Corrigé DM 1 : Analyse de Fourier

Exercice 1.1.— (Suites, séries et intégrales), **sur 11 points**

a) (**sur 1,5 points**) Par définition, $\theta = \arctan(0)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(\theta) = 0$. Or, $\tan(0) = 0$ et $0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de sorte que nécessairement $\boxed{\arctan(0) = 0}$.
De même, par définition, $\theta = \arctan(1)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant[1] $\tan(\theta) = 1$. Or, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de sorte que nécessairement $\boxed{\arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$.
Passons alors au calcul de I_0. Par définition, on a

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

D'après le rappel, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est la fonction arctan de sorte que

$$I_0 = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$$

si bien que les calculs précédents fournissent $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{4}}$.

b) (**sur 1,5 points**) Par définition, on a

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

On utilise alors l'indication qui fournit que pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient alors

$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [t]_0^1 - I_0.$$

Finalement, la question précédente donne la valeur $\boxed{I_1 = 1 - \frac{\pi}{4}}$.

c) (**sur 2 points**) Pour établir que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on étudie le signe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la quantité $I_{n+1} - I_n$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a[2]

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n+2} - t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

On factorise alors l'intégrande

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

[1] L'équation $\tan(\theta) = 1$ implique par définition de la tangente que $\cos(\theta) = \sin(\theta)$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Il n'est alors plus difficile de lire la réponse sur un dessin du cercle trigonométrique.

[2] La dernière égalité provenant de la linéarité de l'intégrale.

On a alors que pour $t \in [0,1]$, $t^{2n} \geqslant 0$, $1+t^2 \geqslant 0$ et $t^2-1 \leqslant 0$ de sorte que

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2} \leqslant 0.$$

On sait alors que cela implique que[3]

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{n+1} - I_n \leqslant 0}.$$

On en déduit donc bien que $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

Passons alors au calcul de la limite. Ici, on constate que[4]

$$\lim_{n\to+\infty} t^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(t^2\right)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases}$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t^{2n}}{1+t^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\\ \frac{1}{2} \text{ si } t = 1. \end{cases}$$

On a alors bien évidemment envie de dire que[5]

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t = 0.$$

Malheureusement, ce raisonnement souvent juste est **en général FAUX**. On peut ici le faire fonctionner mais il nécessiterait l'utilisation du théorème de convergence dominé dont j'ignore si vous l'avez déjà vu ou non et donc on va éviter d'y recourir mais dans tous les cas, ce raisonnement permet d'avoir l'intuition que la suite $(I_n)_{n\to+\infty}$ tend vers 0. Pour le démontrer, tentons d'encadrer I_n par deux quantités qui tendent vers 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et appliquons le théorème des gendarmes. Soit $n \in \mathbb{N}$. On voit immédiatement que pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{t^{2n}}{1+t^2} \geqslant 0$ ce qui implique[6] que

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Par ailleurs, on souhaite une majoration qui tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour majorer une intégrale, on majore d'abord l'intégrande. Pour cela[7], on a

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 < 1+t^2 \geqslant 1 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leqslant t^{2n}$$

si bien que par positivité de l'intégrale, il vient

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}.$$

Finalement, on a donc établi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$$

où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ de sorte que le théorème des gendarmes implique que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

[3] Je rappelle que si $a < b$ et qu'une fonction f est continue par morceaux et positive (*resp.* négative) sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \left(\textit{resp.} \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0\right).$$

Ces relations étant naturelles si l'on intérprète l'intégrale entre a et b de f comme l'aire algébrique comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre $x = a$ et $x = b$.

[4] C'est par exemple la Proposition 1.4 du polycopié de cours.

[5] Voir ici que la valeur d'une fonction en un point, ici en $t = 1$, ne change pas la valeur de l'intégrale, ce qui est encore assez naturelle en intérprétant l'intégrale comme une aire.

[6] Voir la note de bas de page numéro 3.

[7] Noter qu'on garde le terme faisant apparaître n car on veut ensuite une quantité qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

d) (**sur 1,5 points**) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition et linéarité de l'intégrale, il vient

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}+t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Comme en question c), on a alors le réflexe de factoriser

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2+1)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t$$

après simplification des termes en $1+t^2$. Il s'ensuit alors bien que

$$I_{n+1} + I_n = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \quad \text{puis l'égalité} \quad \boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}.}$$

e) (**sur 2,5 points**) Établissons par récurrence, pour tout[8] $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression

$$(\mathbf{HR}_n) \qquad (-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$

Lorsque $n = 1$, on a d'après la question b)

$$(-1)^{1-1} I_1 = I_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

tandis que la question a) implique

$$\sum_{k=0}^{1-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0 = \frac{(-1)^0}{2\times 0+1} - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

de sorte qu'on a bien

$$(\mathbf{HR}_1) \qquad (-1)^{1-1} I_1 = \sum_{k=0}^{1-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0$$

et on a intialisé notre récurrence! Soit alors $n \geqslant 1$ et supposons $(\mathbf{HR}_n)$ vérifi autrement dit supposons que

$$(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$

On cherche alors à établir $(\mathbf{HR}_{n+1})$, autrement dit

$$(-1)^n I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$

On cherche donc une expression de $(-1)^n I_{n+1}$. Cela tombe bien puisque la question d) fournit[9]

$$(-1)^n I_{n+1} + (-1)^n I_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{soit} \quad (-1)^n I_{n+1} = -(-1)^n I_n + \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^{n-1} I_n + \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

[8] L'expression est mal définie pour $n = 0$ mais par convention, on peut prendre

$$\sum_{k=0}^{0-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 0$$

et alors on obtient une formule valable pour tout entier naturel n mais qui n'est intéressante que lorsque $n \geqslant 1$.

[9] Après multiplication par $(-1)^n$.

car $-(-1)^n = (-1)^{n-1}$. Mais par ($\mathbf{HR}_n$), on a

$$(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0$$

si bien que

$$(-1)^n I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0 + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

On remarque alors que le terme $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ correspond au terme $k = n$ de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ si bien que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

et par conséquent

$$(-1)^n I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.$$

On a ainsi établi ($\mathbf{HR}_{n+1}$). En conclusion, on a bien démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0.}$$

f) (**sur 2 points**) Noter que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est de la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{1}{2n+1}$ pour tout entier naturel n. La convergence de la série découle donc du critère de Leibniz[10] puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ mais remarquer alors que ce critère ne fournit pas la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

contrairement à cet exercice.
Si l'on revient à la définition de la convergence de la série[11] $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, il s'agit d'étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

D'après la question e), on a pour tout entier naturel n,

$$(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - I_0 \quad \text{soit} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^{n-1} I_n.$$

D'où, pour tout entier naturel n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^n}{2n+1} = I_0 + (-1)^{n-1} I_n + \frac{(-1)^n}{2n+1}. \qquad (*)$$

[10]Proposition 2.8 du polycopié.
[11]Voir Définition 2.1 du polycopié de cours.

On a alors pour tout entier naturel n

$$-I_n \leqslant (-1)^{n-1} I_n \leqslant I_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

d'après la question c). Le théorème des gendarmes fournit alors $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} I_n = 0$. De même,

$$-\frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

de sorte que le théorème des gendarmes fournit aussi $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$. L'expression $(*)$ et la question a) fournissent alors que la suite $(S_n)_{n\to+\infty}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$

La Définition 2.1 du polycopié fournit alors que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ converge}}$ et que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Remarque : On peut constater que

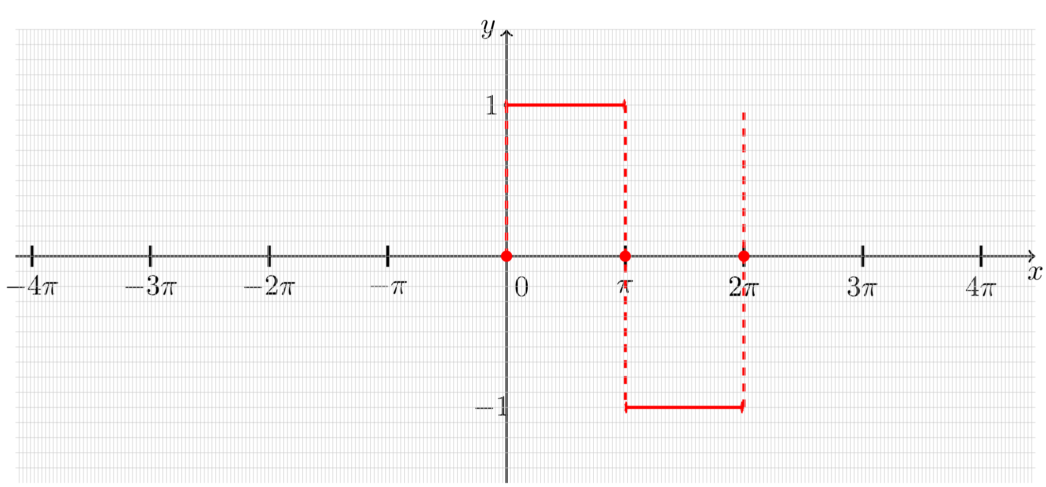
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1)$$

et de manière plus générale, on peut établir de façon analogue que pour tout $x \in [-1,1]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et

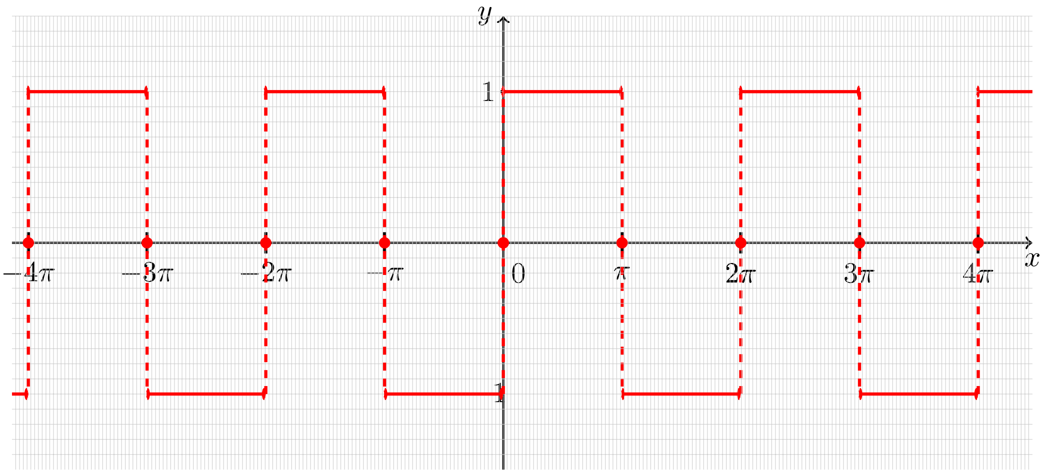
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x).$$

Exercice 1.2.— (Séries de Fourier), **sur 12 points**

a) (**sur 1,5 points**) On commence par tracer le graphe sur $[0, 2\pi]$, autrement dit sur une période sur laquelle on a une formule explicite pour la fonction f.



On en déduit alors le graphe sur tout $\mathbb{R}$ en effectuant des translations du graphe sur une période ci-dessus vers la gauche et vers la droite de longueur tous les multiples entiers de la période[12]. Cela fournit le graphe suivant.



On voit que pour tracer la portion de courbe ci-dessus, il faut "lever le crayon" un nombre fini de fois et ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue par morceaux et non continue}}$. Plus précisément, la fonction f est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}}$ et la fonction f est $\boxed{\text{discontinue en tout point } x = k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}}$. De même, on voit que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ tandis qu'elle admet des dérivées à droite et à gauche distinctes en $x = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ de sorte que l'on peut en conclure que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux.}}$

b) (**sur 1,5 points**) Le graphe de la fonction f tracé en question a) est symétrique par rapport à l'origine si bien qu'on en déduit[13] que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$ On sait alors[14] que cela implique que $\boxed{a_n(f) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) (**sur 2,5 points**) Reste alors à calculer les coefficients $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition[15], on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t.$$

[12] Ici égale à 2π et donc on donc on effectuera des translations de 2π, 4π, etc... vers la gauche et vers la droite.

[13] Ce n'est pas à proprement parler une démonstration mais cela est suffisant. Pour une véritable preuve, on utilise le fait que f est donnée sur $\mathbb{R}$ par (voir par exemple la remarque (iii) page 35 du polycopié)

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 2k\pi < t < (2k+1)\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \\ -1 \text{ si } (2k-1)\pi < t < 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } t = k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Soit alors $t \in \mathbb{R}$. Soit $t = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, auquel cas $-t = -k\pi$ et $f(-t) = -f(t) = 0$, soit $2k\pi < t < (2k+1)\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ auquel cas $(2(-k)-1)\pi < -t < 2(-k)\pi$ et

$$f(-t) = 1 = -f(t),$$

soit $(2k-1)\pi < t < 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ auquel cas $2(-k)\pi < -t < (2(-k)+1)\pi$ et

$$f(-t) = -1 = -f(t).$$

Dans tous les cas, on a donc bien

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(-t) = -f(t)$$

et f est impaire.

[14] Voir Proposition 4.3 du polycopié de cours.

[15] Se souvenir ici qu'on a une période $T = 2\pi$. Voir la Définition 4.4 du polycopié pour la définition.

On cherche alors à remplacer $f(t)$ par son expression. Pour ce faire, on utilise la relation de Chasles pour écrire

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t \in]0,\pi[$, on a $f(t)=1$ de sorte que[16]

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

De même, on a pour $t \in]\pi,2\pi[$, on a $f(t)=-1$ de sorte que

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, on a donc

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t\right).$$

Or, une primitive de $t \mapsto \sin(nt)$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par $t \mapsto -\frac{\cos(nt)}{n}$ car $n \geqslant 1$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(0)}{n} + \frac{\cos(2n\pi)}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n}\right). \end{aligned}$$

On utilise alors le fait que[17] $\cos(0) = \cos(2n\pi) = 1$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement, on obtient[18]

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \tfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}}$$

d) (**sur 2 points**) On a vu en question a) que la fonction f est non continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux si bien qu'on va appliquer la version (ii) du théorème de Dirichlet[19]. Cette version du théorème de Ditichlet fournit que la série de Fourier associée à f, à savoir[20]

$$\begin{aligned} a_0(f) + \sum_{n\geqslant 1}\left[a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right] &= \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n \text{impair}}} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n \text{impair}}} \frac{\sin(nt)}{n} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}. \end{aligned}$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, le théorème de Dirichlet fournit également la valeur de sa somme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{impair}}}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} = \begin{cases} f(t) \text{ si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \text{ si } f \text{ n'est pas continue en } t. \end{cases}$$

[16] Bien voir que les valeurs de f en 0 et en π ne changent pas la valeur de l'intégrale comme cela se voit en considérant cette intégrale comme une aire sous une courbe.

[17] Tracer un cercle trigonométrique si besoin pour vous en convaincre!

[18] Se souvenir que si n est pair, $(-1)^n = 1$ tandis que si n est impair, $(-1)^n = -1$.

[19] Proposition 4.7 du polycopié de cours.

[20] Pour la dernière égalité, on a utilisé qu'un entier impair $n \geqslant 1$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ quelconque.

On a vu que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$, f est continue en t tandis que pour tout $t = k\pi$, f n'est pas continue en t et vérifie[21] $f(t^+) = 1$ et $f(t^-) = -1$ si k est pair et $f(t^+) = -1$ et $f(t^-) = 1$ si k est impair de sorte que dans tous les cas[22] $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = 0 = f(k\pi) = f(t)$. En conclusion, on a bien dans tous les cas

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{impair}}}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.}$$

e) (**sur 1,5 points**) La relation de la question d) étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $t = \frac{\pi}{2}$ et obtenir que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{impair}}}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1}.$$

On a alors par défintion de f et puisque $\frac{\pi}{2} \in]0,\pi[$ que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et on voit sur un cercle trigonométrique que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k.$$

Il s'ensuit donc que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$$

avec $\boxed{\text{convergence de la série } \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$. Noter que l'on retrouve le résultat de l'exercice 1.1.

f) (**sur 3 points**) Par imparité de f, on voit immédiatement que la fonction $t \mapsto |f(t)|^2$ est paire et ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi} \int_{0}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

On sait alors que pour tout $t \in]0,\pi[$, $f(t) = 1$ de sorte que

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}t = 1.}$$

Une autre façon de voir cela est de dire que par 2π-périodicité, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

et pour tout $t \in]0,\pi[$, $f(t) = 1$ et pour tout $t \in]\pi, 2\pi[$, $f(t) = -1$ si bien que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\pi} + \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

On retrouve bien évidemment le résultat précédent.
Puisque la fonction f est continue par morceaux, l'égalité de Parseval[23] appliquée à f

[21] Se lit sur le graphe de f donné en question a).
[22] C'est d'ailleurs précisément pour obtenir cela qu'on a défini f de cette manière!
[23] Proposition 4.8 du polycopié de cours.

fournit que la série

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geqslant 1}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{impair}}} \frac{16}{n^2\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{impair}}} \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

converge et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{soit} \quad 1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

en utilisant le calcul ci-dessus. Finalement, on a bien

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.}$$

Voyons alors comment déduire de ce résultat la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Pour cela, on sépare la somme selon que n est pair ou que n est impair

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1\\ n\text{pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1\\ n\text{impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

où toutes les séries en jeu sont convergentes. On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \quad \text{soit} \quad \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

soit $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$