TD 2 - 26/01/2021

Exercice 3

Convergence de Séries

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} .$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

---

(3) On veut étudier $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{\boxed{n^2+\sqrt{n}}}$.

On applique l'algorithme du cours !

[Rappel : Séries connues

Riemann	Riemann alterné	Géométrique
$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$	$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$	$\displaystyle\sum_{n\geq 0} q^n$

CV ssi $\alpha > 1$; CV ssi $\alpha > 0$; CV ssi $|q| < 1$

Aucune série connue !

Donc on passe à l'étape suivante.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \boxed{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} = ?$

[Rappel : Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on ne peut rien dire sur la série. On poursuit l'algorithme.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, alors $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ diverge !]

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} = ?$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$

« $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » donc on a une F.I.

Haut : $\sqrt{n}$

Bas : $n^2 + \sqrt{n} = n^2\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)$

on factorise par le terme dominant

donc $n^2 + \sqrt{n} = n^2\left(1 + \frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

car $\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}_{} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Finalement, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^{3/2}}\right)}$.

$= \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}_{} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n^{3/2}}} = \underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{\to 0} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{\to 0}}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{3/2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

u_n

On ne peut pas conclure et on continue l'algorithme.

On a que $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \geq 0$ donc on a une série à termes positifs.

[Rappel : Si $u_n \geq 0$, pour étudier $\sum_{n\geq 0} u_n$ on a 3 critères :

i) d'Alembert (multiplicative)

ii) Trouver v_n tq $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge. Alors $\boxed{\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.}}$

(ou) Trouver v_n tq $0 \leq v_n \leq u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge. Alors $\boxed{\sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge.}}$

iii) à achier]

On a montré que $u_n = \frac{1}{n^{3/2}} \times \frac{1}{1+1/n^{3/2}} \simeq 1$

donc $\quad u_n \underset{n \text{ grand}}{\approx} \frac{1}{n^{3/2}} \times 1 = \frac{1}{n^{3/2}}$

On devine que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est proche de

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ $\longrightarrow$ série Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

donc converge.

On devine que $\sum_{n \geq 1} u_n$ doit converger.

obj Trouver v_n tq

$$0 \leq u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \leq v_n$$

et $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

Candidat pour v_n : sans ce $+\sqrt{n}$, on obtient

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{\underbrace{n^{\frac{3}{2}}}}.$$

On a $\quad n^2 + \sqrt{n} \geq \begin{matrix} n^2 \\ \sqrt{n} \end{matrix}$ → meilleure majoration car n^2 est le terme dominant

[Rappel : Si on veut majorer $\underbrace{\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}}$ $\leq ?$, il faut minorer. $\underbrace{n^2+\sqrt{n} \geq ?}$]

On a $\quad n^2 + \sqrt{n} \geq n^2 > 0$

donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$$

donc comme $\sqrt{n} \geq 0$

$$0 \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}}_{u_n} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}_{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

donc comme $\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \geq 0$, on en

déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

5 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$

et on reconnaît une série de Riemann avec

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc une série convergente.

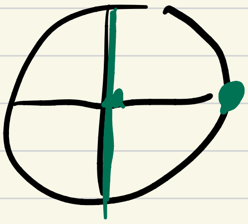
6 $\sum_{n\geq 1} \underbrace{n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}$,

pas de série connue.

On calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \sin(0) = 0$



" $+\infty \times 0$ " F. I.

[Rappel : pour sin, cos on a 2 méthodes

i) encadrement ($\sin(+\infty)$)

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ($\sin(0)$)]

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq 1$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{-n} \leq n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n}$$

$$n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{??}{\overset{??}{=}} \frac{\sin X}{X}$$

Posons,

$X = \frac{1}{n^3}$. On a alors

$$n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = n \sin(X)$$

$$= \frac{1}{n^2} \times n^3 \sin(X)$$

$$= \frac{1}{n^2} \times n^3 \times \sin(X)$$

et si $X = \frac{1}{n^3}$, $n^3 = \frac{1}{X}$

donc $\underline{n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \times \underbrace{\frac{\sin(X)}{X}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} X = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

Quand $n \to +\infty$, $X \to 0$ et $\frac{\sin X}{X} \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ X \to 0}]{} 1$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$.

$$n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^2} \times n^3 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\left[n = \frac{1}{n^2} \times n^3 \right]$$

$$\underline{n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \boxed{\frac{1}{n^2} \times \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}} \simeq 1$$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = n^3 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]$$

(i) $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$X = \frac{1}{n^3}$

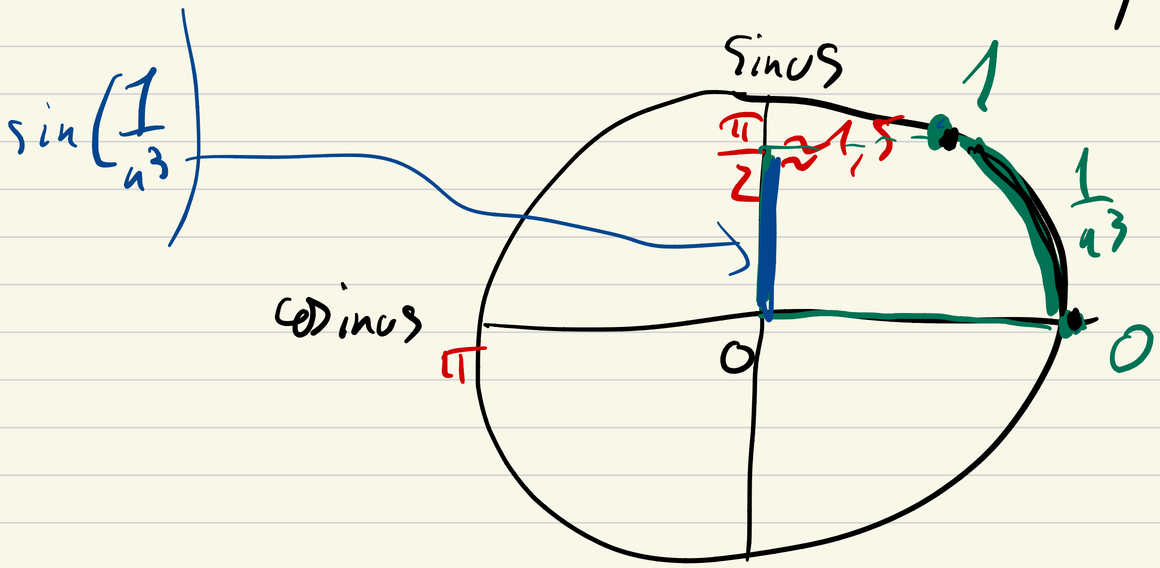
(ii) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

quand $n \to +\infty$, $X \to 0$.

On poursuit l'algorithme.

On doit se demander si $u_n = \underbrace{n}_{\geq 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\geq 0}$ est positive.

Quel est le signe de $\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$?



$0 \leq \frac{1}{n^3} \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi $\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \geq 0$.

Conclusion : $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \geq 0$

D'Alembert (cm) Proposition 7.5 poly.

(sin, cos pas adapté)

on choisit ce critère.

On a vu que

$$u_n = n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^2} \times \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}}_{\sim 1}$$

donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ et donc $\sum_{n\geq 1} u_n$

doit ressembler à $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui est conv

série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente.

<u>obj</u> : Trouver v_n tq

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

et $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

Montrons que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \sin x \leq x.$$

On veut $\underbrace{x - \sin x}$ ≥ 0 $\quad \forall x \in [0,1]$.

On pose $\boxed{f(x) = x - \sin x}$ sur $[0,1]$.

f est dérivable et

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = 1 - \cos(x)$$

$$[\ \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin\ ]$$

Or $\cos(x) \leq 1$

donc $1 - \cos x \geq 0$ et $f'(x) \geq 0$

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
f	0 $\nearrow$	$1-\sin 1$

On en déduit $\underset{\underset{x - \sin x}{\shortparallel}}{g(x)} \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

donc $x \geq \sin x$ sur $[0,1]$.

On a $U_n = n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et on cherche

$$0 \leq U_n \leq V_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} V_n \text{ converge.}$$

$$0 \leq n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq ?$$

Or $\sin(x) \leq x$ si $x \in [0,1]$

donc $0 \leq \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq \frac{1}{n^3} \quad \left(x = \frac{1}{n^3} \in [0,1]\right)$

donc $0 \leq n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq n \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$\shortparallel$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann $\alpha = 2 > 1$)

donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge (car $u_n \geq 0$)

⑦ Laissé en exercice (exemple où la série diverge)

↳ ...

⑧ $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{10^n}$.

i) pas de série connue.

ii) $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

donc $-\frac{1}{10^n} \leq \frac{\cos(n)}{10^n} \leq \frac{1}{10^n}$

$-\frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos(n)}{10^n} = 0$.

iii) $\frac{\cos(n)}{10^n}$ n'est pas positif.

On étudie $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{\cos(n)}{10^n} \right| = \sum_{n \geq 0} \frac{|\cos(n)|}{10^n}$

[Rappel : Si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ diverge, alors on ne peut rien dire sur $\sum_{n \geq 0} u_n$. On poursuit l'algorithme].

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

donc $|\cos(n)| \leq 1$

$$0 \leq \frac{|\cos n|}{10^n} \leq \frac{1}{10^n} \qquad \left(0 \leq |\cos n| \leq \frac{1}{10^n} \right)$$

or $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{10^n} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n$ est une

série géométrique avec $0 < q = \frac{1}{10} < 1$

donc convergente.

Alors comme $\frac{|\cos n|}{10^n} \geq 0$, on en déduit

que $\sum_{n \geq 0} \frac{|\cos n|}{10^n}$ converge.

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{10^n}$ converge absolument,

donc elle converge.

(9) Exercice : $|x| > 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^n}{n} = +\infty$.

$x = \pm 1$ série classique

$|x|<1$ d'Alembert.

Exercice 6

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right) \quad \text{où } x\in\mathbb{R}$$

$\left\{ x = 0 \right.$ $$\sum_{n\geq 1} \ln(1+1) = \sum_{n\geq 1} \underbrace{\ln 2}_{u_n}$$

diverge.

$x = 2$ $$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

On calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right) = ?$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^x =$$

$$\left[\begin{array}{llll} x=1 & n^x = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ x=0 & n^x = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ x=-1 & n^x = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right]$$

$$n^x = e^{x\ln(n)} \quad \text{et} \quad \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} x\,\overbrace{\ln(n)}^{\to+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x>0 \\ -\infty & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$$(x\ln(n) = 0)$$

$$\text{Finalement} \quad \lim_{n\to+\infty} n^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Si $x<0$

$$\lim_{n\to+\infty} n^x = 0^+$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$

$= +\infty.$

$\neq 0$

donc si $x < 0$, $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ diverge.

si $x = 0$: $n^x = 1$ et

$\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right) = \ln 2$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right) = \ln 2 \neq 0$

donc si $x = 0$, $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ diverge.

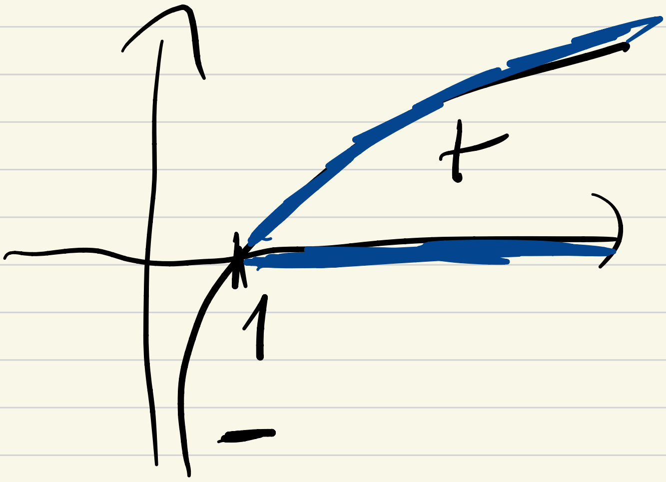
si $x > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^x = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^x}\right) = 1$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \ln(1) = 0$.

Il faut poursuivre l'algorithme dans ce cas !

Q : A-t-on $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$?



or $\frac{1}{n^2} \geq 0$

donc $1+\frac{1}{n^2} \geq 1$

et $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$.

On va utiliser la Proposition ?.5

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

Ici $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$.

car $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On s'attend donc à ce que $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ soit proche de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui est une série de Riemann convergente ssi $\underline{\alpha > 1}$.

<u>Indication</u> : Mq

$\forall t > -1 \quad \ln(1+t) \leq t \quad$ (i)

et $\quad \forall t \in [0,1], \quad \ln(1+t) \geq \frac{t}{2} \quad$ (ii)

(i) $\forall t > -1 \quad \ln(1+t) \leq t$

$$\Leftrightarrow \underbrace{t - \ln(1+t)}_{g(t)} \geq 0$$

On pose $g(t) = t - \ln(1+t)$ sur $]-1, +\infty[$.

f est dérivable et $\forall t > -1$,

$$f'(t) = 1 - 1 \times \frac{1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

$$\left[\ln(t) \right]' = \frac{1}{t}$$

$$= \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t}$$

$$f'(t) = \frac{t}{1+t} \ ) > 0$$

Pour $t > -1$ donc $t+1 > 0$ et $f'(t)$ est du signe de t.

t	-1		0		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$f(t) = t - \ln(1+t)$$

Ainsi $\forall t > -1$, $f(t) \geq 0$

donc $t - \ln(1+t) \geq 0$ donc $\ln(1+t) \leq t$.

Exercice : $\forall t \in [0,1[$, $\ln(1+t) \geq \frac{t}{2}$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\ln(1+t) - \frac{t}{2}}_{g(t)} \geq 0$$

$\forall t > -1$ $\boxed{\ln(1+t) \leq t}$

$\forall t \in [0,1[$, $\ln(1+t) \geq \frac{t}{2}$.

$x > 0$

$$\sum_{n \geq 1} \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)}_{\geq 0}$$

i) $0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right) \leq \frac{1}{n^x}$.

" "

$$\ln(1+t) \leq t$$
avec $t = \frac{1}{n^x} > -1$

et pour $x > 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge et

$\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right) \geq 0$, $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$

converge.

ii) $0 \leq \frac{1}{2n^x} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$

$$\frac{t}{2} \leq \ln(1+t)$$
avec $t = \frac{1}{n^x} \in [0,1)$

et si $0 < x \leq 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ diverge

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^x}$ diverge et comme $\frac{1}{2n^x} \geq 0$, on en déduit

que si $0 < x \leq 1$, $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$

diverge.