Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Definiton

Es gibt 4 Arten/Formen von Quadratischen Gleichungen.

1. $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$
2. $ax^2 + bx = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0)$
3. $ax^2 + c = 0 \quad (a, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$
4. $ax^2 = 0 \quad (a \in \mathbb{R}; a \neq 0)$

Lösung einer Reinquadratische Gleichung $ax^2 = 0$

Reinquadratische Gleichungen ohne Absolutglied besitzen als einzige Lösung die Null.

Lösung einer Reinquadratische Gleichung mit Absolutglied $ax^2 + c = 0$

Gleichung nach x^2 auflösen, Wurzel ziehen, Lösungsmenge aufschreiben.

Lösung einer Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied $ax^2 + bx = 0$

Quadratische Gleichung in Normalform bringen, x ausklammern, Faktoren gleich Null setzen, Gleichung nach x auflösen, Lösungsmenge aufschreiben.

Mitternachtsformel

Gemischtquadratische Gleichungen $ax^2+bx+c = 0$ mit Absolutglied lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fallunterscheidung:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Regeln

Wenn das lineare Glied fehlt, gilt b = 0.
Wenn das absolute Glied fehlt, gilt c = 0.
Wenn das x^2 allein steht, gilt a = 0 (wegen $1 \cdot x^2 = x^2$).
Wenn das x allein steht, gilt b - 1(wegen $1 \cdot x = x$).

Lösen einer Quadratischen Gleichung mit Mitternachtsformel

1. Gleichung in allgemeine Form bringen
2. a,b,c aus der allgemeinen Form herauslesen
3. a,b,c in die Mitternachtsformel einsetzen
4. Lösung berechnen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Wurzelgleichungen

Wurzelgesetze

Wurzel Addieren $= a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a+b)\sqrt[n]{x}$
Wurzel Subtrahieren $= a\sqrt[n]{x} - b\sqrt[n]{x} = (a-b)\sqrt[n]{x}$
Wurzel Multiplizieren $= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
Wurzel Potenzieren $= (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
Wurzel Radizieren $= \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
Wurzel in Potenz umformen $= \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
Wurzel Quadrieren: $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$ für $a \geq 0$
Folgerung: $\sqrt{a^2} = |a|$

Wurzelgleichung lösen

Wurzel beseitigen (Wurzel isolieren, potenzieren), Gleichung lösen, Probe machen, Lösungsmenge aufschreiben.

Exponential und Logarithmusgleichungen

Definition

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Exponenten einer Potenz steht.
Eine Logarithmusgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Numerus des Logarithmus steht.

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$$

Logarithmen mit der Basis e (der eulerschen Zahl) heissen natürliche Logarithmen.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$\exp x = e^x$ und $\ln x$ sind Kehrwertfunktionen

$$e^{\ln x} = x \text{ and } \ln e^x = x.$$

Exponentenregeln für Exponentengleichung

$$e^x e^y = e^{x+y},\ \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \text{ and } (e^x)^k = e^{xk}.$$

Exponentenregeln für Logarithmengleichung

$$\ln x + \ln y = \ln xy,\ \ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right), \text{ and } \ln\left(a^b\right) = b\ln a.$$

Wir können auch einen Logarithmus jeder Basis schreiben, indem wir natürliche Logarithmen verwenden:

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Lösung des Logarithmus
Eine Lösung mithilfe der Definition des Logarithmus ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so umzuformen, dass sich auf der einen Seite ein Logarithmus und auf der anderen Seite eine Konstante ergeben.
Definitionsmenge Logarithmusgleichung
Da $\log_b x = a$ nur für $x > 0$ definiert ist, kann die Definitionsmenge eingeschränkt sein. In der Praxis bedeutet das, dass wir stets die Probe machen sollten, d.h. überprüfen, ob die berechneten Lösungen eingesetzt in die gegebene Gleichung zu einer wahren Aussage führen.

Logarithmengesetze

Produktregel: $\log_b(P\cdot Q) = \log_b P + \log_b Q$
Quotientregel: $\log_b\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_b P - \log_b Q$
Potenzregel 1: $\log_b P^n = n\cdot\log_b P$
Potenzregel 2: $\log_b \sqrt[n]{P} = \frac{\log_b P}{n}$
Basiswechsel: $\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$

Ungleichungen

Rechenregeln

$a < b \iff b > a$
$a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$
$a \le b$ und $c \le d \Rightarrow a + c \le b + d$
$a < b$ und $c \le d \Rightarrow a + c < b + d$
$a \le b$ und $c \ge 0 \Rightarrow ac \le bc$
$a \le b$ und $c \le 0 \Rightarrow ac \ge bc$ $a \le b \Rightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

Quadratische Ungleichungen

Eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in eine der Formen bringen lässt, heisst quadratische Ungleichung.
$ax^2 + bx + c < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$
$ax^2 + bx + c \le 0$
$ax^2 + bx + c \ge 0$

1. Quadratische Gleichung lösen
2. Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen
3. Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Eine quadratische Gleichung besitzt entweder keine Lösung, eine Lösung oder zwei Lösungen.

Bruchungleichungen

Bei Bruchungleichungen gibt es 2 Fälle: **Rechte Seite der Ungleichung $\neq 0$**

1. Bruch durch Fallunterscheidung auflösen
2. Lösungsmengen der einzelnen Fälle bestimmen (Intervalle)
3. Lösungsmenge der Bruchungleichung bestimmen

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} > c = \begin{cases} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{N} > c\cdot\mathrm{N} & \text{für } \mathrm{N} > 0 \\ \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{N} < c\cdot\mathrm{N} & \text{für } \mathrm{N} < 0 \end{cases}$$

Das Auflösen des Bruchs geschieht durch Multiplikation der Ungleichung mit dem Nenner des Bruchs. Dabei müssen wir jedoch eine Fallunterscheidung vornehmen. Ist der Nenner nämlich negativ, dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

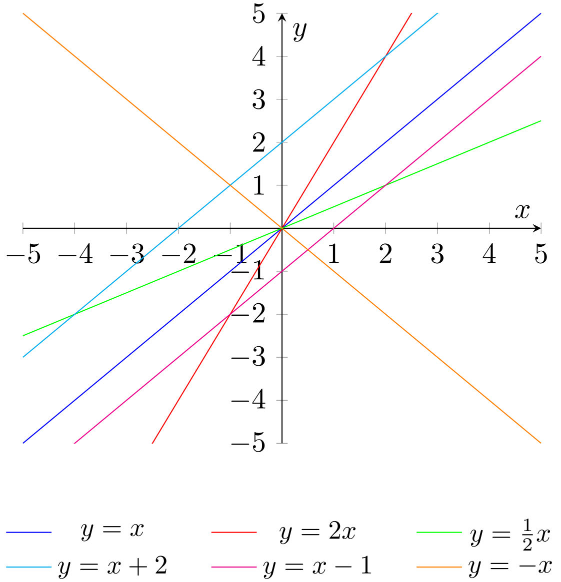
$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} > c = \begin{cases} \mathrm{Z} > c\cdot\mathrm{N} & \text{für } \mathrm{N} > 0 \\ \mathrm{Z} < c\cdot\mathrm{N} & \text{für } \mathrm{N} < 0 \end{cases}$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen.
Rechte Seite der Ungleichung = 0

1. Definitionsbereich bestimmen
2. Nullstellen berechnen
3. Intervallweise Betrachtung

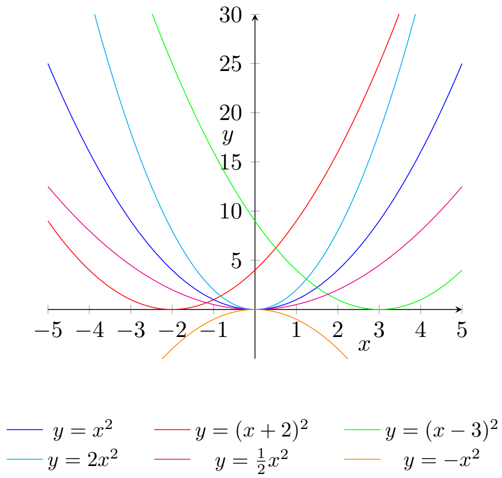
Funktionen

Lineare Funktion



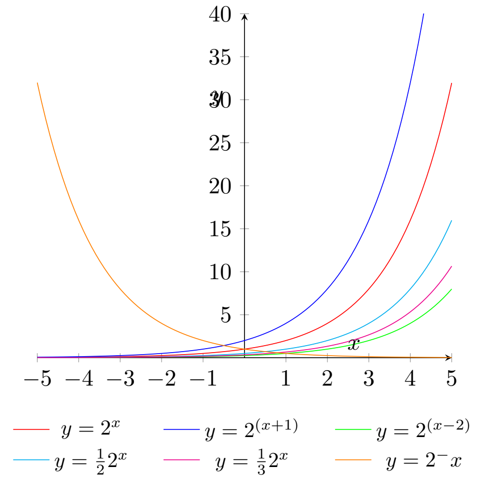
Definitonsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Nullstelle berechnen
Funktion gleich Null setzen und nach X auflösen.
Achsenabschnitt:
Bei linearen Funktionen lässt sich der y-Achsenabschnitt aus der Funktionsgleichung ablesen: Der y-Achsenabschnitt $y = mx + b$ von ist $y = b$
Schnittpunkt berechnen
Beide Funktionen gleichsetzen, nach X auflösen und in eine der beiden Funktionen einsetzen um Y zu berechnen.
Umkehrfunktion bilden
Funktion nach x auflösen, x und y vertauschen.

Quadratische Funktion



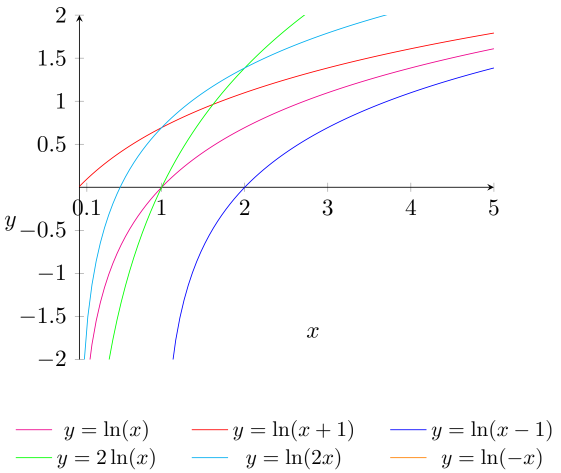
Definitonsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge: $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$
Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Der tiefste oder höchste Punkt einer Parabel heisst Scheitelpunkt.
Achsenabschnitt:
Die x-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse ist immer Null. Bei quadratischen Funktionen lässt sich der y-Achsenabschnitt aus der Funktionsgleichung ablesen: Der y-Achsenabschnitt $y = ax^2 + bx + c$ von ist $y = c$ **Nullstellen berechnen**:
Funktionsgleichung gleich Null setzen, Gleichung lösen.

Exponential Funktion



Definitonsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
Basis a zwisschen 0 und 1
Gilt $0 < a < 1$, so ist die Exponentialfunktion streng monoton fallend. Exponentialler Abnahme.
Basis a grösser 1
Gilt $a > 1$, so ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend. Exponentielles Wachstum.
Eigenschaften
Der Graph einer Exponentialfunktion verläuft durch den Punkt $(0; 1)$.
Die Exponentialfunktion hat keine Nullstelle.
Die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote die beliebig nah an den Nullpunkt kommt.
Umkehrfunktion
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heisst Logarithmusfunktion. $f(x) = \log_a x$

Logarithmische Funktion



Definitonsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Basis a zwischen 0 und 1
Gilt $0 < a < 1$, so ist die Exponentialfunktion streng monoton fallend.
Basis a grösser 1
Gilt $a > 1$, so ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend. Exponentielles Wachstum.
Eigenschaften
Logarithmuskurven verlaufen durch den Punkt $(1;0)$. Die Nullstellen der Logarithmusfunktionen ist x=1.
Logarithmuskurven verlaufen rechts der y-Achse.
Logarithmusfunktionen haben keinen y-Achsenabschnitt.
Die y-Achse ist eine senkrechte Asymptote die beliebig nah an den Nullpunkt kommt.

Potenz Funktion

Potenzfunktionen mit Positiven Exponenten

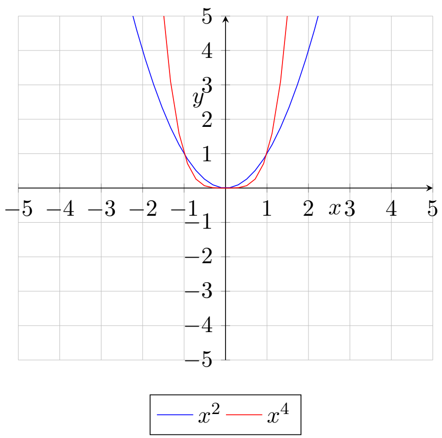
Definition

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ heisst Potenzfunktion.

Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

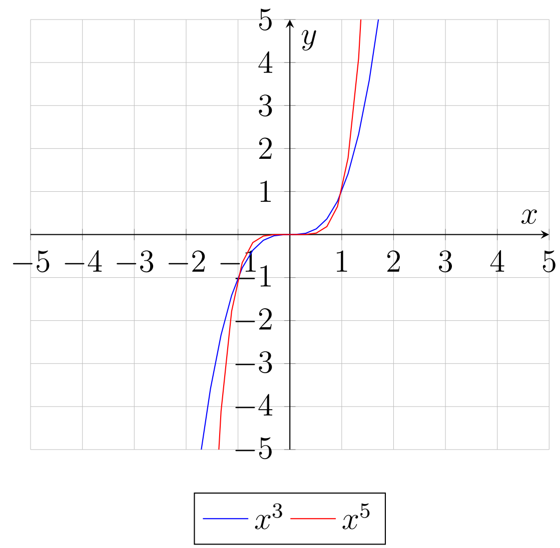
x	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5
x^2	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25
x^4	5,0625	1	0,0625	0	0,0625	1	5,0625



Ungerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^5$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5
x^3	−3,375	−1	−0,125	0	0,125	1	3,375
x^5	−7,59375	−1	0,03125	0	0,03125	1	7,59375



Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

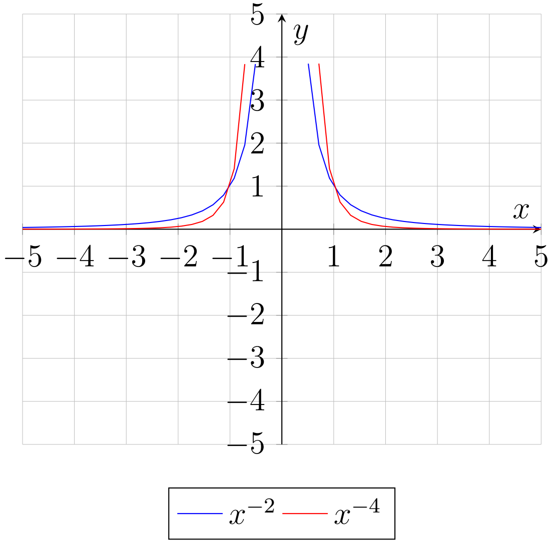
Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ haben folgende Eigenschaften:

	n gerade	n ungerade
D-Menge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Symmetrie	achsen zur y-ache	punkt zum K-Ursprung
Gemeinsame Punkte	$(-1, 1)$,$(0\|0)$, $(1\|1)$	$(-1, -1)$,$(0\|0)$, $(1\|1)$

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Die Graphen von Potenzfunktionen heissen Hyperbeln n-ter Ordnung, wenn der Exponent negativ ist.

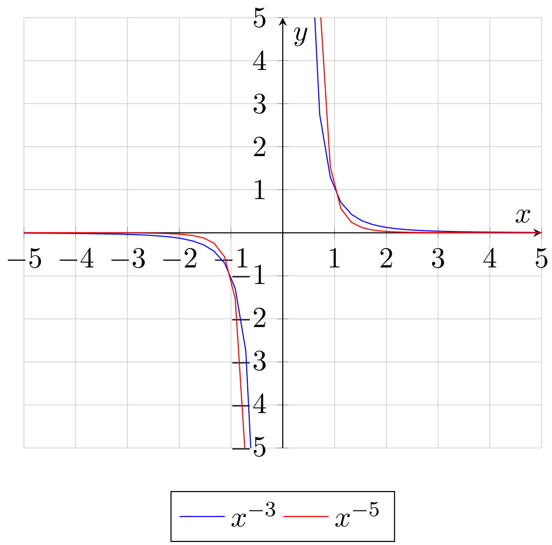
Gerade Exponenten



Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^{-2}$ und $f(x) = x^{-4}$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^{-2}	$0{,}\bar{4}$	1	4	4	1	$0{,}\bar{4}$
x^{-4}	$\approx 0{,}1975$	1	16	16	1	$\approx 0{,}1975$

Gerade Exponenten



Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^{-3}$ und $f(x) = x^{-5}$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

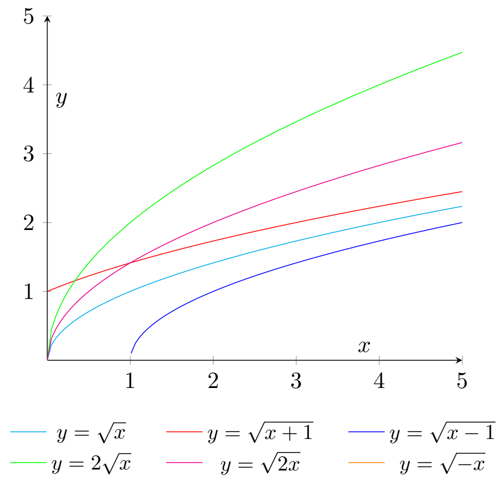
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^{-3}	$\approx -0{,}2963$	-1	-8	8	1	$\approx 0{,}2963$
x^{-5}	$\approx -0{,}1317$	-1	-32	32	1	$\approx 0{,}1317$

Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten $\boldsymbol{f(x) = x^{-n}}$ haben folgende Eigenschaften:

	n gerade	n ungerade
D-Menge	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Symmetrie	achsen zur y-ache	punkt zum K-Ursprung
Gemeinsame Punkte	$(-1, 1)$,$(1\|1)$	$(-1, -1)$,$(1\|1)$
Asymptoten	x-Achse, y-Achse	x-Achse, y-Achse

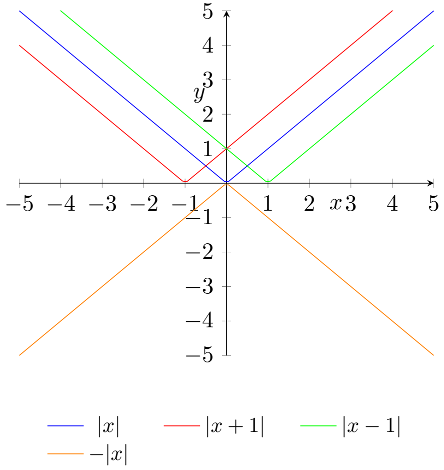
Wurzel Funktion

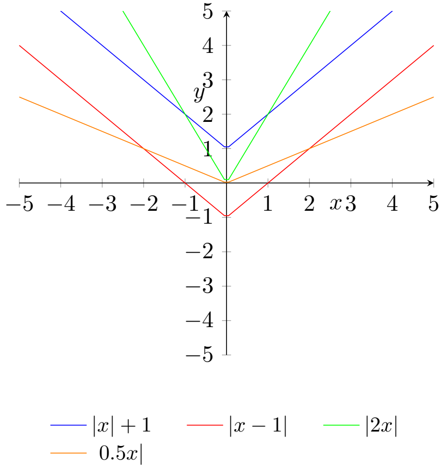


Definition ungerader Wurzelexponent
Definitonsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
Definition gerader Wurzelexponent
Definitonsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

Betragsfunktion





Gebrochenrationale Funktionen

Definitionsmenge

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen der Nennerfunktion}\}$

Senkrechte Asymptote

Eine senkrechte Gerade, der sich eine Kurve bei deren immer grösser werdender Entfernung vom Koordinatenursprung unbegrenzt nähert, heisst senkrechte Asymptote.

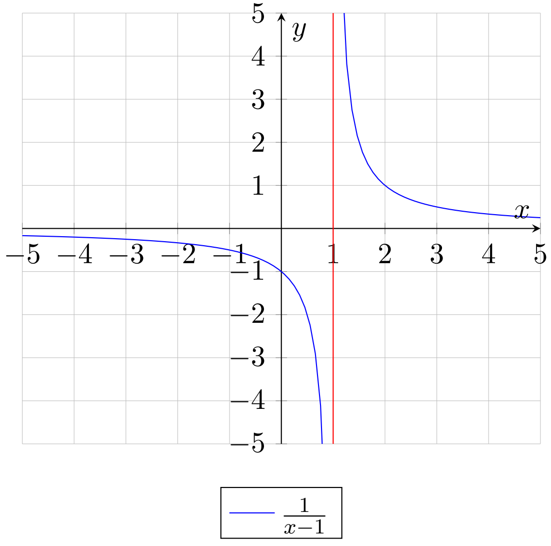
Bedingung

Bedingung für die Existenz einer senkrechten Asymptote ist, dass die Nennerfunktion (mindestens) eine Nullstelle hat: **Anleitung** Funktionsgleichung der Nennerfunktion gleich Null setzen:

$f(x) = \frac{1}{x-1} \Longrightarrow x - 1 = 0$

Gleichung lösen: $x = 1$

Die senkrechte Asymptote verlauft durch x = 1.



Waagrechte Asymptote

Eine waagrechte Gerade, der sich eine Kurve bei deren immer groesser werdender Entfernung vom Koordinatenursprung unbegrenzt nähert, heisst waagrechte Asymptote. **Bedingung**

Eine gebrochenrationale Funktion:

$$y = \frac{a_n x^{\boxed{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^{\boxed{m}} + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

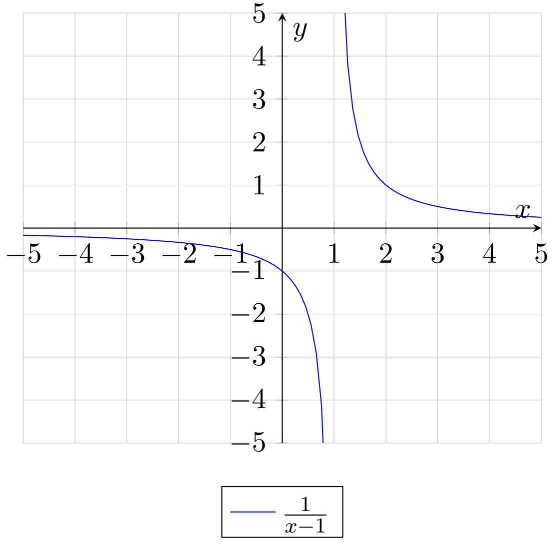
besitzt eine waagrechte Asymptote, wenn:

Zählergrad ¡ Nennergrad (n ¡ m) dann: Die x-Achse ist die waagrechte Asymptote

Zählergrad = Nennergrad (n = m) dann: Die zur x-Achse parallele Gerade mit der Gleichung $y = \frac{a_n}{b_m}$ ist die waagrechte Asymptote. **Anleitung** Zählergrad und Nennergrad bestimmen:

Da der Zählergrad (0) kleiner ist als der Nennergrad (1), besitzt die gebrochenrationale Funktion eine waagrechte Asymptote. Waagrechte Asymptote berechnen:

Wegen Zählergrad ¡ Nennergrad ist die x-Achse die waagrechte Asymptote.



Trigonometrie

Identitäten

Kofunktionen

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \cot x$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-x) = \tan x$$
$$\sec(\frac{\pi}{2}-x) = \csc x$$
$$\csc(\frac{\pi}{2}-x) = \sec x$$

Symmetrie

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

Doppelter Winkel

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Halber Winkel

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Exponent Reduktion

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\sin^4 x = (\frac{1-\cos 2x}{2})^2$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\cos^4 x = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$
$$\tan^4 x = (\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x})^2$$

Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1+\tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1+\cot^2 x = \csc^2 x$$

Umkehrwert

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Quotient

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Summe und Differenz von Winkel

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$

Produkt zu Summe

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$
$$\tan x\tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$$
$$\tan x\cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y}$$

Summe Zu Produkt

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$
$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$
$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$$
$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)+1}{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}$$

Winkelfunktion des dreifachen winkel

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha+\alpha)$$
$$\sin(3\alpha) = 3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot\sin^3(\alpha)$$
$$\cos(3\alpha) = 4\cdot\cos^3(\alpha) - 3\cdot\cos(\alpha)$$
$$\tan(3\alpha) = \frac{3\cdot\tan(\alpha)-\tan^3(\alpha)}{1-3\cdot\tan^2(\alpha)}$$

Vektoren

Definition

Ein Vektor ist durch Länge, Richtung und Orientierung eindeutig bestimmt.

Ortsvektor

Ein Vektor, dessen Anfangspunkt im Ursprung O und dessen Endpunkt im Punkt A liegt, heißt Ortsvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ von A.

$$A(x|y) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vektoraddition

Vektoren lassen sich nur dann addieren, wenn sie gleicher Dimension und gleicher Art sind.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Vektorsubtraktion

Vektoren werden subtrahiert, indem man ihre Komponenten subtrahiert:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

Wird ein Vektor $\vec{v}$ mit einem Skalar (einer reellen Zahl) λ multipliziert, wird jede Komponente des Vektors mit dieser Zahl multipliziert:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{pmatrix}$$

Misc

Multipliziert man einen Vektor mit einem Skalar c, wird der Vektor – in Abhängigkeit des Wertes des Skalars – verlängert, verkürzt und/oder er ändert seine Orientierung.
$c > 1$: Der Vektor wird verlängert.
$0 < c < 1$: Der Vektor wird verkürzt.
$c < 0$: Der Vektor ändert seine Orientierung.

Betrag eines Vektors

Die Länge eines Vektors heisst Betrag des Vektors.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Einheitsvektor

Ein Vektor der Länge 1 heisst Einheitsvektor.

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|a|}\vec{a}$$

Abstand zweier Punkte

Verbindungsvektor berechnen und dann Länge des Vektors berechnen.

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine mathematische Verknüpfung, die zwei Vektoren eine Zahl (Skalar) zuordnet.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Kommutativgesetz

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

Distributivgesetz

$$\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

Gemischtes Assoziativgesetz

$$(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = k \cdot \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right)$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

Skalarprodukt berechnen, Beträge der Vektoren berechnen, Zwischenergebnisse in die Formel einsetzen und Formel nach Winkel auflösen.