TD 06 : Orientation, sous-variétés à bord, théorie du degré, théorie de Morse I et champs de vecteurs I

► ***Cette feuille de TD06 nous occupera deux semaines.***

Première semaine

Exercices fondamentaux

1. **Un critère d'orientabilité et préimages de submersions**

   (a) Soient $n \geqslant 1$ un entier et V une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbf{R}^n$. On suppose qu'il existe une *application de Gauß*, à savoir une application lisse $N : V \to \mathbf{R}^n$ telle que pour tout $x \in V$, $||N(x)|| = 1$ et $N(x) \perp T_x V$. Montrer que V est orientable.

   (b) Soient $n \geqslant 1$ un entier et $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une submersion telle que 0 soit dans l'image de f. Montrer que $f^{-1}(0)$ est une sous-variété orientable de $\mathbf{R}^n$.

2. **Degré et points fixes**

   Montrer que toute application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{S}^n$ dans elle-même de degré différent de $(-1)^{n+1}$ admet un point fixe.

3. **Borsuk-Ulam**

   Le théorème de Borsuk-Ulam est le suivant.

   Théorème 1.
   Soit $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S}_n, \mathbf{R}^n)$. Alors il existe $x \in \mathbf{S}_n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

   Par exemple, pour $n = 2$, ce théorème affirme que l'on peut trouver deux points antipodaux sur la Terre en lesquels la température et la pression sont identiques.

   (a) Démontrer le théorème de Borsuk-Ulam pour $n = 1$.

   On se donne dans la suite une application $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{S}_n, \mathbf{R}^n)$ et supposons que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in \mathbf{S}_n$.

   (b) Construire une application $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_{n-1})$ telle que $g(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in \mathbf{S}_n$.

   Nous allons démontrer par récurrence que le degré d'une application impaire d'une sphère sur elle-même est impair.

   (c) Soit $g : \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_1$ une application impaire. Montrer que $\deg(g)$ est impair.
   (d) Soit $n \geqslant 2$. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_n)$ une application impaire. Montrer que, quitte à composer g avec une rotation, on peut supposer que les pôles Nord et Sud sont des points réguliers de g, et ne sont pas dans $g(\mathbf{S}_{n-1} \times \{0\})$.
   (e) Soit π la projection orthogonale sur le plan $\{x_{n+1} = 0\}$. Montrer que $\deg(g)$ est congru modulo 2 au nombre de préimages de 0 par $\pi \circ g_{|\{x_{n+1} \geq 0\}}$.
   (f) Montrer que $\pi \circ g_{|\{x_{n+1}=0\}}$ est de degré impair. En déduire que $\deg(g)$ est impair.
   (g) Montrer que $g_{|\mathbf{S}_{n-1} \times \{0\}}$ est de degré impair.
   (h) Montrer que $g_{|\mathbf{S}_{n-1} \times \{0\}}$ est homotope à une application constante. Conclure.

Exercices complémentaires

4. **Revêtement d'orientation**

   (a) Soit G un groupe discret agissant par $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes, librement et proprement sur une sous-variété différentielle X de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que l'espace topologique quotient $G \setminus X$ admet une unique structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que la projection canonique $\pi : X \to G \setminus X$ soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local.

   (b) Montrer que toute sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet un revêtement double $\pi : \tilde{M} \to M$ qui est orientable. Si M est connexe non orientable, montrer que ce revêtement est connexe et unique à isomorphisme de revêtements près et qu'il existe une action libre de $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur $\tilde{M}$ telle que la variété quotient $G \setminus \tilde{M}$ soit $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à M.

5. **Nombre d'enlacement**

   Soient M et N deux sous-variétés compactes, connexes, orientées (à bord vide) de $\mathbf{R}^{k+1}$ avec $\dim(M) = m$, $\dim(N) = n$ et $m + n = k$. On suppose de plus que $M \cap N = \varnothing$. Le nombre d'enlacement, noté Enl(M, N) est alors défini comme le degré de l'application

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & \mathbf{S}_k \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x-y}{||x-y||}. \end{array}$$

(a) Montrer que Enl$(M, N) = (-1)^{(m-1)(n-1)}Enl(N, M)$.

(b) Préciser la dépendance de Enl(N, M) par rapport au choix des orientations de M et de N.

(c) Montrer que s'il existe une sous-variété W de $\mathbf{R}^{k+1}$ telle que M soit le bord de W, et telle que $W \cap N = \varnothing$, alors Enl$(N, M) = 0$.

(d) Montrer que s'il existe un hyperplan affine séparant M de N, alors Enl$(N, M) = 0$.

(e) On se place plus spécifiquement ici dans le cas $k = 2$ et $m = n = 1$. Soient f et g deux plongements de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{S}_1$ dans $\mathbf{R}^3$ dont on suppose que leurs images sont disjointes. On appelle un tel couple (ou par abus le couple d'images) un entrelac. On rappelle que π_X est la projection orthogonale parallèlement à la droite $\mathbf{R}X$. On montre comme dans l'exercice complémentaire 1 du TD 5 qu'il existe un ouvert dense $U \subset \mathbf{S}_2$ tel que, pour tout $X \in U$, les courbes $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ soient des immersions transverses, et que si $z = \pi_X \circ f(x) = \pi_X \circ g(y)$, alors $(\pi_X \circ f)^{-1}(\{z\})$ et $(\pi_X \circ g)^{-1}(\{z\})$ soient des singletons.

On choisit un vecteur X vérifiant les propriétés ci-dessus. On dessine $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$, en marquant à chaque croisement quelle courbe passe au-dessus de l'autre. On obtient des diagrammes comme celui qui suit :

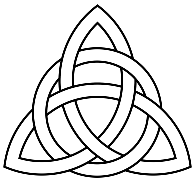

FIGURE 1 – Un entrelac celtique.

Comment peut-on lire le degré de φ sur un tel diagramme ?

(f) On dit que deux entrelacs (f_0, g_0) et (f_1, g_1) sont isotopes s'il existe deux homotopies $f : \mathbf{S}_1 \times [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ et $g : \mathbf{S}_1 \times [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ respectivement entre f_0 et f_1 et entre g_0 et g_1 telles que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(\cdot, t)$ et $g(\cdot, t)$ soient des plongements $\mathcal{C}^\infty$ d'images disjointes. Montrer que

$$\mathrm{Enl}(f_0(\mathbf{S}_1), g_0(\mathbf{S}_1)) = \mathrm{Enl}(f_1(\mathbf{S}_1), g_1(\mathbf{S}_1)).$$

(g) En déduire que l'entrelac dont le diagramme est donné ci-dessus n'est pas isotope, dans $\mathbf{R}^3$, à (C_1, C_2), où $C_1 = \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ et $C_2 = \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\}$.

(h) De même, montrer que $\{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\} \cup \{(x-1)^2 + z^2 = 1,\ y = 0\}$ n'est pas isotope, dans $\mathbf{R}^3$, à (C_1, C_2).

Seconde semaine

Exercices fondamentaux

1. **Exemples de fonctions de Morse**

   Soit $m \geqslant 1$ un entier. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f est une fonction de Morse, trouver ses points critiques et leurs indices.

   (a) Pour $R > 1$,
   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbf{S}_1)^m & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_m}) & \longmapsto & (R + \cos(\theta_1)) \times \cdots \times (R + \cos(\theta_m)). \end{array} \right.$$

   (b)
   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{S}_m & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_{m+1}) & \longmapsto & x_{m+1}. \end{array} \right.$$

   (c) Pour $a_1 < \cdots < a_{m+1}$,
   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{P}_m(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ [x_1 : \cdots : x_{m+1}] & \longmapsto & \dfrac{a_1 x_1^2 + \cdots + a_{m+1} x_{m+1}^2}{x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2}. \end{array} \right.$$

2. **Champs de vecteurs**

   (a) Définir un champ de vecteurs continu sur $\mathbf{T}^2$, vue comme surface plongée dans $\mathbf{R}^3$ par $(\theta, \varphi) \mapsto ((2 + \cos(\varphi)) \cos(\theta), (2 + \cos(\varphi)) \sin(\theta), \sin(\varphi))$, qui ne s'annule pas.

   Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ avec $n \geqslant 2$ et X un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Soit x un zéro isolé de X. On définit *l'indice* de X en x comme le degré de l'application
   $$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{S}_{n-1} \\ v & \longmapsto & \dfrac{X(x + \varepsilon v)}{||X(x + \varepsilon v)||} \end{array}$$
   pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

   Soient M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, Y un champ de vecteurs sur M et $f : U \to M$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local avec U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On définit alors le champ de vecteurs *tiré en arrière* de Y sur U par $x \in U \mapsto (T_x f)^{-1}(Y(f(x))) \in \mathbf{R}^n$. On note ce champ de vecteurs f^*Y.

   (b) Justifier que la définition de l'indice d'un champ de vecteurs sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ ne dépend pas du choix de ε.

   (c) Soient M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, X un champ de vecteurs sur M et $x \in M$ un zéro isolé de X. On définit l'indice en $\varphi(x)$ de X en x comme l'indice du champ de vecteurs sur $\varphi(U)$ donné par $(\varphi^{-1})^* X_{|_U}$ si (U, φ) est une carte locale de M en x. Montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la carte.

   (d) Étant donnés les champs de vecteurs suivants sur $\mathbf{S}_2$, dessiner leurs courbes intégrales, trouver les points où les champs s'annulent, et calculer leur indice en ces points :
   $$X(x,y,z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Y(x,y,z) := \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 - 1 \end{pmatrix}; \quad Z(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 - z - x^2 \\ -xy \\ x(1-z) \end{pmatrix}.$$

   (e) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Dessiner les courbes intégrales du champs de vecteur $\nabla(\mathrm{Re}(z^n))$ sur $\mathbf{C}$. Quel en est l'indice en 0 ?

3. **Recollement de boules**

   Soit $m \geqslant 1$ un entier.

   (a) Soit $\varphi : \mathbf{S}_m \to \mathbf{S}_m$ un homéomorphisme. Montrer que $\mathbf{B}_{m+1} \bigcup_\varphi \mathbf{B}_{m+1}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}_{m+1}$.

   (b) Soit M une variété compacte de dimension m telle qu'il existe une fonction de Morse $f : M \to \mathbf{R}$ avec exactement deux points critiques. Montrer que M est homéomorphe à $\mathbf{S}_m$. Retrouver que $\mathrm{SU}(2)$ est homéomorphe à $\mathbf{S}_3$.

Exercices complémentaires

4. CROCHET DE LIE

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^d$. Soient X et Y deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On note $\varphi_{X,t}$ le flot associé au temps t, là où il est défini. Pour $x \in U$, on note :

$$g_{X,Y}(t) := \varphi_{X,t} \circ \varphi_{Y,t} \circ \varphi_{X,-t} \circ \varphi_{Y,-t}(x),$$
$$[X,Y](x) := \frac{g''_{X,Y}(0)}{2}.$$

(a) Faire un développement limité à l'ordre 2 de $t \mapsto \varphi_{X,t}(y)$, pour $y \in U$. Calculer $g''_{X,Y}(0)$.

(b) Montrer que $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ est bilinéaire et antisymétrique.

5. UNE FONCTION DE MORSE SUR UN PRODUIT DE VARIÉTÉS

Soient M et N deux variétés compactes ainsi que $f : M \to \mathbf{R}$ et $g : N \to \mathbf{R}$ deux fonctions de Morse $\mathcal{C}^\infty$. Pour $a, b > 0$, on définit

$$F_{a,b} : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (m,n) & \longmapsto & (a+f(m))(b+g(n)). \end{cases}$$

Montrer que pour a et b suffisamment grands, la fonction $F_{a,b}$ est de Morse et dans ce cas, trouver ses points critiques et leurs indices (en fonction des mêmes données pour f et g).

6. APPLICATION DE GAUSS : SUITE

Soit $n \geqslant 1$. On munit $\mathbf{R}^{n+1}$ du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $||\cdot||$. Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+1}$ de dimension n compacte, connexe et orientée. On note $NM = \left\{(x,v) \in M \times \mathbf{R}^{n+1} \ : \ \forall h \in T_xM, \ \langle h, v\rangle = 0\right\}$ le fibré normal de M. Pour tout $x \in M$, il existe un unique $\hat{x} \in \mathbf{S}_n$ orthogonal à T_xM tel que si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base directe de T_xM, alors $(v_1, \ldots, v_n, \hat{x})$ est une base directe de $\mathbf{R}^{n+1}$. On pose alors l'application $\mathcal{C}^\infty$

$$\mathcal{G}_M : \begin{cases} M & \longrightarrow & \mathbf{S}_n \\ x & \longmapsto & \hat{x}. \end{cases}$$

(a) Montrer que le fibré normal NM est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont on précisera la dimension.

(b) Pour $v \in \mathbf{S}_n$ et $x \in M$, on note $X_v(x)$ la projection orthogonale de v sur T_xM. Montrer que X_v est un champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur M.

(c) Montrer qu'il existe $\Omega \subseteq \mathbf{S}_n$ de mesure pleine tel que pour tout $v \in \Omega$, la fonction $\varphi_v : x \in M \mapsto ||x - v||^2$ est de Morse. En déduire un résultat similaire pour $x \in M \mapsto \langle x, v \rangle$.
Indication : On pourra montrer que x est un point critique de φ_v si et seulement si (x,v) est un point critique de l'application $e : (x,v) \in NM \mapsto x + v$.

(d) En déduire que pour $v \in \Omega$ un ensemble de mesure pleine, les zéros de X_v sont isolés.

(e) On note i l'application antipodale. Exprimer le degré de $i \circ \mathcal{G}_M$ en fonction de celui de $\mathcal{G}_M$ et en déduire que si n est pair alors

$$\mathsf{deg}(\mathcal{G}_M) = \frac{1}{2} \sum_{X_v(x)=0} \mathsf{Ind}(X_v, x)$$

pour tout $v \in \Omega$.