Cours du 21 janvier

K. Destagnol

Université Paris Saclay

21 janvier 2021

Chapitre 3

Séries de Fourier

Quelques rappels sur les complexes I

Un nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$ où

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module de z et θ l'argument de z vérifiant pour $z \neq 0$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} . \end{cases}$$

La partie réelle de z est x et sa partie imaginaire est y.

Quelques rappels sur les complexes II

On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

Quelques rappels sur les complexes II

On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

et $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$. Pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Quelques rappels sur les complexes II

On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

et $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$. Pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Par ailleurs,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Quelques rappels sur les complexes II

On a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

et $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$. Pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Par ailleurs,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$$

Quelques rappels sur les complexes III

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \quad \textit{et}$$

Quelques rappels sur les complexes III

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \quad et \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

Quelques rappels sur les complexes III

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

et

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).$$

Quelques rappels sur les complexes III

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

et

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).$$

Pour conclure ces rappels, une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $f(t) = x(t) + iy(t)$ avec $x, y : I \to \mathbb{R}$ et on dira que f est dérivable sur I si, et seulement si, x et y le sont auquel cas

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Fonction périodique

Fonction périodique

Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Fonction périodique

Fonction périodique

Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est T-périodique si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t + T) = f(t).$$

Régularité d'une fonction

Fonction continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est continue sur $\mathbb{R}$ si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) = f(t_0).$$

Autrement dit, on peut tracer le graphe de f sans "lever le crayon".

Régularité d'une fonction

Fonction continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est continue sur $\mathbb{R}$ si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

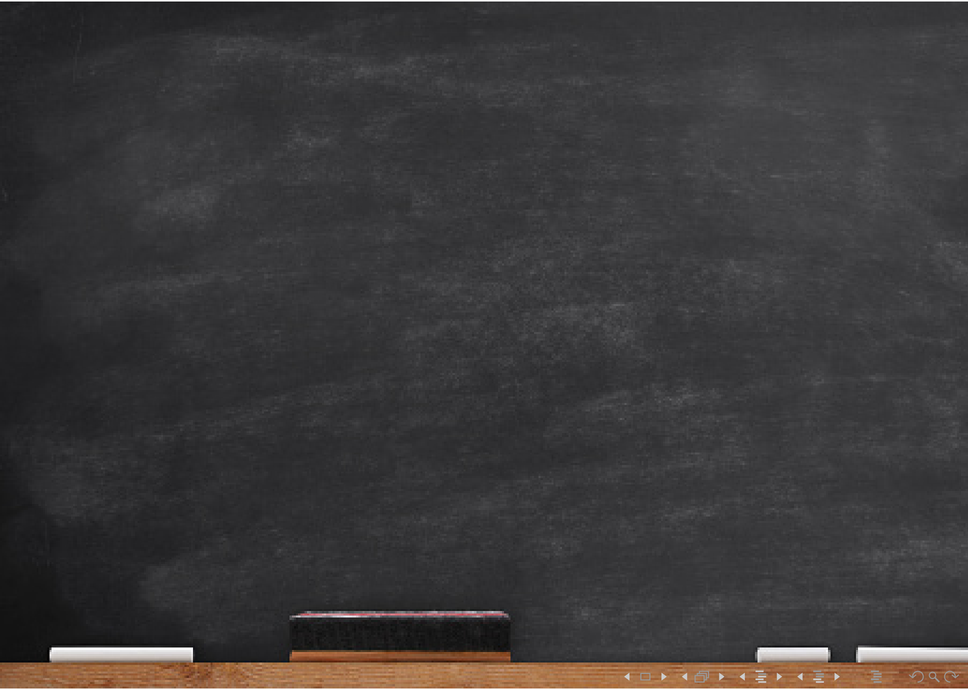
$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) = f(t_0).$$

Autrement dit, on peut tracer le graphe de f sans "lever le crayon".

Fonction continue par morceaux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, il existe $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ tel que la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Autrement dit, on peut tracer le graphe de f en "levant le crayon" un nombre fini de fois sur la feuille.



Idée derrière les séries de Fourier

Soit x un nombre réel. On peut associer à x la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses décimales avec $x_n \in \{0, \cdots, 9\}$.

Idée derrière les séries de Fourier

Soit x un nombre réel. On peut associer à x la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses décimales avec $x_n \in \{0, \cdots, 9\}$.

On a alors $x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{x_3}{1000} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ et les sommes tronquées de plus en plus loin $\sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{10^n}$ donnent des approximations de x.

Idée derrière les séries de Fourier

Soit x un nombre réel. On peut associer à x la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses décimales avec $x_n \in \{0, \cdots, 9\}$.

On a alors $x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{x_3}{1000} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ et les sommes tronquées de plus en plus loin $\sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{10^n}$ donnent des approximations de x.

$x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\rightsquigarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$ $\rightsquigarrow$ $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$

la suite des décimales de x

la série converge et sa somme vaut x

Coefficients de Fourier complexes

Coefficients de Fourier complexes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier complexe de f est

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \, \mathrm{d}t.$$

On appelle alors coefficients de Fourier complexes de f la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Coefficients de Fourier complexes

Coefficients de Fourier complexes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier complexe de f est

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

On appelle alors coefficients de Fourier complexes de f la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Calculer les coefficients de Fourier complexes d'une fonction T-périodique f, c'est calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'intégrale

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Alors,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Alors,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

On a donc en particulier que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\mathrm{d}t.$$

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique.

(i) Si f est à valeurs réelles, alors $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Si f est paire, $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si f est impaire, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Soient g une autre fonction continue par morceaux et T-périodique et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g), \quad c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f).$$

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique.

(i) Si f est à valeurs réelles, alors $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Si f est paire, $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si f est impaire, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Soient g une autre fonction continue par morceaux et T-périodique et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g), \quad c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f).$$

Coefficients de Fourier réels

Coefficients de Fourier réels

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et T-périodique. On pose

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-ième coefficients de Fourier réels de f sont

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \mathrm{d}t.$$

On appelle alors coefficients de Fourier réels de f les suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Calculer les coefficients de Fourier réels d'une fonction T-périodique f, c'est calculer $a_0(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \mathrm{d}t \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \mathrm{d}t.$$

Proposition

Soit f une fonction réelle continue par morceaux et T-périodique. Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$. Par ailleurs, si g est une autre fonction à valeurs réelles continue par morceaux et T-périodique et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f+g) = a_n(f) + a_n(g) \quad \text{et} \quad a_n(\lambda f) = \lambda a_n(f)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f+g) = b_n(f) + b_n(g) \quad \text{et} \quad b_n(\lambda f) = \lambda b_n(f).$$

Lien entre coefficients complexes et réels

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f) = \begin{cases} a_0(f) \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \text{ si } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)) \text{ si } n < 0. \end{cases}$$

Réciproquement, on a $c_0(f) = a_0(f)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = 2\mathcal{R}e(c_n(f)) = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = -2\mathcal{I}m(c_n(f)) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

Coefficients de Fourier et dérivation

Proposition

Soit f une fonction T-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux On a alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} c_n(f), \quad a_0(f') = 0, \quad \forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_n(f') = \frac{2n\pi}{T} b_n(f) \\ b_n(f') = -\frac{2n\pi}{T} a_n(f). \end{cases}$$

En particulier, si on a déjà calculé les coefficients de Fourier d'une fonction f et que l'on vous demande de calculer ceux de f', on ne se fatigue pas à les calculer !