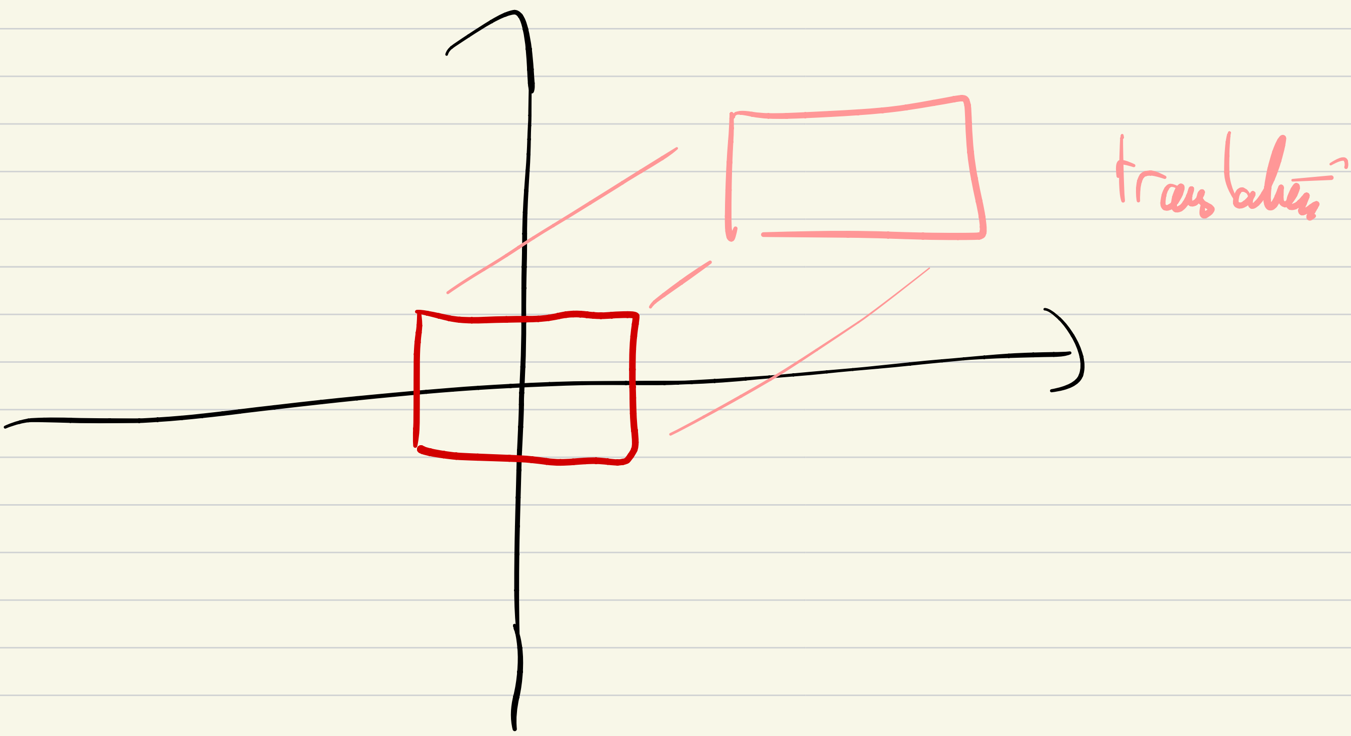
Cours – TD III

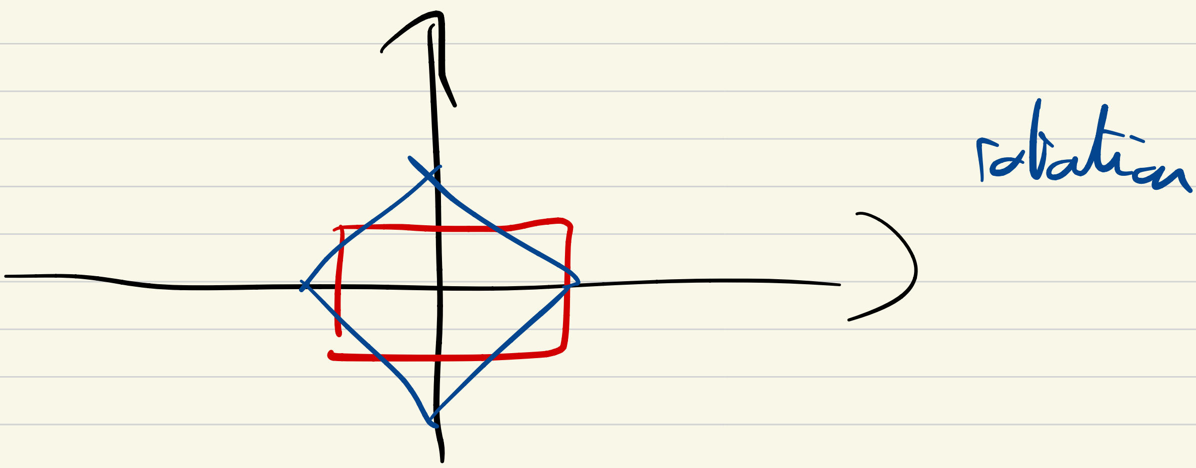
Analyse de Fourier et Géométrie

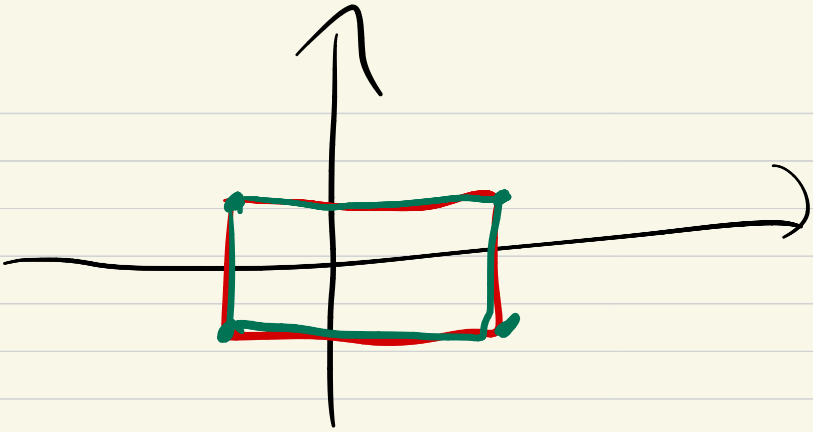
DM II : à rendre pour le 15/03/2021

Ecampus + page web du cours.

Examen : 02/06/2021   2 avril

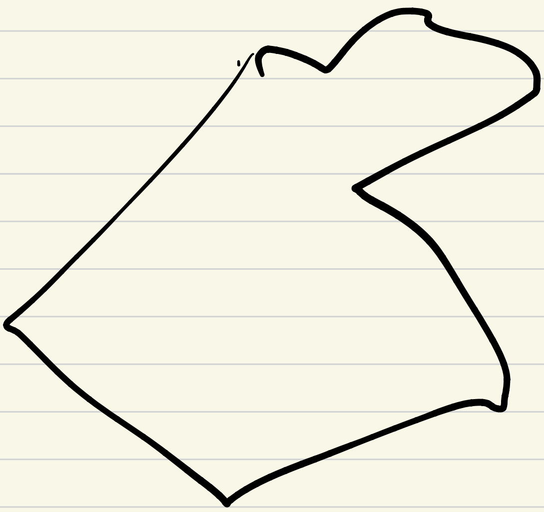




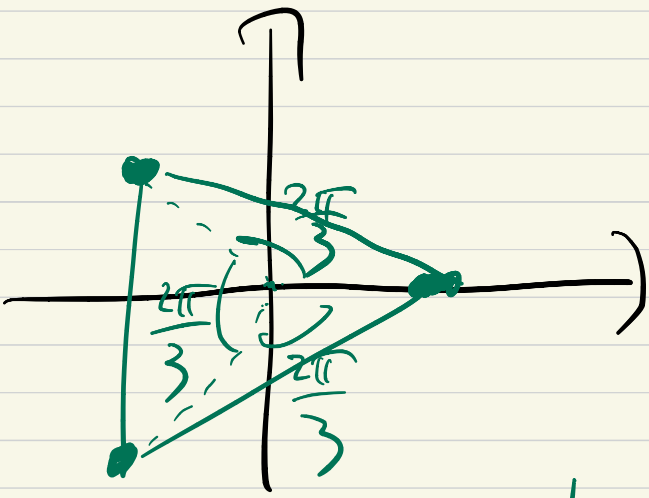


symétrie d'axe les abscisses

Connaître les symétries d'une figure donne des informations sur la figure.



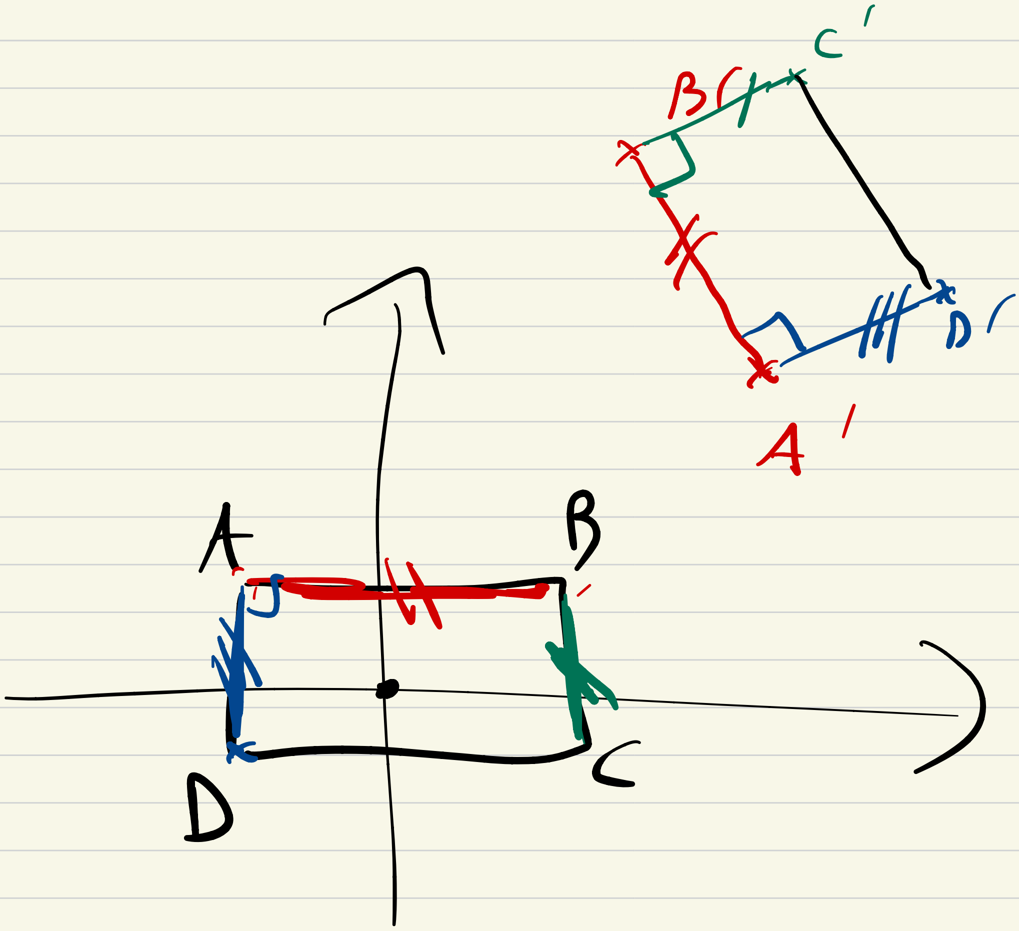
pas de symétrie



invariant par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

triangle équilatéral.

$\boxed{\text{Prop :}}$ Les applications du plan ou de l'espace qui laissent invariante une figure bornée du plan ou de l'espace centrée en O sont les applications qui préservent les distances et les angles.



$A \mapsto A'$

$B \mapsto B'$

$C \mapsto C'$

$D \mapsto D'$

$$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Proposition Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

ou

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

qui préserve les distances et une figure bornée centrée en 0. Alors f est une application linéaire et f préserve aussi les angles.

Théorème Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire.

ou

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Alors f préserve les distances (et donc les angles) si, et seulement si

$${}^tMM = Id.$$

où M la matrice de f dans la base canonique.

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

f linéaire.

$$M = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \left(\begin{array}{c} \vert \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \vert \end{array}\right) \end{array}$$

matrice de f dans la base canonique

$e_1 = (1,0)$ $\quad f(e_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$e_2 = (0,1)$ $\quad f(e_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

D'où $\quad {}^tM = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ (on échange les lignes et les colonnes !)

$$ {}^{t}MM = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} $$

$$ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \times -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} $$

$$ = \underset{\substack{\shortparallel \\ I_2}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = {}^{t}MM $$

Ainsi ρ préserve les angles et les distances !

Proposition : Si f préserve les distances et les angles et si M est la matrice de f dans la base canonique, $\det M = 1$ ou -1.

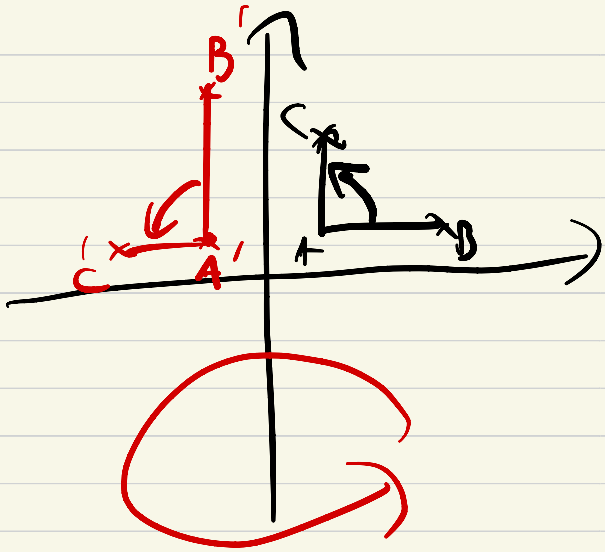
Ex : $$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

et $$\det M = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

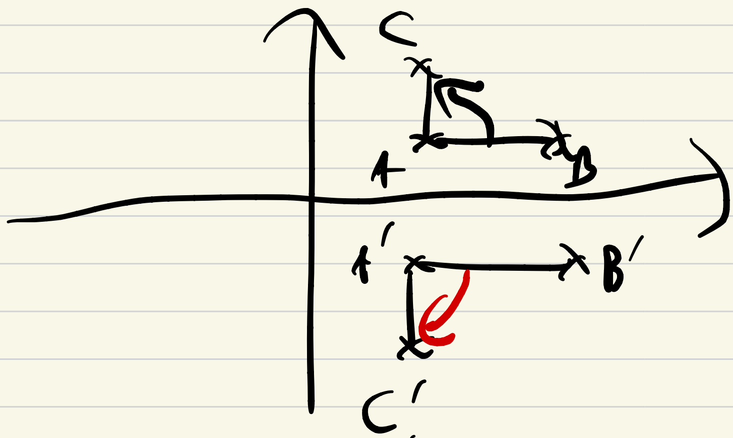
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Rq : Réciproque est FAUSSE !

$\det M = 1$ si f ne "retourne pas l'espace"



rotation d'angle θ



symétrie.

$\det M = 1 \iff f$ ne "retourne" pas l'espace / le plan

$\det M = -1 \iff f$ "retourne" le plan ou l'espace.

$\boxed{\text{Exercice I}}$ (page 6) 1. + 2.

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \Big| \quad N_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

1)
$$\det M_\theta = (\cos\theta)^2 - \sin\theta \times (-\sin\theta)$$
$$= (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$$
$$= 1.$$

$$\det N_\theta = -(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = -\left((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right)$$
$$= -1.$$

$${}^t M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$
{}^tM_\theta M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}
$$

- $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$
- $\cos\theta \times -\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$
- $-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 0$
- $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

Finalement, ${}^tM_\theta M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

et de m̂ ${}^tN_\theta N_\theta = I_2$.

N_θ (car ${}^tN_\theta N_\theta = I_2$)

M_θ préserve angles et distances (car ${}^tM_\theta M_\theta = I_2$)

et ne retourne pas l'espace (car $\det M_\theta = 1$)

et retourne l'espace (car $\det N_\theta = -1$)

2) Écrire $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire tq
$(x,y) \mapsto ?$

M_θ = matrice de f_θ dans la base canonique.

On a par le cours que :

$$f_\theta(x,y) = M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

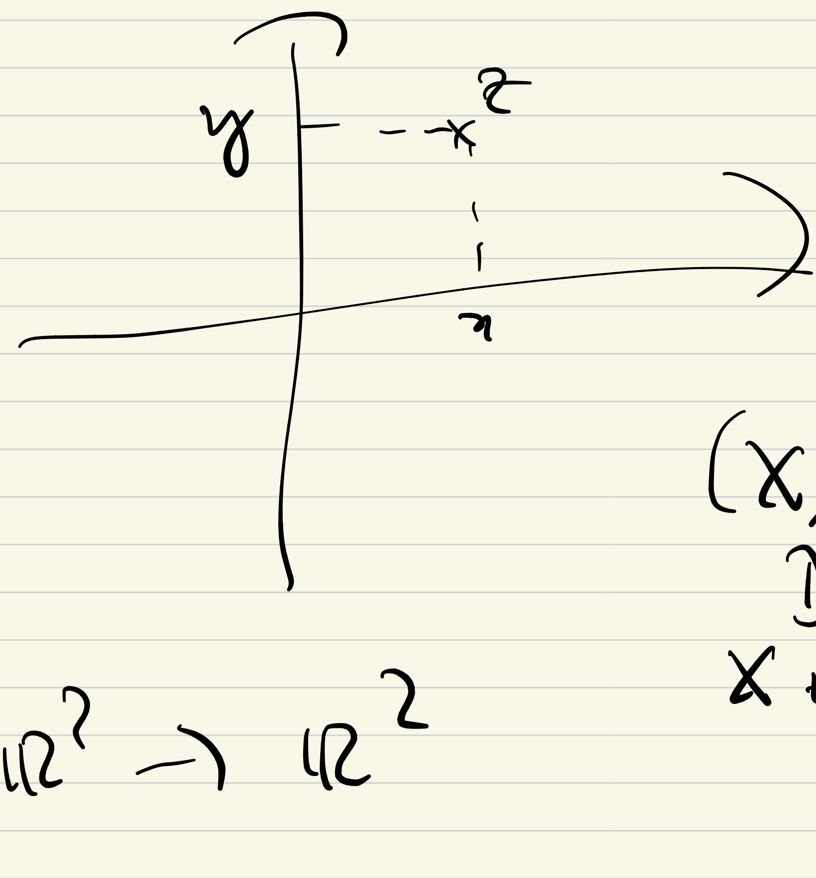
et

$$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y,\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$$

3) $M_\theta \longrightarrow B_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

préserve angle et distance
sans déformer l'espace,

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \iff z = x + iy$



(X, Y)
$\Updownarrow$
$X + iY$

$B_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y,\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad \Updownarrow$

$z = x + iy \longmapsto z' = (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y) + i(\sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$

$f_\theta : z = x+iy \mapsto z' = (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y)$

$+ i(\sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$

<u>Énoncé</u> : $z = x+iy \mapsto z e^{i\theta}$

$\shortparallel$

$(x+iy)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\shortparallel$

$x\cos\theta + i x\sin\theta + i y\cos\theta$
$- y\sin\theta$

$= (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$

$\shortparallel$

z'

et on a bien $\boxed{f_\theta(z) = z e^{i\theta}}$

$|f_\theta(z)| = |z e^{i\theta}| = |z| \times |e^{i\theta}|$

$(|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|)$

$$|f_\theta(z)| = |z|\,|e^{i\theta}| = |z|$$

$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta|$$

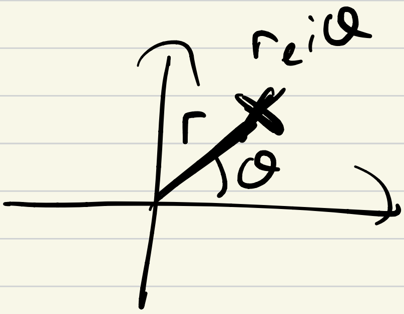
$$= \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1} = \underset{|e^{i\theta}|}{\underset{\shortparallel}{1}}$$

$$|f_\theta(z)| = |z|$$

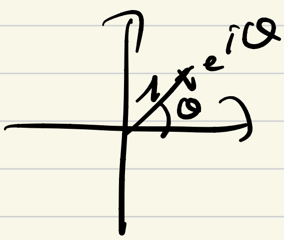
$$\arg(f_\theta(z)) = \arg(z\,e^{i\theta}) = \arg z + \arg(e^{i\theta})$$

$$(\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \text{modulo } 2\pi)$$

$\boxed{r e^{i\theta}}$



$e^{i\theta}$



Ainsi

$$\arg(f_\theta(z)) = \arg z + \theta$$

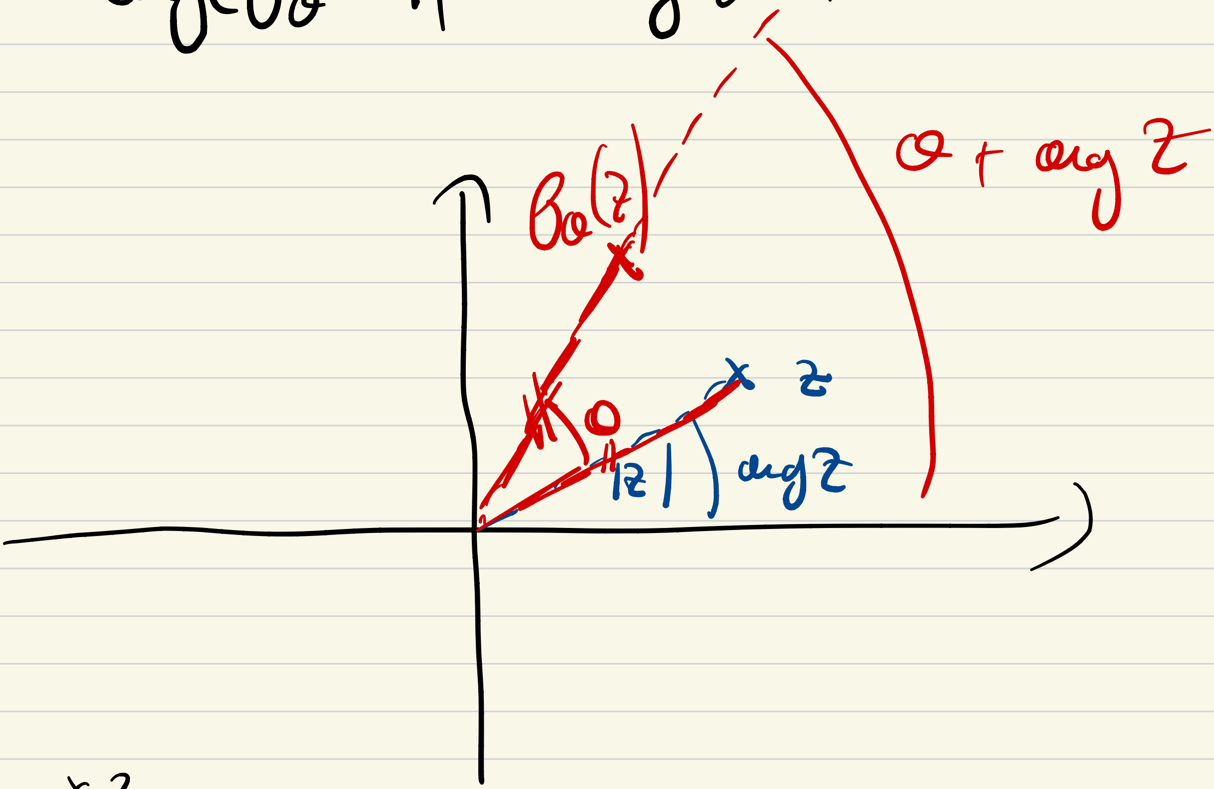
car $\arg(e^{i\theta}) = \theta$.

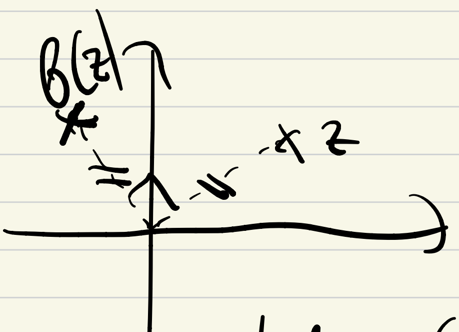
4)

$$f_\theta(z) = z e^{i\theta}$$

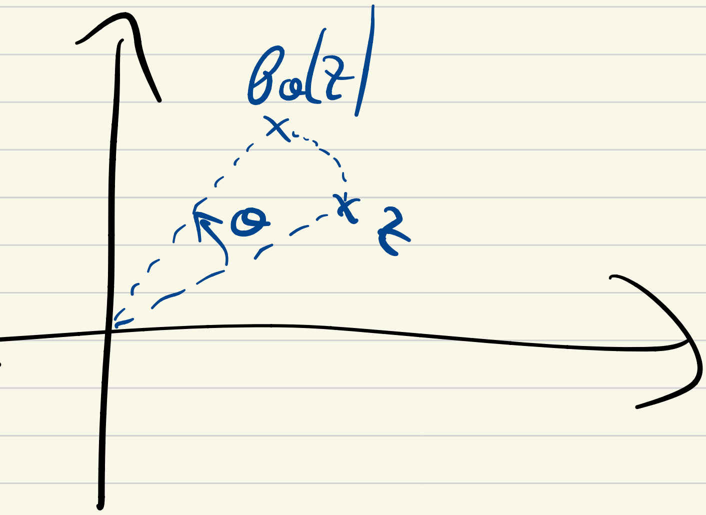
$$|f_\theta(z)| = |z|$$

$$\arg(f_\theta(z)) = \arg z + \theta$$





rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$



On a une rotation de centre O et d'angle θ.

5) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

i) On a :

$N_\theta = M_\theta \times S$. (laissé en exercice).

ii)

$$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{linéaire dont}$$
$$(x,y) \mapsto ?$$

la matrice dans la base canonique est S.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et

$$s(x,y) = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

et $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x,-y)$

iii) $g_\theta = \beta_\theta \circ s$ où $g_\theta \Leftrightarrow N_\theta$ $\quad s \Leftrightarrow S$
$\beta_\theta \Leftrightarrow M_\theta$

Rappel: Si f, g linéaires de matrices M et N dans la base canonique, alors $f \circ g$ a pour matrice $M \times N$ dans la base canonique.

$$N_\theta = M_\theta \times S$$

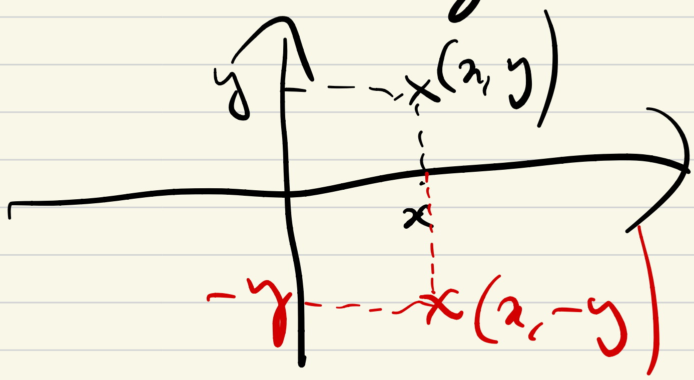
$$g_\theta = f_\theta \circ s$$

(appliquer g_θ à (x,y) revient à lui appliquer s puis f_θ)

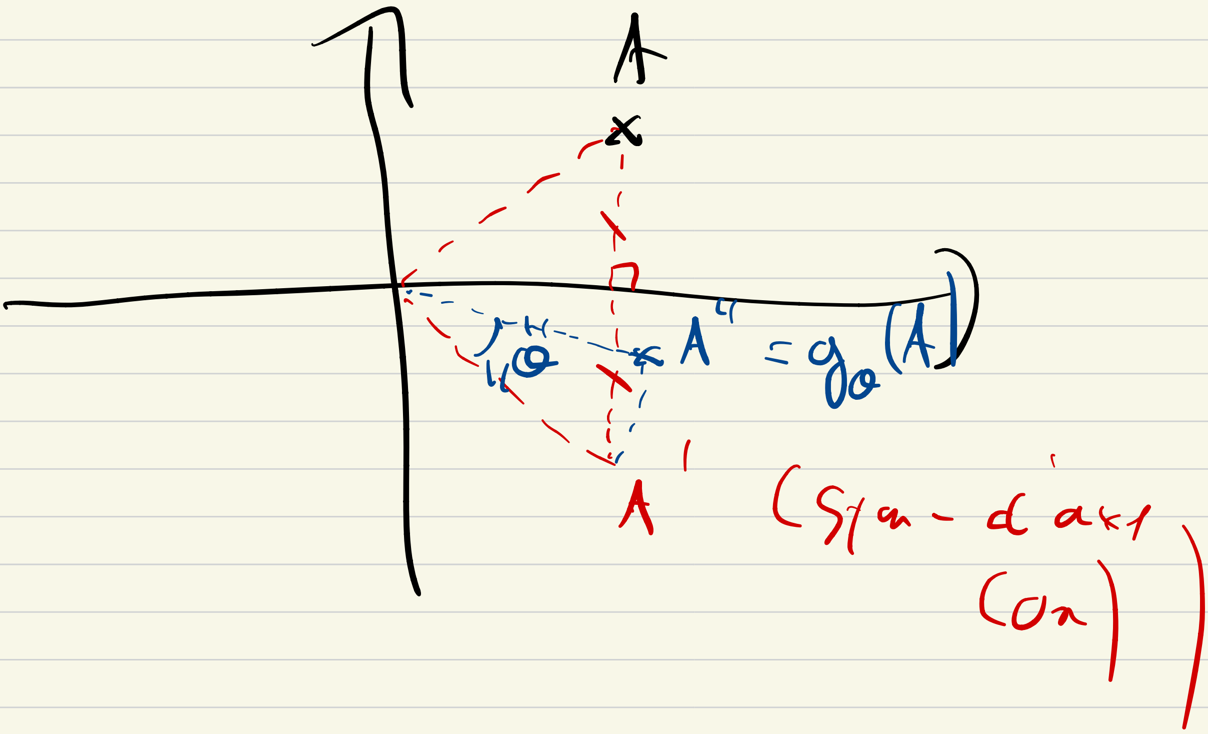
f_θ : rotation de centre O et d'angle θ.

$s : (x,y) \mapsto (x,-y)$

↳ symétrie par rapport à (Ox)

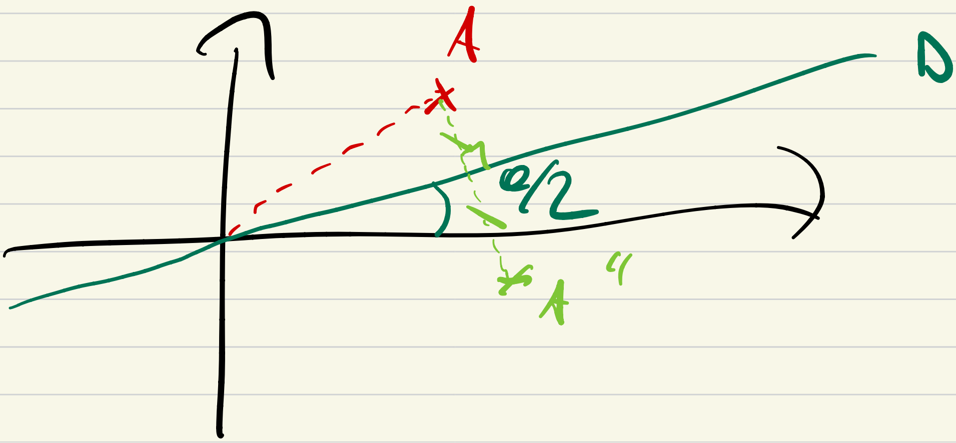


Conclusion : g_θ est la composée d'une symétrie d'axe (Ox) et d'une rotation d'angle θ et de centre O.



$g_\theta(A) = ?$

g_θ est aussi la symétrie d'axe la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$.



Théorème Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire préservant angle et distance ($^tMM = I_2$ si M est la matrice de f dans la base canonique). Alors :

i) Soit $\det M = 1$ et il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tq

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

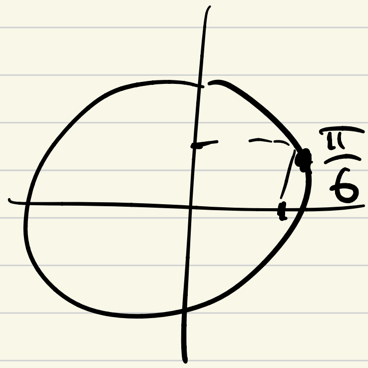
et f est une rotation de centre O et d'angle θ.

ii) Soit $\det M = -1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tq $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

et f est la composée d'une symétrie d'axe (Ox) avec une rotation d'angle θ et de centre O

ou de manière équivalente une symétrie par rapport à la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses.

Ex : (exercice II)



$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$^tMM = I_2$ et $\det M = 1$

$\Rightarrow$ M préserve angle et distance sans retourner l'espace.

Par le théorème, $\exists\, \theta \in [0, 2\pi[$ tq

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ soit $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$ et donc

$$M = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

et M est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ (30 degrés) et de centre O.

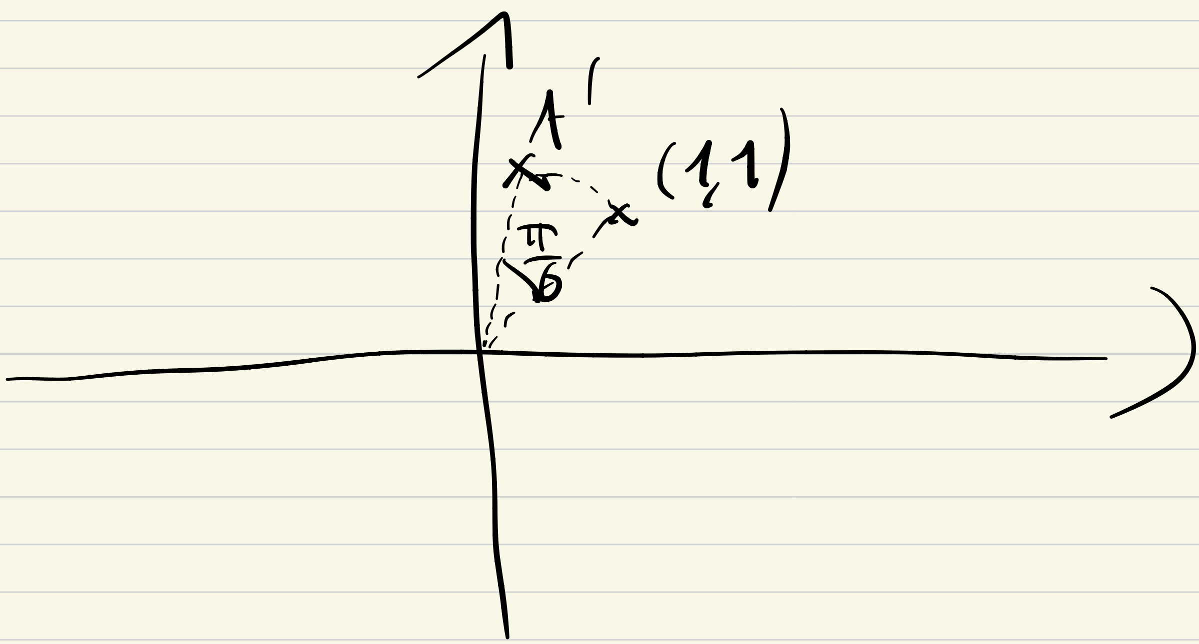


Image A' de $(1,1)$ par M.

(ou) $A' = M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$