HSLU Zulassungsstudium Formelsammlung

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Zahlen und Logik

1.1.1 Zahlenbereiche

*	Bedeutung	Beispiel
$\mathbb{N}$	Ganze Positive Zahlen	1;2;3;
$\mathbb{N}_0$	Ganze Positive Zahlen mit 0	0;1;2;
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	-1;0;1;
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen = Bruchzahlen	$\frac{3}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{2}{3}$
	Irrationale Zahlen = Nachkommastellen	0.3281
$\mathbb{R}$	Reele Zahlen = Q + Irrationale Zahlen	Alle

1.1.2 Wachstum

Wachstumsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$

Explizit: $B(t) = B(0) \cdot q^t$ mit $q > 1$ q = Prozent t = Zeit

1.1.3 Summe und Produkte

Summezeichen:

Es sei: n, k ∈ Z und n ≥ k

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

k heisst Laufvariable, Laufindex oder Summationsvariable
1 heisst Startwert oder untere Grenze
n heisst Endwert oder obere Grenze
a_k ist die Funktion bezueglich der Laufvariable

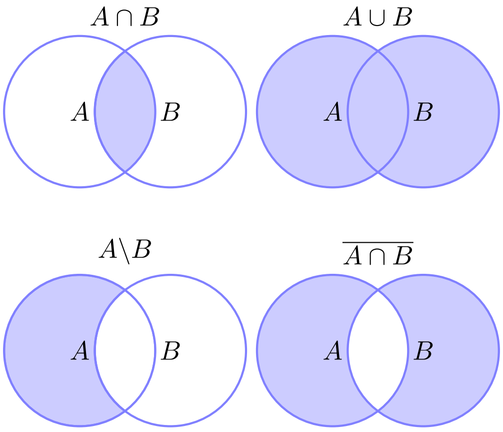
Produktzeichen:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

k heisst Laufvariable oder Laufindex
1 heisst Startwert oder untere Grenze
n heisst Endwert oder obere Grenze
a_k ist die Funktion bezueglich der Laufvariable

1.1.4 Mengen Operationen

*	Bedeutung
∅ oder	Leere Menge, enthält keine Elemente
$x \in A$	Beschreibt Element x ist in Menge A
$x \notin A$	Beschreibt Element x ist nicht in Menge A
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge von B
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$A \backslash B$	Differenzbildung, Menge von A ohne B
$\bar{A}_B$	$:= \{x \mid x \in B \ \wedge \ x \notin A\}$



*	Bedeutung	Beispiel
$\|A\|$	Kardinalität/Mächtigkeit beschreibt Anzahl Elemente einer Menge	A = 1;2 $\|\|A\| = 2$
∧	Konkuktion/UND A ∧ B = Wahr wenn A und B beide Wahr sind	A ∧ B A, B = W
∨	Disjunktion/ODER A ∨ B = Wahr wenn A oder B jeweils Wahr ist	-1;0;1;
¬	Negation A = Wahr¬A = Falsch	¬A
$\Longrightarrow$	Implikation: Daraus folgt	
$\Longleftrightarrow$	äquivalenz A $\Longleftrightarrow$ B wenn beide wahr oder falsch sind	
∀	für Alle	$\forall\, x \in \mathbb{N}$
∃	Es Existiert	$\exists\, x \in \mathbb{N}$

A	B	A	∧	B	A	∨	B	¬	B	A	∨	¬	B
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	T	T	F	T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T	T	F

1.2 Prozentrechnen

1.2.1 Definition

$$\frac{\text{Prozentwert } W}{\text{Grundwert } G} = \frac{\text{Prozentzahl } p}{100} = \text{Prozentsatz } p\ \%$$

1.2.2 Prozentwert berechnen

(1) Prozentwert $W =$ Prozentsatz $p\ \% \cdot$ Grundwert G
(2) Prozentwert $W = \frac{\text{Prozentzahl } p}{100} \cdot$ Grundwert G

1.2.3 Prozentsatz berechnen

(1) Prozentzahl $p = \frac{\text{Prozentwert } W}{\text{Grundwert } G} \cdot 100$
(2) Prozentsatz $p\ \% = \frac{\text{Prozentwert } W}{\text{Grundwert } G} \cdot 100\ \%$

1.2.4 Grundwert berechnen

(1) Grundwert G = Prozentwert W : Prozentsatz p %
(2) Grundwert G = Prozentwert $W \cdot \frac{100}{\text{Prozentzahl } p}$

1.2.5 Prozentuale Veränderung

Eine prozentuale Veränderung ist die Veränderung einer Größe innerhalb eines bestimmten Zeitraums, ausgedrückt in Prozent.
Anfangswert ± Prozentuale Veränderung = Endwert

1.2.6 Prozentfaktor

Anfangswert $G \cdot$ Prozentfaktor q = Endwert G_{neu}
$q = (100\ \% \pm p\ \%)$
$q = \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$

Bei einer Zunahme ist der Prozentfaktor größer als 1 = Wachstumsfaktor
. Bei einer Abnahme ist der Prozentfaktor kleiner als 1 = Abnahmefaktor.

1.2.7 Prozentuale Zunahme

Endwert G_{neu+} = Anfangswert $G \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{\text{Wachstumsfaktor}}$

1.2.8 Prozentuale Abnahme

Endwert G_{neu-} = Anfangswert $G \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{p}{100}\right)}_{\text{Abnahmefaktor}}$

1.3 Aussagenlogik

1.3.1 Definitionen

Term: Ein Term ist eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern. Ein Term hat keinen Wahrheitsgehalt, ist also weder wahr noch falsch.
Aussage: Eine Aussage beschreibt durch Worte oder Zeichen einen Sachverhalt. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Aussageform: Jeder sprachliche oder zeichensymbolische Ausdruck mit wenigstens einer Variablen wenn er durch jede sinnvolle Belegung der Variablen jeweils eine Aussage wird.

2 Gleichungen

2.1 Allgemein

2.1.1 Definitionen

Gleichungen lösen
Jede Zahl aus der Definitionsmenge, die beim Einsetzen für x zu einer wahren Aussage fuehrt, heisst loesung der Gleichung.
Grundmenge, Definitionsbereich $\mathbb{D}$
Die Menge aus der die loesungen stammen duerfen.
loesungsvariable
Variable nach der aufgeloest wird.
Formvariablen, Parameter
Alle anderen Variablen.
loesungsmenge
Menge aller Elemente aus der Definitionsmenge, die zu einer wahren Aussage fuehren.
äquivalenz
Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn beim Ersetzen der Variablen durch die gleichen Elemente der "gemeinsamen"Definitonsmenge entweder beide in eine wahre oder falsche Aussage uebergehen.

2.1.2 Äquivalenzumformungen

Umformungen einer Gleichung, bei denen die Lösungsmenge gleich bleibt, heissen Äquivalenzumformungen.

1. Termunformungen
$2x + 5 - 3 = 0 \iff 2x + 2 = 0$
2. Add./Sub.. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten
3. Mult./Div. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten
Achtung: Ausser mit 0
4. Beidseitige Add./Sub. mit dem gleichen Term
5. Beidseitige Mult./Div. mit dem gleichen Term

2.2 Lineare Gleichungen

2.2.1 Definition

Eine Gleichung, die sich durch äquivalenzumformungen in die Form $ax + b = 0$ bringen lässt, heisst lineare Gleichung. Wir koennen lineare Gleichungen daran erkennen, dass die Variable nur in der 1. Potenz auftritt, also kein x^2, $x^3 \ldots$ enthalten.

2.2.2 Lösen einer linearen Gleichung

1. Gleichung nach x auflösen
2. loesungsmenge aufschreiben

2.3 Quadratische Gleichungen

2.3.1 Definition

Gleichungen, die sich durch äquivalenzumformungen auf die Form $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ bringen lassen, heissen quadratische Gleichungen. Wir koennen quadratische Gleichungen daran erkennen, dass die Variable x in der 2. Potenz x^2, aber in keiner hoeheren Potenz vorkommt. Es gibt 4 Arten/Formen von Quadratischen Gleichungen.

2.3.2 Lösen einer quadratischen Gleichung

Lösung einer Reinquadratische Gleichung $ax^2 = 0$
Reinquadratische Gleichungen ohne Absolutglied besitzen als einzige loesung die Null.

1. Gleichung nach x^2 auflösen
2. Wurzel ziehen
3. loesungsmenge aufschreiben

Lösung einer Reinquadratische Gleichung mit Absolutglied $ax^2 + c = 0$

1. Gleichung nach x^2 auflösen
2. Wurzel ziehen
3. loesungsmenge aufschreiben

Lösung einer Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied $ax^2 + bx = 0$

1. Quadratische Gleichung in Normalform bringen
2. x ausklammern
3. Faktoren gleich Null setzen
4. Gleichung nach x^2 auflösen
5. loesungsmenge aufschreiben

2.3.3 Mitternachtsformel

Gemischtquadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit Absolutglied lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fallunterscheidung:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Übersicht

	Allgemeine Form	**Normalform**
Reinquadratisch ohne Absolutglied	$2x^2 = 0$, $a = 2$, $b = 0$ und $c = 0$	$x^2 = 0$, $a = 1$, $b = 0$ und $c = 0$
Reinquadratisch mit Absolutglied	$2x^2 - 8 = 0$, $a = 2$, $b = 0$ und $c = -8$	$x^2 - 4 = 0$, $a = 1$, $b = 0$ und $c = -4$
Gemischtquadratisch ohne Absolutglied	$2x^2 - 8x = 0$, $a = 2$, $b = -8$ und $c = 0$	$x^2 - 4x = 0$, $a = 1$, $b = -4$ und $c = 0$
Gemischtquadratisch mit Absolutglied	$2x^2 - 8x + 6 = 0$, $a = 2$, $b = -8$ und $c = 6$	$x^2 - 4x + 3 = 0$, $a = 1$, $b = -4$ und $c = 3$

Regeln

Wenn das lineare Glied fehlt, gilt b = 0.
Wenn das absolute Glied fehlt, gilt c = 0.
Wenn das x^2 allein steht, gilt a = 0 (wegen $1 \cdot x^2 = x^2$).
Wenn das x allein steht, gilt (wegen $1 \cdot x = x$).

Lösen einer Quadratischen Gleichung mit Mitternachtsformel

1. Quadratische Gleichung in allgemeine Form bringen
2. a, b und c aus der allgemeinen Form herauslesen
3. a, b und c in die Mitternachtsformel einsetzen
4. loesung berechnen
5. loesungsmenge aufschreiben

2.4 Bruchgleichung

2.4.1 Definition

Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung mit mindestens einem Bruchterm, in dem die Variable x im Nenner vorkommt.

2.4.2 Lösen einer Bruchgleichung

1. Definitionsmenge bestimmen
2. Gleichung nach x auflösen
3. Pruefen, ob der x-Wert in der Definitionsmenge ist
4. loesungsmenge aufschreiben

2.4.3 Kehrwert

Wenn die Zähler der Brueche nur aus Zahlen bestehen, kann eine Kehrwertbildung sinnvoll sein. Den Kehrwert eines Bruchs erhält man durch Vertauschen von Zähler und Nenner.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{x+1}{2}$$

2.4.4 Multiplikation übers Kreuz

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung jeweils ein Bruch steht, kann eine Multiplikation ueber Kreuz sinnvoll sein.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow 1 \cdot x+1 = 2 \cdot x$$

2.5 Betragsgleichung

2.5.1 Definition

Betragsgleichungen lassen sich durch Fallunterscheidung lösen.

2.5.2 Eigenschaften und Rechenregeln

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$|x| \geq 0$ Beträge sind nicht negativ!
$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ daraus folgt: $|a^n| = |a|^n$ für $n \in \mathbb{N}$
$|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$ daraus folgt: $|\frac{1}{a^n}| = \frac{1}{|a|^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ $a \neq 0$
$|a+b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung

2.5.3 Lösen einer Betragsgleichung

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Aus der Definition des Betrags ergeben sich folgende zwei Fälle:

- Wenn der Term im Betrag groesser oder gleich Null ist ($a \geq 0$), koennen wir den Term einfach ohne Betragsstriche schreiben ($|a| = a$)
- Wenn der Term im Betrag kleiner als Null ist ($a < 0$) , müssen wir die Vorzeichen des Terms umdrehen, um die Betragsstriche weglassen zu koennen ($|a| = -a$).

Die Lösungsmenge der einzelnen Fälle geben wir als Intervalle an.
Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Vereinigungsmenge der einzelnen loesungsmengen.

Fallunterscheidung

1. Betrag durch Fallunterscheidung auflösen
2. loesungsmengen der einzelnen Fälle bestimmen
3. loesungsmenge der Betragsgleichung bestimmen

Aus der Definition des Betrags

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

ergeben sich folgende zwei Fälle: Wenn der Term im Betrag groesser oder gleich Null ist ($a \geq 0$), koennen wir den Term einfach ohne Betragsstriche schreiben ($|a| = a$).
Wenn der Term im Betrag kleiner als Null ist $a < 0$, müssen wir die Vorzeichen des Terms umdrehen, um die Betragsstriche weglassen zu koennen ($|a| = -a$).

Quadrieren

1. Betragsgleichung Quadrieren
2. Gleichung lösen

Durch Quadrieren verschwindet der Betrag, denn es gilt: $|a|^2 = a^2$.

2.6 Potenzgleichungen

2.6.1 Definition

Eine Potenzgleichung ist eine Gleichung, die aus nur einer Potenz einer Variable und einer Konstanten besteht: $x^n = a$

Die Vorgehensweise unterscheidet sich danach, wie der Exponent n aussieht:

1. Typ: $x^n = a$ mit n $\in \mathbb{N}$

2. Typ: $x^{-n} = a$ mit n $\in \mathbb{N}$
3. Typ: $x^{\frac{m}{n}} = a$ mit n $\in \mathbb{N}$ und mit $m \in \mathbb{Z}$

Grundsätzlich lösen wir Potenzgleichungen durch Wurzelziehen. Das Problem ist, dass das Wurzelziehen im Allgemeinen keine äquivalenzumformung ist. Um zu verhindern, das loesungen verloren gehen, muss man bei geraden Exponenten Betragsstriche setzen:

- Wenn n gerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.
- Wenn n ungerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = x$.

2.6.2 Potenzgesetze

Multiplikation mit gleicher Basis $= x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
Division mit gleicher Basis $= x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
Potenzen potenzieren $= (x^a)^b = x^{a \cdot b}$
Multiplikation mit gleichem Exponenten $= a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division mit gleichem Exponenten $= a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Negative Exponenten: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Brüche als Exponenten: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

2.6.3 Lösen einer Potenzgleichung

Typ 1: $x^n = a$ **(**$n \in \mathbb{N}$**;**$a \in \mathbb{R}$**)**
Vorgehensweise: n-te Wurzel ziehen
Mögliche Lösungen

	n ist gerade	**n ist ungerade**
$a > 0$	$\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}; +\sqrt[n]{a}\}$	$\mathbb{L} = \{+\sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$\mathbb{L} = \{0\}$	$\mathbb{L} = \{0\}$
$a < 0$	$\mathbb{L} = \{\}$	$\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{\lvert a \rvert}\}$

Typ 2: $x^{-n} = a$
Vorgehensweise: Umformung der Gleichung zu Typ 1 (falls $a \neq 0$)
Mögliche Lösungen

- $a = 0$ Es gibt keine loesung $\mathbb{L} = \{\}$.
- $a \neq 0$ Die Gleichung $x^{-n} = a$ ist äquivalent zu $x^n = \frac{1}{a}$.

Typ 3: $m \in \mathbb{Z}$
Vorgehensweise: Potenzieren mit n
Ist der Exponent $\frac{m}{n}$ keine ganze Zahl, so sind die Gleichungen in $\mathbb{R}^-$ nicht definiert. In $\mathbb{R}_0^+$ sind die Gleichungen $x^{\frac{m}{n}} = a$ und $\sqrt[n]{x^m} = a$ äquivalent.

2.7 Wurzelgleichung

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der die Variable (auch) unter einer Wurzel vorkommt.

2.7.1 Wurzel Gesetze

Wurzel Addieren $= a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a+b)\sqrt[n]{x}$
Wurzel Subtrahieren $= a\sqrt[n]{x} - b\sqrt[n]{x} = (a-b)\sqrt[n]{x}$
Wurzel Multiplizieren $= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
Wurzel Potenzieren $= (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
Wurzel Radizieren $= \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
Wurzel in Potenz umformen $= \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
Wurzel Quadrieren: $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$ für $a \geq 0$
Folgerung: $\sqrt{a^2} = |a|$

2.7.2 Wurzelgleichung lösen

1. Wurzeln beseitigen
   (a) Wurzel isolieren
   (b) Potenzieren
2. Algebraische Gleichung lösen
3. Probe Machen
4. Lösungsmenge aufschreiben

Erklärung:
Wurzel isolieren = Gleichung so umformen, dass die Wurzel allein auf einer Seite steht.

Um die Wurzel $\sqrt[n]{x}$ zu beseitigen, müssen wir sie mit dem Wurzelexponenten potenzieren. Das Potenzieren mit 2, um eine Quadratwurzel $\sqrt{x}$ zu beseitigen, heisst auch "Quadrieren".

Ziel des Potenzierens aus Schritt 1.2 ist es, die Wurzelgleichung in eine algebraische Gleichung (z.B. lineare Gleichung, quadratische Gleichung oder kubische Gleichung) zu ueberfuehren. Diese Gleichung koennen wir dann mit den bekannten Methoden lösen.

Das Potenzieren aus Schritt 1.2 ist i. Allg. keine äquivalenzumformung: Durch das Potenzieren koennen loesungen (sog. Scheinloesungen) hinzukommen, es gehen aber keine verloren. Um Scheinloesungen auszusortieren, machen wir die Probe, d.h., wir setzen die moeglichen loesungen in die Ausgangsgleichung ein. Nur die loesungen, die zu einer wahren Aussage fuehren, gehoeren auch wirklich zur loesung der Wurzelgleichung.

2.8 Exponential- und Logarithmusgleichungen

2.8.1 Definition

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Exponenten einer Potenz steht.
Eine Logarithmusgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Numerus des Logarithmus steht.

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$$

Logarithmen mit der Basis e (der eulerschen Zahl) heissen natuerliche Logarithmen.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$\exp x = e^x$ und $\ln x$ sind Kehrwertfunktionen

$$e^{\ln x} = x \text{ and } \ln e^x = x.$$

Exponentenregeln für Exponentengleichung

$$e^x e^y = e^{x+y},\ \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \text{ and } \left(e^x\right)^k = e^{xk}.$$

Exponentenregeln für Logarithmengleichung

$$\ln x + \ln y = \ln xy,\ \ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right), \text{ and } \ln\left(a^b\right) = b \ln a.$$

Wir koennen auch einen Logarithmus jeder Basis schreiben, indem wir natürliche Logarithmen verwenden:

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Lösung mithilfe der Definition des Logarithmus
Eine Lösung mithilfe der Definition des Logarithmus ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so umzuformen, dass sich auf der einen Seite ein Logarithmus und auf der anderen Seite eine Konstante ergeben.

Definitionsmenge einer Logarithmusgleichung
Da $\log_b x = a$ nur für $x > 0$ definiert ist, kann die Definitionsmenge eingeschränkt sein. In der Praxis bedeutet das, dass wir stets die Probe machen sollten, d.h. überprüfen, ob die berechneten Lösungen eingesetzt in die gegebene Gleichung zu einer wahren Aussage führen.

2.8.2 Logarithmengesetze

Produktregel: $\log_b(P \cdot Q) = \log_b P + \log_b Q$
Quotientregel: $\log_b\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_b P - \log_b Q$
Potenzregel 1: $\log_b P^n = n \cdot \log_b P$
Potenzregel 2: $\log_b \sqrt[n]{P} = \frac{\log_b P}{n}$
Basiswechsel: $\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$

2.9 Lineare Gleichungssysteme

2.9.1 Definition

Mehrere lineare Gleichungen, die alle zusammen gelten sollen, bilden ein lineares Gleichungssystem.

2.9.2 Gleichsetzungsverfahren

1. Gleichungen nach der gleichen Variable auflösen
2. Gleichungen gleichsetzen
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen
4. Berechneten Wert in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. loesungsmenge aufschreiben

2.9.3 Einsetzungsverfahren

1. Eine Gleichung nach einer Variable auflösen
2. Berechneten Term für diese Variable in die andere Gleichung einsetzen
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen
4. Berechneten Wert in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. loesungsmenge aufschreiben

2.9.4 Additionsverfahren

1. Gleichungen so umformen, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden
2. Gleichungen addieren
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen
4. Berechneten Wert in eine der ursprueglichen Gleichungen einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. loesungsmenge aufschreiben

Damit die Koeffizienten der Variablen Gegenzahlen werden, bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Koeffizienten und formen die Gleichungen anschliessend entsprechend um.

2.10 Ungleichungen

2.10.1 Definition

Eine Ungleichung ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Termen besteht, die durch eines der Vergleichszeichen $<$ (Kleinerzeichen), $\leq$ (Kleinergleichzeichen), $>$ (Grösserzeichen) oder $\geq$ (Grössergleichzeichen) verbunden sind.

2.10.2 Rechenregeln

$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad b > a$
$a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c$
$a \leq b \quad \text{und} \quad c \leq d \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + d$
$a < b \quad \text{und} \quad c \leq d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$
$a \leq b \quad \text{und} \quad c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad ac \leq bc$
$a \leq b \quad \text{und} \quad c \leq 0 \quad \Rightarrow \quad ac \geq bc \; a \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

2.10.3 Lineare Ungleichungen

1. Ungleichung nach x auflösen
2. Lösungsmenge aufschreiben

- Terme auf beiden Seiten der Ungleichung zusammenfassen
- Denselben Term auf beiden Seiten der Ungleichung addieren/subtrahieren
- Beide Seiten der Ungleichung mit derselben positiven* Zahl multiplizieren
- Beide Seiten der Ungleichung durch dieselbe positive* Zahl dividieren

* Bei der Multiplikation bzw. Division mit einer negativen Zahl müssen wir das Ungleichungszeichen umdrehen.

2.10.4 Quadratische Ungleichungen

Eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in eine der Formen bringen lässt, heisst quadratische Ungleichung.
$ax^2 + bx + c < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$
$ax^2 + bx + c \leq 0$
$ax^2 + bx + c \geq 0$

1. Quadratische Gleichung lösen
2. Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen
3. Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Eine quadratische Gleichung besitzt entweder keine Lösung, eine Lösung oder zwei Lösungen.

2.10.5 Bruchungleichungen

Bei Bruchungleichungen gibt es 2 Fälle:

Rechte Seite der Ungleichung $\neq 0$

1. Bruch durch Fallunterscheidung auflösen
2. Lösungsmengen der einzelnen Fälle bestimmen (Intervalle)
3. Lösungsmenge der Bruchungleichung bestimmen

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} > c = \begin{cases} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{N} > c \cdot \mathrm{N} & \text{für N} > 0 \\ \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{N} < c \cdot \mathrm{N} & \text{für N} < 0 \end{cases}$$

Das Auflösen des Bruchs geschieht durch Multiplikation der Ungleichung mit dem Nenner des Bruchs. Dabei müssen wir jedoch eine Fallunterscheidung vornehmen. Ist der Nenner nämlich negativ, dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} > c = \begin{cases} \mathrm{Z} > c \cdot \mathrm{N} & \text{für N} > 0 \\ \mathrm{Z} < c \cdot \mathrm{N} & \text{für N} < 0 \end{cases}$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen.

Rechte Seite der Ungleichung $= 0$

1. Definitionsbereich bestimmen
2. Nullstellen berechnen
3. Intervallweise Betrachtung

3 Funktionen

3.1 Lineare Funktionen

3.1.1 Definiton

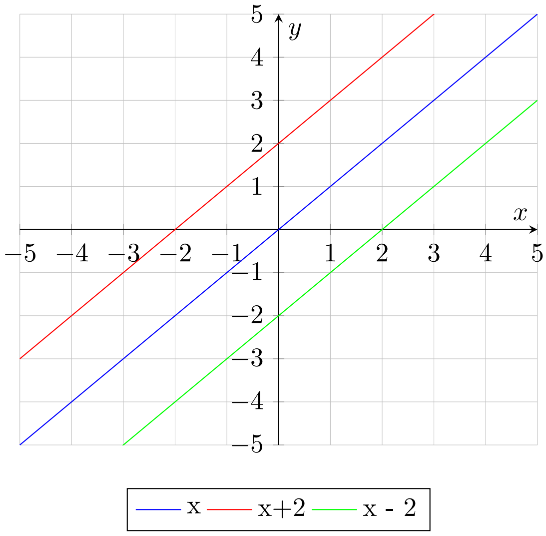
Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = mx+n$ heisst lineare Funktion.
Wegen $y = f(x)$ koennen wir statt $f(x) = mx + n$ auch $y = mx + n$ schreiben:

- y: Abhängige Variable, y-Wert, Funktionswert
- m: Steigung
- x: Unabhängige Variable, x-Wert, (Funktions-)Argument
- n : y-Achsenabschnitt

3.1.2 Achsenabschnitte verändern

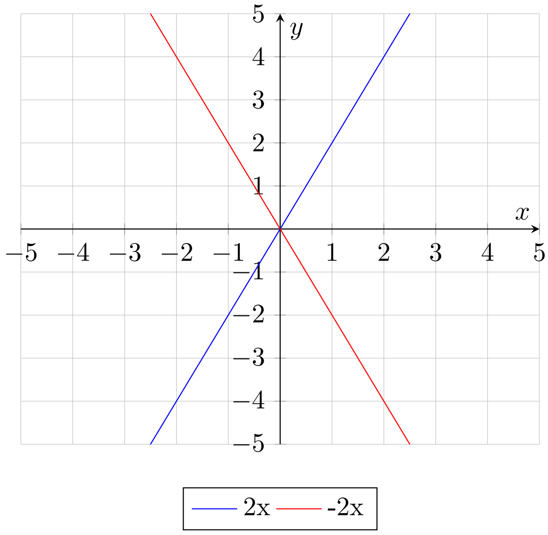
Wenn wir den y-Achsenabschnitt n in $f(x) = mx + n$ verändern, passiert Folgendes:

- Gilt $n > 0$, ist die Gerade nach oben verschoben.
- Gilt $n < 0$, ist die Gerade nach unten verschoben.



Wenn wir die Steigungt m in $f(x) = mx + n$ verändern, passiert Folgendes:

- Gilt $m > 0$, steigt die Gerade.
- Gilt $m < 0$, fällt die Gerade.



3.1.3 Nullstelle berechnen

Berechne die Nullstelle der linearen Funktion $y = 3x + 3$.
Wir setzen die Funktion gleich Null, d.h. wir setzen für den y Wert 0 ein: $0 = 3x + 3$
Jetzt müssen wir die Gleichung nach x auflösen, um die gesuchte Nullstelle zu finden.

3.1.4 Steigung berechnen

Wir lesen zwei beliebige Punkte ab:

$$P_0(0|1) \text{ und } P_1(4|3)$$

und setzen sie in die Steigungsformel ein:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{3 - (1)}{4 - 0} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.1.5 Schnittpunkt berechnen

Ein Schnittpunkt existiert nur, wenn die beiden gegebenen Geraden eine unterschiedliche Steigung besitzen.

$$g: \ y = 2x + 1$$

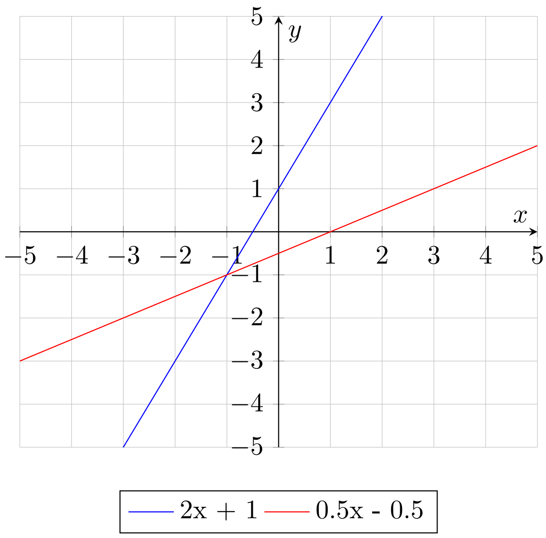
$$h: \ y = 2x + 3$$

Die Geraden besitzen dieselbe Steigung das heisst: **Es existiert kein Schnittpunkt**.
Ansonsten gilt:

1. Funktionsgleichungen gleichsetzen
2. Gleichung nach x auflösen
3. x in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, um y zu berechnen
4. Ergebnis aufschreiben

3.1.6 Umkehrfunktion bilden

1. Funktionsgleichung nach x auflösen
2. x und y vertauschen



3.2 Quadratische Funktionen

3.2.1 Definition

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ heisst quadratische Funktion. Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

3.2.2 Quadratische Funktion Zeichnen

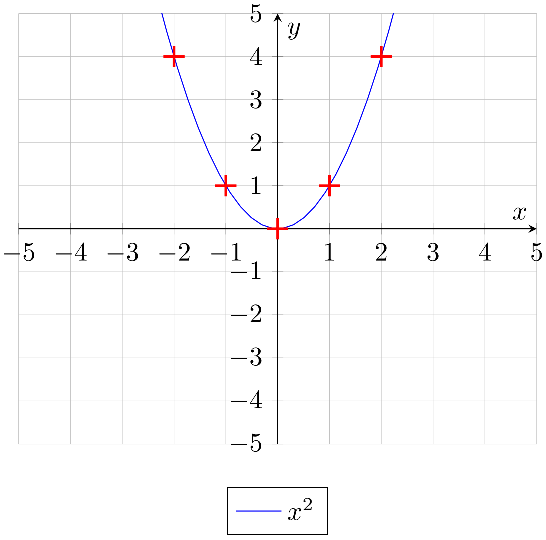
Dazu berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$
$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$
$$f(0) = 0^2 = 0$$
$$f(1) = 1^2 = 1$$
$$f(2) = 2^2 = 4$$

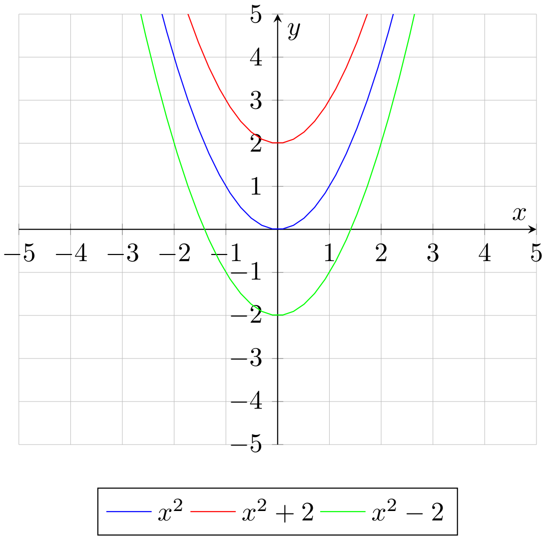
Der uebersichtlichkeit halber fassen unsere Berechnungen in einer Wertetabelle zusammen:

x-Werte	-2	-1	0	1	2
y-Werte	4	1	0	1	4

Wenn wir jetzt die berechneten Punkte in ein Koordinatensystem eintragen und anschliessend die Punkte verbinden, erhalten wir den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$, die sog. Normalparabel.



3.2.3 Normalparabel nach oben/unten verschieben



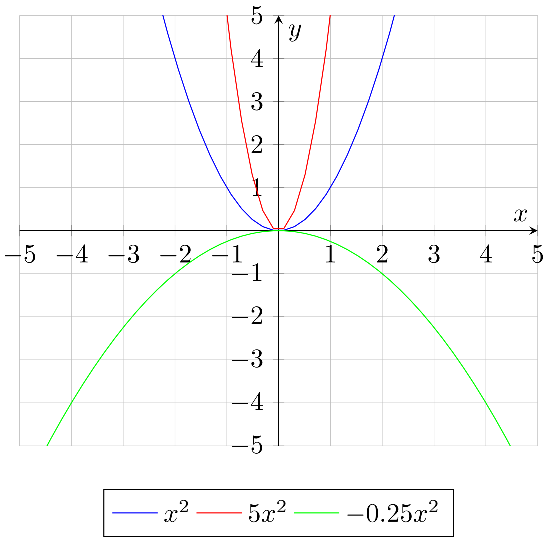
$$f(x) + c = \begin{cases} \text{Verschiebung nach oben} & \text{für } c > 0 \\ \text{Verschiebung nach unten} & \text{für } c < 0 \end{cases}$$

3.2.4 Normalparabel stauchen/strecken

Moechte man die Normalparabel stauchen oder strecken, muss man sich die Parabelgleichung $f(x) = ax^2$ anschauen.

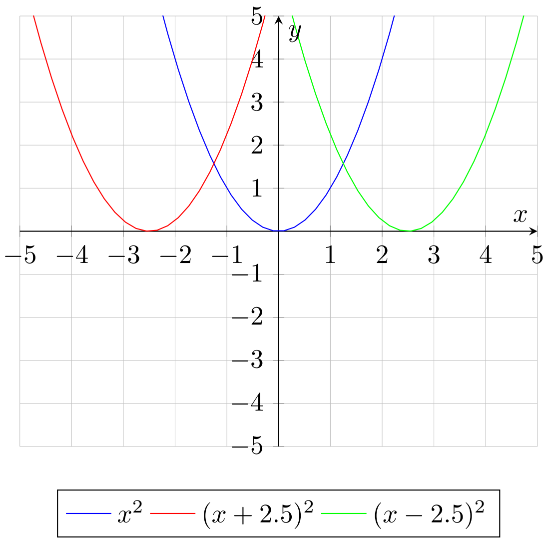
$a > 1$	Die Parabel ist nach oben geoeffnet und schmaler* als die Normalparabel
$a = 1$	Die nach oben geoeffnete Normalparabel
$0 < a < 1$	Die Parabel ist nach oben geoeffnet und breiter** als die Normalparabel
$-1 < a < 0$	Die Parabel ist nach unten geoeffnet und breiter** als die Normalparabel
$a = -1$	Die nach unten geoeffnete Normalparabel
$a < -1$	Die Parabel ist nach unten geoeffnet und schmaler* als die Normalparabel

* gestreckt, ** gestaucht



3.2.5 Parabel verschieben entlang der x-Achse

$$f(x + d) = \begin{cases} \text{Verschiebung nach rechts} & \text{für } d < 0 \\ \text{Verschiebung nach links} & \text{für } d > 0 \end{cases}$$



3.2.6 y-Achsenabschnitt berechnen

Die x-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse ist immer Null.
Bei quadratischen Funktionen lässt sich der y-Achsenabschnitt aus der Funktionsgleichung ablesen: Der y-Achsenabschnitt von $y = ax^2 + bx + c$ ist $y = c$.

3.2.7 Nullstellen berechnen

1. Funktionsgleichung gleich Null setzen
2. Gleichung lösen

Da die y-Koordinate eines Schnittpunktes mit der x-Achse immer Null ist, lautet der Ansatz zur Berechnung einer Nullstelle: $y = 0$. Wegen $y = f(x)$ kann man auch $f(x) = 0$ schreiben.

Fall 1: $f(x) = ax^2$

Funktionen vom Typ $f(x) = ax^2$ besitzen als einzige Nullstelle die Null.

Fall 2: $f(x) = ax^2 + c$.

1. Funktionsgleichung gleich Null setzen
2. Gleichung nach x^2 auflösen
3. Wurzel ziehen

Fall 3: $f(x) = ax^2 + bx$.

1. Funktionsgleichung gleich Null setzen
2. Gleichung nach x ausklammern
3. Faktoren gleich Null setzen

Fall 4: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Quadratische Gleichungen dieses Typs lösen wir mit der Mitternachtsformel

3.3 Gebrochenrationale Funktionen

3.3.1 Definition

Eine gebrochenrationale Funktion ist eine Funktion, bei der sich sowohl im Zähler als auch im Nenner eines Bruchs eine ganzrationale Funktion befindet.

3.3.2 Definitionsmenge

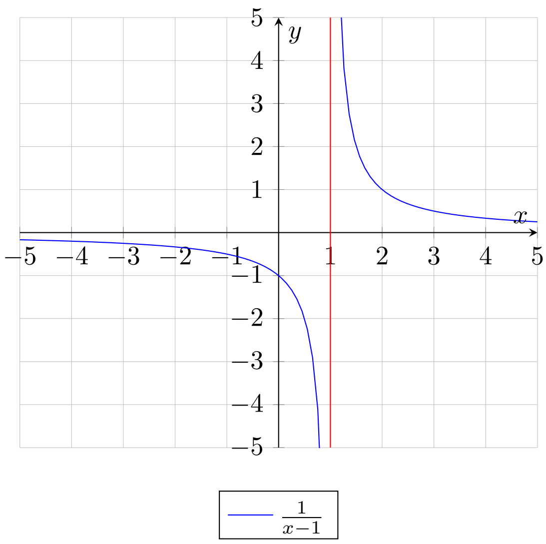
Die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ ist die Menge aller x-Werte, die in die Funktion eingesetzt werden duerfen.

In gebrochenrationale Funktionen duerfen wir grundsätzlich alle reellen Zahlen ausser die, für die der Nenner gleich Null wird einsetzen: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen der Nennerfunktion}\}$

3.3.3 Senkrechte Asymptote

Eine senkrechte Gerade, der sich eine Kurve bei deren immer groesser werdender Entfernung vom Koordinatenursprung unbegrenzt nähert, heisst senkrechte Asymptote.
Bedingung
Bedingung für die Existenz einer senkrechten Asymptote ist, dass die Nennerfunktion (mindestens) eine Nullstelle hat:

Anleitung Funktionsgleichung der Nennerfunktion gleich Null setzen:
$f(x) = \frac{1}{x-1} \Longrightarrow x - 1 = 0$
Gleichung lösen: $x = 1$
Die senkrechte Asymptote verlauft durch x = 1.



3.3.4 Waagrechte Asymptote

Eine waagrechte Gerade, der sich eine Kurve bei deren immer groesser werdender Entfernung vom Koordinatenursprung unbegrenzt nähert, heisst waagrechte Asymptote.

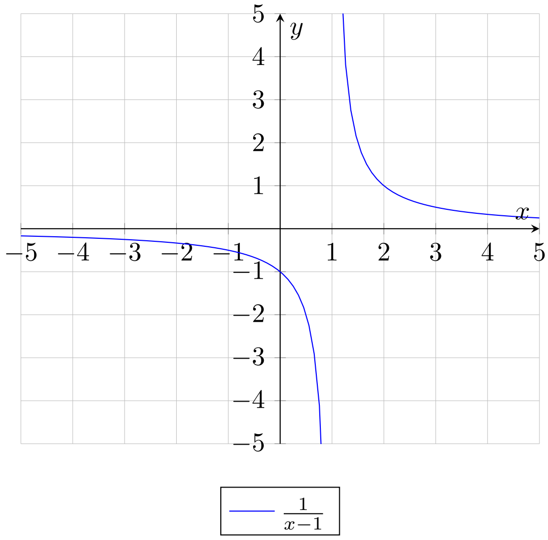
Bedingung
Eine gebrochenrationale Funktion:

$$y = \frac{a_n x^{\boxed{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^{\boxed{m}} + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

besitzt eine waagrechte Asymptote, wenn:
Zählergrad < Nennergrad (n < m) dann: Die x-Achse ist die waagrechte Asymptote

Zählergrad = Nennergrad (n = m) dann: Die zur x-Achse parallele Gerade mit der Gleichung $y = \frac{a_n}{b_m}$ ist die waagrechte Asymptote.

Anleitung Zählergrad und Nennergrad bestimmen:
Da der Zählergrad (0) kleiner ist als der Nennergrad (1), besitzt die gebrochenrationale Funktion eine waagrechte Asymptote. Waagrechte Asymptote berechnen:
Wegen Zählergrad < Nennergrad ist die x-Achse die waagrechte Asymptote.



3.3.5 Schiefe Asymptote

Eine schiefe Gerade, der sich eine Kurve bei deren immer grösser werdender Entfernung vom Koordinatenursprung unbegrenzt nähert, heißt schiefe Asymptote.

Bedingung
Eine gebrochenrationale Funktion:

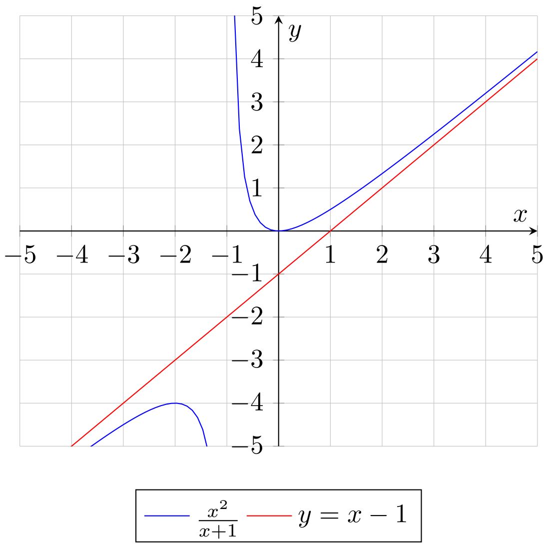
$$y = \frac{a_n x^{\boxed{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^{\boxed{m}} + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

besitzt eine schiefe Asymptote, wenn:
Zählergrad = Nennergrad +1 (n = m + 1)

Anleitung
Zählergrad und Nennergrad bestimmen:
$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
Da der Zählergrad (2) um eine Einheit größer ist als der Nennergrad (1), besitzt die gebrochenrationale Funktion eine schiefe Asymptote.
Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2 : (x+1) = {\color{red}x - 1} + {\color{blue}\frac{1}{x+1}} \\
-(x^2 + x) \\
\qquad -x \\
\quad -(-x - 1) \\
\qquad\quad 1
\end{array}
$$

Grenzwertbetrachtung:
Da der Nennergrad des Bruchs (ganz rechts im Ergebnis der Polynomdivison) größer ist als der Zählergrad, wird dieser Restterm für sehr grosse x-Werte immer kleiner und nähert sich Null an:
$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right) = 0$
Der Graph der Funktion strebt deshalb gegen die schiefe Asymptote mit der Gleichung: $y = x - 1$



3.3.6 Nullstellen

1. Nullstellen der Zählerfunktion berechnen
   (a) Funktionsgleichung gleich Null setzen
   (b) Gleichung lösen
2. Nullstellen der Zählerfunktion in die Nennerfunktion einsetzen
3. Ergebnis interpretieren

3.3.7 Polstellen

1. Nullstellen der Nennerfunktion berechnen
   (a) Funktionsgleichung gleich Null setzen
   (b) Gleichung lösen
2. Nullstellen der Nennerfunktion in Zählerfunktion einsetzen
3. Ergebnis interpretieren

Wenn möglicherweise eine hebbare Definitionslücke vorliegt:

1. Zähler und Nenner faktorisieren
2. Bruch kürzen
3. Nullstellen der ungekürzten Nennerfunktion in gekürzte Nennerfunktion einsetzen
4. Ergebnis interpretieren

3.4 Betragsfunktion

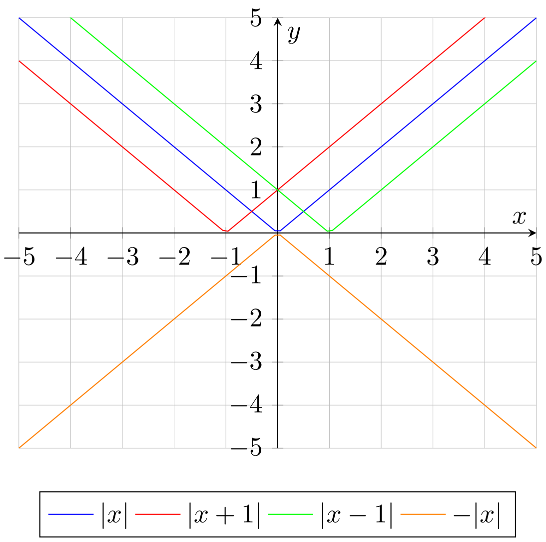
3.4.1 Definition

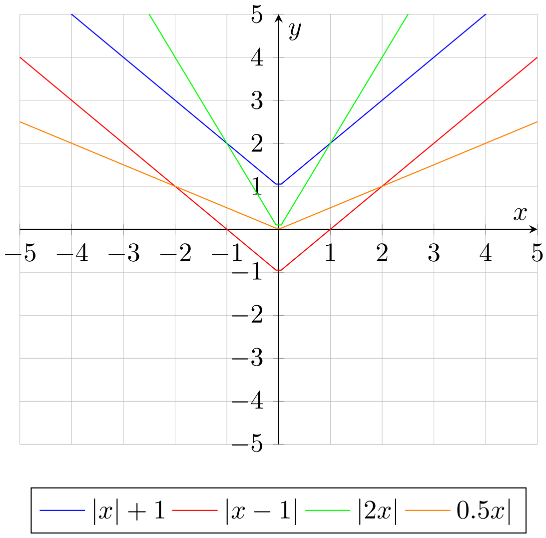
Die Betragsfunktion ist eine abschnittsweise definierte Funktion, die sich aus zwei linearen Funktionen zusammensetzt.

$$
|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}
$$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$

3.4.2 Verschiebung





3.5 Potenzfunktionen mit Positiven Exponenten

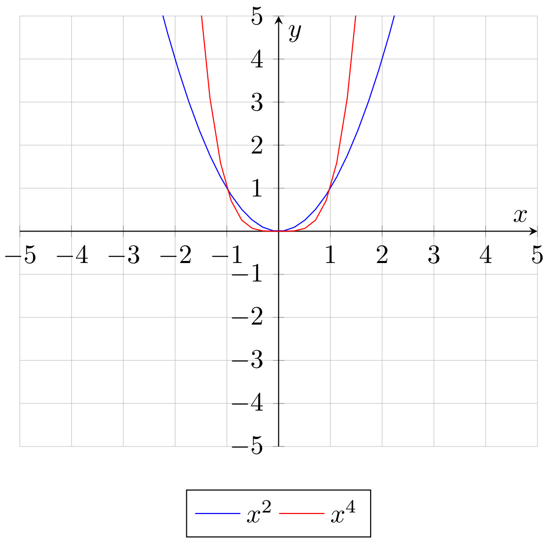
3.5.1 Definition

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ heisst Potenzfunktion.

3.5.2 Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

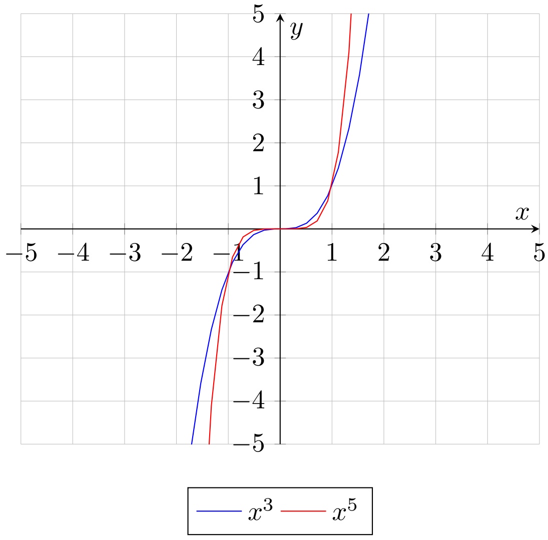
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^2	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1	$2{,}25$
x^4	$5{,}0625$	1	$0{,}0625$	0	$0{,}0625$	1	$5{,}0625$



3.5.3 Ungerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^5$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^3	$-3{,}375$	-1	$-0{,}125$	0	$0{,}125$	1	$3{,}375$
x^5	$-7{,}59375$	-1	$0{,}03125$	0	$0{,}03125$	1	$7{,}59375$



3.5.4 Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ haben folgende Eigenschaften:

	n gerade	**n ungerade**
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-ache	punktsymetrisch zum K-Ursprung
Gemeinsame Punkte	$(-1,1)$,$(0\|0)$,$(1\|1)$	$(-1,-1)$,$(0\|0)$,$(1\|1)$

3.6 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

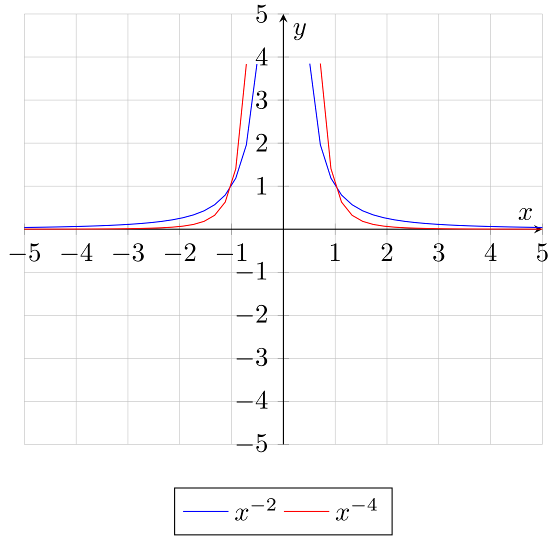
Die Graphen von Potenzfunktionen heissen Hyperbeln n-ter Ordnung, wenn der Exponent negativ ist.

3.6.1 Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^{-2}$ und $f(x) = x^{-4}$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst

einige Funktionswerte:

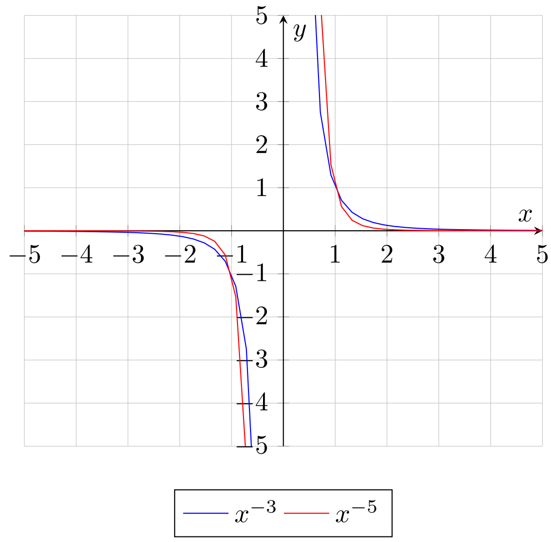
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^{-2}	$0{,}\bar{4}$	1	4	4	1	$0{,}\bar{4}$
x^{-4}	$\approx 0{,}1975$	1	16	16	1	$\approx 0{,}1975$



3.6.2 Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^{-3}$ und $f(x) = x^{-5}$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^{-3}	$\approx -0{,}2963$	-1	-8	8	1	$\approx 0{,}2963$
x^{-5}	$\approx -0{,}1317$	-1	-32	32	1	$\approx 0{,}1317$



3.6.3 Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

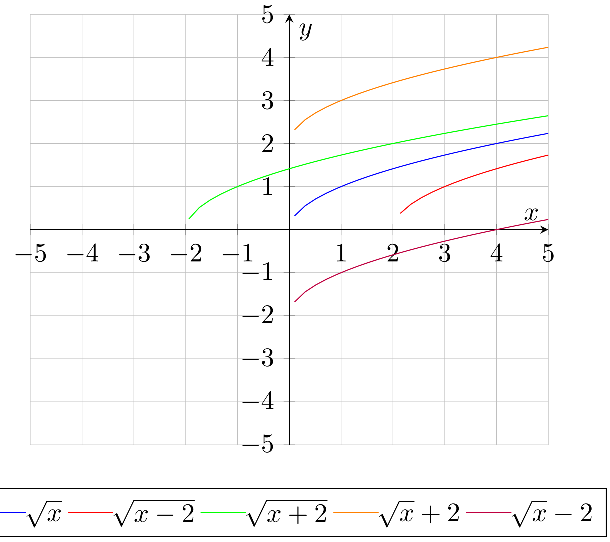
Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten $\boldsymbol{f(x) = x^{-n}}$ haben folgende Eigenschaften:

	n gerade	**n ungerade**
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-ache	punktsymetrisch zum K-Ursprung
Gemeinsame Punkte	$(-1, 1)$,$(1\|1)$	$(-1, -1)$,$(1\|1)$
Asymptoten	x-Achse, y-Achse	x-Achse, y-Achse

3.7 Wurzelfunktion

3.7.1 Definition

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen. Die Eigenschaften der Funktionen unterscheiden sich danach, ob die (Wurzel-)Exponenten gerade oder ungerade sind.

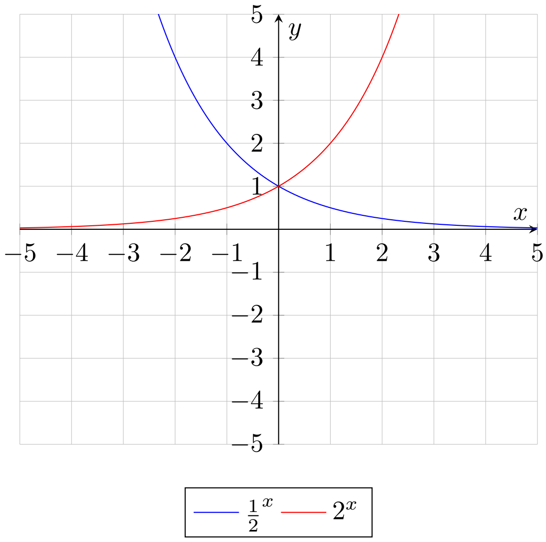


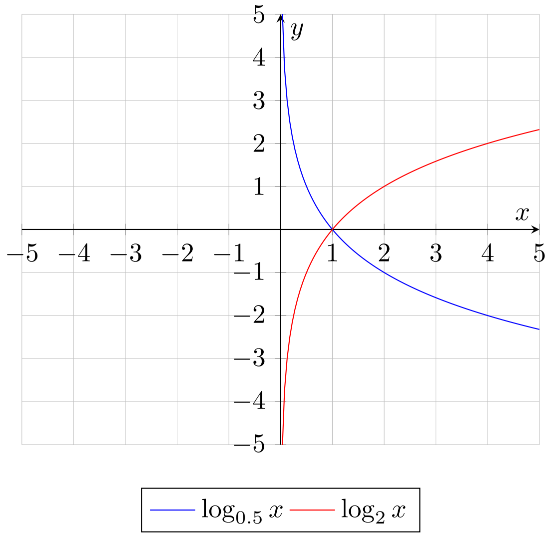
3.8 Exponentialfunktion

3.8.1 Definition

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heisst Exponentialfunktion.

Funktionsgleichung	$f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
Asymptote	$y = 0$ (x-Achse)
Schnittpunkt mit y-Achse	$P(0\|1)$ wegen $f(0) = a^0 = 1$
Schnittpunkte mit x-Achse	Es gibt keine
Monotonie	streng monoton $0 < a < 1$ = fallend $a > 1$ = steigend
Umkehrfunktion	$f(x) = \log_a x$ Logarithmusfunktion





Alle Exponentialkurven verlaufen oberhalb der x-Achse. Alle Exponentialkurven schneiden die y-Achse im Punkt $(0|1)$. $\Longrightarrow$ Laut einem Potenzgesetz gilt nämlich: $a^0 = 1$ Exponentialkurven haben keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

3.9 Logarithmusfunktion

3.9.1 Definition

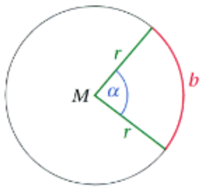
Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \log_a x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heisst Logarithmusfunktion.

Funktionsgleichung	$f(x) = \log_a x$
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Asymptote	$x = 0$ (y-Achse)
Schnittpunkt mit x-Achse	$P(1\|0)$
Schnittpunkte mit y-Achse	Es gibt keine
Monotonie	streng monoton $0 < a < 1$ $=$ fallend $a > 1 =$ steigend

Alle Logarithmuskurven verlaufen rechts von der y-Achse
Alle Logarithmuskurven kommen der y-Achse beliebig nahe. $\Rightarrow$ Die y-Achse ist die senkrechte asymptote der Logarithmuskurve.
Die Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_{\frac{1}{a}}$ und $g(x) = \log_a x$ sind achsensymmetrisch zur x-Achse.

4 Trigonometrie

4.1 Gradmass, Bogenmass

Gradmass	Grösse des Winkels α (β, γ, δ, ...) bezogen auf den Vollwinkel. Ein Winkel mit der Grösse von einem **Grad** ist der 360ste Teil des ebenen Vollwinkels (Schreibweise 1°). Ein Winkel dieser Grösse ergibt sich, indem ein Kreis durch Radien in 360 deckungsgleiche Teile zerlegt wird.
Bogenmass	Grösse des (Zentri-) Winkels α als Verhältnis von Bogenlänge b zu Radius r (bzw. als Masszahl der Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis): $\text{arc}\ \alpha = \hat{\alpha} = \frac{b}{r}$ Ein Winkel hat die Grösse von einem **Radiant** (Schreibweise: 1 rad), wenn b = r gilt (bzw. wenn die Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis den Wert 1 hat). 
Umrechnung	Der Umfang eines Kreises mit Radius r = 1 beträgt 2π. Somit kann man den Bogen b = 2π den vollen Winkel 360° Grad zuordnen. $b : \alpha = 2\pi : 360$ **Umrechnung von Grad- in Bogenmass:** $b = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$ $1° \approx 0.01475$ rad **Umrechnung von Bogen- in Gradmass:** $\alpha = \frac{180° \cdot b}{\pi}$ 1 rad $\approx$ 57,296°

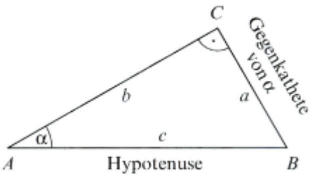
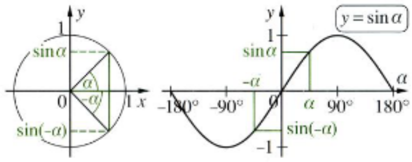
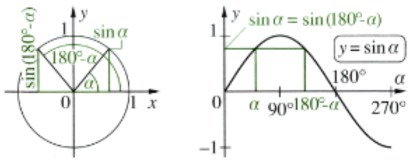
Bogenmass spezieller (im Gradmass gegebener) Winkel

Gradmass	30°	45°	60°	90°	180°	360°	57°17'45"	57.29577°
Bogenmass	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad	1 rad

4.2 Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck

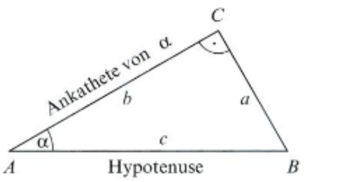
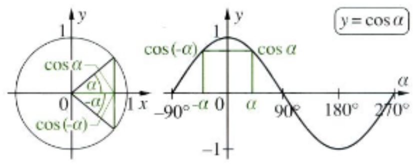
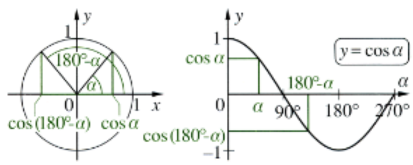
4.2.1 Sinus, Kosekans

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Sinuswert	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Definition des Sinus, Kosekans von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Gegenkathete** von α zur **Hypotenuse** den **Sinus** (sin) von α	$\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\sin(\alpha) = \dfrac{GK}{H} = \dfrac{a}{c}$	
Die **Arkusfunktion Sinus** (arc sin / inv sin) ist die **Umkehrfunktion** von Sinus.	$\alpha = \arcsin\left(\dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}\right)$ $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{GK}{H}\right) = \arcsin\left(\dfrac{a}{c}\right)$	
Der **Kehrwert** von **Sinus** wird als **Kosekans** (csc) bezeichnet.	$\csc(\alpha) = \dfrac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete von } \alpha}$ $\csc(\alpha) = \dfrac{H}{GK} = \dfrac{c}{a}$	

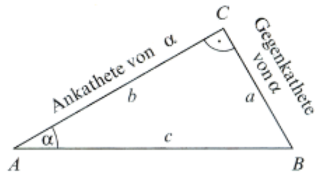
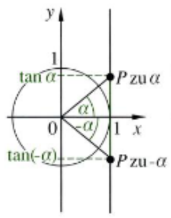
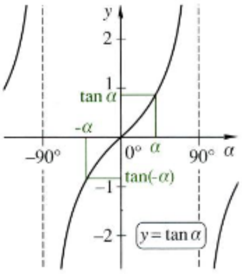
4.2.2 Kosinus, Sekans

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Kosinuswert	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

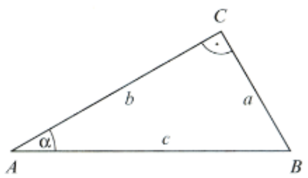
Definition des Kosinus von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Ankathete** von α zur **Hypotenuse** den **Kosinus** (cos) von α	$\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \dfrac{AK}{H} = \dfrac{b}{c}$	
Die **Arkusfunktion Kosinus** (arc cos / inv cos) ist die **Umkehrfunktion** von Kosinus.	$\alpha = \arccos\left(\dfrac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}\right)$ $\alpha = \arccos\left(\dfrac{AK}{H}\right) = \arccos\left(\dfrac{b}{c}\right)$	
Der **Kehrwert** von **Kosinus** wird als **Sekans** (sec) bezeichnet.	$\sec(\alpha) = \dfrac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete von } \alpha}$ $\sec(\alpha) = \dfrac{H}{AK} = \dfrac{b}{c}$	

4.2.3 Tangens, Kotangens

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Tangenswert	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Definition des Tangens von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Gegenkathete** von α zur **Ankathete** den **Tangens** (tan) von α	$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$ $\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK} = \frac{a}{b} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$	
Die **Arkusfunktion Tangens** (arc tan / inv tan) ist die **Umkehrfunktion** von Tangens.	$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}\right)$ $\alpha = \arctan\left(\frac{GK}{AK}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$	 
Der **Kehrwert** von **Tangens** wird als **Kotangens** (cot) bezeichnet.	$\cot(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha}$ $\cot(\alpha) = \frac{AK}{GK} = \frac{b}{a} = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$	

4.2.4 Sinus- Kosinus- und Tangensfunktion am rechtwinkligen Dreieck

Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion	
Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel γ bei C gilt:	
$\boxed{\text{Sinus eines Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\boxed{\text{Kosinus eines Winkels} = \frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$
$\boxed{\text{Tangens eines Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Ankathete des Winkels}}}$	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\tan\beta = \frac{b}{a}$

4.3 Trigonometrische Funktionen am schiefwinkligen Dreieck

4.3.1 Kosinussatz

Wir teilen ein beliebiges Dreieck △ABC durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke und suchen nach einer Beziehung zwischen den Seiten a und b sowie dem Winkel α und β.

Herleitung Sinussatz

Im **roten** Teildreieck gilt:

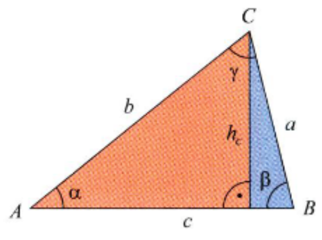
$$\sin(\alpha) = \frac{GK}{H} = \frac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h_c = b \cdot \sin(\alpha)$$

Im **blauen** Teildreieck gilt:

$$\sin(\beta) = \frac{GK}{H} = \frac{h_c}{a} \quad \Rightarrow \quad h_c = a \cdot \sin(\beta)$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \text{const.}$$



Analog kann man mit den beiden anderen Höhen des Dreiecks gleich verfahren.

In jedem beliebigen Dreieck △ABC ist das **Verhältnis** der **Länge einer Seite** zum **Sinus** des **gegenüberliegenden Winkels** gleich dem Durchmesser des Umkreises.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin(\alpha)}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin(\beta)}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{\sin(\gamma)}} = \mathbf{2r}$$

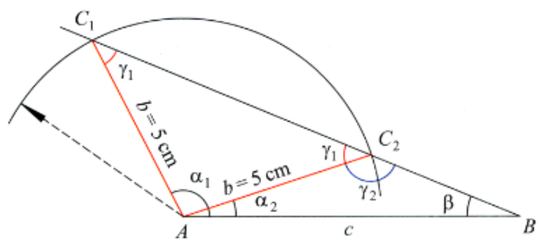
Der Sinussatz kann verwendet werden, wenn zwei Winkel und eine Seite (wsw und wws) gegeben sind. Zudem kann er auch angewandt werden, wenn zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind. (Das entspricht den Gegebenheiten der Kongruenzsätze WSW und SsW, vgl. 1.2.5.)

Liegt bei ssw der Winkel der grösseren Seite gegenüber (Ssw), dann gibt es <u>ein</u> mögliches Dreieck.

Liegt jedoch der Winkel der kleineren Seite gegenüber (sSw), dann gibt es wie beim Konstruieren erkennbar <u>zwei Lösungen</u>.

Der Rechner liefert nur die spitzwinklige ($\alpha < 90°$) Lösung α_1, die stumpfwinklige ($\alpha > 90°$) α_2 kann mit folgender Formel berechnet werden:
$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$.

Musterbeispiel:
Gegeben: Dreieck △ABC mit b = 5cm, c = 8cm und β = 20°
Gesucht: Winkel α und γ



$$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{c \cdot \sin(\beta)}{b}\right) = \arcsin\left(\frac{8 \cdot \sin(20°)}{5}\right) = 33.2°$$

$$\gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 180° - 33.2° = 146.8°$$

4.3.2 Sinussatz

Wir teilen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke und suchen nach einer Beziehung zwischen den Seiten a, b und c sowie dem Winkel α.

Herleitung Kosinussatz

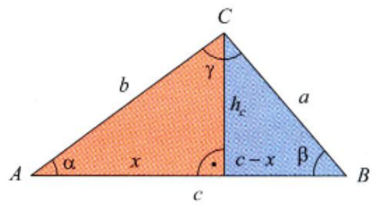
Im **roten** Teildreieck gilt nach Pythagoras:
$b^2 = h_c^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad h_c^2 = b^2 - x^2$

Im **blauen** Teildreieck gilt nach Pythagoras:
$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 \quad \Rightarrow \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$

Gleichsetzen und nach a2 auflösen:
$a^2 - (c-x)^2 = b^2 - x^2$
$a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$
$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

Im **roten** Teildreieck gilt weiter:
$\cos(\alpha) = \frac{AK}{H} = \frac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad x = b \cdot \cos(\alpha)$

Durch einsetzten erhalten wir:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$



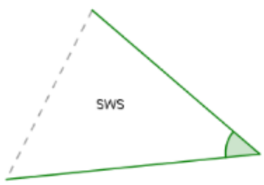
Analog kann man mit den beiden anderen Höhen des Dreiecks gleich verfahren.

In jedem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ ist das **Quadrat** der **Länge einer Seite** aus dem **gegenüberliegenden Winkel** und den **anliegenden Seiten** berechenbar.

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)}$$
$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \qquad \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Den Kosinussatz können wir verwenden, wenn zwei Seiten und der dazwischenliegende Winkel (sws) oder drei Seiten gegeben sind (sss).



Der Kosinussatz gilt auch dann, wenn der jeweilige Winkel grösser als 90°, also ein stumpfer Winkel ist.

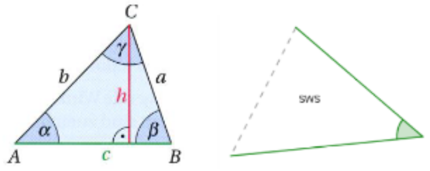
4.3.3 Flaechensatz

Flächensatz

Kennt man von einem Dreieck die beiden Seiten b und c sowie den dazwischen liegenden Winkel α, so ist der Flächeninhalt A der Dreiecksfläche gegeben durch:

$$\mathbf{A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)}$$

Die Gleichung gilt auch für stumpfe Winkel $\alpha \in]90°; 180]$. ($90° < \alpha \leq 180°$)



4.3.4 Berechnung am Kreissektor (auch Kreisausschnitt)

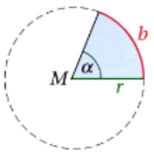
Berechnung am Kreissektor (auch Kreisausschnitt)

Zur Berechnung der Bogenlänge oder der Sektor-Fläche kann das Bogenmass verwendet werden. Wir bezeichnen den Winkel im Bogenmass mit $\widehat{\varphi}$.

Wir können nun die bekannten Formeln auch im Bogenmass angeben, wenn wir die Umrechnungsformel $\widehat{\varphi} = \frac{\pi \cdot \varphi}{180°}$ verwenden und einsetzen.

$$\mathbf{b = \frac{r \cdot \pi \cdot \varphi}{180°} = \widehat{\varphi} \cdot r}$$

$$\mathbf{A_{Sektor} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°} = \frac{r^2 \cdot \widehat{\varphi}}{2} = \frac{b \cdot r}{2}}$$



4.3.5 Kreissegment (auch Kreisabschnitt)

Flächensatz

Durch den Flächensatz (vgl. 3.4.3) gilt:

$$A_{Dreieck} = \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin(\varphi)$$

Berechnung des Kreissektors (vgl. 3.4.4):

$$A_{Sektor} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°}$$

Kreissegment:

$$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{Dreieck}$$

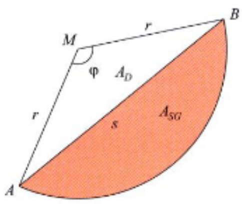
$$A_{SG} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°} - \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\varphi)$$

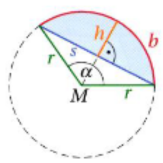
$$A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \varphi}{180°} - \sin(\varphi)\right)$$

Der Flächeninhalt der **Segmentfläche** $\mathbf{A_{SG}}$ kann aus dem **Radius r** und dem **Zentriwinkel** $\boldsymbol{\varphi}$ berechnet werden:

$$\mathbf{A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \varphi}{180°} - \sin(\varphi)\right)}$$

$$\mathbf{A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot (\widehat{\varphi} - \sin(\widehat{\varphi}))}$$





4.4 Einheitskreis

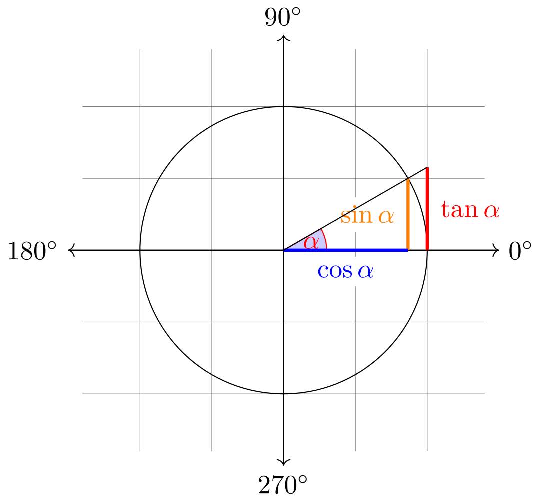
4.4.1 Definition

Der Einheitskreis ist ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius r = 1 Längeneinheit.

4.4.2 Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen (Phytagoras am Einheitskreis)

Pythagoras am Einheitskreis:

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$



Ähnlichkeiten am Einheitskreis:

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

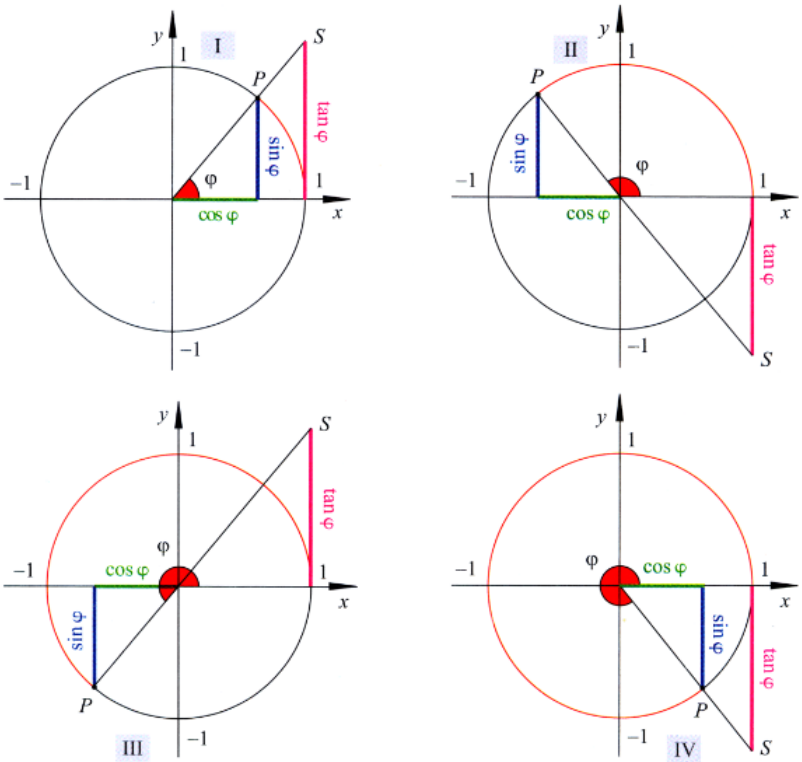
$$\cot(a) = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$$

$$\tan(a) + \cot(a) = 1$$

	$\mathbf{sin}(a)$	$\mathbf{cos}(a)$	$\mathbf{tan}(a)$	$\mathbf{cot}(a)$
$\mathbf{sin}(a)$		$\sqrt{1-\cos^2(a)}$	$\frac{\tan(a)}{\sqrt{1+\tan^2(a)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(a)}}$
$\mathbf{cos}(a)$	$\sqrt{1-\sin^2(a)}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(a)}}$	$\frac{\cot(a)}{\sqrt{1+\cot^2(a)}}$
$\mathbf{tan}(a)$	$\frac{\sin(a)}{\sqrt{1-\sin^2(a)}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2(a)}}{\cos(a)}$		$\frac{1}{\cot(a)}$
$\mathbf{cot}(a)$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2(a)}}{\sin(a)}$	$\frac{\cos(a)}{\sqrt{1-\cos^2(a)}}$	$\frac{1}{\tan(a)}$	

4.4.3 Vorzeichen der Trigonometrischen Funktionen

Wenn wir den Punkt P auf der Kreislinie rotieren lassen, können wir herausfinden, welche Vorzeichen die Funktionswerte in den Quadranten I bis IV, das heisst für Winkel zwischen 0° und 360°, haben.



Quadrant	Intervall	sin (φ)	cos (φ)	tan (φ)
I	0° < φ < 90°	+	+	+
II	90° < φ < 180°	+	−	−
III	180° < φ < 270°	−	−	+
IV	270° < φ < 360°	−	+	−

4.5 Eigenschaften der Funktionen

	Sinus	Kosinus	Tangens
Definitionsbereich	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ or $(-\infty, +\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ or $(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Wertebereich	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
Periodizität	2π	2π	π
Symmetrie	Punktsymetrisch zum Ursprung: Ungerade Funktion $\sin(-x) = -\sin(x)$	Symetrisch zur y-Achse: gerade Funktion $\cos(x) = \cos(-x)$	Punktsymetrisch zum Ursprung: Ungerade Funktion $\tan(-x) = -\tan(x)$
Symmetrieachsen	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; k \in Z$	$x = k \cdot \pi \; k \in Z$	$k \cdot \pi$
Nullstellen	$x_k = k \cdot \pi \; k \in \mathbb{Z}$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; k \in \mathbb{Z} \; k \in \mathbb{Z}$	$x_k = k \cdot \pi \; k \in \mathbb{Z}$
Maxima	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$x_k = k \cdot 2\pi$	
Minima	$x_k = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$x_k = \pi + k \cdot 2\pi$	
Es gilt	$\sin(x) = (\cos(x - \frac{\pi}{2}))$	$\cos(x) = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))$	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

4.6 Transformation der Sinusfunktion

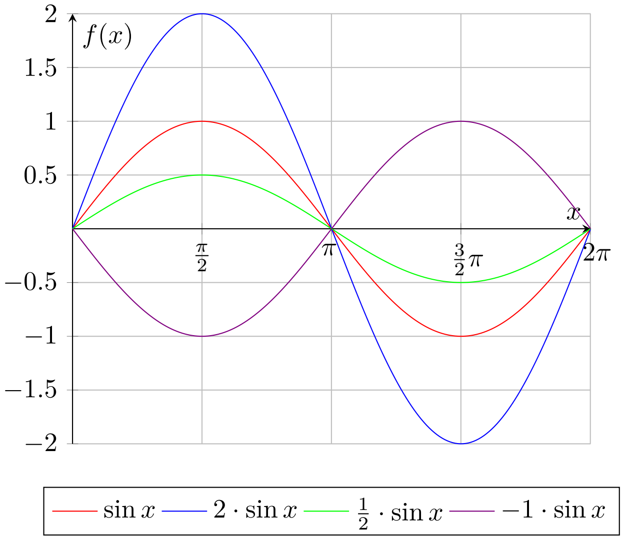
4.6.1 Allgemeine Sinusfunktion

Die allgemeine Sinusfunktion ist folgendermassen definiert:

$$y = a \cdot \sin(b \cdot (x + u)) + v$$

4.6.2 Strecken und Stauchen auf y-Achse

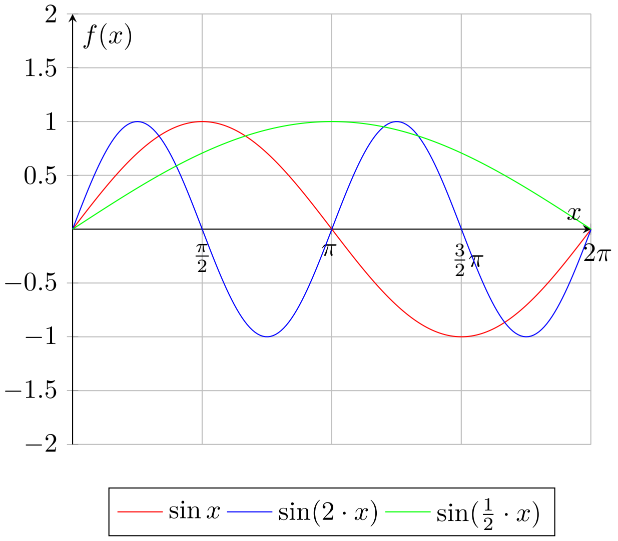
Parameter a: Strecken / Stauchen auf y-Achse (Amplitude): $y = a \cdot \sin(x)\ a \in \mathbb{R}_0$



$\|a\| > 1$	$0 < \|a\| < 1$	$\|a\| < 0$
Streckung	Stauchung	Spiegelung an x-Achse

4.6.3 Strecken und Stauchen auf x-Achse

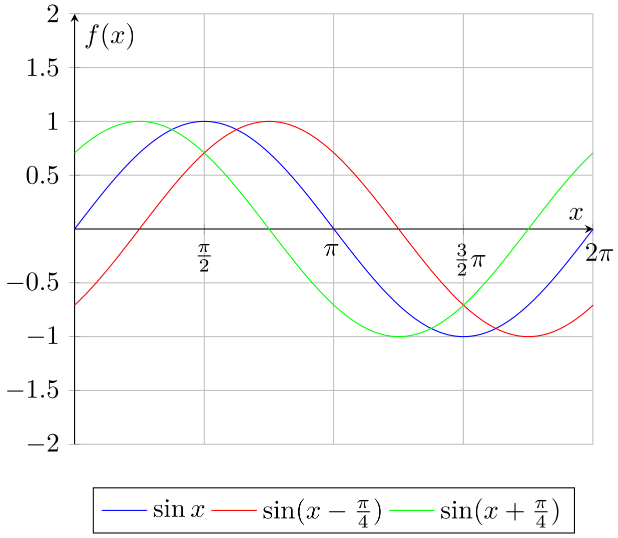
Parameter b: Strecken / Stauchen auf x-Achse: $y = sin(b \cdot x)$ $b \in \mathbb{R}^+$



$b > 1$	$0 < b < 1$
Stauchung in x-Richtung um den Faktor b. (kleinere Periode, höhere Frequenz)	Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{b}$.(grössere Periode, kleinere Frequenz)

4.6.4 Schieben in x-Richtung

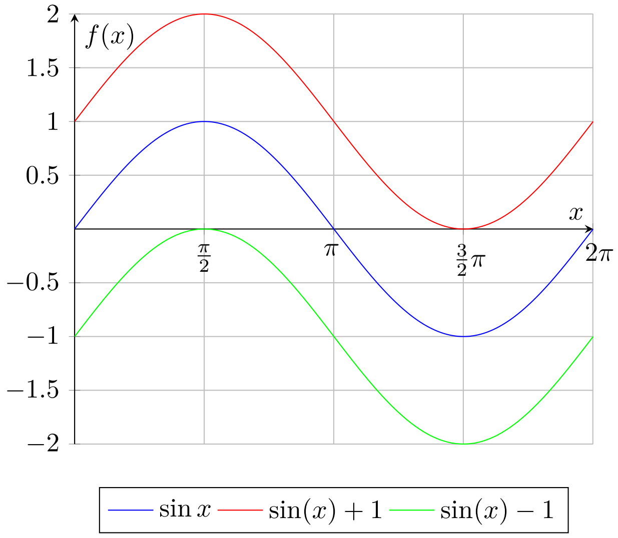
Parameter u: Schieben in x-Richtung: $y = \sin(x + u)\ u \in \mathbb{R}$



$u > 1$	$u < 0$
Verschiebung nach links.	Verschiebung nach rechts.

4.6.5 Schieben in y-Richtung

Parameter v: Schieben in y-Richtung: $y = a \cdot \sin(x) + v\ v \in \mathbb{R}$



$v > 1$	$v < 0$
Verschiebung nach oben.	Verschiebung nach unten.

5 Goniometrie

5.0.1 Identitäten

Kofunktionen

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$$
$$\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$$
$$\sec(\frac{\pi}{2} - x) = \csc x$$
$$\csc(\frac{\pi}{2} - x) = \sec x$$

Symmetrie

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

Doppelter Winkel

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Halber Winkel

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Exponent Reduktion

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\sin^4 x = (\frac{1-\cos 2x}{2})^2$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\cos^4 x = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$
$$\tan^4 x = (\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x})^2$$

Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Umkehrwert

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Summe und Differenz von Winkel

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$

Produkt zu Summe

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$
$$\tan x\tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$$
$$\tan x\cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y}$$

Summe Zu Produkt

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$
$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

Additionstheoreme
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$
$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$ $\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)+1}{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}$

Winkelfunktionen des dreifachen Winkels
$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha+\alpha)$ $\sin(3\alpha) = 3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot\sin^3(\alpha)$
$\cos(3\alpha) = 4\cdot\cos^3(\alpha) - 3\cdot\cos(\alpha)$
$\tan(3\alpha) = \frac{3\cdot\tan(\alpha)-\tan^3(\alpha)}{1-3\cdot\tan^2(\alpha)}$

6 Vektorgeometrie

6.1 Grunddefinitionen

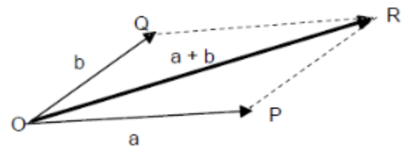
Vektor:
Ein Vektor ist festgelegt durch eine Laenge (Groesse) und eine Richtung.
Freie Vektoren: Sie beschreiben Merkmale, bei denen es nur auf Groesse und Richtung ankommt
Ortsvektoren: Sie beschreiben Merkmale, bei denen es auf Groesse, Richtung und Anfangspunkt ankommt
Unter einem Ortsvektor $\vec{v}$ versteht man eine Strecke, bei der der eine der beiden Begrenzungspunkte als Anfangspunkt P, der andere Endpunkt Q festgelegt ist. Man schreibt $\vec{v} = \vec{PQ}$

6.2 Grundrechenarten

6.2.1 Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren

Es seien $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OQ}$ zwei Vektoren. Dann setzt man $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{OR}}$ wobei R der 4. Eckpunkt des Parallelogramms mit den weiteren Ecken O, P, Q ist.



Rechengesetze	
Kommutativgesetz	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
Assoziativgesetz	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
Neutralelement	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
Inverselement	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ und $(-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

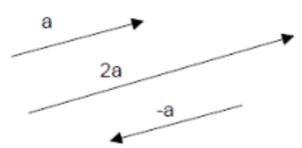
6.2.2 Multiplikation mit einer Zahl

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Der **Betrag** einer Zahl a

$$|a| = \begin{cases} a, & für\ a < 0 \\ 0, & für\ a = 0 \\ -a, & für\ a \geq 0 \end{cases}$$

r · $\vec{a}$ = r-facher Vektor $\vec{a}$



r > 0: $r \cdot \vec{a} = \text{r} -$ facher Vektor $\vec{a}$ mit gleicher Richtung und Orientierung wie $\vec{a}$
r = 0: $r \cdot \vec{a} = 0 \cdot a = \vec{0}$
r < 0: $r \cdot \vec{a} = |r| \cdot -$facher a mit umgekerhter Orientierung wie $\vec{a}$

Rechengesetze	
I)	$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$
II)	$(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$
III)	$(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$
IV)	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
V)	$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

6.2.3 Skalarprodukt

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ wird das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wie folgt definiert.

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}| \cdot \cos(\boldsymbol{\varphi})$$

Wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ergibt eine Zahl (ein Skalar).

Rechengesetze	
I)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
II)	$(r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b})$
III)	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ und $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
IV)	$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$
V)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander oder mindestens einer der beiden Vektoren ist der Nullvektor.

Auf den Winkel aufgelöst:

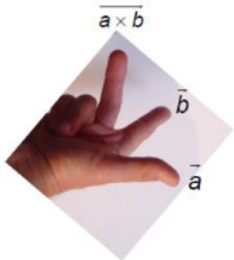
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{resp.} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \quad \text{resp.} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right)$$

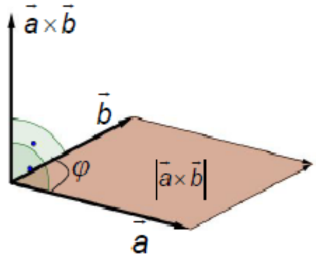
6.2.4 Vektorprodukt

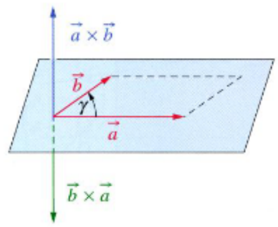
Das Vektorprodukt $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ der Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist ein **Vektor** mit den 3 folgenden Eigenschaften:

I) Richtung:	$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.
II) Orientierung:	$\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein „Rechtssystem“.
III) Betrag:	$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\varphi$ Wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

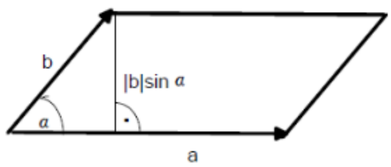
Das Vektorprodukt von 2 Vektoren ist ein Vektor mit 3 speziellen Eigenschaften.







Rechengesetze	
I)	$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ („Anti KG“)
II)	$(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (r \cdot \vec{b})$
III)	$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ und $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
IV)	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel, oder mindestens einer der beiden Vektoren ist der Nullvektor.
V)	$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
VI)	$\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$

Geometrische Interpretation des Vektorproduktes	
Die **Länge** (resp. der Betrag) des **Vektors $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$** entspricht der **Fläche** des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten **Parallelogramms**.	

6.2.5 Betrag eines Vektors

Die Laenge eines Vektors heisst Betrag des Vektors.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

6.2.6 Einheitsvektor

Ein Vektor der Laenge heisst Einheitsvektor.
Die Formel für die Berechnung des Einheitsvektors $\vec{a}^0$ lautet:

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|a|}\vec{a}$$

6.3 Normalform

6.3.1 Normalform einer Gerade

Eine Gerade laesst sich lediglich im $\mathbb{R}^2$ in Normalenform darstellen, weil es im $\mathbb{R}^3$ keinen eindeutigen Normalenvektor gibt.

$$g\colon\ \vec{n} \circ [\vec{x} - \vec{a}] = 0$$

- $\vec{g}$: Bezeichnung der Gerade
- $\vec{n}$: Normalenvektor (Vektor, der senkrecht auf der Gerade steht)
- $\vec{a}$: Aufpunkt (oder: Stuetzvektor)

6.3.2 Normalform einer Ebene

$$E\colon\ \vec{n} \circ [\vec{x} - \vec{a}] = 0$$

- $\vec{E}$: Bezeichnung der Ebene
- $\vec{n}$: Normalenvektor (Vektor, der senkrecht auf der Gerade steht)
- $\vec{a}$: Aufpunkt (oder: Stuetzvektor)

6.3.3 Hessesche Normalform einer Gerade

$$g\colon\ \vec{n}_0 \circ [\vec{x} - \vec{a}] = 0$$

- $\vec{n}$: Normalenvektor (Vektor, der auf einer Gerade senkrecht steht)
- $\vec{n}_0$: Normierter Normalenvektor (Normalenvektor der Länge 1) $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$
- $|\vec{n}|$: Laenge des Normalenvektors
- $\vec{a}$: Aufpunkt (oder: Stuetzvektor)

Gegeben sei die Gerade g in Normalenform mit

$$g\colon\ \vec{n} \circ [\vec{x} - \vec{a}] = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Länge des Normalenvektors berechnen:

$$|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Gerade in Hessescher Normalform aufstellen

$$g\colon\ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \circ [\vec{x} - \vec{a}] = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Oder Gegeben sei die Gerade n in Koordinatenform mit:

$$g\colon\ 4x_1 - 3x_2 - 5 = 0$$

Normalenvektor aus Koordinatenform herauslesen
Die Koordinaten des Normalenvektors entsprechen den Koeffizienten von x_1 und x_2 in der Koordinatenform.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Laenge des Normalenvektors berechnen

$$|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Gerade in Hessescher Normalform aufstellen

$$g\colon\ \frac{1}{5} \cdot [4x_1 - 3x_2 - 5] = 0$$

6.3.4 Hessesche Normalform einer Ebene

$$E\colon\ \vec{n}_0 \circ [\vec{x} - \vec{a}] = 0$$

- $\vec{n}$: Normalenvektor (Vektor, der auf einer Ebene senkrecht steht)
- $\vec{n}_0$: Normierter Normalenvektor (Normalenvektor der Länge 1) $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$
- $|\vec{n}|$: Laenge des Normalenvektors
- $\vec{a}$: Aufpunkt (oder: Stuetzvektor)

Gegeben sei die Ebene E in Normalenform mit

$$E\colon\ \vec{n} \circ [\vec{x} - \vec{a}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Laenge des Normalenvektors berechnen

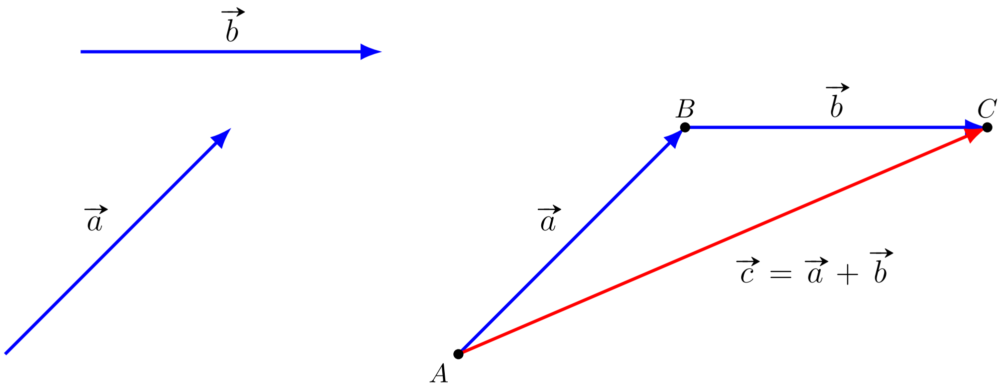
$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Ebene in Hessescher Normalform aufstellen

$$E\colon\ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \circ [\vec{x} - \vec{a}] = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

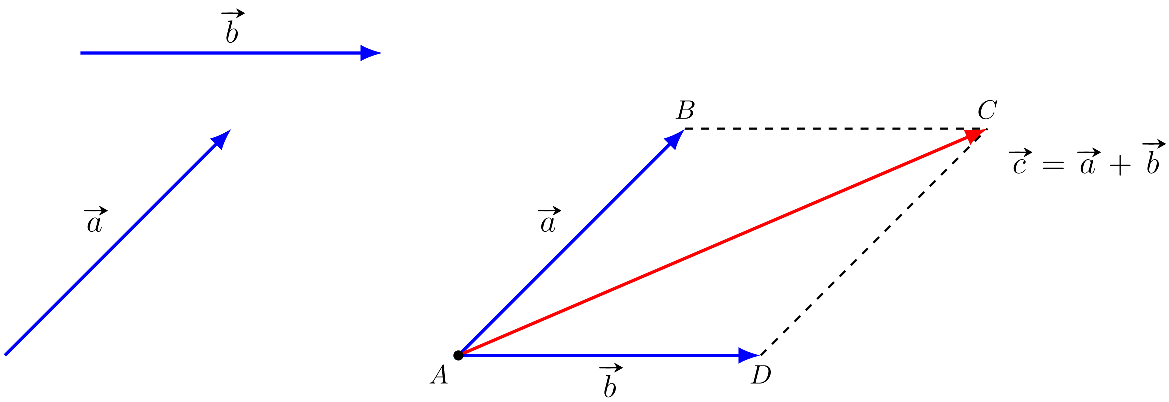
6.4 Rechnen mit Vektoren

6.4.1 Dreiecksgleichung



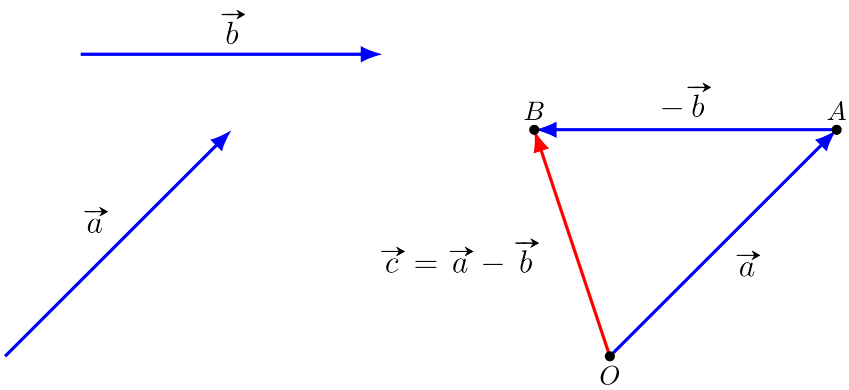
6.4.2 Addition von Vektoren

Es seien $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ zwei Vektoren. Dann setzt man $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ wobei C der 4. Eckpunkt des Parallelograms ist.



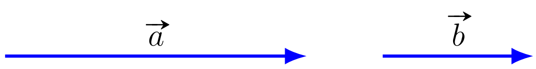
Kommunativgestez: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
Assoziativgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

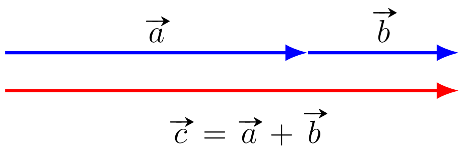
6.4.3 Vektor Subtrahieren



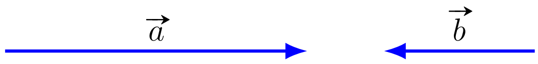
6.5 Vektorenvergleich

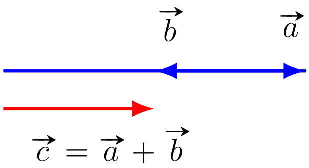
6.5.1 Gleiche Richtung



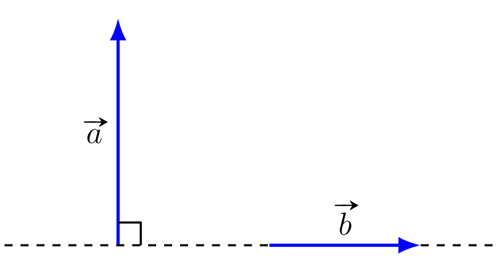


6.5.2 Entgegengesetzte Richtung

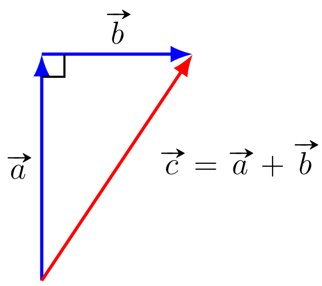




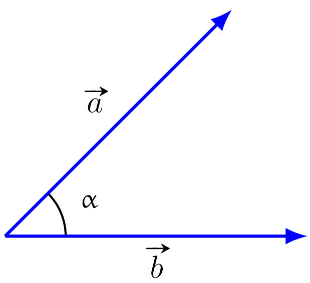
6.5.3 Senkrechter Vektor



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$



6.5.4 Vektoren in einem beliebigen Winkel



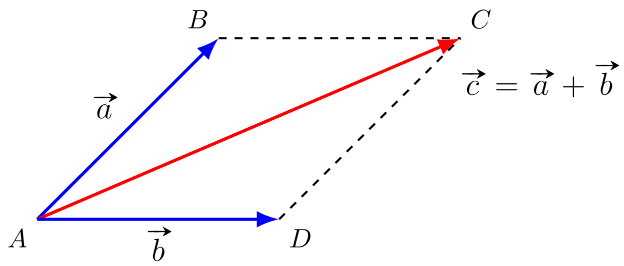
$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

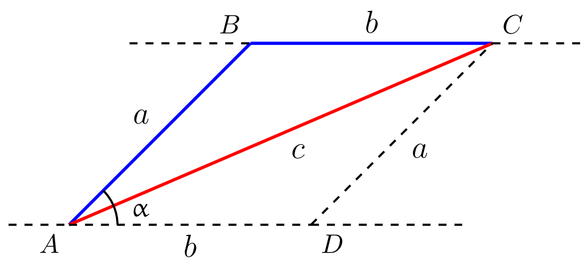
$\vec{a} \circ \vec{b}$: Skalarprodukt

$|\vec{a}| \left|\vec{b}\right|$: Längen der Vektoren

$\cos \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \cos \alpha$: Kosinus des Winkels

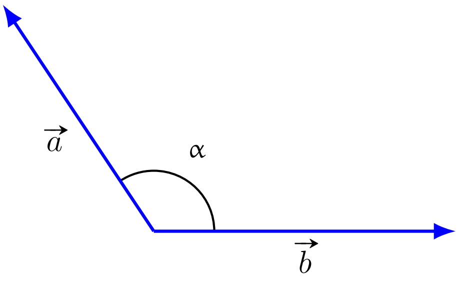
6.5.5 Spitzer Winkel zwischen Vektoren

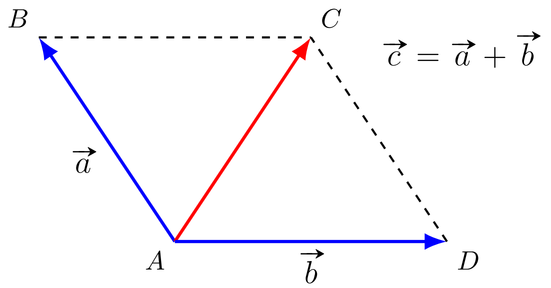


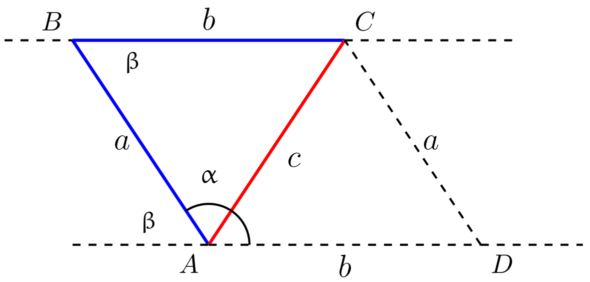


$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$

6.5.6 Stumpfer Winkel zwischen Vektoren



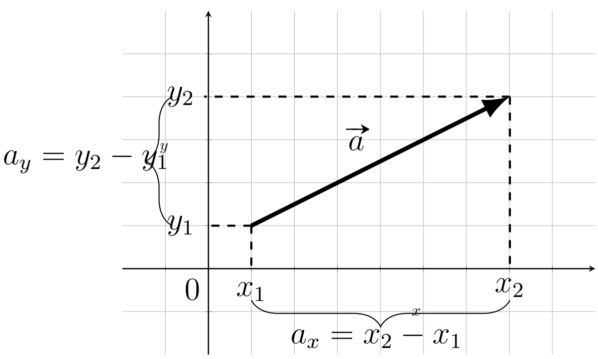




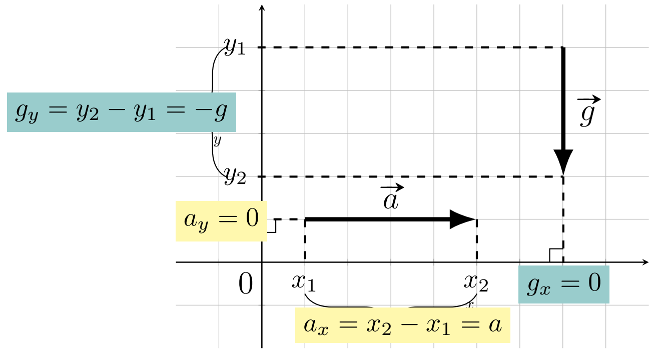
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

6.6 Vektoren im Koordinatensystem

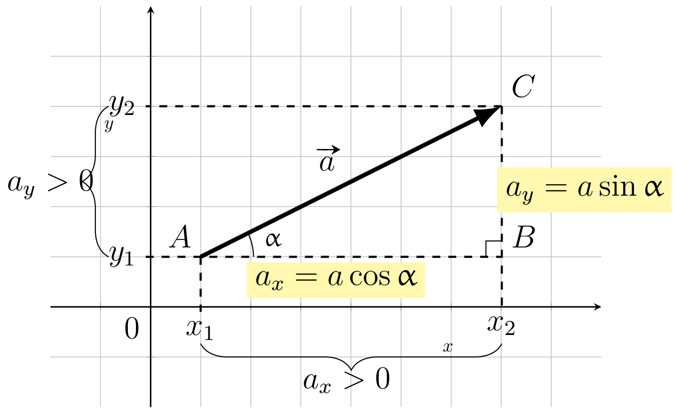
6.6.1 Beziehungen zwischen Anfang und End Koordinaten

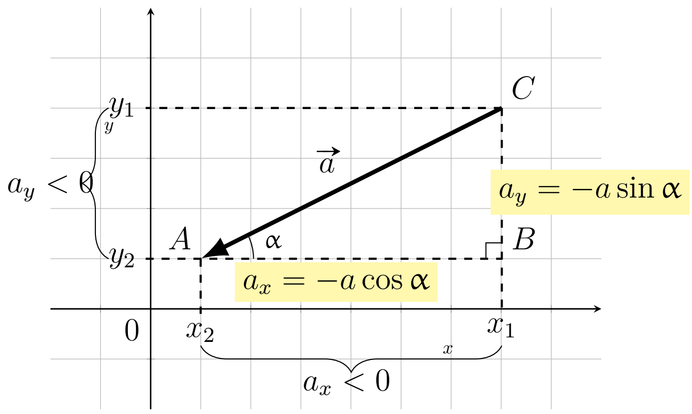


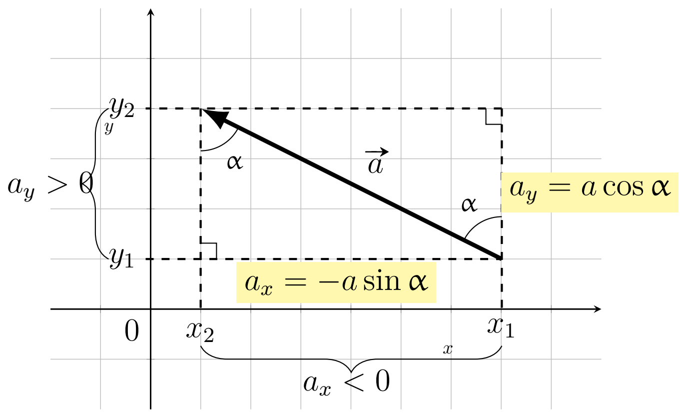
6.6.2 Der Vektor ist parallel oder senkrecht zur Koordinatenachse



6.6.3 Der Vektor ist in einem beliebigen Winkel zur Koordinatenachse gerichtet







6.7 Diverses

6.7.1 Lineare Abhängigkeit zweier Vektoren

Zwei Vektoren heißen linear abhängig, wenn es zwei Zahlen λ_1 und λ_2 gibt, die nicht beide Null sind, so dass gilt: $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} = \vec{0}$

Verfahren 1

Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie Vielfache voneinander sind.

Verfahren 2

Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Determinante gleich Null ist.

Determinate $= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$

Eigenschaften

Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.
Mehr als zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig.

Begründung: Der $\mathbb{R}^2$ ist definiert als ein Vektorraum, der durch zwei linear unabhängige, also nicht parallele Vektoren aufgespannt wird. Diese zwei Vektoren nennt man Basis des Vektorraums. Meist verwendet man die sog. Standardbasis (kanonische Basis):

6.7.2 Lineare Abhängigkeit dreier Vektoren

Drei Vektoren heißen linear abhängig, wenn es drei Zahlen λ_1 λ_2 und λ_3 gibt, die nicht alle gleich Null sind, so dass gilt: $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$

Oder: Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt.

Verfahren 1

Drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn die Anwendung des Gauß-Algorithmus zu einer Nullzeile führt.

Verfahren 2 Drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Determinante gleich Null ist.

$$\text{Determinante} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$

Eigenschaften

Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.

Drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen – dort können sie untereinander auch parallel sein.

Mehr als drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig.

6.8 Punkt Gerade Ebene Berechnungen

6.8.1 Liegt Punkt auf Gerade oder Ebene?

Generell muss man bei diesem Problem folgendes haben: Einen Punkt (X;Y;Z), eine Gerade in Hessesche Normalform und eine Ebene (Koordinatform oder Hessesche Normalform).

Um zu testen ob der Punkt auf der Geraden liegt setzt man den Punkt in die Hessesche Normalforn $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ und erstellt dann 3 Gleichungen um die Variable der Gerade zu erhalten.

Setze die Variable von einer dieser Gleichung in die anderen 2 Gleichungen ein um zu testen ob es funktioniert.

Um zu testen ob der Punkt auf der Ebene liegt kann man den Punkt in die koordinaten Ebene einsetzen und gleich Null stellen.

7 Gut Glück Kätzchen

Für Emotionale Unterstützung während der Prüfung.