ANALYSE DE FOURIER ET GÉOMÉTRIE : DM 2

EXERCICE 1 — SÉRIES NUMÉRIQUES.

1. Établir que pour tout $x \in [0,1]$, on a $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{2}$. Établir alors la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{n!}$? Est-ce que la réponse dépend de la valeur de x ?

SOLUTION — SUR 3 POINTS.

1. (**sur 1,5 points**) L'inégalité à démontrer se réécrit

$$\forall x \in [0,1], \quad \ln(1+x) - \frac{x}{2} \geqslant 0.$$

Cela incite à poser $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{2}$ sur $[0,1]$. La fonction g est clairement dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1], \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} = \frac{2-(1+x)}{2(1+x)} = \frac{1-x}{2(1+x)}.$$

Or, on constate que si $x \in [0,1]$, $1+x > 0$ et $1-x \geqslant 0$ de sorte que pour tout $x \in [0,1]$, $g'(x) \geqslant 0$. Ainsi, g est croissante et pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$. On a donc bien

$$\forall x \in [0,1], \quad \ln(1+x) - \frac{x}{2} \geqslant 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\forall x \in [0,1], \quad \ln(1+x) \geqslant \frac{x}{2}}.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} \in [0,1]$ donc l'inégalité précédente[1] fournit

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{2n}.$$

D'après le cours, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 1$ donc divergente. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n}$ est une série à termes positifs divergente[2]. Ainsi, la Proposition 2.5 du polycopié garantit que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ diverge}}$.

2. (**sur 1,5 points**) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Le terme général de la série étant de nature multiplicative, étudions la convergence absolue de la série grâce au critère de d'Alembert. Étudier la convergence absolue revient à étudier la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x^{2n}}{n!}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x|^{2n}}{n!}.$$

On peut donc lui appliquer le critère de d'Alembert. Pour ce faire, calculons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\dfrac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\dfrac{|x|^{2n}}{n!}} = \frac{|x|^{2(n+1)}}{|x|^{2n}} \times \frac{n!}{(n+1)!}.$$

1. Prendre $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$.
2. Par la Proposition 2.2 du polycopié.

Or, $|x|^{2(n+1)} = |x|^{2n+2}$ de sorte que $\dfrac{|x|^{2(n+1)}}{|x|^{2n}} = |x|^2$ et $(n+1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \times (n+1) = n! \times (n+1)$ de sorte que $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\dfrac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\dfrac{|x|^{2n}}{n!}} = \frac{|x|^2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

car x est fixé. Le critère de d'Alembert fournit alors la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\dfrac{x^{2n}}{n!}\right|$ et ainsi on sait d'après le cours que la série $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^{2n}}{n!} \text{ converge absolument et donc converge quelle que soit la valeur de } x \in \mathbb{R}}$.

Exercice 2 — Séries de Fourier. Soit f la fonction 2π-périodique paire définie par

$$\forall t \in [0,\pi], \quad f(t) = 1 - \frac{t^2}{\pi^2}.$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue ? Continue par morceaux ? C^1 par morceaux ? Donner le cas échéant les points en lesquels f est continue et ceux en lesquels elle admet une discontinuité.
2. Justifier que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $n \geqslant 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est paire et en déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

   En déduire que $a_0(f) = \frac{2}{3}$ et que

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n(f) = -\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}.$$

4. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

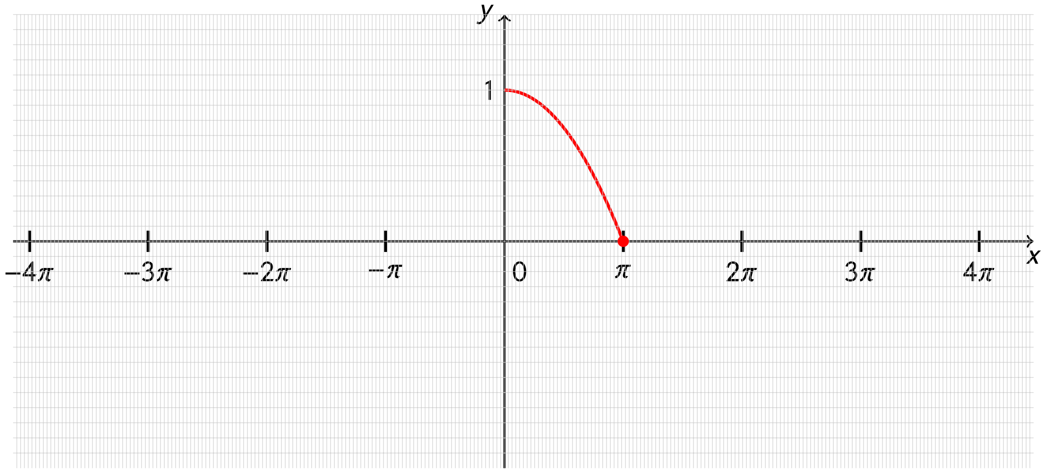
$$f(t) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos(nt)}{n^2}.$$

5. Retrouver la valeur bien connue de la somme et la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$.
6. Montrer la convergence et donner la valeur de la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.
7. Étudier, en utilisant l'égalité de Parseval, la convergence et la valeur de la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^4}$.

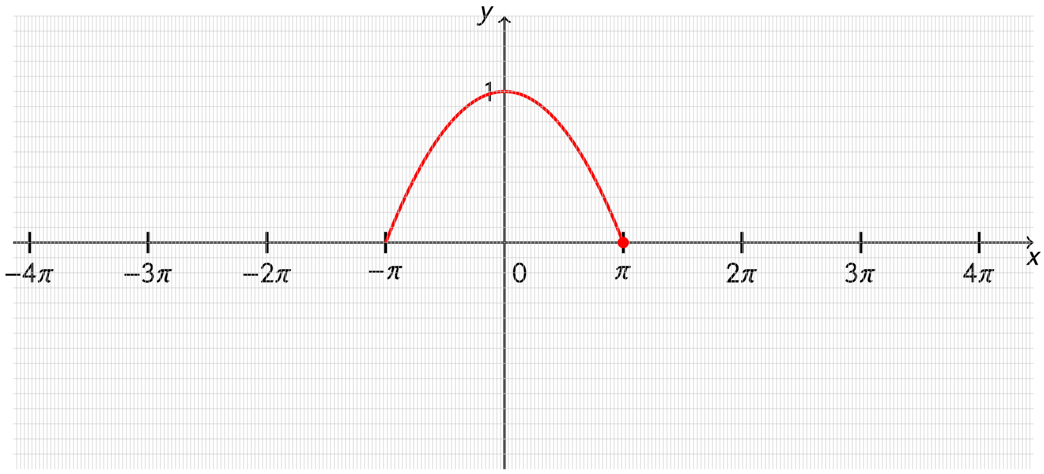
Solution — Sur 10 points.

1. (**sur 1 point**) On commence par tracer le graphe sur $[0,\pi]$, intervalle sur lequel on a une formule explicite pour la fonction f, à savoir une portion de parabole[3].

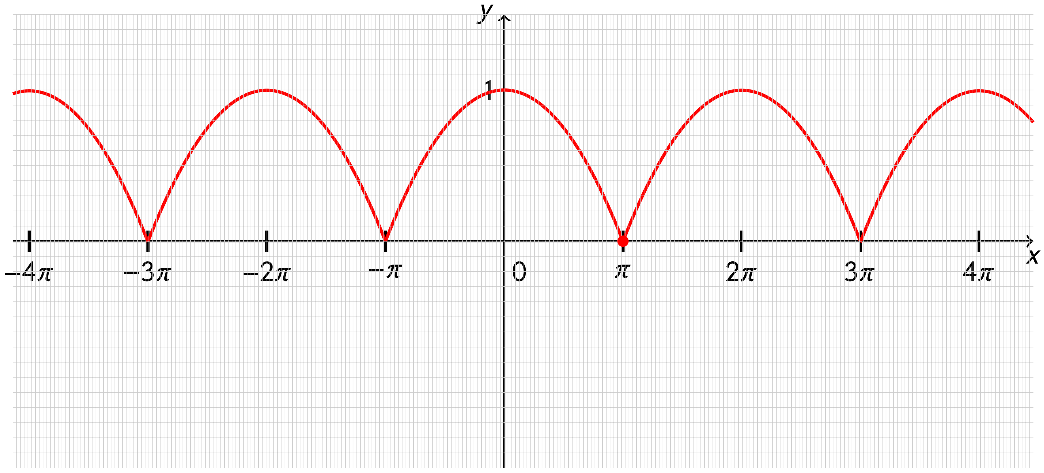
3. Je rappelle que le graphe de $t \mapsto at^2 + bt + c$ est une parabole qu'il faut savoir tracer !



On en déduit alors le graphe sur $[-\pi, 0]$ en utilisant le fait que l'énoncé spécifie que la fonction f est paire. Il suffit alors de tracer le symétrique de la portion de graphe par rapport à l'axe des ordonnées.



Finalement, on a obtenue le tracé sur $[-\pi, \pi]$, qui est un intervalle de longueur la période (à savoir 2π) et donc on en déduit le graphe de f sur tout $\mathbb{R}$ en effectuant des translations du graphe ci-dessus vers la gauche et vers la droite de longueur tous les multiples entiers de la période[4]. Cela fournit le graphe suivant.



On voit que pour tracer la portion de courbe ci-dessus, on ne "lève pas le crayon" et ainsi on peut immédiatement en déduire que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$ De même, on voit que f est dérivable partout sauf en les multiples impairs

4. Ici égale à 2π et donc on donc on effectuera des translations de 2π, 4π, etc... vers la gauche et vers la droite.

deπ, à savoir en les $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ où elle admet un[5] "pic" avec une dérivée à droite et à gauche distinctes de sorte que l'on peut en conclure que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux.}}$

2. (**sur 0,5 point**) Puisque la fonction est paire, on sait par le cours que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ b_n(f) = 0}$.
3. (**sur 2,5 points**) Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que f est paire donc $f(-t) = f(t)$ et ainsi

$$f(-t)\cos(-nt) = f(t)\cos(nt)$$

par parité de la fonction cosinus et $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto f(t)\cos(nt) \text{ est paire.}}$ De même, $|f(-t)|^2 = |f(t)|^2$ donc on en conclut de même que $\boxed{t \mapsto |f(t)|^2 \text{ est également paire.}}$
Par ailleurs, ces deux fonctions sont 2π-périodiques (car f et $t \mapsto \cos(nt)$ le sont) si bien que d'après le cours

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t$$

car l'intégrale d'une fonction 2π-périodique sur un intervalle de longueur 2π ne dépend pas de l'intervalle. Mais, comme $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est paire, il vient d'après le cours que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{si bien que} \quad \boxed{\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.}$$

De même, comme $t \mapsto |f(t)|^2$ est paire, il s'ensuit du cours que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \boxed{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t.}$$

On en déduit que

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$$

par 2π-périodicité et ainsi en utilisant ce qui précède avec $n = 0$, il vient que

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right)\mathrm{d}t$$

car sur $[0, \pi]$, $f(t) = 1 - \frac{t^2}{\pi^2}$. Il ne reste alors plus qu'à prendre une primitive

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\left[t - \frac{t^3}{3\pi^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\pi} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}.$$

On a donc bien $\boxed{a_0(f) = \frac{2}{3}}$. Soit à présent $n \geqslant 1$. On a par définition et en utilisant la 2π-périodicité et le début de la question que

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On a affaire à un polynôme fois un cosinus et on effectue alors une intégration par parties avec[6]

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = 1 - \frac{t^2}{\pi^2} \\ v'(t) = \cos(nt) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u'(t) = -2\frac{t}{\pi^2} \\ v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \end{array}\right.$$

5. Et on en a un nombre fini sur la portion de courbe tracée.
6. Car $n > 0$.

de sorte que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(1-\frac{t^2}{\pi^2}\right)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \left[\left(1-\frac{t^2}{\pi^2}\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n}\times -2\frac{t}{\pi^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{n\pi^2}\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

car $1-\frac{\pi^2}{\pi^2}=0$ et $\sin(0)=0$ et par linéarité de l'intégrale. On effectue alors une nouvelle intégration par parties avec

$$\left\{\begin{array}{l} u(t)=t \\ v'(t)=\sin(nt)\end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} u'(t)=1 \\ v(t)=-\frac{\cos(nt)}{n}\end{array}\right.$$

pour obtenir que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t &= \left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos(nt)}{n}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi\cos(n\pi)}{n}+\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = -\frac{\pi(-1)^n}{n}\end{aligned}$$

car $\cos(\pi n)=(-1)^n$ et $\sin(n\pi)=0$ pour tout entier n. Il s'ensuit que

$$\int_0^\pi \left(1-\frac{t^2}{\pi^2}\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = -\frac{2(-1)^n}{n^2\pi}$$

puis

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\quad a_n(f)=-\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}}.$$

4. (**sur 1 point**) La version continue du théorème de Dirichlet assure que pour tout $t\in\mathbf{R}$, on a

$$f(t)=a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt)\right]$$

avec convergence de la série en jeu. Les questions **2.** et **3.** fournissent alors

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{n^2}}.$$

5. (**sur 1,5 points**) On peut donc choisir $t=\pi$ dans la question précédente de façon à obtenir que $\cos(nt)=(-1)^n$ et $(-1)^n\cos(nt)=(-1)^n\times(-1)^n=1$ pour tout $n\geqslant 1$. Ainsi

$$f(\pi)=\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

avec convergence de la série[7]. On a alors $f(\pi)=0$ d'après la définition de f sur $[0,\pi]$ et car $\pi\in[0,\pi]$. On a donc

$$0=\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\quad\text{soit}\quad\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2}{3}$$

et finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}.$$

7. Ce que l'on savait par ailleurs en tant que série de Riemann avec $\alpha=2>1$.

6. (**sur 1,5 points**) On peut procéder de même en choisissant $t = 0$ dans la question **4.** de façon à obtenir que $\cos(nt) = \cos(0) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi

$$f(0) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

avec convergence de la série[8]. On a alors $f(0) = 1$ d'après la définition de f sur $[0,\pi]$ et car $0 \in [0,\pi]$. On a donc

$$1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{soit} \quad \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

et finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}.$$

7. (**sur 2 points**) La fonction f étant continue par morceaux, on peut appliquer l'égalité de Parseval qui fournit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] \qquad (*)$$

avec convergence de la série. Les calculs des questions **2.** et **3.**, on a immédiatement que[9]

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] = \frac{4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4\pi^4} = \frac{4}{9} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Par ailleurs, par **3.** et 2π-périodicité, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right)^2\mathrm{d}t.$$

On a alors plus qu'à développer et primitiver pour obtenir que

$$\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right)^2\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2t^2}{\pi^2} + \frac{t^4}{\pi^4}\right)\mathrm{d}t = \left[t - \frac{2t^3}{3\pi^2} + \frac{t^5}{5\pi^4}\right]_0^{\pi} = \pi - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{5} = \frac{8\pi}{15}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{8}{15}.$$

On tire donc de $(*)$ que

$$\frac{8}{15} = \frac{4}{9} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{8}{15} - \frac{4}{9} = \frac{4}{45}.$$

Finalement, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{4}{45}\times\frac{\pi^4}{8} \quad \text{soit} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}.$$

Exercice 3 — Géométrie. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(2x+2y-z, -2x+y-2z, x-2y-2z). \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est une application linéaire et donner sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer ${}^tMM$ et $\det(M)$. Que pouvez-vous en conclure ?

8. Ce que l'on savait par ailleurs en tant que série de Riemann alternée avec $\alpha = 2 > 0$.
9. Noter que la convergence découle par ailleurs du fait qu'il s'agisse d'une série de Riemann avec $\alpha = 4 > 1$.

3. Déterminer

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Justifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel, le décrire géométriquement et montrer que $f_1 = (0, 1, 2)$ en est un vecteur directeur. En déduire un vecteur directeur e_1 de norme 1.

4. Déterminer $F^\perp$ et le décrire géométriquement. Montrer que $e_2 = (1, 0, 0)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$ sont deux vecteurs orthogonaux de $F^\perp$ et que (e_1, e_2, e_3) constitue une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

5. Justifier que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

6. On considère la matrice

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Justifier qu'il existe un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

7. En déduire la nature géométrique de f et expliquer comment construire l'image du point $(1, 1, 1)$.
Indication : On donne $\theta \approx -0,84$ radians.

SOLUTION — SUR 9 POINTS.

1. (**sur 1 point**) On revient ici à la définition d'une application linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Il s'agit d'établir que

$$f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) = \lambda f(x, y, z) + f(x', y,', z').$$

On a $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ si bien que par définition de[10] f

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= \frac{1}{3}(2\lambda x + 2x' + 2\lambda y + 2y' - (\lambda z + z'), -2\lambda x - 2x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' - 2\lambda y - 2y' - 2\lambda z - 2z'). \end{aligned}$$

On regroupe alors tout ce qui est en facteur de λ d'un côté et tout ce qui n'est pas en facteur de λ de l'autre pour obtenir que

$$\begin{aligned} &f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) \\ &\quad = \lambda \times \frac{1}{3}(2x + 2y - z, -2x + y - 2z, x - 2y - 2z) + \frac{1}{3}(2x' + 2y' - z', -2x' + y' - 2z', x' - 2y' - 2z'). \end{aligned}$$

On reconnaît alors

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x + 2y - z, -2x + y - 2z, x - 2y - 2z)$$

et

$$f(x', y', z') = \frac{1}{3}(2x' + 2y' - z', -2x' + y' - 2z', x' - 2y' - 2z')$$

10. En effet, on a

$$f(X, Y, Z) = \frac{1}{3}(2X + 2Y - Z, -2X + Y - 2Z, X - 2Y - 2Z)$$

avec ici $X = \lambda x + x'$, $Y = \lambda y + y'$ et $Z = \lambda z + z'$.

si bien que
$$f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z'))=\lambda f(x,y,z)+f(x',y',z')$$
et $\boxed{f \text{ est bien une application linéaire!}}$

Pour écrire sa matrice dans la base canonique (b_1,b_2,b_3) de $\mathbb{R}^3$ où je rappelle que $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (0,1,0)$ et $b_3 = (0,0,1)$, il suffit de calculer
$$f(b_1)=f(1,0,0)=\frac{1}{3}(2,-2,1)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$
ainsi que
$$f(b_2)=f(0,1,0)=\frac{1}{3}(2,1,-2)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$
et
$$f(b_3)=f(0,0,1)=\frac{1}{3}(-1,-2,-2)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right).$$
La matrice M de f dans la base canonique est alors la matrice dont la première colonne est le vecteur $f(b_1)$, la seconde le vecteur $f(b_2)$ et la troisième le vecteur $f(b_3)$. On a donc
$$\boxed{M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}}.$$

2. (**sur 1 point**) Ici, je vous conseille d'utiliser la seconde forme de la matrice ci-dessus, sans le facteur $\frac{1}{3}$. En effet, si vous utilisez la première forme, il faut être prudent car notamment
$$\det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\right)\neq\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$
mais
$$\det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3^3}\det\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$
car la matrice est de taille 3 tandis que si vous utilisez la seconde expression, pas de souci, vous pouvez calculer votre déterminant sans vous poser de questions comme d'habitude! De même,
$$\begin{aligned}&{}^t\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\right)\times\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\right)\\&=\frac{1}{3^2}\times{}^t\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$
et il faut ici faire attention au facteur $\frac{1}{3^2}$ qui apparît du fait qu'on a deux fois le facteur $\frac{1}{3}$. Ici de la même façon, si vous utilisez la seconde forme ci-dessus pour M, on fait le calcul comme d'habitude sans réfléchir et sans problème.

On a donc [11]
$${}^tM=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

11. Je rappelle que pour écrire la matrice transposée de M, la première ligne devient la première colonne, la seconde ligne devient la seconde colonne et la troisième ligne devient la troisième colonne.

On a alors [12]

$$ {}^tMM = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3. $$

Ainsi $\boxed{\text{l'application linéaire } f \text{ préserve angles et distances}}$. Par ailleurs,

$$ \det(M) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} + \frac{1}{27} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} = -\frac{27}{27} = -1 $$

par la règle de Sarrus. Ainsi $\boxed{\text{l'application linéaire } f \text{ agit en "retournant" l'espace}}$.

3. (**sur 2 points**) Pour déterminer

$$ F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}, $$

on remarque que $(x, y, z) \in F$ si, et seulement si,

$$ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. $$

Mais on sait grâce au cours que puisque M est la matrice de f dans les bases canoniques,

$$ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2x + 2y - z) \\ \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) \\ \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) \end{pmatrix}. $$

Noter qu'ainsi F est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ envoyés sur leur opposé par f. Ainsi $(x, y, z) \in F$ si, et seulement si,

$$ \begin{cases} \frac{1}{3}(2x + 2y - z) = -x \\ \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) = -y \\ \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y - z = -3x \\ -2x + y - 2z = -3y \\ x - 2y - 2z = -3z \end{cases} $$

après s'être débarrassé des fractions. On a donc affaire à un système linéaire et on dispose des opérations du pivot de Gaußpour le résoudre ! On a donc que $(x, y, z) \in F$ si, et seulement si,

$$ \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases} $$

On effectue alors les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$ pour se débarrasser des z dans les deux dernières lignes de sorte que le système est équivalent à

$$ \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ -12x = 0 \\ 6x = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \end{cases} $$

On a donc que $(x, y, z) \in F$ si, et seulement si, $(x, y, z) = (0, y, 2y) = y(0, 1, 2)$ avec $y \in \mathbb{R}$, autrement dit si, et seulement si, (x, y, z) est colinéaire à $(0, 1, 2)$. On en déduit donc que F est $\boxed{\text{la droite de } \mathbb{R}^3}$ dirigée par le vecteur

12. Faites vraiment le calcul !

$\boxed{f_1 = (0,1,2)}$. Il s 'agit alors d'un sous-espace vectoriel de dimension [13] 1 de $\mathbb{R}^3$ et on sait alors d'après le cours que tout vecteur directeur en est une base, donc f_1 est en particulier une base de F. Pour que cette base soit orthonormée, il faut que $||f_1|| = 1$. Or, on calcule

$$||f_1|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \neq 1.$$

Mais on voit alors que si l'on prend $\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2)}$, alors b_1 est toujours un vecteur directeur de la droite F (puisqu'il est colinéaire à f_1) et par conséquent e_1 est aussi une base de F et on vérifie que [14]

$$||e_1|| = \sqrt{\left(\frac{0}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = \sqrt{1} = 1$$

et $\boxed{e_1 \text{ est ainsi une base orthonormée de } F}$.

4. (**sur 1,5 points**) Je rappelle que par définition $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux à F. Autrement dit, F est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à la droite F dirigée par $f_1 = (0,1,2)$. Pour qu'un vecteur soit orthogonal à cette droite, il faut et il suffit ainsi que ce vecteur soit orthogonal à f_1 si bien que

$$F^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y,z) \perp f_1\right\}.$$

Or, on dispose d'un outil très commode pour détecter l'orthogonalité, à savoir le produit scalaire. En effet, $(x,y,z) \perp f_1$ si, et seulement si, $(x,y,z) \cdot f_1 = 0$. Or, par définition,

$$(x,y,z) \cdot f_1 = (x,y,z) \cdot (0,1,2) = x \times 0 + y \times 1 + z \times 2 = y + 2z$$

si bien que

$$\boxed{F^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y + 2z = 0\right\}}.$$

On reconnaît là le plan d'équation $y + 2z = 0$, en particulier $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Soit alors $e_2 = (1,0,0)$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,-1)$. On a immédiatement que $e_2 \in F$ et de même $e_3 \in F^\perp$ car $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$. Par ailleurs,

$$e_2 \cdot e_3 = (1,0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,-1) = 0 \times 1 + 0 \times \frac{2}{\sqrt{5}} - frac1\sqrt{5} \times 0 = 0$$

si bien que e_2 est orthogonal [15] à e_3.

Il nous reste alors à vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Pour cela il faut vérifier que e_1 est orthogonal à e_2 et e_3, que e_2 et e_3 sont orthogonaux et que tous les vecteurs sont de norme 1. On a déjà vu que $e_2 \perp e_3$ et on calcule

$$e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,-1) = 0 \quad \text{et} \quad e_1.e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2) \cdot (1,0,0) = 0$$

si bien qu'on a bien $b_1 \perp b_2$ et $b_1 \perp b_3$. Noter qu'en fait c'est automatique car e_1 dirige F et que $e_2, e_3 \in F^\perp$. Le dernier point à vérifier est le fait que e_1, e_2 et e_3 sont tous de norme 1. On l'a déjà vu pour e_1, c'est immédiat pour e_2 et on a [16]

$$||e_3|| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = \sqrt{1} = 1$$

si bien que $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est finalement une famille orthonormée de } \mathbb{R}^3}$.

13. Se souvenir qu'"intuitivement", la dimension correspond aux nombres de paramètres à fixer pour connaître complètement un élément de F. ici, il suffit de se fixer la valeur d'**un** seul paramètre, à savoir la valeur de y, pour déterminer un élément de F donc la dimension est 1. Il s'agit aussi du nombre de directions indépendantes que vous avez sur F et sur une droite on a bien une unique direction, à savoir le long de la droite !
14. On a choisi e_1 pour que cela fonctionne !
15. En réalité, les vecteurs e_2 et e_3 forment une base orthonormée du plan $F^\perp$.
16. Attention ici au fait que le signe $-$ est dans carré et disparaît donc !

5. (**sur 2 points**) Pour établir que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

il suffit par définition de montrer que[17] que $f(e_1) = -1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3$, que $f(e_2) = 0 \times e_1 + \frac{2}{3} \times e_2 - \frac{\sqrt{5}}{3} \times e_3$ et que $f(e_3) = 0 \times e_1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \times e_2 + \frac{2}{3} \times e_3$. On a alors bien que

$$f(e_1) = -e_1 = -1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3$$

soit par le calcul soit en utilisant le fait que $e_1 \in F$ et que F est l'ensemble des vecteurs envoyés sur leur opposé par f si bien que nécéssairement $f(e_1) = -e_1$! On a alors

$$f(e_2) = f\,(1, 0, 0) = \frac{1}{3}\,(2, -2, 1))$$

et d'autre part

$$0 \times e_1 + \frac{2}{3} \times e_2 + \frac{\sqrt{5}}{3} \times e_3 = \frac{1}{3}((2, 0, 0) - (0, 2, -1)) = \frac{1}{3}(2, -2, 1) = f(e_2).$$

De même en utilisant la définition de f, il vient

$$f(e_3) = f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1))\right) = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,(5, 4, -2)$$

tandis que

$$0 \times e_1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \times e_2 - \frac{2}{3} \times e_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,((5, 0, 0) + (0, 4, -2)) = \frac{1}{3\sqrt{5}}(5, 4, -2) = f(e_3).$$

Finalement, on a bien vérifié que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}.$$

17. Je rappelle que si (b_1, b_2, b_3) est une base différente de la base canonique, et que

$$f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 + m_{31}b_3, \quad f(b_2) = m_{12}b_1 + m_{22}b_2 + m_{32}b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = m_{13}b_1 + m_{23}b_2 + m_{33}b_3$$

alors la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est donnée par

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, si l'on vous demande sans rien d'autre d'écrire la matrice de f dans une base (b_1, b_2, b_3), la méthode est de calculer $f(b_1)$ et d'essayer de trouver m_{11}, m_{21}, m_{31} tels que $f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 + m_{31}b_3$. En remplaçant b_1, b_2, b_3 par leurs expressions dans la base canonique, cela revient à résoudre un système linéaire en m_{11}, m_{21}, m_{31} qui admettra une unique solution. On fait alors de même avec $f(b_2)$ et $f(b_3)$. C'est donc relativement long et pénible et on ne vous le demandera donc sûrement pas mais si vous souhaitez approfondir cela, un exemple est traité en détail dans le polycopié de cours. Si en revanche on vous demande comme c'est le cas ici de vérifier comme ici que la matrice en question est

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

alors cela revient à la simple vérification que les relations

$$f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 + m_{31}b_3, \quad f(b_2) = m_{12}b_1 + m_{22}b_2 + m_{32}b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = m_{13}b_1 + m_{23}b_2 + m_{33}b_3$$

sont vraies, ce qui est beaucoup plus commode !

6. (**sur 1,5 points**) On considère la matrice

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que ${}^t\tilde{M}\tilde{M} = I_2$ et $\det(\tilde{M}) = 1$ si bien d'après le cours, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\boxed{\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}.$$

Ainsi, la matrice $\tilde{M}$ est celle d'une rotation d'angle θ et de centre o dans le plan.

7. (**sur 1 point**) D'après le cours, f est donc la composée de la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2)$ avec une rotation d'angle $\theta \approx -0,84$ radians autour de la droite dirigée par $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2)$. On a alors que $f(1,1,1) = \frac{1}{3}(3,-3,-3) = (1,-1,-1)$ en utilisant la définition de f. On peut aussi construire $f(1,1,1)$ géométriquement en traçant son symétrique par rapport au plan $F^{\perp}$ puis en traçant le plan orthogonal à la droite F passant par ce symétrique et en effectuant dans ce plan une rotation d'angle θ. Voir ici pour une illustration !