Allgemein

Wachstum und Verfall

Wachtsumsfaktor:

$$q = 100\ \% + p\ \% = 1 + \frac{p}{100}$$

Verdoppelungszeit:

$$t_V = \frac{\ln(2)}{\ln(q)}$$

Abnahme:

$$B(t) = m \cdot t + b \quad \text{mit } m < 0$$

Summe und Produkte

Summezeichen:
Es sei: n, k ∈ Z und n ≥ k

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

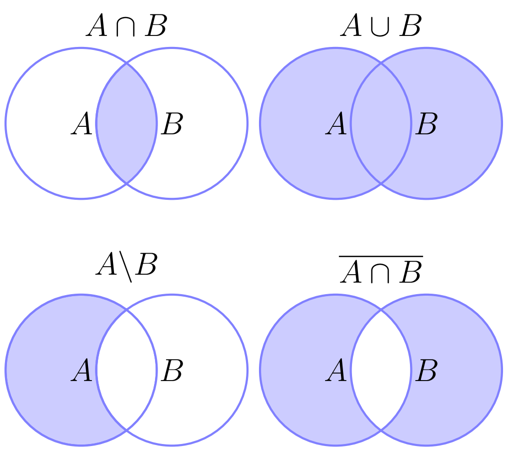
Produktzeichen:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

k = Laufvariable, Laufindex
1 = Startwert n = Endwert
a_k ist die Funktion bezueglich der Laufvariable

Aussagen, Logik, Mengen

*	**Bedeutung**
$\varnothing$ oder	Leere Menge
$x \in A$	Element x ist in Menge A
$x \notin A$	Element x ist nicht in Menge A
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge von B
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsgsmenge von A und B
$A \backslash B$	Differenzbildung, Menge A ohne B
$\bar{A}_B$	$:= \{x \mid x \in B \ \wedge \ x \notin A\}$



Aussagenlogik:
Eine Aussage beschreibt einen Sachverhalt (durch Worte oder Symbole), der entweder wahr oder falsch ist.

A	B	A	∧	B	A	∨	B	¬	B	A	∨	¬	B
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	T	T	F	T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T	T	F

*	**Bedeutung**	**Beispiel**
$\|A\|$	Kardinalität/Mächtigkeit Anzahl Elemente	A = 1;2 —$\|A\|$ = 2
$\wedge$	Konkuktion/UND A $\wedge$	A $\wedge$ B
$\vee$	Disjunktion/ODER A $\vee$ B = Wahr wenn	-1;0;1;
$\neg$	Negation A = W $\neg$A = F	$\neg$A
$\Longrightarrow$	Implikation: Daraus folgt	
$\Longleftrightarrow$	äquivalenz	
$\forall$	für Alle	$\forall\ x \in \mathbb{N}$
$\exists$	Es Existiert	$\exists\ x \in \mathbb{N}$

Misc

Gleichungen

Lineare Gleichung

Definiton

Eine Gleichung, die sich in die Form $ax + b = 0$ bringen lässt, heisst lineare Gleichung. Wir können lineare Gleichungen daran erkennen, dass die Variable nur in der 1. Potenz auftritt, also kein x^2, x^3... enthalten.

Lösen einer Linearen Gleichung

1. Gleichung nach x auflösen
2. Lösungsmenge aufschreiben

Quadratische Gleichungen

Definiton

Gleichungen, die sich auf die Form $ax^2+bx+c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ bringen lassen, heissen quadratische Gleichungen.

Wir können quadratische Gleichungen daran erkennen, dass die Variable x in der 2. Potenz x^2, aber in keiner höheren Potenz vorkommt.

Es gibt 4 Arten/Formen von Quadratischen Gleichungen.

1. $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$
2. $ax^2 + bx = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0)$
3. $ax^2 + c = 0 \quad (a, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$
4. $ax^2 = 0 \quad (a \in \mathbb{R}; a \neq 0)$

Lösung einer Reinquadratische Gleichung $ax^2 = 0$

Reinquadratische Gleichungen ohne Absolutglied besitzen als einzige Lösung die Null.

Lösung einer Reinquadratische Gleichung mit Absolutglied $ax^2 + c = 0$

1. Gleichung nach x^2 auflösen
2. Wurzel ziehen
3. Lösungsmenge aufschreiben

Lösung einer Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied $ax^2 + bx = 0$

1. Quadratische Gleichung in Normalform bringen
2. x ausklammern
3. Faktoren gleich Null setzen
4. Gleichung nach x^2 auflösen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Mitternachtsformel

Gemischtquadratische Gleichungen $ax^2+bx+c = 0$ mit Absolutglied lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fallunterscheidung:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Übersicht

	Allgemeine Form	Normalform
Reinquadratisch ohne Absolutglied	$2x^2 = 0$, $a = 2$, $b = 0$ und $c = 0$	$x^2 = 0$, $a = 1$, $b = 0$ und $c = 0$
Reinquadratisch mit Absolutglied	$2x^2 - 8 = 0$, $a = 2$, $b = 0$ und $c = -8$	$x^2 - 4 = 0$, $a = 1$, $b = 0$ und $c = -4$
Gemischtquadratisch ohne Absolutglied	$2x^2 - 8x = 0$, $a = 2$, $b = -8$ und $c = 0$	$x^2 - 4x = 0$, $a = 1$, $b = -4$ und $c = 0$
Gemischtquadratisch mit Absolutglied	$2x^2 - 8x + 6 = 0$, $a = 2$, $b = -8$ und $c = 6$	$x^2 - 4x + 3 = 0$, $a = 1$, $b = -4$ und $c = 3$

Regeln

Wenn das lineare Glied fehlt, gilt b = 0.
Wenn das absolute Glied fehlt, gilt c = 0.
Wenn das x^2 allein steht, gilt a = 0 (wegen $1 \cdot x^2 = x^2$).
Wenn das x allein steht, gilt b - 1(wegen $1 \cdot x = x$).

Lösen einer Quadratischen Gleichung mit Mitternachtsformel

1. Gleichung in allgemeine Form bringen
2. a,b,c aus der allgemeinen Form herauslesen
3. a,b,c in die Mitternachtsformel einsetzen
4. Lösung berechnen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Bruchgleichungen

Wenn die Zähler der Brueche nur aus Zahlen bestehen, kann eine Kehrwertbildung sinnvoll sein. Den Kehrwert eines Bruchs erhält man durch Vertauschen von Zähler und Nenner.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{x+1}{2}$$

Lösen einer Bruchgleichung

1. Definitionsmenge bestimmen
2. Gleichung nach x auflösen
3. Prüfen, ob der x-Wert in der Definitionsmenge ist
4. Lösungsmenge aufschreiben

Kehrwert

Wenn die Zähler der Brueche nur aus Zahlen bestehen, kann eine Kehrwertbildung sinnvoll sein. Den Kehrwert eines Bruchs erhält man durch Vertauschen von Zähler und Nenner.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{x+1}{2}$$

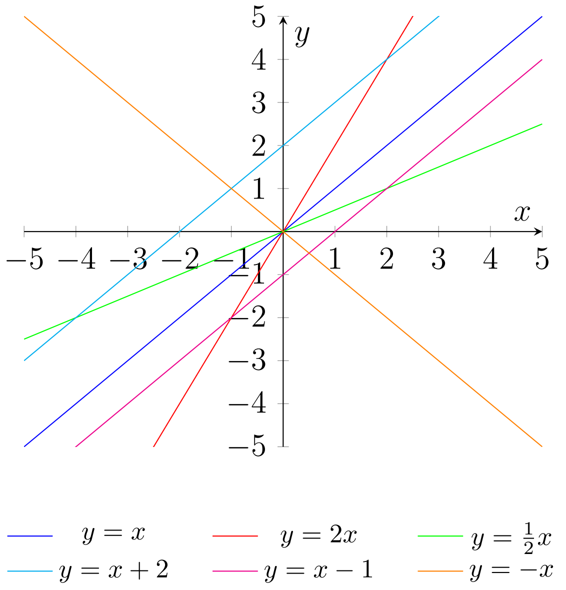
Multiplikation übers Kreuz

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung jeweils ein Bruch steht, kann eine Multiplikation ueber Kreuz sinnvoll sein.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow 1 \cdot x+1 = 2 \cdot x$$

Funktionen

Lineare Funktion



Nullstelle berechnen

Funktion gleich Null setzen und nach X auflösen.

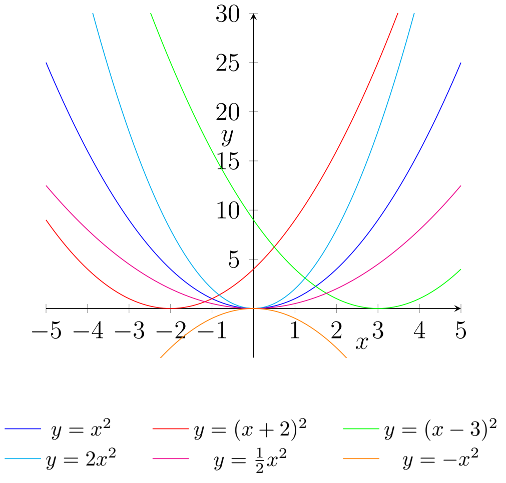
Schnittpunkt berechnen

Beide Funktionen gleichsetzen, nach X auflösen und in eine der beiden Funktionen einsetzen um Y zu berechnen.

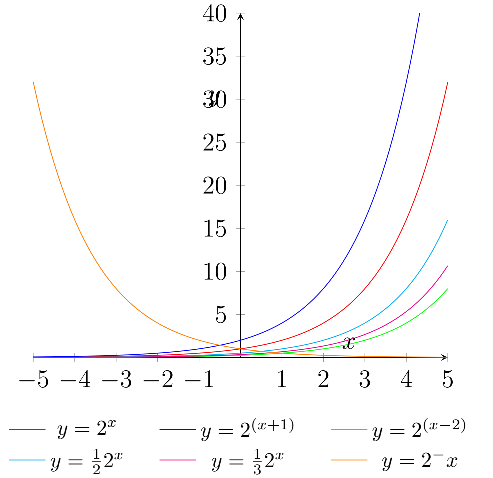
Umkehrfunktion bilden

Funktion nach x auflösen, x und y vertauschen.

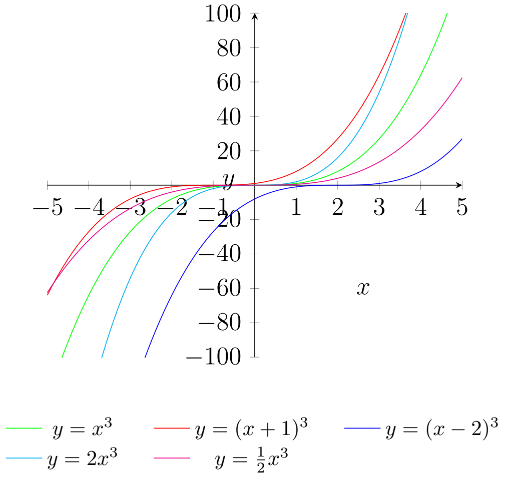
Quadratische Funktion



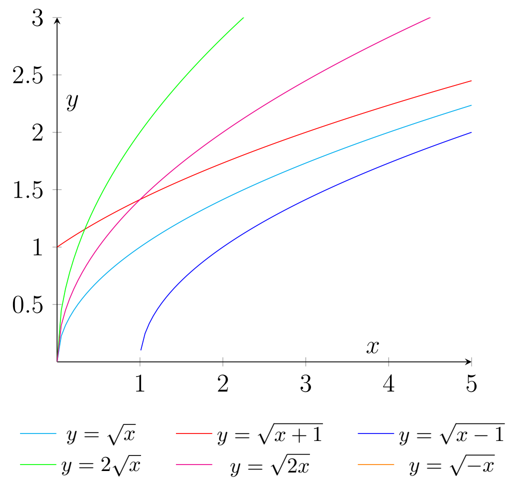
Exponential Funktion



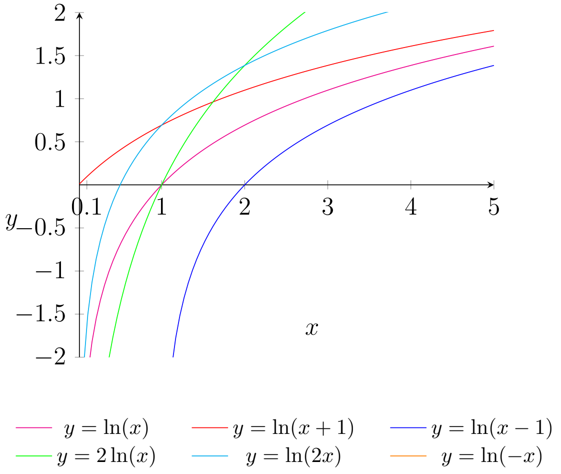
Potenz Funktion



Wurzel Funktion



Logarithmische Funktion



Trigonometrie

Identitäten

Kofunktionen

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$$
$$\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$$
$$\sec(\frac{\pi}{2} - x) = \csc x$$
$$\csc(\frac{\pi}{2} - x) = \sec x$$

Symmetrie

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

Doppelter Winkel

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Halber Winkel

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Exponent Reduktion

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\sin^4 x = (\frac{1-\cos 2x}{2})^2$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\cos^4 x = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$
$$\tan^4 x = (\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x})^2$$

Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Umkehrwert

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Quotient

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Summe und Differenz von Winkel

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Produkt zu Summe

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$
$$\tan x \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$$
$$\tan x \cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y}$$

Summe Zu Produkt

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$
$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}$$
$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta) + 1}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}$$

Winkelfunktion des dreifachen winkel

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha)$$
$$\sin(3\alpha) = 3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot\sin^3(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cdot\cos^3(\alpha) - 3\cdot\cos(\alpha)$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\cdot\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\cdot\tan^2(\alpha)}$$

Vektoren

Definition

Ein Vektor ist durch Länge, Richtung und Orientierung eindeutig bestimmt.

Ortsvektor

Ein Vektor, dessen Anfangspunkt im Ursprung O und dessen Endpunkt im Punkt A liegt, heißt Ortsvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ von A.

$$A(x|y) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vektoraddition

Vektoren lassen sich nur dann addieren, wenn sie gleicher Dimension und gleicher Art sind.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Vektorsubtraktion

Vektoren werden subtrahiert, indem man ihre Komponenten subtrahiert:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

Wird ein Vektor $\vec{v}$ mit einem Skalar (einer reellen Zahl) λ multipliziert, wird jede Komponente des Vektors mit dieser Zahl multipliziert:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{pmatrix}$$

Misc

Multipliziert man einen Vektor mit einem Skalar c, wird der Vektor – in Abhängigkeit des Wertes des Skalars – verlängert, verkürzt und/oder er ändert seine Orientierung.
$c > 1$: Der Vektor wird verlängert.
$0 < c < 1$: Der Vektor wird verkürzt.
$c < 0$: Der Vektor ändert seine Orientierung.

Betrag eines Vektors

Die Länge eines Vektors heisst Betrag des Vektors.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Einheitsvektor

Ein Vektor der Länge 1 heisst Einheitsvektor.

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|a|}\vec{a}$$

Abstand zweier Punkte

Verbindungsvektor berechnen und dann Länge des Vektors berechnen.

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine mathematische Verknüpfung, die zwei Vektoren eine Zahl (Skalar) zuordnet.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Kommutativgesetz

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

Distributivgesetz

$$\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

Gemischtes Assoziativgesetz

$$(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = k \cdot \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right)$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

Skalarprodukt berechnen, Beträge der Vektoren berechnen, Zwischenergebnisse in die Formel einsetzen und Formel nach Winkel auflösen.