Cours du 11 février

K. Destagnol

Université Paris Saclay

11 février 2021

Rappels sur le produit scalaire :

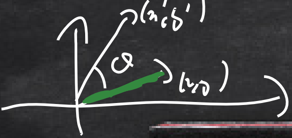
① Dans $\mathbb{R}^2$

$(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$. le produit scalaire de (x,y) et de (x',y'), noté $(x,y)\cdot(x',y') = xx' + yy'$

$$= \|(x,y)\| \times \|(x',y')\| \times \cos(\theta$$

où $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\|(x',y')\| = \sqrt{x'^2+y'^2}$

et



Rq : $\|(x,y)\| =$ longueur du vecteur (x,y)

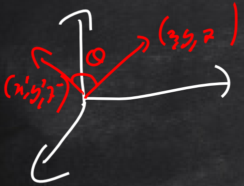
② Dans $\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = xx' + yy' + zz'$$

$$= \|(x,y,z)\| \times \|(x',y',z')\| \cos \theta$$

où $\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\|(x',y',z')\|$

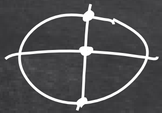
$$= \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$



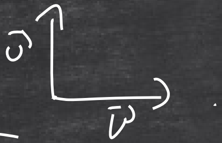
Ex : $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (1,-1,0)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 1 + 1\times(-1) + 0\times 0 = 1-1+0 = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\boxed{\cos\theta}$$

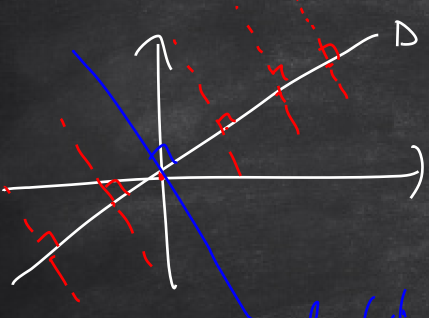


$\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}.$$

orthogonal d'un sous-espace vectoriel :

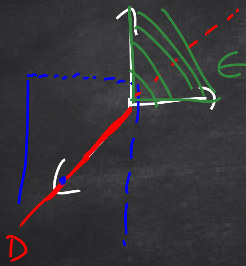


D droite.

seule droite $\perp$ à D passant par l'origine $\Rightarrow$ c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

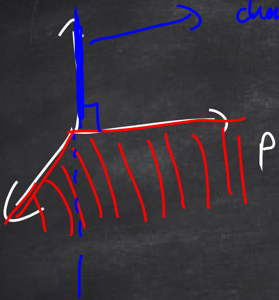
On appelle cette droite Δ l'orthogonal de D.
On la note $D^\perp$.

Dans $\mathbb{R}^3$



plan qui passe par l'origine donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et il est perpendiculaire à D.

On appelle ce plan l'orthogonal de D et on le note $D^{\perp}$.



droite passant par $(0,0,0)$ dans
un sev de $\mathbb{R}^3$ perpendiculaire
au plan.

On appelle cette droite l'orthogonal du plan P et on la note $P^\perp$.

Famille orthonormée :

① Dans $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ forment une famille orthonormée si : $\|\vec{u}\| = 1$

$\|\vec{v}\| = 1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ($\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{v}$)

---

② Dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ forment une famille orthonormée si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$

et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

(tous les vecteurs sont de longueur 1 et orthogonaux 2 à 2)

Détermination explicite de l'orthogonal d'un sev de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

i) Dans $\mathbb{R}^2$ $\to$ $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$, $\to$ droites passant par l'origine.

$\vec{u}, \vec{v}$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $\to$ $\vec{v} \to \frac{\vec{v}}{2}$ $\left\|\frac{\vec{v}}{2}\right\| = 1$

$\vec{u} \to \frac{\vec{u}}{2}$ $\left\|\frac{\vec{u}}{2}\right\| = 1$

$\left(\frac{\vec{u}}{2}, \frac{\vec{v}}{2}\right)$ et une famille orthonormée

D : droite passant par l'origine

2 pts de vue :

① Équation

$\boxed{ax + by = 0}$

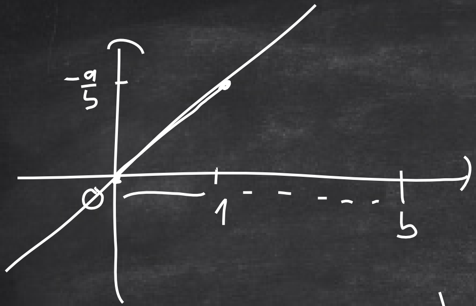
avec $a, b \in \mathbb{R}^2$ tq $(a,b) \neq (0,0)$

si $b \neq 0$

$by = -ax$

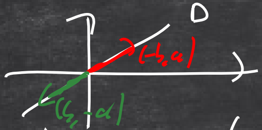
$y = -\frac{a}{b} x$. droite cd

pente $-\frac{a}{b}$.



vecteur directeur de D est $\left(1, -\frac{a}{b}\right)$

et donc $\left(b, b \times -\frac{a}{b}\right) = (b, -a)$ est aussi un vecteur directeur de D.



$ax+by=0$ alors $(-b,a)$ est un vecteur directeur de D.

2ème pt de vue : Une droite est l'ensemble des multiples d'1 vecteur (x_0, y_0).

$$\boxed{D = \{ t(x_0, y_0) \ / \ t \in \mathbb{R} \}}$$

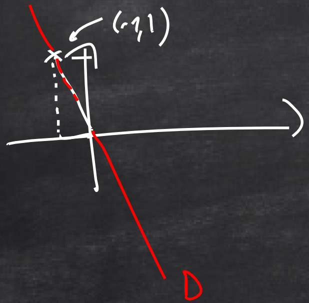
Si $\boxed{(x_0, y_0)}$ dirige D, alors une équation de D est donnée par

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x \\ y_0 & y \end{pmatrix} = 0$$

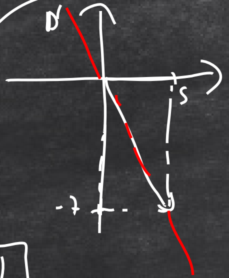
Exemples : $3x + y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

($ax + by = 0$, $(-b, a)$ dirige la droite)

$\Rightarrow (-1, 3)$ dirige D



$y = -3x$.



Considérons D' de vecteur directeur $\boxed{(5, -7)}$.

Équation de D' ?

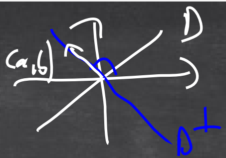
$$\det\begin{pmatrix} 5 & x \\ -7 & y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y - (-7x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{5y + 7x = 0}$$

$$\boxed{y = -\frac{7}{5}x.}$$

Si D est donné par $\boxed{ax+by=0}$



Équation de $D^{\perp}$?

Si $(x,y) \in D$, $\quad ax+by=0$

$$\begin{gathered} ax+by=0 \\ \parallel \\ (a,b)\cdot(x,y)=0 \end{gathered}$$

D = ens des vecteurs $(x,y) \perp (a,b)$.

et $D^{\perp}$ est la droite dirigée par (a,b).

$D = 3x+y=0$

$D^{\perp}$ est la droite dirigée par $(3,1)$.

Éq. de $D^{\perp}$.

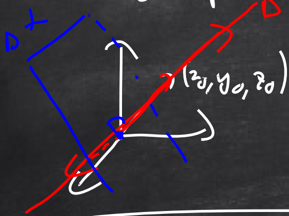
$$\det\begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3y-x=0}$$

Orthogonal d'une droite dans l'espace

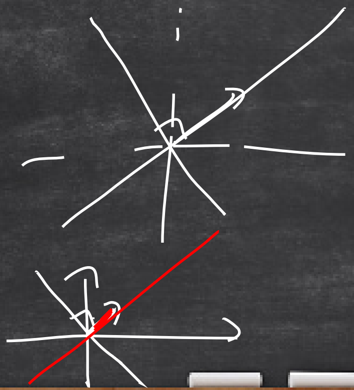
2 pts de vue

D est dirigée par (x_0, y_0, z_0)



$$D = \{ t(x_0, y_0, z_0) \,/\, t \in \mathbb{R} \}$$

Intersection de 2 plans.



D est la droite dirigée par $\underline{(x_0, y_0, z_0)}$.

Alors $D^\perp$ est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux à (x_0, y_0, z_0).

$\iff (x,y,z) \cdot (x_0,y_0,z_0) = 0$

$\iff x x_0 + y y_0 + z z_0 = 0$

__Ex :__ D dirigée par $(1,1,1)$

$D^\perp = \{(x,y,z) \;/\; (x,y,z)\cdot(1,1,1) = 0\}$

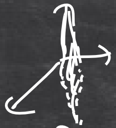
$= \{(x,y,z) \;/\; \boxed{x+y+z=0}\}$

plan d'équation $x+y+z=0$

D dirigée par $\langle (1,0,-2) \rangle$.

$$D^\perp = \{(x,y,z) \,/\, (x,y,z)\cdot(1,0,-2) = 0\}$$
$$= \{(x,y,z) \,/\, \boxed{x - 2z = 0}\}$$

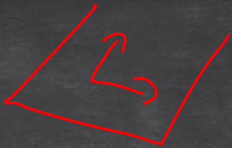
<u>orthogonal d'un plan :</u>



plan ds $\mathbb{R}^3$: $ax + by + cz = 0$.

(<u>Rappel</u> : $x = y$ ds $\mathbb{R}^3$ <u>PAS</u> une droite,
plan)

Ex : P : $\boxed{x+y-z=0}$.



$(x,y,z)\in P$, $\quad x+y-z=0$

$\iff \quad z = x+y$

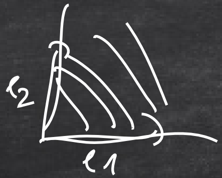
Ainsi $(x,y,z) = (x, y, x+y)$

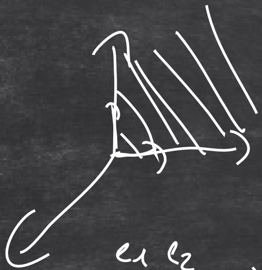
$= (x, 0, x) + (0, y, y)$

$= x\,(1,0,1) + y\,(0,1,1)$

2ème pt de vue : On se fixe $(e_1), (e_2)$ deux vecteurs non colinéaires

et $P = \{ \lambda e_1 + \mu e_2 \ / \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$.





Une équation de P est donnée par : $$\det \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & \ \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} | & | & x \\ | & | & y \\ | & | & z \end{pmatrix} \end{array} = 0$$

$P : \boxed{x+y-z=0}$, plan donné par $\underbrace{(1,0,1)}_{e_1}$ et $\underbrace{(0,1,1)}_{e_2}$

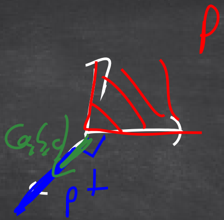
une équation du plan défini par ces 2 vecteurs est donnée par

$$\begin{array}{cccc} & e_1 & e_2 & \\ \det & \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} \end{array} = 0$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 & 1 \end{pmatrix} = z + 0 + 0 - x - y - 0$$

$$z - x - y = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{x + y - z = 0}$$

orthogonal de P $\quad ax+by+cz=0$



On cherche $P^\perp$?

$$(x,y,z)\in P \iff ax+by+cz=0$$
$$\iff (a,b,c)\cdot(x,y,z)=0$$
$$\iff (x,y,z)\perp(a,b,c)$$

Autrement dit $P^\perp$ est la droite dirigée par (a,b,c).

Applications linéaires :

① $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

On dit que f est linéaire si $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda (x,y) + (x',y')) = \lambda f(x,y) + f(x',y').$$

$$\left(f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \text{ et } f(\underset{\lambda}{2}\vec{u}) = \underset{\lambda}{2} f(\vec{u}) \right)$$

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (-y, x+y)$

linéaire ?

$f(X,Y) = (-Y, X+Y)$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient (x,y), (x',y'),

$$f(\lambda(x,y)+(x',y')) = f((\overbrace{\lambda x+x'}^{X}, \overbrace{\lambda y+y'}^{Y}))$$

$$= (-Y, X+Y) = (-(\lambda y+y'), \lambda x+x'+\lambda y+y')$$

$$= \lambda \boxed{(-y, x+y)} + \boxed{(-y', x'+y')} = \lambda f(x,y) + f(x',y')$$

(regroupe les termes en λ et les termes sans λ)

<u>Concl:</u> $f(\lambda(x,y)+(x',y'))=\lambda f(x,y)+f(x',y')$

donc f est <u>linéaire</u>.

<u>Applications linéaires sur $\mathbb{R}^3$</u> : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

On dit que f est linéaire si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$$f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z'))=\lambda f(x,y,z)+f(x',y',z').$$

Ex : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire ?

$(x,y,z) \mapsto (-y, x+y, z+3y)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$.

$$\boxed{f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z'))} = f((\underbrace{\lambda x+x'}_{X}, \underbrace{\lambda y+y'}_{Y}, \underbrace{\lambda z+z'}_{Z}))$$

$$= (-Y, X+Y, Z+3Y) = (-(\lambda y+y'), \lambda x+x'+\lambda y+y', \lambda z+z'+3(\lambda y+y'))$$

$$= \lambda\overbrace{(-y, x+y, z+3y)}^{f(x,y,z)} + \overbrace{(-y', x'+y', z'+3y')}^{f(x',y',z')}$$

donc f linéaire !

Applications linéaires et matrices

Se donner 1 application linéaire est équivalent à se donner une matrice.

① Matrices dans les bases canoniques.

base canonique de $\mathbb{R}^2$

$\underset{e_1}{\underset{\shortparallel}{(1,0)}}, \underset{e_2}{\underset{\shortparallel}{(0,1)}}$

base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\underset{e_1}{\underset{\shortparallel}{(1,0,0)}}, \underset{e_2}{\underset{\shortparallel}{(0,1,0)}}, \underset{e_3}{\underset{\shortparallel}{(0,0,1)}}$

Déf : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire. La matrice de f dans la base canonique est la matrice $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} | & | \\ | & | \end{pmatrix} \end{array}$$

où (e_1, e_2) est la base canonique.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{f(x,y) = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$.

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire. $M = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} | & | \end{pmatrix}} \end{array}$

$(x,y) \mapsto (-y, x+y)$

Écrire la matrice de f dans la base canonique.

① $e_1 = (1,0)$ donc $f(e_1) = (0,1)$

② $e_2 = (0,1)$ donc $f(e_2) = (-1,1)$

Ainsi M = matrice de f dans la base canonique $= \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \end{array}$

Calculons

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -y \\ x+y \end{pmatrix} \end{array}$$

Finalement

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$= f(x,y) = (-y, x+y)$$

$\underline{2^{\text{ème}} \text{ exemple}}$: Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Écrire l'application linéaire associée (dont la matrice dans la base canonique est M)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \mapsto \boxed{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x, x-y)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2x \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{(x,y) \mapsto (2x, x-y).}$$

$\boxed{\text{DEF}}$ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire. La matrice de f dans la base canonique est la matrice $M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$f(x,y,z) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ex : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire.

$(x,y,z) \mapsto (-y,\ x+y,\ z+3y)$

La matrice M de f dans la base canonique.

① $e_1 = (1,0,0)$ donc $f(e_1) = (0,\ 1,\ 0)$

② $e_2 = (0,1,0)$ donc $f(e_2) = (-1,\ 1,\ 3)$

③ $e_3 = (0,0,1)$ donc $f(e_3) = (0,\ 0,\ 1)$

$$\text{et} \quad M = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$$f(x,y,z) = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x+y \\ 3y+z \end{pmatrix}$$

Matrice dans une autre base : (dans $\mathbb{R}^2$ si

$(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille orthonormée, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base.

Dans $\mathbb{R}^3$ si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille orthonormée, c'est une base)

$\boxed{\text{Cas de } \mathbb{R}^2 :}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire.

et (b_1, b_2) une base. (pensez-y comme à une famille orthonormée)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire et (b_1, b_2) base.

Alors la matrice de f dans la base (b_1, b_2) est $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(b_1) & f(b_2) \\ \end{array} & \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \end{array}$$

⚠ on ne met $f(b_1)$ ou $f(b_2)$ en colonne !

où

$$f(b_1) = m_{11} b_1 + m_{21} b_2 \quad \text{et} \quad f(b_2) = m_{12} b_1 + m_{22} b_2$$

<u>Ex:</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire

b_1, b_2. Imaginons qu'on ait montré que

$\boxed{f(b_1) = -b_2}$ et $\boxed{f(b_2) = b_1 + 3 b_2}$.

Alors la matrice de f dans la base (b_1, b_2)

$$M = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} f(b_1) & f(b_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \end{array}$$

Ex : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et (b_1, b_2, b_3) famille orthonormée.

On montre que
$$f(b_1) = 2b_1 + 3b_3$$
$$f(b_2) = -b_1 + b_2 - 3b_3$$
$$f(b_3) = -\frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} b_2 - b_3$$

Alors la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \end{array}$$

Prop : f et g deux applications linéaires ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) de matrices M et N dans une même base.

Alors $f \circ g$:

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto f(g(x,y))$$

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto f(g(x,y,z))$$

a pour matrice dans cette base $\boxed{M \times N}$.