"Simulación"
José Helo Guzmán

```
 ___
   /
  / .

 ___
|__   .  __  _   _  |  _   _
|___  | (-_ |||  |_) | (_) _)
     /          |

        /\    _  | .  __  _   __  .  _   _   __  _
\/     /--\ |_) | | (__ (_| (__ | (_) | ) (-_ _)
/           |
```

> Contenido

> 1. Introducción.

En los capítulos anteriores se han cubierto todas las herramientas teóricas que se necesitan para construir un modelo de simulación. Podemos presentar ahora ejemplos, aplicaciones y análisis de estos sistemas.

Para cada ejemplo se tomará en cuenta la dificultad de resolver dicho modelo mediante un procedimiento analítico matemático, si es que este existe. Asímismo se debe considerar las posibilidades prácticas y de costo de manipular los problemas en la vida real, contra la manipulación del modelo digital.

En la vida real los modelos de simulación suelen utilizarse para diferentes fines, tales como el diseño de nuevos sistemas, el análisis de la eficiencia de sistemas reales, el análisis para realizar cambios a sistemas existentes y para entrenar personas en el uso y peligros de sistemas. Finalmente una nueva aplicación ha surgido en los últimos años que consiste en la aplicación de simulación a la teoría de juegos y al uso de juegos por computadora.

Se presentan algunos ejemplos que sirven como prototipos. Cualquier nuevo modelo de simulación puede partir de uno de los prototipos aquí presentados y luego realizar los cambios, adaptaciones y extensiones necesarias.

2. Probabilidades y Monedas.

Se apuesta con una moneda legal y se tiene una cantidad de dinero inicial de $30. La apuesta inicial será de $10. En general la ganacia es igual a la cantidad apostada, en caso de perder se pierde la cantidad apostada.

El juego consiste en tirar la moneda, si cae escudo se gana y si cae cara se pierde. Para jugar se llevará a cabo la siguiente estrategia, la apuesta inicial es de $10. Si se gana se vuelven a apostar $10, si se pierde se apuesta el doble de la vez anterior. De esta forma si apuesto $10 y pierdo la siguiente vez se apostarán $20, si pierdo la siguiente vez se apostarán $40. Si no se tiene suficiente dinero para cubrir la apuesta se apostará todo lo que se tiene. El juego continuará hasta haber ganado $50 o bien haber perdido todo y quedar en quiebra.

Otra forma de describir el juego es decir que se inicia con una apuesta de x=$10, si pierdo apuesto 2*x, si vuelvo a perder 4*x, y así sucesivamente. Si gano apuesto "x". Al igual que antes el juego continua hasta obtener $50 o quedar con $0 en estado de quiebra.

¿Cuál es la probabilidad de ganar $50 con este juego?

- Solución.

Evidentemente aunque el problema es de un planteamiento sencillo su solución analítica es difícil. Por eso debemos requirir a un mecanismo de simulación.

Para simular la moneda se utilizará la transformada inversa una variable aleatoria uniforme. La variable "r" es un valor aletorio en [0,1[, y se producirán los resultados de ganar o perder.

x	p(x)	P(x)
gana	0.50	0.50
pierde	0.50	1.00

De esta forma el algoritmo de generación de números aleatorios es:

Se escoge un valor de r en el intervalo [0,1[
Si r está en [0.00 , 0.50[se gana, es equivalente a ganar.
Si r está en [0.50 , 1.00[se pierde, es equivalente a perder.

A continuación se presentan cinco corridas manuales de este problema para estudiar su comportamiento.

Dinero	Dinero

No.	Inicial	Apuesta	x	Final	Meta
1	30	10	gana	40	no
	40	10	gana	50	si**
2	30	10	gana	40	no
	40	10	gana	50	si**
3	30	10	pierde	20	no
	20	20	gana	40	no
	40	10	pierde	30	no
	30	20	pierde	10	no
	10	10	pierde	0	quiebra
4	30	10	gana	40	no
	40	10	pierde	30	no
	30	20	gana	50	si**
5	30	10	pierde	20	no
	20	20	pierde	0	quiebra

Si estas cinco corridas fueran significativas del problema bajo estudio se podría decir que el juego se gana con una probabilidad de 0.60 de las ocasiones y se pierde con una probabilidad de 0.40. Esto ya que en la simulación se ganó el juego en 3 de las 5 corridas y se perdió en 2 de las 5 corridas. Sin embargo 5 corridas NO son suficientes para establecer este número.

Todo proceso de simulación pasa por una fase conocida como fase transciente. Durante este período los resultados obtenidos no son significativos del experimento bajo estudio. Cuando se han realizado un número significativamente grande de corridas se puede decir que el problema se encuentra en una fase estable. Durante la fase estable se pueden obtener los resultados deseados.

A continuación se presenta una tabla donde se indica el número de corridas, o números de veces que se ejecuta el juego, y de este total de corridas el número de veces que se logra la meta de obtener $50.

No. Corridas	Corridas Exitosas
10	6
100	67
1,000	617
10,000	6,106
100,000	61,059
1,000,000	609,825
10,000,000	6,093,850
100,000,000	60,943,397

Los resultados de los procesos de simulación no se suelen presentar de forma puntual, sino, que dentro de un intervalo estadístico de confianza.

A continuación se presenta un ejemplo con 10000 corridas del problema. Para lograr el cálculo adecuado del intervalo de confianza se supondrá que cada vez que se gana el juego la simulación produce un 1 y cada vez que se llega a un estado de quiebra la simulación produce un valor de 0. Asímismo se utilizará un intervalo de confianza de 0.95.

Para calcular el valor del promedio de éxitos se utilizará la fórmula:

$$\bar{x} = \left(\frac{6106}{10000} \right) = 0.6106$$

Ahora bien, para calcular el valor de la variancia y de la desviación estándar procedemos a utilizar la siguiente fórmula. Se supondrá que el valor de 1 se utiliza cuando se gana y el valor de 0 se utiliza cuando se se queda en bancarrota.

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{(n - 1)}$$

$$s^2 = \frac{6106 * (1 - 0.6106)^2 + 3894 * (0 - 0.6106)^2}{9999}$$

$$s^2 = \frac{925.8672 + 1451.8092}{9999}$$

$$s^2 = 0.2378$$

Una vez que se ha obtenido el valor de la variancia, la desviación estándar se obtiene al sacar la raíz cuadrada de la misma.

$s^2 = 0.2378$

$s = \text{sqrt}(0.2378)$

$s = 0.4876$

Procedemos ahora a calcular la desviación estándar del promedio y así hacer el cálculo del intervalo de confianza.

$s(\bar{x}) = s / \text{sqrt}(n)$

$s(\bar{x}) = 0.4876 / \text{sqrt}(10000)$

$s(\bar{x}) = 0.4876 / 100$

$s(\bar{x}) = 0.0049$

Para calcular el intervalo de confianza se construyen los valores del límite inferior y el límite superior. Para ello se utiliza un valor de z0 que abarque el 0.95 de la distribución normal.

-z0 = -1.96

z0 = 1.96

Finalmente para calcular los intervalos de confianza utilizamos las fórmulas de siempre:

$Li = \bar{x} - z0 * s(\bar{x})$

Li = 0.6106 - 1.96 * 0.0049

Li = 0.6010

$Ls = \bar{x} + z0 * s(\bar{x})$

Ls = 0.6106 + 1.96 * 0.0049

Ls = 0.6202

De esta forma se puede concluir con una confianza del 95% que el verdadero valor de esta simulación se encuentra en el intervalos compuesto por [0.6010 , 0.6202].

3. Juguemos con Dados.

El juego de casino de los dados conocido como "craps" requiere que un jugador lance dos dados. Para el juego principal, pues existen muchas otras derivaciones, se siguen las siguientes reglas.

- Si en el primer tiro el jugador consigue un 7 o un 11 gana.
- Si en el primer tiro el jugador consigue un 2,3 o un 12 pierde.
- Si en el primer tiro se consigue un 4,5,6,8,9,10 el jugador debe continuar tirando hasta que ocurra uno de dos eventos. Si consigue repetir el valor inicial gana, si saca un 7 en cualquier otro momento pierde.

Se desea determinar la probabilidad de ganar en este juego.

- Solución.

A continuación se presentan algunas corridas de ejemplo del juego.

No.	Jugadas	Resultado
1.	7	gana
2	11	gana
3	4,6,11,8,4	gana
4	6,11,8,7	pierde
4	12	pierde
5	10,8,6,7	pierde
6	8,6,9,5,3,8	gana

Para poder simular este juego adecuadamente, un dado que se tira dos veces, dos dados, o bien la suma de dos dados perfectos.

Para simular un dado se requiere una distribución uniforme discreta entre [1,6]. De esta forma se generan dos números aleatorios y se suman. A continuación se presenta el proceso mediante la transformada inversa.

x	p(x)	P(x)
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6

Con base en la tabla anterior se genera el siguiente algoritmo:

Se genera un valor de "r" entre [0,1[.
Si r está entre [0 , 1/6[entonces x = 1
Si r está entre [1/6 , 2/6[entonces x = 2
Si r está entre [2/6 , 3/6[entonces x = 3
Si r está entre [3/6 , 4/6[entonces x = 4
Si r está entre [4/6 , 5/6[entonces x = 5
Si r está entre [5/6 , 6/6[entonces x = 6

Como se lanzan dos dados y se suman sus valores, se pueden obtener los siguientes resultados:

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6

6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Observe que parece que se producen resultados duplicados, lo cual no es correcto. Es un efecto de usar la misma notación para ambos eventos. Por ejemplo si el segundo evento le ponemos letras en lugar de números, se obtendrían los siguientes posibles resultados.

	A	B	C	D	E	F
1	1,A	1,B	1,C	1,D	1,E	1,F
2	2,A	2,B	2,C	2,D	2,E	2,F
3	3,A	3,B	3,C	3,D	3,E	3,F
4	4,A	4,B	4,C	4,D	4,E	4,F
5	5,A	5,B	5,C	5,D	5,E	5,F
6	6,A	6,B	6,C	6,D	6,E	6,F

La otra forma es simular la distribución de la suma, la cual se puede comprobar mediante la siguiente tabla.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Con la tabla anterior se pueden obtener las probabilidades de cada uno de los resultados, los cuales se muestran a continuación.

x	p(x)	P(x)
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/46	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36

Con base en la tabla anterior se construye el siguiente algoritmo:

Se escoge un valor de r en [0,1[
Si "r" esta entre [0/36 , 1/36[entonces x = 2
Si "r" esta entre [1/36 , 3/36[entonces x = 3
Si "r" esta entre [3/36 , 6/36[entonces x = 4
Si "r" esta entre [6/36 , 10/36[entonces x = 5
Si "r" esta entre [10/36 , 15/36[entonces x = 6
Si "r" esta entre [15/36 , 21/36[entonces x = 7
Si "r" esta entre [21/36 , 26/36[entonces x = 8
Si "r" esta entre [26/36 , 30/36[entonces x = 9
Si "r" esta entre [30/36 , 33/36[entonces x = 10
Si "r" esta entre [33/36 , 35/36[entonces x = 11
Si "r" esta entre [35/36 , 36/36[entonces x = 12

La simulación se puede realizar de la siguiente manera:

Se tiran dos dados y se obtiene su suma.
Si es 7,11 gana.
Si es 2,3,12 pierde.
Para cualquier otro valor se establece como meta, se sigue tirando el dado hasta que ocurra uno de los dos eventos siguientes: si sale un 7 se pierde, si sale la meta se gana.

A continuación se presenta una tabla con simulaciones simultáneas de este juego. Entre mayor sea el número de veces que se ha ejecutado el programa, más se acerca el resultado obtenido al resultado real del juego.

No. Corridas	Corridas Exitosas
10	3
100	51
1,000	503
10,000	4,885
100,000	49,818
1,000,000	491,823
10,000,000	4,928,861
100,000,000	49,309,658

Si el proceso se simula para un número lo suficientemente grande de jugadas, la proporción del número de juegos ganados tendrá una distribución normal con las siguientes características:

$\overline{x} = 0.493$

$s(\overline{x}) = 0.5 / \mathrm{sqrt}(n)$

4. El Valor de Pi.

A continuación se calculará una aproximación al valor de "pi" utilizando un proceso geométrico. Dada la siguiente figura, se pueden estimar las áreas del cuadrado de base 1 y del círculo de radio 1. Se desea usar esta información para encontrar una aproximación al valor de "pi".

» Gráfico 1.
» Un Círculo de Radio Uno.

● Solución.

El área del cuadrado es fácil de calcular pues consiste en multiplicar dos de sus lados o aristas.

área_cuadrado = lado * lado

área_cuadrado = 1 * 1

área_cuadrado = 1

El área del círculo se puede estimar mediante la fórmula:

área_círculo = $\pi * r^2$

Como solamente contamos con la cuarta parte de un círculo debemos dividir el valor entre 4:

área_círculo = $(\pi * r^2) / 4$

área_círculo = $(\pi * 1^2) / 4$

área_círculo = $\pi / 4$

De tal forma que que si se escoge un punto de forma aleatoria en el cuadrado de área 1, la probabilidad que este punto caiga dentro del área del círculo va a estar dada por:

$$p([r1,r2] \text{ dentro del círculo}) = \frac{\text{área\_círculo}}{\text{área\_cuadrado}}$$

$$p([r1,r2] \text{ dentro del círculo}) = \frac{\pi / 4}{1}$$

$$p([r1,r2] \text{ dentro del círculo}) = \pi / 4$$

Si calculamos un número de puntos lo suficientemente grande, el valor del círculo va a estar dado por la proporción x/n donde "x" representa el número de puntos dentro del círculo y "n" el total de puntos generados.

Es importante observar que :

$$\underset{n \to +\infty}{\text{Límite}} \quad \frac{x}{n} = \frac{\pi}{4}$$

En consecuencia para un número grande de corridas se puede suponer que:

$$\frac{x}{n} = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = \frac{4*x}{n}$$

Para determinar si un punto se encuentra dentro del círculo utilizamos la ecuación que define la circunferencia del círculo para luego encontrar su interior.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = r$$

Si se usan dos números r1 y r2 generados aleatoriamente en [0,1[se tiene que:

$$\sqrt{(r1^2 + r2^2)} = r$$

$\sqrt{r1^2 + r2^2} = 1$

$\sqrt{r1^2 + r2^2} \leq 1$

Utilizando la ecuación anterior, el algoritmo para descubrir el valor de "pi" sería el siguiente.

- Generar dos números uniformes en [0,1[que denominaremos r1 y r2.

- Evaluar si estos dos números se encuentran dentro del círculo mediante la fórmula:

$\sqrt{r1^2 + r2^2} \leq 1$

- Repetir los pasos anteriores hasta obtener "n" corridas, "x" representa el número de puntos dentro del círculo. En ese momento el valor de "pi" estará dado por:

$\pi = 4 * (x/n)$

A continuación se muestra una tabla con unas cuantas ejecuciones de este algoritmo.

No.	r1	r2	$\sqrt{r1^2+r2^2}$	¿Dentro del círculo?
1	0.4597	0.6449	0.7920	si
2	0.8029	0.2382	0.8375	si
3	0.1347	0.3156	0.3431	si
4	0.8140	0.8111	1.1491	no
5	0.0358	0.8024	0.8032	si

Por lo tanto el valor estimado de pi estará dado por:

$\pi = 4 * (x/n)$

$\pi = 4 * (4/5)$

$\pi = 16/5$

$\pi = 3.20$

Como es evidente con solamente 5 corridas el valor estimado de "pi" difiere en mucho de su valor real. Si se desea aproximar más el valor de la estimación a su valor verdadero es necesario aumentar el número de corridas de forma significativa. Cabe entonces la pregunta de cuántas corridas es necesario realizar para que la estimación de "π" difiera de su valor verdadero en una cantidad de 0.001 con un nivel de confianza del 95%.

Esta pregunta se puede plantear como un problema de intervalos de confianza. El valor de "pi prima" es la aproximación a "pi".

$$p\left(\pi - 0.001 \;\le\; \pi' \;\le\; \pi + 0.001 \right) \;\le\; 0.95$$

$$p\left(\pi - 0.001 \;\le\; \frac{4*x}{n} \;\le\; \pi + 0.001 \right) \;\le\; 0.95$$

$$p\left(\frac{\pi - 0.001}{4} \;\le\; \frac{x}{n} \;\le\; \frac{\pi + 0.001}{4} \right) \;\le\; 0.95$$

Ahora bien "x" representa la cantidad de puntos que cayeron adentro del cuarto de círculo. Se puede pensar que caer adentro es un éxito y caer afuera es un fracaso, de esta forma "x" sigue una distribución binomial. Como sabemos la distribución binomial tiene la siguiente media y variancia.

$E(x) = n * p$

$E(x) = n * (\pi / 4)$

$E(x) = n * (\pi / 4)$

Y se puede deducir que:

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} * E(x)$$

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} * n * \frac{\pi}{4}$$

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = \pi / 4$$

$$V(x) = n * p * q$$

$$V(x) = n * \left(\frac{\pi}{4} \right) * \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$V(x) = n * (\pi / 4) * (1 - \pi / 4)$$

$$V\left(\frac{x}{n} \right) = \left(\frac{1}{n^2} \right) * V(x)$$

$$V\left(\frac{x}{n} \right) = \left(\frac{1}{n^2} \right) * n * \left(\frac{\pi}{4} \right) * \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$V\left(\frac{x}{n} \right) = \left(\frac{1}{n} \right) * \left(\frac{\pi}{4} \right) * \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$V\left(\frac{x}{n} \right) = (1 / n) * (\pi / 4) * (1 - \pi / 4)$$

$$de\left(\frac{x}{n} \right) = \sqrt{(1/n) * (\pi/4) * (1 - \pi/4)}$$

Como el valor de "n" es lo suficientemente grande, la distribución binomial se puede calcular por medio de la distribución normal, utilizando la misma esperanza y la misma variancia. En general, al normalizar se utiliza la fórmula:

$$z0 = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Que en nuestro caso se convertiría en:

$$z0 = \frac{(x/n) - \mu(x/n)}{\sigma(x/n)}$$

$$z0 = \frac{(x/n) - E(x/n)}{de(x/n)}$$

El objetivo es encontrar el número de corridas, lo que corresponde a despejar "n".
Por ello resulta más sencillo normalizar el lado derecho.

$$z0 = \frac{(\pi + 0.001)/4 - E(x/n)}{de(x/n)}$$

$$z0 = \frac{\frac{\pi + 0.001}{4} - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{(1/n) * (\pi/4) * (1 - \pi/4)}}$$

$$z0 * \sqrt{(1/n) * (\pi/4) * (1 - \pi/4)} = \frac{\pi + 0.001}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$z0 * \sqrt{(1/n) * (\pi/4) * (1 - \pi/4)} = \frac{\pi + 0.001 - \pi}{4}$$

$$z0 * \sqrt{(1/n) * (\pi/4) * (1 - \pi/4)} = \frac{0.001}{4}$$

$$z0^2 * (1/n) * (\pi/4) * (1 - \pi/4) = \frac{0.001^2}{4^2}$$

$$\frac{4^2 * z0^2 * (\pi/4) * (1 - \pi/4)}{0.001^2} = n$$

Como se quería un intervalo de 0.95 en la distribución normal se puede sustituir el valor de z0 = 1.96. De igual forma al sustituir el valor de "pi" se obtiene lo siguiente:

$$n = \frac{4^2 * z0^2 * (\pi/4) * (1 - \pi/4)}{0.001^2}$$

$$n = \frac{4^2 * 1.96^2 * (\pi/4) * (1 - \pi/4)}{0.001^2}$$

n = 10359897.0849

n = 10359897

n = 10,359,897

Lo que significa que se requieren generar 10359897 números para obtener el valor de "pi" con una diferencia de 0.001 con un 95% de confianza. Sin embargo esta fórmula es poco utilizable ya que estamos calculando el valor de "pi" y para ello necesitamos utilizar dicho valor. Por lo tanto es usual sustituir este valor por una cota superior.

$$n = \frac{4^2 * z0^2 * (\pi/4) * (1 - \pi/4)}{0.001^2}$$

$$n = \frac{4^2 * z0^2 * 1 * 1}{0.001^2}$$

$$n = \frac{4^2 * 1.96^2 * 1 * 1}{0.001^2}$$

n = 61465600

n = 61,465,600

Finalmente una diferencia de 0.001 entre el estimado y el valor de "pi" es muy grande. Si se quieren que el valor de "pi" tenga 4 dígitos correctos se debe pedir una diferencia menor a 0.00001. Esto convertiría la fórmula anterior en:

$$n = \frac{4^2 * 1.96^2 * 1 * 1}{0.00001^2}$$

n = 614656000000

n = 614,656,000,000

5. Transportes y Mármol.

La empresa Roma Virtual S.A. tiene asignado un camión especial de transporte para sus estatuas de imitación de mármol. Dicho camión transporta diariamente 5 estatuas. El peso de las estatuas tiene la siguiente distribución de probabilidad.

» Gráfico 2.
» Distribución del Peso de las Estatuas.

Si el camión de reparto tiene una capacidad de 1000 kilos, entonces estamos interesados en averiguar cuál es la probabilidad que el peso de las estatuas exceda la capacidad del camión.

Se resolverá el presente problema primero en forma analítica para ver la dificultad del proceso y luego utilizando simulación.

● Solución Analítica.

La distribución de probabilidad fue dada por medio de un gráfico. Debemos convertir dicho gráfico a una fórmula matemática.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 190}{400} & \text{si } 190 \leq x \leq 210 \\[2ex] \dfrac{230 - x}{400} & \text{si } 210 \leq x \leq 230 \end{cases}$$

Obtenemos ahora la esperanza, la variancia y la desviación estándar de la distribución.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x) \, dx$$

$$E(x) = \int_{190}^{210} x * \left(\frac{x - 190}{400} \right) dx$$

$$+ \int_{210}^{230} x * \left(\frac{230 - x}{400} \right) dx$$

$$E(x) = 210$$

Y la Variancia:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{x} - x)^2 * f(x) dx$$

$$V(x) = \int_{190}^{210} (\overline{x} - 210)^2 * \left(\frac{x - 190}{400} \right) dx$$

$$+ \int_{210}^{230} (\overline{x} - 210)^2 * \left(\frac{230 - x}{400} \right) dx$$

$$V(x) = 66.6667$$

Y finalmente la desviación estándar que se obtiene al sacar la raíz cuadrada de la variancia.

$$de(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{66.6667} = 8.1649$$

Para encontrar la probabilidad que la suma total de los pesos individuales de cada estatua exceda el máximo soportado por el camión se debe calcular la siguiente probabilidad, donde x_i representa el peso de la estatua "i".

$$p\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1000 \right)$$

Que es equivalente a:

$$p\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \geq \frac{1000}{5} \right)$$

$$p(\bar{x} \geq 200)$$

Por el teorema del límite central conocemos que el promedio tiene las siguientes características.

$$E(\bar{x}) = \bar{x}$$

$$V(\bar{x}) = V(x) / n$$

$$de(\bar{x}) = \sqrt{(V(x))} / \sqrt{(n)}$$

$$de(\bar{x}) = de(x) / \sqrt{(n)}$$

Por lo tanto:

$$E(\bar{x}) = 210$$

$$V(\bar{x}) = V(x) / n$$

$$= 66.6667 / 5$$

$= 13.3333$

$$de(\bar{x}) = de(x) / \sqrt{(n)}$$

$$= 8.1649 / \sqrt{(5)}$$

$$= 3.6515$$

Finalmente calculamos la probabilidad

$$p(\bar{x} \geq 200) = p\left(z \geq \frac{200 - 210}{3.6515} \right)$$

$$= p(z \geq -2.74)$$

$$= 1 - p(z \leq 2.74)$$

$$= 1 - 0.0031$$

$$= 0.9969$$

R/ Por lo tanto, la probabilidad de que el peso de las estatuas exceda la capacidad del camión es de 0.9969

● Solución por Simulación

Para resolver este ejercicio mediante un programa de simulación se deben realizar las siguientes actividades.

- Simular el peso de 5 estatuas.
- Sumar estos pesos.
- Comparar la suma con el total de 1000 kilos.
- Repetir el proceso tantas veces como sea necesario.

Para simular el peso de las estatuas se necesita un generador de números aleatorios de acuerdo a la distribución. Para ello se utilizará el método de la transformada inversa.

Para el caso que el valor de "x" se encuentre en [190,210] calculamos el valor de la siguiente integral.

$$F(x) = \int_{190}^{x} \frac{t - 190}{400} \, dt$$

Para el caso que el valor de "x" se encuentre en [210,230] calculamos el valor de la siguiente integral.

$$F(x) = F(210) + \int_{210}^{x} \frac{230 - t}{400} \, dt$$

Por lo que la función acumulada tendrá el siguiente comportamiento.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 190 \\ \dfrac{(x - 190)^2}{800} & \text{si } 190 \leq x \leq 210 \\ 1 - \dfrac{(x - 230)^2}{800} & \text{si } 210 \leq x \leq 230 \\ 1 & \text{si } x > 230 \end{cases}$$

Ahora para obtener la transformada inversa se toma cada una de las partes de la distribución acumulada. Para la primera parte tenemos.

$$\frac{(x - 190)^2}{800} = r$$

$$(x - 190)^2 = 800 * r$$

$(x - 190) = \pm \sqrt{(800 * r)}$

$(x - 190) = + \sqrt{(800 * r)}$

$x = 190 + \sqrt{(800 * r)}$

Para la segunda parte de la transformada inversa utilizamos un proceso similar.

$$1 - \frac{(x - 230)^2}{800} = r$$

$$\frac{(x - 230)^2}{800} = 1 - r$$

$(x - 230)^2 = 800*(1 - r)$

$(x - 230) = \pm \sqrt{(800 * (1 - r))}$

$(x - 230) = - \sqrt{(800 * (1 - r))}$

$x = 230 - \sqrt{(800 * (1 - r))}$

Para simular el peso de las estatuas se utilizará el siguiente algoritmo:

- Generar un número uniforme "r".

- Si $r \leq 0.50$, entonces el valor de x estará en [190,210]

  $x = 190 + \sqrt{(800 * r)}$

- Si $r > 0.50$, entonces el valor de x estará en [210,230]

  $x = 230 - \sqrt{(800 * (1 - r))}$

A continuación se muestra una corrida de este proceso de simulación.

No	x	Total	Excede?
1	207.8590		
2	213.0240		
3	207.6749		

4	206.9291		
5	210.5794	1046.0665	si
1	209.4821		
2	214.0043		
3	201.7641		
4	201.9146		
5	222.3320	1049.4972	si
1	204.1159		
2	207.3487		
3	198.2700		
4	217.9292		
5	210.1282	1037.7921	si
1	216.1148		
2	207.3943		
3	210.4274		
4	206.5639		
5	206.9789	1047.4793	si
1	207.1385		
2	197.8657		
3	215.5229		
4	204.4228		
5	219.6288	1044.5786	si

- ¿Se debe adquirir o no un nuevo camión?

Al igual que antes ya sea por medios analíticos o por simulación, se puede analizar la conveniencia de adquirir un nuevo camión.

Se supondrá que se realiza solamente un embarque por día. Cuando la capacidad del camión no es suficiente se envían las estatuas que sobrepasan el peso a una compañía de entregas con un costo adicional de $200 por estatua.

El costo promedio anual, pago del préstamo por la compra, más mantenimiento y seguros de un nuevo camión es de $51900. Si se trabajan 5 días a la semana y 52 semanas al año, ¿cuál alternativa es mejor?

- Analicemos la situación anterior de forma analítica.

El costo de enviar mercadería a través de la otra compañía es:

$200 por estatua

0.9969 de probabilidad por embarque diario.

5 días por semana

52 semanas por año.

Poniendo la anterior junto, se obtiene el costo anual que estará dado por:

($200) * (0.9969) * (5) * (52) = $51840

Como 51840 es menor que 51900, parece que no es necesario comprar un nuevo camión si las circunstancias se mantienen así.

Si analizamos la situación mediante simulación, tendríamos que realizar el siguiente proceso.

- Simular un envío de 5 estatuas.

- Si el peso de las 5 estatuas es mayor que 1000, se acumulan $200
  en otro caso no se acumula nada.

- Repetimos el proceso anterior para 5 * 52 = 260 días
  y determinamos el costo total.

Para que el proceso anterior funcione correctamente hay que ejecutarlo una gran cantidad de veces. Como en cada ocasión producirá un costo diferente se debe sacar un promedio del costo y un intervalo de confianza. Asimismo es natural suponer que si el programa se ejecuta muchas veces el costo promedio deberá tender a la solución analítica de $51840.

6. Un Sistema de Inventarios.

Los sistemas de inventarios contienen gran cantidad de variables que interactúan entre sí. Es usual encontrar soluciones matemáticas a los problemas de inventarios determinísticos, sin embargo cuando algunas de estas variables se tornan estocásticas el modelo matemático se vuelve considerablemente complejo o imposible de construir.

Usualmente los modelos de inventarios determinísticos asumen una demanda conocida y constante, una capacidad de producción infinita, no se permiten faltantes y los costos de ordenar y transportar el inventario tienen un comportamiento lineal.

En la realidad todas estas variables son mucho más complejas. La demanda es aleatoria y puede comportarse diferente de acuerdo a la época del año. El tiempo de entrega que transcurre entre el solicitar una orden y el momento de entrega no siempre es igual. Hay costos por mantener inventarios y costos por no tener suficiente inventario si un cliente lo solicita. Además todos estos parámetros pueden ser no lineales.

A continuación se presenta un estudio de un sistema de inventarios sencillo, para el cual es necesario identificar dos variables primordiales. La cantidad de la orden denotada por "q" y el punto de re-orden denotado por "r". Por consiguiente para evaluar el funcionamiento del sistema se toman valores de "q" y "r" que minimicen los costos totales de operación.

Al inicio de cada día se revisa el nivel de inventario. Cuando el nivel de inventario es igual o menor al punto de reorden "r", se debe solicitar un nuevo pedido. El tiempo de entrega en días del pedido está dado por:

Días	p(x)	P(x)
1	0.30	0.30
2	0.40	0.70

3	0.30	1.00

La demanda se suele construir a través de datos históricos de la empresa. Estos datos se pueden usar directamente como una tabla o bien se puede tratar de construir una distribución de probabilidad que se ajuste a los datos.

En este ejemplo se supondrá que la demanda diaria se comporta como una distribución Poisson con un parámetro de lambda de 7.

$$p(x) = \frac{\lambda^{x} * e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{para } x = 0,1,2,3,...$$

$$p(x) = \frac{7^{x} * e^{(-7)}}{x!} \quad \text{para } x = 0,1,2,3,...$$

Para la construcción de los valores se utilizará el método de la transformada inversa, de manera tal que que se construirá una tabla con los posibles valores de la distribucion poisson y su acumulada. Para construir la tabla se acumulan valores hasta superar el 0.99 de los datos.

x	p(x)	P(x)
0	0.0009	0.0009
1	0.0064	0.0073
2	0.0223	0.0296
3	0.0521	0.0818
4	0.0912	0.1730
5	0.1277	0.3007
6	0.1490	0.4497
7	0.1490	0.5987
8	0.1304	0.7291
9	0.1014	0.8305
10	0.0710	0.9015
11	0.0452	0.9467
12	0.0263	0.9730
13	0.0142	0.9872
14	0.0071	0.9943

La información de costos está dada por los siguientes elementos:

- El costo fijo de hacer un pedido será de $100. No importa la cantidad que se ordene se deben pagar $100 por el pedido.

- El costo del inventario se calculará con base en el inventario al final de cada día. Este cuesta $20 por unidad por día.

• Cuando algún cliente solicita un pedido y este no está disponible se estima un costo de $50 por el faltante al final del día. Este es un costo de penalización por la insatisfacción del cliente y otros gastos.

A continuación se presenta una tabla con una ejecución de este problema de inventarios. Para la presenta tabla se han tomado los siguientes supuestos:

Inventario inicial   i = 50

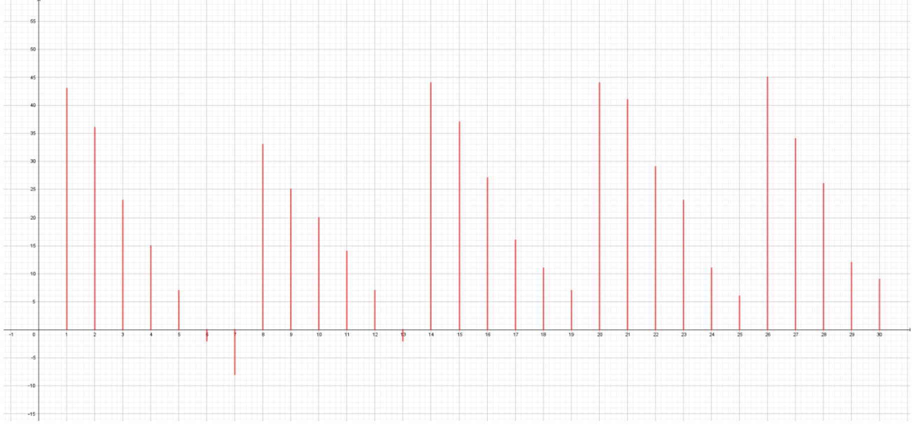
Cantidad por ordenar q = 50

Punto de reorden   r = 20

No	ini	q?	t	x	fin
1	50	0	0	7	43
2	43	0	0	7	36
3	36	0	0	13	23
4	23	0	0	8	15
5	15	1	3	8	7
6	7	1	2	9	-2
7	-2	1	1	6	-8
8	42	0	0	9	33
9	33	0	0	8	25
10	25	0	0	5	20
11	20	1	3	6	14
12	14	1	2	7	7
13	7	1	1	9	-2
14	48	0	0	4	44
15	44	0	0	7	37
16	37	0	0	10	27
17	27	0	0	11	16
18	16	1	2	5	11
19	11	1	1	4	7
20	57	0	0	13	44
21	44	0	0	3	41
22	41	0	0	12	29
23	29	0	0	6	23
24	23	0	0	12	11
25	11	1	1	5	6
26	56	0	0	11	45
27	45	0	0	11	34
28	34	0	0	8	26
29	26	0	0	14	12
30	12	1	2	3	9

A continuación se presenta un gráfico con los inventarios iniciales de cada día. El gráfico muestra el comportamiento del inventario conforme avanzan los días. Observe cuando el nivel de inventario se hace negativo que se produce un faltante de productos.

» Gráfico 3.
» Inventario Inicial Diario.



Ahora es importante calcular los costos en que se incurre al utilizar este modelo de inventarios. Tal como se había señalado se deben contabilizar tres costos diferentes.

• El costo fijo por orden:

Tal como se observa en la tabla se requirió hacer un pedido en varias ocasiones distintas, por cada una de ellas se deben pagar $100.

costo-fijo = 5 * 100 = 500

• El costo por mantener inventario.

Existen muchas formas de contabilizar el costo del inventario. En nuestro caso se aplicará este costo únicamente a las piezas de inventario que no se han vendido. Observe además que se hay un faltante el costo de inventario de esa día es de 0.

```
costo-inventario = 20 * (   43 + 36 + 23 + 15 +  7
                          +  0 +  0 + 33 + 25 + 20
                          + 14 +  7 +  0 + 44 + 37
                          + 27 + 16 + 11 +  7 + 44
                          + 41 + 29 + 23 + 11 +  6
                          + 45 + 34 + 26 + 12 +  9  )
```

costo_inventario   = 20 * 645

costo_inventario   = $ 12900

• El costo de penalización.

Cuando un cliente no encuentra el producto en inventario se incurre en un costo de penalización. En nuestro caso se había estimado en $50 por unidad.

costo-penalización = 50 * (2 + 8 + 2)

costo-penalización = 50 * 12

costo-penalización = $ 600

• Por lo tanto el costo total de la política q = 50, r = 20 se puede estimar en:

```
costo-total  =  costo-fijo
             +  costo-inventario
             +  costo-penalización


costo-total  =   500
             + 12900
             +   600


costo-total  = $ 14000
```

En esta caso sería muy interesante estudiar otras políticas de cantidad por ordenar y punto de reorden, es decir otros valores para "q" y "r". En general se buscaría encontrar valores de "q" y "r" que minimicen el valor del costo total, dadas las condiciones de demanda y tiempo de reorden de este problema.

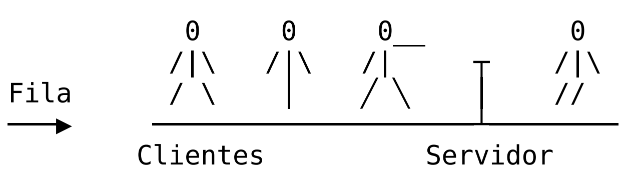
7. Sistemas de Colas.

Un sistema de colas o líneas de espera, es el efecto resultante cuando la demanda de un servicio supera la capacidad de proporcionar dicho servicio.

Dependiendo del sistema de colas que se desea simular puede ser que exista una sola fila y un solo servidor, una sola fila y múltiples servidores o bien múltiples filas y múltiples servidores. Finalmente los sistemas de colas se pueden unir, de forma tal que la salida de una cola se convierta en la entrada de otra.

De igual forma los servidores pueden ser cajeros, máquinas, semáforos, procesos, etc. Los clientes del servicio irán de acuerdo al tipo de servidor que se tenga asociado.

A continuación se muestra de forma gráfica la forma usual de una línea de espera con una fila y un servidor.



El análisis de colas matemático tradicional asume un conjunto de supuestos que pasamos a listar, cuando alguno de estos supuestos se modifica es casi imposible de resolver de forma analítica.

A continuación se enumeran estos supuestos para que cuando resolvamos el problema en forma de simulación podemos establecer que supuestos se han modificado.

• El tiempo entre llegadas de los clientes y el tiempo de servicio siguen una distribución exponencial.

• Se asume también que la cantidad de clientes que llega a sistema por unidad de tiempo y la cantidad de clientes que son servidos por el sistema tiene una distribución poisson.

• La fuente que alimenta al sistema es de tamaño infinito.

• La forma como se brinda el servicio es de forma "fifo" (first in, first out), el primero en llegar es el primero en ser atendido.

• Los clientes que llegan al sistema se unen al final de cola y estos nunca se retiran una vez que han entrado en la línea de espera, es decir permancen en ella hasta ser servidos.

• Los clientes llegan en forma individual, a lo sumo llega uno por unidad de tiempo, por lo que se usan unidades de tiempo muy pequeñas.

• De igual forma solamente un cliente puede abandonar el sistema por unidad de tiempo.

• El sistema ha alcanzado un estado estable.

● Ejemplo.

A continuación un ejemplo de simulación de una línea de espera típica.

Una fábrica de electrodomésticos nacional es abastecida desde un almacén central. La mercancía llega a esta fábrica durante la noche. El personal encargado de descargar la mercancía consiste en tres personas, las cuales trabajan en grupo para descargar los camiones que llegan. Trabajan un turno de 8 horas de 12:00am a 8:00am.

El salario por hora que recibe este personal es de $25. El almacén recibe mercancía únicamente de 12:00am a 8:00am. Si se requiere trabajar horas extras, el salario percibido por el personal será de $37.50 por hora. Finalmente el costo de espera de un camión es de $100 por hora y el costo de tener operando el almacén es de $500 por hora.

Cuando el almacén abre sus puertas puede suceder que haya más de un camión esperando para ser descargado. Con base en la información histórica, se sabe que la distribución de probabilidad del número de camiones que están esperando al momento de que el almacén abra sus puertas es la siguiente.

Cantidad Camiones	Probabilidad
0	0.50
1	0.25
2	0.15
3	0.10

Por otra parte, también de los registros, se ha obtenido la distribución de probabilidad del tiempo entre llegadas es una distribución exponencial con una media de 40 minutos.

Por medio de experimentación se han obtenido las distribuciones de probabilidad del tiempo de servicio para diferentes tamaños de equipo. Tales distribuciones se muestran a continuación.
Tiempo de servicio con 3 empleados es exponencial con una media de 37 minutos.
Tiempo de servicio con 4 empleados es exponencial con una media de 35 minutos.
Tiempo de servicio con 5 empleados es exponencial con una media de 33 minutos.
Tiempo de servicio con 6 empleados es exponencial con una media de 31 minutos.

Con base en toda la información presentada, lo que se desea establecer el tamaño óptimo del equipo.

● Solución.

En el sistema de líneas de espera que se analiza existen varios elementos estocásticos que se deben tomar en cuenta.

• La variable de decisión es el número de personas que se encargarán de recibir los camiones.
Descubrir el mejor tamaño del equipo de descarga es el objetivo de la simulación.

• El número de camiones esperando a ser servidos al iniciar el proceso.
Una distribución de probabilidad presentada como una tabla.

• El proceso de llegadas de clientes al sistema.
Una distribución exponencial.
Este proceso se truncará la parte decimal de la variable aleatoria para generar números enteros.

• El proceso de servicio.
Una distribución exponencial.
Este proceso se truncará la parte decimal de la variable aleatoria para generar números enteros.

La simulación de las líneas de espera se puede realizar de dos formas.

• Incrementos a tiempo fijo

• Incrementos al próximo evento.

Ambos procedimientos actualizan el estado del sistema de acuerdo a los eventos que ocurren en un intervalo específico de tiempo. La diferencia entre estos procedimientos es la manera en la cual se especifican los incrementos.

En los incrementos a tiempo fijo, como su nombre lo indica, el tiempo es adelantado siempre en intervalos que tienen una misma duración. Por ejemplo el tiempo puede ser adelantado en incrementos de 5 minutos. Cuando el reloj virtual de la simulación es adelantado en esta unidad de tiempo el sistema es actualizado al considerar todos los eventos que ocurrieron durante este período de tiempo. El sistema pasa a un nuevo estado y está listo para repetir el proceso.

En los incrementos al próximo evento, el reloj de la simulación se adelanta en intervalos que no tienen la misma duración. El tiempo de cada incremento se determina con base en el cambio más cercano que existe dentro del sistema. Por ejemplo si se sabe que van a ocurrir dos cambios importantes en el sistema uno dentro de 7 minutos y otro dentro de 11 minutos, el sistema se avanza directamente 7 minutos, al tiempo más cercano del próximo evento que está por ocurrir.

● Simulación para 3 empleados.

A continuación se presenta una tabla con una simulación manual del problema con un turno de operación de 3 personas. Al inicio de la tabla se ha generado un número aleatorio y existe un camión en espera de ser atendido al momento de abrir las puertas el almacén. Como la tabla es algo larga se han utilizado las siguientes abreviaciones:

Tiempo: tiempo actual del sistema.
Evento: si es inicio, entrada o salida.
Tiempo.Sig.Sal: tiempo en que se desocupará el servidor.
Cola: lista con los camiones en cola, guarda el tiempo que ha esperado cada camión.
Tiempo.Sig.Ent. : tiempo en el que se realizará la siguiente entrada al sistema.
Tiempo Ocioso Personal: tiempo que el personal pasa sin descargar.
Tiempo Espera Buses: tiempo en que los buses pasan en la fila.

Aquí está la simulación con minutos para 3 empleados, suponemos que inicia con 1 cliente en el servidor.

Tiempo	Evento	Tiempo Sig.Sal*	Cola	Tiempo Sig.Ent*	Tiempo Ocioso Personal	Tiempo Espera Buses
00	Inicio	50	()	40	0	0
40	Entrada	50	(0)	100	0	0
50	Salida	75	()	100	0	10
75	Salida	x	()	100	0	0
100	Entrada	135	()	125	25	0
125	Entrada	135	(0)	145	0	0
135	Salida	195	()	145	0	10
145	Entrada	195	(0)	165	0	0
165	Entrada	195	(20 0)	190	0	0
190	Entrada	195	(45 25 0)	220	0	0
195	Salida	225	(30 5)	220	0	50
220	Entrada	225	(55 30 0)	280	0	0
225	Salida	245	(35 5)	280	0	60
245	Salida	275	(25)	280	0	55
275	Salida	315	()	280	0	55
280	Entrada	315	(0)	320	0	0
315	Salida	360	()	320	0	35
320	Entrada	360	(0)	345	0	0
345	Entrada	360	(25 0)	365	0	0
360	Salida	420	(15)	365	0	40
365	Entrada	420	(20 0)	420	0	0
420	Salida	475	(55)	420	0	75
420	Entrada	475	(55 0)	445	0	0
445	Entrada	475	(80 25 0)	465	0	0
465	Entrada	475	(100 45 20 0)	505**	0	0
475	Salida	510	(55 30 10)	505**	0	110
510	Salida	540	(65 45)	505**	0	90
540	Salida	560	(75)	505**	0	95
560	Salida	590	()	505**	0	95
590	fin					
Tiempo	Evento	Tiempo Sig.Sal*	Cola	Tiempo Sig.Ent*	Tiempo Ocioso Personal	Tiempo Espera Buses

Total	25	780

Ahora bien, para la tabla anterior, debemos calcular el costo en que se ha incurrido.

```
salarios = tiempo-normal + tiempo-extra
salarios = 3 * (480/60) * $25  +  3 * (110/60) * $37.50
salarios = 3 *       8  * $25  +  3 * (110/60) * $37.50
salarios = 600 + 206.25
salarios = 806.25
```

```
tiempo_ocioso = 3 * (25/60) * $25
tiempo_ocioso = 31.25
```

```
operación_almacén = (590/60) * $500
operación_almacén = 4916.66
```

```
espera_del_camión = (780/60) * $100
espera_del_camión =  1300
```

```
costo_total = salarios
            + tiempo-ocioso
            + operación-almacén
            + espera-del-camión
```

```
costo_total =  806.25
            +   31.25
            + 4916.66
            + 1300.00
```

```
costo_total =  7054.16
```

- Qué pasa si hay varios camiones al inicio?

Un caso importante de considerar es el inicio del sistema, cuando pueden que hayan varios camiones esperando ingresar. Por ejemplo si hay 3 camiones, un ejemplo de la simulación muestra en la tabla siguiente.

Tiempo	Evento	Tiempo Servidor*	Cola	Tiempo Sig.Ent*	Tiempo Ocioso Personal	Tiempo Espera Buses
00	Inicio	50	(0 0)	40	0	0
40	Entrada	50	(40 40 0)	100	0	0
50	Salida	75	(50 10)	100	0	50
75	Salida	95	(35)	100	0	75
95	Salida	120	()	100	0	55
.						
.						

.
Continúa

● Otra forma de realizar la simulación para 3 empleados.

A continuación se presenta otra forma de realizar la simulación, en esta ocasión, en lugar de usar una cola de largo variable se utiliza un valor entero para representar el número de camiones en la fila. A cambiar la representación se debe realizar el cómputo de manera diferente.

Tiempo: tiempo actual del sistema.
Evento: si es inicio, entrada o salida.
Tiempo.Sig.Sal: tiempo en que se desocupará el servidor.
Cola: lista con los camiones en cola, guarda el tiempo que ha esperado cada camión.
Tiempo.Sig.Ent. : tiempo en el que se realizará la siguiente entrada al sistema.
Tiempo Ocioso Personal: tiempo que el personal pasa sin descargar.
Tiempo Espera Buses: tiempo en que los buses pasan en la fila.

Tiempo	Evento	Tiempo Sig.Sal*	Cola	Tiempo Sig.Ent*	Tiempo Ocioso Personal	Tiempo Espera Buses
00	Inicio	50	0	40	0	0
40	Entrada	50	1	100	0	0
50	Salida	75	0	100	0	10
75	Salida	x	0	100	0	0
100	Entrada	135	0	125	25	0
125	Entrada	135	1	145	0	0
135	Salida	195	0	145	0	10
145	Entrada	195	1	165	0	0
165	Entrada	195	2	190	0	20
190	Entrada	195	3	220	0	50
195	Salida	225	2	220	0	15
220	Entrada	225	3	280	0	50
225	Salida	245	2	280	0	15
245	Salida	275	1	280	0	40
275	Salida	315	0	280	0	30
280	Entrada	315	1	320	0	0
315	Salida	360	0	320	0	35
320	Entrada	360	1	345	0	0
345	Entrada	360	2	365	0	25
360	Salida	420	1	365	0	30
365	Entrada	420	2	420	0	5
420	Salida	475	1	420	0	110
420	Entrada	475	2	445	0	0
445	Entrada	475	3	465	0	50
465	Entrada	475	4	505**	0	60
475	Salida	510	3	505**	0	40
510	Salida	540	2	505**	0	105
540	Salida	560	1	505**	0	60
560	Salida	x	0	505**	0	20
Tiempo	Evento	Tiempo Sig.Sal*	Cola	Tiempo Sig.Ent*	Tiempo Ocioso Personal	Tiempo Espera Buses
				Total	25	780

Con lo que se pueden realizar los mismos cálculos.

```
salarios = tiempo-normal + tiempo-extra
salarios = 3 * (480/60) * $25  +  3 * (80/60) * $37.50
salarios = 3 *      8   * $25  +  3 * (80/60) * $37.50
salarios = 600 + 150
salarios = 750


tiempo-ocioso = 3 * (25/60) * $25
tiempo-ocioso = 31.25


operación-almacén = (560/60) * 500
operación-almacén = (8 + 80/60) * 500
operación-almacén = 4666.666


espera-del-camión = (780/60) * 100
espera-del-camión =  1300


costo-total =   salarios + tiempo-ocioso + operación-almacén + espera-del-camión
costo-total =     750.00 +         31.25 +           4666.66 +           1300.00
costo-total =   6747.91
```

● Qué pasa si hay varios camiones al inicio?

Un caso importante de considerar es el inicio del sistema, cuando pueden que hayan varios camiones esperando ingresar. Por ejemplo si hay 3 camiones, un ejemplo de la simulación muestra en la tabla siguiente.

Tiempo	Evento	Tiempo Servidor*	Cola	Tiempo Sig.Ent*	Tiempo Ocioso Personal	Tiempo Espera Buses
00	Inicio	50	2	40	0	0
40	Entrada	50	3	100	0	0
50	Salida	75	2	100	0	50
75	Salida	95	1	100	0	75
95	Salida	120	0	100	0	55
.						
.						
.						
Continúa						

● Simulación con 4,5 y 6 empleados.

El objetivo final de la simulación es repetir todos estos cálculos con las tablas de descarga de 4,5 y 6 empleados para obtener los el costo total de operación con cada grupo de empleados. Como el objetivo final es minimizar los costos se escogerá el grupo de trabajadores que tengan el menor costo total.

8. Resumen.

En el presente capítulo se han mostrado ejemplos y aplicaciones de la simulación a diferentes ámbitos tanto científicos como industriales y de administrativos.

Iniciamos los ejemplos utilizando juegos de azar propios de los casinos, los cuales son siempre interesantes y muestran los principios básicos del proceso de simulación. Posteriormente mostramos una aplicación científica, como es el cálculo de "pi", y finalmente aplicaciones a la industria y los negocios como son el manejo de los inventarios y las líneas de espera.

En general cualquier sistema que se pueda resolver de forma matemática o analítica se puede resolver mediante simulación. Sin embargo no todo sistema simulado se puede resolver de forma analítica. Sin embargo al usar esta técnica de resolución de problemas se incurre en algunos riesgos. Es importante ejecutar el proceso de simulación un número suficientemente grande de veces para que los resultados obtenidos se acerquen a la solución real del problema. Esto puede conllevar mucho tiempo humano y computacional.

9. Ejercicios

Ejercicio 1.

Construya un programa que realice una simulación del juego de dados descrito. Asuma que se cuenta con una cantidad inicial de $20, cada vez que se tiran los dados se apuesta $1, si gana recibe una cantidad igual y si pierde debe descontar esa cantidad de su dinero.

- Cuál es la probabilidad de llegar a $50.
- Cuál es la probabilidad de quedar en bancarrota.

Ejercicio 2.

El juego de casino de la ruleta consta de una rueda con 22 números. De los números 10 de ellos son de color rojo, 10 son de color negro y hay dos números de color verde, que son el cero y el doble cero. Si un jugador apuesta al color rojo y este aparece, gana la cantidad apostada. Si un jugador apuesta al color negro y este aparece, gana la cantidad apostada. Si se apuesta al color verde y este aparece, no se gana ni pierde, si se apuesta a otro color y aparece el verde se pierde.

En la mesa de juego hay dos jugadores y cada uno de ellos sigue una estrategia de juego diferente. El jugador A simplemente apuesta $1 al color rojo en cada ocasión. El jugador B inicia apostando $1 al color rojo, si gana apuesta nuevamente $1, si pierde dobla la apuesta anterior, es decir al perder por primera vez apuesta $2, si vulve a perder apuesta $4 y asi sucesivamente. Si el dinero que tiene no es suficiente apuesta todo lo que tiene.

Si cada jugador inicia el juego con $200, determine cuál de las dos estrategias es mejor.

Ejercicio 3.

Un compañía de renta de automóviles está tratando de determinar el número óptimo de autos que debe comprar. El costo promedio anual de un auto es de $75000. Además esta compañía ha recopilado las siguientes probabilidades de operación.

Autos Rentados por día	Probabilidad
0	0.10
1	0.10
2	0.25
3	0.30
4	0.25

Número de días rentados	Probabilidad
1	0.40
2	0.35
3	0.15
4	0.10

Suponga que la renta diaria de un auto es de $200, el costo de no tener una auto disponible cuando es solicitado es de $150 y el costo de tener un carro sin uso es de $50. Asímismo asuma que un auto que se renta, cuando es entregado está disponible al día siguiente y que el año tiene 365 días.

• Indique cada una de las partes del modelo de simulación involucrado.

• Determine la cantidad de autos que óptima que debe comprar la compañía.

Ejercicio 4.

La demanda diaria de un artículo en particular está regida por una distribución binomial con parámetros de n=6 y p=0.50. El tiempo de entrega en días es una variable aleatoria poisson con un valor de lambda de 3. El costo de mantener una unidad en inventario es de $1 por día, el costo del faltante es de $10 por unidad y el costo de ordenar es de $50 por orden. Asímismo, las piezas faltantes en un ciclo son surtidas por la nueva orden cuando llega. Se desean comparar dos políticas para optimizar este proceso de inventario.

La primera consiste en ordenar cada 8 días hasta tener 30 artículos en inventario. La segunda política consiste en ordenar 30 artículos cuando el nivel de inventario es menor a 10.

• Indique cada una de las partes del modelo de simulación involucrado.

• Determine mediante simulación cuál de las dos políticas es mejor.

• Si las piezas faltantes no son sustituibles, es decir si se hace una orden y no existen piezas en inventario, esa orden se pierde, qué cambios hay que hacer al modelo y cuál política es mejor.

Ejercicio 5.

Una compañía tiene un problema de mantenimiento con cierto equipo que contiene 4 componentes electrónicos idénticos que parecen ser los causantes del problema. Este consiste en que los componentes fallan frecuentemente, forzando a que el equipo se desconecte mientras se reponen. Lo que se ha venido haciendo es reemplazar los componentes solamente cuando se descomponen. Sin embargo, existe una nueva propuesta de hacer el reemplazo de los cuatro componentes cuando falle cualquiera de ellos con el objeto de reducir la frecuencia de desconexión del equipo.

El tiempo de vida de un componente está normalmente distribuido con una media de 600 horas y una desviación estándar de 100 horas. También se sabe que es necesario desconectar el equipo 1 hora si se reemplaza un componente y 2 horas si se reemplazan los 4 componentes. Un componente nuevo cuesta $200 y se incurre en un costo de $100 por hora cada vez que se desconecta el equipo.

• Indique cada una de las partes del modelo de simulación involucrado.

• Determine cuál de las dos políticas anteriores es más económica. Para ello simule la operación del equipo durante unas 20000 horas.

Ejercicio 6.

Un vendedor de revistas compra mensualmente una revista el primer día de cada mes. El costo de cada ejemplar es de $1.50. La demanda de la revista en los primeros 10 días del mes tiene la siguiente distribución de probabilidad.

Demanda	Probabilidad
5	0.05
6	0.05
7	0.10
8	0.15
9	0.25
10	0.25
11	0.15

Al final del décimo día, el vendedor puede regresar cualquier cantidad al proveedor, quien se las pagará a $0.90 el ejmplar o bien puede comprar más revistas a $1.20 el ejemplar. La demanda en los siguientes 20 días está dada por la siguiente distribución.

Demanda	Probabilidad
4	0.15
5	0.20
6	0.30
7	0.20
8	0.15

Al final del mes, el vendedor puede regresar al proveedor las revistas que le sobren, las cuales se le pagarán a $0.60 el ejemplar. Finalmente, se asume que después de un mes ya no existe demanda por parte del público ya que para esa fecha habrá aparecido el nuevo número de la revista. Si el precio al público es de $32 por ejemplar determine la política óptima de compra.

Ejercicio 7.

La demanda diaria y el tiempo de entrega de un cierto producto siguen las siguientes distribuciones de probabilidad.

Demanda Diaria	Probabilidad
0	0.04
1	0.06
2	0.10
3	0.20
4	0.30
5	0.18
6	0.08
7	0.03
8	0.01

Tiempo Entrega en Días	Probabilidad
1	0.20
2	0.30
3	0.25
4	0.25

Si el producto no está disponible cuando es requerido el cliente puede esperar la llegada del nuevo lote por un tiempo limitado, es decir, si el cliente decide esperar 2 días y la mercancía no llega en ese tiempo, entonces, la demanda de ese cliente se considera perdida. La distribución de probabilidad del tiempo que un cliente está dispuesto a esperar para que se le surta su pedido es la siguiente:

Tiempo Espera en Días	Probabilidad
0	0.40
1	0.20
2	0.15
3	0.15
4	0.10

La información con respecto a los costos relevantes es la siguiente:
El costo de ordenar es de $100 por orden.
El costo de mantener el inventario es de $52 por unidad por año.
El costo del faltante suponiendo que el cliente decide esperar es de $20 por unidad y el costo del faltante suponiendo que el cliente decide no esperar es de $50 por unidad.

Si el inventario inicial es de 100 unidades, se debe determinar la cantidad óptima a ordenar q y el punto óptimo de reorden r. Para este ejercicio asuma que se trabajan 365 días al año.

Ejercicio 8.

Para el sistema de colas presentado, construya un programa que realice múltiples simulaciones para 3,4,5,6 personas. Indique cuál de estas opciones es mejor para la compañía.

Ejercicio 9.

Un banco emplea 3 cajeros para servir a sus clientes. Los clientes arriban de acuerdo a un proceso poisson a una media de 40 por hora. Si un cliente encuentra todos los cajeros ocupados, entonces se incorpora a una cola única que alimenta a todos los cajeros. El tiempo que dura una transacción entre un cajero y un cliente sigue una distribución uniforme entre 0 y 1 minuto. Con base en esta información determine cuál es el tiempo promedio que pasa un cliente en el sistema y cuál es la cantidad promedio de clientes en el sistema.

Ejercicio 10.

Se tiene un sistema de colas formado por dos estaciones en serie. Los clientes atendidos en la primera estación pasan en seguida a formar la cola de la segunda. En la primera estación de servicio la razón de llegadas sigue una distribución poisson con una media de 20 clientes por hora y el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con una media de atención de 2 minutos por persona. En la segunda estación el tiempo de servicio está uniformemente distribuido entre 1 y 2 minutos. Con base en esta información, determine cuál es el tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema, desde que entra hasta que sale del segundo servidor. Analice además cuál de las dos colas presenta la fila de mayor tamaño.

Ejercicio 11.

Una tienda de pequeño tamaño tiene un parqueo con espacio para 6 automóviles. Los clientes llegan en forma aleatoria de acuerdo a un proceso de poisson a una razón media de 10 clientes por hora, y se van inmediatamente si no existen lugares disponibles en el estacionamiento. El tiempo que un auto permanece en el parqueo sigue una distribución uniforme entre 10 y 30 minutos.

- Determine que porcentaje de clientes se pierde por no tener más lugares disponibles.

- Cuál es la probabilidad de encontrar un lugar disponible en el parqueo.

Ejercicio 12.

Debido a un aumento en las ventas, cierta compañía manufacturera necesita de más espacio en su fábrica. La solución que se ha propuesto es la construcción de un nuevo depósito para almacenar los productos terminados. Este depósito estaría localizado a 30 kilómetros del lugar donde está ubicada la planta. Además de acuerdo a este nuevo plan, se requiere que al final del día se envíe al nuevo depósito la producción terminada.

Por otra parte se ha recopilado información y se sabe que la producción diaria de esta compañía tiene la siguiente distribución de probabilidad.

Producción diaria en toneladas	Probabilidad

[50 , 55[	0.10
[55 , 60[	0.15
[60 , 65[	0.30
[65 , 70[	0.35
[70 , 75[	0.00
[75 , 80[	0.08
[80 , 85[	0.02

También se sabe que el tipo de camiones que se deben utilizar para trasladar esta producción tienen una capacidad media de carga de 5 toneladas. La cantidad de viajes que se pueden realizar cada día, en una jornada de 8 horas, depende del tiempo de carga y descarga, como también del tiempo que se requiere para recorrer los 30 kilómetros entre la planta y el depósito. Consecuentemente, la cantidad de producto terminado que un camión puede trasladar de la planta al depósito es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es la siguiente:

Toneladas diarias transladadas por camión	Probabilidad
[4.0 , 4.5[	0.30
[4.5 , 5.0[	0.40
[5.0 , 5.5[	0.20
[5.5 , 6.0[	0.10

Si la cantidad diaria producida es mayor que la cantidad que puede trasladar la flotilla de camiones, el excedente es enviado a través de otra compañía transportista a un costo de $100 por tonelada. Además el costo promedio anual de un nuevo camión es de $100000. Si se trabajan 250 días en el año, cuál es el número óptimo de camiones que esta compañía debe adquirir.

Ejercicio 13.

Una cierta compañía posee algunas máquinas en uso. El tiempo que dura en operación cada una de estas máquinas tiene la siguiente distribución de probabilidad.

Tiempo entre averías en horas	Probabilidad
[6.0 , 8.0[	0.10
[8.0 , 10.0[	0.15
[10.0 , 12.0[	0.24
[12.0 , 14.0[	0.26
[14.0 , 16.0[	0.00
[16.0 , 18.0[	0.18
[18.0 , 20.0[	0.07

El tiempo que un operador tarda en reparar una máquina tiene la siguiente distribución de probabilidad.

Tiempo de reparación en horas	Probabilidad
[2.0 , 4.0[	0.15
[4.0 , 6.0[	0.25
[6.0 , 8.0[	0.30
[8.0 , 10.0[	0.20
[10.0 , 12.0[	0.10

El costo de tener una máquina ociosa durante una hora es de $500 y el salario por hora para los operarios es de $50 por hora y el salario para los mecanicos que realizan la reparación es de $80 por hora.

• Si se tienen 3 máquinas determine cuál es el costo de operación y mantenimiento de las mismas.

• Determine cuántas máquinas se deben utilizar para minimizar los costos. Pruebe con 3,4,5,6,... máquinas hasta que encuentre el número que minimiza los costos.

Ejercicio 14.

Una cadena de supermercados es abastecida por un almacén central. La mercancía que llega a este almacén es descargada en turnos nocturnos. Los camiones que se descargan en este almacén llegan en forma aleatoria de acuerdo a un proceso poisson una media de 2 camiones por hora. El tiempo que un equipo de 3 trabajadores se tarda en descargar un camión sique una distribución uniforme entre 20 y 30 minutos. Si el número de trabajadores en el equipo se incrementa, entonces la razón de servicio se incrementa. Por ejemplo, si el equipo está formado por 4 trabajadores, el tiempo de servicio está uniformemente distribuido entre 15 y 25 minutos. Si el equipo está formado por 5 trabajadores el tiempo de servicio será uniforme entre 10 y 20 minutos. Finalmente si el equipo está formado por 6 trabajadores el tiempo de servicio tiene una distribución uniformemente distribuida entre 5 y 15 minutos. Cada trabajador recibe un salario de $25 por hora durante el turno nocturno de 8 horas. El costo de tener un camión esperando se estima en $50 por hora. Con los datos anteriores determine cuál es el tamaño óptimo del equipo de trabajo.

Ejercicio 15.

Un producto fabricado por una compañía requiere que se perforen cilindros en un bloque metálico y que se inserten pistones en ellos.
La distribución de probabilidad de la medida del radio de los cilindros tiene la siguiente distribución:

$$fc(x) = \begin{cases} 100 & \text{para } 1.0000 \le x \le 1.0100 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es necesario que los pistones tengan un radio de 1.0000 pulgadas por lo menos y que se excedan lo menos posible de ese valor. La distribución de probabilidad de cuánto medirá el radio del pistón está dada por:

$$fp(x) = \begin{cases} 400 * e^{(-400(x-1))} & \text{si } x \ge 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El espacio libre entre el cilindro y el pistón es la diferencia de sus radios. Debido a la variabilidad del proceso ocasionalmente puede ocurrir una interferencia, es decir un espacio negativo entre un cilindro y el pistón que va adentro.

- Indique cada una de las partes del modelo de simulación involucrado.

- Determine con qué probabilidad ocurre una interferencia, dadas las condiciones actuales de trabajo.