Feuille TD 2 – Exercices Algèbre – Groupes II

Guide de survie sur le produit tensoriel

Le produit tensoriel est un outil fondamental en théorie des nombres, en géométrie algébrique ou en théorie des représentations mais aussi en physique théorique. Il permet par exemple d'étendre les scalaires ou encore, si B est un sous-anneau de A, de voir une matrice à coefficients dans B comme une matrice à coefficients dans A. Par ailleurs, il s'agit d'une machine à transformer le bilinéaire en linéaire. On présente ici un guide de survie dans le cadre de k-espaces vectoriels sur un corps k et on verra plus tard comment cela s'étend à des modules sur des anneaux commutatifs.

Définition. *Soient V et W deux espaces vectoriels sur un corps k. On dit que $(V\otimes_k W, \Phi)$ ou généralement $V\otimes_k W$ en omettant l'application Φ sous-jacente est un produit tensoriel de V par W au-dessus de k si $V\otimes_k W$ est un k-espace vectoriel et $\Phi : V\times W \to V\otimes_k W$ est une application k-linéaire qui vérifient la propriété universelle suivante : pour toute application k-bilinéaire $B : V\times W\to L$ avec L un k-espace vectoriel, il existe une unique application $f : V\otimes_k W\to L$ telle que $f\circ\Phi = B$. Autrement dit, telle que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\Phi"'] & L \\
V\otimes_k W \arrow[ur, dotted, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

On note souvent $\Phi = \otimes$ et on appelle pour tout $(v,w)\in V\times W$, $\Phi(v,w) = v\otimes w$ un tenseur pur ou tenseur élémentaire ou tenseur décomposable. On a donc $f(v\otimes w) = B(v,w)$ pour tout $(v,w)\in V\times W$. On a alors existence et unicité à isomorphisme (canonique) près du produit tensoriel, ce qui autorise à parler "du" produit tensoriel de V par W. Commençons par l'unicité. Soient (H_1,Φ_1) et (H_2,Φ_2) deux produits tensoriels. Alors l'application $\Phi_2 : V\times W\to H_2$ est k-bilinéaire et par la propriété universelle satisfaite par (H_1,Φ_1), il existe une unique application linéaire $f_1 : H_1\to H_2$ telle que $f_1\circ\Phi_1 = \Phi_2$. De même en inversant les rôles, on obtient une unique application linéaire $f_2 : H_2\to H_1$ telle que $f_2\circ\Phi_2 = \Phi_1$. On a donc

$$f_1\circ\Phi_1 = f_1\circ f_2\circ\Phi_2 = \Phi_2.$$

Mais par unicité dans la propriété universelle de (H_2,Φ_2) appliquée à Φ_2 et puisque $\mathrm{Id}_{H_2}\circ\Phi_2 = \Phi_2$, il vient $f_1\circ f_2 = \mathrm{Id}_{H_2}$ et par symétrie $f_2\circ f_1 = \mathrm{Id}_{H_1}$, ce qui montre bien l'unicité.
Montrons alors l'existence. On pose $X = k^{(V\times W)}$ l'ensemble des fonctions $\varphi : V\times W\to k$ presque nulles, c'est-à-dire telles que l'ensemble des $(v,w)\in V\times W$ tels que $\varphi(v,w)\neq 0$ soit fini. Une base du k-espace vectoriel X est donnée par les $\delta_{(v,w)}$ pour tout $(v,w)\in V\times W$ où

$$\forall (x,y)\in V\times W,\quad \delta_{(v,w)}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) = (v,w)\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

On considère alors Y le sous-espace vectoriel de X engendré par

- $\alpha_{v,v',w} = \delta_{(v+v',w)} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v',w)}$ pour tous $v, v'\in V$ et $w\in W$;
- $\alpha'_{v,w,\lambda} = \delta_{(\lambda v,w)} - \lambda\delta_{(v,w)}$ pour tous $v\in V$, $w\in W$ et $\lambda\in k$;
- $\beta_{v,w,w'} = \delta_{(v,w+w')} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v,w')}$ pour tous $v\in V$ et $w,w'\in W$;
- $\beta'_{v,w,\lambda} = \delta_{(v,\lambda w)} - \lambda\delta_{(v,w)}$ pour tous $v\in V$, $w\in W$ et $\lambda\in k$.

On pose alors $V\otimes_k W = X/Y$ le k-espace vectoriel quotient et on note $\pi : X\to V\otimes_k W$ la surjection canonique. Noter qu'on "tue" ainsi tous les générateurs de Y dans la quotient, on va voir que c'est ce qui fait marcher la construction. On pose par ailleurs $\Phi : V\times W\to V\otimes_k W$ définie par $\Phi(v,w) = \pi(\delta_{(v,w)})$ qui est surjective et k-bilinéaire car par exemple

$$\Phi(v+v',w) = \pi(\delta_{(v+v',w)}) = \pi(\delta_{(v,w)} + \delta_{(v',w)}) = \pi(\delta_{(v,w)}) + \pi(\delta_{(v',w)}) = \Phi(v,w) + \Phi(v',w).$$

On montre de même toutes les autres relations. Par ailleurs, si $B : V\times W\to L$ k-bilinéaire avec L un k-espace vectoriel, on a alors par bilinéarité que B donne lieu à une application de $X\to L$ qui à $\delta_{(v,w)}$ associe $B(v,w)$ qui passe au quotient modulo Y et fournit ainsi une application linéaire $f : V\otimes_k W\to L$ telle que $f\circ\Phi = B$. On a alors l'unicité car une telle application vérifie nécessairement $f(\pi(\delta_{(v,w)})) = B(v,w)$ et comme π est surjective et que les $\delta_{(v,w)}$ forment une base de X, les $\pi(\delta_{(v,w)})$ forment une famille génératrice de $V\otimes_k W$ et il existe ainsi au plus une telle application linéaire.

Ce qu'il faut retenir de cette preuve, c'est que les $v\otimes w$ (qui est égal à $\Phi(v,w) = \pi(\delta_{(v,w)})$) engendrent le k-espace vectoriel $V\otimes_k W$, autrement dit tout élément de $V\otimes_k W$ est de la forme

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i(v_i\otimes w_i) = \sum_{i=1}^r (\lambda_i v_i)\otimes w_i = \sum_{i=1}^r v'_i\otimes w_i$$

avec $\lambda_i \in k$, $v_i \in V$, $w_i \in W$ et $v_i' = \lambda_i v_i \in V$. De plus, comme on construit le produit tensoriel comme un quotient (ou ce qui revient au même par la propriété universelle), il est souvent facile de construire des applications linéaires qui partent du produit tensoriel.

Passons au cas des espaces vectoriels de dimension finie [1]. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. On se donne une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de V et $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ une base de W. On va rédemontrer que le produit tensoriel existe (l'unicité se démontrant comme ci-dessus) de manière plus simple et en donner mieux qu'une famille génératrice, à savoir une base. Montrons alors que $k^{n\times m}$ vérifie la propriété universelle de $V\otimes_k W$. On fixe alors une base $(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ de $k^{n\times m}$. Pour ce faire, on a besoin d'une application bilinéaire $\Phi : V\times W \to k^{nm}$. Une telle application linéaire est entièrement déterminée par l'image de (e_i, f_j). On pose alors Φ l'unique application bilinéaire telle que $\Phi(e_i, f_j) = b_{ij}$. Soit à présent $B : V\times M \to L$ avec L un k-espace vectoriel. Une telle application bilinéaire est déterminée par les $B(e_i, f_j)$ et on cherche une application linéaire $f : k^{nm} \to L$ telle que $f\circ\Phi = B$ soit telle que pour tous $i\in\{1,\dots,n\}$ et $j\in\{1,\dots,m\}$, $f(b_{ij}) = B(e_i, f_j)$, ce qui détermine une unique application linéaire faisant commuter le diagramme et permet de conclure. En particulier, on a montré que (k^{nm}, Φ) est (à unique isomorphisme près) le produit tensoriel $V\otimes_k W$. Avec les notations ci-dessus, on constate qu'une base de ce produit tensoriel est la famille $(\Phi(e_i, f_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ que l'on a noté plus haut $(e_i\otimes f_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$. On peut aussi démontrer que cette famille forme une base directement en utilisant la construction ci-dessus du produit tensoriel. En effet, il est clair que la famille est génératrice puisque les tenseurs purs sont générateurs. Reste à montrer qu'elle est libre. Soient $(\lambda_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une famille d'éléments de k tels que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}e_i\otimes f_j = 0.$$

Il existe alors une unique application bilinéaire $B_{i_0j_0} : V\times W\to k$ telle que $B_{i_0j_0}(e_{i_0}, f_{j_0}) = 1$ et $B_{i_0j_0}(e_i, f_j) = 0$ sinon. Par propriété universelle, il vient alors une unique application linéaire $f_{i_0j_0} : V\otimes_k W\to k$ telle que $f_{i_0j_0}\circ\Phi = B_{i_0j_0}$, soit $f_{i_0j_0}(v\otimes w) = B_{i_0j_0}(v,w)$. On en déduit par linéarité que

$$0 = f_{i_0j_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}e_i\otimes f_j\right) = \lambda_{i_0j_0}$$

et la famille est bien libre !

Pour terminer un petit exercice avec quelques propriétés élémentaires du produit tensoriel à absolument connaître et comprendre !

Exercice. Soient M et N deux k-espaces vectoriels.

1. Que représente $m\otimes n$ pour $m\in M$ et $n\in N$?
2. Que signifie le fait que $m\otimes n = 0$ pour $m\in M$ et $n\in N$?
3. Que signifie le fait que $M\otimes_k N = \{0\}$?
4. Que signifie le fait que
$$\sum_{i=1}^{k} m_i\otimes n_i = \sum_{i=1}^{\ell} m_i'\otimes n_i'$$
avec $k,\ell\in\mathbf{N}^{\times}$, $m_1,\dots,m_k,m_1',\dots,m_\ell'\in M$ et $n_1,\dots,n_k,n_1',\dots,n_\ell'\in N$?
5. Soit $f : M\otimes_k N\to P$ un morphisme. Si $f(m\otimes n) = 0$ implique $m\otimes n = 0$ pour tous $m\in M$ et $n\in N$, l'application f est-elle injective ?
Indication : On pourra considérer $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ définie par $z\otimes w\mapsto zw$.

Solution.

1. Il s'agit de l'image de (m,n) par l'application $\Phi : M\times N\to M\otimes_k N$ définie ci-dessus. Plus informellement, il s'agit de l'élément $m\otimes n\in M\otimes_k N$ en lequel l'application linéaire $M\otimes_k N\to P$ associée à une application bilinéaire $B : M\times N\to P$ prend la valeur $B(m,n)$.
2. Cela est équivalent au fait que $B(m,n) = 0$ pour toute application bilinéaire $B : M\times N\to P$ pour tout k-espace vectoriel P. En effet, un sens est trivial et réciproquement $B(m,n) = 0$ pour toute application bilinéaire $B : M\times N\to P$ pour tout k-espace vectoriel P, alors l'application bilinéaire $\Phi : M\times N\to M\otimes_k N$ aussi et $\Phi(m,n) = m\otimes n = 0$. En particulier, on retiendra par exemple que pour montrer que $m\otimes n\neq 0$, il suffit d'exhiber un k-espace vectoriel P et une application bilinéaire $B : M\times N\to P$ telle que [2] $B(m,n)\neq 0$. Attention que cela n'implique pas $m = 0$ ou $n = 0$ en général mais qu'en revanche $0\otimes n = m\otimes 0 = 0$.
En revanche, dans le cas qui nous occupe ici, à savoir M et N deux k-espaces vectoriels, alors $m\neq 0\neq n$ implique que $m\otimes n\neq 0$. En effet, on peut compléter m en une base de M et N en une base de N et alors $m\otimes n$ est élément d'une base de $M\otimes_k N$ donc non

1. Notez que la démonstration ci-dessous s'applique en réalité au cas de la dimension infinie avec le lemme de Zorn.
2. On peut retrouver de cette façon que $m\otimes 0 = 0\otimes n = 0$ et montrer de façon analogue que $m_1\otimes\cdots\otimes m_k = 0$ si, et seulement si, pour toute application k-multilinéaire $M : M_1\times\cdots\times M_k\to P$, $M(m_1,\dots,m_k) = 0$.

nul. Mais ce raisonnement tombe en défaut en général car on n'a pas de théorème de la base incomplète. Une autre façon de le voir est de choisir une base (e_i) de M et (e'_j) de N. On écrit alors

$$m = \sum_i a_i e_i, \quad n = \sum_j a'_j e'_j \quad \text{de sorte que} \quad m \otimes n = \sum_{i,j} a_i a'_j e_i \otimes e'_j.$$

Puisque m et n sont non nuls, il existe i_0, j_0 tels que $a_{i_0} \neq 0 \neq a'_{j_0}$. On voit alors que le coefficient de $m \otimes n$ devant $e_{i_0} \otimes e'_{j_0}$ est non nul si bien que $m \otimes n \neq 0$.

3. On a $M \otimes_k N = \{0\}$ si, et seulement si, toute application bilinéaire $B : M \times N \to P$ est identiquement nulle pour tout k-espace vectoriel P. Cela découle immédiatement de la question précédente dans un sens et réciproquement si toute application bilinéaire $B : M \times N \to P$ est identiquement nulle pour tout k-espace vectoriel P, alors en particulier $\Phi : M \times N \to M \otimes_k N$ aussi et donc $m \otimes n = 0$ pour tous $m \in M$ et $n \in N$, ce qui implique que $M \otimes_k N = \{0\}$ car tout élément est combinaison linéaire de tenseurs purs.
Dans le cas de k-espaces vectoriels $M \otimes_A N = \{0\}$ si, et seulement si, $M = \{0\}$ ou $N = \{0\}$. En général, ce n'est pas le cas et on peut avoir $N \otimes_A M = \{0\}$ voire $M \otimes_A M = \{0\}$ avec $N \neq \{0\} \neq M$.

4. On a l'égalité si, et seulement si, pour toute application bilinéaire $B : M \times N \to P$ vers pour tout k-espace vectoriel P vérifie

$$\sum_{i=1}^{k} B(m_i, n_i) = \sum_{i=1}^{\ell} B(m'_i, n'_i).$$

5. Non en général! Le fait que $f(m \otimes n) = 0$ implique que $m \otimes n = 0$ n'implique pas l'injectivité car on n'a pas que des tenseurs purs et la propriété d'être dans le noyau n'a rien d'additif. On peut par exemple considérer l'application[3] $f : \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $z \otimes w \mapsto zw$. Il est clair que $f(z \otimes w) = 0$ implique $z = 0$ ou $w = 0$ donc $z \otimes w = 0$ mais l'application n'est pas injective car

$$f(1 \otimes i - i \otimes 1) = i - i = 0$$

mais $1 \otimes i \neq i \otimes 1$ car par exemple une $\mathbf{R}$-base de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ est donnée par $1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i$ par le cours. On pouvait aussi considérer l'application $\mathbf{R}$-bilinéaire $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $(z_1, z_2) \mapsto \overline{z_1} z_2$ par laquelle $(i, 1)$ est envoyé sur $-i$ et $(1, i)$ sur i.
Cela dit, parfois il est possible d'étudier le noyau comme on le verra mais en général, il est plus simple de construire un inverse à gauche g tel que $g \circ f = \mathrm{Id}$ ce qui établit l'injectivité et se vérifie en établissant que $g(f(m \otimes n)) = m \otimes n$ qui est bien dans ce cas une propriété additive qu'il suffit de vérifier sur les générateurs que sont les tenseurs purs.

Exercices fondamentaux de la semaine 1

Exercice 1 — Quelques isomorphismes classiques. Soit k un corps.

1. Montrer que si V est un k-espace vectoriel, alors $V \otimes_k k \cong V$.
2. Soient V_1, V_2, V_3 trois k-espaces vectoriels. Montrer que $(V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 = V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$ et en préciser la dimension lorsque V_1, V_2, V_3 sont de dimension finie.
3. Soient I un ensemble, $(V_i)_{i \in I}$ une famille de k-espaces vectoriels ainsi que V un k-espace vectoriel. Montrer que

$$V \otimes_k \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} V \otimes_k V_i.$$

Solution.

1. Plusieurs façons de faire. La première est de considérer l'application bilinéaire $B : V \times k \to V$ donnée par $B(v, \lambda) = \lambda v$. Par propriété universelle, elle donne lieu à une application linéaire $f : V \otimes_k k \to V$ telle que $f(v \otimes \lambda) = \lambda v$. Cette dernière est clairement surjective car $f(v \otimes 1) = v$ et elle est injective car tout élément de $V \otimes_k k$ est un tenseur pur. En effet, soit $x \in V \otimes_k k$, alors

$$x = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes \lambda_i = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \right) \otimes 1$$

par k-bilinéarité de $\otimes$ avec $v_i \in V$ et $\lambda_i \in k$. On a par ailleurs que $f(v \otimes \lambda) = 0$ si, et seulement si, $v = 0$ ou $\lambda = 0$. Ainsi, tout élément du noyau est nul et f est injective. Noter qu'ici, cela ne fonctionne que parce qu'on a montré que tout élément du produit tensoriel est un tenseur pur, ce qui est faux en général! On pouvait aussi construire une réciproque $g : V \to V \otimes_k k$ définie par $g(v) = v \otimes 1$. Noter que par un argument de dimension, on peut simplifier la démonstration dans le cas de dimension finie.

3. Qui provient par propriété universelle du produit tensorielle de l'application $\mathbf{R}$-bilinéaire $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$.

Une autre manière de faire est de montrer que V vérifie la propriété universelle de $V \otimes_k k$. On a besoin pour commencer d'une application bilinéaire $\Phi : V \times k \to V$ que l'on va choisir comme le B ci-dessus, à savoir $\Phi(v, \lambda) = \lambda v$. Soit alors $B : V \times k \to L$ bilinéaire avec L un k-espace vectoriel. On cherche une application linéaire $f : V \to L$ telle que $f \circ \Phi = B$ soit telle que $f(\lambda v) = B(v, \lambda)$ soit $f(v) = B(v, 1)$. On vérifie alors immédiatement que ce choix de f convient et est bien linéaire.
Intuitivement[4], $V \otimes_k k$ revient à étendre les scalaires à k. Mais les scalaires ici sont déjà dans k donc cela revient à ne rien faire et donc naturellement $V \otimes_k k \cong V$!

2. On va utiliser dans cette question la première méthode vue en question **1.** Je vous invite à vous exercer en rédigeant la seconde ! On a clairement par le cours que dans le cas de dimension finie

$$\dim_k(V_1 \otimes_k V_2 \otimes_k V_3) = \dim_k(V_1) \dim_k(V_2) \dim_k(V_3).$$

Soit $v_1 \in V_1$ fixé. On considère l'application bilinéaire $B_{v_1} : V_2 \times V_3 \to (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3$ définie par $(v_2, v_3) \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$. Par propriété universelle de $V_2 \otimes_k V_3$, cela fournit une unique application linéaire $A_{v_1} : V_2 \otimes_k V_3 \to (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3$ telle que $A_{v_1}(v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$. On a alors une application bilinéaire

$$B : \left\{ \begin{array}{ccc} V_1 \times (V_2 \otimes_K V_3) & \longrightarrow & (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 \\ (v_1, x) & \longmapsto & A_{v_1}(x). \end{array} \right.$$

Il est clair que cette application est linéaire à droite et que

$$B\left(v_1, \sum_{i=1}^{r} v_{2,i} \otimes v_{3,i}\right) = A_{v_1}\left(\sum_{i=1}^{r} v_{2,i} \otimes v_{3,i}\right) = \sum_{i=1}^{r} (v_1 \otimes v_{2,i}) \otimes v_{3,i}$$

par linéarité de A_{v_1}. En particulier, $B(v_1, v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$. Montrons la linéarité à gauche. Par exemple[5], pour v_1, v_1' dans V_1, on obtient deux applications linéaires A_{v_1} et $A_{v_1'}$ telles que $A_{v_1}(v_2 \otimes v_3) = B_{v_1}(v_2, v_3)$ et $A_{v_1'}(v_2 \otimes v_3) = B_{v_1'}(v_2, v_3)$ pour tous $v_2 \in V_2$ et $v_3 \in V_3$. Par ailleurs, on obtient une unique application linéaire $A_{v_1+v_1'}$ telle que $A_{v_1+v_1'}(v_2 \otimes v_3) = B_{v_1+v_1'}(v_2, v_3)$ pour tous $v_2 \in V_2$ et $v_3 \in V_3$. Mais on remarque que par bilinéarité de $\otimes$, il vient que $B_{v_1+v_1'}(v_2, v_3) = B_{v_1}(v_2, v_3) + B_{v_1'}(v_2, v_3)$ et ainsi par unicité dans la propriété universelle, on en déduit que $A_{v_1+v_1'} = A_{v_1} + A_{v_1'}$. Finalement, la propriété universelle de $V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$ fournit, à partir de B, une application linéaire $f : V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3) \to (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3$ telle que $f(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$.
On construit de même une application linéaire $g : (V_1 \otimes_k V_2) \otimes_k V_3 \to V_1 \otimes_k (V_2 \otimes_k V_3)$ telle que $g((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ dont on vérifie qu'elles sont inverses l'une de l'autre !

3. On va utiliser dans cette question la seconde méthode vue en question **1.** Je vous invite à vous exercer en rédigeant la première ! On va établir que $\bigoplus_{i \in I} (V \otimes_k V_i)$ vérifie la propriété universelle de $V \otimes_k \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right)$. On commence par définir une application bilinéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} V \times \bigoplus_{i \in I} V_i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} (V \otimes_k V_i) \\ \left(v, \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} v_i\right) & \longmapsto & \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} v \otimes v_i. \end{array} \right.$$

Soit alors $f : V \times \bigoplus_{i \in I} V_i \to L$ bilinéaire avec L un k-espace vectoriel. Cela induit une famille d'applications bilinéaires $f_i : V \times V_i \to L$ pour tout $i \in I$ et par propriété universelle de $V \otimes_k V_i$, cela fournit une unique famille d'applications $\tilde{f}_i : V \otimes_k V_i \to L$ telles que $\tilde{f}_i(v \otimes v_i) = f_i(v, v_i)$ pour tous $v \in V$ et $v_i \in V_i$. Par propriété universelle de la somme directe[6], il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : \bigoplus_{i \in I} V \otimes_k V_i \to L$. On a alors

$$\tilde{f} \circ \Phi \left(v, \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} v_i\right) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} \tilde{f}(v \otimes v_i) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} \tilde{f}_i(v \otimes v_i) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} f_i(v, v_i) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} f(v, v_i) = f\left(v, \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} v_i\right).$$

On a par conséquent $\tilde{f} \circ \Phi = f$. Noter que ce $\tilde{f}$ est unique car $\tilde{f}_{|V \otimes_k V_i}(v \otimes v_i) = f_i(v, v_i)$.

Vous pouvez de même établir en exercice que $V \otimes_k W \cong W \otimes_k W$.

4. Voir l'exercice 3 pour plus de détails !
5. La multiplication par un scalaire s'obtenant de la même façon est laissée en exercice.
6. Pour toute famille d'applications linéaires $f_i : M_i \to L$, il existe une unique application linéaire $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \to L$ telle que $f_{|M_i} = f_i$.

Exercice 2 — Produit tensoriel et applications linéaires. Soient k un corps et V, V', W, W' des k-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Construire une application linéaire $\varphi : \mathrm{Hom}_k(V,V')\otimes_k \mathrm{Hom}_k(W,W') \to \mathrm{Hom}_k(V\otimes_k W, V'\otimes_k W')$. Donner pour $f \in \mathrm{Hom}_k(V,V')$, $g \in \mathrm{Hom}_k(W,W')$, la matrice de l'application $\varphi(f\otimes g)$ dans une base adaptée.
2. Montrer que c'est un isomorphisme.
3. Montrer que, si l'on note V^* le dual de V, alors on a un isomorphisme entre $\theta_{V,W} : V^*\otimes_k W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V,W)$. Montrer alors que $f \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$ est de rang r si, et seulement si, r est le plus petit entier naturel tel que $\theta_{V,W}^{-1}(f)$ s'écrive comme une somme de d tenseurs élémentaires non nuls.
4. Décrire un isomorphisme entre $V^*\otimes_k V^*$ et $(V\otimes_k V)^*$. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de G-modules si V est un G-module pour G un groupe fini.
5. Montrer que l'application
$$\left\{\begin{array}{ccc} V\times V^* & \longrightarrow & k \\ (x,f) & \longmapsto & f(x)\end{array}\right.$$
fournit une application $e : V\otimes_k V^* \longrightarrow k$. Que vaut $e\circ\theta_{V,V}^{-1}$?

Solution.

1. Soient $f\in\mathrm{Hom}_k(V,V')$ et $g\in\mathrm{Hom}_k(W,W')$. On a alors que l'application
$$\begin{array}{ccc} V\times W & \longrightarrow & V'\otimes_k W' \\ (v,w) & \longmapsto & f(v)\otimes g(w)\end{array}$$
est bilinéaire par linéarité de f, de g et bilinéarité de $\otimes$. Par propriété universelle, il s'ensuit une application linéaire $f\otimes g : V\otimes_k W \to V'\otimes_k W'$ telle que $f\otimes g(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w)$ pour tous $v\in V$ et $w\in W$. Comme d'habitude, on part alors de l'application bilinéaire
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_k(V,V')\times\mathrm{Hom}_k(W,W') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(V\otimes_k W, V'\otimes_k W') \\ (f,g) & \longmapsto & f\otimes g\end{array}$$
qui donne lieu à une application k-linéaire
$$\varphi : \mathrm{Hom}_k(V,V')\otimes_k\mathrm{Hom}_k(W,W') \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V\otimes_k W, V'\otimes_k W')$$
définie par $\varphi(f\otimes_k g) = f\otimes g$. On écrira $f\otimes_k g$ pour désigner le tenseur pur dans $\mathrm{Hom}_k(V,V')\otimes_k\mathrm{Hom}_k(W,W')$ et éviter les confusions avec l'application linéaire $f\otimes g$ qui vit dans $\mathrm{Hom}_k(V\otimes_k W, V'\otimes_k W')$.
Passons à la matrice de $f\otimes g$. Notons $e_1,\dots,e_n$, $e'_1,\dots,e'_m$, $f_1,\dots,f_r$ et $f'_1,\dots,f'_s$ des bases respectivement de V, V', W et W'. On sait alors que $(e_i\otimes f_k)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant r}}$ est une base de $V\otimes_k W$ et que $(e'_j\otimes f'_\ell)_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant \ell\leqslant s}}$ est une base de $V'\otimes_k W'$. Notons B la matrice de f dans les bases (e_i) et (e'_j) et C celle de g dans les bases (f_k) et f'_ℓ). On calcule alors
$$f\otimes f(e_i\otimes f_k) = f(e_i)\otimes f(f_k) = \sum_{j=1}^m\sum_{\ell=1}^s b_{ji}c_{\ell k}e'_j\otimes f'_\ell$$
si bien que dans les bases $(e_1\otimes f_1,\dots,e_1\otimes f_r,\dots,e_n\otimes f_1,\dots,e_n\otimes f_r)$ et $(e'_1\otimes f'_1,\dots,e'_1\otimes f'_s,\dots,e'_m\otimes f'_1,\dots,e'_m\otimes f'_s)$, il vient que la matrice cherchée est donnée par[7]
$$B\otimes C = \begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1n}C \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}C & \cdots & b_{mn}C\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nr,ms}(k).$$
Cette matrice est appelée le *produit de Kronecker* de B et C et on voit facilement qu'en général, $B\otimes C \neq C\otimes B$.

COnsidérons alors le cas de matrices carrées, à savoir $n=m$ et $r=s$. On vérifie aisément que si λ est valeur propre de B et μ valeur propre de C avec $BX=\lambda X$ et $CY=\mu Y$ où $X,Y\neq 0$, alors le vecteur $X\otimes Y$ défini par $(x_1\otimes y_1,\dots,x_1\otimes y_n,\dots,x_n\otimes y_1,\dots,x_n\otimes y_n)$ est non nul[8] et on vérifie que
$$(B\otimes C)(X\otimes Y) = \lambda\mu X\otimes Y.$$
On peut alors mettre B et C sous leur forme de Jordan via P et Q (sur une clôture algébrique) et on vérifie que $P\otimes Q$ triangularise $B\otimes C$ avec sur la diagonale tous les produits possibles $\lambda\mu$. On en déduit immédiatement que
$$\mathrm{Tr}(B\otimes C) = \mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(C) \quad \text{et} \quad \det(B\otimes C) = \det(B)^r\det(C)^n.$$

7. Traiter des exemples de petite dimension pour s'en convaincre !
8. Se souvenir que sur des espaces vectoriels si $v\neq 0$ et $w\neq 0$ alors $v\otimes w\neq 0$.

La formule sur la trace est claire et pour le déterminant on a

$$\det(B \otimes C) = \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(B) \\ \mu \in \mathrm{Spec}(C)}} \lambda\mu = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(B)} \prod_{\mu \in \mathrm{Spec}(C)} \lambda\mu = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(B)} \lambda^r \det(C) = \det(B)^r \det(C)^n.$$

La formule donnant la trace est particulièrement importante du point de vue des représentations car vous savez que si la caractéristique est nulle ou première à l'ordre du groupe, alors on dispose de la forme bilinéaire sur les caractères

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1}).$$

On a alors que $\chi_W(g^{-1})$ est la caractère de la représentation contragrédiente. En effet, si $\rho_W : G \to \mathsf{GL}(W)$ est la représentation de caractère χ_W, cela correspond à une action linéaire de G sur W et l'on peut en déduire une action linéaire de G sur W^* via $g \cdot f(w) = f(g^{-1} \cdot w)$ pour $f : W \to k$ linéaire et pour tout $w \in W$. On vérifie alors que le caractère associé vérifie $\chi_{W^*}(g) = \chi_W(g^{-1})$ de sorte que

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_{W^*}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V \otimes_k W^*}(g)$$

puisque les caractères sont simplement des traces et que si $\rho_V : G \to \mathsf{GL}(V)$ et $\rho_{W^*} : G \to \mathsf{GL}(W^*)$ sont les morphismes de groupes sous-jacents, on vérifie que $\rho_{V \otimes_k W^*}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_{W^*}(g)$ au sens défini au début de cette question. Cela sera capital quand on voudra utiliser les caractères pour étudier les représerntations et je vous renvoie pour cela à l'exercice 10.

2. On a, avec les notations de la question précédente, que $\mathsf{Hom}_k(V, V')$ et $\mathsf{Hom}_k(W, W')$ admettent pour bases respectives $(f_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ qui envoie e_i sur e'_j et tous les autres e_k sur 0 et $(g_{k\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant \ell \leqslant s}}$ qui envoie f_k sur f'_ℓ et tous les autres f_t sur 0 si bien que $\mathsf{Hom}_k(V, V') \otimes_k \mathsf{Hom}_k(W, W')$ admet pour base $(f_{ij} \otimes g_{k\ell})$ et de même une base de $\mathsf{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W')$ est donnée par les $(\theta_{ijk\ell})$ qui envoie $e_i \otimes f_k$ sur $e'_j \otimes f'_\ell$ et les autres $e_t \otimes f_h$ sur 0. On vérifie alors que

$$\begin{aligned} \varphi(f_{ij} \otimes g_{k\ell})(e_t \otimes f_h) &= f_{ij}(e_t) \otimes g_{k\ell}(f_h) \\ &= \delta_{it}\delta_{hk}(e'_j \otimes f'_\ell) \\ &= \begin{cases} e'_j \otimes f'_\ell \text{ si } i = t \text{ et } h = k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Autrement dit, φ envoie une base sur une base et est donc un isomorphisme. Cela justifie l'abus de notation qui consiste à noter de la même façon $f \otimes_k g$ et $f \otimes g$.

Noter que cette démonstration ne se généralise pas au cas où tous les espaces sont de dimension infinie. La raison est que, même sous le lemme de Zorn, les familles construites restent libres mais ne sont plus génératrices. Pour s'en convaincre, si V est de dimension infinie, alors (modulo le lemme de Zorn), on peut en trouver une base $(e_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble infini I. La famille des $f_i : V \to k$ définies par $f_i(e_i) = 0$ et $f_i(e_j) = 0$ sinon est libre mais pas génératrice. En effet, la forme linéaire $F : V \to k$ définie par $F(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$ ne peut pas être combinaison linéaire finie des f_i car sinon

$$F = \sum_{\substack{j \in J \\ J \text{ fini}}} \lambda_j f_j \qquad F(e_k) = 0$$

pour tout $k \in I \smallsetminus J$. En revanche, on peut malgré tout démontrer que φ est un isomorphisme lorsque V et V' seulement sont supposés de dimension finie, ou lorsque W et W' seulement sont supposés de dimension finie ou lorsque V et W seulement sont supposés de dimension finie. Par exemple, dans le cas où V et W sont de dimension finie, on a

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{n} ke_i \quad \text{et} \quad W \cong \bigoplus_{i=1}^{m} kf_j.$$

On a alors que [9]

$$\mathsf{Hom}_k(V, V') \otimes \mathsf{Hom}_k(W, W') \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} \mathsf{Hom}_k(k, V') \otimes \mathsf{Hom}_k(k, W')$$

9. On peut en effet démontrer que

$$\mathsf{Hom}_k(V_1 \oplus V_2, W) \cong \mathsf{Hom}_k(V_1, W) \times \mathsf{Hom}_k(V_2, W).$$

En effet, se donner un morphisme qui part d'une somme directe est équivalent à se donner un morphisme qui part de chacun des termes de la somme directe et ensuite une somme directe finie est isomorphe au produit direct.

où on a utilisé l'exerice 1, question **3.** ainsi que le fait que $\mathrm{Hom}_k(kv, V') \cong \mathrm{Hom}_k(k, V')$ pour tout $v \in V$. Mais, on montre facilement que $\mathrm{Hom}_k(k, V') \cong V'$ et $\mathrm{Hom}_k(k, W') \cong W'$. Par ailleurs, on a

$$\mathrm{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W') \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Hom}_k(k \otimes_k k, V' \otimes_k W')$$

où $\mathrm{Hom}_k(k \otimes_k k, V' \otimes_k W') \cong \mathrm{Hom}_k(k, V' \otimes_k W') \cong V' \otimes_k W'$. On a donc le résultat. On obtient de la même façon le résultat quand V et V' sont de dimension fini en écrivant V comme une somme directe et $V' \cong k^m$ et en utilisant que

$$\mathrm{Hom}_k(V, V_1' \times V_2') \cong \mathrm{Hom}_k(V, V_1') \times \mathrm{Hom}_k(V, V_2').$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Hom}_k(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_k(W, W') \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{Hom}_k(k, k) \otimes \mathrm{Hom}_k(W, W') \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{Hom}_k(W, W')$$

tandis que

$$\mathrm{Hom}_k(V \otimes_k W, V' \otimes_k W') \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{Hom}_k(W, W'),$$

ce qui fournit le résultat. On procède de même lorsque W et W' sont de dimension finie par symétrie. On utilise ici fortement les propriétés de l'exercice 1.

3. On pose

$$\begin{array}{ccc} V^* \times W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(V, W) \\ (f, w) & \longmapsto & [v \mapsto f(v)w] \end{array}$$

qui est bien définie et bilinéaire. Cette application donne donc lieu par propriété universelle à une application linéaire $\theta_{V,W} : V^* \otimes_k W \to \mathrm{Hom}_k(V, W)$ telle que $\theta_{V,W}(f \otimes w)(v) = f(v)w$ pour tout $f \in V^*$, $w \in W$ et $v \in V$. Établissons qu'il s'agit d'un isomorphisme sous les hypothèses plus générales que V est de dimension finie uniquement ou que W est de dimension finie uniquement.
Si V est de dimension finie, on en choisit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ et soit $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale. On pose alors $\alpha : \mathrm{Hom}_k(V, W) \to V^* \otimes_k W$ définie par

$$\alpha(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes \varphi(e_i).$$

On a alors (noter qu'il suffit de vérifier cette identité sur les tenseurs purs car ils forment une famille génératrice)

$$\alpha \circ \theta_{V,W}(f \otimes w) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes f(e_i)w = \left(\sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*\right) \otimes w = f \otimes w$$

par bilinéarité de $\otimes$ et puisque, par définition de la base duale, les applications linéaires f et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*$ coïncident sur la base et sont donc égales. On a donc $\alpha \circ \theta_{V,W} = \mathrm{Id} V^* \otimes_k W$. De même,

$$\theta_{V,W} \circ \alpha(\varphi)(v) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{V,W}(e_i^* \otimes \varphi(e_i))(v) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(v)\varphi(e_i)$$

pour tout $v \in V$. On a alors que cette application coïncide avec φ en les e_i et donc $\theta_{V,W} \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_k(V,W)}$. Noter qu'on a besoin de l'inverse à droite et à gauche qui entraîne respectivement le caractère surjectif[10] et injectif[11]. En revanche, si on connaît déjà la bijectivité, alors on sait qu'on a un inverse à droite et un inverse à gauche et qu'ils sont égaux. On peut alors se contenter d'un sens pour exhiber un inverse.
Passons au cas où W est de dimension finie. On en fixe une base $(f_1, \ldots, f_m)$ de W et $(f_1^*, \ldots, f_m^*)$ sa base duale. On pose alors $\beta : \mathrm{Hom}_k(V, W) \to V^* \otimes_k W$ définie par

$$\beta(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} (f_j^* \circ \varphi) \otimes f_j.$$

On a alors

$$\beta \circ \theta_{V,W}(g \otimes w) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j \otimes w$$

10. Qui est équivalente à l'existence d'un inverse à droite.
11. Qui est équivalente à l'existence d'un inverse à gauche.

où $\psi_j \in V^*$ telle que pour tout $v \in V$, $\psi_j(v) = g(v)f_j^*(w)$. On a donc

$$\beta \circ \theta_{V,W}(g \otimes w) = g \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} f_j^*(w)w \right) = g \otimes w$$

tandis que

$$\theta_{V,W} \circ \beta(\varphi)(v) = \sum_{j=1}^{m} \theta_{V,W}((f_j^* \circ \varphi) \otimes f_j)(v) = \sum_{j=1}^{m} f_j^* \left(\varphi(v)\right) f_j = \varphi(v)$$

pour tout $v \in V$, ce qui permet de conclure.
Noter que si V et W sont munis d'une structure de G-module, alors $V^* \otimes_k W$ via [12] $g \cdot (f \otimes w) = f_g \otimes (g \cdot w)$ où $f_g(v) = f\left(g^{-1} \cdot v\right)$. Noter que $v \mapsto f(g \cdot v)$ ne définit pas une action à gauche sur V^*. On peut aussi munir d'une structure de G module Hom$_k(V, W)$ via $g \cdot f(v) = g \cdot f\left(g^{-1} \cdot v\right)$. En particulier pour cette action, Hom$_k(V, W)^G =$ Hom$_G(V, W)$. On a alors que $\theta_{V,W}$ est un isomorphisme de G-modules puisque pour tous $g \in G$, $f \in V^*$, $w \in W$ et $v \in V$, on a

$$\theta_{V,W}(g \cdot (f \otimes w))(v) = f\left(g^{-1} \cdot v\right) g \cdot w = g \cdot \left(f\left(g^{-1} \cdot v\right) w\right) = g \cdot \theta_{V,W}(f \otimes w)(v),$$

la dernière égalité provenant de la k-linéarité de l'action de G.

Soit à présent $f \in$ Hom$_k(V, W)$. Si f est de rang 0, elle est nulle et on a clairement le résultat. Supposons donc $f \neq 0$ et que

$$\theta_{V,W}^{-1}(f) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i \otimes w_i$$

avec $\varphi_i \in V^*$ non nuls, $w_i \in W$ non nuls et d un entier. On a alors pour tout $v \in V$ que

$$f(v) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(v) w_i$$

de sorte que Im$(f) \subseteq$ Vect$(w_1, \ldots, w_d)$ et par conséquent rang$(f) = \dim($Im$(f)) \leqslant d$. Il suffit donc d'établir que $\theta_{V,W}^{-1}(f)$ est une somme de r tenseurs purs et ceux -ci seront nécessairement non nuls d'après ce qui précède et on aura obtenu que r est le plus petit entier d tel que $\theta_{V,W}^{-1}(f)$ s'écrive comme une somme de d tenseurs purs non nuls. On sait que Im(f) est de dimension r et on en fixe une base $(e_1, \ldots, e_r)$. On a alors pour tout $v \in V$ que

$$f(v) = \sum_{i=1}^{r} c_i(v) e_i \quad c_i(v) \in k.$$

Cela permet de définir une application $c_i : V \to k$. Cette dernière est linéaire car

$$f(\lambda v + v') = \sum_{i=1}^{r} c_i(\lambda v + v') e_i \quad \text{et} \quad f(\lambda v + v') = \lambda f(v) + f(v') = \sum_{i=1}^{r} (\lambda c_i(v) + c_i(v')) e_i$$

pour tous $v, v' \in V$ et $\lambda \in k$. Comme la famille (e_i) est libre, il vient $c_i(\lambda v + v') = \lambda c_i(v) + c_i(v')$. Finalement, les $c_i \in V^{\div ast}$ et vérifient

$$\theta_{V,W}^{-1}(f)(v) = \sum_{i=1}^{r} c_i \otimes e_i$$

ce qui permet de conclure! Vous pouvez alors vous amuser à retrouver tout ce que vous savez sur le rang en utilisant ce point de vue!

4. On raisonne comme en question précédente avec l'application

$$\begin{array}{ccc} V^* \times V^* & \longrightarrow & (V \otimes_k V)^* \\ (f, g) & \longmapsto & [v_1 \otimes v_2 \mapsto f(v_1) g(v_2)] \end{array}$$

qui est bien définie comme en question **1.** pour obtenir un isomorphisme $\varphi : V^* \otimes_k V^* \to (V \otimes_k V)^*$. On pouvait aussi appliquer **1.** avec $W = V$, $V' = W' = k$ et utiliser que $V \otimes_k k \cong V$.On vérifie qu'il s'agit d'un morphisme de G-module comme en question précédente. Soient $g \in G$, $f, F \in V^*$, on a

$$\varphi(g \cdot (f \otimes F))(v_1 \otimes v_2) = f(g^{-1} \cdot v_1) F(g^{-1} \cdot v_2) = g \cdot \varphi(f \otimes F)(v_1 \otimes v_2)$$

où on a bien qu'il suffit de vérifier sur les tenseurs purs puisqu'ils sont générateurs et que l'action est linéaire. Par ailleurs, on a utilisé le fait que

$$g \cdot \varphi(f \otimes F)(v_1 \otimes v_2) = \varphi(f \otimes F)(g^{-1} \cdot (v_1 \otimes v_2)) = \varphi(f \otimes F)(g^{-1} \cdot v_1 \otimes g^{-1} \cdot v_2).$$

12. Qu'on définirait proprement en passant par la propriété universelle!

5. On suppose ici que V est de dimension finie. L'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} V^* \times V & \longrightarrow & k \\ (f,x) & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$$

est bilinéaire et fournit par conséquent une application linéaire $e : V^* \otimes_k V \longrightarrow k$ telle que $e(f \otimes v) = f(v)$. Pour tout $f \in \mathrm{End}_k(V)$, on a

$$e \circ \theta_{V,V}^{-1}(f) = e\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes f(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(f(e_i))$$

par la question **2.** On a alors si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, que

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \quad \text{de sorte que} \quad e_i^*(f(e_i)) = a_{ii}$$

par définition de la base duale. On en conclut que

$$e \circ \theta_{V,V}^{-1}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{Trace}(f).$$

Vous pouvez, là aussi, vous amuser à retrouver toutes les propriétés usuelles de la trace à partir de ce point de vue !

Exercice 3 — Le groupe $\mathfrak{S}_3$.

1. On considère l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{C}^3$ par permutation des coordonnées. Vérifier que cela définit une structure de $\mathfrak{S}_3$-module sur $\mathbb{C}^3$. Préciser sa représentation matricielle dans la base canonique.
2. Montrer que $\mathbb{C}^3$ admet deux sous-$\mathfrak{S}_3$-modules non triviaux $\mathbb{C}(1,1,1)$ et $H = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et que chacun de ceux-ci sont simples.
3. Donner une représentation matricielle de la représentation H.

On note à présent $\sigma = (1\,2\,3)$, $\tau = (1\,2)$ et V une représentation de $\mathfrak{S}_3$.

4. Montrer que V se décompose en $V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$ où V_α est le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre α.
5. Montrer que $\tau(V_\alpha) = V_{\alpha^2}$ pour $\alpha \in \{1, j, j^2\}$. En déduire que V_1 et $V_j \oplus V_{j^2}$ sont deux sous-$\mathfrak{S}_3$-modules de V.
6. Que peut-on en déduire si V est irréductible ?
7. On suppose que V est irréductible et que $V_1 \neq \{0\}$. Montrer que V est de dimension 1 et est soit la représentation triviale soit la signature.
8. On suppose que V est irréductible et que $V_j \neq \{0\}$. Soit $v \in V_j \setminus \{0\}$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par v et $\tau(v)$ est un plan $\mathfrak{S}_3$-stable. En déduire que V est $\mathfrak{S}_3$-isomorphe à H.
9. Généraliser cette méthode au groupe $\mathbf{D}_4$.

Solution.

1. On fait agir $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{C}^3$ via [13]

$$\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3) = \big(z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}\big)$$

pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ et $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$. Il s'agit bien d'une action car $\mathrm{Id} \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3)$ et pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_3$, on a

$$(\sigma' \cdot (\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3))_i = (\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3))_{\sigma'^{-1}(i)} = z_{\sigma^{-1}(\sigma'^{-1}(i))} = z_{(\sigma'\sigma)^{-1}(i)}.$$

Par ailleurs, cette action est linéaire, à savoir qu'elle vérifie

$$\sigma \cdot \big(\lambda(z_1, z_2, z_3) + (z_1', z_2', z_3')\big) = \lambda\big(\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3)\big) + \sigma \cdot (z_1', z_2', z_3').$$

On a donc bien une structure de G-module. En effet, une telle action donne lieu à un morphisme $\rho : G \to \mathfrak{S}(\mathbb{C}^3)$ et comme l'action est linéaire, on arrive en fait dans $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$ et l'action donne lieu à un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$, autrement dit à une représentation de $\mathfrak{S}_3$. Ainsi, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, en fixant la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on obtient une matrice M_σ (la matrice de $\rho(\sigma)$ dans la base canonique).

13. Bien noter que $\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3) = \big(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}\big)$ n'est **pas** une action à gauche ! Par exemple pour $\sigma = (1\,2)$ et $\sigma' = (1\,2\,3)$, on aurait avec cette éfinition

$$\sigma \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_1, z_3)$$

et

$$\sigma' \cdot (z_2, z_1, z_3) = (Z_1, Z_2, Z_3) = (Z_2, Z_3, Z_1) = (z_1, z_3, z_2).$$

Or, $\sigma'\sigma = (1\,3)$ et $(1\,3) \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_3, z_2, z_1) \neq (z_1, z_3, z_2)$

Cette famille vérifie $M_{\mathsf{Id}} = I_3$ et $M_{\sigma'}M_\sigma = M_{\sigma'\sigma}$ et la donnée d'une telle famille est équivalente à celle de la représentation ρ. La représentation matricielle correspond à cette famille de matrices (une fois un choix de base effectué) Ici, on a[14] pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ que $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$. En effet, la composante non nulle de $\rho(\sigma)(e_i)$ est la composante j telle que $i = \sigma^{-1}(j)$ soit $j = \sigma(i)$. On en déduit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ.
Noter enfin que toute cette question et la suivante se généraliseraient à $\mathfrak{S}_n$ et je vous renvoie au DM pour plus de détails!

2. On rappelle qu'un sous-$\mathfrak{S}_3$-module est un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^3$ stable par l'action de $\mathfrak{S}_3$, autrement dit tel que $\rho(\sigma)(W) \subseteq W$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. On a clairement un seul sous-espace stable de dimension nulle, à savoir $\{0\}$ et un seul de dimension 3, $\mathbb{C}^3$. Les autres sous-$\mathfrak{S}_3$-modules sont de dimension 1 ou 2. Si W est de dimension 1, il est engendré par un vecteur (z_1, z_2, z_3). Mais puisque W est $\mathfrak{S}_3$-stable, on a $(1\,2) \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_1, z_3) \in W$. Autrement dit, il existe un complexe λ tel que $(z_2, z_1, z_3) = \lambda(z_1, z_2, z_3)$ ce qui impose $\lambda = 1$ et $z_1 = z_2$. En considérant les autres transpositions, il vient que $W = \mathsf{Vect}(1, 1, 1)$ et qu'il s'agit du seul sous-$\mathfrak{S}_3$-module de dimension 1. Une représentation de dimension 1 étant nécessairement irréductible, elle est irréductible.

Si maintenant W est de dimension 2. On sait que $W \neq \{z_3 = 0\}$ car $\{z_3 = 0\}$ n'est pas $\mathfrak{S}_3$-stable car $(1\,3) \cdot (1, 1, 0) = (0, 1, 1) \notin \{z_3 = 0\}$. Par ailleurs, on considère $(z_1, z_2, 0) \in W \cap \{z_3 = 0\}$ avec $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ (ce qui est toujours possible puisqu'on a une droite vectorielle). On sait aussi que W admet une équation du type $az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$ pour $a, b, c \in \mathbb{C}^3$. On a alors $(1\,2) \cdot (z_1, z_2, 0) = (z_2, z_1, 0) \in W$ de sorte que

$$\begin{cases} az_1 + bz_2 = 0 \\ az_2 + bz_1 = 0. \end{cases}$$

Si $z_2 \neq 0$, en prenant $bL_1 - aL_2$, il vient $(b^2 - a^2)z_2 = 0$ soit $a = b$ ou $a = -b$. Mais si $a = -b$, l'équation de W est $az_1 - az_2 + cz_3 = 0$. Pour $(z_1, z_2, z_3) \in W$ tel que $z_3 \neq 0$ (ce qui existe d'après ce qui précède), on a $(1\,2) \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_1, z_3) \in W$ donc $az_2 - az_1 + cz_3 = 0$. Sommer ces deux équations fournit $2cz_3 = 0$ soit $c = 0$ et $W = \{z_1 = z_2\}$ qui n'est pas $\mathfrak{S}_3$-stable car $(1\,3) \cdot (1, 1, 2) = (2, 1, 1) \notin \{z_1 = z_2\}$. On a donc une contradiction et $a \neq b$. On a donc $a = b$ et par symétrie on obtient $a = c$ de sorte que $W = H$ est le seul sous-$\mathfrak{S}_3$-module de dimension 2. Cette représentation est irréductible car sinon elle con tiendrait une sous-représentation de dimension 1 qui d'après ce qui précède serait $\mathsf{Vect}(1, 1, 1)$ ce qui est absurde.
On propose une démonstration un peu plus savante et conceptuelle (et donc plus générale) de ce fait que l'on vient d'établir "à la main". De façon générale, soit $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ une représentation d'un groupe fini G de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle ou première à l'ordre de G. On rappelle que l'algèbre de groupe est le G-module $k[G]$ des fonctions de G dans k qui admet comme base les $(\delta_g)_{g\in G}$ où $\delta_g(g') = 1$ si $g' = g$ et 0 sinon. En particulier, il s'agit d'un k-espace vectoriel de dimension $|G|$. Par abus de notation, on notera g pour δ_g et ainsi tout élément de $k[G]$ s'écrit comme

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g \quad \text{avec} \quad \lambda_g \in k.$$

On a une structure de G-module via $g' \cdot \delta_g = \delta_{g'g} = g'g$ avec notre abus de notation. Toute représentation ρ donne lieu à un morphisme de k-algèbres

$$\tilde{\rho} : \begin{cases} G & \longrightarrow & \mathsf{End}_k(V) \\ \displaystyle\sum_{g\in G} \lambda_g g & \longmapsto & \displaystyle\sum_{g\in G} \lambda_g \rho(g). \end{cases}$$

Noter qu'on n'a plus de raison d'obtenir des isomorphismes et on arrive donc dans les endomorphismes de V. Réciproquement, remarquer qu'un tel morphismes de k-algèbres $\tilde{\rho} : G \to \mathsf{End}_k(V)$ fournit par restriction à G une représentation. En effet, un élément de G admet un inverse g^{-1} et alors $\tilde{\rho}(g^{-1})$ est un inverse pour $\tilde{\rho}(g)$ qui est donc dans $\mathsf{GL}(V)$. On considère alors

$$V^G = \{v \in V \ : \ \forall g \in G, \, g \cdot v = v\}.$$

Dans le cas du G-module $k[G]$, on a

$$k[G]^G = \mathsf{Vect}(e) \quad \text{avec} \quad e = \sum_{g\in G} g.$$

En effet, pour tout $h \in G$, on a

$$h \cdot e = \sum_{g\in G} hg$$

et $g \mapsto hg$ est une bijection de G de sorte que $h \cdot e = e \cdot e = e$. On a donc bien une inclusion. Pour l'inclusion, réciproque, soit $x = \displaystyle\sum_{g\in G} \lambda_g g \in k[G]^G$. Alors pour tout $h \in G$, on a

$$x = h \cdot x = \sum_{g\in G} \lambda_g hg.$$

14. Noter qu'en général, il suffit de décrire une matrice par classe de conjugaison puisqu'on cherchera en général à écrire des tables de caractères à partir de ces représentations matricielles.

Or la famille des (δ_g) est libre et donc en comparant les coefficients devant l'élément neutre de G de x (à savoir λ_1) et de $h\cdot x$ (à savoir λ_h, il vient $\lambda_h=\lambda_1$. On en déduit bien l'égalité. On a par ailleurs que

$$e^2=\left(\sum_{g\in G} g\right)e=\sum_{g\in G} g\cdot e=|G|e.$$

On en déduit que $\varepsilon=\frac{e}{|G|}$ appartient au centre de $k[G]$ et est un idempotent, c'est-à-dire que $\varepsilon^2=\varepsilon$. Comme la caractéristique est nulle ou première à l'ordre de G, le théorème de Maschke garantit que V^G admet un supplémentaire G-stable W. Comme ε est central, on a

$$\forall g\in G,\quad \rho(g)\circ\tilde\rho(\varepsilon)=\tilde\rho(g\varepsilon)=\tilde\rho(\varepsilon g)=\tilde\rho(\varepsilon)\circ\rho(g)$$

ce qui implique que $\tilde\rho(\varepsilon)$ est un G-morphisme [15]. On a en particulier que le noyau et l'image de $\tilde\rho(\varepsilon)$ sont des G-modules en somme directe. ON a alors que l'image de $\tilde\rho(\varepsilon)$ est en réalité V^G. En effet, si $g\cdot v=v$ pour tout $g\in G$, alors

$$v=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot v=\tilde\rho(\varepsilon)(v).$$

Réciproquement, si $v\in \mathrm{Im}(\tilde\rho(\varepsilon))$, il existe $w\in V$ tel que $v=\tilde\rho(\varepsilon)(w)$. On a alors

$$g\cdot v=\rho(g)(v)=\rho(g)\circ\tilde\rho(\varepsilon)(w)=\tilde\rho(g\varepsilon)(w)=\tilde\rho(\varepsilon)(w)=v$$

où l'on a utilisé le fait que $g\varepsilon=\varepsilon$. On a donc bien le résultat et $V=V^G\oplus \mathrm{Ker}(\tilde\rho(\varepsilon))$ une décomposition en somme directe de sous-G-modules. Soit à présent un supplémentaire G-stable de V^G quelconque. Alors pour tout $w\in W$, on a $\tilde\rho(\varepsilon)(w)\in W$ par stabilité et $\tilde\rho(\varepsilon)(w)\in \mathrm{Im}(\tilde\rho(\varepsilon))=V^G$ de sorte que $\tilde\rho(\varepsilon)(w)\in W\cap V^G=\{0\}$ et $w\in\mathrm{Ker}(\tilde\rho(\varepsilon))$. Par dimension, il vient $W=\mathrm{Ker}(\tilde\rho(\varepsilon))$.
Ouf! Revenons-en à l'exercice! On voit facilement ici que $\left(\mathbb{C}^3\right)^{\mathfrak{S}_3}=\mathrm{Vect}(1,1,1)$. On en déduit que si W est un sous-$\mathfrak{S}_3$-module irréductible [16] de dimension 2, alors il est en somme directe avec $\mathrm{Vect}(1,1,1)$ et ce qui précède garantit alors que $W=\mathrm{Ker}(\tilde\rho(\varepsilon))$. On a alors que la matrice de $\tilde\rho(\varepsilon)$ est donnée par

$$2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

et on retrouve le résultat! On peut aussi vérifier que la projection $\tilde\rho(\varepsilon)$ est orthogonale et en déduire que $W=\mathrm{Vect}(1,1,1)^\perp=H$. En effet, pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^3$, on a pour $v,v'\in\mathbb{C}^3$ avec $v\in V^G$ et $v'\in\mathrm{Ker}(\tilde\rho(\varepsilon))$,

$$(v,v'))=(\tilde\rho(\varepsilon)(v),v')=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g\cdot v,v').$$

Mais la matrice de $v\mapsto g\cdot v$ est comme on l'a vu une matrice de permutation qui est orthogonale si bien que

$$(v,v'))=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(v,g^{-1}\cdot v')=(v,\tilde\rho(\varepsilon)(v'))=0$$

car $g\mapsto g^{-1}$ est une bijection de G et car v' est dans le noyau de $\tilde\rho(\varepsilon)$.

3. On choisit [17] une base de H : $e_1=(1,-1,0)$, et $e_2=(1,0,-1)$. Le morphisme associé à H est $\rho':\mathfrak{S}_3\to \mathrm{GL}(H)$ défini par $\rho'(\sigma)=\rho(\sigma)_{|H}$ où le ρ est le morphisme associé à la représentation de la question **1.** On a toujours que $\rho'(\mathrm{Id})=\mathrm{Id}$ de matrice I_2 dans la base (e_1,e_2) de H. La matrice de $\rho'((1\,2))$ dans la (e_1,e_2) de H est donnée par

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

car $\rho'((1\,2))(e_1)=(1\,2)\cdot e_1=(-1,1,0)=-e_1$ et $\rho'((1\,2))(e_2)=(1\,2)\cdot e_2=(0,1,-1)=e_2-e_1$. Je vous laisse écrire les autres matrices de transposition mais on en aura pas besoin (elles sont toutes conjuguées à cette matrice). Enfin, la matrice de $\rho'((1\,2\,3))$ dans la (e_1,e_2) de H est donnée par

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

car $\rho'((1\,2\,3))(e_1)=(1\,2\,3)\cdot e_1=(0,1,-1)=e_2-e_1$ et $\rho'((1\,2\,3))(e_2)=(1\,2\,3)\cdot e_2=(-1,1,0)=-e_1$. Je vous laisse écrire l'autres matrice de 3-cycle mais on en aura pas besoin (elle est en fait conjuguée à cette matrice ou égale à son inverse).

15. Je rappelle qu'un G morphisme $f:V\to W$ entre deux G-modules est une application linéaire telle que pour tout $g\in G$, $f(g\cdot v)=g\cdot f(v)$ soit $f\circ\rho_V(g)=\rho_W(g)\circ f$ puisque $\rho_V(g)(v)=g\cdot v$.
16. Noter que toute sous-représentation de dimension 2 est irréductible car on a une seule sous-représentation de dimension 1.
17. On verra en question **8.** que ce choix naturel n'est ici pas le meilleur choix!

4. On sait que $\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$ avec $\tau\sigma\tau = \sigma^2 = \sigma^{-1}$. On a par ailleurs que $\sigma^3 = \mathrm{Id}$ de sorte qu'avec les notations de la question **2.**, il vient $M_\sigma^3 = I_3$. Ainsi, M_σ annule le polynôme $X^3 - 1$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. On en déduit que M_σ est diagonalisable et par conséquent $V = V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$ où V_α est le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre α.

5. Ici on fera l'abus de notation que $\tau(V_\alpha) = \rho(\tau)(V_\alpha)$. Soient $\alpha \in \{1, j, j^2\}$ et $v \in \tau(V_\alpha)$. On a donc que $v = M_\tau w$ avec $M_\sigma w = \alpha w$. On calcule alors

$$M_\sigma v = M_\sigma M_\tau w = M_{\sigma\tau} w = M_{\tau\sigma^2} w = M_\tau M_\sigma^2 w = \alpha^2 M_\tau w = \alpha^2 v$$

où on a utilisé le fait que $\sigma\tau = \tau\sigma^2$. On a donc $\tau(V_\alpha) \subseteq V_{\alpha^2}$. En appliquant ce résultat à α^2, il vient $\tau(V_{\alpha^2}) \subseteq V_{\alpha^4} = V_\alpha$ puisque $\alpha^3 = 1$. On prend alors l'image par τ pour obtenir

$$\tau^2(V_{\alpha^2}) \subseteq \tau(V_\alpha) \quad \text{soit} \quad V_{\alpha^2} \subseteq \tau(V_\alpha)$$

puisque $\tau^2 = \mathrm{Id}$. On a donc bien $\tau(V_\alpha) = V_{\alpha^2}$. En particulier, pour $\alpha = 1$, V_1 est stable par τ.Mais V_1 est un sous-espace propre de M_σ donc il ests table par σ et comme σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_3$, V_1 est $\mathfrak{S}_3$-stable et par conséquent un sous-$\mathfrak{S}_3$-module.
De même, V_j et V_{j^2} sont stables par σ en tant qu'espaces propres de M_σ. Ils ne sont pas stables par τ individuellement mais d'après ce qu'on vient de voir $V_j \oplus V_{j^2}$ est stable par τ. En conclusion, $V_j \oplus V_{j^2}$ est stable par σ et τ donc par $\mathfrak{S}_3$ et on obtient bien là encore un sous-$\mathfrak{S}_3$-module.

6. Si V est irréductible, il vient donc que soit $V_j \neq \{0\}$ (et alors $V_{j^2} = \tau(V_j) \neq \{0\}$) et alors nécessairement par simplicité $V_1 = \{0\}$ et $V = V_j \oplus V_{j^2}$ ou bien $V_j = V_{j^2} = \{0\}$ et $V = V_1$.

7. On suppose que V est irréductible de dimension n et que $V_1 \neq \{0\}$. On a donc $V = V_1$ d'après la question précédente. On a donc que $M_\sigma = I_n$. En particulier tout sous-espace vectoriel de V est stable par σ. Or, on a $\tau^2 = \mathrm{Id}$ de sorte que M_τ annule le polynôme scindé à racine simples $X^2 - 1$. On a donc $V = W_1 \oplus W_{-1}$ avec W_ε le sous-espace propre associé à $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ de M_τ. Chacun de ces deux sous-espaces propres est stable par τ et par σ donc un sous-$\mathfrak{S}_3$-module. Comme V est irréductible on doit avoir $V = W_1$ ou $V = W_{-1}$. Si $V = V_1 = W_1$, alors $M_\sigma = M_\tau = I_n$ et l'action est donc triviale puisque σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_3$. Ainsi tout sous-espace vectoriel de V est $\mathfrak{S}_3$-stable et donc le fait que V soit irréductible implique que V soit de dimension 1.
Soit $V = V_1 = W_{-1}$ et $M_\sigma = I_n$ et $M_\tau = -I_n$. On en déduit de même que tout sous-espace vectoriel de V est stable par σ et τ donc par $\mathfrak{S}_3$ et par conséquent V est de dimension 1 et la représentation correspond à un morphisme non trivial $\rho : \mathfrak{S}_3 \to \mathbb{C}^*$ qui envoie σ sur 1 et τ sur -1. On sait alors que le seul morphisme non trivial de ce type est la signature. En conclusion, on obtient dans ce cas que V est irréductible de degré 1 et est soit la représentation triviale soit la signature.

8. On suppose que V est irréductible et que $V_j \neq \{0\}$. Soit $v \in V_j \smallsetminus \{0\}$. Soit W l'espace vectoriel engendré par v et $\tau(v)$. Alors W est de dimension 2. En effet, sinon il existerait $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tau(v) = \lambda v$. Mais alors

$$\lambda j v = \sigma(\tau(v)) = \sigma \circ \tau(v) = \tau \circ \sigma^2(v) = j^2 \tau(v) = j^2 \lambda v,$$

ce qui est absurde. On vérifie alors que W est τ stable (ce qui est évident puisque $\tau^2(v) = v$) et σ stable puisque

$$\sigma(v) = jv \in W \quad \text{et} \quad \sigma(\tau(v)) = \tau(\sigma^2(v)) = j^2 \tau(v) \in W.$$

Cela implique que W est un sous-$\mathfrak{S}_3$-module de V et comme V est irréductible, que $V = W$. Comme nous sommes en caractéristique nulle (voir l'exercice 9), deux représentations sont isomorphes si, et seulement si, elles ont le même caractère. On a que pour H, avec la représentation matricielle de la question **3.**, on a

$$\chi_H(\mathrm{Id}) = 2, \quad \chi_H(ab) = 0, \quad \chi_H(abc) = -1$$

où dans $\mathfrak{S}_n$ on rappelle que [18] que les classes de conjugaison sont donné par le type de décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Dans $\mathfrak{S}_3$ on a donc trois classes de conjugaison qui sont l'identité, les transpositions et les 3-cycles. On peut alors écrire que pour W, si on note $\rho_W : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}(W)$ le morphisme sous-jacent, la matrice de l'identité dans la base $(v, \tau(v))$ est I_2, celle de $\tau = (1\,2)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car $\tau(v) = \tau(v)$ et $\tau(\tau(v)) = v$. Enfin, la matrice de $\sigma = (1\,2\,3)$ dans la base $(v, \tau(v))$ est

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

car $\sigma(v) = jv$ et $\sigma(\tau(v)) = j^2\tau(v)$. Il s'ensuit que le caractère de W est donné par

$$\chi_W(\mathrm{Id}) = 2, \quad \chi_W(ab) = 0, \quad \chi_W(abc) = j + j^2 - 1.$$

18. Voir le TD 1 par exemple.

Les deux caractères sont les mêmes et donc H est $\mathfrak{S}_3$-isomorphe à W. On pouvait aussi choisir comme base de H la famille $e_1 = (1, j, j^2)$ et $e_2 = \tau(e_1) = (j, 1, j^2)$ et vérifier que l'isomorphisme linéaire $f : W \to H$ tel que $f(v) = e_1$ et $f(\tau(v)) = e_2$ est un $\mathfrak{S}_3$-morphisme si bien que f est un isomorphisme de $\mathfrak{S}_3$-modules.
Noter qu'on a trois classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_3$ et trois représentations irréductibles si bien qu'on a en fait la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$. On reviendra sur celle-ci plus en détails dans l'exercice 10. On obtient en notant θ le caractère de H ou de W :

$\mathfrak{S}_3$	Id	$(a\,b)$	$(a\,b\,c)$
$\mathbb{1}$	1	1	1
ε	1	-1	1
θ	2	0	-1

9. On a vu que $G = \mathbf{D}_4$ est engendré par ρ d'ordre 4 et s d'ordre 2 tels que $s\rho s = \rho^{-1} = \rho^3 = -\rho$. En raisonnant de la même façon, on a donc que M_ρ annule le polynôme scindé à racine simples $X^4 - 1$ et que par conséquent toute représentation de dimension finie V de G est de la forme $V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus V_i \oplus V_{-i}$. On a alors de même que $s(V_\alpha) = V_{\alpha^3}$ de sorte que V_1, v_{-1} et $V_i \oplus V_{-i}$ sont trois sous-G-modules de V. Supposons alors V irréductible. Si $V_1 \neq \{0\}$, on a $V = V_1$ et on conclut de même que soit $M_s = I_n$ soit $M_s = -I_n$ et que V est de dimension 1. On obtient ainsi deux représentations irréductibles de degré 1 qui correspondent au caractère trivial et au morphisme $\chi_1 : G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\chi_1(\rho) = 1$ et $\chi_1(s) = -1$. Si $V_{-1} \neq \{0\}$, on obtient de même que que $M_\rho = -I_n$ et $M_s = \pm I_n$ et V est de dimension 1. Cela fournit alors deux caractères linéaires supplémentaires, à savoir $\chi_2 : G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\chi_2(\rho) = -1$ et $\chi_2(s) = 1$ et $\chi_3 : G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\chi_3(\rho) = -1$ et $\chi_3(s) = -1$. Enfin, si $V_i \neq \{0\}$, on considère $v \in V_i \setminus \{0\}$ et on constate que $W = \mathrm{Vect}(v, s(v))$ est un plan G-stable de sorte que $V = W$. On a alors une représentation irréductible de degré 2 telle que la matrice associé à ρ dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et celle associée à s soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On avait calculé les classes de conjugaisons dans G dans le TD 1 et on avait obtenu 5 classes de conjugaisons, l'identité, moins l'identité ainsi que $\{\pm s\}$, $\{\pm\rho\}$ et $\{\pm s\rho\}$. On a donc toute la table de caractères de $\mathbf{D}_4$ où l'on note θ le caractère de la représentation associée à W :

$\mathbf{D}_4$	Id	$-$Id	ρ	s	$s\rho$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
θ	2	-2	0	0	0

On utilise ici que $-\mathrm{Id} = \rho^2$ de sorte que pour calculer le caractèe en $-\mathrm{Id}$, il suffit de prendre la trace du carré de la matrice de ρ et pour $s\rho$ il suffit de prendre la trace du produit de la matrice de s par celle de ρ. En dimension 1, on peut aussi utiliser le fait que les caractères linéaires sont alors des morphismes de groupes. On reviendra là aussi sur cette table plus en détails dans l'exercice 13. On verra aussi comment déduire de cette table tous les sous-groupes distingués, si G est simple et son groupe dérivé. Noter enfin que l'on peut montrer (voir ici) que le nombre de caractères de degré 1 est égal au cardinal de l'abélianisé de G. On a que $\{\pm 1\} \subseteq D(G)$ car par exemple $[s, \rho] = -\mathrm{Id}$ et on a égalité car $G/\{\pm 1\}$ est d'ordre 4 donc abélien ce qui fournit $D(G) \subseteq \{\pm 1\}$. Il est alors facile de voir si $\pi : G \to G/D(G)$ est la surjection canonique que $\pi(s)^2 = \pi(s^2) = \pi(\mathrm{Id})$, $\pi(\rho)^2 = \pi(\rho^2) = \pi(-\mathrm{id}) = \pi(\mathrm{Id})$ et de même $\pi(s\rho)^2 = \pi(\mathrm{Id})$ de sorte que tous les éléments du quotient sont d'ordre divisant 2. On sait que cela implique $G^{\mathrm{ab}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Cela fournit le nombre de caractères linéaires mais aussi puisque le groupe des caractères linéaires [19] est isomorphe à $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$, lui-même isomorphe à G^{ab}. Cela permet de retrouver tous les caractères linéaires. Noter que dans le cas de $\mathfrak{S}_n$, on sait aussi que $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour tout $n \geqslant 2$ (cela découle de la simplicité de $\mathfrak{A}_n$ si $n \geqslant 5$ et on le vérifie à la main dans les cas restants) si bien qu'on retrouve le fait qu'on a deux représentations de degré 1 puisque $\mathfrak{S}_N/D(\mathfrak{S}_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On pourrait aussi retrouver ces deux caractères grâce aux isomorphismes $\widehat{\mathfrak{S}_n} \cong \widehat{\mathfrak{S}_n^{\mathrm{ab}}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercices complémentaires de la semaine 1

Exercice 4 — Pour maîtriser le vocabulaire.

1. À quoi correspond une représentation du groupe trivial ? De $\mathbb{Z}$? De $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Même question avec une sous-représentation.

19. Donc des morphismes de groupes $G \to \mathbb{C}^*$, souvent noté $\widehat{G}$.

3. Quels sont les G-modules simples lorsque G est le groupe trivial ?
4. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de dimension 1 soit donnée par le module trivial soit par le module D pour lequel l'action de l'élément non trivial sur la droite D se fait par multiplication par -1. Montrer que toute représentation est semi-simple.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1. Combien existe-t-il de représentations irréductibles non isomorphes sur $\mathbb{C}$? Montrer que toute représentation est semi-simple.
6. Vérifier qu'une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1. Combien existe-t-il de représentations irréductibles de dimension finie non isomorphes sur $\mathbb{C}$? Que se passe-t-il si on change de corps ? En considérant un bloc de Jordan, construire une représentation de dimension finie de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas somme directe de modules simples.

Solution.

1. Une représentation du groupe trivial correspond à un morphisme de groupes $\{e\} \to \mathrm{GL}(V)$ soit simplement à la donnée d'un espace vectoriel V. Une représentation de $\mathbb{Z}$ correspond à morphisme de groupes $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V)$. Or, $\mathbb{Z}$ est monogène engendré par 1 et donc la donnée d'un tel morphisme correspond à la donnée d'un espace vectoriel V et d'un élément $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ (à savoir $\rho(1)$). De même $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique et la donnée d'une représentation correspond à la donnée d'un espace vectoriel V ainsi que d'un élément $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ vérifiant $\varphi^n = \mathrm{Id}$ (à savoir à nouveau $\rho(\overline{1})$) ?
2. Une sous-représentation du groupe trivial est simplement un sous-espace vectoriel (la stabilité par G est alors toujours vérifiée). Dans le cas de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il s'agit de la donnée d'un sous-espace vectoriel stable par φ (correspondant à $\rho(1)$). La stabilité pour tout élément de G s'en déduit par le caractère monogène.
3. Il s'agit simplement des espaces vectoriels de dimension 1 car tout espace vectoriel de dimension supérieure admet des sous-espaces vectoriels non triviaux et par conséquent des sous-représentations non triviales.
4. Une représentation de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspond à la donnée d'un espace vectoriel V et d'une symétrie $s = \rho(\overline{1})$ de V (autrement dit un automorphisme linéaire vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}$). On a alors que s annule un polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1$ si k n'est pas de caractéristique 2. Dans ce cas, $V = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ est une décomposition en somme directe de deux sous-représentations. Si la représentation est irréductible, on doit avoir $V = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $s = \mathrm{Id}$ de sorte que tout sous-espace vectoriel est G-stable et V doit être de dimension 1. On obtient la représentation triviale. Soit $V = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ et $s = -\mathrm{Id}$ de sorte que tout sous-espace vectoriel est G-stable et V doit être de dimension 1.On obtient par conséquent bien soit le module trivial soit une droite D pour laquelle l'action de l'élément non trivial se fait par multiplication par -1. La décomposition $V = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ permet immédiatement d'obtenir la semi-simplicité.
   En caractéristique 2, on a que s annule $X^2 - 1 = (X+1)^2$. Ainsi, $s + \mathrm{Id}$ est nilpotent. Soit on a $s = -\mathrm{Id}$ et on conclut comme ci-dessus soit $s \neq -\mathrm{Id}$ et on connaît alors les sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent[20] sont $\{0\}, \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}), V$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ sinon $s + \mathrm{Id}$ est inversible et nilpotent ce qui est impossible. On en déduit que $V = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})^2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ et on conclut comme précédemment que V est de dimension 1 et qu'il s'agit de la représentation triviale. Noter que les espaces stables par s et $s + \mathrm{Id}$ sont les mêmes.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Une représentation de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un automorphisme linéaire ϕ de V tel que $\phi^n = \mathrm{Id}$ si bien que ϕ annule le polynôme $X^n - 1$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. On en déduit que ϕ est diagonalisable et que V est somme directe des sous-espaces propres. Chacun de ces sous-espaces propres sont G-stables (car stables par ϕ et G est cyclique). SI V est irréductible, on en déduit qu'il existe une racine n-ème de l'unité ξ telle que $V = \mathrm{Ker}(\phi - \xi\mathrm{Id})$ est de dimension 1. On obtient ainsi n représentations irréductibles deux à deux non isomorphes toutes de dimension 1. Cela pouvait se prévoir puisque G est fini abélien, on sait alors que toutes ses représentations irréductibles sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ou première à l'ordre de $|G|$ sont de dimension 1 et on a autant que $|G| = |G^{\mathrm{ab}}|$. Noter qu'on a bien $|G|$ classes de conjugaison dans ce cas. L'égalité
   $$V = \bigoplus_{\xi \in \mathbb{U}_n} \mathrm{Ker}(\phi - \xi\mathrm{Id})$$
   permet d'obtenir la semi-simplicité.
6. Soit $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible de $G = \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$. On sait alors que $\varphi = \rho(1)$ admet une valeur propre car son polynôme caractéristique admet une racine dans $\mathbb{C}$ qui est algébriquement clos. Ainsi, V admet un sous-espace stable D de dimension 1. Par simplicité, on a que $V = D$ est de dimension 1. On constate par ailleurs que deux représentations de $\mathbb{Z}$, disons $\rho_1 : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V_2)$ correspondant à un automorphisme $\varphi_1 = \rho_1(1)$ de V_1 et $\varphi_2 = \rho_2(1)$ de V_2 sont isomorphes si on dispose d'un isomorphisme $f : V_1 \to V_2$ tel que $f \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$, autrement dit si φ_1 et φ_2 sont semblables. Dans le cas de deux représentations irréductibles, elles correspondent à deux morphismes de groupes $\rho_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ et $\rho_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, soit à la donnée de $\rho_1(1) = \lambda_1 \in \mathbb{C}^*$ et $\rho_2(1) = \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$. Ces deux représentations sont alors isomorphes d'après ce qui précède si, et seulement si, $\lambda_1 = \lambda_2$. On obtient donc une infinité de telles représentations irréductibles. Si on change de corps et qu'on conserve l'hypothèse algébriquement clos, on obtient de la même façon que les représentations irréductibles sont de dimension 1 et autant de représentations irréductibles que le cardinal de k^*. Si le corps n'est plus supposé algébriquement clos, comme sur $\mathbb{R}$, on peut

20. Voir par exemple Beck, Malick, Peyré : *Objectif Agrégation*, question a) de l'exercice 4.9 du Chapitre 4.

obtenir des représentations irréductibles de degré 2 comme par exemple $V = \mathbb{R}^2$ et φ dont la matrice dans la base canonique est la matrice compagnon d'un polynôme irréductible, par exemple X^2+1. En fait, une représentation est irréductible si elle correspond à un isomorphisme cyclique de polynôme caractéristique irréductible[21]. Soit $V = k^2$ et φ de matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut montrer[22] que les seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$, Ker$(\varphi - \mathrm{Id})$ et V. Ainsi, V n'est pas irréductible puisque Ker$(\varphi - \mathrm{Id})$ est un sous-espace stable non trivial mais n'est pas somme directe de sous-représentations irréductibles puisque la seule représentation irréductible est Ker$(\varphi - \mathrm{Id})$.

Exercice 5 — Extension des scalaires.

1. Soient $k \subseteq K$ deux corps et V un k-espace vectoriel. Munir $V_K := V \otimes_k K$ d'une structure de K-espace vectoriel.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une k-base de V. Exhiber une K-base de V_K et comparer $\dim_k(V)$ et $\dim_K(V_K)$.
3. Soient W un k-espace vectoriel et $f : V \to W$ une application k-linéaire. Montrer que $f_K = f \otimes \mathrm{Id}_K : V_K \to W_K$ est une application K-linéaire. On fixe une base $\mathcal{C}$ de W. Comparer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et celle de f_K dans les bases correspondantes de la question **2.**
4. On suppose que V est un G-module sur k avec G un groupe fini. Construire sur V_K une structure de G-module sur K ayant la même représentation matricielle que celle de V.
   Une représentation de G sur K qui est de la forme V_K pour une représentation V de G sur k est dite *réalisable sur* k.

Solution.

1. Pour munit $V_K := V \otimes_k K$ d'une structure de K-espace vectoriel, on doit définir une multiplication par les scalaires, soit une application $K \times (V \otimes_k K) \to V \otimes_k K$. On a alors pour tout $\lambda \in K$ une application bilinéaire $V \times K \to V \otimes_k K$ donnée par $(v, \mu) \mapsto v \otimes (\lambda\mu)$. Cette dernière donne lieu à une application linéaire $f_\lambda : V \otimes_k K \to V \otimes_k K$ telle que $f_\lambda(v \otimes \mu) = v \otimes (\lambda\mu)$. On pose alors
$$\lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^r v_i \otimes \mu_i\right) = f_\lambda\left(\sum_{i=1}^r v_i \otimes \mu_i\right) = \sum_{i=1}^r f_\lambda(v_i \otimes \mu_i) = \sum_{i=1}^r v_I \otimes (\lambda\mu_i).$$
   On vérifie que $(V_K, +, \cdot)$ est bien un K-espace vectoriel.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une k-base de V. Montrons que $(e_i \otimes 1)_{i\in I}$ est une K-base de V_K. On a que la famille est génératrice puisque par définition du produit tensoriel, les $v \otimes \lambda$ avec $v \in V$ et $\lambda \in K$ sont générateurs mais au vu de la défiition de la loi de externe faisant de V_K un K-espace vectoriel, $v \otimes \lambda = \lambda(v \otimes 1)$. Par ailleurs, on a
$$V = \bigoplus_{i\in I} k e_i$$
   de sorte que par l'exercice 1
$$V_K = \bigoplus_{i\in I} k e_i \otimes_k K.$$
   Mais, tout élément de $ke_i \otimes_k K$ s'écrit de manière unique sous la forme $e_i \otimes \lambda_i$ pour $\lambda_i \in K$ de sorte que tout élément de V_k s'écrit de manière unique sous la forme
$$\sum_{i\in I} e_i \otimes \lambda_i = \sum_{i\in I} \lambda_i (e_i \otimes 1)$$
   ce qui montre bien qu'on a une K-base. Ainsi, on a $\dim_k(V) = \dim_K(V_K)$.
   On pouvait aussi obtenir la liberté directement et prendre $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que
$$\sum_{i\in I} \lambda_i(e_i \otimes 1) = 0 = \sum_{i\in I} e_i \otimes \lambda_i.$$
   On peut alors se fixer une k-base $(f_j)_{j\in J}$ de K et on écrit pour tout $i \in I$
$$\lambda_i = \sum_{j\in J} \lambda_{ij} f_j \quad \text{avec} \quad \lambda_{ij} \in k$$
   et
$$0 = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} \lambda_{ij} e_i \otimes f_j.$$
   On peut alors trouver comme dans le guide de survie construire une application linéaire $f_{ij} : V_K \to K$ telle que $f_{ij}(e_i \otimes f_j) = 1$ et 0 sinon. Il s'ensuit en prenant l'image par f_{ij} que $\lambda_{ij} = 0$ et que la famille est libre !

21. Voir par exemple ici, exercue 2, question **3.**
22. Voir par exemple eck, Malick, Peyré : *Objectif Agrégation*, question a) de l'exercice 4.2 du Chapitre 4.

3. Soient W un k-espace vectoriel et $f : V \to W$ une application k-linéaire. Posons $f_K = f \otimes \text{Id}_K : V_K \to W_K$. On a pour tout (il suffit de vérifier la propriété sur les tenseurs purs par stabilité de f_k par somme et puisque tout élément de V_K est une somme de tenseurs purs)
$$f_K(\lambda \cdot (v \otimes \mu)) = f_K(v \otimes (\lambda\mu)) = f(v) \otimes (\lambda\mu = \lambda \cdot (f(v) \otimes \mu) = \lambda \cdot f_K(v \otimes \mu)$$
pour tous $v \in V$, $\lambda, \mu \in K$ et par définition de la loi externe sur V_K. Ainsi f_K est une application K-linéaire. On fixe une base $\mathcal{C}$ de W. Un calcul immédiat fournit que les matrices M de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et celle M_K de f_K dans les bases correspondantes de la question **2.** sont les mêmes. En effet,
$$\forall i \in I, \quad f_K(e_i \otimes 1) = f(e_i) \otimes 1 = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} e_k \otimes 1.$$
On a là une façon de voir une matrice à coefficients dans k comme une matrice à coefficients dans K.

4. On suppose que V est un G-module sur k avec G un groupe fini.Il suffit de poser $g \cdot (v \otimes \lambda) = (g \cdot v) \otimes \lambda$. On montre que c'est bien défini comme en question **1.** et que les représentations matricielles sont les mêmes comme en **3.** En effet, si la représentation est donnée par $\rho : G \to \text{GL}(V)$, on a que la structure de G-module sur V_K est donnée par $\rho_K : G \to \text{GL}(V_K)$ avec $\rho_K(g) = \rho(g)_K$. Une représentation de G sur K qui est de la forme V_K pour une représentation V de G sur k est dite *réalisable sur* k.

Exercice 6 — Un module non semi-simple. Soient G un groupe fini, p un nombre premier qui divise le cardinal de G et $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrer que la droite de $k[G]$ engendrée par $\sum_{g \in G} g$ est un sous-G-module de $k[G]$ qui n'admet pas de supplémentaire.
2. En déduire que $k[G]$ n'est pas un G-module semi-simple.

Solution.

1. On a vu dans l'exercice 3 que cette droite est en fait $k[G]^G$ et est donc un sous-G-module. Posons $V = \text{Vect}(x)$ avec $x = \sum_{g \in G} g$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que V admette un supplémentaire G-stable W tel que $k[G] = V \oplus W$. Soit alors
$$w = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in W.$$
On considère alors le morphisme d'augmentation
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} k[G] & \longrightarrow & k \\ \displaystyle\sum_{g \in G} \lambda_g g & \longmapsto & \displaystyle\sum_{g \in G} \lambda_g. \end{array} \right.$$
On constate alors que
$$x \cdot w = \sum_{g \in G} \lambda_g x \cdot g = x\varphi(w).$$
puisque $x \cdot g = x$ comme dans l'exercice 3. On a ainsi par stabilité que $x \cdot w \in W$ mais par ailleurs on vient de voir que $x \cdot w = x\varphi(w) \in V$. Or, $V \cap W = \{0\}$ si bien que $x \cdot w = x\varphi(w) = 0$. On a donc
$$\sum_{g \in G} \varphi(w) g = 0$$
et par liberté, $\varphi(w) = 0$. On en déduit que $W \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ et par dimension, $W = \text{Ker}(\varphi)$. On a alors que V et $\text{Ker}(\varphi)$ sont supplémentaires. C'est absurde puisque $V \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ puisque $\varphi(x) = |G| = 0$ puisqu'on a supposé que $p \mid |G|$.
2. Je vous renvoie pour ceci à la page 5 ici.

Exercice 7 — Centre et lemme de Schur. Soient G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur un corps algébriquement clos.

1. Montrer que tout élément du centre de G agit sur V comme une homothétie.
2. En déduire que si le centre de G n'est pas cyclique, la représentation de V n'est pas fidèle.

Solution.

1. Soient $\rho : V \to \text{GL}(V)$ le morphisme correspondant à la représentation et $g \in Z(G)$. On a alors pour tout $g' \in G$ que
$$\rho(g) \circ \rho(g') = \rho(g'g) = \rho(gg') = \rho(g') \circ \rho(g)$$
de sorte que $\rho(g)$ est un isomorphisme k-linéaire et G-invariant, autrement dit un élément de $\text{End}_G(V)$. Par le lemme de Schur, sous les hypothèses de l'énoncé, on sait que cela implique que $\rho(g)$ est une homothétie soit que g agit sur V comme une homothétie.
On rappelle que comme le corps est algébriquement clos, il existe une valeur propre $\lambda \in k$ de $\rho(g)$. On a donc que $\rho(g) - \lambda\text{Id}$ est un G-morphisme non injectif. Or, son noyau est un G-module non trivial donc par simplicité il est égal à V et $\rho(g) = \lambda\text{Id}$. On notera $\lambda(g)$ le rapport de l'homothétie $\rho(g)$ pour $g \in Z(G)$.

2. Supposons la représentation de V fidèle. On a alors un morphisme injectif $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$. On a un morphisme $Z(G) \to k^*$ défini par $g \mapsto \lambda(g)$. Il s'agit bien d'un morphisme puisque pour $g, g' \in Z(G)$, on a $\rho(g) \circ \rho(g') = \rho(gg')$ est une homothétie de rapport $\lambda(g)\lambda(g')$ et $\lambda(gg')$. Par ailleurs, ce morphisme est injectif puisque si $\lambda(g) = 1$, $\rho(g) = \mathsf{Id}$ et $g \in \mathsf{Ker}(\rho) = \{e\}$ de sorte que $g = e$. On réalise ainsi $Z(G)$ comme un sous-groupe de k^*. On sait alors que tout sous-groupe fini du groupe des inversibles d'un corps est cyclique[23] et donc $Z(G)$ est cyclique !

Exercices fondamentaux de la semaine 2

Exercice 8 — Groupes d'ordre pq et p^3.

1. Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. On considère G un groupe non abélien d'ordre pq. Montrer que $D(G)$ est l'unique q-Sylow de G. Déterminer alors le groupe des caractères linéaires de G à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$.
2. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. Montrer que $D(G) = Z(G)$ est d'ordre p. Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$.

Exercice 9 — Irréductibilité. Soient G un groupe fini, k un corps de caractéristique nulle et χ un caractère de G sur k.

1. On suppose k algébriquement clos. Montrer que si χ est irréductible, alors $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$.
2. Montrer que $\langle \chi, \chi \rangle_G$ est une somme de carrés d'entiers.
3. En déduire que si $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$, alors χ est irréductible.

Exercice 10 — Tables de caractères.

1. Déterminer la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$.
2. Soit G un groupe fini et V une représentation irréductible de G sur $\mathbb{C}$ et χ un caractère linéaire de G. Montrer que $\chi \otimes V$ est une représentation irréductible de G.
3. Déterminer la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.
4. Déterminer la table de caractères de $\mathbb{H}_8$.

Exercice 11 — Dimensions des représentations irréductibles. Soit G un groupe fini. Le but de cet exercice est d'établir que les dimensions des représentations irréductibles sur $\mathbb{C}$ divise l'ordre de $G/Z(G)$. Soit V une représentation irréductible.

1. Construire sur $V^{\otimes m}$ une structure de G^m-module. Montrer que la représentation associée est irréductible.
2. Montrer que si $g \in Z(G)$, alors $\rho_V(g)$ est une homothétie. On notera $\lambda(g)$ son rapport.
3. On note H le sous-groupe de G^m formé des éléments $(g_1, \ldots, g_m)$ avec $g_i \in Z(G)$ et $g_1 g_2 \cdots g_m = 1$. Montrer que H agit trivialement sur $V^{\otimes m}$. En déduire que $V^{\otimes m}$ fournit en fait une représentation de G^m/H irréductible.
4. En déduire que $\dim(V) \mid \#G/Z(G)$.

Exercices complémentaires de la semaine 2

Exercice 12. Soit G un groupe.

1. Calculer $\mathsf{End}_G(k[G])$.
2. Montrer que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est semi-simple et en déterminer les composantes isotypiques.
3. En déduire que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{C}$-algèbre, à $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 13 — Groupe diédral. On pose $G = \mathbf{D}_4$.

1. Déterminer $D(G)$ et G^{ab}.
2. Montrer que les représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$ sont de dimension inférieure ou égale à 2.
3. Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$. Déterminer une réalisation matricielle de chacune d'entres elles. Comparer avec $\mathbb{H}_8$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 — Représentations réelles d'un groupe cyclique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse dans cette exercice aux représentations de dimension finie de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les représentations de dimension 1 de G.
2. Soit P un diviseur irréductible de $X^n - 1$. Montrer que la multiplication par la classe de X dans $\mathbb{R}[X]/(P)$ définit un G-module simple, que l'on notera V_P.
3. Soient P et Q deux diviseurs irréductibles unitaires de $X^n - 1$. Montrer que V_P est isomorphe à V_Q si, et seulement si, $P = Q$.

23. Voir par exemple ici, théorème 2.21.

Soit V une représentation de dimension finie de G. On note $\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}(V)$ le morphisme de groupes associé et $f = \rho(\overline{1})$.

4. Soit P un diviseur irréductible de degré 1 de $X^n - 1$. Montrer que toute droite de $\mathsf{Ker}(P(f))$ est G-stable. En déduire que $\mathsf{Ker}(P(f))$ est semi-simple.

5. Soit P un diviseur irréductible de degré 2 de $X^n - 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathsf{Ker}(P(f))$, la famille $(x, f(x))$ engendre un G-module irréductible isomorphe à V_P. En déduire que $\mathsf{Ker}(P(f))$ est semi-simple.

6. Montrer que V est semi-simple et que ses sous-représentations irréductibles sont (à isomorphisme près) les V_P.

7. Déterminer la composante V_P-isotypique de V pour tout P diviseur irréductible de $X^n - 1$.

8. Déterminer le nombre de représentations irréductibles de G sur $\mathbb{R}$.