TD 02 : Groupe fondamental

► ***Cette feuille de TD 2 nous occupera une semaine.***

Exercices fondamentaux

1. **Degré d'une application du cercle dans le cercle**

   (a) Montrer que, pour tout x dans $\mathbf{S}^1$, l'application $\varphi_x : \pi_1(\mathbf{S}^1, x) \to \mathbf{Z}$, définie par $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ où $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbf{R}$ est un relèvement du lacet γ, est un isomorphisme de groupes. Si c est un chemin dans $\mathbf{S}^1$, d'origine x et d'extrémité y, et si $\phi_c : \pi_1(\mathbf{S}^1, y) \to \pi_1(\mathbf{S}^1, x)$ est l'isomorphisme de groupes canonique, montrer que $\varphi_x \circ \phi_c = \varphi_y$.

   (b) Soient $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ une application continue et x un point de $\mathbf{S}^1$. Posons $y = f(x)$. La composition des morphismes de groupes
   $$\mathbf{Z} \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} \pi_1(\mathbf{S}^1, x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathbf{S}^1, y) \xrightarrow{\varphi_y} \mathbf{Z}$$
   est un morphisme de groupes de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$. C'est donc la multiplication par un entier n, qui ne dépend pas de x par ce qui précède. Nous le notons $\deg(f)$, et nous l'appelons le degré de f.
   Dans ce qui suit, f et g sont des applications continues de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{S}^1$.

   (c) Si f est une rotation, calculer $\deg(f)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer le degré de l'application $z \mapsto z^n$.

   (d) Montrer que $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$. En déduire que si f est un homéomorphisme, alors $\deg(f) = \pm 1$.

   (e) Montrer que $\deg(f) = \deg(g)$ si et seulement si f et g sont homotopes. En déduire que $\deg(f) = 0$ si et seulement si f se prolonge continûment en une application continue $f' : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{S}^1$.

   (f) Montrer qu'il n'existe pas de rétraction $\mathbf{B}^2 \to \mathbf{S}^1$.

   (g) Démontrer le théorème de d'Alembert : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine complexe.

   (h) Soit $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ une application continue telle que $f(-x) = -f(x)$. Montrer que f est de degré impair.

   (i) Déterminer le groupe fondamental du cylindre et du ruban de Möbius. Ces deux espaces topologiques sont-ils homéomorphes ?

2. **Groupe fondamental d'un produit**

   Soit $(X_i, x_i)_{i\in I}$ une famille d'espace topologiques pointés. Montrer que les groupes $\pi_1\left(\prod_{i\in I} X_i, (x_i)_{i\in I}\right)$ et $\prod_{i\in I} \pi_1(X_i, x_i)$ sont isomorphes. Pour $n \geqslant 1$, en déduire le groupe fondamental de $\mathbf{T}^n$.

3. **Complémentaire d'un sous espace vectoriel dans un espace vectoriel**

   Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 1$. Soit W un sous espace vectoriel de dimension $n-1 \geqslant k \geqslant 0$. On munit V de la topologie usuelle.

   (a) Montrer que $V - W$ est connexe si et seulement si $n - 2 \geqslant k$.

   (b) On suppose maintenant que $n \geqslant 2$ et $n - 2 \geqslant k$. Montrer que $V - W$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbf{S}^{n-k-1}$. En déduire le groupe fondamental de $V - W$ en fonction de n et k.

Exercices complémentaires

1. **Groupe fondamental de l'espace projectif complexe** Pour $n \geqslant 1$, montrer que $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ est simplement connexe.

2. **Groupes topologiques**

   Soit G un groupe topologique connexe par arcs d'identité e. Soient γ et σ deux lacets de base e.

   (a) Montrer que $\gamma * \sigma$ est homotope aux lacets $\gamma\sigma$ et $\sigma\gamma$. On remarquera que γ est homotope aux lacets $\gamma * e$ et $e * \gamma$.

   (b) En déduire que $\pi_1(G, e)$ est abélien.