Feuille TD 1 – Exercices Algèbre – Groupes – Corrigé partiel

1 Généralités

Exercice 1 — Morphismes ou non ?.
Soit G un groupe. Les applications suivantes de G dans G sont-elles toujours des morphismes ?

1. $f_a : x \mapsto ax$, avec $a \in G$ fixé ;
2. $f_n : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$;
3. $g : x \mapsto x^{-1}$.

Solution.

1. On remarque que si $a \neq e$, alors $f_a(e) = a \neq e$ et on a donc pas un morphisme de groupes. En revanche, si $a = e$, on a l'identité qui est bien un morphisme de groupes.
   Une autre façon de le voir est de constater qu'en général, pour $x, y \in G$, $a(xy) \neq (ax)(ay)$ (sauf si $a = e$).
2. Ici on a bien $f_n(e) = e$ mais de on n'a pas un morphisme en général si G n'est pas abélien car $(xy)^n \neq x^n y^n$.
3. Idem, non en général si G n'est pas abélien car $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \neq x^{-1}y^{-1}$.

Exercice 2 — Groupes, intersections et réunions.

1. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes d'un groupe G est aussi un sous-groupe.
2. Soient A et B deux sous-groupes d'un même groupe G. Montrer que $A \cup B$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.
3. Que se passe-t-il si l'on considère la réunion d'au moins trois sous-groupes ?

Solution.

1. Soient $(G_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G. On a clairement que $e \in \bigcap_{i\in I} G_i$. Par ailleurs, pour tous $x, y \in \bigcap_{i\in I} G_i$, on a que pour tout $i \in I$, $x, y \in G_i$ qui est un sous-groupe de G. Par conséquent, pour tout $i \in I$, $x, y \in G_i$, $xy^{-1} \in G_i$ et $xy^{-1} \in \bigcap_{i\in I} G_i$ et on a gagné !
2. C'est clair si $B \subseteq A$ ou $A \subseteq B$. Réciproquement, supposons que $A \cup B$ soit un sous-groupe de G. Supposons par l'absurde que $B \not\subseteq A$ ou $A \not\subseteq B$. On dispose alors de $x \in A$, $x \notin B$ et de $y \in B$, $y \notin A$. Mais $x, y \in A \cup B$ qui est un groupe donc $xy \in A \cup B$. On a alors soit $xy \in A$ soit $xy \in B$ par définition. Si $xy \in A$, alors
$$y = x^{-1}(xy) \in A \quad \text{car} \quad x, xy \in A,$$
   ce qui est absurde. De même, si $xy \in B$, alors $x \in B$ et on aboutit à une contradiction. En conclusion, on a bien $B \subseteq A$ ou $A \subseteq B$.
3. Par exemple
$$\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{A}_3 \cup \langle(12)\rangle \cup \langle(13)\rangle \cup \langle(23)\rangle \quad \text{ou} \quad (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 = \langle(\overline{1},\overline{0})\rangle \cup \langle(\overline{0},\overline{1})\rangle \cup \langle(\overline{1},\overline{1})\rangle.$$
   En revanche, dans le cas d'un espace vectoriel E sur un corps k **infini**, on a bien que
$$E \neq F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$$
   pour tous $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels stricts de E. En effet, sinon on peut supposer que $E = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ et que $F_n \not\subseteq F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ (sinon il suffit de se débarrasser de F_n !). On peut alors choisir $x \in F_n \setminus F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ et $y \notin F_n$. On a alors que pour tout $\lambda \in k$, $\lambda x + y \notin F_n$ et pour tout $i \leqslant n-1$, il existe au plus un $\lambda \in k$ tel que $\lambda x + y \in F_i$. En effet, si on dispose de $\lambda \neq \mu$ tels que $\lambda x + y$ et $\mu x + y$ sont dans F_i, alors $(\lambda - \mu)x \in F_i$ ce qui est absurde ! Mais comme $E = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$, il existe au moins un $i \leqslant n-1$ tel que $\lambda x + y \in F_i$, ce qui vient contredire le caractère infini du corps k !

Exercice 3 — Botanique des groupes de petit cardinal. Décrire, à isomorphisme près, tous les groupes de cardinal $\leqslant 7$.

Solution. On a en fait la classification à isomorphisme près des groupes d'ordre $\leqslant 11$.

- Le seul groupe d'ordre 1 est le groupe trivial ;

- Si G est d'ordre p avec p premier alors nécessairement tout élément $g \in G$ distinct de l'identité est d'ordre p et engendre G si bien que[1] $G \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Cela résout les cas $2, 3, 5, 7, 11$;
- Si G est d'ordre 4, on a que $G \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ si G contient un élément d'ordre 4 et sinon $G \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ et G est engendré par toute paire d'éléments d'ordre 2 (qui commutent). En effet, l'ordre d'un élément non trivial de G divise 4 par Lagrange et vaut donc 2 ou 4. Si on a un élément d'ordre 4, alors G est cyclique et $G \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Sinon, tout élément non trivial est d'ordre 2 et on peut faire appel à l'exercice 11 ou raisonner à la main. On doit avoir (puisque G est d'ordre 4) au moins un élément d'ordre 2, que nous pouvons appeler x. Puisque $x^2 = e$, $x^{-1} = x$ et donc on doit nécessairement avoir dans G un autre élément $y \neq x$ d'ordre 2. On a ainsi

$$\{e, x, y, xy\} \subseteq G \quad \text{et donc} \quad G = \{e, x, y, xy\}.$$

  Noter qu'ici on a utilisé que $xy \neq e, x, y$. On en déduit que $yx \in G$ et $yx \neq e, x, y$ donc $yx = xy$ et cela permet d'écrire la table de G. On reconnaît celle de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ si bien que $G \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.
- Si G est d'ordre 6, on a que $G \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ si[2] G contient un élément d'ordre 6 (ou deux éléments d'ordre 2 et 3 respectivement qui commutent) et sinon[3] $G \cong \mathfrak{S}_3$ et G est engendré par un élément τ d'ordre 2 et un élément σ d'ordre 3 tels que $\tau\sigma\tau = \sigma^2$. En effet, l'ordre d'un élément non trivial de G vaut (par Lagrange) 2, 3 ou 6. Si on a un élément d'ordre 6, alors G est cyclique et $G \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$. On peut donc supposer que tout élément non trivial est d'ordre 2 ou 3. On va montrer qu'il existe un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3. En effet, si tous les éléments sont d'ordre 2, il vient qu'alors G est abélien[4] et contient au moins deux éléments d'ordre 2 distincts qui commutent. Le sous-groupe engendré par ces deux éléments est alors isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ donc d'ordre 4, ce qui contredit le théorème de Lagrange. De même, si l'on avait que des éléments d'ordre 3, alors on disposerait d'au moins deux éléments x, y avec $y \neq x, x^2$ d'ordre 3 et

$$\{e, x, x^2, y, y^2, xy\} \subseteq G,$$

  où $xy \neq e, x, x^2, y, y^2$. On a alors que $xy^2 \neq e, x, x^2, y, y^2, xy$ et on aurait alors au moins 7 éléments dans G. On peut donc supposer que l'on dispose d'un élément τ d'ordre 2 et un élément σ d'ordre 3 et alors

$$\{e, \tau, \sigma, \sigma^2, \tau\sigma, \tau\sigma^2\} \subseteq G \quad \text{et donc} \quad G = \{e, \tau, \sigma, \sigma^2, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$$

  et où tous ces éléments sont deux à deux distincts. Alors, $\sigma\tau \in G$ et comme $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, sinon le produit fournit un élément d'ordre[5] 6, on a nécessairement que $\tau\sigma\tau = \sigma^2$. Cela permet de dresser la table de multiplication du groupe G et on reconnaît celle de $\mathfrak{S}_3$ si bien que $G \cong \mathfrak{S}_3$.
- Si G est d'ordre 8, les exercices sur le groupe diédral et les quaternions ainsi le cours sur les produits semi-directs garantira que G est isomorphe soit à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$, soit à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, soit à $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, soit au groupe diédral $\mathbf{D}_4$ soit au groupe des quaternions $\mathbf{H}_8$.
- Si G est d'ordre $9 = 3^2$, le cours garantira que G est abélien et donc le théorème de structure des groupes abéliens de type fini garantit que $G \cong \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ ou $G \cong (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$;
- Si G est d'ordre $10 = 2 \times 5$ avec $2 \mid 5 - 1$, le cours sur le produit semi-direct garantira que G est soit abélien et isomorphe à $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ soit isomorphe à l'unique produit semi-direct non trivial $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ (qui est en fait isomorphe au groupe diédral[6] $\mathbf{D}_5$).

Pour aller plus loin, je vous renvoie aux feuilles de TD des annés précédentes[7] pour le cours d'Algèbre M1 MF, on peut classifier les groupes d'ordre p^2q avec p et q deux nombres premiers distincts ce qui traite le cas de 12 (qui peut également se traiter "à la main"), 13 est premier, 14 et 15 sont alors couverts par le cours sur le produit semi-direct ! On remarquera donc qu'il y a quelque chose qui semble se passer pour les

1. En effet, pour $x \in G \smallsetminus \{e\}$, $G = \{e, x, x^2, \ldots, x^{p-1}\}$. On pose alors l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} & \longrightarrow & G \\ \overline{k} & \longmapsto & x^k. \end{array} \right.$$

On vérifie comme toujours qu'une application définie sur un quotient est bien définie. Soient pour cela $\overline{k} = \overline{k'}$ pour $k, k' \in \mathbf{Z}$. Par définition, on a $k = k' + p\ell$ pour un certain entier ℓ. On a alors

$$x^k = x^{k'+p\ell} = x^{k'} \left(x^p\right)^\ell = x^{k'}$$

puisque $x^p = e$. L'application est donc bien définie et surjective vue la description de G plus haut. Comme $\#G = \#\left(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\right) = p$, on a une bijection. Par ailleurs, il s'agit d'un morphisme de groupes puisque pour tous $\overline{k}, \overline{k'}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (attention ici que la loi de groupe sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est **additive** tandis que celle sur G est **multiplicative**),

$$f\left(\overline{k} + \overline{k'}\right) = f\left(\overline{k+k'}\right) = x^{k+k'} = x^k x^{k'} = f\left(\overline{k}\right) f\left(\overline{k'}\right).$$

On a donc bien un isomorphisme et le résultat !

2. Noter que par théorème chinois, puisque 3 et 2 sont premiers entre eux, $G \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

3. On a aussi que $G \cong \mathfrak{S}_3 \cong \mathbf{D}_3$ le groupe des isométries laissant invariant le triangle équilatéral formé des racines cubiques de l'unité et $\mathfrak{S}_3 \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est le seul produit semi-direct non trivial d'ordre 6.

4. En effet, pour tous $g, h \in G$, on a $(gh)^2 = e$ de sorte que $ghgh = e$ et en multipliant par h à droite il vient $ghg = h$ (car $h^2 = e$) et enfin en multipliant par g à droite on obtient $gh = hg$ (car $g^2 = e$).

5. En effet, $(\sigma\tau)^6 = \sigma^6\tau^6$ car G est abélien si $\sigma\tau = \tau\sigma$. Mais comme $\tau^2 = \sigma^3 = e$, on a $(\tau\sigma)^6 = e$. L'ordre de $\tau\sigma$ (qui est différent de e) vaut donc 2, 3 ou 6 mais $(\tau\sigma)^2 = \tau^2\sigma^2$ (toujours par caractère abélien de G) et donc $(\tau\sigma)^2 = \sigma^2 \neq e$ car $\tau^2 = e$ et σ est d'ordre 3. De même, $(\tau\sigma)^3 = \tau \neq e$ et l'ordre de $\tau\sigma$ est bien 6.

6. Voir l'exercice 5.

7. Disponibles sur la page web de David Harari.

groupes d'ordre 8 ou 12 (on a plus de travail et plus de classes d'isomorphismes). On peut aussi classifier [8] (à isomorphisme près) les groupes de cardinal $\leqslant 15$ on s'arrête à 15 pour une bonne raison, à savoir que le cardinal 16 est plus délicat et qu'on obtient beaucoup de classes d'isomorphismes (précisément 14). En fait, on peut voir que plus l'ordre du groupe possède de facteurs premiers de multiplicité grande, plus cela donne de la marge et donne lieu à de nombreuses classes d'isomorphismes. Pour une taille de cardinal donnée, l'ordre qui va maximiser ces critères est la puissance de 2. On peut par exemple l'illustrer par le fait que parmi tous les groupes d'ordre $\leqslant 2000$ (à isomorphisme près), $99,2\%$ sont d'ordre [9] $2^{10} = 1024$. En fait, on conjecture que presque tous les groupes finis sont des 2-groupes dans le sens où

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\left\{\text{classes d'iso. de 2-groupes } G \text{ de cardinal } \leqslant N\right\}}{\#\left\{\text{classes d'iso. de groupes } G \text{ de cardinal } \leqslant N\right\}} = 1$$

et même

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\left\{\text{classes d'iso. de 2-groupes } G \text{ de cardinal } 2^{\left\lceil \frac{\log(N)}{\log(2)} \right\rceil}\right\}}{\#\left\{\text{classes d'iso. de groupes } G \text{ de cardinal } \leqslant N\right\}} = 1.$$

Exercice 4 — Groupe symétrique. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur n lettres.

1. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_3$? de $\mathfrak{S}_4$? de $\mathfrak{S}_5$? de $\mathfrak{S}_n$?
2. Donner le treillis [10] des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, en précisant à chaque fois lesquels des sous-groupes sont distingués. Répéter l'exercice avec le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
   Soient G un groupe et $K \subseteq H$ deux sous-groupes de G. On suppose que $K \lhd H$ et que $H \lhd G$. A-t-on $K \lhd G$? Démontrer que si K est caractéristique dans H et que H est caractéristique dans G, alors K est caractéristique dans G.
3. Une *partition d'un entier* n est une suite $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$ d'entiers tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Montrer que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont en bijection avec les partitions de n.
4. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$.

Solution. Je vous renvoie pour des rappels sur le groupe symétrique et l'essentiel de ce qu'il faut connaître au premier chapitre du *Cours d'algèbre* de Daniel Perrin, un grand classique de l'agrégatif ou de l'agrégative !

1. Plusieurs façons de faire : décrire tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$: $\mathrm{Id}, (12), (13), (23), (123), (132)$ ou alors en utilisant la décomposition de toute permutation en produit de cycles à supports disjoints dont l'ordre est alors le ppcm des longueurs des cycles [11] ou encore en utilisant le théorème de Lagrange et le fait que $\mathfrak{S}_3$ n'est pas cyclique car non abélien. Bref, on trouve 3 pour chacun des deux 3-cycles. De même, pour $\mathfrak{S}_4$, on trouve 4 atteint pour les six 4-cycles. Pour $\mathfrak{S}_5$, on obtient 6 pour chacun des 20 produits d'une transposition et d'un 3-cycle à supports disjoints. De manière générale, on voit que l'ordre maximal dans $\mathfrak{S}_n$ est donné par

   $$g(n) = \max_{\substack{0<\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_r \\ \lambda_1+\cdots+\lambda_r=n}} \mathrm{ppcm}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r).$$

   On retrouve bien les résultats précédents puisqu'on a les partitions suivantes :

   $$3 = 1{+}1{+}1 = 1{+}2 = 3, \quad 4 = 1{+}1{+}1{+}1 = 2{+}2 = 1{+}3 = 4 \quad \text{et} \quad 5 = 1{+}1{+}1{+}1{+}1 = 1{+}1{+}1{+}2 = 1{+}1{+}3 = 1{+}4 = 2{+}3 = 5.$$

   On obtient par le théorème de Lagrange que $g(n) \mid n!$ et g est croissante. On a par exemple

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
g(n)	3	4	6	6	12	15	20	30	30	60	60

   Landau a démontré [12] en 1909 l'équivalent

   $$\log g(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n\log(n)}.$$

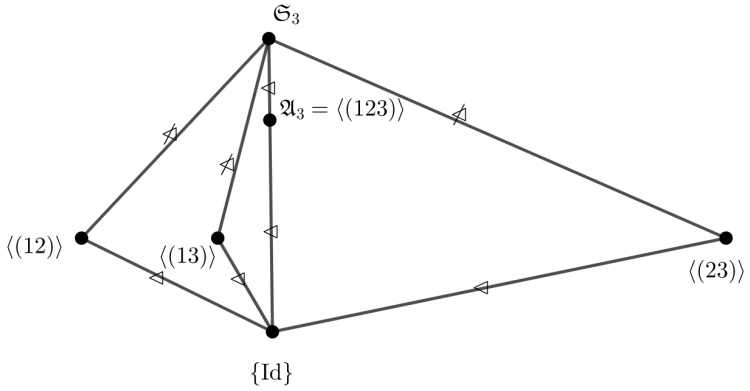
   ▶ **Compléments . –** C'est aussi un exercice intéressant de les dénombrer le nombre de partitions dont la décomposition en cycle à supports disjoints correspond à une partition $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ tel que $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ vaut

   $$\frac{n!}{\prod_{j=1}^{n} a_j(\boldsymbol{\lambda})! j^{a_j(\boldsymbol{\lambda})}}$$

8. Voir à nouveau les feuilles de TD de l'an dernier.
9. Voir Besche, Eick et O'Brien, *The groups of order at most 2000*.
10. C'est-à-dire le graphe non orienté dont les sommets sont les sous-groupes de G et où une arête relie deux sous-groupes H_1 et H_2 si, et seulement si, $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$.
11. Car on vérifie immédiatement qu'un cycle de longueur ℓ est d'ordre ℓ et le fait que les cycles soient à support disjoints entraîne qu'ils commutent.
12. En utilisant des résultats d'arithmétique notamment sur la répartition des nombres premiers. Si l'article vous intéresse (et que vous lisez l'allemand), je peux vous transmettre l'article ! Vous trouverez une version en français ici.

où $a_j(\boldsymbol{\lambda})$ désigne le nombre de λ_k égaux à j. On peut faire pour cela agir G sur lui-même par conjugaison et on montre que le cardinal du stabilisateur de σ est donné par $\prod_{j=1}^{n} a_j(\boldsymbol{\lambda})! j^{a_j(\boldsymbol{\lambda})}$. En effet, pour envoyer σ sur lui-même par conjugaison, on procède cycle par cycle. Le premier cycle de longueur j est envoyé sur un autre cycle de longueur j. On a alors $a_j(\boldsymbol{\lambda})$ choix parmi tous les cycles de longueur j. Ensuite, on a j manières d'envoyer par conjugaison un j-cycle sur un autre j-cycle. Pour le second cycle de longueur j, il reste $a_j(\boldsymbol{\lambda})-1$ choix parmi tous les cycles de longueur j et toujours j manières d'envoyer par conjugaison un j-cycle sur un autre j-cycle. On obtient finalement un facteur $a_j(\boldsymbol{\lambda})! j^{a_j(\boldsymbol{\lambda})}$ et le produit apparaît lorsqu'on parcourt toutes les longueurs de cycles possibles.

2. On obtient facilement le treillis suivant [13]



car les sous-groupes sont d'ordre 1, 2, 3 ou 6 et les groupes d'ordre 2 et 3 sont nécessairement cycliques. Un groupe d'ordre 2 est alors simplement engendré par un élément d'ordre 2, autrement dit ici une transposition et donc de la forme $\langle(ab)\rangle = \{\mathsf{Id}, (ab)\}$ tandis qu'un sous-groupe d'ordre 3 est engendré par un élément d'ordre 3, autrement dit un 3-cycle et est alors donné par $\langle(abc)\rangle = \{\mathsf{Id}, (abc), (acb)\}$ si bien qu'on a un unique sous-groupe d'ordre 3, à savoir

$$\mathfrak{A}_3 = \langle(123)\rangle = \{\mathsf{Id}, (123), (132)\}\,.$$

Par ailleurs, on sait que $\mathfrak{A}_3$ est distingué dans $\mathfrak{S}_3$ et puisque

$$(abc)(ab)(acb) = (bc)$$

si $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$, aucun des sous-groupes d'ordre 2 ne sont distingués [14] dans $\mathfrak{S}_3$.
Passons à $\mathfrak{A}_4$. On sait que

$$\mathfrak{A}_4 = \{\mathsf{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}\,.$$

De plus, $\#\mathfrak{A}_4 = 12$ donc les sous-groupes non triviaux sont d'ordre 6, 4, 3 ou 2. Or, on sait qu'un sous-groupe d'ordre 6 [15] est soit cyclique soit isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. ici la seule option serait $\mathfrak{S}_3$ car on n'a pas d'élément d'ordre 6 mais dans $\mathfrak{S}_3$ aucune paire d'éléments d'ordre 2 ne commutent tandis qu'ici tous les éléments d'ordre 2 commutent

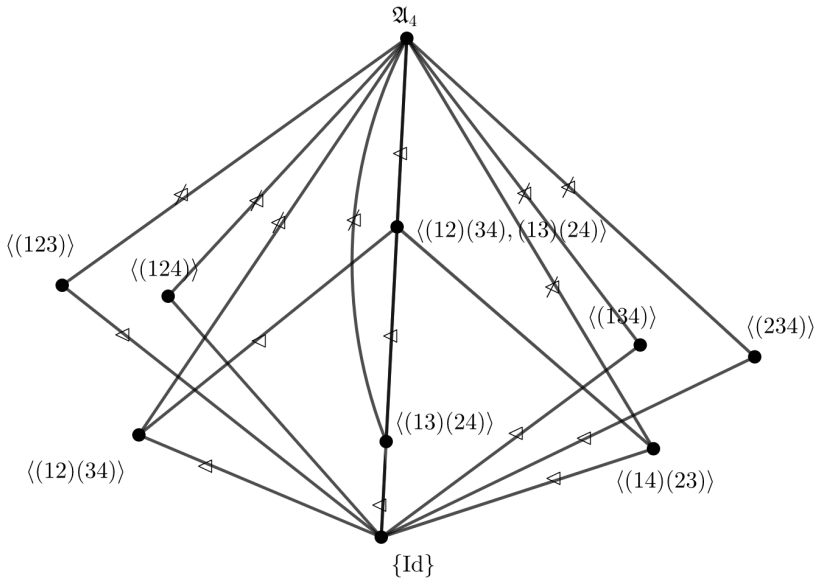
$$(12)(34)(13)(24) = (13)(24)(12)(34).$$

Pour les groupes d'ordre 4, on a deux possibilités [16] $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. Ici, pas d'élément d'ordre 4 donc la seule possibilité est la seconde et on voit qu'on a un seul tel sous-groupe engendré par n'importe quelle paire d'éléments d'ordre 2 qui commutent, autrement dit par n'importe quelle paire de doubles transpositions

$$\langle(12)(34), (13)(24)\rangle \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2\,.$$

Pour les sous-groupes d'ordre 2, on en a autant que de doubles transpositions et pour ceux d'ordre 3, moitié moins que de 3-cycles. Il s'ensuit le treillis suivant :

13. Cela est par exemple utile quand on étudie la théorie de Galois mais quand on classifie les revêtements galoisiens!
14. On pouvait le déduire sans calcul des théorèmes de Sylow, puisque ces sous-groupes d'ordre 2 sont les 2-Sylow de $\mathfrak{S}_3$.
15. Voir exercice 1.
16. Idem voir exercice 1.

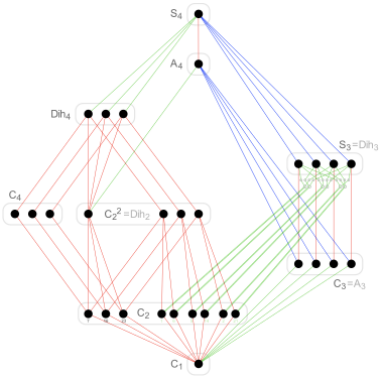


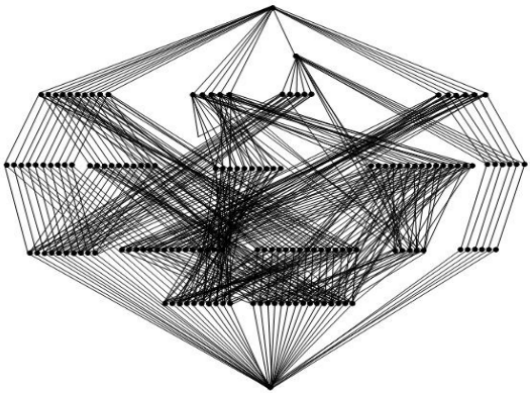
Le groupe trivial est toujours distingué, les sous-groupes d'ordre 2 sont d'indice 2 dans le groupe de Klein donc distingué dans celui-ci. Par ailleurs [17], les sous-groupes d'ordre 3 sont tous conjugués et donc non distingués et de même pour les sous-groupes d'ordre 2. On peut le voir à la main [18] du fait que

$$(ab)(cd)(abc)(ab)(cd) = (adb) \quad \text{et} \quad (abc)(ab)(cd)(acb) = (ad)(bc) \quad \text{si} \quad \{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$$

Reste à traiter le cas du groupe de Klein qui est distingué dans $\mathfrak{A}_4$. Cela découle de la question suivante ou des théorèmes de Sylow mais peut se voir aussi à la main grâce aux calculs précédents. En particulier, on a montré que $\mathfrak{A}_4$ est engendré par une double transposition et un 3-cycle et on retrouve le fait qu'être distingué n'est pas une relation transitive car $\langle(12)(34)\rangle \lhd \langle(12)(34),(13)(24)\rangle \lhd \mathfrak{A}_4$ mais $\langle(12)(34)\rangle \not\lhd \mathfrak{A}_4$.

On peut continuer avec $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{S}_5$ mais la situation devient vite plus pénible avec les treillis respectifs suivants :





Supposons à présent que $K \lhd H$ et que $H \lhd G$. A-t-on $K \lhd G$? Démontrer que si K est caractéristique dans H et que H est caractéristique dans G et montrons qu'alors K est caractéristique dans G. Pour ce faire, soit $\varphi \in \mathtt{Aut}(G)$. Il s'agit d'établir que $\varphi(K) \subseteq K$. Puisque H est caractéristique dans G, $\varphi(H) \subseteq H$ et donc $\varphi_{|_H}$ est un morphisme de groupes de H dans H qui est bijectif. En effet, $\varphi^{-1} \in \mathtt{Aut}(G)$ et donc $\varphi^{-1}(H) \subseteq H$ soit $H \subseteq \varphi(H)$ car φ est surjective. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}(\varphi_{|_H}) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cap H = \{e\}$ car φ est injective. On a donc un élément de $\mathtt{Aut}(H)$ et comme $K \subseteq H$, $\varphi(K) = \varphi_{|_H}(K) \subseteq K$ car K est caractéristique dans H, ce qu'il fallait démontrer !

3. Le résultat découle du fait que la classe de conjugaison d'un élément de $\mathfrak{S}_n$ est entièrement déterminée par la forme de sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Soit $c = (a_1, \ldots, a_k)$ un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$. Alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\sigma c \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)).$$

Toute permutation se décompose alors de façon unique en produit de cycles à support disjoints et on voit que tout conjugué d'une décomposition donnée possède une décomposition de la même forme et réciproquement il n'est pas difficile pour deux permutations

17. On peut là encore le voir grâce aux théorèmes de Sylow avec les 3-Sylows de $\mathfrak{A}_4$.
18. Plus généralement, c'est aussi une conséquence de la question suivante.

σ_1, σ_2 ayant le même type de décomposition en produit de cycles à supports disjoints de construire $\mu \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma_1 = \mu\sigma_2\mu^{-1}$. La classe de conjugaison correspondant à une partition donnée est l'ensemble des permutations dont la décomposition en cycles à support disjoint fait intervenir des cycles de longueurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Par exemple, dans $\mathfrak{S}_4$, la classe de conjugaison des doubles transpositions correspond à la partition $2+2=4$ et un 3-cycles à $3+1=4$.

► **Compléments . –** Pour $\mathfrak{A}_n$, c'est un peu plus subtil. Comme $\mathfrak{A}_n \lhd \mathfrak{S}_n$, la classe de conjugaison d'un élément de $\mathfrak{A}_n$ dans $\mathfrak{S}_n$ est contenue dans $\mathfrak{A}_n$. Par ailleurs, comme $[\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n] = 2$, on a que la classe de conjugaison d'un élément de $\mathfrak{A}_n$ est soit égale à la classe de conjugaison de cet élément dans $\mathfrak{S}_n$ soit la moitié de la classe de conjugaison de cet élément dans $\mathfrak{S}_n$ (dit autrement la classe de conjugaison d'un élément $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ dans $\mathfrak{S}_n$ est soit égale à la classe de conjugaison de cet élément dans $\mathfrak{A}_n$ soit la réunion de deux classes de conjugaison de même cardinal dans $\mathfrak{A}_n$). En effet, on sait que la classe de conjugaison d'un élément est l'orbite par l'action de conjugaison et il est facile de voir que pour $\sigma \in \mathfrak{A}_n$

$$\#\mathsf{Cl}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \frac{n!}{\#Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)} \quad \text{et} \quad \#\mathsf{Cl}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) = \frac{n!}{2\#Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)}$$

avec

$$Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \left\{\mu \in \mathfrak{S}_n \ : \ \mu\sigma\mu^{-1} = \sigma\right\} \quad \text{et} \quad Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) = \left\{\mu \in \mathfrak{A}_n \ : \ \mu\sigma\mu^{-1} = \sigma\right\}.$$

Soit $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ soit $Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) \subsetneq Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ strictement et il existe $\mu_0 \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$ tel que $\mu\sigma\mu^{-1} = \sigma$. Alors, le groupe alterné étant d'indice 2, $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \sqcup \mathfrak{A}_n\mu_0$ si bien que

$$\begin{array}{ccc} \left\{\mu \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n \ : \ \mu\sigma\mu^{-1} = \sigma\right\} & \longrightarrow & Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) \\ \mu & \longmapsto & \mu\mu_0 \end{array}$$

est une bijection qui montre que $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) \sqcup \left\{\mu \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n \ : \ \mu\sigma\mu^{-1} = \sigma\right\}$ avec

$$\#Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) = \#\left\{\mu \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n \ : \ \mu\sigma\mu^{-1} = \sigma\right\}.$$

Reste à déterminer quand une classe dans $\mathfrak{S}_n$ reste entière et quand elle se scinde en deux. Montrons qu'elle se scinde en deux si, et seulement si, la décomposition de σ ne comporte que des cycles de longueur impaire 2 à 2 distinctes. Si tel est le cas, σ commute avec le sous-groupe engendré par les cycles apparaissant dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. En effet, si τ commute à σ, comme la conjugaison préserve le type de décomposition en produit de cycles à supports disjoints et que tous les cycles apparaissant dans celle de σ sont de longueur différente, cela implique que τ commute à chacun de ces cycles individuellement. Fixons à présent la décomposition en cycle de $\sigma = c_1c_2\cdots c_r$. On utilise alors que si c est un cycle de longueur ℓ, alors le centralisateur de c est donné par

$$\left\{c^i\mu \ : \ i \in \{0, \ldots, \ell-1\},\ \mu \in \mathfrak{S}_{n-\ell}\right\}$$

avec $\mathfrak{S}_{n-\ell}$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ fixant tous les éléments du support de c. Il est clair que toutes les permutations de cette forme commutent à c et on conclut par un argument de cardinalité, puisque le cardinal de ce centralisateur est simplement le $n!$ divisé par le cardinal de la classe de conjugaison de c, à savoir le nombre de ℓ-cycles, soit $\frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{\ell}$ On obtient ainsi bien que les deux ensembles ont même cardinal $\ell \times (n-\ell)!$. On en déduit donc puisque τ commute à c_1 que $\tau = c_1^i\tau_1$ avec τ_1 de support disjoint à celui de c_1. On obtient que τ_1 commute à σ et donc τ_1 commute à c_2 et donc $\tau_1 = c_2^j\tau_2$ et de proche en proche τ appartient au sous-groupe engendré par $c_1, \ldots, c_r$. Il en résulte, puisque tous les cycles de σ sont de longueur impaire que τ est de signature $+1$ et $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$. On pouvait aussi calculer le cardinal de $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ (voir la note de bas de page 19) et constater qu'il est impair de sorte que tout élément de $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ est d'ordre impair. Or, tout élément de $\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$ étant d'ordre pair, on a le résultat ! Réciproquement, si on a un cycle de longueur paire c, on voit alors que

$$\forall \mu \in \mathfrak{S}_n, \quad \mu\sigma\mu^{-1} = (\mu c)\sigma(\mu c)^{-1}$$

et donc $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) \subsetneq Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ strictement. Alternativement, si σ comporte deux cycles $c = (a_1, \ldots, a_k)$ et $c' = (a'_1, \ldots, a'_k)$ de même longueur impaire, alors, notant $d = (a_1\ a'_1)\cdots(a_k\ a'_k)$ (de signature -1), on a

$$\forall \mu \in \mathfrak{S}_n, \quad \mu\sigma\mu^{-1} = (\mu d)\sigma(\mu d)^{-1}$$

et donc à nouveau $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) \subsetneq Z_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ strictement.

4. Dans le cas $n = 1$ ou $n = 2$, $\mathfrak{S}_n$ est abélien donc $Z(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$. Supposons à présent que $n \geqslant 3$. Soit $\sigma \neq \mathrm{id}$. On peut alors choisir $a \neq b$ tels que $\sigma(a) = b$. Puisque $n \geqslant 3$, il existe $c \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{a, b\}$. On considère alors $\tau = (a\ c)$ et on constate que $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(c)) = (b\ \sigma(c))$. On constate alors que c est dans le support de $\sigma\tau\sigma^{-1}$ mais pas dans celui de τ par définition ! Il s'ensuit que $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$ et σ ne commute pas avec τ et n'est donc pas dans $Z(\mathfrak{S}_n)$. On en conclut que, lorsque $n \geqslant 3$, $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{Id}\}$.

Exercice 5 — Groupe diédral. On considère les deux transformations suivantes du plan euclidien : la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et la symétrie orthogonale σ par rapport à l'axe des abscisses. Le groupe *diédral* $\mathbf{D}_4$ est le sous-groupe des isométries du plan engendré par ρ et σ.

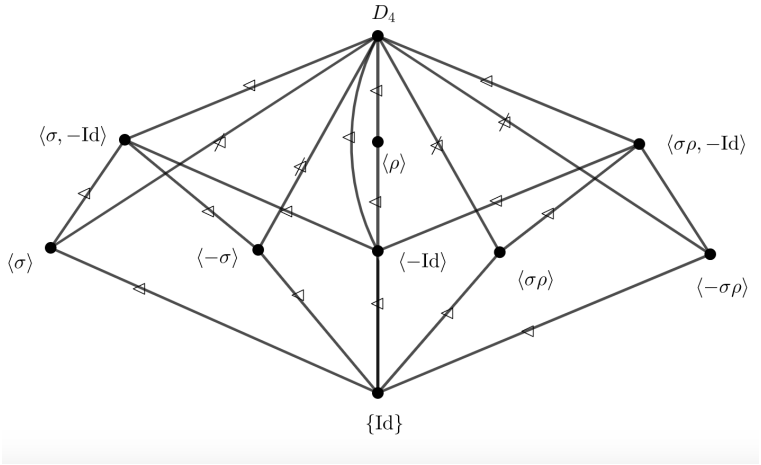
1. Calculer l'ordre de σ et de ρ. Décrire l'isométrie $\sigma\rho\sigma^{-1}$.
2. Montrer que $\mathbf{D}_4$ contient 8 éléments; caractériser ces éléments géométriquement.
3. Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathbf{D}_4$.
4. Donner le treillis des sous-groupes de $\mathbf{D}_4$, en précisant les sous-groupes distingués.
5. Pour un entier $n > 0$, le groupe diédral $\mathbf{D}_n$ est le sous-groupe des isométries du plan engendré par σ et par la rotation ρ' de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Montrer que $\mathbf{D}_n$ contient $2n$ éléments et correspond au groupe des isométries du plan préservant le polygone régulier du plan à n côtés de sommet les racines n-ièmes de l'unité.

Solution.

1. On vérifie aisément[19] que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ et donc σ est d'ordre 2 tandis que $\rho^4 = \mathrm{Id}$ donc ρ est d'ordre 2 ou 4 mais ρ^2 est la rotation d'angle π donc ρ est d'ordre 4.
   On se convainc aisément sur un dessin que $\sigma\rho\sigma^{-1} = \sigma\rho\sigma$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, à savoir ρ^{-1}. On peut le démontrer en utilisant le fait que les matrices de σ et ρ sont respectivement
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   de sorte que la matrice de $\sigma\rho\sigma$ est bien donnée par
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   qui est bien la matrice de la rotation de centre l'origine et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Plus simplement, on peut voir que $\sigma\rho\sigma$ est un automorphisme orthogonal de déterminant 1 donc une rotation et on détermine son angle en calculant l'image de $e_1 = (1, 0)$.
2. Il est facile de voir que $\mathbf{D}_4$ contient au moins 8 éléments distincts[20] : Id, la symétrie σ, les rotations ρ, ρ^2 et ρ^3 d'angle $\frac{\pi}{2}, \pi$ et $\frac{3\pi}{2}$ ainsi que $\sigma\rho$, $\sigma\rho^2$ et $\sigma\rho^3$ qui sont respectivement des symétries orthogonales par rapport à la droite d'angle respectivement $\frac{\pi}{4}$, l'axe des ordonnées et $\frac{3\pi}{4}$. On voit alors qu'on a ainsi tous les éléments de $\mathbf{D}_4$ grâce à la relation $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$. En effet, par définition d'un groupe engendré par deux élément, tout élément de D_4 est de la forme $\sigma^k\rho^{r_1}\sigma\rho^{r_2}\sigma\cdots\rho^{r_s}\sigma^\ell$ avec $k, \ell \in \{0, 1\}$ et $r_1, \ldots, r_s \in \{1, \ldots, 3\}$ et la relation $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$ permet de voir qu'un tel élément est de la forme $\sigma^s\rho^r$ avec $s \in \{0, 1\}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ car σ est d'ordre 2 et ρ d'ordre 4. En dehors de l'identité, on a donc deux éléments d'ordre 4 ($\pm\rho$) et 5 éléments d'ordre 2.
3. Il est clair que la classe de conjugaison de l'identité est réduite à $\{\mathrm{Id}\}$ tout comme celle de $\rho^2 = -\mathrm{Id}$ est donnée par $\{-\mathrm{Id}\}$. La relation $\sigma\rho\sigma^{-1}$ montre que la classe de conjugaison de ρ est donnée par $\{\rho, \rho^3\} = \{\rho, -\rho\}$ (le conjugué d'une rotation est une rotation). Enfin, la relation $\sigma\rho\sigma = \rho^3$ fournit que $\rho\sigma\rho^{-1} = -\sigma$ qui implique facilement que la classe de conjugaison de σ est $\{\sigma, \sigma\rho^2 = -\sigma\}$ et enfin la classe de conjugaison de $\sigma\rho$ est $\{\sigma\rho, \sigma\rho^3\} = \{\sigma\rho, -\sigma\rho\}$.
4. Les sous-groupes potentiels sont d'ordre 1, 2, 4 ou 8. les sous-groups d'ordre 1 et 8 sont immédiats. Pour les sous-groupes d'ordre 2, ils sont cycliques engendrés par un élément d'ordre 2, on en a donc cinq engendrés respectivement par σ, $-\sigma$, $-\mathrm{Id}$ (qui est le centre de $\mathbf{D}_4$ car le centre est la réunion des éléments dont la classe de conjugaison est réduite à un singleton), $\sigma\rho$ et $-\sigma\rho$. Pour les sous-groupes d'ordre 4, on sait qu'un tel sous-groupe est soit cyclique engendré par un élément d'ordre 4 soit par deux éléments d'ordre 2 qui commutent. Dans le premier cas, on obtient ici le sous-groupe engendré par ρ et dans le second on obtient deux sous-groupes (car on n'a pas d'autres éléments d'ordre 2 qui commutent) $\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}, \sigma, -\sigma\}$ et $\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}, \sigma\rho, -\sigma\rho = \sigma\rho^3\}$ isomorphes à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On obtient le treillis suivant

19. Soit géométriquement soit via les matrices.

20. On rappelle que les isométries du plan forment un groupe pour la loi de composition des applications et qu'une isométrie du plan est soit une rotation d'angle θ si elle est de déterminant 1, auquel cas sa matrice dans la base canonique est donnée par
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
tandis qu'une isométrie indirecte de déterminant -1 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. On rappelle que la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$ par rapport à l'axe des abscisses est donné dans la base canonique par
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
Cela se vérifie notamment facilement en passant aux nombres complexes.



Tous les sous-groupes d'indice 2 sont distingués. Il reste donc le cas des sous-groupes d'ordre 2. Les relations ci-dessus montrent qu'aucun n'est distingué sauf celui engendré par $\{-\mathrm{Id}\}$ qui est en fait le centre et le groupe dérivée de $\mathbf{D}_4$ et est même caractéristique (de même que $\langle\rho\rangle$).

5. Finalement terminons par la caractérisation géométrique du groupe $\mathbf{D}_n$. Il est clair que $\mathbf{D}_n$ est contenu dans le groupe des isométries de P_n. Montrons alors que le cardinal de ce groupe d'isométries est $2n$ pour conclure. Puisqu'une isométrie préserve les distances, on constate immédiatement que l'image par une isométrie qui préserve P_n d'un sommet est un autre sommet (en considérant la distance d'un point de P_n à l'origine, qui est maximale uniquement pour les sommets). On en déduit que l'image du sommet A ne peut être qu'un autre sommet, ce qui laisse n choix. Mais alors l'image d'un sommet adjacent de A, disons B, toujours pour des raisons de conservation de la distance doit être adjacent à l'image de B, ce qui laisse 2 possibilités. On constate qu'on a donc au plus $2n$ choix, l'image de l'arête AB déterminant complètement l'isométrie. Comme on a en a déjà $2n$, on les a bien toutes!

► **Compléments . –** Pour un entier $n > 0$, le groupe diédral $\mathbf{D}_n$ est le sous-groupe des isométries du plan engendré par σ et par la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. On montre alors que $\mathbf{D}_n$ contient $2n$ éléments et correspond au groupe des isométries du plan préservant le polygone régulier P_n du plan à n côtés de sommet les racines n-ièmes de l'unité. Tout ce qu'on a fait se généralise en effet parfaitement au cas général. On constate de même que $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$ et cette relation entraîne que tout élément de $\mathbf{D}_n$ est de la forme $\sigma^\ell\rho^k$ pour $\ell, k \in \mathbf{N}$. Comme σ est d'ordre 2 et ρ d'ordre n, on obtient que $\mathbf{D}_n$ est d'ordre $2n$ et que

$$D_n = \{\mathrm{Id}, \rho, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma\rho, \dots, \sigma\rho^{n-1}\}.$$

On peut montrer que

$$Z(\mathbf{D}_n) = \begin{cases} \mathbf{D}_n \text{ si } n \in \{1,2\} \\ \{\mathrm{Id}\} \text{ si } n \text{ impair et } n \geqslant 3 \\ \{\mathrm{Id}, \rho^{\frac{n}{2}} = -\mathrm{Id}\} \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad D(\mathbf{D}_n) = \begin{cases} \{\mathrm{Id}\} \text{ si } n \in \{1,2\} \\ \langle\rho\rangle \text{ si } n \text{ impair et } n \geqslant 3 \\ \langle\rho^2\rangle \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas pair, $\mathbf{D}_n/Z(\mathbf{D}_n) \cong \mathbf{D}_{n/2}$ et $\mathbf{D}_n^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si n est pair et $\cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si n est impair. On verra que $\mathbf{D}_n = \langle\rho\rangle \rtimes \langle\sigma\rangle \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rtimes_\varphi \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ avec $\varphi(1)$ donné par $\overline{m} \mapsto -\overline{m}$. On a $\mathbf{D}_2 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{D}_3 \cong \mathfrak{S}_3$. Le groupe $\mathbf{D}_n$ est résoluble et nilpotent si, et seulement si, son ordre est une puissance de 2. Les classes de conjugaison sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\{-\mathrm{Id}\}$, $\{\rho^k, \rho^{-k}\}$ pour $k \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$, $\{\sigma, \sigma\rho^2, \dots, \sigma\rho^{n-2}\}$ et $\{\sigma\rho, \sigma\rho^3, \dots, \sigma\rho^{n-1}\}$ si n est pair tandis que si n est impair, on obtient $\{\mathrm{Id}\}$, $\{\rho^k, \rho^{-k}\}$ pour $k \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ et $\{\sigma, \sigma\rho, \dots, \sigma\rho^{n-1}\}$. Enfin, pour tous diviseurs positifs d et d' de n et $k \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{d'} - 1\}$, on pose

$$H_h = \langle\rho^{\frac{n}{d}}\rangle \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad H_{d',k} = \langle\rho^{\frac{n}{d'}}, \sigma\rho^k\rangle \cong \mathbf{D}_{d'}.$$

Alors tout sous-groupe de $\mathbf{D}_n$ est égal à un sous-groupe H_d pour un unique diviseur d de n ou à un sous-groupe $H_{d',k}$ pour un unique diviseur d' et un unique k. Lorsque n est pair, les sous-groupes distingués sont les H_d pour $d \mid n$ et $\mathbf{D}_n$ et si n est impair les H_d pour $d \mid n$ et $\mathbf{D}_n$ ainsi que $H_{\frac{n}{2},0}$ et $H_{\frac{n}{2},1}$. Il s'agit d'un exemple de groupe donné par générateurs et relations. Ces groupes seront très important dans le cours de Géométrie au second semestre.

Exercice 6 — Groupes de type fini. Soit G un groupe admettant une partie génératrice finie. Montrer que G est fini ou dénombrable. Est-il vrai réciproquement que tout groupe dénombrable admet une partie génératrice finie ?

Solution. Soit S une partie génératrice de G. Notons T l'ensemble des éléments de G qui sont dans S ou dont l'inverse est dans S. Pour tout $r \in \mathbf{N}$, notons G_r l'ensemble des éléments g de G de la forme

$$g = x_1 x_2 \cdots x_r,$$

avec $x_i \in T$ pour tout i (avec la convention habituelle que le produit vide est le neutre de G). Alors, le fait que S engendre G dit que G est la réunion des G_r pour $r \in \mathbf{N}$. Chaque G_r est fini (car T est fini, et le cardinal de G_r est au plus celui de T^r), donc G est (au plus) dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis.

La réciproque est fausse, même pour les groupes abéliens. Par exemple, $(\mathbf{Q}, +)$ n'est pas engendré par une partie finie (par l'absurde si on a une partie génératrice finie $p_1/q_1, \dots, p_n/q_n$, alors tout élément de $\mathbf{Q}$ aurait un dénominateur sous forme réduite qui divise $q_1 \cdots q_n$ mais ce n'est pas le cas de $1/(1 + q_1 \cdots q_n)$ par exemple). De même pour $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$ (qui admet une famile libre infinie).

► **Remarque . –** Noter que la forme d'un élément de G, par définition du fait que S engendre G donne immédiatement une application f surjective[21] de $E = \left\{(x_1, \dots, x_r) \in S \cup S^{-1} \ : \ r \in \mathbf{N}\right\}$ (qui est dénombrable par des arguments similaires). L'axiome du choix garantit alors l'existence d'une section $s : G \to E$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_G$. Ainsi, s est injective et arrive dans un ensemble dénombrable donc G est dénombrable.

Exercice 7 — Quaternions et groupes d'ordre 8. On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ de la forme

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

On pose $H^* = H - \{0\}$.

1. Montrer que H^* est un sous-groupe non commutatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.
2. On note $\mathbf{1}$ la matrice identité, et on pose $I := M_{i,0}$, $J = M_{0,1}$, $K = M_{0,i}$. Soit $\mathbf{H}_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}$. Montrer que $\mathbf{H}_8$ est un sous-groupe non commutatif de cardinal 8 de H^*.
   Indication : On observera que $IJ = K = -JI$, avec des relations analogues par permutations circulaires de I, J, K.
3. Montrer que le centre et le sous-groupe dérivé de $\mathbf{H}_8$ sont tous deux égaux à $\{\pm 1\}$.
4. Montrer que l'abélianisé de $\mathbf{H}_8$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.
5. Est-ce qu'un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués est nécessairement abélien ?

Solution.

1. On a que $\det(M_{a,b}) = |a|^2 + |b|^2 \neq 0$ dès que $M_{a,b} \neq \mathbf{0}$ (ce qui est équivalent à $(a, b) \neq (0, 0)$) donc $H \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ et contient l'identité. On calcule également le produit $M_{a,b}M_{c,d} = M_{ac-b\bar{d},ad+b\bar{c}}$ ce qui permet de conclure à la stabilité par produit et enfin $M_{a,b}^{-1} = M_{\frac{\bar{a}}{|a|^2+|b|^2},-\frac{b}{|a|^2+|b|^2}}$ ce qui permet de montrer la stabilité par passage à l'inverse. Il n'est pas commutatif car $M_{i,0}M_{0,1} \neq M_{0,1}M_{i,0}$.
2. On vérifie par le calcul que $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ et que $IJ = -JI = K$, $KI = -IK = J$ et $JK = -KJ = I$ de sorte qu'on obtient bien un groupe de cardinal 8 de table

	1	I	J	K	-1	-I	-J	-K
1	1	I	J	K	-1	-I	-J	-K
I	I	-1	K	-J	-I	1	-K	J
J	J	-K	-1	I	-J	K	1	-I
K	K	J	-I	-1	-K	-J	I	1
-1	-1	-I	-J	-K	1	I	J	K
-I	-I	1	-K	J	I	-1	K	-J
-J	-J	K	1	-I	J	-K	-1	I
-K	-K	-J	I	1	K	J	-I	-1

   à 5 classes de conjugaisons $\{1\}, \{-1\}, \{\pm I\}, \{\pm J\}$ et $\{\pm K\}$. Il est non commutatif par exemple car $IJ \neq JI$.
3. On voit immédiatement que $Z(\mathbf{H}_8) = \{\pm\mathrm{Id}\}$. Puis on voit que tous les commutateurs sont triviaux sauf $[I, J] = [I, K] = [J, K] = -\mathrm{Id}$ si bien que $D(\mathbf{H}_8) = \langle -\mathrm{Id}\rangle = \{\pm\mathrm{Id}\}$.
4. Notons $H = D(\mathbf{H}_8)$. L'abélianisé $\mathbf{H}_8/H$ est donc d'ordre 4 et on voit que les classes ne sont autres que $H = \{\pm 1\}$, $IH = \{\pm I\}$, $JH = \{\pm J\}$ et $KH = \{\pm K\}$ dont on voit[22] qu'on a $IH^2 = JH^2 = KH^2 = H$. On a donc nécessairement que $\mathbf{H}_8^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
   Une autre méthode consiste à exploiter le fait que $H = D(\mathbf{H}_8) = Z(\mathbf{H}_8)$. Ainsi, si $\mathbf{H}_8/H \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, alors $\mathbf{H}_8/Z(\mathbf{H}_8)$ serait cyclique et d'après le cours, cela entraînerait que $\mathbf{H}_8$ est abélien, ce qui n'est pas le cas ! On a donc nécessairement que $\mathbf{H}_8^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

   ► **Compléments. –** Noter que les quaternions fournissent un exemple[23] de groupe G tel que $G/Z(G)$ abélien mais non cyclique et que G est non commutatif ! L'hypothèse de cyclicité ne peut donc pas être affaiblie dans le résultat de votre cours !

21. Qui à un élément de $\left\{(x_1, \dots, x_r) \in S \cup S^{-1} \ : \ r \in \mathbf{N}\right\}$ associe $x_1x_2 \cdots x_r$.
22. Par exemple car $(IH)^2 = IHIH$ et, puisque H est distingué dans $\mathbf{H}_8$, $HI = IH$ et $(IH)^2 = I^2H = -H = H$. On rappelle alors que H est l'élément neutre du groupe quotient $\mathbf{H}_8/H$.
23. Et oui, encore !

5. On voit facilement que les sous-groupes de $\mathbf{H}_8$ sont $\{1\}$, $\mathbf{H}_8$, $\{\pm 1\}$ (d'ordre 2) et $\langle I\rangle = \{\pm 1, \pm I\}$, $\langle J\rangle$ et $\langle K\rangle$ (tous trois cycliques d'ordre 4). Les sous-groupes triviaux sont naturellement distingués tout comme ceux d'ordre 4 (car d'indice 2) et le sous-groupe d'ordre 2 étant égal au centre (ou au sous-groupe dérivé) l'est aussi. Ainsi, on a un exemple de groupe non commutatif dont tous les sous-groupes propres sont distingués et cycliques.

▶ **Compléments. –** Si $\mathbf{H}_8 = N \rtimes H$, alors nécessairement N ou H est d'ordre 2, donc égal à $\{\pm 1\}$. Si c'est H, alors H serait distingué et donc le produit serait direct. Cela impliquerait que H_8 est abélien. On peut donc supposer que $N = \{\pm 1\}$. Mais dans ce cas, $\mathrm{Aut}(N)$ est réduit à un élément et tout morphisme $H \to \mathrm{Aut}(N)$ est trivial et on conclurait de la même manière que le produit semi-direct serait direct et $\mathbf{H}_8$ abélien. Ainsi $\mathbf{H}_8$ n'est pas un produit semi-direct non trivial.
Soit maintenant un groupe G d'ordre 8. Si G a un élément d'ordre 8, alors $G \cong \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$. Si G est d'exposant 2, alors $G \cong (\cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$. Si maintenant G est d'exposant 4 abélien, on a que $G \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Reste alors à traiter le cas d'exposant 4 non abélien. On a ainsi un élément $r \in G$ d'ordre 4 et on pose $R = \langle r\rangle \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Soit alors $s \in G \setminus R$ d'ordre minimal. Si s est d'ordre 2, alors on pose $S = \langle s\rangle$ et $S \cap R = \{e\}$ et G est engendré par R et S et $R \lhd G$ car d'indice 2. On sait alors que $G \cong R \rtimes S \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \cong D_4$ (on a un seul tel produit semi-direct non abélien à isomorphisme près). Enfin, si s est d'ordre 4 (et que tout élément de $G \setminus R$ est d'ordre 4), renommons r et s par I et J et notons $K = IJ$. On sait que I^2 est d'ordre 2 et c'est le seul élément d'ordre 2 de G. On peut le renommer $I^2 = -1$. De même, on obtient $J^2 = -1$. Mais $K \notin R$ car $J \notin R$ donc K est d'ordre 4 et $K^2 = -1$ est d'ordre 2. On a alors que $Z(G) = \{\pm 1\}$. On sait en effet que $Z(G)$ est un sous-groupe de G de cardinal 2 ou 4 (car G est supposé non abélien et est un 2-groupe). Si le cardinal de $Z(G)$ était 4, alors il s'agit d'un sous-groupe distingué d'indice 2 et on aurait $G/Z(G) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ cyclique si bien que G serait abélien, ce qui est absurde. On a donc que $Z(G)$ est d'ordre 2, nécessairement engendré par un élément d'ordre 2 et comme -1 est le seul élément de G d'ordre 2, on a le résultat. On a donc 8 éléments distincts de G, à savoir ± 1, $\pm I$, $\pm J$ et $\pm K$ et donc $G = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ avec $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ et $K = IJ$. On a par ailleurs que $IJ, IK, JK \notin Z(G)$ et comme $JI \notin R$ car $J \notin R$ et $I \in R$, on a $JI \in \{J, K, -J, -K\}$ car $R = \{\pm 1, \pm I\}$. On a alors clairement $JI \neq \pm J$ et $JI \neq IJ$ sinon I et J commuteraient et donc I commuterait à K et ainsi $I \in Z(G)$. D'où $JI = -IJ = -K$ et de même on montre que $KI = -IK = J$ et $JK = -KJ = I$ et on retrouve la table de multiplication des quaternions donc $G \cong \mathbf{H}_8$.

Exercice 8. On considère le groupe $G = \mathfrak{A}_4$. Soit $D(G)$ son sous-groupe dérivé. Soit V_4 le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions.

1. Montrer que $V_4 \lhd G$, puis que $D(G) \subseteq V_4$. *Indication : On observera que G/V_4 est de cardinal 3.*

2. Montrer que $D(G) \neq \{1\}$ et que G ne possède pas de sous-groupe distingué de cardinal 2. En déduire que $D(G) = V_4$.

3. Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe fini A, alors $H \lhd A$.
Indication : Regarder les classes à gauche et à droite suivant G.

4. Soit H un sous-groupe de $G = \mathfrak{A}_4$. Montrer que si H est d'indice 2, alors $D(G) \subseteq H$ et aboutir à une contradiction.
Indication : On considérera G/H.
Ainsi G (qui est de cardinal 12) n'a pas de sous-groupe de cardinal 6.

5. Montrer au contraire que pour tout $d \in \mathbf{N}^*$ tel que d divise 24, le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède un sous-groupe de cardinal d.

Solution.

1. Si l'on conjugue la double transposition $(a, b)(c, d)$ par une permutation σ, on obtient $(\sigma(a), \sigma(b))(\sigma(c), \sigma(d))$, ce qui montre que V_4 est distingué dans $\mathfrak{S}_4$, et donc a fortiori dans $\mathfrak{A}_4$. Ensuite, comme G/V_4 est de cardinal $12/4 = 3$, il est cyclique de cardinal 3 (car 3 est premier) et en particulier abélien, ce qui montre que $D(G) \subset V_4$.

2. On voit facilement que G n'est pas abélien, donc $D(G) \neq \{1\}$. D'autre part un sous-groupe H de G de cardinal 2 est composé de l'identité et d'une double transposition $\tau = (a, b)(c, d)$. Si l'on conjugue τ par $\sigma \in G$, on obtient $(\sigma(a), \sigma(b))(\sigma(c), \sigma(d))$, qui ne reste pas dans H si on choisit par exemple $\sigma \in G$ telle que $\sigma(a) = a$ et $\sigma(b) = c$, ce qui est toujours possible.
On a vu que $D(G) \subset V_4$, donc le cardinal de $D(G)$ divise 4, mais on a aussi vu que ce ne peut être ni 1 ni 2, donc c'est 4 et $D(G) = V_4$.

3. Soit $a \notin H$. Comme le cardinal de l'ensemble G/H des classes à gauche est 2, cet ensemble est composé de H et de la classe aH, qui est le complémentaire de H dans A. De même l'ensemble $H \setminus G$ des classes à droite est composé de H et de Ha, qui est aussi le complémentaire de H dans A. Ainsi $aH = Ha$, et ceci reste vrai quand $a \in H$. Finalement $aHa^{-1} = H$ pour tout $a \in A$, autrement dit $H \lhd A$.

4. D'après **4.**, on a $H \lhd G$. Alors, le groupe G/H est abélien puisque de cardinal 2, ce qui montre que $H \supset D(G)$. Mais d'après c), le groupe $D(G)$ est de cardinal 4 alors que H est de cardinal 6, ce qui contredit le théorème de Lagrange.

5. C'est clair pour $d = 1$ et $d = 24$. Pour $d = 2$, on prend le groupe engendré par une transposition, pour $d = 3$ celui engendré par un 3-cycle et pour $d = 4$ celui engendré par un 4-cycle. Pour $d = 6$, le sous-groupe des permutations laissant fixe 1 est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, il est donc de cardinal 6. Pour $d = 12$, on prend le sous-groupe $\mathfrak{A}_4$. Reste le cas $d = 8$, auquel cas on a un sous-groupe isomorphe au groupe diédral $\mathbf{D}_4$, par exemple celui engendré par un 4-cycle et une transposition.

Exercice 9 — Groupe des automorphismes.

1. Soient p un nombre premier et $n \in \mathbf{N}$. Établir que $\mathtt{Aut}\left((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n\right)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n\left(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\right)$. Pour quelles valeurs de n ce groupe est-il commutatif ?

2. On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que ce groupe contient un sous-groupe distingué mais non caractéristique.
3. On considère dans cette question le cas $p = n = 2$. Montrer que $\mathtt{Aut}\left(\left(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\right)^2\right)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Solution.

1. Voir le corrigé du partiel de l'an dernier, ici, exercice 2.
2. Voir le corrigé du partiel de l'an dernier, ici, exercice 2.
3. On sait que le cardinal de $\mathsf{GL}_n\left(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\right)$ est[24] 6 et est non abélien. On sait alors qu'un tel groupe est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. On renvoie eu premier DM de M1 MF pour une autre approche !

Exercice 10 — Groupes d'exposant 2.

1. Soit G un groupe tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien et donner des exemples de tels groupes finis et infinis.
2. Montrer que si G est fini, il existe un entier n tel que G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.

Solution.

1. Pour tous $g, h \in G$, on a $(gh)^2 = 1$ soit $ghgh = 1$ et en multipliant à droite par hg il vient $hg^2hgh = hg$ soit $h^2gh = hg$ soit $gh = hg$ et G est abélien. On verra en question suivante que les groupes finis d'exposant 2 sont tous de la forme $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ pour un certain entier n. Un exemple de tel groupe infini est $\prod_{i\in I} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ avec I infini, par exemple $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
2. - *Méthode 1 :* Puisque G est fini, il admet une partie génératrice minimale[25], disons $\{g_1, \ldots, g_n\}$. On a alors par définition d'une partie génératrice et en utilisant le fait que G est abélien dont tout élément distinct du neutre est son propre inverse par la question précédente, que
$$G = \{g_1^{\varepsilon_1} g_2^{\varepsilon_2} \cdots g_n^{\varepsilon_n} \ : \ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}\}.$$
Cela donne envie de poser
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n & \longrightarrow & G \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) & \longmapsto & g_1^{\varepsilon_1} g_2^{\varepsilon_2} \cdots g_n^{\varepsilon_n}. \end{array} \right.$$
On a aisément qu'il s'agit d'un morphisme et par ce qui rpécède, il est surjectif. Reste à voir qu'il est injectif pour conclure ! Si ce n'est pas le cas, il existe un élément non trivial $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ dans le noyau, autrement dit tel que
$$g_1^{\varepsilon_1} g_2^{\varepsilon_2} \cdots g_n^{\varepsilon_n} = 1.$$
Sans perte de généralités, on peut supposer que $\varepsilon_1 \neq 0$ et donc $\varepsilon_1 = 1$. On a donc
$$g_1 g_2^{\varepsilon_2} \cdots g_n^{\varepsilon_n} = 1 \quad \text{soit} \quad g_1 = g_2^{\varepsilon_2} \cdots g_n^{\varepsilon_n}$$
et $\{g_2, \ldots, g_n\}$ est une partie génératrice de G, contredisant la minimalité de $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Cela démontre l'injectivité et donc f est un isomorphisme qui permet de conclure !
- *Méthode 2 :* On considère $(G, +)$ muni d'une loi additive[26] d'exposant 2, autrement dit tel que pour tout $g \in G$, $2g = 0$. On a alors que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un corps et on vérifie que G est muni d'une structure de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel muni de la loi $+$ et de la loi externe suivante
$$\forall \overline{k} \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad \forall g \in G, \quad \overline{k} \cdot g = kg$$
qui est bien définie car si $\overline{k} = \overline{k'}$, alors il existe un entier ℓ tel que $k' = k + 2\ell$ si bien que
$$k'g = kg + 2\ell g = 0 \quad \text{car} \quad 2\ell g = \ell(2g) = 0.$$
On vérifie alors que $(G, +, \cdot)$ est un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel. Comme G est une famille génératrice finie, il est de dimension finie. On sait donc que si $n = \dim_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}(G) = n$, alors[27] $G \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$, en tant que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espaces vectoriels. Mais, un isomorphisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espaces vectoriels est en particulier un isomorphisme des groupes additifs sous-jacents si bien qu'on $G \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ en tant que groupes, et on retrouve bien le résultat !

► **Compléments . –** On peut se demander pour quels entiers e, un groupe d'exposant[28] e est-il nécessairement commutatif. Clairement $e = 1$ ou 2 convient d'après **1** et ce sont les seuls. Si $e \geqslant 3$ divisible par 4, alors $\mathbf{Z}/e\mathbf{e} \times \mathbf{H}_8$ est d'exposant e et non commutatif. Si maintenant $4 \nmid e$, alors e admet un facteur premier impair et $\mathbf{Z}/e\mathbf{Z} \times U(p)$ avec $U(p)$ le sous-groupe de $\mathsf{GL}_p(\mathbf{F}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale est d'exposant e car pour toute matrice $M \in U(p)$, $(M - I_p)^p = 0$ et comme on est en caractéristique p, $M^p = I_p$.

24. Car une telle matrice est donnée par le choix d'une première colonne non nulle (ce qui laisse $4 - 1 = 3$ choix) et d'une seconde colonne non colinéaire à la première (ce qui laisse $4 - 2 = 2$ choix).
25. En effet, G (qui est fini) engendre G donc le cardinal des familles génératrices est une partie non vide de $\mathbf{N}$ qui admet donc un plus petit élément.
26. On prend cette convention pour coller à la définition usuelle d'un espace vectoriel. De plus, on a établi qu'un groupe d'exposant 2 est commutatif et on note usuellement une loi commutative $+$.
27. Noter qu'une base étant une famille génératrice minimale, on fait en fait la même chose que dans la première méthode !
28. On dit qu'un groupe G est d'exposant e si pour tout $g \in G$, $g^e = 1$.

Exercice 11 — Exposant d'un groupe. On définit *l'exposant* d'un groupe abélien fini G et on note $\exp(G)$, comme le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $g^n = 1$ pour tout $g \in G$.

1. Soient x et y deux éléments de G d'ordres respectifs $\omega(x)$ et $\omega(y)$ premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre $\omega(x)\omega(y)$.
2. A-t-on sans hypothèse que l'ordre de xy est donné par $\mathrm{ppcm}(\omega(x), \omega(y))$?
3. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que z soit d'ordre $\exp(G)$.
4. Retrouver alors qu'un sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

Solution.

1. Notons r l'ordre de xy. Puisque G est abélien, on a $(xy)^{nm} = (x^m)^n (y^n)^m = 1$ donc $r \mid mn$. En outre, $1 = (xy)^{rm} = y^{rm}$ donc $n \mid rm$ et donc $n \mid r$ par coprimalité. De même, $m \mid r$ et par coprimalité $nm \mid r$ et $r = nm$.
2. Non, on peut par exemple prendre un élément $x \in G$ d'ordre au moins 2 et $y = x^{-1}$.
3. Posons $M = \mathrm{ppcm}(\omega(x) \ : \ x \in G)$. Par le théorème de Lagrange, $x^M = 1$ pour tout $x \in G$ et $\exp(G) \leqslant M$. Montrons que cette borne est atteinte. Soient $p_1, \dots, p_k$ premiers et $a_1, \dots, a_k$ des entiers strictement positifs tels que $M = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, il existe un élément $x_i \in G$ d'ordre $p_i^{a_i}$. En effet, par définition de M, il existe $y_i \in G$ d'ordre $p_i^{a_i} q$ avec $p_i \nmid q$ et $x_i = y^q$ convient. Ainsi, $x = \prod_{i=1}^{k} x_i$ convient et est d'ordre M d'après **1**.
4. Soit G le groupe multiplicatif, de cardinal n, d'un corps k. On veut montrer l'existence d'un élément d'ordre n dans G. On sait par **3.** qu'il existe un élément $g_0 \in G$ d'ordre $\exp(G)$ et que $\exp(G) \leqslant n$ par Lagrange. Par ailleurs, $x^{\exp(G)} = 1$ pour tout $x \in G$. Or, dans un corps, le nombre de racines comptées avec multiplicité d'un polynôme est majoré par son degré de sorte que $n \leqslant \exp(G)$ et finalement g_0 est d'ordre n et G est cyclique.

Exercice 12.

1. Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est cyclique. Rappeler pourquoi G est abélien. Le résultat tient-il toujours si l'on suppose seulement que $G/Z(G)$ est abélien ?
2. Justifier que la probabilité que deux éléments d'un groupe non abélien commutent est $\leqslant \frac{5}{8}$.
3. Montrer qu'un p-groupe d'ordre p^n possède des sous-groupes distingués d'ordre p^i pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Solution.

1. On note $\overline{a}$ un générateur de $G/Z(G)$. Tout élément de G est alors de la forme $a^m z$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $z \in Z(G)$ ce qui permet de conclure. Le résultat tombe en défaut si l'on suppose seulement abélien comme on le voit avec le contre-exemple des quaternions.
2. En effet, si G est non abélien, alors par l'exercice 7, $G/Z(G)$ ne peut pas être cyclique est est donc de cardinal au moins 4. Si l'on note $z = \#Z(G)$ et $n = \#G$, alors $n \geqslant 4z$. Si maintenant $x \in Z(G)$, pour tout $y \in G$, x et y commutent. Soit alors $x \in G \smallsetminus Z(G)$. Les éléments y qui commutent avec x sont les éléments du centralisateur de x pour l'action par conjugaison. On obtient alors un sous-groupe strict car x n'est pas central, de cardinal $\leqslant \frac{n}{2}$. On obtient finalement que le nombre de paires $(x, y) \in G^2$ qui commutent vérifie
$$\leqslant zn + (n - z)\frac{n}{2} = \frac{nz}{2} + \frac{n^2}{2} \leqslant \frac{n^2}{8} + \frac{n^2}{2} = \frac{5}{8}n^2.$$
Il reste à diviser par $\#G^2 = n^2$ pour obtenir que la probabilité est bien $\leqslant \frac{5}{8}$. Noter que cette probabilité est optimale et est notamment pour les groupes[29] $\mathbf{H}_8$ et $\mathbf{D}_4$.
3. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est évident. Supposons la propriété connue pour les groupes d'ordre p^n et soit G un groupe d'ordre p^{n+1}. Si $i = 0$, il n'y a rien à faire et on peut supposer que $i \geqslant 1$. On sait que $Z(G)$ est non trivial et en tant que p-groupe, il admet un élément d'ordre p donc un sous-groupe Z d'ordre p. Comme Z est central, il est distingué et on note $\pi : G \to G/Z$ la surjection canonique. Par hypothèse, G/Z est de cardinal p^n et possède donc un sous-groupe H' de cardinal p^{i-1}. Il est alors clair que $H = \pi^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G de cardinal p^i ce qui conclut la preuve.

Exercice 13. Soient p un nombre premier et $K = \mathbf{F}_p$. On considère le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$ et son sous-groupe $\mathrm{SL}_n(K)$.

1. Montrer que le centre de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. de $\mathrm{SL}_n(K)$) est constitué des matrices scalaires de ce groupe.
2. On note $\mathrm{PGL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{PSL}_n(K)$) le quotient de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(K)$) par son centre. Calculer les cardinaux de $\mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{PGL}_n(K)$ et $\mathrm{PSL}_n(K)$.

Solution.

29. Un autre exercice intéressant utilisant la formule de Burnside est de montrer que la probabilité cherchée est de $\frac{k}{n}$ où k est le nombre de classes de conjugaison et $n = \#G$. On peut essayer de majorer cela puisqu'a priori on ne connaît pas forcément k et une inégalité classique (dont la preuve utilise de choses très simples issues de la théorie des représentations) garantit que $n \geqslant 4k - \frac{3n}{d}$ avec $d = \#D(G)$. On obtient alors une borne $\leqslant \frac{1}{4} + \frac{3}{4d}$ qui redonne $\frac{5}{8}$ si $D(G)$ est d'ordre 2 et est meilleure sinon.

1. Cela résulte du fait plus général (sur un corps K quelconque) suivant : si un endomorphisme u de K^n commute avec tous les endomorphismes de déterminant 1, alors u est une homothétie. Il suffit pour cela (ce qui est classique) de voir que tout vecteur $x \neq 0$ de K^n est vecteur propre pour u. Complétons x en une base $(x, e_1, ..., e_{n-1})$ de K^n ; soit M la matrice de u dans cette base, alors M commute avec la matrice de Jordan $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & (0) & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, ce qui implique qu'elle laisse stable le noyau de J_n, lequel est $K.x$. Ainsi x est bien vecteur propre pour u comme on voulait. Je vous renvoie au chapitre IV du Perrin pour plus de détails sur les groupes linéaires.

2. On a que le cardinal de $\mathsf{GL}_n(K)$ est

$$\#\mathsf{GL}_n(K) = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}).$$

En effet, on a $p^n - 1$ choix de première colonne non nulle, puis $p^n - p$ choix de seconde colonne non colinéaire à la première, etc... Comme par définition $\mathrm{SL}_n(K)$ est le noyau du morphisme de groupes surjectif $\det : \mathsf{GL}_n(K) \to K^\times$, son cardinal est celui de $\mathsf{GL}_n(K)$ divisé par $p - 1$, soit

$$\#\mathrm{SL}_n(K) = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-2}).p^{n-1}.$$

D'autre part, on a que $\mathrm{PGL}_n(K) = \mathsf{GL}_n(K)/Z(\mathsf{GL}_n(K))$ est ainsi le quotient de $\mathsf{GL}_n(K)$ par un groupe isomorphe à $K^\times$ (car le centre de $\mathsf{GL}_n(K)$ est constitué des matrices scalaires non nulles par la première question), donc $\#\mathsf{PGL}_n(K) = \#\mathrm{SL}_n(K)$. On obtient immédiatement par passage au quotient un morphisme injectif $\mathrm{PSL}_n(K) \to \mathrm{PGL}_n(K)$.

Enfin, le cardinal de $\mathrm{PSL_n}(K)$ dont on rappelle qu'il est défini par $\mathrm{PSL_n}(K) = \mathrm{SL}_n(K)/Z(\mathrm{SL}_n(K))$ et que $Z(\mathrm{SL}_n(K)) = Z(\mathrm{GL}_n(K)) \cap \mathrm{SL}_n(K) = \{\lambda I_n \ : \ \lambda^n = 1\}$. Or, il y a $\mathrm{pgcd}(n, p-1)$ racines n-ièmes de l'unité dans un corps K de cardinal p : en effet, on sait que $K^\times$ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$, et on est donc ramené à compter le nombre de solutions x de $nx = 0$ dans $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$, ce qui donne facilement le résultat puisque les solutions sont les éléments de $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ multiple de $\frac{p-1}{\mathrm{pgcd}(n,p-1)}$. Finalement,

$$\#\mathrm{PSL_n}(K) = \frac{(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-2}).p^{n-1}}{\mathrm{pgcd}(n, p-1)}.$$

Exercice 14. Soit $n \geqslant 5$. Trouver tous les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ par un groupe abélien quelconque ? Et si on prend $n = 4$?

Solution. L'observation importante est que commme $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ est abélien, le noyau d'un tel morphisme contient le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ (en effet l'image de tout commutateur est triviale). Comme ce sous-groupe est $\mathfrak{A}_n$, un tel morphisme est trivial, ou bien se factorise en un morphisme injectif $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \{\pm 1\} \to \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, l'isomorphisme étant induit par la signature. Ainsi, le seul morphisme non trivial est celui obtenu en composant la signature avec le morphisme envoyant 1 sur $\bar{0}$ et -1 sur $\bar{6}$. Ceci s'applique encore à $n = 4$. Si on remplace $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ par un groupe abélien A, les morphismes non triviaux sont obtenus en composant la signature avec le morphisme envoyant 1 sur le neutre de A et -1 sur un élément arbitraire d'ordre 2 de A.