

FEUILLE TD 2 – EXERCICES ALGÈBRE – GROUPES II

► Cette feuille de TD nous occupera deux semaines.

Exercices fondamentaux de la semaine 1

EXERCICE 1 — QUELQUES ISOMORPHISMES CLASSIQUES. Soit k un corps.

1. Montrer que si V est un k -espace vectoriel de dimension finie, alors $V \otimes_k k \cong V$.
2. Soient V_1, V_2, V_3 trois k -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que $(V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 = V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$ et en préciser la dimension.
3. Soient I un ensemble, $(V_i)_{i \in I}$ une famille de k -espaces vectoriels de dimension finie ainsi que V un k -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que

$$V \otimes_k \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} V \otimes_k V_i.$$

EXERCICE 2 — PRODUIT TENSORIEL ET APPLICATIONS LINÉAIRES. Soient k un corps et V, V', W, W' des k -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Construire une application linéaire $\varphi : \text{Hom}_k(V, V') \otimes_k \text{Hom}_k(W, W') \rightarrow \text{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W')$. Donner pour $f \in \text{Hom}_k(V, V')$, $g \in \text{Hom}_k(W, W')$, la matrice de l'application $\varphi(f \otimes g)$ dans une base adaptée.
2. Montrer que c'est un isomorphisme.
3. Peut-on affaiblir nos hypothèses sur les dimensions ?
4. Montrer que, si l'on note V^* le dual de V , alors on a un isomorphisme entre $\theta_{V,W} : V^* \otimes_k W \rightarrow \text{Hom}_k(V, W)$. Montrer alors que $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ est de rang r si, et seulement si, d est le plus petit entier naturel tel que $\theta_{V,W}^{-1}(f)$ s'écrit comme une somme de d tenseurs élémentaires non nuls.
4. Décrire un isomorphisme entre $V^* \otimes_k V^*$ et $(V \otimes_k V)^*$. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de G -modules si V est un G -module pour G un groupe fini.
5. Montrer que l'application

$$\begin{cases} V \times V^* & \longrightarrow k \\ (x, f) & \longmapsto f(x) \end{cases}$$

fournit une application $e : V \otimes_k V^* \rightarrow k$. Que vaut $e \circ \theta_{V,V}$?

EXERCICE 3 — LE GROUPE \mathfrak{S}_3 .

1. On considère l'action de \mathfrak{S}_3 sur \mathbb{C}^3 par permutation des coordonnées. Vérifier que cela définit une structure de \mathfrak{S}_3 -module sur \mathbb{C}^3 . Préciser sa représentation matricielle dans la base canonique.
2. Montrer que \mathbb{C}^3 admet deux sous- \mathfrak{S}_3 -modules $\mathbb{C}(1, 1, 1)$ et $H = \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$ et que chacun de ceux-ci sont simples.
3. Donner une représentation matricielle de la représentation H .

On note à présent $\sigma = (1\ 2\ 3)$, $\tau = (1\ 2)$ et V une représentation de \mathfrak{S}_3 .

4. Montrer que V se décompose en $V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$ où V_α est le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre α .
5. Montrer que $\tau(V_\alpha) = V_{\alpha^2}$ pour $\alpha \in \{1, j, j^2\}$. En déduire que V_1 et $V_j \oplus V_{j^2}$ sont deux sous- \mathfrak{S}_3 -modules de V .
6. Que peut-on en déduire si V est irréductible ?
7. On suppose que V est irréductible et que $V_1 \neq \{0\}$. Montrer que V est de dimension 1 et est soit la représentation triviale soit la signature.
8. On suppose que V est irréductible et que $V_j \neq \{0\}$. Soit $v \in V_j \setminus \{0\}$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par v et $\tau(v)$ est un plan \mathfrak{S}_3 -stable. En déduire que V est \mathfrak{S}_3 -isomorphe à H .
9. Généraliser cette méthode au groupe D_4 .

Exercices complémentaires de la semaine 1

EXERCICE 4 — EXTENSION DES SCALAIRES.

1. Soient $k \subseteq K$ deux corps et V un k -espace vectoriel. Munir $V_K := V \otimes_k K$ d'une structure de K -espace vectoriel.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une k -base de V . Exhiber une K -base de V_K et comparer $\dim_k(V)$ et $\dim_K(V_K)$.
3. Soient W un k -espace vectoriel et $f : V \rightarrow W$ une application k -linéaire. Montrer que $f_K = f \otimes \text{Id}_K : V_K \rightarrow W_K$ est une application K -linéaire. On fixe une base \mathcal{C} de W . Comparer la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} et celle de f_K dans les bases correspondantes de la question 2.

4. On suppose que V est un G -module sur k avec G un groupe fini. Construire sur V_K une structure de G -module sur K ayant la même représentation matricielle que celle de V .
Une représentation de G sur K qui est de la forme V_K pour une représentation V de G sur k est dite *réalisable sur k* .

EXERCICE 5 — UN MODULE NON SEMI-SIMPLE. Soient G un groupe fini, p un nombre premier et $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Montrer que la droite de $k[G]$ engendrée par $\sum_{g \in G} g$ est un sous- G -module de $k[G]$ qui n'admet pas de supplémentaire.
- En déduire que $k[G]$ n'est pas un G -module semi-simple.

EXERCICE 6 — CENTRE ET LEMME DE SCHUR. Soient G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur un corps algébriquement clos.

- Montrer que tout élément du centre de G agit sur V comme une homothétie.
- En déduire que si le centre de G n'est pas cyclique, la représentation de V n'est pas fidèle.

Exercices fondamentaux de la semaine 2

EXERCICE 7 — GROUPES D'ORDRE pq ET p^3 .

- Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. On considère G un groupe d'ordre pq . Montrer que $D(G)$ est l'unique q -Sylow de G . Déterminer alors le groupe des caractères linéaires de G à valeurs dans \mathbb{C}^* et le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur \mathbb{C} .
- Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. Montrer que $D(G) = Z(G)$ est d'ordre p . Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur \mathbb{C} .

EXERCICE 8 — IRREDUCTIBILITÉ. Soient G un groupe fini, k un corps de caractéristique nulle et χ un caractère de G sur k .

- Montrer que $\langle \chi, \chi \rangle_G$ est une somme de carrés d'entiers.
- En déduire que si $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$, alors χ est irréductible.
- On suppose k algébriquement clos. Montrer que si χ est irréductible, alors $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$.

EXERCICE 9 — TABLES DE CARACTÈRES.

- Déterminer la table de caractères de \mathfrak{S}_3 .
- Soit G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur \mathbb{C} et χ un caractère linéaire de G . Montrer que $\chi \otimes V$ est une représentation irréductible de G .
- Déterminer la table de caractères de \mathfrak{S}_4 .
- Déterminer la table de caractères de \mathbb{H}_8 .

EXERCICE 10 — DIMENSIONS DES REPRÉSENTATIONS IRREDUCTIBLES. Soit G un groupe fini. Le but de cet exercice est d'établir que les dimensions des représentations irréductibles sur \mathbb{C} divise l'ordre de $G/Z(G)$.

- Construire sur $V^{\otimes m}$ une structure de G^m -module. Montrer que la représentation associée est irréductible.
- Montrer que si $g \in Z(G)$, alors $\rho_V(g)$ est une homothétie. On notera $\lambda(g)$ son rapport.
- On note H le sous-groupe de G^m formé des éléments (g_1, \dots, g_m) avec $g_i \in Z(G)$ et $g_1 g_2 \cdots g_m = 1$. Montrer que H agit trivialement sur $V^{\otimes m}$. En déduire que $V^{\otimes m}$ fournit en fait une représentation de G^m/H irréductible.
- En déduire que $\dim(V) \mid \#G/Z(G)$.

Exercices complémentaires de la semaine 2

EXERCICE 11. Soit G un groupe.

- Calculer $\text{End}_G(k[G])$.
- Montrer que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est semi-simple et en déterminer les composantes isotypiques.
- En déduire que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est isomorphe, en tant que \mathbb{C} -algèbre, à $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

EXERCICE 12 — GROUPE DIÉDRAL. On pose $G = D_4$.

- Déterminer $D(G)$ et G^{ab} .
- Montrer que les représentations irréductibles de G sur \mathbb{C} sont de dimension inférieure ou égale à 2.
- Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur \mathbb{C} . Déterminer une réalisation matricielle de chacune d'entre elles.