Analyse de Fourier et géométrie : Corrigé de l'examen final

19 mai 2020 (4 heures)

►Exercice 1 – (Applications du cours), environ 2 points

a) On reconnaît deux séries de Riemann convergentes pour

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{100}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

car $100 > 1$ et $\frac{3}{2} > 1$. Ces deux séries étant à termes positifs, elles convergent également absolument. Pour

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$$

on reconnaît une série de Riemann alternée convergente car $\frac{1}{2} > 0$. Pour la convergence absolue, on doit étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

qui diverge en tant que série de Riemann avec $\frac{1}{2} \leqslant 1$ La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$ converge donc mais pas absolument.

b) On a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

et on reconnaît par conséquent la matrice de la composition d'une symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par e_1 avec une rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et d'axe la droite dirigée par e_1.

►Exercice 2 – (Convergence de séries), environ 3 points

a) Soit $x > 0$. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}} = \frac{x^{n+1}}{x^n}\times\sqrt{\frac{n}{n+1}} = x\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Or, on a en factorisant par les termes dominants au numérateur et au dénominateur

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \quad \text{de sorte que} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} x\sqrt{\frac{n}{n+1}} = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

Lorsque $x > 0$, on a $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si bien que le critère de D'Alembert s'applique. Ainsi, lorsque $0 < x < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge et pour $1 < x$ elle diverge. Lorsque $x = 1$, la série devient $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est une série de Riemann divergente.

b) On pose $f(x) = x - \ln(1+x)$ sur $[-1, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition et

$$\forall x > -1, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Sur $]-1, +\infty[$, $1 + x > 0$ de sorte que le signe de $f'(x)$ est du signe de x. On en déduit le tableau de variations suivant

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites aux bornes ne sont ici pas nécessaires pour lire le signe de $f(x)$ mais on a clairement

$$\lim_{x\to -1} \ln(1+x) = \lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -1} f(x) = +\infty.$$

Par ailleurs, en $+infty$, x va dominer et

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0 \quad \text{si bien que} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

On lit donc sur le tableau de variations que pour tout $x > -1$, $f(x) \geqslant 0$, soit en revenant à la définition de f

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant alors $x = \frac{1}{n^4} > -1$ dans l'inégalité précédente, il vient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n^4}\right) \leqslant \frac{1}{n^4}. \qquad (*)$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que $\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right) > 0$ et donc la série est à termes positifs. Maintenant puisque la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$ converge en tant que série de Riemann convergente ($4 > 1$), on déduit de l'inégalité $(*)$ et du fait que les séries soient à termes positifs que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$ converge.

►Exercice 3 – (Géométrie), environ 6 points

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right).$$

a) On calcule l'image des vecteurs $b_1 = (1,0)$ et $b_2 = (0,1)$ de la base canonique par f. On a alors

$$f(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad f(0,1) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

de sorte que la matrice de f dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) On a

$${}^tM = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{si bien que} \qquad {}^tMM = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

L'application linéaire f préserve donc angles et distances et ne "*retourne*" pas le plan.

c) Puisque f préserve angles et distances sans "*retourner*" le plan, on sait d'après le cours qu'il existe un $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

En identifiant les coefficients, il vient que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

On reconnaît là la valeur bien connue $\theta = \frac{\pi}{3}$ et f est une rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre l'origine.

d) On a dans ce cas

$$g(1,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad g(0,1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

de sorte que la matrice de g dans la base canonique est donnée par

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

On a

$${}^tN = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

si bien que

$${}^tNN = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$\det(N) = \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

L'application linéaire g préserve donc angles et distances et ne "*retourne*" pas le plan. Puisque g préserve angles et distances sans "*retourner*" le plan, on sait d'après le cours qu'il existe un $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$N = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

En identifiant les coefficients, il vient que

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

On reconnaît là la valeur bien connue $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ et f est une rotation du plan d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre l'origine.

e) On sait d'après le cours que la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $f \circ g$ est donnée par MN car M est la matrice de f dans la base canonique et N est celle de g. Mais $f \circ g$ consiste à d'abord effectuer g (autrement dit une rotation de centre l'origine et d'angle $-\frac{\pi}{4}$) puis d'effectuer f (autrement dit une rotation de centre l'origine et d'angle $\frac{\pi}{3}$) de sorte que $g \circ f$ n'est rien d'autre qu'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$ et de centre l'origine. On sait alors d'après le cours que MN qui est la matrice d'une rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{12}$ et de centre l'origine est donnée par

$$MN = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{pmatrix}.$$

f) On calcule alors à la main le produit

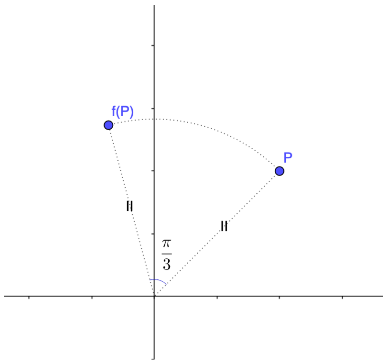
$$MN = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) & \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}) \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\sqrt{3}) & \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

Or, on a vu en question e) que

$$MN = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{pmatrix}$$

de sorte qu'en identifiant les coefficients, il vient

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$



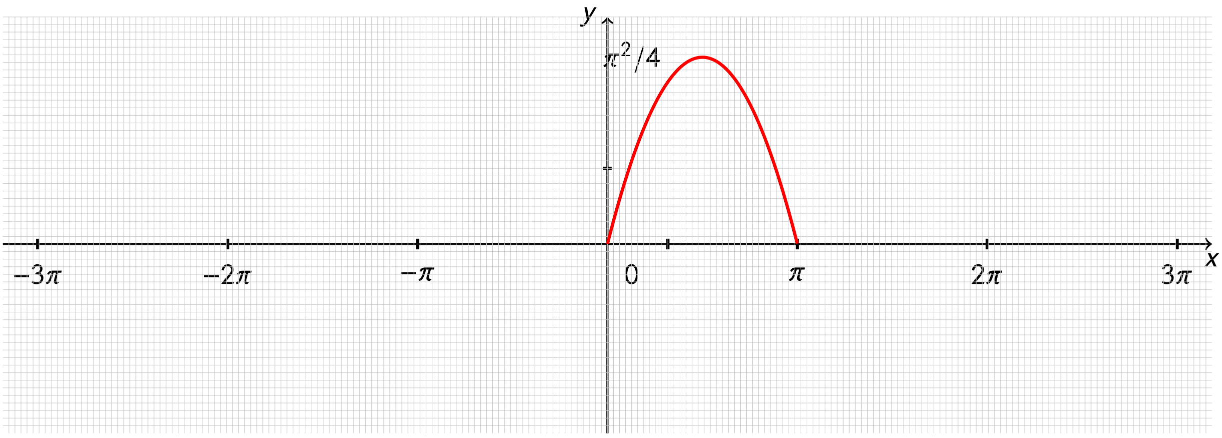
g)

►Exercice 4 – (Séries de Fourier), environ 12 points

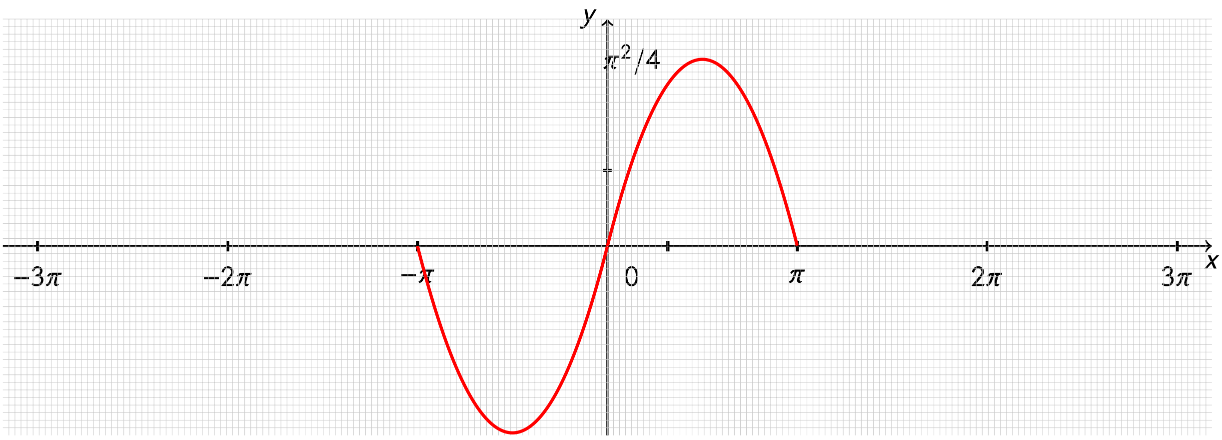
Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par

$$\forall t \in [0,\pi], \quad f(t) = t(\pi - t).$$

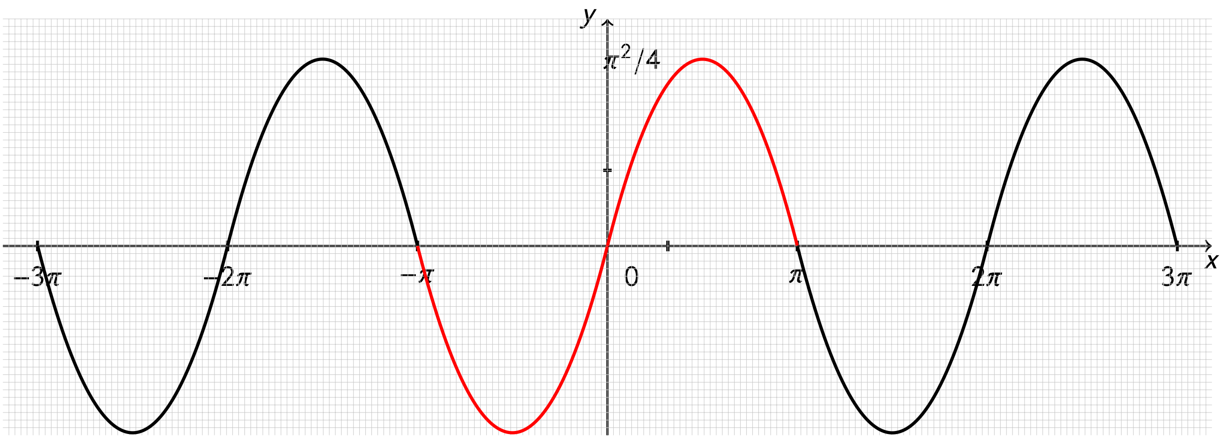
a) On trace le graphe de f sur $[0,\pi]$. Noter qu'il s'agit d'une parabole de coefficient devant t^2 négatif et ayant 0 et π comme racines et dont le maximum est atteint en $\frac{\pi}{2}$ et vaut $\frac{\pi^2}{4}$.



puis on complète le tracé en utilisant le fait que la fonction est impaire. On complète donc le graphe sur $[-\pi,\pi]$ en effectuant une symétrie de la portion de graphe sur $[0,\pi]$ par rapport à l'origine.



puis on complète le graphe sur $\mathbb{R}$ en effectuant des translations de la portion de graphe sur $[-\pi,\pi]$ par des multiples entiers de la période, ici 2π.



La fonction f est-elle continue (on trace le graphe sans lever le crayon) et donc f est continue par morceaux. Par ailleurs, la fonction est de classe C^1 et donc C^1 par morceaux (car la fonction est dérivable et C^1 partout sans pic ni tangente verticale). La fonction n'a donc aucun point de discontinuité.

b) La fonction étant impaire, on sait d'après le cours que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.

c) Soit $n \geqslant 1$. Pour montrer que la fonction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est paire il s'agit de montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(-t)\sin(-nt) = f(t)\sin(nt).$$

Soit donc $t \in \mathbb{R}$. Puisque f est impaire, on a $f(-t) = -f(t)$. Par ailleurs, la fonction sinus étant également impaire, on a $\sin(-nt) = -\sin(nt)$ de sorte que

$$f(-t)\sin(-nt) = -f(t)\times(-\sin(nt)) = f(t)\sin(nt).$$

On a donc bien que la fonction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est paire. On sait alors d'après le cours [1]

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

d) On effectue une intégration par parties avec

$$\begin{cases} u(t) = t(\pi - t) \\ v'(t) = \sin(nt) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = \pi - 2t \\ v(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

car $n \geqslant 1$. On a alors

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \left[-t(\pi-t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(\pi-2t)\times\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi-2t)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

1. Voir la note 19 de bas de page de la page 45.

par linéarité et car

$$\left[-t(\pi-t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = 0.$$

e) Soit $n \geqslant 1$. On sait par définition et par 2π-périodicité de f que

$$b_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

et

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

d'après la question c). On a alors grâce à la question d) que

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi-2t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On calcule alors l'intégrale

$$\int_0^{\pi}(\pi-2t)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

grâce à une nouvelle intégration par parties avec

$$\begin{cases} u(t) = \pi - 2t \\ v'(t) = \cos(nt) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = -2 \\ v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

car $n \geqslant 1$. Il vient

$$\int_0^{\pi}(\pi-2t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \left[(\pi-2t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -2\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t = \frac{2}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\mathrm{d}t$$

car

$$\left[(\pi-2t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = -2\pi\frac{\sin(n\pi)}{n} = 0 \quad \text{grâce au fait que} \quad \sin(n\pi) = 0$$

pour tout entier naturel n. On a donc

$$\int_0^{\pi}(\pi-2t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = -\frac{2}{n^2}(\cos(n\pi)-1).$$

Or, on sait que pour tout entier n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ si bien que

$$\int_0^{\pi}(\pi-2t)\cos(nt)\mathrm{d}t = -\frac{2}{n^2}((-1)^n-1)$$

et finalement on a bien

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n(f) = \frac{4\,(1-(-1)^n)}{\pi n^3}.$$

f) La fonction f étant continue le théorème de Dirichlet s'applique et on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'égalité

$$f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right]$$

avec convergence de la série en jeu. Les questions b) et e) fournissent alors que pour tout réel t

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\,(1-(-1)^n)}{\pi n^3}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(nt).$$

Lorsque n est pair, on a $1-(-1)^n = 0$ tandis que lorsque n est impair, $1-(-1)^n = 2$ de sorte que pour tout réel t, on a

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{impair}}}^{+\infty} \frac{2}{n^3} \sin(nt)$$

soit en écrivant $n \geqslant 1$ impair sous la forme $n = 2k+1$ avec $k \geqslant 0$, il vient bien

$$f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)^3}$$

avec convergence de la série en jeu.

g) On applique la question précédente valable pour tout réel t avec $t = 1$ pour obtenir que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^3}$ converge et que

$$f(1) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^3} \quad \text{soit} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^3} = \frac{\pi(\pi-1)}{8}$$

car $1 \in [0, \pi]$, intervalle sur lequel f est donnée par $f(t) = t(\pi - t)$.

h) On voit immédiatement sur un cercle trigonométrique ou en calculant les premières valeurs de k que

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

si bien qu'on en déduit immédiatement que $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$ pour tout entier naturel k.

i) Les questions précédentes nous incite à appliquer la question g) avec $t = \frac{\pi}{2}$. cela fournit que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)^3}$$

avec convergence de la série en jeu. La question précédente fournit alors que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

si bien que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ converge et que

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \quad \text{soit} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

car $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$ et par conséquent $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$.

j) La fonction f est continue donc continue par morceaux et on peut donc appliquer l'égalité de Parseval qui fournit par 2π-périodicité que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right]$$

avec convergence de la série en jeu. Les questions b) et e) fournissent alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16(1-(-1)^n)^2}{\pi^2 n^6}.$$

On obtient alors en raisonnant comme en question f) que

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16(1-(-1)^n)^2}{\pi^2 n^6} = \frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}.$$

Par ailleurs, puisque f est impaire, $|f|^2$ est paire et

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t.$$

Or, sur $[0,\pi]$, $f(t) = t(\pi - t)$ si bien que

$$\int_0^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}t^2(\pi-t)^2\mathrm{d}t = \left[\frac{\pi^2t^3}{3} - \frac{2\pi t^4}{4} + \frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{30}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{30}$$

et finalement

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

avec convergence de la série en jeu. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^6}$ converge alors comme série de Riemann (6>1) et on note

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}.$$

On a alors

$$S = \sum_{\substack{n=1\\ n\text{pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + \sum_{\substack{n=1\\ n\text{impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^6} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^6} = \frac{1}{64}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{S}{64}$$

et d'après la question précédente

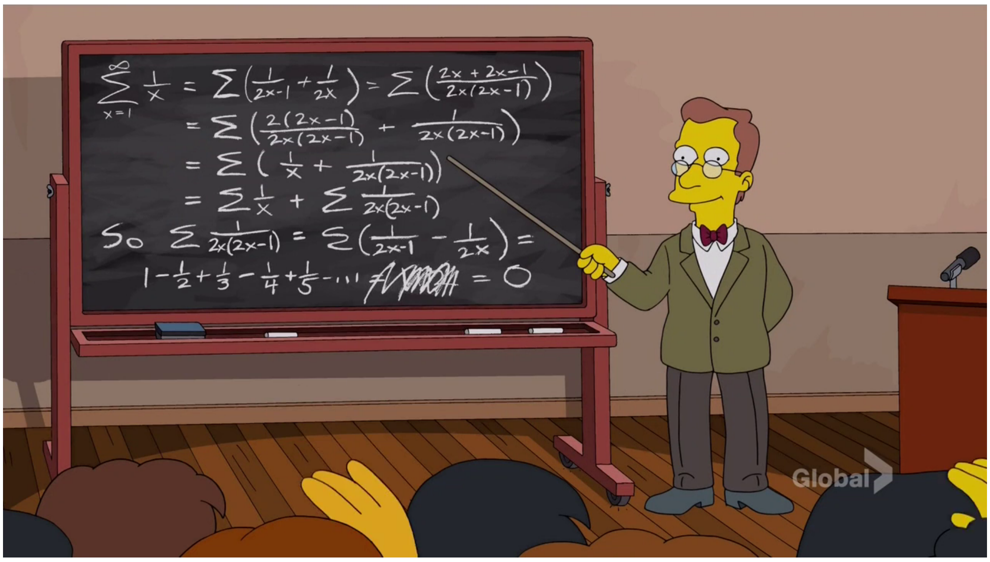
$$S = \frac{S}{64} + \frac{\pi^6}{960} \quad \text{soit} \quad \frac{63}{64}S = \frac{\pi^6}{960}.$$

Finalement, il vient

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

◂Bonus▸

Il est alors temps de vous avouer la véritable raison d'être de ce cours de Maths 254 : être enfin capable de comprendre toutes les subtilités des épisodes des *Simpsons* qui font très souvent des clins d'œil à des mathématiques, parfois très poussées. L'image ci-dessous est tirée de l'épisode *Sky Police*, seizième épisode de la saison 26, au cours de laquelle Apu se remémore comment il a triché pour intégrer le célèbre MIT et en particulier il se souvient d'un des cours de maths qu'il a pu y suivre. **Uniquement si vous avez fini tout le reste** et **pour 1 point bonus**, expliquer et détailler le raisonnement au tableau et présenter la conclusion du professeur. Expliquer pourquoi ce résultat est surprenant ! La démonstration du professeur du MIT est-elle correcte ?



Le professeur commence par séparer les termes pairs et les termes impairs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\text{impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1} \right).$$

Il écrit ensuite que pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1} = \frac{2k-1+2k}{2k(2k-1)} = \frac{2(2k-1)+1}{2k(2k-1)}$$

soit que

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1} = \frac{2(2k-1)}{2k(2k-1)} + \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(2k-1)}{2k(2k-1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

On a alors pour tout entier $k \geqslant 1$

$$\frac{2(2k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{1}{k}$$

de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = 0.$$

Le professeur écrit alors que pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

si bien que

$$0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right).$$

Mais cela n'est rien d'autre que dire que

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

où l'on remarque que $1 - \frac{1}{2} > 0$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} > 0$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} > 0$ et ainsi de suite. Ainsi il semblerait qu'on ait démontré qu'une somme infinie de nombre strictement positifs finisse par donner 0. Surprenant non ?
En effet, ça l'est et c'est même tellement surprenant que c'est faux ! La somme d'une série à termes strictement positifs est nécessairement strictement positive. Alors d'où vient l'erreur ? Du fait que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann qui diverge vers $+\infty$ et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

et on n'a pas le droit de manipuler des sommes de séries divergentes !! Notamment à l'étape

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}$$

en réalité la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2k(2k-1)}$ converge. Notons S sa somme et l'égalité ci-dessus se réécrit

$$+\infty = +\infty + S$$

ce qui est vrai mais en revanche on n'a pas le droit de simplifier par $+\infty$! Pour vous en convaincre, pensez aux calculs de limites où on a

$$1 + +\infty = +\infty = 2 + +\infty$$

sans pour autant avoir $1 = 2$. La morale de cette histoire est qu'il est donc important de vérifier la convergence de séries avant de manipuler leurs sommes sous peine d'écrire des bêtises, même lorsqu'on est professeur au prestigieux MIT. À Moins que ce ne soit la mémoire d'Apu qui lui joue des tours ou les scénaristes des *Simpsons* qui s'amusent à vous proposer de subtiles révisions !