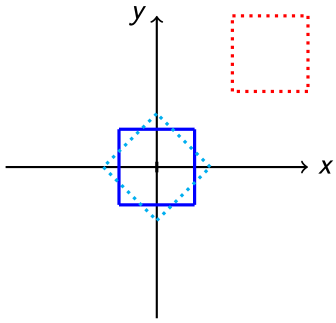
Cours–TD III : Isométries du plan et de l'espace

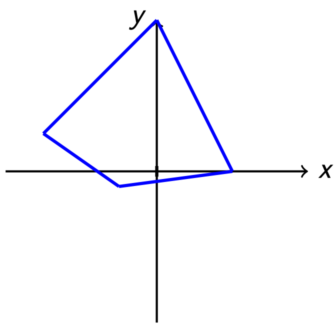
1 Introduction

1.1 Motivations

On cherche dans cette partie du cours à comprendre et de décrire les transformations du plan ou de l'espace qui laissent une figure **globalement invariante** [1], en d'autres termes d'étudier les symétries d'une figure et de formaliser cette notion [2]. Si vous prenez un carré, on voit qu'une translation (en rouge) ou une rotation d'angle [3] $\frac{\pi}{4}$ et de centre l'origine (en cyan) ne le laissent pas invariant



tandis qu'une rotation d'angle [4] $\frac{\pi}{2}$ le laisse globalement invariant [5]. L'intérêt de ce genre de transformations qui laissent invariante une figure est qu'elles nous donnent des informations concernant la figure ! Imaginons que je vous cache une figure, disons à 4 côtés et 4 sommets pour simplifier, et que je vous donne simplement ses symétries (ou les transformations qui la laissent invariante). Si par exemple je vous dis qu'il n'y a aucune transformation qui la laisse invariante. Alors la figure peut être (presque) n'importe quoi comme par exemple



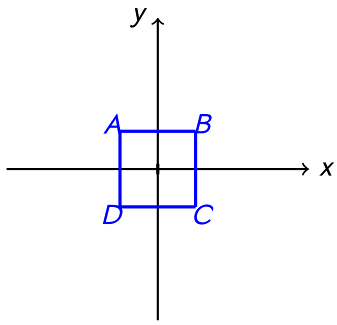
Mais en fait, on a quand même un (tout petit) peu d'informations : par exemple la figure ne peut pas être un carré, un rectangle ou toute figure présentant une symétrie. Et plus je vous donnerai de symétries vérifiées par la figure plus vous aurez d'informations sur cette figure. Vous pouvez essayer de vous convaincre [6] que si je vous dis que la figure est globalement invariante par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors notre figure est nécessairement un carré. De même, si l'on a une figure à trois sommets et trois côtés [7] qui ne présente aucune symétrie, cela nous dit simplement que notre triangle est un triangle quelconque tandis que si l'on a un seul axe de symétrie, il s'agit d'un triangle isocèle et que si l'on a trois axes de symétries ou alors que le triangle est invariant par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, on a affaire à un triangle équilatéral. Ainsi on voit bien qu'obtenir des informations sur les symétries ou les

1. Par globalement invariant, on entend qu'une fois la transformation de la figure effectuée, par exemple la translation, le résultat se superpose à la figure initiale.
2. En particulier, il paraît assez intuitif qu'un cercle ou une sphère est plus symétrique qu'un carré ou qu'un cube qui sont eux-mêmes plus symétriques qu'une figure complètement quelconque du plan ou de l'espace
3. Soit 45 degrés pour ceux qui n'aiment pas les radians !
4. Soit 90 degrés.
5. Chaque sommet n'est pas envoyé sur lui-même mais la carré dans son ensemble est préservé.
6. Et on peut le démontrer !
7. Autrement dit un triangle.

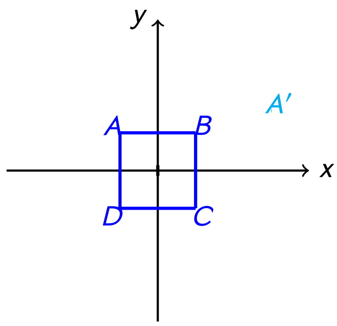
transformations laissant globalement invariante une figure nous permet d'accéder de façon détournée à des informations sur la figure, sans nécessairement y avoir accès. On peut évidemment considérer le même problème avec des figures dans l'espace. Pour finir, mentionnons qu'en chimie, si l'on représente une molécule dans le plan ou dans l'espace, alors étudier ses symétries[8] fournira de précieuses informations sur la molécule.

1.2 Automorphismes orthogonaux

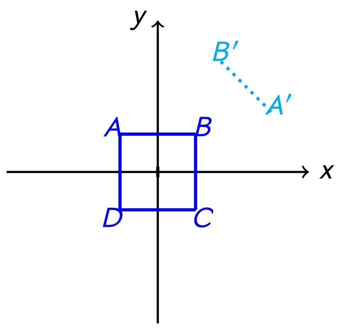
Intéressons-nous alors aux transformations *candidates* à laisser une figure du plan ou de l'espace globalement invariante. On peut se convaincre sans trop de difficultés que les candidates en question vont être les applications qui préservent les angles et les distances[9]. En effet, soit f une application qui préserve angles et distances. Regardons[10] son effet sur le carré $ABCD$.



L'application f envoie A sur un point A'



et maintenant puisque f préserve les distances, l'image B' de B par f doit être à la même distance de A' que celle entre B et A, ce qui donne par exemple

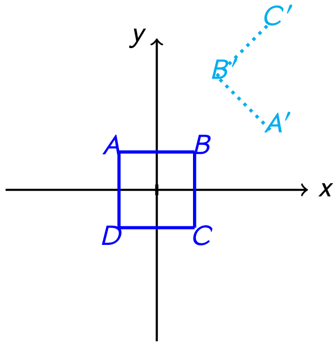


L'image C' de C par f doit alors être à la même distance de B' que celle entre B et C puisque f préserve les distances et l'angle formé par A, B, C doit être le même que celui formé par A', B', C' puisque f préserve les angles de sorte qu'on a uniquement deux choix possibles à présent pour C'. Par exemple on peut avoir

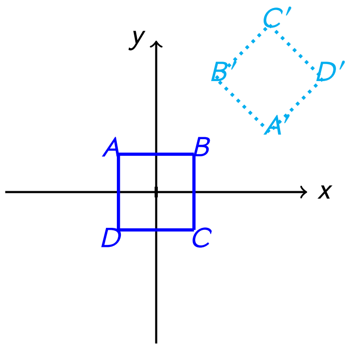
8. Avec des petites subtilités supplémentaires comme la prise en compte des doublets non liants et de la contrainte qu'un atome devra être envoyé sur un autre atome de même nature. Autrement dit un atome de carbone devra être envoyé sur un atome de carbone par exemple.

9. En fait, on peut démontrer grâce au produit scalaire qui est lié à la fois à la notion de distance et à celle d'angle qu'une application qui préserve les distances préserve les angles. C'est l'objet de la Proposition 2.

10. Je vous encourage à essayer de faire ces dessins par vous-mêmes.



Enfin, l'image D' de D doit être à la même distance de A' et C' respectivement que celles de D à A et de D à C et les angles formés doivent être droits ce qui ne laisse plus le choix



On constate donc bien que le carré $ABCD$ est envoyé sur un carré $A'B'C'D'$ qui n'a pas été déformé (du fait que f préserve angles et distances) et que l'on pourrait superposer au carré initial. Le carré $A'B'C'D'$ est simplement le carré $ABCD$ dans une autre position.

Proposition 1 *Une application $f : E \longrightarrow E$ avec $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ qui préserve les distances et qui préserve une figure bornée dont le centre de gravité est 0_E est une application linéaire.*

Proposition 2 *Toute application linéaire qui préserve les distances préserve aussi les angles. On appelle une telle application linéaire* ***un automorphisme orthogonal****.*

Notre objectif va désormais être de décrire tous les automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace avant de voir comment l'étude des automorphismes orthogonaux qui laissent une molécule globalement invariante vous sera utile en chimie ! La première étape pour cette description est la proposition **capitale** suivante.

Proposition 3 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$) une application linéaire et M sa matrice dans la base canonique. Alors f préserve les angles et les distances si, et seulement si, ${}^tMM = I_2$ (resp. I_3).*

► **REMARQUE–** Je rappelle que

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si l'on vous demande de vérifier qu'une application linéaire préserve angles et distances, il suffit de calculer ${}^tMM$ avec M la matrice de f dans la base canonique et de vérifier que vous obtenez l'identité. Je rappelle également que la transposée de la matrice M est la matrice obtenue en échangeant [11] les lignes et les colonnes de la matrice M.

Enfin, on donne la proposition suivante.

> **Proposition 4** *Soient f une application linéaire préservant angles et distances et M sa matrice dans la base canonique. Alors* $\det(M) \in \{-1, +1\}$.

DÉMONSTRATION.– On sait que ${}^tMM = I$ d'après la Proposition 3. Ainsi $\det\left({}^tMM\right) = \det(I)$. On a alors $\det(I) = 1$ et $\det\left({}^tMM\right) = \det\left({}^tM\right)\det(M)$. On peut alors établir que $\det\left({}^tM\right) = \det(M)$ de sorte que $\det(M)^2 = 1$ et $\det(M) = \pm 1$. □

► **REMARQUE–** Lorsque $\det(M) = 1$, l'application linéaire f ne "retourne [12]" pas le plan ou l'espace (on dit qu'elle préserve l'orientation) tandis que si $\det(M) = -1$, l'application linéaire f "retourne" le plan ou l'espace (elle inverse l'orientation).

2 LE CAS DU PLAN

► **EXERCICE I**

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On pose alors

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(M_\theta)$, $\det(N_\theta)$ et ${}^tM_\theta M_\theta$ et ${}^tN_\theta N_\theta$. Qu'en concluez-vous ?
2. Écrire l'application linéaire f_θ (*resp.* g_θ) de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont M_θ (*resp.* N_θ) est la matrice dans la base canonique.
3. En identifiant tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec un nombre complexe $z = x + iy$, montrer que f_θ est l'application linéaire $z \mapsto e^{i\theta} z$. En déduire le module et l'argument de l'image de z en fonction du module et de l'argument de z.
4. Donner la nature géométrique de l'application linéaire f_θ.
5. Vérifier que $N_\theta = M_\theta S$ avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Écrire l'application linéaire s associée à S et justifier que $g_\theta = f_\theta \circ s$. Décrire géométriquement s et ensuite g_θ.

CORRECTION–

1. On vérifie immédiatement que
$$\det(M_\theta) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \det(N_\theta) = -\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = -\left(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2\right) = -1$$
et que ${}^tM_\theta M_\theta = {}^tN_\theta N_\theta = I_2$. On en conclut que l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est M_θ préserve angles et distances sans "retourner" l'espace et que l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est N_θ préserve angles et distances en "retournant" l'espace.

---

11. Par exemple, si
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
car la première ligne de M devient la première colonne de M et sa seconde ligne devient sa seconde colonne. De même en taille 3,
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donne} \quad {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
car la première ligne de M est devenue la première colonne de ${}^tM$, la deuxième ligne de M est devenue la deuxième colonne de ${}^tM$ et la dernière ligne de M est devenue la dernière colonne de ${}^tM$.

12. Une symétrie retourne le plan ou l'espace, autrement dit elle inverse les sens de parcours, tandis qu'une rotation ne les retourne pas, elle conserve les sens de parcours.

2. On sait d'après le cours que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_\theta(x, y) = M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$ si bien que

$$f_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)). \end{array} \right.$$

De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $g_\theta(x, y) = N_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), x\sin(\theta) - y\cos(\theta))$ si bien que

$$g_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), x\sin(\theta) - y\cos(\theta)). \end{array} \right.$$

3. On identifie tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec le nombre complexe $z = x + iy$. Ainsi, $f_\theta(x, y) = f_\theta(z) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$. Par ailleurs, puisque $z = x + iy$, on a

$$e^{i\theta} z = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(x + iy) = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) + i(x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

de sorte que $f_\theta(z)$ correspond bien au nombre complexe $e^{i\theta} z$ et que $f_\theta(z) = e^{i\theta} z$. On en déduit que

$$|| = \left|e^{i\theta} z\right| = \left|e^{i\theta}\right| \times |z| = |z|$$

car $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et de même

$$\arg(f_\theta(z)) = \arg\left(e^{i\theta} z\right) = \arg\left(e^{i\theta}\right) + \arg(z) = \theta + \arg(z)$$

modulo 2π.

4. On en déduit que $f_\theta(z)$ a même module que z et un argument augmenté de θ si bien que f_θ est une rotation de centre l'origine et d'angle θ.

5. On vérifie immédiatement que $N_\theta = M_\theta S$. On sait d'après le cours que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $s(x, y) = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, -y)$ si bien que

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, -y) \end{array} \right.$$

dont on voit immédiatement sur un dessin qu'il s'agit d'une symétrie d'axe l'axe des abscisses ! On a alors $N_\theta = M_\theta S$ et la proposition 4.6 du polycopié de cours garantit que $g_\theta = f_\theta \circ s$. On en déduit que g_θ est la composition d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses [13] suivie d'une rotation [14] de centre l'origine et d'angle θ.

On en déduit le résultat de cours suivant.

Proposition 5 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire préservant angles et distances et M sa matrice dans la base canonique. On a alors deux cas de figure.*

(i) Si $\det(M) = 1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est une rotation du plan d'angle θ et de centre l'origine $(0, 0)$.

(ii) Si $\det(M) = -1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est la composée de la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses et d'une rotation du plan d'angle θ et de centre l'origine $(0, 0)$ ou de manière équivalente f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite du plan d'angle $\frac{\theta}{2}$ par rapport à l'axe des abscisses.

13. Correspondant à s.
14. Correspondant à f_θ en utilisant la question **4**.

► **REMARQUE–** Pour une description de comment agit une rotation du plan, je vous renvoie ici pour l'exemple d'une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ de centre $(0,0)$. Les liens ici et ici vous permettent de voir l'action d'une telle rotation du plan sur différentes figures. Enfin, ici, vous trouverez un exemple de composée d'une symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de centre $(0,0)$ et une symétrie orthogonale de droite d'angle $\frac{\pi}{8}$. Vous pouvez constater que les deux transformations sont bien équivalentes ! Je vous renvoie également ici pour voir l'effet du cas (ii) sur une figure.

► **EXERCICE II (APPLICATIONS DIRECTES)**
Décrire géométriquement les applications linéaires dont les matrices dans la base canonique sont données par

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

CORRECTION– On vérifie que les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifient toutes ${}^tMM = I_2$ de sorte qu'elle correspondent toutes à des applications linéaires $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ préservant angles et distances. Par ailleurs, on calcule que

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1, \quad \det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

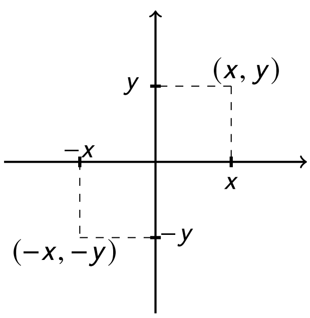
D'après le cours il existe donc $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2 & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}.$$

On voit alors tout de suite que $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ convient de sorte que l'application linéaire correspondante est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre l'origine et que $\theta_2 = \pi$ convient de sorte que l'application linéaire correspondante est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle π et de centre l'origine. On peut voir que ce dernier cas correspond à une symétrie centrale de centre l'origine, soit à l'aide d'un petit dessin, soit en remarquant que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ associée vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x,-y)$$

ce qui permet bien de voir qu'il s'agit de la transformation qui envoie un point (x,y) sur le point $(-x,-y)$, autrement dit la symétrie centrale de centre l'origine.



Enfin, dans le dernier cas où le déterminant valait -1, le cours garantit qu'il existe $\theta_3 \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & -\cos(\theta_3) \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\theta_3 = \frac{\pi}{4}$ convient et ainsi d'après le cours, l'application linéaire associée est la composée d'une symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre l'origine, ou de manière équivalente une symétrie orthogonale d'axe la droite d'angle $\frac{\pi}{8}$. Je vous renvoie aux figures Geogebra de la remarque page 5 pour des illustrations et je vous encourage à vous entraîner à dessiner l'effet de ces matrices sur par exemple le point $(2, 1)$!

3 LE CAS DE L'ESPACE

La situation est un tout petit peu plus compliquée [15] dans l'espace. L'exercice suivant permet de traiter un premier exemple.

► **EXERCICE III (UN EXEMPLE DANS L'ESPACE)**

On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x + y - \sqrt{2}z, x + y + \sqrt{2}z, \sqrt{2}(x - y)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est une application linéaire et donner sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer ${}^tMM$ et $\det(M)$.
3. Déterminer
$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$
Justifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel, le décrire géométriquement et en donner sa dimension. Montrer que $f_1 = (1, 1, 0)$ est un vecteur directeur et en déduire un vecteur directeur b_1 de norme 1.
4. Déterminer $F^\perp$, le décrire géométriquement et en donner sa dimension. Montrer que $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$ sont deux vecteurs orthogonaux de $F^\perp$ et que (b_1, b_2, b_3) constitue une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est donnée par
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. On considère la matrice
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
7. Donner la matrice de l'application linéaire f restreinte au plan $F^\perp$ dans la base orthonormée (b_2, b_3). En déduire la nature géométrique de f.

CORRECTION–

1. On revient ici à la définition d'une application linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Il s'agit d'établir que
$$f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) = \lambda f(x, y, z) + f(x', y,', z').$$

15. Puisqu'elle nécessite un changement de base et la matrice d'une application linéaire de l'espace qui préserve angles et distances n'est pas immédiatement sous une forme qui permet de l'interpréter mais un changement de base orthonormée permet de la mettre sous une forme interprétable.

On a $\lambda(x,y,z)+(x',y',z')=(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')$ si bien que par définition de [16] f

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')) &= f(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z') \\ &= \frac{1}{2}(\lambda x+x'+\lambda y+y'-\sqrt{2}(\lambda z+z'),\lambda x+x'+\lambda y+y'+\sqrt{2}(\lambda z+z'),\sqrt{2}(\lambda x+x'-\lambda y-y')). \end{aligned}$$

On regroupe alors tout ce qui est en facteur de λ d'un côté et tout ce qui n'est pas en facteur de λ de l'autre pour obtenir que

$$\begin{aligned} & f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')) \\ &= \lambda\times\frac{1}{2}(x+y-\sqrt{2}z,x+y+\sqrt{2}z,\sqrt{2}(x-y))+\frac{1}{2}(x'+y'-\sqrt{2}z',x'+y'+\sqrt{2}z',\sqrt{2}(x'-y')). \end{aligned}$$

On reconnaît alors

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x+y\sqrt{2}z,x+y+\sqrt{2}z,\sqrt{2}(x-y))$$

et

$$f(x',y',z')=\frac{1}{2}(x'+y'\sqrt{2}z',x'+y'+\sqrt{2}z',\sqrt{2}(x'-y'))$$

si bien que

$$f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z'))=\lambda f(x,y,z)+f(x',y',z')$$

et f est bien une application linéaire!
Pour écrire sa matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ où je rappelle que $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$, il suffit de calculer

$$f(b_1)=f(1,0,0)=\frac{1}{2}(1,1,\sqrt{2})=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ainsi que

$$f(b_2)=f(0,1,0)=\frac{1}{2}(1,1,-\sqrt{2})=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

et

$$f(b_3)=f(0,0,1)=\frac{1}{2}(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right).$$

La matrice M de f dans la base canonique est alors la matrice dont la première colonne est le vecteur $f(b_1)$, la seconde le vecteur $f(b_2)$ et la troisième le vecteur $f(b_3)$. On a donc

$$M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

2. Ici, je vous conseille d'utiliser la seconde forme de la matrice ci-dessus, sans le facteur $\frac{1}{2}$. En effet, si vous utilisez la première forme, il faut être prudent car notamment

$$\det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\right)\neq\frac{1}{2^3}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

16. En effet, on a

$$f(X,Y,Z)=\frac{1}{2}(X+Y-\sqrt{2}Z,X+Y+\sqrt{2}Z,\sqrt{2}(X-Y))$$

avec ici $X=\lambda x+x'$, $Y=\lambda y+y'$ et $Z=\lambda z+z'$.

mais
$$\det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2^3}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$
car la matrice est de taille 3 tandis que si vous utilisez la seconde expression, pas de souci, vous pouvez calculer votre déterminant sans vous poser de questions comme d'habitude ! De même,
$$\begin{aligned} & {}^t\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\right)\times\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2^2}\times{}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$
et il faut ici faire attention au facteur $\frac{1}{2^2}$ qui apparît du fait qu'on a deux fois le facteur $\frac{1}{2}$. Ici de la même façon, si vous utilisez la seconde forme ci-dessus pour M, on fait le calcul comme d'habitude sans réfléchir et sans problème.
On a donc [17]
$$^tM = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}.$$
On a alors [18]
$$^tMM = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3.$$
Ainsi l'application linéaire f préserve angles et distances. Par ailleurs,
$$\det(M) = \det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix} = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 1$$
par la règle de Sarrus. Ainsi l'application linéaire f agit sans "retourner" l'espace.

3. Pour déterminer
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\},$$
on remarque que $(x, y, z) \in F$ si, et seulement si,
$$M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$
Mais on sait grâce au cours que puisque M est la matrice de f dans les bases canoniques,
$$M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = f(x, y, z) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x + y - \sqrt{2}z)\\ \frac{1}{2}(x + y + \sqrt{2}z)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)\end{pmatrix}.$$

17. Je rappelle que pour écrire la matrice transposée de M, la première ligne devient la première colonne, la seconde ligne devient la seconde colonne et la troisième ligne devient la troisième colonne.
18. Faites vraiment le calcul !

Noter qu'ainsi F est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ fixés par f. Ainsi $(x,y,z) \in F$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y-\sqrt{2}z) = x \\ \frac{1}{2}(x+y+\sqrt{2}z) = y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = z \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-\sqrt{2}z = 2x \\ x+y+\sqrt{2}z = 2y \\ x-y = \sqrt{2}z \end{cases}$$

après s'être débarrassé des fractions. On a donc affaire à un système linéaire et on dispose des opérations du pivot de Gaußpour le résoudre ! On a donc que $(x,y,z) \in F$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} -x+y-\sqrt{2}z = 0 \\ x-y+\sqrt{2}z = 0 \\ x-y-\sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

On constate que la deuxième ligne est l'opposée de la première de sorte que le système est équivalent à

$$\begin{cases} -x+y-\sqrt{2}z = 0 \\ x-y-\sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

On effectue alors l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ qui revient à remplacer la seconde ligne par la somme des deux lignes [19] pour obtenir que le système est équivalent à

$$\begin{cases} -x+y-\sqrt{2}z = 0 \\ -2\sqrt{2}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0. \end{cases}$$

On a donc que $(x,y,z) \in F$ si, et seulement si, $(x,y,z) = (y,y,0) = y(1,1,0)$ avec $y \in \mathbb{R}$, autrement dit si, et seulement si, (x,y,z) est colinéaire à $(1,1,0)$. On en déduit donc que F est la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $f_1 = (1,1,0)$. Il s 'agit alors d'un sous-espace vectoriel de dimension [20] 1 de $\mathbb{R}^3$ et on sait alors d'après le cours que tout vecteur directeur en est une base, donc f_1 est en particulier une base de F. Pour que cette base soit orthonormée, il faut que $||f_1|| = 1$. Or, on calcule

$$||f_1|| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Mais on voit alors que si l'on prend $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, alors b_1 est toujours un vecteur directeur de la droite F (puisqu'il est colinéaire à f_1) et par conséquent b_1 est aussi une base de F et on vérifie que [21]

$$||b_1|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

et b_1 est ainsi une base orthonormée de F.

4. Je rappelle que par définition $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux à F. Autrement dit, F est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à la droite F dirigée par $f_1 = (1,1,0)$. Pour qu'un vecteur soit orthogonal à cette droite, il faut et il suffit ainsi que ce vecteur soit orthogonal à f_1 si bien que

$$F^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y,z) \perp f_1\right\}.$$

Or, on dispose d'un outil très commode pour détecter l'orthogonalité, à savoir le produit scalaire. En effet, $(x,y,z) \perp f_1$ si, et seulement si, $(x,y,z) \cdot f_1 = 0$. Or, par définition,

$$(x,y,z) \cdot f_1 = (x,y,z) \cdot (1,1,0) = x \times 1 + y \times 1 + z \times 0 = x + y$$

19. Afin de simplifier les x et les y.

20. Se souvenir qu'"intuitivement", la dimension correspond aux nombres de paramètres à fixer pour connaître complètement un élément de F. ici, il suffit de se fixer la valeur d'**un** seul paramètre, à savoir la valeur de y, pour déterminer un élément de F donc la dimension est 1. Il s'agit aussi du nombre de directions indépendantes que vous avez sur F et sur une droite on a bien une unique direction, à savoir le long de la droite !

21. On a choisi b_1 pour que cela fonctionne !

si bien que
$$F^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y=0\right\}.$$
On reconnaît là le plan d'équation [22] $x+y=0$, en particulier $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 [23]. Soit alors $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ et $b_3 = (0,0,1)$. On a immédiatement que $b_3 \in F$ car la somme de ces deux premières composantes est nulle et de même $b_2 \in F^\perp$ car $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$. Par ailleurs,
$$b_2 \cdot b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\cdot(0,0,1) = 0 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times 0 = 0$$
si bien que b_2 est orthogonal [24] à b_3.

Il nous reste alors à vérifier que (b_1, b_2, b_3) est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Pour cela il faut vérifier que b_1 est orthogonal à b_2 et b_3, que b_2 et b_3 sont orthogonaux et que tous les vecteurs sont de norme 1. On a déjà vu que $b_2 \perp b_3$ et on calcule
$$b_1 \cdot b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).(0,0,1) = 0 \quad \text{et} \quad b_1.b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$
si bien qu'on a bien $b_1 \perp b_2$ et $b_1 \perp b_3$. Le dernier point à vérifier est le fait que b_1, b_2 et b_3 sont tous de norme 1. On l'a déjà vu pour b_1, c'est immédiat pour b_3 et on a [25]
$$||b_2|| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$
si bien que (b_1, b_2, b_3) est finalement une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

5. Pour établir que la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est donnée par
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
il suffit par définition de montrer que [26] que $f(b_1) = 1 \times b_1 + 0 \times b_2 + 0 \times b_3$, que $f(b_2) = 0 \times b_1 + 0 \times b_2 - 1 \times b_3$ et

22. Attention que dans l'espace $x+y=0$ est un **plan** et pas une droite ! C'est dans $\mathbb{R}^2$ que cette équation définit une droite !

23. Ce qui est assez intuitif si vous y pensez : quel est l'espace obtenu lorsque vous cherchez tous les vecteurs perpendiculaires à une droite dans l'espace : un plan ! Par ailleurs, la dimension est bien deux car on a deux directions indépendantes dans un plan. On peut aussi le voir en disant que $(x,y,z) \in F^\perp$ si, et seulement si, $x+y=0$ soit $x=-y$ et ainsi $(x,y,z) = (y,-y,z)$ pour $y,z \in \mathbb{R}$. On a bien besoin de deux paramètres pour décrire $F^\perp$. Remarquez alors que $(x,y,z) \in F^\perp$ si, et seulement si, $(x,y,z) = y(1,-1,0) + z(0,0,1)$ et que vous voyez apparaître là $b_3 = (0,0,1)$ et que $b_2 = \frac{(1,-1,0)}{||(1,-1,0)||}$. C'est de cette façon que j'ai déterminé b_2 et b_3 !

24. En réalité, les vecteurs b_2 et b_3 forment une base orthonormée du plan $F^\perp$.

25. Attention ici au fait que le signe $-$ est dans carré et disparaît donc !

26. Je rappelle que si (b_1, b_2, b_3) est une base différente de la base canonique, et que
$$f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 + m_{31}b_3, \quad f(b_2) = m_{12}b_1 + m_{22}b_2 + m_{32}b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = m_{13}b_1 + m_{23}b_2 + m_{33}b_3$$
alors la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est donnée par
$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$
Autrement dit, si l'on vous demande sans rien d'autre d'écrire la matrice de f dans une base (b_1, b_2, b_3), la méthode est de calculer $f(b_1)$ et d'essayer de trouver m_{11}, m_{21}, m_{31} tels que $f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 + m_{31}b_3$. En remplaçant b_1, b_2, b_3 par leurs expressions dans la base canonique, cela revient à résoudre un système linéaire en m_{11}, m_{21}, m_{31} qui admettra une unique solution. On fait alors de même avec $f(b_2)$ et $f(b_3)$. C'est donc relativement long et pénible et on ne vous le demandera donc sûrement pas mais si vous souhaitez approfondir cela, un exemple est traité en détail dans le polycopié de cours. Si en revanche on vous demande comme c'est le cas ici de vérifier comme ici que la matrice en question est
$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$
alors cela revient à la simple vérification que les relations
$$f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 + m_{31}b_3, \quad f(b_2) = m_{12}b_1 + m_{22}b_2 + m_{32}b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = m_{13}b_1 + m_{23}b_2 + m_{33}b_3$$
sont vraies, ce qui est beaucoup plus commode !

que $f(b_3) = 0 \times b_1 + 1 \times b_2 + 0 \times b_3$. On a alors bien que

$$f(b_1) = b_1 = 1 \times b_1 + 0 \times b_2 + 0 \times b_3$$

soit par le calcul soit en utilisant le fait que $b_1 \in F$ et que F est l'ensemble des vecteurs envoyés sur eux-mêmes par f si bien que nécéssairement $f(b_1) = b_1$! On calcule alors

$$\begin{aligned} f(b_2) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0, \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(0,0,-2) = (0,0,-1) = -b_3 = 0 \times b_1 + 0 \times b_2 - 1 \times b_3. \end{aligned}$$

et de même en utilisant la définition de f, il vient

$$f(b_3) = f(0,0,1) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = b_2 = 0 \times b_1 + 1 \times b_2 + 0 \times b_3$$

si bien qu'on a bien vérifié que la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3) est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. On considère la matrice

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit immédiatement (ou on vérifie qu'elle vérifie [27] ${}^t\tilde{M}\tilde{M} = I_2$ et $\det(\tilde{M}) = 1$) que

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

7. On a vu en question **6.** que

$$f(b_2) = -b_3 \quad \text{et} \quad f(b_3) = b_2$$

de sorte que $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$ et que la matrice de f restreinte à $F^\perp$ est donnée par [28]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{M}.$$

On a vu en question précédente que

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

et on sait alors d'après le cours [29] que $\tilde{M}$ et donc f restreinte au plan $F^\perp$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ et de centre l'origine [30]. Par ailleurs, par définition de F, l'application linéaire f fixe la droite F. On a donc une application linéaire qui fixe la droite

27. Ce qui sera systématique !

28. Comme en question **6.**, pour un sous-espace vectoriel P de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, si $f(P) \subseteq P$, ce qui revient à dire si (b_1, b_2) est une base de P que $f(b_1) \in P$ et $f(b_2) \in P$, alors

$$f(b_1) = m_{11}b_1 + m_{21}b_2 \quad \text{et} \quad f(b_2) = m_{12}b_1 + m_{22}b_2$$

et la matrice de f restreinte à P dans la base (b_1, b_2) est donnée par

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

29. Voir ici, ici et ici pour quelques illustrations de cette rotation !

30. La rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ a lieu dans le sens de b_2 vers b_3 comme sur le dessin ci-dessous. Il peut y avoir des subtilités concernant l'orientation dans l'espace mais on n'entrera pas dans ces subtilités faute de temps.

dirigée par $(1,1,0)$ et qui effectue une rotation dans la plan orthogonal à cette droite d'angle $\frac{3\pi}{2}$ et de centre l'origine[31]. Autrement dit f est une rotation de l'espace d'angle $\frac{3\pi}{2}$ et d'axe la droite dirigée par $(1,1,0)$. Pour construire l'image d'un point A par cette rotation, le procédé est simple : on trace le plan perpendiculaire à la droite F passant par A puis on effectue dans ce plan une rotation de A de $\frac{3\pi}{2}$ dans le sens de b_2 vers b_3 et d'origine le point d'intersection de la droite F et de ce plan. Pour des illustrations, je vous renvoie ici, ici et ici. En d'autres termes, f fait tourner l'espace de $\frac{3\pi}{2}$ dans le sens de b_2 vers b_3 autour de la droite F.

► **EXERCICE IV (UN SECOND EXEMPLE DANS L'ESPACE)**

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Écrire l'application linéaire f associée à M et calculer $\det(M)$ et ${}^tMM$.
2. Montrer que $M = NS$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Écrire les applications linéaires g et s associées à N et S et justifier que $f = g \circ s$.
3. Décrire géométriquement g en s'inspirant de l'exercice III.
4. Justifier que s est une symétrie orthogonale par rapport au plan (Oyz).
5. Conclure quant à la nature géométrique de f.

CORRECTION–

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a alors

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y-z) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) \end{pmatrix}.$$

   Or, on sait que l'application linéaire f associée à M est donnée par $f(x,y,z) = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de sorte que

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}x, y-z, y+z\right) \end{array} \right. .$$

   On a

$${}^tM = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

   et on vérifie que ${}^tMM = I_3$ et $\det(M) = -1$ de sorte que l'application linéaire f préserve les angles et les distances et "retourne" l'espace.

[31]. Et dans le sens de b_2 vers b_3.

2. Un calcul direct fournit que

$$NS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

soit $NS = M$. Comme en question précédente, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}x, y - z, y + z\right) \end{cases}$$

et

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-x, y, z). \end{cases}$$

On sait alors puisque M est la matrice dans la base canonique de f, que N est celle de g et S celle de s et que $M = NS$, qu'on a a [32] $f = g \circ s$.

3. Comme dans l'exercice précédent, on voit que si on note (b_1, b_2, b_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors puisque N est la matrice de g, on a $g(b_1) = b_1$ et g fixe ainsi b_1 et puisque g est linéaire, g fixe toute la droite dirigée par b_1. Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que le plan orthogonal à cette droite est le plan (Oyz) et que b_2 et b_3 appartiennent à ce plan et sont orthogonaux et forment une base de ce plan. De même que pour l'exercice précédent, la restriction de g à ce plan a pour matrice dans la base (b_2, b_3)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

car [33] $g(b_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}b_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}b_3$ et $g(b_3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}b_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}b_3$. On voit alors que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

si bien que la restriction de g à (Oyz) est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre l'origine. Ainsi g est une rotation de l'espace d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre l'origine [34] et d'axe l'axe des abscisses.

4. On voit que s change x en $-x$ en fixant y et z, ce qui montre [35] que s est bien la symétrie orthogonale par rapport au plan (Oyz). Voir ici pour vous aider à vous en convaincre !

5. On en déduit donc finalement que f est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport au plan (Oyz) avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'axe l'axe des abscisses.

On peut généraliser ces deux exercices pour obtenir la proposition suivante.

32. Vous pouvez aussi le vérifier en montrant que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$g(s(x, y, z)) = g(-x, y, z) = f(x, y, z)$$

ce qui est la définition du fait que $f = g \circ s$.

33. Ici on utilise la définition du fait que N est la matrice de g dans la base canonique (b_1, b_2, b_3).

34. Dans le sens de b_2 vers b_3.

35. Faire un dessin !

Proposition 6 *Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire préservant angles et distances. On a alors deux cas de figure.*

(i) Si $\det(M) = 1$, alors il existe une famille orthonormée (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la matrice de f dans cette base (e_1, e_2, e_3) soit donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est alors une rotation d'angle θ autour de la droite dirigée par e_1.

(ii) Si $\det(M) = -1$, alors il existe une famille orthonormée (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la matrice de f dans cette base (e_1, e_2, e_3) soit donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et f est alors la composée de la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par e_1 par une rotation d'angle θ autour de la droite dirigée par e_1.

► **REMARQUE–** Pour une description de ce à quoi ressemble une rotation de l'espace autour d'un axe ainsi que la symétrie orthogonale par rapport à un plan, je vous renvoie ici, ici, ici, ici et ici ainsi qu'à la correction du TD. Globalement une telle rotation fait tourner l'espace autour de la droite dirigée par e_1 d'un angle θ dans la direction de e_2 vers e_3 et une symétrie orthogonale revient à prendre le miroir de l'espace par rapport au plan en question. La section suivante explique comment déterminer la bonne famille orthonormée dans laquelle écrire la matrice de f afin de la décrire géométriquement.

Vous remarquez que, à nouveau, toutes les applications linéaires de l'espace peuvent être décrites en termes de briques de base que sont les rotations et une symétrie orthogonale. Je conclus cette section par quelques mots de vocabulaire qui sont utilisés en chimie.

Définition 1

*(i) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6 avec $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ est appelée une **rotation impropre**.*

*(ii) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6 avec $\theta = 0$ est appelée une **réflexion** par rapport au plan orthogonal à la droite dirigée par e_1.*

*(i) Une application linéaire dans le cas (ii) de la Proposition 6 avec $\theta = \pi$ est appelée une **inversion** par rapport à $(0, 0, 0)$.*

► **REMARQUE–** On parle de réflexion dans le cas où $\theta = 0$ car alors f est simplement une symétrie orthgonale par rapport à un plan et on a vu que cela revenait à prendre l'image miroir (ou la réflexion !) de l'espace par rapport à ce plan. Par ailleurs, quand $\theta = \pi$, on a en fait une symétrie centrale de centre $(0, 0, 0)$ et l'espace se trouve inversé (d'où le nom d'inversion !).

4 STRATÉGIE

Face à une application linéaire du plan que l'on vous demande de décrire géométriquement il faut donc procéder de la manière suivante :

(i) Calculer la matrice M de l'application linéaire dans la base canonique, puis calculer sa transposée. Vérifier alors que ${}^tMM = I_2$. Si oui, l'application linéaire en question préserve angles et distances.

(ii) Calculer $\det(M) \in \{-1, 1\}$ d'après la Proposition 4.

(iii) Appliquer alors la Proposition 5 (i) ou (ii) selon que $\det(M) = 1$ ou -1 et conclure.

De manière analogue, face à une application linéaire du plan que l'on vous demande de décrire géométriquement il faut donc procéder de la manière suivante :

(i) Calculer la matrice M de l'application linéaire dans la base canonique, puis calculer sa transposée. Vérifiez alors que ${}^tMM = I_3$. Si oui, l'application linéaire en question préserve angles et distances.

(ii) Calculer $\det(M) \in \{-1, 1\}$ d'après la Proposition 4.

(iii) Si $\det(M) = 1$, déterminer la droite [36]

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Notez e_1 un vecteur directeur de norme 1. Déterminez alors le plan $F^\perp$ et déterminer e_2 et e_3 une famille orthonormée de ce plan et (e_1, e_2, e_3) est alors une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et vous pouvez conclure par la Proposition 6 (i).

(ii) Si $\det(M) = -1$, déterminer la droite [37]

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Notez e_1 un vecteur directeur de norme 1. Déterminez alors le plan $F^\perp$ et déterminer e_2 et e_3 une famille orthonormée de ce plan et (e_1, e_2, e_3) est alors une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et vous pouvez conclure par la Proposition 6 (ii).

► **REMARQUE–** Pour conclure, au vu des circonstances, pas de panique, vous n'aurez pas à accomplir toute cette procédure tous seuls et vous serez guidés (au moins comme dans ce TD ou dans le DM 2).

36. Ce qui est logique puisque la forme de la matrice attendue dans la base (e_1, e_2, e_3) cherchée impose que $f(e_1) = e_1$, autrement dit que e_1 soit fixé par f et ici on cherche précisément les vecteurs de l'espace fixés par f avec F.

37. Ce qui est logique puisque la forme de la matrice attendue dans la base (e_1, e_2, e_3) cherchée impose que $f(e_1) = -e_1$, autrement dit que e_1 est envoyé sur son opposé par f et ici on cherche précisément les vecteurs de l'espace envoyés sur leur opposé par f avec F.