient

$$\theta_{V,W}^{-1}(f)(v) = \sum_{i=1}^r c_i \otimes e_i$$

ce qui permet de conclure! Vous pouvez alors vous amuser à retrouver tout ce que vous savez sur le rang en utilisant ce point de vue!

4. On raisonne comme en question précédente avec l'application

$$\begin{aligned} V^* \times V^* &\longrightarrow (V \otimes_k V)^* \\ (f, g) &\longmapsto [v_1 \otimes v_2 \mapsto f(v_1)g(v_2)] \end{aligned}$$

qui est bien définie comme en question 1. pour obtenir un isomorphisme $\varphi : V^* \otimes_k V^* \rightarrow (V \otimes_k V)^*$. On pouvait aussi appliquer 1. avec $W = V$, $V' = W' = k$ et utiliser que $V \otimes_k k \cong V$. On vérifie qu'il s'agit d'un morphisme de G -module comme en question précédente. Soient $g \in G$, $f, F \in V^*$, on a

$$\varphi(g \cdot (f \otimes F))(v_1 \otimes v_2) = f(g^{-1} \cdot v_1) F(g^{-1} \cdot v_2) = g \cdot \varphi(f \otimes F)(v_1 \otimes v_2)$$

où on a bien qu'il suffit de vérifier sur les tenseurs purs puisqu'ils sont générateurs et que l'action est linéaire. Par ailleurs, on a utilisé le fait que

$$g \cdot \varphi(f \otimes F)(v_1 \otimes v_2) = \varphi(f \otimes F)(g^{-1} \cdot (v_1 \otimes v_2)) = \varphi(f \otimes F)(g^{-1} \cdot v_1 \otimes g^{-1} \cdot v_2).$$

¹². Qu'on définirait proprement en passant par la propriété universelle!

5. On suppose ici que V est de dimension finie. L'application

$$\begin{cases} V^* \times V & \longrightarrow k \\ (f, x) & \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est bilinéaire et fournit par conséquent une application linéaire $e : V^* \otimes_k V \longrightarrow k$ telle que $e(f \otimes v) = f(v)$. Pour tout $f \in \text{End}_k(V)$, on a

$$e \circ \theta_{V,V}^{-1}(f) = e \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes f(e_i) \right) = \sum_{i=1}^n e_i^*(f(e_i))$$

par la question 2. On a alors si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de f dans la base (e_1, \dots, e_n) , que

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j \quad \text{de sorte que} \quad e_i^*(f(e_i)) = a_{ii}$$

par définition de la base duale. On en conclut que

$$e \circ \theta_{V,V}^{-1}(f) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Trace}(f).$$

Vous pouvez, là aussi, vous amuser à retrouver toutes les propriétés usuelles de la trace à partir de ce point de vue!

EXERCICE 3 — LE GROUPE \mathfrak{S}_3 .

- On considère l'action de \mathfrak{S}_3 sur \mathbb{C}^3 par permutation des coordonnées. Vérifier que cela définit une structure de \mathfrak{S}_3 -module sur \mathbb{C}^3 . Préciser sa représentation matricielle dans la base canonique.
- Montrer que \mathbb{C}^3 admet deux sous- \mathfrak{S}_3 -modules non triviaux $\mathbb{C}(1, 1, 1)$ et $H = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et que chacun de ceux-ci sont simples.
- Donner une représentation matricielle de la représentation H .

On note à présent $\sigma = (1\ 2\ 3)$, $\tau = (1\ 2)$ et V une représentation de \mathfrak{S}_3 .

- Montrer que V se décompose en $V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$ où V_α est le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre α .
- Montrer que $\tau(V_\alpha) = V_{\alpha^2}$ pour $\alpha \in \{1, j, j^2\}$. En déduire que V_1 et $V_j \oplus V_{j^2}$ sont deux sous- \mathfrak{S}_3 -modules de V .
- Que peut-on en déduire si V est irréductible?
- On suppose que V est irréductible et que $V_1 \neq \{0\}$. Montrer que V est de dimension 1 et est soit la représentation triviale soit la signature.
- On suppose que V est irréductible et que $V_j \neq \{0\}$. Soit $v \in V_j \setminus \{0\}$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par v et $\tau(v)$ est un plan \mathfrak{S}_3 -stable. En déduire que V est \mathfrak{S}_3 -isomorphe à H .
- Généraliser cette méthode au groupe \mathbf{D}_4 .

SOLUTION.

- On fait agir \mathfrak{S}_3 sur \mathbb{C}^3 via¹³

$$\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)})$$

pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ et $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$. Il s'agit bien d'une action car $\text{Id} \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3)$ et pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_3$, on a

$$(\sigma' \cdot (\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3)))_i = (\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3))_{\sigma'^{-1}(i)} = z_{\sigma^{-1}(\sigma'^{-1}(i))} = z_{(\sigma'\sigma)^{-1}(i)}.$$

Par ailleurs, cette action est linéaire, à savoir qu'elle vérifie

$$\sigma \cdot (\lambda(z_1, z_2, z_3) + (z'_1, z'_2, z'_3)) = \lambda(\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3)) + \sigma \cdot (z'_1, z'_2, z'_3).$$

On a donc bien une structure de G -module. En effet, une telle action donne lieu à un morphisme $\rho : G \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C}^3)$ et comme l'action est linéaire, on arrive en fait dans $\text{GL}(\mathbb{C}^3)$ et l'action donne lieu à un morphisme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$, autrement dit à une représentation de \mathfrak{S}_3 . Ainsi, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, en fixant la base canonique de \mathbb{C}^3 , on obtient une matrice M_σ (la matrice de $\rho(\sigma)$ dans la base canonique).

13. Bien noter que $\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)})$ n'est pas une action à gauche! Par exemple pour $\sigma = (1\ 2)$ et $\sigma' = (1\ 2\ 3)$, on aurait avec cette éfinition

$$\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_1, z_3)$$

et

$$\sigma' \cdot (z_2, z_1, z_3) = (Z_1, Z_2, Z_3) = (Z_2, Z_3, Z_1) = (z_1, z_3, z_2).$$

Or, $\sigma'\sigma = (1\ 3)$ et $(1\ 3) \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_3, z_2, z_1) \neq (z_1, z_3, z_2)$

Cette famille vérifie $M_{\text{Id}} = I_3$ et $M_{\sigma'} M_{\sigma} = M_{\sigma'\sigma}$ et la donnée d'une telle famille est équivalente à celle de la représentation ρ . La représentation matricielle correspond à cette famille de matrices (une fois un choix de base effectué) Ici, on a¹⁴ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ que $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$. En effet, la composante non nulle de $\rho(\sigma)(e_i)$ est la composante j telle que $i = \sigma^{-1}(j)$ soit $j = \sigma(i)$. On en déduit que M_{σ} est la matrice de permutation associée à σ .

Noter enfin que toute cette question et la suivante se généraliseraient à \mathfrak{S}_n et je vous renvoie au DM pour plus de détails!

2. On rappelle qu'un sous- \mathfrak{S}_3 -module est un sous-espace vectoriel W de \mathbb{C}^3 stable par l'action de \mathfrak{S}_3 , autrement dit tel que $\rho(\sigma)(W) \subseteq W$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. On a clairement un seul sous-espace stable de dimension nulle, à savoir $\{0\}$ et un seul de dimension 3, \mathbb{C}^3 . Les autres sous- \mathfrak{S}_3 -modules sont de dimension 1 ou 2. Si W est de dimension 1, il est engendré par un vecteur (z_1, z_2, z_3) . Mais puisque W est \mathfrak{S}_3 -stable, on a $(1\ 2) \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_1, z_3) \in W$. Autrement dit, il existe un complexe λ tel que $(z_2, z_1, z_3) = \lambda(z_1, z_2, z_3)$ ce qui impose $\lambda = 1$ et $z_1 = z_2$. En considérant les autres transpositions, il vient que $W = \text{Vect}(1, 1, 1)$ et qu'il s'agit du seul sous- \mathfrak{S}_3 -module de dimension 1. Une représentation de dimension 1 étant nécessairement irréductible, elle est irréductible.

Si maintenant W est de dimension 2. On sait que $W \neq \{z_3 = 0\}$ car $\{z_3 = 0\}$ n'est pas \mathfrak{S}_3 -stable car $(1\ 3) \cdot (1, 1, 0) = (0, 1, 1) \notin \{z_3 = 0\}$. Par ailleurs, on considère $(z_1, z_2, 0) \in W \cap \{z_3 = 0\}$ avec $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ (ce qui est toujours possible puisqu'on a une droite vectorielle). On sait aussi que W admet une équation du type $az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$ pour $a, b, c \in \mathbb{C}^3$. On a alors $(1\ 2) \cdot (z_1, z_2, 0) = (z_2, z_1, 0) \in W$ de sorte que

$$\begin{cases} az_1 + bz_2 = 0 \\ az_2 + bz_1 = 0. \end{cases}$$

Si $z_2 \neq 0$, en prenant $bL_1 - aL_2$, il vient $(b^2 - a^2)z_2 = 0$ soit $a = b$ ou $a = -b$. Mais si $a = -b$, l'équation de W est $az_1 - az_2 + cz_3 = 0$. Pour $(z_1, z_2, z_3) \in W$ tel que $z_3 \neq 0$ (ce qui existe d'après ce qui précède), on a $(1\ 2) \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_1, z_3) \in W$ donc $az_2 - az_1 + cz_3 = 0$. Sommer ces deux équations fournit $2cz_3 = 0$ soit $c = 0$ et $W = \{z_1 = z_2\}$ qui n'est pas \mathfrak{S}_3 -stable car $(1\ 3) \cdot (1, 1, 2) = (2, 1, 1) \notin \{z_1 = z_2\}$. On a donc une contradiction et $a \neq b$. On a donc $a = b$ et par symétrie on obtient $a = c$ de sorte que $W = H$ est le seul sous- \mathfrak{S}_3 -module de dimension 2. Cette représentation est irréductible car sinon elle contiendrait une sous-représentation de dimension 1 qui d'après ce qui précède serait $\text{Vect}(1, 1, 1)$ ce qui est absurde.

On propose une démonstration un peu plus savante et conceptuelle (et donc plus générale) de ce fait que l'on vient d'établir "à la main". De façon générale, soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation d'un groupe fini G de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle ou première à l'ordre de G . On rappelle que l'algèbre de groupe est le G -module $k[G]$ des fonctions de G dans k qui admet comme base les $(\delta_g)_{g \in G}$ où $\delta_g(g') = 1$ si $g' = g$ et 0 sinon. En particulier, il s'agit d'un k -espace vectoriel de dimension $|G|$. Par abus de notation, on notera g pour δ_g et ainsi tout élément de $k[G]$ s'écrit comme

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \quad \text{avec} \quad \lambda_g \in k.$$

On a une structure de G -module via $g' \cdot \delta_g = \delta_{g'g} = g'g$ avec notre abus de notation. Toute représentation ρ donne lieu à un morphisme de k -algèbres

$$\tilde{\rho} : \begin{cases} G & \longrightarrow \text{End}_k(V) \\ \sum_{g \in G} \lambda_g g & \longmapsto \sum_{g \in G} \lambda_g \rho(g). \end{cases}$$

Noter qu'on n'a plus de raison d'obtenir des isomorphismes et on arrive donc dans les endomorphismes de V . Réciproquement, remarquer qu'un tel morphisme de k -algèbres $\tilde{\rho} : G \rightarrow \text{End}_k(V)$ fournit par restriction à G une représentation. En effet, un élément de G admet un inverse g^{-1} et alors $\tilde{\rho}(g^{-1})$ est un inverse pour $\tilde{\rho}(g)$ qui est donc dans $\text{GL}(V)$. On considère alors

$$V^G = \{v \in V : \forall g \in G, g \cdot v = v\}.$$

Dans le cas du G -module $k[G]$, on a

$$k[G]^G = \text{Vect}(e) \quad \text{avec} \quad e = \sum_{g \in G} g.$$

En effet, pour tout $h \in G$, on a

$$h \cdot e = \sum_{g \in G} hg$$

et $g \mapsto hg$ est une bijection de G de sorte que $h \cdot e = e \cdot e = e$. On a donc bien une inclusion. Pour l'inclusion, réciproque, soit $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in k[G]^G$. Alors pour tout $h \in G$, on a

$$x = h \cdot x = \sum_{g \in G} \lambda_g hg.$$

14. Noter qu'en général, il suffit de décrire une matrice par classe de conjugaison puisqu'on cherchera en général à écrire des tables de caractères à partir de ces représentations matricielles.

Or la famille des (δ_g) est libre et donc en comparant les coefficients devant l'élément neutre de G de x (à savoir λ_1) et de $h \cdot x$ (à savoir λ_h), il vient $\lambda_h = \lambda_1$. On en déduit bien l'égalité. On a par ailleurs que

$$e^2 = \left(\sum_{g \in G} g \right) e = \sum_{g \in G} g \cdot e = |G|e.$$

On en déduit que $\varepsilon = \frac{e}{|G|}$ appartient au centre de $k[G]$ et est un idempotent, c'est-à-dire que $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Comme la caractéristique est nulle ou première à l'ordre de G , le théorème de Maschke garantit que V^G admet un supplémentaire G -stable W . Comme ε est central, on a

$$\forall g \in G, \quad \rho(g) \circ \tilde{\rho}(\varepsilon) = \tilde{\rho}(g\varepsilon) = \tilde{\rho}(\varepsilon g) = \tilde{\rho}(\varepsilon) \circ \rho(g)$$

ce qui implique que $\tilde{\rho}(\varepsilon)$ est un G -morphisme¹⁵. On a en particulier que le noyau et l'image de $\tilde{\rho}(\varepsilon)$ sont des G -modules en somme directe. On a alors que l'image de $\tilde{\rho}(\varepsilon)$ est en réalité V^G . En effet, si $g \cdot v = v$ pour tout $g \in G$, alors

$$v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v = \tilde{\rho}(\varepsilon)(v).$$

Réciproquement, si $v \in \text{Im}(\tilde{\rho}(\varepsilon))$, il existe $w \in V$ tel que $v = \tilde{\rho}(\varepsilon)(w)$. On a alors

$$g \cdot v = \rho(g)(v) = \rho(g) \circ \tilde{\rho}(\varepsilon)(w) = \tilde{\rho}(g\varepsilon)(w) = \tilde{\rho}(\varepsilon)(w) = v$$

où l'on a utilisé le fait que $g\varepsilon = \varepsilon$. On a donc bien le résultat et $V = V^G \oplus \text{Ker}(\tilde{\rho}(\varepsilon))$ une décomposition en somme directe de sous- G -modules. Soit à présent un supplémentaire G -stable de V^G quelconque. Alors pour tout $w \in W$, on a $\tilde{\rho}(\varepsilon)(w) \in W$ par stabilité et $\tilde{\rho}(\varepsilon)(w) \in \text{Im}(\tilde{\rho}(\varepsilon)) = V^G$ de sorte que $\tilde{\rho}(\varepsilon)(w) \in W \cap V^G = \{0\}$ et $w \in \text{Ker}(\tilde{\rho}(\varepsilon))$. Par dimension, il vient $W = \text{Ker}(\tilde{\rho}(\varepsilon))$. Ouf! Revenons-en à l'exercice! On voit facilement ici que $(\mathbb{C}^3)^{\mathfrak{S}_3} = \text{Vect}(1, 1, 1)$. On en déduit que si W est un sous- \mathfrak{S}_3 -module irréductible¹⁶ de dimension 2, alors il est en somme directe avec $\text{Vect}(1, 1, 1)$ et ce qui précède garantit alors que $W = \text{Ker}(\tilde{\rho}(\varepsilon))$. On a alors que la matrice de $\tilde{\rho}(\varepsilon)$ est donnée par

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on retrouve le résultat! On peut aussi vérifier que la projection $\tilde{\rho}(\varepsilon)$ est orthogonale et en déduire que $W = \text{Vect}(1, 1, 1)^\perp = H$. En effet, pour le produit scalaire usuel sur \mathbb{C}^3 , on a pour $v, v' \in \mathbb{C}^3$ avec $v \in V^G$ et $v' \in \text{Ker}(\tilde{\rho}(\varepsilon))$,

$$(v, v') = (\tilde{\rho}(\varepsilon)(v), v') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g \cdot v, v').$$

Mais la matrice de $v \mapsto g \cdot v$ est comme on l'a vu une matrice de permutation qui est orthogonale si bien que

$$(v, v') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v, g^{-1} \cdot v') = (v, \tilde{\rho}(\varepsilon)(v')) = 0$$

car $g \mapsto g^{-1}$ est une bijection de G et car v' est dans le noyau de $\tilde{\rho}(\varepsilon)$.

3. On choisit¹⁷ une base de H : $e_1 = (1, -1, 0)$, et $e_2 = (1, 0, -1)$. Le morphisme associé à H est $\rho' : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \text{GL}(H)$ défini par $\rho'(\sigma) = \rho(\sigma)|_H$ où le ρ est le morphisme associé à la représentation de la question 1. On a toujours que $\rho'(\text{Id}) = \text{Id}$ de matrice I_2 dans la base (e_1, e_2) de H . La matrice de $\rho'((1\ 2))$ dans la (e_1, e_2) de H est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\rho'((1\ 2))(e_1) = (1\ 2) \cdot e_1 = (-1, 1, 0) = -e_1$ et $\rho'((1\ 2))(e_2) = (1\ 2) \cdot e_2 = (0, 1, -1) = e_2 - e_1$. Je vous laisse écrire les autres matrices de transposition mais on en aura pas besoin (elles sont toutes conjuguées à cette matrice). Enfin, la matrice de $\rho'((1\ 2\ 3))$ dans la (e_1, e_2) de H est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car $\rho'((1\ 2\ 3))(e_1) = (1\ 2\ 3) \cdot e_1 = (0, 1, -1) = e_2 - e_1$ et $\rho'((1\ 2\ 3))(e_2) = (1\ 2\ 3) \cdot e_2 = (-1, 1, 0) = -e_1$. Je vous laisse écrire l'autre matrice de 3-cycle mais on en aura pas besoin (elle est en fait conjuguée à cette matrice ou égale à son inverse).

15. Je rappelle qu'un G -morphisme $f : V \rightarrow W$ entre deux G -modules est une application linéaire telle que pour tout $g \in G$, $f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$ soit $f \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ f$ puisque $\rho_V(g)(v) = g \cdot v$.

16. Noter que toute sous-représentation de dimension 2 est irréductible car on a une seule sous-représentation de dimension 1.

17. On verra en question 8, que ce choix naturel n'est ici pas le meilleur choix!

4. On sait que $\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$ avec $\tau\sigma\tau = \sigma^2 = \sigma^{-1}$. On a par ailleurs que $\sigma^3 = \text{Id}$ de sorte qu'avec les notations de la question 2., il vient $M_\sigma^3 = I_3$. Ainsi, M_σ annule le polynôme $X^3 - 1$ scindé à racines simples sur \mathbb{C} . On en déduit que M_σ est diagonalisable et par conséquent $V = V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$ où V_α est le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre α .
5. Ici on fera l'abus de notation que $\tau(V_\alpha) = \rho(\tau)(V_\alpha)$. Soient $\alpha \in \{1, j, j^2\}$ et $v \in \tau(V_\alpha)$. On a donc que $v = M_\tau w$ avec $M_\sigma w = \alpha w$. On calcule alors

$$M_\sigma v = M_\sigma M_\tau w = M_{\sigma\tau} w = M_{\tau\sigma^2} w = M_\tau M_\sigma^2 w = \alpha^2 M_\tau w = \alpha^2 v$$

où on a utilisé le fait que $\sigma\tau = \tau\sigma^2$. On a donc $\tau(V_\alpha) \subseteq V_{\alpha^2}$. En appliquant ce résultat à α^2 , il vient $\tau(V_{\alpha^2}) \subseteq V_{\alpha^4} = V_\alpha$ puisque $\alpha^3 = 1$. On prend alors l'image par τ pour obtenir

$$\tau^2(V_{\alpha^2}) \subseteq \tau(V_\alpha) \quad \text{soit} \quad V_{\alpha^2} \subseteq \tau(V_\alpha)$$

puisque $\tau^2 = \text{Id}$. On a donc bien $\tau(V_\alpha) = V_{\alpha^2}$. En particulier, pour $\alpha = 1$, V_1 est stable par τ . Mais V_1 est un sous-espace propre de M_σ donc il est stable par σ et comme σ et τ engendrent \mathfrak{S}_3 , V_1 est \mathfrak{S}_3 -stable et par conséquent un sous- \mathfrak{S}_3 -module.

De même, V_j et V_{j^2} sont stables par σ en tant qu'espaces propres de M_σ . Ils ne sont pas stables par τ individuellement mais d'après ce qu'on vient de voir $V_j \oplus V_{j^2}$ est stable par τ . En conclusion, $V_j \oplus V_{j^2}$ est stable par σ et τ donc par \mathfrak{S}_3 et on obtient bien là encore un sous- \mathfrak{S}_3 -module.

6. Si V est irréductible, il vient donc que soit $V_j \neq \{0\}$ (et alors $V_{j^2} = \tau(V_j) \neq \{0\}$) et alors nécessairement par simplicité $V_1 = \{0\}$ et $V = V_j \oplus V_{j^2}$ ou bien $V_j = V_{j^2} = \{0\}$ et $V = V_1$.
7. On suppose que V est irréductible de dimension n et que $V_1 \neq \{0\}$. On a donc $V = V_1$ d'après la question précédente. On a donc que $M_\sigma = I_n$. En particulier tout sous-espace vectoriel de V est stable par σ . Or, on a $\tau^2 = \text{Id}$ de sorte que M_τ annule le polynôme scindé à racine simple $X^2 - 1$. On a donc $V = W_1 \oplus W_{-1}$ avec W_ε le sous-espace propre associé à $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ de M_τ . Chacun de ces deux sous-espaces propres est stable par τ et par σ donc un sous- \mathfrak{S}_3 -module. Comme V est irréductible on doit avoir $V = W_1$ ou $V = W_{-1}$. Si $V = V_1 = W_1$, alors $M_\sigma = M_\tau = I_n$ et l'action est donc triviale puisque σ et τ engendrent \mathfrak{S}_3 . Ainsi tout sous-espace vectoriel de V est \mathfrak{S}_3 -stable et donc le fait que V soit irréductible implique que V soit de dimension 1. Soit $V = V_1 = W_{-1}$ et $M_\sigma = I_n$ et $M_\tau = -I_n$. On en déduit de même que tout sous-espace vectoriel de V est stable par σ et τ donc par \mathfrak{S}_3 et par conséquent V est de dimension 1 et la représentation correspond à un morphisme non trivial $\rho : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ qui envoie σ sur 1 et τ sur -1 . On sait alors que le seul morphisme non trivial de ce type est la signature. En conclusion, on obtient dans ce cas que V est irréductible de degré 1 et est soit la représentation triviale soit la signature.
8. On suppose que V est irréductible et que $V_j \neq \{0\}$. Soit $v \in V_j \setminus \{0\}$. Soit W l'espace vectoriel engendré par v et $\tau(v)$. Alors W est de dimension 2. En effet, sinon il existerait $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tau(v) = \lambda v$. Mais alors

$$\lambda jv = \sigma(\tau(v)) = \sigma \circ \tau(v) = \tau \circ \sigma^2(v) = j^2 \tau(v) = j^2 \lambda v,$$

ce qui est absurde. On vérifie alors que W est τ stable (ce qui est évident puisque $\tau^2(v) = v$) et σ stable puisque

$$\sigma(v) = jv \in W \quad \text{et} \quad \sigma(\tau(v)) = \tau(\sigma^2(v)) = j^2 \tau(v) \in W.$$

Cela implique que W est un sous- \mathfrak{S}_3 -module de V et comme V est irréductible, que $V = W$. Comme nous sommes en caractéristique nulle (voir l'exercice 9), deux représentations sont isomorphes si, et seulement si, elles ont le même caractère. On a que pour H , avec la représentation matricielle de la question 3., on a

$$\chi_H(\text{Id}) = 2, \quad \chi_H(ab) = 0, \quad \chi_H(abc) = -1$$

où dans \mathfrak{S}_n on rappelle que¹⁸ que les classes de conjugaison sont données par le type de décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Dans \mathfrak{S}_3 on a donc trois classes de conjugaison qui sont l'identité, les transpositions et les 3-cycles. On peut alors écrire que pour W , si on note $\rho_W : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \text{GL}(W)$ le morphisme sous-jacent, la matrice de l'identité dans la base $(v, \tau(v))$ est I_2 , celle de $\tau = (1\ 2)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car $\tau(v) = \tau(v)$ et $\tau(\tau(v)) = v$. Enfin, la matrice de $\sigma = (1\ 2\ 3)$ dans la base $(v, \tau(v))$ est

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

car $\sigma(v) = jv$ et $\sigma(\tau(v)) = j^2 \tau(v)$. Il s'ensuit que le caractère de W est donné par

$$\chi_W(\text{Id}) = 2, \quad \chi_W(ab) = 0, \quad \chi_W(abc) = j + j^2 - 1.$$

18. Voir le TD 1 par exemple.

Les deux caractères sont les mêmes et donc H est \mathfrak{S}_3 -isomorphe à W . On pouvait aussi choisir comme base de H la famille $e_1 = (1, j, j^2)$ et $e_2 = \tau(e_1) = (j, 1, j^2)$ et vérifier que l'isomorphisme linéaire $f : W \rightarrow H$ tel que $f(v) = e_1$ et $f(\tau(v)) = e_2$ est un \mathfrak{S}_3 -morphisme si bien que f est un isomorphisme de \mathfrak{S}_3 -modules.

Noter qu'on a trois classes de conjugaison dans \mathfrak{S}_3 et trois représentations irréductibles si bien qu'on a en fait la table de caractères de \mathfrak{S}_3 . On reviendra sur celle-ci plus en détails dans l'exercice 10. On obtient en notant θ le caractère de H ou de W :

\mathfrak{S}_3	Id	(ab)	(abc)
$\mathbb{1}$	1	1	1
ε	1	-1	1
θ	2	0	-1

9. On a vu que $G = \mathbf{D}_4$ est engendré par ρ d'ordre 4 et s d'ordre 2 tels que $s\rho s = \rho^{-1} = \rho^3 = -\rho$. En raisonnant de la même façon, on a donc que M_ρ annule le polynôme scindé à racine simples $X^4 - 1$ et que par conséquent toute représentation de dimension finie V de G est de la forme $V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus V_i \oplus V_{-i}$. On a alors de même que $s(V_\alpha) = V_{\alpha^3}$ de sorte que V_1, v_{-1} et $V_i \oplus V_{-i}$ sont trois sous- G -modules de V . Supposons alors V irréductible. Si $V_1 \neq \{0\}$, on a $V = V_1$ et on conclut de même que soit $M_s = I_n$ soit $M_s = -I_n$ et que V est de dimension 1. On obtient ainsi deux représentations irréductibles de degré 1 qui correspondent au caractère trivial et au morphisme $\chi_1 : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\chi_1(\rho) = 1$ et $\chi_1(s) = -1$. Si $V_{-1} \neq \{0\}$, on obtient de même que $M_\rho = -I_n$ et $M_s = \pm I_n$ et V est de dimension 1. Cela fournit alors deux caractères linéaires supplémentaires, à savoir $\chi_2 : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\chi_2(\rho) = -1$ et $\chi_2(s) = 1$ et $\chi_3 : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\chi_3(\rho) = -1$ et $\chi_3(s) = -1$. Enfin, si $V_i \neq \{0\}$, on considère $v \in V_i \setminus \{0\}$ et on constate que $W = \text{Vect}(v, s(v))$ est un plan G -stable de sorte que $V = W$. On a alors une représentation irréductible de degré 2 telle que la matrice associée à ρ dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et celle associée à s soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On avait calculé les classes de conjugaisons dans G dans le TD 1 et on avait obtenu 5 classes de conjugaisons, l'identité, moins l'identité ainsi que $\{\pm s\}$, $\{\pm \rho\}$ et $\{\pm s\rho\}$. On a donc toute la table de caractères de \mathbf{D}_4 où l'on note θ le caractère de la représentation associée à W :

\mathbf{D}_4	Id	$-\text{Id}$	ρ	s	$s\rho$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
θ	2	-2	0	0	0

On utilise ici que $-\text{Id} = \rho^2$ de sorte que pour calculer le caractère en $-\text{Id}$, il suffit de prendre la trace du carré de la matrice de ρ et pour $s\rho$ il suffit de prendre la trace du produit¹⁹ de la matrice de s par celle de ρ . En dimension 1, on peut aussi utiliser le fait que les caractères linéaires sont alors des morphismes de groupes. On reviendra là aussi sur cette table plus en détails dans l'exercice 13. On verra aussi comment déduire de cette table tous les sous-groupes distingués, si G est simple et son groupe dérivé. Noter enfin que l'on peut montrer (voir ici) que le nombre de caractères de degré 1 est égal au cardinal de l'abélianisé de G . On a que $\{\pm 1\} \subseteq D(G)$ car par exemple $[s, \rho] = -\text{Id}$ et on a égalité car $G/\{\pm 1\}$ est d'ordre 4 donc abélien ce qui fournit $D(G) \subseteq \{\pm 1\}$. Il est alors facile de voir si $\pi : G \rightarrow G/D(G)$ est la surjection canonique que $\pi(s)^2 = \pi(s^2) = \pi(\text{Id})$, $\pi(\rho)^2 = \pi(\rho^2) = \pi(-\text{Id}) = \pi(\text{Id})$ et de même $\pi(s\rho)^2 = \pi(\text{Id})$ de sorte que tous les éléments du quotient sont d'ordre divisant 2. On sait que cela implique $G^{\text{ab}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Cela fournit le nombre de caractères linéaires mais aussi puisque le groupe des caractères linéaires²⁰ est isomorphe à $\widehat{G^{\text{ab}}}$, lui-même isomorphe à G^{ab} . Cela permet de retrouver tous les caractères linéaires. Noter que dans le cas de \mathfrak{S}_n , on sait aussi que $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour tout $n \geq 2$ (cela découle de la simplicité de \mathfrak{A}_n si $n \geq 5$ et on le vérifie à la main dans les cas restants) si bien qu'on retrouve le fait qu'on a deux représentations de degré 1 puisque $\mathfrak{S}_n/D(\mathfrak{S}_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On pourrait aussi retrouver ces deux caractères grâce aux isomorphismes $\widehat{\mathfrak{S}_n} \cong \widehat{\mathfrak{S}_n^{\text{ab}}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercices complémentaires de la semaine 1

EXERCICE 4 — POUR MAÎTRISER LE VOCABULAIRE.

1. À quoi correspond une représentation du groupe trivial? De \mathbb{Z} ? De $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

19. Attention qu'en degré supérieur ou égal à 2, les caractères ne sont **pas** des morphismes de groupes et il faut donc calculer la matrice du produit et en prendre la trace et pas seulement faire le produit des valeurs des caractères (même ici cela donne le même résultat)!

20. Donc des morphismes de groupes $G \rightarrow \mathbb{C}^*$, souvent noté \widehat{G} .

2. Même question avec une sous-représentation.
3. Quels sont les G -modules simples lorsque G est le groupe trivial?
4. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de dimension 1 soit donnée par le module trivial soit par le module D pour lequel l'action de l'élément non trivial sur la droite D se fait par multiplication par -1 . Montrer que toute représentation est semi-simple.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur \mathbb{C} est de dimension 1. Combien existe-t-il de représentations irréductibles non isomorphes sur \mathbb{C} ? Montrer que toute représentation est semi-simple.
6. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}$ sur \mathbb{C} est de dimension 1. Combien existe-t-il de représentations irréductibles de dimension finie non isomorphes sur \mathbb{C} ? Que se passe-t-il si on change de corps? En considérant un bloc de Jordan, construire une représentation de dimension finie de \mathbb{Z} qui n'est pas somme directe de modules simples.

SOLUTION.

1. Une représentation du groupe trivial correspond à un morphisme de groupes $\{e\} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ soit simplement à la donnée d'un espace vectoriel V . Une représentation de \mathbb{Z} correspond à un morphisme de groupes $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Or, \mathbb{Z} est monogène engendré par 1 et donc la donnée d'un tel morphisme correspond à la donnée d'un espace vectoriel V et d'un élément $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ (à savoir $\rho(1)$). De même $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique et la donnée d'une représentation correspond à la donnée d'un espace vectoriel V ainsi que d'un élément $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ vérifiant $\varphi^n = \mathrm{Id}$ (à savoir à nouveau $\rho(\bar{1})$)?
2. Une sous-représentation du groupe trivial est simplement un sous-espace vectoriel (la stabilité par G est alors toujours vérifiée). Dans le cas de \mathbb{Z} ou de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il s'agit de la donnée d'un sous-espace vectoriel stable par φ (correspondant à $\rho(1)$). La stabilité pour tout élément de G s'en déduit par le caractère monogène.
3. Il s'agit simplement des espaces vectoriels de dimension 1 car tout espace vectoriel de dimension supérieure admet des sous-espaces vectoriels non triviaux et par conséquent des sous-représentations non triviales.
4. Une représentation de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspond à la donnée d'un espace vectoriel V et d'une symétrie $s = \rho(\bar{1})$ de V (autrement dit un automorphisme linéaire vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}$). On a alors que s annule un polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1$ si k n'est pas de caractéristique 2. Dans ce cas, $V = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ est une décomposition en somme directe de deux sous-représentations. Si la représentation est irréductible, on doit avoir $V = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $s = \mathrm{Id}$ de sorte que tout sous-espace vectoriel est G -stable et V doit être de dimension 1. On obtient la représentation triviale. Soit $V = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ et $s = -\mathrm{Id}$ de sorte que tout sous-espace vectoriel est G -stable et V doit être de dimension 1. On obtient par conséquent bien soit le module trivial soit une droite D pour laquelle l'action de l'élément non trivial se fait par multiplication par -1 . La décomposition $V = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ permet immédiatement d'obtenir la semi-simplicité.
En caractéristique 2, on a que s annule $X^2 - 1 = (X + 1)^2$. Ainsi, $s + \mathrm{Id}$ est nilpotent. Soit on a $s = -\mathrm{Id}$ et on conclut comme ci-dessus soit $s \neq -\mathrm{Id}$ et on connaît alors les sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent²¹ sont $\{0\}, \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}), V$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ sinon $s + \mathrm{Id}$ est inversible et nilpotent ce qui est impossible. On en déduit que $V = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})^2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ et on conclut comme précédemment que V est de dimension 1 et qu'il s'agit de la représentation triviale. Noter que les espaces stables par s et $s + \mathrm{Id}$ sont les mêmes.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une représentation de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur \mathbb{C} est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un automorphisme linéaire ϕ de V tel que $\phi^n = \mathrm{Id}$ si bien que ϕ annule le polynôme $X^n - 1$ scindé à racines simples sur \mathbb{C} . On en déduit que ϕ est diagonalisable et que V est somme directe des sous-espaces propres. Chacun de ces sous-espaces propres sont G -stables (car stables par ϕ et G est cyclique). Si V est irréductible, on en déduit qu'il existe une racine n -ème de l'unité ξ telle que $V = \mathrm{Ker}(\phi - \xi \mathrm{Id})$ est de dimension 1. On obtient ainsi n représentations irréductibles deux à deux non isomorphes toutes de dimension 1. Cela pouvait se prévoir puisque G est fini abélien, on sait alors que toutes ses représentations irréductibles sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ou première à l'ordre de $|G|$ sont de dimension 1 et on a autant que $|G| = |G^{\mathrm{ab}}|$. Noter qu'on a bien $|G|$ classes de conjugaison dans ce cas. L'égalité

$$V = \bigoplus_{\xi \in \mathbb{U}_n} \mathrm{Ker}(\phi - \xi \mathrm{Id})$$

permet d'obtenir la semi-simplicité.

6. Soit $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}$ sur \mathbb{C} . On sait alors que $\varphi = \rho(1)$ admet une valeur propre car son polynôme caractéristique admet une racine dans \mathbb{C} qui est algébriquement clos. Ainsi, V admet un sous-espace stable D de dimension 1. Par simplicité, on a que $V = D$ est de dimension 1. On constate par ailleurs que deux représentations de \mathbb{Z} , disons $\rho_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(V_2)$ correspondant à un automorphisme $\varphi_1 = \rho_1(1)$ de V_1 et $\varphi_2 = \rho_2(1)$ de V_2 sont isomorphes si on dispose d'un isomorphisme $f : V_1 \rightarrow V_2$ tel que $f \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$, autrement dit si φ_1 et φ_2 sont semblables. Dans le cas de deux représentations irréductibles, elles correspondent à deux morphismes de groupes $\rho_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ et $\rho_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$, soit à la donnée de $\rho_1(1) = \lambda_1 \in \mathbb{C}^*$ et $\rho_2(1) = \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$. Ces deux représentations sont alors isomorphes d'après ce qui précède si, et seulement si, $\lambda_1 = \lambda_2$. On obtient donc une infinité de telles représentations irréductibles. Si on change de corps et qu'on conserve l'hypothèse algébriquement clos, on obtient de la même façon que les représentations irréductibles sont de dimension 1 et autant

21. Voir par exemple Beck, Mallick, Peyré : *Objectif Agrégation*, question a) de l'exercice 4.9 du Chapitre 4.

de représentations irréductibles que le cardinal de k^* . Si le corps n'est plus supposé algébriquement clos, comme sur \mathbb{R} , on peut obtenir des représentations irréductibles de degré 2 comme par exemple $V = \mathbb{R}^2$ et φ dont la matrice dans la base canonique est la matrice compagnon d'un polynôme irréductible, par exemple $X^2 + 1$. En fait, une représentation est irréductible si elle correspond à un isomorphisme cyclique de polynôme caractéristique irréductible²². Soit $V = k^2$ et φ de matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut montrer²³ que les seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$, $\text{Ker}(\varphi - \text{Id})$ et V . Ainsi, V n'est pas irréductible puisque $\text{Ker}(\varphi - \text{Id})$ est un sous-espace stable non trivial mais n'est pas somme directe de sous-représentations irréductibles puisque la seule représentation irréductible est $\text{Ker}(\varphi - \text{Id})$.

EXERCICE 5 — EXTENSION DES SCALAIRES.

- Soient $k \subseteq K$ deux corps et V un k -espace vectoriel. Munir $V_K := V \otimes_k K$ d'une structure de K -espace vectoriel.
- Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une k -base de V . Exhiber une K -base de V_K et comparer $\dim_k(V)$ et $\dim_K(V_K)$.
- Soient W un k -espace vectoriel et $f : V \rightarrow W$ une application k -linéaire. Montrer que $f_K = f \otimes \text{Id}_K : V_K \rightarrow W_K$ est une application K -linéaire. On fixe une base \mathcal{C} de W . Comparer la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} et celle de f_K dans les bases correspondantes de la question 2.
- On suppose que V est un G -module sur k avec G un groupe fini. Construire sur V_K une structure de G -module sur K ayant la même représentation matricielle que celle de V .
Une représentation de G sur K qui est de la forme V_K pour une représentation V de G sur k est dite *réalisable sur k* .

SOLUTION.

- Pour munit $V_K := V \otimes_k K$ d'une structure de K -espace vectoriel, on doit définir une multiplication par les scalaires, soit une application $K \times (V \otimes_k K) \rightarrow V \otimes_k K$. On a alors pour tout $\lambda \in K$ une application bilinéaire $V \times K \rightarrow V \otimes_k K$ donnée par $(v, \mu) \mapsto v \otimes (\lambda\mu)$. Cette dernière donne lieu à une application linéaire $f_\lambda : V \otimes_k K \rightarrow V \otimes_k K$ telle que $f_\lambda(v \otimes \mu) = v \otimes (\lambda\mu)$. On pose alors

$$\lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^r v_i \otimes \mu_i \right) = f_\lambda \left(\sum_{i=1}^r v_i \otimes \mu_i \right) = \sum_{i=1}^r f_\lambda(v_i \otimes \mu_i) = \sum_{i=1}^r v_i \otimes (\lambda\mu_i).$$

On vérifie que $(V_K, +, \cdot)$ est bien un K -espace vectoriel.

- Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une k -base de V . Montrons que $(e_i \otimes 1)_{i \in I}$ est une K -base de V_K . On a que la famille est génératrice puisque par définition du produit tensoriel, les $v \otimes \lambda$ avec $v \in V$ et $\lambda \in K$ sont générateurs mais au vu de la définition de la loi de externe faisant de V_K un K -espace vectoriel, $v \otimes \lambda = \lambda(v \otimes 1)$. Par ailleurs, on a

$$V = \bigoplus_{i \in I} ke_i$$

de sorte que par l'exercice 1

$$V_K = \bigoplus_{i \in I} ke_i \otimes_k K.$$

Mais, tout élément de $ke_i \otimes_k K$ s'écrit de manière unique sous la forme $e_i \otimes \lambda_i$ pour $\lambda_i \in K$ de sorte que tout élément de V_K s'écrit de manière unique sous la forme

$$\sum_{i \in I} e_i \otimes \lambda_i = \sum_{i \in I} \lambda_i (e_i \otimes 1)$$

ce qui montre bien qu'on a une K -base. Ainsi, on a $\dim_k(V) = \dim_K(V_K)$.

On pouvait aussi obtenir la liberté directement et prendre $(\lambda_i)_{i \in I}$ tels que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i (e_i \otimes 1) = 0 = \sum_{i \in I} e_i \otimes \lambda_i.$$

On peut alors se fixer une k -base $(f_j)_{j \in J}$ de K et on écrit pour tout $i \in I$

$$\lambda_i = \sum_{j \in J} \lambda_{ij} f_j \quad \text{avec} \quad \lambda_{ij} \in k$$

et

$$0 = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \lambda_{ij} e_i \otimes f_j.$$

On peut alors trouver comme dans le guide de survie construire une application linéaire $f_{ij} : V_K \rightarrow K$ telle que $f_{ij}(e_i \otimes f_j) = 1$ et 0 sinon. Il s'ensuit en prenant l'image par f_{ij} que $\lambda_{ij} = 0$ et que la famille est libre!

22. Voir par exemple ici, exercice 2, question 3.

23. Voir par exemple eck, Mallick, Peyré : *Objectif Agrégation*, question a) de l'exercice 4.2 du Chapitre 4.

3. Soient W un k -espace vectoriel et $f : V \rightarrow W$ une application k -linéaire. Posons $f_K = f \otimes \text{Id}_K : V_K \rightarrow W_K$. On a pour tout (il suffit de vérifier la propriété sur les tenseurs purs par stabilité de f_k par somme et puisque tout élément de V_K est une somme de tenseurs purs)

$$f_K(\lambda \cdot (v \otimes \mu)) = f_K(v \otimes (\lambda\mu)) = f(v) \otimes (\lambda\mu) = \lambda \cdot (f(v) \otimes \mu) = \lambda \cdot f_K(v \otimes \mu)$$

pour tous $v \in V$, $\lambda, \mu \in K$ et par définition de la loi externe sur V_K . Ainsi f_K est une application K -linéaire. On fixe une base \mathcal{C} de W . Un calcul immédiat fournit que les matrices M de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} et celle M_K de f_K dans les bases correspondantes de la question 2. sont les mêmes. En effet,

$$\forall i \in I, \quad f_K(e_i \otimes 1) = f(e_i) \otimes 1 = \sum_{k=1}^n m_{ki} e_k \otimes 1.$$

On a là une façon de voir une matrice à coefficients dans k comme une matrice à coefficients dans K .

4. On suppose que V est un G -module sur k avec G un groupe fini. Il suffit de poser $g \cdot (v \otimes \lambda) = (g \cdot v) \otimes \lambda$. On montre que c'est bien défini comme en question 1. et que les représentations matricielles sont les mêmes comme en 3. En effet, si la représentation est donnée par $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, on a que la structure de G -module sur V_K est donnée par $\rho_K : G \rightarrow \text{GL}(V_K)$ avec $\rho_K(g) = \rho(g)_K$. Une représentation de G sur K qui est de la forme V_K pour une représentation V de G sur k est dite *réalisable sur k* .

EXERCICE 6 — UN MODULE NON SEMI-SIMPLE. Soient G un groupe fini, p un nombre premier qui divise le cardinal de G et $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Montrer que la droite de $k[G]$ engendrée par $\sum_{g \in G} g$ est un sous- G -module de $k[G]$ qui n'admet pas de supplémentaire.
- En déduire que $k[G]$ n'est pas un G -module semi-simple.

SOLUTION.

- On a vu dans l'exercice 3 que cette droite est en fait $k[G]^G$ et est donc un sous- G -module. Posons $V = \text{Vect}(x)$ avec $x = \sum_{g \in G} g$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que V admette un supplémentaire G -stable W tel que $k[G] = V \oplus W$. Soit alors

$$w = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in W.$$

On considère alors le morphisme d'augmentation

$$\varphi : \begin{cases} k[G] & \longrightarrow k \\ \sum_{g \in G} \lambda_g g & \longmapsto \sum_{g \in G} \lambda_g. \end{cases}$$

On constate alors que

$$x \cdot w = \sum_{g \in G} \lambda_g x \cdot g = x\varphi(w).$$

puisque $x \cdot g = x$ comme dans l'exercice 3. On a ainsi par stabilité que $x \cdot w \in W$ mais par ailleurs on vient de voir que $x \cdot w = x\varphi(w) \in V$. Or, $V \cap W = \{0\}$ si bien que $x \cdot w = x\varphi(w) = 0$. On a donc

$$\sum_{g \in G} \varphi(w)g = 0$$

et par liberté, $\varphi(w) = 0$. On en déduit que $W \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ et par dimension, $W = \text{Ker}(\varphi)$. On a alors que V et $\text{Ker}(\varphi)$ sont supplémentaires. C'est absurde puisque $V \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ puisque $\varphi(x) = |G| = 0$ puisqu'on a supposé que $p \mid |G|$.

- Je vous renvoie pour ceci à la page 5 ici.

EXERCICE 7 — CENTRE ET LEMME DE SCHUR. Soient G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur un corps algébriquement clos.

- Montrer que tout élément du centre de G agit sur V comme une homothétie.
- En déduire que si le centre de G n'est pas cyclique, la représentation de V n'est pas fidèle.

SOLUTION.

- Soient $\rho : V \rightarrow \text{GL}(V)$ le morphisme correspondant à la représentation et $g \in Z(G)$. On a alors pour tout $g' \in G$ que

$$\rho(g) \circ \rho(g') = \rho(g'g) = \rho(gg') = \rho(g') \circ \rho(g)$$

de sorte que $\rho(g)$ est un isomorphisme k -linéaire et G -invariant, autrement dit un élément de $\text{End}_G(V)$. Par le lemme de Schur, sous les hypothèses de l'énoncé, on sait que cela implique que $\rho(g)$ est une homothétie soit que g agit sur V comme une homothétie.

On rappelle que comme le corps est algébriquement clos, il existe une valeur propre $\lambda \in k$ de $\rho(g)$. On a donc que $\rho(g) - \lambda \text{Id}$ est un G -morphisme non injectif. Or, son noyau est un G -module non trivial donc par simplicité il est égal à V et $\rho(g) = \lambda \text{Id}$. On notera $\lambda(g)$ le rapport de l'homothétie $\rho(g)$ pour $g \in Z(G)$.

2. Supposons la représentation de V fidèle. On a alors un morphisme injectif $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. On a un morphisme $Z(G) \rightarrow k^*$ défini par $g \mapsto \lambda(g)$. Il s'agit bien d'un morphisme puisque pour $g, g' \in Z(G)$, on a $\rho(g) \circ \rho(g') = \rho(gg')$ est une homothétie de rapport $\lambda(g)\lambda(g')$ et $\lambda(gg')$. Par ailleurs, ce morphisme est injectif puisque si $\lambda(g) = 1$, $\rho(g) = \mathrm{Id}$ et $g \in \mathrm{Ker}(\rho) = \{e\}$ de sorte que $g = e$. On réalise ainsi $Z(G)$ comme un sous-groupe de k^* . On sait alors que tout sous-groupe fini du groupe des inversibles d'un corps est cyclique²⁴ et donc $Z(G)$ est cyclique!

Exercices fondamentaux de la semaine 2

EXERCICE 8 — GROUPES D'ORDRE pq ET p^3 .

1. Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. On considère G un groupe non abélien d'ordre pq . Montrer que $D(G)$ est l'unique q -Sylow de G . Déterminer alors le groupe des caractères linéaires de G à valeurs dans \mathbb{C}^* et le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur \mathbb{C} .
2. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. Montrer que $D(G) = Z(G)$ est d'ordre p . Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur \mathbb{C} .

SOLUTION.

1. Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. On considère G un groupe non abélien d'ordre pq . On sait par les théorèmes de Sylow qu'on a un unique q -Sylow S_q . On a alors G/S_q d'ordre p premier donc isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ abélien. Cela implique que $D(G) \subseteq S_q$. Par Lagrange, on a donc $D(G) = S_q$ ou $D(G) = \{e\}$. Cette dernière option est exclue puisque G est supposé non abélien et $D(G) = S_q$. On rappelle²⁵ que le nombre de représentations de degré 1 non isomorphes est $|G^{\mathrm{ab}}| = p$. Par ailleurs, on sait que la dimension d'une représentation irréductible divise pq et on sait que si V_1, \dots, V_r sont les représentations irréductibles deux à deux non isomorphes, on a²⁶

$$|G| = \sum_{i=1}^r \dim(V_i)^2.$$

On en déduit que $\dim(V_i) \in \{1, p\}$ puisque sinon

$$\sum_{i=1}^r \dim(V_i)^2 \geq q^2 > pq = |G|.$$

Par ailleurs, puisque G est non abélien, alors $p \mid q-1$ car sinon les théorèmes de Sylow garantissent un unique p -Sylow et un argument de dénombrement que l'on a vu dans le DM 1 garantit que G est cyclique donc abélien! Notons n_p le nombre de représentations irréductibles de degré p , on a alors

$$pq = p + n_p p^2 \quad \text{soit} \quad n_p = \frac{q-1}{p}.$$

24. Voir par exemple ici, théorème 2.21.

25. Voir ici. On note \widehat{G} le groupe des caractères linéaires de G pour tout groupe G , à savoir le groupe des morphismes de groupes de G dans k^* . On sait alors que l'étude de ce groupe revient à celle des représentations de G de degré 1. On a en particulier autant de classes d'isomorphisme de représentations de degré 1 que d'éléments de \widehat{G} . L'idée est que si l'on note $\pi : G \rightarrow G^{\mathrm{ab}} = G/D(G)$ est la surjection canonique

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G^{\mathrm{ab}}} & \longrightarrow & \widehat{G} \\ \chi & \longmapsto & \chi \circ \pi \end{array}$$

est un isomorphisme. On montre ensuite que si k est de caractéristique nulle ou première à n algébriquement clos, alors $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par ailleurs, on a que

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G \times H} & \longrightarrow & \widehat{G} \times \widehat{H} \\ \chi & \longmapsto & ([g \mapsto \chi(g, 1)], [h \mapsto \chi(1, h)]) \end{array}$$

est un isomorphisme et donc le théorème de structure des groupes abéliens de type fini permet de conclure que si k est algébriquement clos de caractéristique nulle ou première à l'ordre de G ,

$$\widehat{G} \cong \widehat{G^{\mathrm{ab}}} \cong G^{\mathrm{ab}}.$$

La référence ci-dessus donne une démonstration plus élémentaire qui ne fait pas appel au théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

26. Ce qui découle du fait que la représentation régulière admet la décomposition (sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle)

$$k[G] = \bigoplus_{i=1}^r V_i^{\dim(V_i)} \quad \text{avec} \quad \dim(k[G]) = |G|.$$

En effet, $\chi_{k[G]}(g) = 0$ si $g \neq e$ et $\chi_{k[G]}(e) = |G|$ puisque $gg' \neq g'$ pour tout $g' \in G$ si $g \neq e$. On a donc par Maschke que

$$k[G] = \bigoplus_{i=1}^r V_i^{k_i}$$

avec

$$k_i = \langle \chi_{k[G]}, \chi_{V_i} \rangle = \chi_{V_i}(1) = \dim(V_i).$$

On peut alors écrire toutes les lignes de degré 1 comme tous les morphismes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ (qui correspondent au choix d'une racine p -ème de l'unité). Pour les représentations de degré p , c'est un peu plus délicat en général. On obtient en revanche par exemple qu'on a $p + \frac{p-1}{p}$ classes de conjugaison, ce qui n'était *a priori* pas évident du tout!

Noter que dans le cas d'un groupe d'ordre pq abélien, on sait qu'il ne possède que des représentations irréductibles de degré 1 et qu'il en possède pq , chacune déterminée par un morphisme de groupe $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$, soit au choix d'une racine pq -ème de l'unité! On peut montrer qu'un tel groupe est isomorphe à l'unique produit semi-direct non trivial $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. On procède de même. On sait qu'en tant que p -groupe, $Z(G) \neq \{e\}$. Si $|Z(G)| \in \{p^2, p^3\}$ alors $G/Z(G)$ est d'ordre 1 ou cyclique d'ordre p . On sait que cela implique que G est abélien ce qui est exclus! On a donc $|Z(G)| = p$. De plus, $G/Z(G)$ est d'ordre p^2 donc abélien. On en déduit que $D(G) \leq Z(G)$ et par Lagrange, comme G n'est pas abélien, $D(G) = Z(G)$. On a donc p^2 représentations irréductibles de degré 1 et la dimension des autres représentations irréductibles vaut p . On note n_p leur nombre et on a

$$p^3 = p^2 + n_p p^2 \quad \text{soit} \quad n_p = p - 1.$$

On obtient ici $p^2 + p - 1$ classes de conjugaison. Pour une classification des groupes d'ordre p^3 (avec le produit semi-direct), je vous renvoie ici, exercice 15.

EXERCICE 9 — IRREDUCTIBILITÉ. Soient G un groupe fini, k un corps de caractéristique nulle et χ un caractère de G sur k .

- On suppose k algébriquement clos. Montrer que si χ est irréductible, alors $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$.
- Montrer que $\langle \chi, \chi \rangle_G$ est une somme de carrés d'entiers.
- En déduire que si $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$, alors χ est irréductible.

SOLUTION.

1. On suppose k algébriquement clos et χ irréductible. On note $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ la représentation dont χ est le caractère. On a alors

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V \otimes_k V^*}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{End}_k(V)}(g) = \dim_k(\text{End}_k(V)^G).$$

On a utilisé que le caractère du G -module V^* pour l'action $g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ pour $g \in G$, $f \in V^*$ et $x \in V$ est donné par $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$. Si vous avez besoin de plus de détails, je vous renvoie à ici page 15 et suivantes. Noter qu'on a utilisé ici le fait qu'on soit en caractéristique nulle! Mais la structure de G -module sur $\text{End}_k(V)$ est donnée par $g \cdot f(x) = g \cdot f(g^{-1} \cdot x)$ pour tous $g \in G$, $f \in \text{End}_k(V)$ et $x \in V$. Cela implique que $f \in \text{End}_k(V)^G$, si, et seulement si,

$$\forall g \in G, \quad \forall x \in V \quad f(g \cdot x) = g \cdot f(x).$$

Autrement dit, si, et seulement si, f est un G -morphisme de sorte que $\langle \chi, \chi \rangle_G = \dim_k(\text{End}_G(V)) = 1$ par le lemme de Schur puisque k est algébriquement clos.

2. On suppose k de caractéristique nulle et algébriquement clos. On note $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ la représentation dont χ est le caractère. D'après le théorème de Maschke (valable en caractéristique nulle ou première à l'ordre du groupe²⁷), on peut écrire

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{n_i}$$

pour les V_1, \dots, V_r les représentations irréductibles de G et des entiers $n_i \in \mathbb{N}$. On a alors (car deux représentations isomorphes ont même caractère)

$$\chi = \sum_{i=1}^r n_i \chi_{V_i}.$$

On en déduit par bilinéarité

$$\langle \chi, \chi \rangle_G = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r n_i n_j \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle.$$

Le calcul de la question précédente fournit de même pour $i \neq j$

$$\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \dim_k(\text{Hom}_G(V_i, V_j)).$$

27. Si vous n'avez fait la démonstration que sur \mathbb{C} , vous pouvez vérifier qu'elle fonctionne sous ces hypothèses plus générales avec la forme bilinéaire

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1}).$$

Noter que l'exercice 6 montre aussi que ces hypothèses sont nécessaires.

Mais on a que V_i et V_j sont non isomorphes. Pour $f \in \text{Hom}_G(V_i, V_j)$, on obtient que le noyau est un G -module qui par simplicité vaut $\{0\}$ ou V_i . Dans le premier cas, f est injective et $f(V_i)$ est un sous- G -module de V_j irréductible. Comme V_i et V_j ne sont pas isomorphes, $f(V_i) \neq V_j$ donc $f(V_i) = \{0\}$ ce qui est absurde car $V_i \neq \{0\}$. On a donc $\text{Ker}(f) = V_i$ et $f = 0$ si bien que $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = 0$. Noter qu'ici on a pas besoin d'algébriquement clos. Par ailleurs, par la question 1. comme k est algébriquement clos, $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle = 1$ et finalement

$$\langle \chi, \chi \rangle_G = \sum_{i=1}^r n_i^2.$$

C'est bien une somme de carrés d'entiers!

3. On suppose ici $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ et k n'est pas nécessairement supposé algébriquement clos. Les calculs précédents fournissent (ou on remarque que $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = 0$ est toujours valable)

$$1 = \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^r n_i^2 \dim_k(\text{End}_G(V_i)).$$

Comme $n_i, \dim_k(\text{End}_G(V_i))$ sont des entiers non nuls (on utilise ici la caractéristique nulle!), on en déduit qu'il existe un unique $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ tel que $n_{i_0}^2 \dim_k(\text{End}_G(V_{i_0})) = 1$ et $n_i^2 \dim_k(\text{End}_G(V_i)) = 0$ pour tout $i \neq i_0$. On en déduit que $n_{i_0} = \dim_k(\text{End}_G(V_{i_0})) = 1$. Par ailleurs, $\dim_k(\text{End}_G(V_i)) \geq 1$ puisqu'on a au moins toutes les homothéties de sorte que $n_i = 0$ pour $i \neq i_0$ et $V \cong V_{i_0}$ est irréductible!

COMPLÉMENTS. – La théorie des caractères est particulièrement intéressante pour déterminer si une représentation est irréductible ou si deux représentations sont isomorphes. On a toujours que deux représentations isomorphes ont même caractère puisque si $f : V \rightarrow W$ est un isomorphisme de G -module, alors en notant $\rho_V : G \rightarrow \text{GL}(V)$ et $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ les représentations associées, on a pour tout $g \in G$, $\rho_W(g) = f \circ \rho_V(g) \circ f^{-1}$ et donc $\rho_W(g)$ et $\rho_V(g)$ ont la même trace. Cela dit c'est plutôt dans l'autre sens qu'on aimerait utiliser les caractères! La théorie fonctionne alors bien en **caractéristique nulle**. ON démontre que en caractéristique nulle, si deux représentations ont le même caractère, alors elles sont isomorphes. Les calculs effectués dans cet exercice montrent en effet qu'en caractéristique nulle, si V et W sont irréductibles non isomorphes, $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 0$ et $\langle \chi_V, \chi_V \rangle \neq 0$. Par ailleurs, si k est algébriquement clos, $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ et $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ implique V irréductible sans l'hypothèse algébriquement clos mais nécessite la caractéristique nulle. On peut alors prendre deux représentations V et W de même caractère $\chi_V = \chi_W$. Par Maschke, on a

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i^{n_i} \quad \text{et} \quad W = \bigoplus_{i=1}^r V_i^{m_i}$$

avec V_1, \dots, V_r les représentations irréductibles de G et des entiers $n_i, m_i \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\sum_{i=1}^r n_i \chi_{V_i} = \chi_V = \chi_W = \sum_{i=1}^r m_i \chi_{V_i}.$$

Le produit scalaire avec χ_{V_i} fournit alors

$$n_i \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle = m_i \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle$$

avec $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle = \dim_k(\text{End}_G(V_i)) \neq 0$ (car on est en caractéristique nulle!) de sorte que $n_i = m_i$ et $V \cong W$. On montre par ailleurs que si k est de caractéristique nulle, les caractères irréductibles forment une famille libre de l'espace des fonctions centrales (qui est un espace de dimension le nombre de classes de conjugaison de G). Si maintenant k est aussi algébriquement clos, on a que cette famille est génératrice et le nombre de représentations irréductibles est donc donné par le nombre de classes de conjugaison!

On termine par quelques relations d'orthogonalité qui sont très utiles pour finir de compléter une table de caractères sur le corps des complexes. Les colonnes de la table de caractère d'un groupe fini G sont orthogonales pour le produit scalaire hermitien usuel. Autrement dit, si on note χ_1, \dots, χ_r les caractères irréductibles de G , on a pour g, g' deux éléments de G dans deux classes de conjugaison différentes

$$\sum_{i=1}^r \chi_i(g') \overline{\chi_i(g)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r |\chi_i(g)|^2 = \frac{|G|}{c_g}$$

avec c_g le cardinal de la classe de conjugaison de g dans G . On considère δ_g la fonction indicatrice de la classe de conjugaison de $g \in G$. Comme les caractères irréductibles forment une base de l'espace des fonctions centrales, on a

$$\delta_g = \sum_{i=1}^r \lambda_i \chi_i, \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}.$$

On a alors puisque les caractères sont des fonctions centrales

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad \lambda_i = \langle \delta_g, \chi_i \rangle = \frac{c_g}{|G|} \overline{\chi_i(g)}.$$

Il vient

$$\delta_g(g') = \frac{c_g}{|G|} \sum_{i=1}^r \overline{\chi_i(g)} \chi_i(g').$$

Les formules annoncées en découlent alors immédiatement!

EXERCICE 10 — TABLES DE CARACTÈRES. Dans cet exercice, on travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1. Déterminer la table de caractères de \mathfrak{S}_3 .
2. Soit G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur \mathbb{C} et χ un caractère linéaire de G . Montrer que $\chi \otimes V$ est une représentation irréductible de G .
3. Déterminer la table de caractères de \mathfrak{S}_4 .
4. Déterminer la table de caractères de \mathbb{H}_8 .

SOLUTION.

1. On l'a déterminée dans l'exercice 3. On peut sinon obtenir tous les morphismes $\mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ qui sont le morphisme trivial et la signature ε . On a trois classes de conjugaison et donc la table de caractères est de la forme

\mathfrak{S}_3	Id	(ab)	(abc)
$\mathbb{1}$	1	1	1
ε	1	-1	1
θ	n	a	b

On a alors $n^2 = 6 - 2$ soit $n = 2$ et par orthogonalité des caractères, il vient $a = 0$ et $2 + 2b = 0$ soit $b = -1$. Finalement, on a

\mathfrak{S}_3	Id	(ab)	(abc)
$\mathbb{1}$	1	1	1
ε	1	-1	1
θ	2	0	-1

Noter que dans l'exercice 3, on a obtenu une réalisation de θ comme la représentation standard. On peut aussi voir \mathfrak{S}_3 comme le groupe diédral D_3 , le groupe des isométries laissant invariant le triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité de sommets les racines cubiques de l'unité. On renvoie alors à l'exercice 13 pour plus de détails. On peut aussi faire agir ce groupe G des isométries préservant le triangle équilatéral sur les sommets du triangle équilatéral. Cela fournit un morphisme $G \rightarrow \mathfrak{S}_3$ injectif (si les trois sommets sont fixés, on a nécessairement l'identité). On voit alors que cet isomorphisme fournit une représentation réelle de dimension 2 dont on vérifie qu'elle est irréductible sur \mathbb{C} car une transposition correspond à une symétrie, par exemple la symétrie d'axe l'axe des abscisses de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et un trois cycle correspond à une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

On retrouve le caractère θ et il est irréductible car $\langle \theta, \theta \rangle = \frac{1}{6}(2^2 + 0^2 \times 3 + (-1)^2 \times 2) = 1$.

2. Un tel caractère linéaire correspond à un morphisme de groupe $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ et ici on fait l'abus de notation χ pour la représentation de degré 1 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(W)$ avec W de dimension 1 dont χ est le caractère. On a puisqu'on travaille sur le corps des nombres complexes,

$$\langle \chi_{W \otimes_k V}, \chi_{W \otimes_k V} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_{W \otimes_k V}(g)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_W(g) \chi_V(g)|^2 = \langle \chi_V, \chi_V \rangle$$

puisque χ_W est un caractère linéaire donc un morphisme de groupe de sorte que pour tout $g \in G$, $\chi_W(g)^{|G|} = 1$ par Lagrange et que $\chi_W(g)$ est une racine de l'unité de sorte que $|\chi_W(g)| = 1$. Comme V est irréductible, on a donc $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ et donc $\langle \chi_{W \otimes_k V}, \chi_{W \otimes_k V} \rangle = 1$ et $\chi \otimes_k V$ est irréductible (de caractère $\chi \times \chi_V$). On a donc ici un moyen, étant donné une représentation irréductible de degré d de G de construire d'éventuelles nouvelles représentations irréductibles de degré d via $\chi \otimes_k V$. L'exemple de \mathfrak{S}_3 montre que cela ne fonctionne pas toujours mais celui de \mathfrak{S}_4 montre que cela permet quand même en général d'obtenir de nouvelles représentations irréductibles!

3. On commence par dire que les classes de conjugaison (voir TD 1) sont en bijection avec le type de décomposition en produit de cycles à supports disjoints. La première méthode est de partir de la table où l'on a rempli les caractères linéaires.

\mathfrak{S}_4	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1

On a alors que le groupe de Klein $V_4 = \{\text{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ est distingué dans $G = \mathfrak{S}_4$ et G/V_4 est d'ordre 6 donc isomorphe soit à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ soit à \mathfrak{S}_3 . Mais tous les éléments de \mathfrak{S}_4 sont d'ordre 1, 2, 3 ou 4 et donc les éléments de G/V_4 sont d'ordre divisant un des ces ordres. On n'a donc pas d'élément d'ordre 6 et $G/V_4 \cong \mathfrak{S}_3$. On note $\pi : G \rightarrow G/V_4$ la surjection canonique. On peut aussi le voir en remarquant que G/V_4 possède un élément d'ordre 2, à savoir $\pi(12)$ et un élément d'ordre 3, à savoir $\pi(123)$ qui ne commutent pas. En effet, ces éléments sont d'ordre divisant respectivement 2 et 3 et non triviaux. Par ailleurs, ces deux éléments de commutent pas car

$$\pi((12)(123)) = \pi(23) \neq \pi((123)(12)) = \pi(13)$$

car $(13)(23) = (132) \notin V_4$. Notons $\varphi : G/V_4 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ un isomorphisme. On vient de voir qu'il envoyait les classes des transpositions sur les transpositions, les classes des trois-cycles sur les trois-cycles. On a évidemment qu'il envoie l'identité et les classes des doubles transpositions sur l'identité. Enfin, les classes des 4-cycles sont des éléments d'ordre divisant 4 dans un groupe d'ordre 6 donc d'ordre 2 (car non triviaux) et sont donc envoyés sur les transpositions de \mathfrak{S}_3 . On sait alors par la question 1. que l'on dispose d'une représentation irréductible de \mathfrak{S}_3 de degré 2, que l'on notera $\rho : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \text{GL}(V)$ avec V de dimension 2. On a alors $\rho \circ \varphi \circ \pi$ est une représentation de G de degré 2. On vérifie immédiatement que si χ est son caractère

$$\langle \chi, \chi \rangle = \langle \theta, \theta \rangle = 1$$

et donc elle est irréductible. C'est un fait général que si on dispose d'un sous-groupe distingué N de G et $\pi : G \rightarrow G/N$ est la surjection canonique, alors pour toute représentation ρ de G/N , on obtient une représentation $\rho \circ \pi$ de G et que $\rho \circ \pi$ est irréductible si, et seulement si, ρ l'est. On peut donc construire facilement des représentations de G à partir de celles de ses quotients²⁸. Cela permet d'obtenir une ligne supplémentaire de notre table des caractères.

\mathfrak{S}_4	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0

On sait alors que la dimension d'une représentation irréductible divise 24 et que la somme des carrés des dimensions doit donner 24. Les seules dimensions possibles au-delà de 1 sont donc 2, 3 et 4. On note n_2, n_3, n_4 leur nombre. On a alors

$$24 = 2 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 \quad \text{soit} \quad 22 = 4n_2 + 9n_3 + 16n_4.$$

Si $n_4 \neq 0$, on a $n_4 = 1$ et $6 = 4n_2 + 9n_3$ et $n_3 = 0$ et $6 = 4n_2$ ce qui est absurde. Ainsi, $n_4 = 0$. On a donc $22 = 4n_2 + 9n_3$ et $n_3 \leq \frac{22}{9}$ soit $n_3 \leq 2$. Si $n_3 = 0$ ou 1, on a une contradiction tandis que si $n_3 = 2$, on obtient $n_2 = 0$. Les deux dernières représentations irréductibles sont donc de dimension 3.

\mathfrak{S}_4	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
ψ_1	3	a	b	c	d
ψ_2	3	e	f	g	h

Par orthogonalité des colonnes avec la première colonne, il vient $e = -a, h = -d, b + f = -2$ et $c = -g$ si bien que

\mathfrak{S}_4	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
ψ_1	3	a	b	c	d
ψ_2	3	$-a$	$-2 - b$	$-c$	$-d$

28. Pour le faire à partir de ses sous-groupes, c'est plus subtil et il faut parler d'induction.

On a aussi que la norme de la colonne des 3-cycles doit être égale à $\frac{24}{8} = 3$ et ainsi $c = 0$. De même avec la colonne des transpositions et des 4-cycles, il vient $a^2 = d^2 = 1$. Pour la deuxième colonne, son produit scalaire avec la colonne des transpositions fournit

$$ab - a(-2 - b) = 0 \iff 2ab = -2 \iff b = -1.$$

On a ainsi

\mathfrak{S}_4	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
ψ_1	3	a	-1	0	d
ψ_2	3	$-a$	-1	0	$-d$

Pour finir, le produit scalaire de la colonne des transpositions avec celle des 4-cycles fournit $ad = -1$ soit a et d de signe opposé. Cela entraîne (quitte à échanger les rôles de ψ_1 et ψ_2) la table suivante

\mathfrak{S}_4	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
ψ_1	3	1	-1	0	-1
ψ_2	3	-1	-1	0	1

Noter qu'on pouvait aussi trouver une sous-représentation irréductible de dimension 3 à partir de la représentation standard et calculer son caractère et en déduire par la question précédente une nouvelle représentation irréductible de dimension 3 via $\varepsilon \otimes_k \psi$ ce qui permettait d'obtenir les deux dernières lignes.

On donne enfin pour terminer une dernière réalisation géométrique des deux représentations irréductibles de dimension 3. En effet, on peut montrer que le groupe Is des isométries de l'espace préservant un tétraèdre régulier est isomorphe à \mathfrak{S}_4 . En effet, ce groupe agit sur les 4 sommets du tétraèdre²⁹. Cela fournit un morphisme de groupes $f : \text{Is} \rightarrow \mathfrak{S}_4$ dont on peut montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme³⁰. On peut ainsi, à travers la réciproque de cet isomorphisme obtenir un morphisme $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R}) \subseteq \text{GL}_3(\mathbb{C})$. On a alors le tableau suivant qui donne la correspondance entre élément de \mathfrak{S}_4 et éléments de $\text{Is} \subseteq \text{GL}_3(\mathbb{C})$.

\mathfrak{S}_4	Is
Id	Identité
(ab)	Réflexion par rapport au plan médiateur d'une arête
$(ab b)$	Rotation d'axe une hauteur du tétraèdre et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$
$(ab)(cd)$	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposés et d'angle π
$(abcd)$	Anti-rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$

On pouvait aussi utiliser ici que $(abcd) = (ad)(abc)$ et construire l'isométrie correspondant au 4-cycle. On calcule alors facilement le caractère associé à cette représentation (et on vérifie qu'il est irréductible en calculant sa norme et en vérifiant qu'elle vaut 1). En effet, par exemple dans une base adaptée la matrice d'une réflexion par rapport au plan médiateur d'une arête est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de sorte que sa trace vaut 1. Pour une rotation d'angle θ , la trace vaut $1 + 2 \cos(\theta)$. Enfin, dans une base adaptée, la matrice associée à un 4-cycle est donnée par une anti-rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

de trace $-1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. On retrouve le caractère ψ_1 de la table ci-dessus.

De la même façon, on montre que si Is^+ dénote le groupe des isométries directes préservant un cube centré en l'origine, alors $\text{Is}^+ \cong \mathfrak{S}_4$.

29. On place le centre de gravité du tétraèdre en l'origine, de sorte qu'une telle isométrie est nécessairement linéaire et comme elle préserve la distance, un sommet est bien envoyé sur un sommet.

30. En effet, il est facile de voir que si une isométrie fixe chaque sommet, alors il s'agit de l'identité. Par ailleurs, on peut montrer que toutes les transpositions sont dans l'image et comme ces dernières engendrent \mathfrak{S}_4 , on aura gagné! Pour cela, on constate qu'une réflexion par rapport à un plan médiateur d'une arête fournit ces transpositions (voir les animations GeoGebra).

On fait pour cela agir \mathfrak{S}_4 sur les 4 grandes diagonales du cube (qui sont préservées car une isométrie préserve les distances). Cela fournit un morphisme $g : \text{Is}^+ \rightarrow \mathfrak{S}_4$ dont on peut montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme³¹. On peut ainsi, à travers la réciproque de cet isomorphisme obtenir un morphisme $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R}) \subseteq \text{GL}_3(\mathbb{C})$. On a alors le tableau suivant qui donne la correspondance entre élément de \mathfrak{S}_4 et éléments de $\text{Is}^+ \subseteq \text{GL}_3(\mathbb{C})$.

\mathfrak{S}_4	Is^+
Id	Identité
$(a\ b)$	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle π
$(a\ b\ b)$	Rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$
$(a\ b)(c\ d)$	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle π
$(a\ b\ c\ d)$	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$

En utilisant le fait que la trace d'une matrice de rotation d'angle θ est $1 + 2\cos(\theta)$, on retrouve le caractère ψ_2 .

Pour information, les représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n sont connus et sont en bijection avec ce que l'on appelle les tableaux de Young.

4. On a vu dans le TD 1 que l'abélianisé de $G = \mathbb{H}_8$ était $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. On avait aussi obtenu 5 classes de conjugaison. On a donc 4 représentations irréductibles de degré 4 et il nous manque donc une représentation irréductible de degré supérieur. Comme

$$8 = \sum_{i=1}^r \dim(V_i)^2$$

pour V_1, \dots, V_r les représentations irréductibles de G , on en déduit que la dernière représentation irréductible est de dimension 2. Les représentations de degré 1 correspondent à des morphismes de groupes $f : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ et en fait on a vu page 17 de ce corrigé qu'un tel morphisme correspond bijectivement à un morphisme $\bar{f} : G^{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Il est alors facile d'obtenir les morphismes de groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ qui sont déterminés par l'image de $(\bar{1}, \bar{0})$ et $(\bar{0}, \bar{1})$ qui doivent être des éléments d'ordre divisant 2 (qui commutent mais c'est immédiat puisque \mathbb{C}^* est abélien), donc ± 1 . On a alors un isomorphisme $G^{\text{ab}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ qui envoie $\{\pm I\}$ sur $(\bar{1}, \bar{0})$ et $\{\pm J\}$ sur $(\bar{0}, \bar{1})$ (l'image de $\{\pm K\}$ étant alors déterminée et valant $(\bar{1}, \bar{1})$). Cela conduit à la table suivante

\mathbf{H}_8	Id	-Id	$\{\pm I\}$	$\{\pm J\}$	$\{\pm K\}$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
θ	n	a	b	c	d

Pour obtenir la dimension de la dernière représentation irréductible on utilise le fait que

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + n^2 \quad \text{soit} \quad n^2 = 4 \quad \text{soit} \quad n = 2.$$

On complète alors la table par orthogonalité des caractères (voir les compléments de l'exercice 9).

\mathbf{H}_8	Id	-Id	$\{\pm I\}$	$\{\pm J\}$	$\{\pm K\}$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
θ	2	-2	0	0	0

Par exemple, pour déterminer b , on a

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2b = 0 \quad \text{soit} \quad b = -2.$$

31. En effet, on peut montrer que si une isométrie fixe chaque grande diagonale alors il s'agit de l'identité. Par ailleurs, on peut montrer que toutes les transpositions sont dans l'image et comme ces dernières engendrent \mathfrak{S}_4 , on aura gagné! Pour cela, on constate qu'une rotation d'angle π et d'axe passant par le milieu de deux arêtes opposées joignant les deux grandes diagonales que l'on veut échanger fournit ces transpositions (voir les animations GeoGebra). Pour plus de détails et des références, voir par exemple ici. Vous pouvez essayer de montrer que puisque le cube admet une symétrie (la symétrie centrale) qui commute à toutes les autres isométries, le groupe des isométries du cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est aussi intéressant de considérer les groupes d'isométries des autres solides platoniciens : l'octaèdre (dual du cube) et le dodécaèdre et l'icosaèdre (dual l'un de l'autre). Tout cela est aussi lié aux sous-groupes finis de $\text{SO}(3)$.

COMPLÉMENTS. – Une fois la table de caractères déterminée, on peut décomposer toute représentation V de G en somme de sous-représentations irréductibles, à isomorphisme près. En effet, on sait par Maschke que

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{n_i}$$

avec les V_1, \dots, V_r les représentations irréductibles de G correspondant aux caractères des lignes de la table de caractères et les n_i des entiers. Il suffit alors de calculer $\langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle = n_i$. Un exemple est proposé dans une des références à la fin de l'exercice 13. Vous pouvez aussi à titre d'exercice traiter le cas de la représentation de l'exercice 3.

On supposera dans la suite qu'on travaille sur \mathbb{C} . Soit $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G . On a alors

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{g \in G : \chi_V(g) = \chi_V(e)\}.$$

En effet, si g est dans le noyau, c'est immédiat que $\chi_V(g) = \chi_V(e)$ puisque $\rho(g) = \rho(e)$. Réciproquement, supposons que $\chi_V(g) = \chi_V(e)$. On a alors si $n = |G|$ que $g^n = e$ de sorte que $\rho(g)^n = \mathrm{Id}$ et comme le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racine simple sur \mathbb{C} , l'endomorphisme $\rho(g)$ est diagonalisable de valeurs propres (comptées sans multiplicité, avec $d = \dim(V)$) $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ qui sont des racines n -èmes de l'unité. On a alors si $\chi_V(g) = \chi_V(e)$ que

$$\dim(V) = |\chi_V(e)| = |\chi_V(g)| = |\lambda_1 + \dots + \lambda_d| \leq 1 + \dots + 1 = \dim(V).$$

On a donc égalité dans l'inégalité triangulaire et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lambda_i = \lambda \lambda_1$ pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$. Cela implique que $\lambda = 1$ et que toutes les valeurs propres sont égales à λ_1 de sorte que $\rho(g) = \lambda_1 \mathrm{Id}$. Comme $\chi_V(g) = \chi_V(e) = d$, on en déduit que $\lambda_1 = 1$ et $\rho(g) = \mathrm{Id}$, d'où le résultat. On note alors χ_1, \dots, χ_r les caractères irréductibles d'un groupe G et $\rho_i : G \rightarrow \mathrm{GL}(V_i)$ les représentations associées. On a alors que les sous-groupes distingués de G sont données par les

$$\bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}(\rho_i), \quad I \subseteq \{1, \dots, r\}.$$

Il est clair que ces sous-groupes sont distingués. Réciproquement, soient $N \triangleleft G$ et $\pi : G \rightarrow G/N$ la surjection canonique. On note ρ_N la représentation régulière de G/N et on obtient alors une représentation de G via $\rho_N \circ \pi$. Cette représentation se décompose sous la forme

$$\bigoplus_{i=1}^r V_i^{n_i}.$$

Comme la représentation régulière est fidèle, il vient que $\mathrm{Ker}(\rho_N \circ \pi) = \mathrm{Ker}(\pi) = N$. Par ailleurs, $\rho_N \circ \pi(g)$ pour $g \in G$ agit trivialement si, et seulement si il agit trivialement sur chacun des facteurs de la somme directe, soit si, et seulement si $x \in \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}(\rho_i)$ avec $I = \{i \in \{1, \dots, r\} : n_i > 0\}$. On a donc bien que

$$N = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}(\rho_i), \quad I = \{i \in \{1, \dots, r\} : n_i > 0\}.$$

Cela permet par exemple de retrouver via les tables ci-dessus les sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_4 et \mathbb{H}_8 par exemple! On déduit alors de ce qui précède que G est simple si, et seulement si,

$$\forall i \in \{2, \dots, r\}, \quad \forall g \in G \setminus \{e\}, \quad \chi_i(g) \neq \chi_i(e)$$

si l'on suppose que χ_1 est le caractère de la représentation triviale. Enfin, le groupe dérivé est l'intersection des noyaux des caractères linéaires. On applique ce qui précède avec $N = D(G)$. La représentation régulière de $G/D(G)$ (qui est abélien) fait donc intervenir toutes les représentations irréductibles de degré 1 à la puissance 1. Comme on a un isomorphisme $\widehat{G^{\mathrm{ab}}} \rightarrow \widehat{G}$ donné par $\chi \mapsto \chi \circ \pi$, on en déduit que la représentation ρ_N dans ce cas ne fait intervenir que des représentations de degré 1 et en fait elle les fait toutes intervenir avec un exposant 1. Il s'ensuit alors le résultat comme ci-dessus.

EXERCICE 11 — DIMENSIONS DES REPRÉSENTATIONS IRREDUCTIBLES. Soit G un groupe fini. Le but de cet exercice est d'établir que les dimensions des représentations irréductibles sur \mathbb{C} divise l'ordre de $G/Z(G)$. Soit V une représentation irréductible.

1. Construire sur $V^{\otimes m}$ une structure de G^m -module. Montrer que la représentation associée est irréductible.
2. Montrer que si $g \in Z(G)$, alors $\rho_V(g)$ est une homothétie. On notera $\lambda(g)$ son rapport.
3. On note H le sous-groupe de G^m formé des éléments (g_1, \dots, g_m) avec $g_i \in Z(G)$ et $g_1 g_2 \dots g_m = 1$. Montrer que H agit trivialement sur $V^{\otimes m}$. En déduire que $V^{\otimes m}$ fournit en fait une représentation de G^m/H irréductible.
4. En déduire que $\dim(V) \mid \#G/Z(G)$.

SOLUTION.

1. On rappelle que l'on note $V^{\otimes m} = V \otimes_k V \otimes_k \cdots \otimes_k V$ où l'on a m facteurs. On a bien une définition sans ambiguïté par la propriété d'associativité démontrée dans l'exercice 1. On se fixe m un entier naturel non nul. On définit une structure de G^m -module via

$$(g_1, \dots, g_m) \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_m = (g_1 \cdot v_1) \otimes \cdots \otimes (g_m \cdot v_m).$$

Cela est bien défini car pour tout $(g_1, \dots, g_m) \in G^m$ fixé, l'application multi-linéaire³² $B_{g_1, \dots, g_m} : V \times \cdots \times V \rightarrow V^{\otimes m}$ définie par $B_{g_1, \dots, g_m}(v_1, \dots, v_m) = (g_1 \cdot v_1) \otimes \cdots \otimes (g_m \cdot v_m)$ qui fournit par propriété universelle du produit tensoriel une unique application linéaire $f_{g_1, \dots, g_m} : V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes m}$ telle que $f_{g_1, \dots, g_m}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = (g_1 \cdot v_1) \otimes \cdots \otimes (g_m \cdot v_m)$. On définit alors l'action par

$$\forall (g_1, \dots, g_m) \in G^m, \quad \forall x \in V^{\otimes m}, \quad g \cdot x = f_{g_1, \dots, g_m}(x).$$

On vérifie qu'on a bien une action et qu'elle est linéaire, ce qui munit bien $V^{\otimes m}$ d'une structure de G^m -module. Il suffit pour vérifier le caractère irréductible de calculer

$$\langle \chi_{V^{\otimes m}}, \chi_{V^{\otimes m}} \rangle = \frac{1}{|G|^m} \sum_{g_1, \dots, g_m \in G} \chi_{V^{\otimes m}}(g_1, \dots, g_m) \overline{\chi_{V^{\otimes m}}(g_1, \dots, g_m)}.$$

Comme dans l'exercice 2, on a

$$\chi_{V^{\otimes m}}(g_1, \dots, g_m) = \chi_V(g_1) \chi_V(g_2) \cdots \chi_V(g_m)$$

de sorte que

$$\langle \chi_{V^{\otimes m}}, \chi_{V^{\otimes m}} \rangle = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_V(g)} \right)^m = 1$$

puisque

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_V(g)} = \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$$

comme V est irréductible et que l'on travaille sur \mathbb{C} .

2. C'est une conséquence immédiate du lemme de Schur. Voir l'exercice 7. On note $\lambda(g)$ le rapport de l'homothétie $\rho(g)$ si $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est le morphisme associé à la représentation.
3. Soit $(g_1, \dots, g_m) \in H$. Il suffit de vérifier que l'action est triviale sur les tenseurs purs qui engendrent $V^{\otimes m}$ de sorte que pour tous $v_1, \dots, v_m \in V$,

$$(g_1, \dots, g_m) \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_m = (g_1 \cdot v_1) \otimes \cdots \otimes (g_m \cdot v_m) = (\lambda(g_1)v_1) \otimes \cdots \otimes (\lambda(g_m)v_m)$$

d'après la question précédente. Par multilinéarité, il vient

$$(g_1, \dots, g_m) \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_m = (\lambda(g_1) \cdots \lambda(g_m))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m).$$

Mais on si $g, g' \in Z(G)$ que $gg' \in Z(G)$ et $\rho(g') \circ \rho(g) = \rho(g'g)$ de sorte que $\lambda(g')\lambda(g) = \lambda(g'g)$ et $g \mapsto \lambda(g)$ est un morphisme de groupes de $Z(G)$ dans \mathbb{C}^* . Finalement,

$$(g_1, \dots, g_m) \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_m = \lambda(g_1 \cdots g_m)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = \lambda(1)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m,$$

ce qui permet de conclure! Notons $\rho_m : G^m \rightarrow \text{GL}(V^{\otimes m})$ associée à la représentation de la question 1. Cela implique que $H \leq \text{Ker}(\rho_m)$ et le premier théorème de factorisation garantit que ρ_m passe au quotient en un morphisme $\rho'_m : G^m/H \rightarrow \text{GL}(V^{\otimes m})$, autrement dit, $V^{\otimes m}$ est une représentation de G^m/H . On vérifie alors que cette représentation est irréductible en calculant, pour χ'_m le caractère de ρ'_m et χ_m celui de ρ_m ainsi que $\pi : G^m \rightarrow G^m/H$ la surjection canonique,

$$\langle \chi'_m, \chi'_m \rangle = \frac{|H|}{|G|^m} \sum_{\pi(g_1, \dots, g_m) \in G^m/H} |\chi'_m(\pi(g_1, \dots, g_m))|^2.$$

Noter qu'on a $\rho'_m \circ \pi = \rho_m$ et par conséquent

$$\langle \chi'_m, \chi'_m \rangle = \frac{|H|}{|G|^m} \times \frac{1}{|H|} \sum_{(g_1, \dots, g_m) \in G^m} |\chi'_m(\pi(g_1, \dots, g_m))|^2 = \frac{1}{|G|^m} \sum_{(g_1, \dots, g_m) \in G^m} |\chi_m(g_1, \dots, g_m)|^2 = 1$$

puisque $V^{\otimes m}$ est irréductible.

32. Pour le voir on peut alors raisonner de proche en proche utiliser ou ceci, remarque 2.7.

4. On a clairement $|H| = |Z(G)|^{m-1}$ de sorte que le cours garantit que pour tout entier naturel m non nul, on a $\dim(V^{\otimes m}) = \dim(V)^m \mid |G^m/H| = \left| \frac{G}{Z(G)} \right|^m |Z(G)|$. Soit p un facteur premier de $\dim(V)$ et supposons que $p^r \mid \dim(V)$ et $p^{r+1} \nmid \dim(V)$. On cherche à établir que $p^r \mid \left| \frac{G}{Z(G)} \right|$. Si ce n'est pas le cas, cela signifie qu'il existe un $0 \leq a < r$ tel que $p^a \mid \left| \frac{G}{Z(G)} \right|$ et $p^{a+1} \nmid \left| \frac{G}{Z(G)} \right|$. Soit alors b tel que $p^b \mid |Z(G)|$ et $p^{b+1} \nmid |Z(G)|$. On a alors pour tout m que

$$mr \leq am + b \quad \text{soit} \quad m(r - a) \leq b$$

avec $r - a > 0$. C'est absurde dès que $m > \frac{b}{r-a}$. On a donc bien que $p^r \mid \left| \frac{G}{Z(G)} \right|$ et finalement $\dim(V) \mid \left| \frac{G}{Z(G)} \right|$.

Exercices complémentaires de la semaine 2

EXERCICE 12. Soit G un groupe et k un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos.

1. Calculer $\text{End}_G(k[G])$.
2. Montrer que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est semi-simple et en déterminer les composantes isotypiques.
3. En déduire que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est isomorphe, en tant que \mathbb{C} -algèbre, à $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

SOLUTION.

1. On sait que sous ces hypothèses, pour toute représentation V , si on note V_1, \dots, V_r les représentations irréductibles 2 à 2 non isomorphes de G , alors

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{n_i}, \quad \text{avec} \quad n_i \in \mathbb{N}.$$

On a alors (voir l'exercice 2) par les propriétés de compatibilités entre Hom, sommes directes et produits directs que

$$\text{End}_G(k[G]) \cong \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{j=1}^r \text{Hom}_G(V_i^{n_i}, V_j^{n_j}).$$

Le lemme de Schur garantit que si $i \neq j$, alors

$$\text{Hom}_G(V_i^{n_i}, V_j^{n_j}) \cong \prod_{k=1}^{n_i} \prod_{\ell=1}^{n_j} \text{Hom}_G(V_i, V_j) = \{0\}$$

de sorte que

$$\text{End}_G(k[G]) \cong \bigoplus_{i=1}^r \text{End}_G(V_i^{n_i}).$$

Posant $K_i = \text{End}_G(V_i) \cong k$ par le lemme de Schur³³, il vient

$$\text{End}_G(V_i^{n_i}) \cong \mathcal{M}_{n_i}(k) \quad \text{et} \quad \text{End}_G(k[G]) \cong \mathcal{M}_{n_1}(k) \times \dots \times \mathcal{M}_{n_r}(k).$$

En appliquant cela à la représentation régulière, il vient

$$\text{End}_G(k[G]) \cong \mathcal{M}_{\dim(V_1)}(k) \times \dots \times \mathcal{M}_{\dim(V_r)}(k).$$

On vérifie que l'on a bien un isomorphisme de k -algèbres.

2. C'est du cours et cela découle de l'exercice 3, on a

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3] \cong V_1 \oplus V_2 \oplus V_3^2$$

avec $V_1 \cong \mathbb{C}$ la représentation triviale, $V_2 \cong \mathbb{C}$ la signature et $V_3 \cong H$ avec les notations de l'exercice 3. Pour plus de détails sur les composantes isotypiques, je vous renvoie ici pages 27 et 28.

3. Cela résulte directement des deux questions précédentes et du fait que

$$\Delta : \begin{cases} \text{End}_G(k[G]) & \longrightarrow & k[G] \\ f & \longmapsto & {}^t f(1) \end{cases}$$

est un isomorphisme de k -algèbre. En effet, Δ est linéaire et de réciproque

$$\begin{aligned} k[G] & \longrightarrow \text{End}_G(k[G]) \\ x & \longmapsto {}^t [x' \mapsto x'x]. \end{aligned}$$

33. Noter qu'en général si V_i est simple, on obtient une algèbre à division, autrement dit une k -algèbre dans laquelle tout élément non nul admet un inverse à droite et à gauche.

On a bien que $f_x : x' \mapsto x'x$ est un G -morphisme car

$$f_x(g \cdot x') = (g \cdot x')x = g \cdot (x'x) = g \cdot f_x(x')$$

pour tous $g \in G$ et $x, x' \in k[G]$ dont on vérifie qu'il est l'inverse de Δ . On vérifie enfin qu'il s'agit d'un morphisme d'algèbre puisque

$$\Delta(f \circ f') = {}^t(f \circ f'(1)).$$

On a alors $f(f'(1)) = f(f'(1) \cdot 1) = f'(1)f(1)$ car on a un G -morphisme si bien que

$$\Delta(f \circ f') = {}^t f(1) {}^t f'(1).$$

EXERCICE 13 — GROUPE DIÉDRAL. On pose $G = D_4$.

1. Déterminer $D(G)$ et G^{ab} .
2. Montrer que les représentations irréductibles de G sur \mathbb{C} sont de dimension inférieure ou égale à 2.
3. Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur \mathbb{C} . Déterminer une réalisation matricielle de chacune d'entre elles. Comparer avec \mathbb{H}_8 . Que peut-on en déduire?

SOLUTION.

1. Je vous renvoie au TD 1 pour plus de détails sur la structure du groupe diédral $G = D_4$. On constate que $H = \{\pm \text{Id}\}$ est distingué et que G/H est de cardinal 4 donc abélien si bien que $D(G) \subseteq H$. Comme G n'est pas abélien, cela implique que $D(G) = H$. Ainsi, G^{ab} est d'ordre 4 et on a si on note $\pi : G \rightarrow G/D(G)$ la surjection canonique que

$$\pi(\pm \text{Id}) = \pi(\text{Id}), \quad \pi(\pm s)^2 = \pi(\text{Id}), \quad \pi(\pm r)^2 = \pi(-\text{Id}) = \pi(\text{Id}) \quad \text{et} \quad \pi(\pm sr)^2 = \pi(\text{Id})$$

de sorte que tous les éléments sont d'ordre divisant 2 ce qui implique que $G^{\text{ab}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

2. Cela découle immédiatement de la formule

$$8 = \sum_{i=1}^r \dim(V_i)^2$$

pour V_1, \dots, V_r les représentations irréductibles de G .

3. On avait calculé les classes de conjugaison dans le TD 1 et on en avait obtenu 5 et ce qu'on vient de faire nous garantit qu'on a 4 représentations de degré 1 qui correspondent à des morphismes de groupes $f : G \rightarrow \mathbb{C}^*$. Un tel morphisme (puisque G est engendré par s et r tels que $sr s = r^{-1}$) est déterminé par l'image de s qui doit être d'ordre divisant 2 et par l'image de r qui doit être d'ordre divisant 4 et satisfaire

$$f(s) \times f(r) \times f(s) = f(r)^{-1} \quad \text{soit} \quad f(r)^2 = 1$$

puisque le groupe \mathbb{C}^* est abélien et $s^2 = \text{id}$. On doit donc choisir l'image de r comme étant un élément d'ordre divisant 2. On a alors $f(sr) = f(s)f(r)$ car le caractère d'une représentation de dimension 1 est un morphisme de groupe. De même, $f(-\text{Id}) = f(r^2)$. On obtient la table suivante

D_4	Id	$-\text{Id}$	ρ	s	$s\rho$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
θ	n	a	b	c	d

Pour obtenir la dimension de la dernière représentation irréductible on utilise le fait que

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + n^2 \quad \text{soit} \quad n^2 = 4 \quad \text{soit} \quad n = 2.$$

On complète alors la table par orthogonalité des caractères (voir les compléments de l'exercice 9).

D_4	Id	$-\text{Id}$	ρ	s	$s\rho$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
θ	2	-2	0	0	0

Par exemple, pour déterminer b , on a

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2b = 0 \quad \text{soit} \quad b = -2.$$

On obtient la même table de caractère mais \mathbb{D}_4 et \mathbb{H}_8 ne sont pas isomorphes³⁴. Ainsi la table de caractère ne caractérise pas le groupe! En revanche, ils ont même nombre de sous-groupes distingués par exemple en utilisant les compléments à l'exercice 10. La table de caractère ne contient donc pas toute l'information du groupe même si elle en contient un certain nombre. Par exemple, historiquement, avant d'avoir obtenu l'existence³⁵ du dernier groupe simple sporadique, à savoir le groupe Monstre, on avait pu obtenir qu'il en existait au plus un grâce à l'existence³⁶ d'une représentation fidèle de dimension 196 883.

COMPLÉMENTS. – Noter que l'exercice sur le groupe diédral du TD 1 donne le groupe dérivé de $D(G)$. On peut alors facilement montrer que l'abélianisé de \mathbf{D}_n est toujours $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ si n est pair et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si n est impair et déterminer tous les caractères linéaires. L'exercice 4.4 page 22 ici donne une famille de représentations de degré 2 et on vérifie (avec le caractère par exemple) qu'elles sont irréductibles, ce qui permet de dresser la table de caractères de \mathbf{D}_n (dont on détermine les classes de conjugaison facilement comme pour \mathbf{D}_4). On peut cependant se demander d'où sortent ces représentations. Il est alors souvent utile (voir l'exercice 10) d'avoir une représentation géométrique des groupes en question. On sait (voir TD 1) que \mathbf{D}_n est le groupe des isométries laissant stable un polygone régulier à n côtés et on a une représentation matricielle de tout élément de \mathbb{D}_n par une matrice de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ qui sont dans la base canonique de \mathbb{R}^2 :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad r_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \quad s_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & -\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

Cela fournit une représentation réelle et peut vérifier qu'on obtient en fait pour tout $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, une représentation réelle via

$$r \mapsto \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On aimerait alors savoir lesquelles sont irréductibles sur \mathbb{C} . Si $k = 0$, on obtient une représentation réductible (raisonner comme dans l'exercice 3, r agit trivialement et $z^2 = \text{Id}$). De même, si n est pair et $k = \frac{n}{2}$ puisque r agit comme $-\text{id}$. Si maintenant $0 < k < \frac{n}{2}$, la matrice r_k admet deux valeurs propres complexes distinctes $\pm e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ de vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Les espaces propres associés à chacune des ces valeurs propres (ou la droite engendré par chacun de ces vecteurs propres) sont alors les seuls candidats pour être un sous-espace G -stable et on vérifie que la matrice de s les échange! On a donc obtenu des représentations irréductibles. Comme on a obtenu autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison, on les a toutes et on peut dresser la table de caractères de \mathbb{D}_n . Cela fournit en particulier $\frac{n}{2} + 3$ représentations irréductibles dont 4 de dimension 1 si n est pair et $\frac{n+3}{2}$ dont 2 de dimension 1 si n est impair. Pour plus de détails, je vous renvoie à ici, notamment pour les tables de caractères mais aussi pour un exemple de comment décomposer une représentation du groupe diédral \mathbf{D}_4 en somme de sous-représentations irréductibles en utilisant les caractères.

EXERCICE 14 — REPRÉSENTATIONS RÉELLES D'UN GROUPE CYCLIQUE. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse dans cette exercice aux représentations de dimension finie de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur le corps \mathbb{R} .

1. Déterminer les représentations de dimension 1 de G .
2. Soit P un diviseur irréductible de $X^n - 1$. Montrer que la multiplication par la classe de X dans $\mathbb{R}[X]/(P)$ définit un G -module simple, que l'on notera V_P .
3. Soient P et Q deux diviseurs irréductibles unitaires de $X^n - 1$. Montrer que V_P est isomorphe à V_Q si, et seulement si, $P = Q$.

Soit V une représentation de dimension finie de G . On note $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ le morphisme de groupes associé et $f = \rho(\bar{1})$.

4. Soit P un diviseur irréductible de degré 1 de $X^n - 1$. Montrer que toute droite de $\text{Ker}(P(f))$ est G -stable. En déduire que $\text{Ker}(P(f))$ est semi-simple.
5. Soit P un diviseur irréductible de degré 2 de $X^n - 1$. Montrer que pour tout $x \in \text{Ker}(P(f))$ non nul, la famille $(x, f(x))$ engendre un G -module irréductible isomorphe à V_P . En déduire que $\text{Ker}(P(f))$ est semi-simple.
6. Montrer que V est semi-simple et que ses sous-représentations irréductibles sont (à isomorphisme près) les V_P .
7. Déterminer la composante V_P -isotypique de V pour tout P diviseur irréductible de $X^n - 1$.
8. Déterminer le nombre de représentations irréductibles de G sur \mathbb{R} . On vérifie qu'on a alors un G -isomorphisme $W \rightarrow V_P$ qui à $x \mapsto \bar{1}$ et $f(x) \mapsto \bar{X}$.

SOLUTION.

1. Il s'agit de déterminer les morphismes de groupes $f : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ qui sont déterminés par l'image de $\bar{1}$ qui doit être un élément de \mathbb{R}^* d'ordre divisant n . Si n est pair, on a donc deux tels morphismes qui envoient $\bar{1}$ sur ± 1 et si n est impair, on a uniquement la représentation triviale!

34. Voir par exemple ici page 8.

35. Obtenue en 1980 par Griess.

36. La preuve que l'unicité découlait d'une telle représentation est due à Thompson et une telle représentation a été exhibée (mais non publiée) par Norton en 1982.

2. Soit P un tel diviseur et posons $V_P = \mathbb{R}[X]/(P)$ qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $d = \deg(P)$ de base $(\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X}^{d-1})$. On pose alors $m_P : V_P \rightarrow V_P$ qui à $\pi(Q) \mapsto \pi(XQ)$ où $\pi : \mathbb{R}[X] \rightarrow V_P$ est la surjection canonique. Cette application est bien définie et linéaire. Par ailleurs, il s'agit d'un isomorphisme puisque X et $X^n - 1$ sont premiers entre eux de sorte que si $\pi(Q) \in \text{Ker}(m_P)$, alors $P \mid XQ$ et alors $P \mid Q$ et $\pi(Q) = 0$. On a donc affaire à un isomorphisme linéaire de V_P et on vérifie que $m_P^n = \text{Id}$ puisque $\pi(X^n) = 1$ car $P \mid X^n - 1$. Par l'exercice 4, on a une représentation de G . Pour montrer qu'il est simple, soit $W \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de V_P stable par m . la matrice de m dans la base ci-dessus est la matrice compagnon $C(P)$ de P de sorte que son polynôme caractéristique est P . On a alors qu'il existe un supplémentaire S de W dans V_P (pas nécessairement G -stable) de sorte que dans une base adaptée à la décomposition $V_P = W \oplus S$, la matrice de m est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \chi_m = \chi_A \times \chi_C$$

où on note χ_u le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice. Comme ce polynôme caractéristique est égal à P , il vient $\chi_A = \chi_{m_P|_W} = 1$ auquel cas W est de dimension 0 et $W = \{0\}$ ou alors $\chi_A = \chi_{m_P|_W} = P$ auquel cas $\dim(W) = \dim(V_P)$ et $W = V_P$, ce qui fournit le résultat!

Noter que si n est pair, on peut choisir $P = X \pm 1$ et si n est impair $P = X - 1$ (et ce sont les seuls diviseurs irréductibles de degré 1) et on retrouve le résultat de la question précédente!

3. On est en caractéristique nulle donc il suffit de vérifier que $V_P \cong V_Q$ si, et seulement si, $P = Q$. Il est clair que si $P = Q$, alors V_P et V_Q sont les mêmes. Réciproquement, supposons $V_P \cong V_Q$. On a alors un isomorphisme $f : V_P \rightarrow V_Q$ tel que $f \circ m_P = m_Q \circ f$. Cela implique en particulier que les dimensions (et donc les degrés de P et de Q soient les mêmes). En choisissant les bases de V_P et V_Q ci-dessus, on obtient en notant M la matrice de f dans ces bases que $C(P) = M^{-1}C(Q)M$ de sorte que $C(P)$ et $C(Q)$ sont semblables. Elles ont donc même polynôme caractéristique soit $P = Q$.
4. On constate que $P = X \pm 1$ et donc $P(f) = f \pm \text{Id}$. Soit D une droite de $\text{Ker}(P(f))$. Montrons que D est stable par f ce qui entraînera que D est G -stable. Soit $x \in D$, on a alors $P(f)(x) = 0$ soit $f(x) = \pm x \in D$ et on a le résultat! Il suffit alors de choisir une base (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Ker}(P(f))$, alors

$$\text{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}e_i$$

et chaque droite $\mathbb{R}e_i$ est une droite G -stable donc une sous-représentation irréductible. On a donc bien semi-simplicité!

5. Soit $(x, f(x))$ avec $x \in \text{Ker}(P(f))$. On pose $P = X^2 + ax + b$ de sorte que $P(f) = f^2 + af + c\text{Id}$. Cette famille est libre puisque si $f(x) = \lambda x$, alors comme $f^2(x) + af(x) + bx = 0$, on a $P(\lambda)x = 0$ mais P est irréductible de degré 2 sur \mathbb{R} donc sans racine si bien que $x = 0$ ce qui est absurde. On a donc bien un espace de dimension 2. Montrons que $W = \text{Vect}(x, f(x))$ est G -stable. Pour cela, il suffit de montrer qu'il est stable par f et on a bien $f(x) = f(x)$ et $f(f(x)) = -af(x) - bx \in W$, ce qui fournit le résultat. On obtient la semi-simplicité par récurrence sur la dimension de V . On vient de voir qu'on peut écrire

$$\text{Ker}(P(f)) = W \oplus S$$

avec S un sous- G -module (par le théorème de Maschke). On a alors que $S = \text{Ker}(P(f)) \cap S = \text{Ker}(P(f|_S))$ et on applique l'hypothèse de récurrence pour obtenir que $\text{Ker}(P(f))$ s'écrit comme somme directe de copies de V_P . En particulier, sa dimension est nécessairement pair.

6. Cela découle immédiatement des questions précédentes et du lemme des noyaux puisque $X^n - 1$ annule f qui est sans facteur carré de sorte que

$$V = \bigoplus_{\substack{P \mid X^n - 1 \\ P \text{ irr. unit.}}} \text{Ker}(P(f)).$$

7. On pose $d_P = \dim(\text{Ker}(P(f)))$. Alors on a que la composante P -isotypique est isomorphe à $V_P^{\frac{d_P}{d}}$.
8. On a ainsi si n est pair 2 représentations irréductibles de degré 1 et le nombre de diviseurs irréductibles de degré 2 de $X^n - 1$ est alors donné par $\frac{n-2}{2}$ qui fournissent $\frac{n-2}{2}$ représentations irréductibles de degré 2. Si n est impair, on a 1 représentation irréductible de degré 1 et $\frac{n-1}{2}$ représentations irréductibles de degré 2.