Algebra HSLU Kevin Häusler

Zahlen und Logik

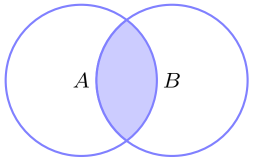
Zahlen

*	Bedeutung	Beispiel
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen = ganze Positive	{1;2;3;}
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen mit 0	{0;1;2;}
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen = N + ganze Negative	{-1;0;1;}
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen = Bruchzahlen	$\frac{3}{7}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{3}$
	Irrationale Zahlen = Nachkommastellen	0.3281
$\mathbb{R}$	Reele Zahlen = Q + Irrationale Zahlen	Alle

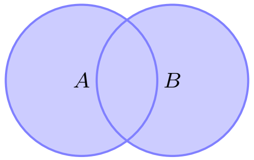
Mengen Operationen

*	Bedeutung
$\varnothing$ oder {}	Leere Menge, enthält keine Elemente
$x \in A$	Beschreibt Element x ist in Menge A
$x \notin A$	Beschreibt Element x ist nicht in Menge A
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge von B
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsgsmenge von A und B
$A \setminus B$	Differenzbildung, Menge von A ohne B

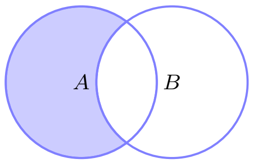
$A \cap B$



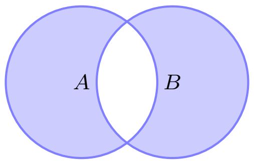
$A \cup B$



$A \setminus B$



$\overline{A \cap B}$



Aussagenlogik

Term: Ein Term ist eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern. Ein Term hat keinen Wahrheitsgehalt, ist also weder wahr noch falsch.

Aussage: Eine Aussage beschreibt durch Worte oder Zeichen einen Sachverhalt. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Aussageform: Jeder sprachliche oder zeichensymbolische Ausdruck mit wenigstens einer Variablen wenn er durch jede sinnvolle Belegung der Variablen jeweils eine Aussage wird.

*	Bedeutung	Beispiel
$\vert A\vert$	Kardinalität/Mächtigkeit beschreibt Anzahl Elemente einer Menge	A = {1;2} $\vert A\vert$ = 2
$\wedge$	Konkuktion/UND $A \wedge B$ = Wahr wenn A und B beide Wahr sind	$A \wedge B$ A, B = W
$\vee$	Disjunktion/ODER $A \vee B$ = Wahr wenn A oder B jeweils Wahr ist	{-1;0;1;}
$\neg$	Negation A = Wahr $\neg$A = Falsch	$\neg$A
$\Longrightarrow$	Implikation: Daraus folgt	
$\Longleftrightarrow$	Äquivalenz A $\Longleftrightarrow$ B wenn beide wahr oder falsch sind	
$\forall$	Für Alle	$\forall\, x \in \mathbb{N}$
$\exists$	Es Existiert	$\exists\, x \in \mathbb{N}$

A	B	A	$\wedge$	B	A	$\vee$	B	$\neg$	B	A	$\vee$	$\neg$	B
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	T	T	F	T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T	T	F

Summe und Produkte

Summezeichen:
Es sei: n, k $\in$ Z und n $\geq$ k

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

k heisst Laufvariable, Laufindex oder Summationsvariable
1 heisst Startwert oder untere Grenze
n heisst Endwert oder obere Grenze
a_k ist die Funktion bezüglich der Laufvariable

Beispiel: $\sum_{k=1}^{5} k^2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25\\ &= 55\end{aligned}$$

Produktzeichen:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

k heisst Laufvariable oder Laufindex
1 heisst Startwert oder untere Grenze
n heisst Endwert oder obere Grenze
a_k ist die Funktion bezüglich der Laufvariable

Beispiel: $\prod_{k=1}^{5} k^2$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{5} k^2 &= 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2\\ &= 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25\\ &= 14400\end{aligned}$$

Gleichungen

Gleichungen Lösen
Jede Zahl aus der Definitionsmenge, die beim Einsetzen für x zu einer wahren Aussage führt, heisst Lösung der Gleichung.
Grundmenge, Definitionsbereich $\mathbb{D}$
Die Menge aus der die Lösungen stammen dürfen.
Lösungsvariable
Variable nach der aufgelöst wird.
Formvariablen, Parameter
Alle anderen Variablen.
Lösungsmenge
Menge aller Elemente aus der Definitionsmenge, die zu einer wahren Aussage führen.
Äquivalenz
Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn beim Ersetzen der Variablen durch die gleichen Elemente der "gemeinsamen" Definitonsmenge entweder beide in eine wahre oder falsche Aussage übergehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}4(x+1{,}5) &= 9x - 6 - 7x && \mid \text{Terme vereinfachen}\\ 4x + 6 &= 2x - 6 && \mid -2x\\ 4x - 2x + 6 &= 2x - 2x - 6\\ 2x + 6 &= -6 && \mid -6\\ 2x - 6 &= -6 - 6\\ 2x &= -12 && \mid :2\\ \frac{2x}{2} &= \frac{-12}{2}\\ x &= -6 && \mid \text{Lösungsmenge ablesen}\end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen

Umformungen einer Gleichung, bei denen die Lösungsmenge gleich bleibt, heißen Äquivalenzumformungen.

Folgende Äquivalenzumformungen sind möglich:

1. Termunformungen
$2x + 5 - 3 = 0 \iff 2x + 2 = 0$
2. Add./Sub.. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten
3. Mult./Div. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten
Achtung: Ausser mit 0
4. Beidseitige Add./Sub. mit dem gleichen Term
5. Beidseitige Mult./Div. mit dem gleichen Term

Lineare Gleichungen

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $ax + b = 0$ bringen lässt, heisst lineare Gleichung. Wir können lineare Gleichungen daran erkennen, dass die Variable nur in der 1. Potenz auftritt – also kein x^2,x^3 , ... enthalten.

Beispiel Lösung einer linearen Gleichung

$$\begin{aligned} 2(2x-1) &= 3(x+1) && \mid \text{Ausmultiplizieren} \\ 4x - 2 &= 3x + 3 && \mid -3x \\ x - 2 &= 3 && \mid +2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{5\}$

Quadratische Gleichungen

Gleichungen, die sich durch Äquivalenzumformungen auf die Form $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ bringen lassen, heißen quadratische Gleichungen. Wir können quadratische Gleichungen daran erkennen, dass die Variable x in der 2. Potenz x^2, aber in keiner höheren Potenz vorkommt. Es gibt 4 Arten/Formen von Quadratischen Gleichungen.

Beispiel Lösung einer Reinquadratische Gleichung

$ax^2 = 0$: Reinquadratische Gleichungen ohne Absolutglied besitzen als einzige Lösung die Null.

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 && \mid \sqrt{\ } \\ \sqrt{x^2} &= \pm\sqrt{0} \\ x &= \pm 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = 0$

Beispiel Lösung einer Reinquadratische Gleichung mit Absolutglied

$x^2 - 9 = 0$ Gleichung nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 && \mid +9 \\ x^2 - 9 + 9 &= 0 + 9 \\ x^2 &= 9 \end{aligned}$$

Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 && \mid \sqrt{\ } \\ \sqrt{x^2} &= \pm\sqrt{9} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Fall Unterscheidung:
$x_2 = 3$, $x_2 = -3$
Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

Beispiel Lösung einer Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied

Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied lösen wir folgendermaßen:
$-2x^2 + 4x = 0$ Quadratische Gleichung in Normalform bringen:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x &= 0 && \mid :(-2) \\ \frac{-2x^2 + 4x}{-2} &= \frac{0}{-2} \\ \frac{-2x^2}{-2} + \frac{4x}{-2} &= \frac{0}{-2} \\ x^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

x ausklammern:

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

Faktoren gleich Null setzen:

$$\underbrace{x}_{=0} \cdot \underbrace{(x-2)}_{=0} = 0$$

Gleichungen nach x auflösen:
1. Faktor: x = 0
2. Faktor:

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 && \mid +2 \\ x - 2 + 2 &= 0 + 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{0; 2\}$

Mitternachtsformel

Gemischtquadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit Absolutglied lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fallunterscheidung:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Regeln

Wenn das lineare Glied fehlt, gilt b = 0.
Wenn das absolute Glied fehlt, gilt c = 0.
Wenn das x^2 allein steht, gilt a = 0 (wegen $1 \cdot x^2 = x^2$). Wenn das x allein steht, gilt (wegen $1 \cdot x = x$).

Lösen einer Quadratischen Gleichung mit Mitternachtsformel

$2x^2 - 8x + 8 = 0$ a, b und c aus der allgemeinen Form herauslesen:

a = 2, b = -8 und c = 8

a, b und c in die Mitternachtsformel einsetzen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} \end{aligned}$$

Lösungen berechnen:

$$\begin{aligned} &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{\boxed{0}}}{4} \qquad \text{Wenn } b^2 - 4ac = 0 ... \\ &= \frac{8 \pm 0}{4} \\ &= \frac{8}{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Lösungsmenge angeben:

$\mathbb{L} = \{2\}$ ...dann gibt es eine Lösung!

Bruchgleichung

Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung mit mindestens einem Bruchterm, in dem die Variable x im Nenner vorkommt.

Lösen einer Bruchgleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$$

Definitionsmenge bestimmen:
Wann wird der Nenner des Bruchs gleich Null?

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Für wird der Nenner gleich Null. Daraus folgt:

1. Nenner x = 0, 2. Nenner $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$
Defintionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

Gleichung nach x auflösen. Brüche auf eine Seite bringen:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = 0$$

Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x}{x} = 0$$

$$\frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{2x}{x(x+1)} = 0$$

$$\frac{(x+1) - 2x}{x(x+1)} = 0$$

$$\frac{-x+1}{x(x+1)} = 0$$

Mit dem Hauptnenner multiplizieren, um den Bruch zu beseitigen:

$$\frac{-x+1}{x(x+1)} \cdot x(x+1) = 0 \cdot x(x+1)$$

$$\frac{-x+1}{\cancel{x(x+1)}} \cdot \cancel{x(x+1)} = 0$$

$$-x + 1 = 0$$

Nach x auflösen:

$$-x + 1 = 0 \qquad | + x$$

Prüfen, ob der x-Wert in der Definitionsmenge enthalten ist:
Da x = 1 in der Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ liegt, haben wir eine gültige Lösung berechnet.

Kehrwert

Den Kehrwert eines Bruchs erhält man durch Vertauschen von Zähler und Nenner.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{2}$$

Umschreiben zu: $x = 0{,}5x + 0{,}5$ und auflösen zu $0{,}5x = 0{,}5 \qquad | \cdot 2$
$\Rightarrow x = 1$

Multiplikation übers Kreuz

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung jeweils ein Bruch steht, kann eine Multiplikation über Kreuz sinnvoll sein.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$$

$$1 \cdot x + 1 = 2 \cdot x$$

$$x + 1 = 2x \qquad | - x$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Betragsgleichung

Betragsgleichungen lassen sich durch Fallunterscheidung lösen.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Aus der Definition des Betrags ergeben sich folgende zwei Fälle:

- Wenn der Term im Betrag größer oder gleich Null ist ($a \geq 0$), können wir den Term einfach ohne Betragsstriche schreiben ($|a| = a$)
- Wenn der Term im Betrag kleiner als Null ist ($a < 0$) , müssen wir die Vorzeichen des Terms umdrehen, um die Betragsstriche weglassen zu können ($|a| = -a$).

Die Lösungsmengen der einzelnen Fälle geben wir als Intervalle an. Die Lösungmenge der Gleichung ist die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen.

Beispiel $|x + 1| = 3$

Aus der Definiton des Betrag ergibt sich:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{für } x+1 < 0 \end{cases}$$

Fallunterscheidung Fall 1: $x + 1 \geq 0$:

$$x + 1 \geq 0 \qquad | - 1$$

$$x \geq -1$$

Fallunterscheidung Fall 2: $x + 1 < 0$:

$$x + 1 < 0 \qquad | - 1$$

$$x < -1$$

Zusammenfassung:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

Lösungsmengen der einzelnen Fälle bestimmen:
Fall 1 $x + 1 \geq 0$:

Für $x \geq -1$ können wir Gleichung $|x + 1| = 3$ umschreiben zu $x + 1 = 3$, Jetzt müssen wir noch die Gleichung nach x auflösen:

$$x + 1 - 1 = 3 - 1$$

$$x = 2$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ muss sowohl die Bedingung $x \geq -1$ (1. Fall) als auch $x = 2$ (Lösung 1. Fall) erfüllen:

$$\mathbb{L}_1 = \{2\}$$

Fall 2: $x < -1$

Für $x < -1$ können wir Gleichung umschreiben zu $|x + 1| = 3$ Jetzt müssen wir noch die Gleichung nach x auflösen:

$$-x - 1 = 3$$

$$-x - 1 + 1 = 3 + 1$$

$$-x = 4$$

$$-x \cdot (-1) = 4 \cdot (-1)$$

$$x = -4$$

Die Lösungsmenge muss sowohl die Bedingung $x < -1$ (2. Fall) als auch $x = -4$ (Lösung 2. Fall) erfüllen:

$$\mathbb{L}_2 = \{-4\}$$

Lösungsmenge der Betragsgleichung bestimmen

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2\} \cup \{-4\} = \{-4; 2\}$$

Potenzgleichungen

Eine Potenzgleichung ist eine Gleichung, die aus nur einer Potenz einer Variable und einer Konstanten besteht: $x^n = a$

Die Vorgehensweise unterscheidet sich danach, wie der Exponent n aussieht:

1. Typ: $x^n = a$ mit n $\in \mathbb{N}$
2. Typ: $x^{-n} = a$ mit n $\in \mathbb{N}$
3. Typ: $x^{\frac{m}{n}} = a$ mit n $\in \mathbb{N}$ und mit $m \in \mathbb{Z}$

Grundsätzlich lösen wir Potenzgleichungen durch Wurzelziehen. Das Problem ist, dass das Wurzelziehen im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist. Um zu verhindern, das Lösungen verloren gehen, muss man bei geraden Exponenten Betragsstriche setzen:

- Wenn n gerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.
- Wenn n ungerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Typ 1: $n \in \mathbb{N}$

$$x^2 = 4 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad | \text{ Da } n \text{ gerade ist, gilt: } \sqrt[n]{x^n} = |x|$$
$$|x| = 2$$
$$x = \pm 2$$

Die Lösung der Potenzgleichung $x^2 = 0$ ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

$$x^3 = 8 \qquad | \sqrt[3]{\ }$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8} \qquad | \text{ Da } n \text{ ungerade ist, gilt: } \sqrt[n]{x^n} = x$$
$$x = 2$$

Die Lösung der Potenzgleichung $x^3 = 8$ ist $\mathbb{L} = \{2\}$.

Typ 2: $x^{-n} = a$
Vorgehensweise: Umformung der Gleichung zu Typ 1 (falls $a \neq 0$)
Mögliche Lösungen

- : $a = 0$ Es gibt keine Lösung $\mathbb{L} = \{\}$.
- $a \neq 0$ Die Gleichung $x^{-n} = a$ ist äquivalent zu $x^n = \frac{1}{a}$.

$$x^{-2} = 3 \qquad | \text{ Potenzgesetz anwenden: } x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$
$$\frac{1}{x^2} = 3 \qquad | \text{ Kehrwert}$$
$$x^2 = \frac{1}{3} \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad | \text{ Da } n \text{ gerade ist, gilt: } \sqrt[n]{x^n} = |x|$$
$$|x| = \sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Die Lösung der Potenzgleichung $x^{-2} = 3$ ist $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}; +\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}$.

Typ 3: $m \in \mathbb{Z}$
Vorgehensweise: Potenzieren mit n
Ist der Exponent $\frac{m}{n}$ keine ganze Zahl, so sind die Gleichungen in $\mathbb{R}^-$ nicht definiert. In $\mathbb{R}_0^+$ sind die Gleichungen $x^{\frac{m}{n}} = a$ und $\sqrt[n]{x^m} = a$ äquivalent.

$$x^{\frac{2}{3}} = 4 \qquad | \text{ Potenzieren mit 3}$$
$$(x^{\frac{2}{3}})^3 = 4^3$$
$$x^2 = 64 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{64} \qquad | \text{ Da } n \text{ gerade ist, gilt: } \sqrt[n]{x^n} = |x|$$
$$|x| = 8$$
$$x = \pm 8$$

$x_1 = -8$ gehört nicht zur Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$.
$x_2 = 8$ ist eine mögliche Lösung. Da Potenzieren i. Allg. keine Äquivalenzumformung ist, ist eine Probe unerlässlich.

$$x^{\frac{2}{3}} = 4 \qquad | \ x_2 = 8$$
$$8^{\frac{2}{3}} = 4$$
$$4 = 4 \qquad \text{Wahre Aussage!}$$

Die Lösung der Potenzgleichung $x^{\frac{2}{3}} = 4$ ist $\mathbb{L} = \{8\}$.

Wurzelgleichung

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der die Variable (auch) unter einer Wurzel vorkommt.

1. Wurzeln beseitigen
   (a) Wurzel isolieren
   (b) Potenzieren
2. Algebraische Gleichung lösen
3. Probe Machen
4. Lösungsmenge aufschreiben

Beispiel: $\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2$
Die Wurzel ist bereits isoliert, gehe direkt zu Potenzieren:

$$\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2 \qquad | \text{ Quadrieren}$$
$$\sqrt{x + \sqrt{2x}}^2 = 2^2$$
$$x + \sqrt{2x} = 4$$

Wurzel isolieren:

$$x + \sqrt{2x} = 4 \qquad | -x$$
$$\sqrt{2x} = 4 - x$$

Potenzieren:

$$\sqrt{2x} = 4 - x \qquad | \text{ Quadrieren}$$
$$\sqrt{2x}^2 = (4 - x)^2$$
$$2x = 16 - 8x + x^2$$

Schritt 2: Algebraische Gleichung lösen:
Quadratische Gleichung in Normalform bringen:

$$2x = 16 - 8x + x^2 \qquad | -2x$$
$$0 = 16 - 10x + x^2 \qquad | \text{ Seiten vertauschen}$$
$$16 - 10x + x^2 = 0 \qquad | \text{ Nach Potenzen von } x \text{ sortieren}$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

Quadratische Gleichung mit der Mitternachtsformel lösen:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \qquad \text{[Formel hinschreiben]}$$
$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \qquad \text{[Zahlen für a, b und c einsetzen]}$$
$$= \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} \qquad \text{[Nenner sowie Term innerhalb der Wurzel ausrechnen]}$$
$$= \frac{10 \pm 6}{2} \qquad \text{[Wurzel berechnen]}$$

Daraus folgt:
$x_1 = \frac{10+6}{2} = 8$ und $x_2 = \frac{10-6}{2} = 2$

Schritt 3 Probe Machen

$$\sqrt{x+\sqrt{2x}} = 2 \qquad | \, x_1 = 2$$
$$\sqrt{2+\sqrt{2\cdot 2}} = 2$$
$$\sqrt{2+\sqrt{4}} = 2$$
$$\sqrt{2+2} = 2$$
$$\sqrt{4} = 2$$
$$2 = 2 \qquad \text{Wahre Aussage!}$$

$x_1 = 2$ gehört zur Lösung der Wurzelgleichung.

$$\sqrt{x+\sqrt{2x}} = 2 \qquad | \, x_2 = 8$$
$$\sqrt{8+\sqrt{2\cdot 8}} = 2$$
$$\sqrt{8+\sqrt{16}} = 2$$
$$\sqrt{8+4} = 2$$
$$\sqrt{12} = 2 \qquad \text{Falsche Aussage!}$$

$x_2 = 8$ ist offensichtlich nur eine Scheinlösung.

Schritt 4 Lösungsmenge aufschreiben
$\mathbb{L} = \{2\}$

Exponentialgleichungen

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Exponenten einer Potenz steht.

Lösung durch Logarithmieren Beispiel 1

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot \log a = g(x) \cdot \log b$$

Löse $2^x = 9$.

$$2^x = 9 \qquad | \text{ Logarithmieren}$$
$$\log 2^x = \log 9 \qquad | \text{ Exponent vorziehen}$$
$$x \cdot \log 2 = \log 9 \qquad | : \log 2$$
$$x = \frac{\log 9}{\log 2} \qquad | \text{ Taschenrechner!}$$
$$x \approx 3{,}1699 \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{3{,}1699\}$$

Lösung durch Logarithmieren Beispiel 2

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot \log a = g(x) \cdot \log b$$

Löse $2^{x+3} = 3^x$.

$$2^{x+3} = 3^x \qquad | \text{ Logarithmieren}$$
$$\log 2^{x+3} = \log 3^x \qquad | \text{ Exponent vorziehen}$$
$$(x+3)\cdot \log 2 = x \cdot \log 3 \qquad | \text{ Klammer ausmulti}$$
$$x\cdot\log 2 + 3\cdot \log 2 = x \cdot \log 3 \qquad | -(x\cdot \log 2)$$
$$3 \cdot \log 2 = x\cdot \log 3 - x \cdot \log 2 \qquad | \, x \text{ ausklammern}$$
$$3\cdot \log 2 = x \cdot (\log 3 - \log 2) \qquad | : (\log 3 - \log 2)$$
$$x = \frac{3\cdot \log 2}{\log 3 - \log 2} \qquad | \text{ Taschenrechner!}$$
$$x \approx 5{,}1285 \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{5{,}1285\}$$

Logarithmusgleichungen

Eine Logarithmusgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Numerus des Logarithmus steht.

Lösung mithilfe der Definition des Logarithmus

Eine Lösung mithilfe der Definition des Logarithmus ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so umzuformen, dass sich auf der einen Seite ein Logarithmus und auf der anderen Seite eine Konstante ergeben.

$$\log_2 x = 3 \qquad | \text{ Anwendung der Definition des Logarithmus}$$
$$x = 2^3 \qquad | \text{ Potenz ausrechnen}$$
$$x = 8 \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{8\}$$

$$2\cdot \log_4 x = 2 \qquad | : 2$$
$$\log_4 x = 1 \qquad | \text{ Anwendung der Definition des Logarithmus}$$
$$x = 4^1 \qquad | \text{ Potenz ausrechnen}$$
$$x = 4 \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$$

$$\log_3 9 + \log_3 x = 4 \qquad | \text{ Logarithmen zusammenfassen}$$
$$\log_3 9x = 4 \qquad | \text{ Anwendung der Definition des Logarithmus}$$
$$9x = 3^4 \qquad | \text{ Potenz ausrechnen}$$
$$9x = 81 \qquad | : 9$$
$$x = 9 \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{9\}$$

Definitionsmenge einer Logarithmusgleichung

Da $\log_b x = a$ nur für $x > 0$ definiert ist, kann die Definitionsmenge eingeschränkt sein.

In der Praxis bedeutet das, dass wir stets die Probe machen sollten, d.h. überprüfen, ob die berechneten Lösungen eingesetzt in die gegebene Gleichung zu einer wahren Aussage führen.

$$2\cdot \log_7 x = \log_7 16 \qquad | \text{ Faktor beseitigen}$$
$$\log_7 x^2 = \log_7 16 \qquad | \text{ Numerivergleich}$$
$$x^2 = 16 \qquad | \text{ Wurzel ziehen}$$
$$x = \pm\sqrt{16} \qquad | \text{ Wurzel berechnen}$$
$$x = \pm 4$$

Als Lösungen erhalten wir $x_1 = -4$ und $x_2 = +4$.

Da $\log_b x = a$ nur für $x > 0$ definiert ist, ist $x_1 = -4$ nur eine **Scheinlösung.**

Die einzige Lösung der Logarithmusgleichung ist $x_2 = 4$:

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$$

Lineare Gleichungssysteme

Mehrere lineare Gleichungen, die alle zusammen gelten sollen, bilden ein lineares Gleichungssystem.

Gleichsetzungsverfahren

1. Gleichungen nach der gleichen Variable auflösen
2. Gleichungen gleichsetzen
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen

4. Berechneten Wert in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Beispiel LGS mit Gleichsetzungsverfahren

$$2x + 3y = 14$$
$$x + 2y = 8$$

Schritt 1 Gleichungen nach der gleichen Variable auflösen

Wir entscheiden uns dafür, die Gleichungen nach x aufzulösen.
1. Gleichung:

$$2x + 3y = 14 \qquad | -3y$$
$$2x + 3y - 3y = 14 - 3y$$
$$2x = 14 - 3y \qquad | :2$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{14 - 3y}{2}$$
$$x = 7 - 1{,}5y$$

2. Gleichung:

$$x + 2y = 8 \qquad | -2y$$
$$x + 2y - 2y = 8 - 2y$$
$$x = 8 - 2y$$

Schritt 2 Gleichungen gleichsetzen

Es gilt $x = x$ bzw. $7 - 1{,}5y = 8 - 2y$

Schritt 3 Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen

Wir lösen die Gleichung nach y auf

$$7 - 1{,}5y = 8 - 2y \qquad | +2y$$
$$7 - 1{,}5y + 2y = 8 - 2y + 2y$$
$$7 + 0{,}5y = 8 \qquad | -7$$
$$7 - 7 + 0{,}5y = 8 - 7$$
$$0{,}5y = 1 \qquad | :0{,}5$$
$$\frac{0{,}5y}{0{,}5} = \frac{1}{0{,}5}$$
$$y = 2$$

Schritt 4 Berechneten Wert in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen

Wenn $y = 2$ wir entweder in die Gleichung $x = 7 - 1{,}5y$ oder in die Gleichung $x = 8 - 2y$ einsetzen, so erhalten wir den zweiten Wert $x = 4$

Schritt 5 Lösungsmenge aufschreiben

$$\mathbb{L} = \{(4|2)\}$$

Einsetzungsverfahren

1. Eine Gleichung nach einer Variable auflösen
2. Berechneten Term für diese Variable in die andere Gleichung einsetzen
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen
4. Berechneten Wert in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Beispiel LGS mit Einsetzugnsverfahren

$$2x + 3y = 14$$
$$x + 2y = 8$$

Schritt 1 Eine Gleichung nach einer Variable auflösen

Wir entscheiden uns dafür, die 2. Gleichung nach x aufzulösen, da wir dafür nur 2y subtrahieren müssen.

$$x + 2y = 8 \qquad | -2y$$
$$x + 2y - 2y = 8 - 2y$$
$$x = 8 - 2y$$

Schritt 2 Berechneten Term für diese Variable in die andere Gleichung einsetzen

Wir setzen $x = 8 - 2y$ in die 1. Gleichung

$$2x + 3y = 14$$

ein und erhalten

$$2 \cdot (8 - 2y) + 3y = 14$$

Schritt 3 Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen

Wir lösen die Gleichung nach y auf

$$2 \cdot (8 - 2y) + 3y = 14$$
$$16 - 4y + 3y = 14$$
$$16 - y = 14 \qquad | -16$$
$$16 - 16 - y = 14 - 16$$
$$-y = -2 \qquad | \cdot (-1)$$
$$-y \cdot (-1) = -2 \cdot (-1)$$
$$y = 2$$

Schritt 4 Berechneten Wert in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen

Die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 ist

$$x = 8 - 2y$$

In diese Gleichung setzen wir $y = 2$ ein

$$x = 8 - 2 \cdot 2$$
$$x = 4$$

Schritt 5 Lösungsmenge aufschreiben

$$\mathbb{L} = \{(4|2)\}$$

Additionsverfahren

1. Gleichungen so umformen, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden
2. Gleichungen addieren
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen
4. Berechneten Wert in eine der ursprünglichen Gleichungen einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Damit die Koeffizienten der Variablen Gegenzahlen werden, bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Koeffizienten und formen die Gleichungen anschließend entsprechend um. **Beispiel LGS mit Additionsverfahren**

$$2x + 3y = 14$$
$$x + 2y = 8$$

Schritt 1 Gleichungen so umformen, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden

Wir entscheiden uns dafür, die Koeffizienten der Variable x zu Gegenzahlen zu machen. Dazu bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Koeffizienten von x:

$$\text{kgV}(1; 2) = 2$$

Damit in einer Gleichung eine 2 und in der anderen Gleichung eine -2 vor dem x steht, müssen wir lediglich die 2. Gleichung mit -2 multiplizieren:

$$2x + 3y = 14$$
$$x + 2y = 8 \qquad | \cdot (-2)$$

$$2x + 3y = 14$$
$$-2x - 4y = -16$$

Schritt 2 Gleichungen addieren

Jetzt addieren wir die beiden Gleichungen, wodurch die Variable x eliminiert wird. Übrig bleibt:

$$-y = -2$$

Schritt 3 Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen

Wir lösen die eben berechnete Gleichung nach auf, indem wir mit -1 multiplizieren:

$$\begin{aligned} -y &= -2 \qquad |\cdot(-1) \\ -y\cdot(-1) &= -2\cdot(-1) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Schritt 4 Berechneten Wert in eine der ursprünglichen Gleichungen einsetzen und zweiten Wert berechnen

Wir setzen y=2 in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein, um x zu berechnen:

$$2x + 3\cdot 2 = 14$$
$$x + 2\cdot 2 = 8$$

Unabhängig davon, welche der beiden Gleichungen wir nach x auflösen, das Ergebnis ist dasselbe:

$$x = 4$$

Schritt 5 Lösungsmenge aufschreiben

$$\mathbb{L} = \{(4|2)\}$$

Ungleichungen

Eine Ungleichung ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Termen besteht, die durch eines der Vergleichszeichen ¡ (Kleinerzeichen), $\leq$ (Kleinergleichzeichen), ¿ (Größerzeichen) oder $\geq$ (Größergleichzeichen) verbunden sind.

Lineare Ungleichungen

1. Ungleichung nach x auflösen
2. Lösungsmenge aufschreiben

- Terme auf beiden Seiten der Ungleichung zusammenfassen
- Denselben Term auf beiden Seiten der Ungleichung addieren/subtrahieren
- Beide Seiten der Ungleichung mit derselben positiven* Zahl multiplizieren
- Beide Seiten der Ungleichung durch dieselbe positive* Zahl dividieren

* Bei der Multiplikation bzw. Division mit einer negativen Zahl müssen wir das Ungleichungszeichen umdrehen.

Beispiel:

$$x - 3 \leq 3(x-1) + 5$$

Schritt 1 Ungleichung nach x auflösen

$$x - 3 \leq 3(x-1) + 5$$
$$x - 3 \leq 3\cdot x + 3\cdot(-1) + 5$$
$$x - 3 \leq 3x - 3 + 5$$

zusammenfassen

$$x - 3 \leq 3x + 2$$

Ungleichung nach x auflösen

$$x - 3x - 3 \leq 3x - 3x + 2$$
$$-2x - 3 \leq 2$$
$$-2x - 3 + 3 \leq 2 + 3$$
$$-2x \leq 5$$

Um die Lösung zu erhalten, müssen wir durch -2 dividieren. Zur Erinnerung: Bei der Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{5}{-2}$$

$$x \geq \frac{5}{-2}$$

oder in Dezimalschreibweise

$$x \geq -2{,}5$$

Schritt 2 Lösungsmenge aufschreiben

$$\mathbb{L} = [-2{,}5; \infty[$$

Funktionen

Eine Funktion f ist eine Zuordnung, bei der jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element y der Wertemenge W zugeordnet ist.

Symbol	Bedeutung
f	Name der Funktion
x	Argument, x-Wert, unabhängige Variable
y	Funktionswert, y-Wert, abhängige Variable
$y = f(x)$	Funktionsgleichung, Zuordnungsvorschrift*!
D oder $\mathbb{D}$	Definitionsmenge, Definitionsbereich
W oder$\mathbb{W}$	Wertemenge, Wertebereich

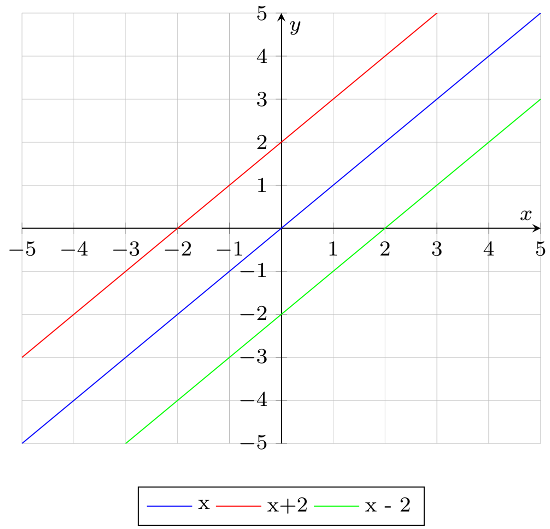
Lineare Funktionen

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = mx + n$ heisst lineare Funktion.
Wegen $y = f(x)$ können wir statt $f(x) = mx + n$ auch $y = mx + n$ schreiben:

- y: Abhängige Variable, y-Wert, Funktionswert
- m: Steigung
- x: Unabhängige Variable, x-Wert, (Funktions-)Argument
- n : y-Achsenabschnitt

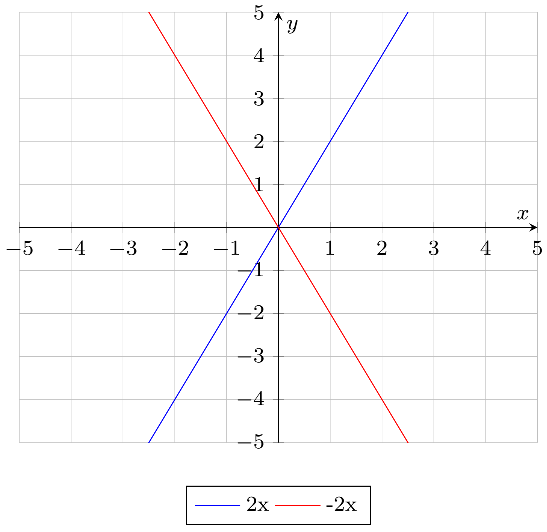
Wenn wir den y-Achsenabschnitt n in $f(x) = mx + n$ verändern, passiert Folgendes:

- Gilt $n > 0$, ist die Gerade nach oben verschoben.
- Gilt $n < 0$, ist die Gerade nach unten verschoben.



Wenn wir die Steigungt m in $f(x) = mx + n$ verändern, passiert Folgendes:

- Gilt $m > 0$, steigt die Gerade.
- Gilt $m < 0$, fällt die Gerade.



Nulltstelle berechnen

Berechne die Nullstelle der linearen Funktion $y = 3x + 3$.

Wir setzen die Funktion gleich Null, d.h. wir setzen für den y Wert 0 ein: $0 = 3x + 3$

Jetzt müssen wir die Gleichung nach x auflösen, um die gesuchte Nullstelle zu finden:

$$3x + 3 = 0 \qquad | -3$$

$$3x + 3 - 3 = -3$$

$$3x = -3 \qquad | : 3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$x = -1$$

Steigung berechnen

Wir lesen zwei beliebige Punkte ab:

$$P_0(0|1) \text{ und } P_1(4|3)$$

und setzen sie in die Steigungsformel ein:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{3 - (1)}{4 - 0}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Schnittpunkt berechnen

Ein Schnittpunkt existiert nur, wenn die beiden gegebenen Geraden eine unterschiedliche Steigung besitzen.

$$g\colon\ y = 2x + 1$$

$$h\colon\ y = 2x + 3$$

Die Geraden besitzen dieselbe Steigung. **Es existiert kein Schnittpunkt**.

1. Funktionsgleichungen gleichsetzen
2. Gleichung nach x auflösen
3. x in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, um y zu berechnen
4. Ergebnis aufschreiben

Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden $y = \frac{1}{2}x - 1$ und $y = -2x - 6$.

Schritt 1 Funktionsgleichungen gleichsetzen:

$$\frac{1}{2}x - 1 = -2x - 6$$

Schritt 2 Gleichung nach x auflösen:

$$\frac{1}{2}x - 1 = -2x - 6 \qquad |+2x$$

$$\frac{1}{2}x + 2x - 1 = -2x + 2x - 6$$

$$2{,}5x - 1 = -6 \qquad |+1$$

$$2{,}5x - 1 + 1 = -6 + 1$$

$$2{,}5x = -5 \qquad |: 2{,}5$$

$$\frac{2{,}5x}{2{,}5} = \frac{-5}{2{,}5}$$

$$x = -2$$

Schritt 3 x in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, um y zu berechnen:

Wir setzen x = -2 in die erste Gleichung ein:

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-2) - 1$$

$$= -2$$

Schritt 4 Ergebnis aufschreiben:

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $S(-2|-2)$

Umkehrfunktion bilden

1. Funktionsgleichung nach x auflösen
2. x und y vertauschen

Bilde die Umkehrfunktion von $f\colon\ y = 2x + 1$.

Schritt 1 Funktionsgleichung nach x auflösen:

$$y = 2x + 1 \qquad | -1$$

$$y - 1 = 2x \qquad | : 2$$

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = x \qquad | \text{ Seiten vertauschen}$$

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

Schritt 2 x und y vertauschen:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Die Umkehrfunktion der Funktion $f\colon\ y = 2x + 1$ ist
$f^{-1}\colon\ y = 0{,}5x - 0{,}5$.

Um die Graphen von f und f^{-1} ordentlich zu zeichnen, fertigen wir zwei Wertetabellen an.

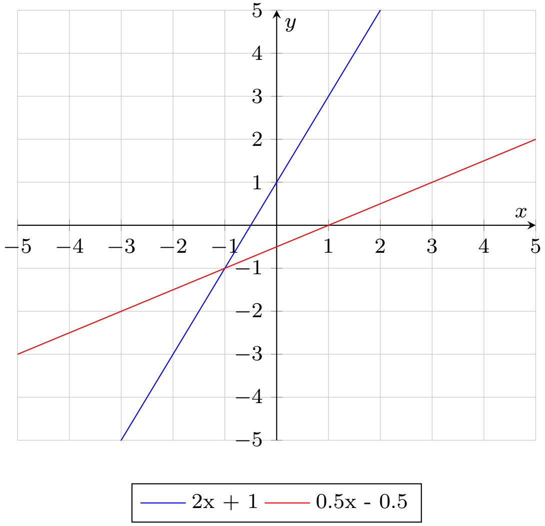
$f\colon$

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

Die Wertetabelle von f^{-1} erhält man durch Vertauschen der Zeilen der Wertetabelle von f.

$f^{-1}\colon$

x	-3	-1	1	3	5
y	-2	-1	0	1	2



Quadratische Funktionen

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ heisst quadratische Funktion. Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

Quadratische Funktion Zeichnen

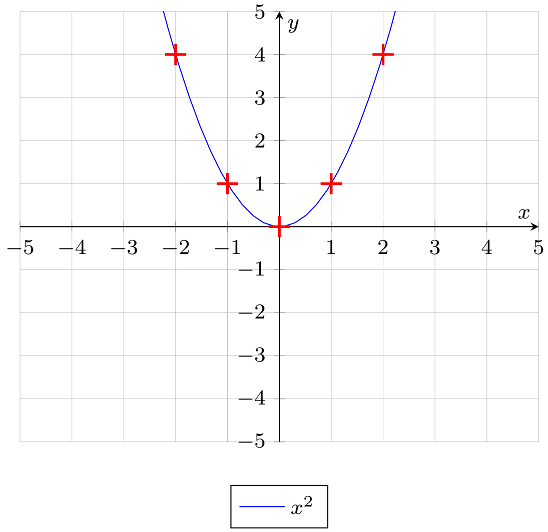
Dazu berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$
$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$
$$f(0) = 0^2 = 0$$
$$f(1) = 1^2 = 1$$
$$f(2) = 2^2 = 4$$

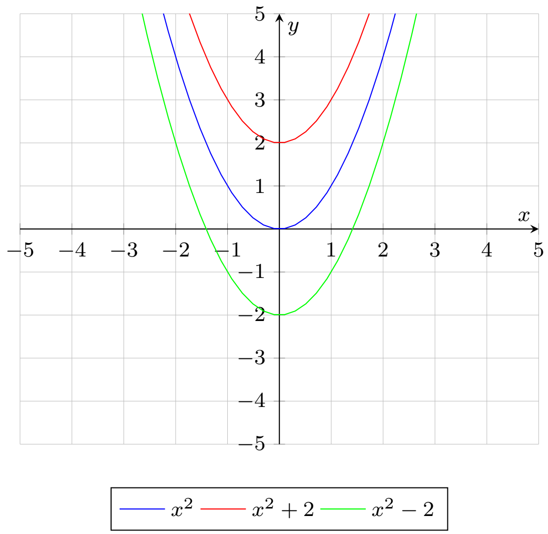
Der Übersichtlichkeit halber fassen unsere Berechnungen in einer Wertetabelle zusammen:

x-Werte	-2	-1	0	1	2
y-Werte	4	1	0	1	4

Wenn wir jetzt die berechneten Punkte in ein Koordinatensystem eintragen und anschließend die Punkte verbinden, erhalten wir den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$, die sog. Normalparabel.



Normalparabel nach oben/unten verschieben



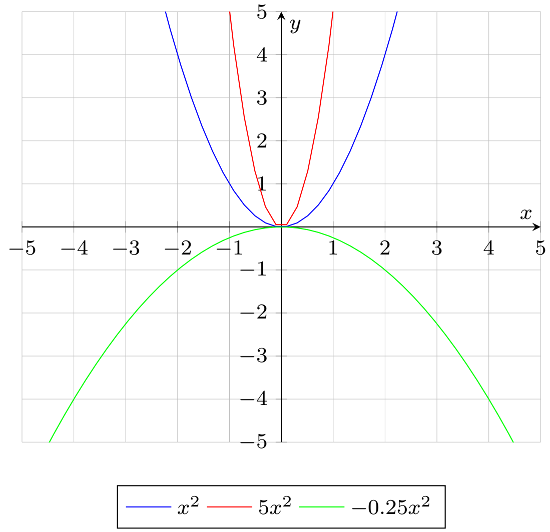
$$f(x) + c = \begin{cases} \text{Verschiebung nach oben} & \text{für } c > 0 \\ \text{Verschiebung nach unten} & \text{für } c < 0 \end{cases}$$

Normalparabel stauchen/strecken

Möchte man die Normalparabel stauchen oder strecken, muss man sich die Parabelgleichung $f(x) = ax^2$ anschauen.

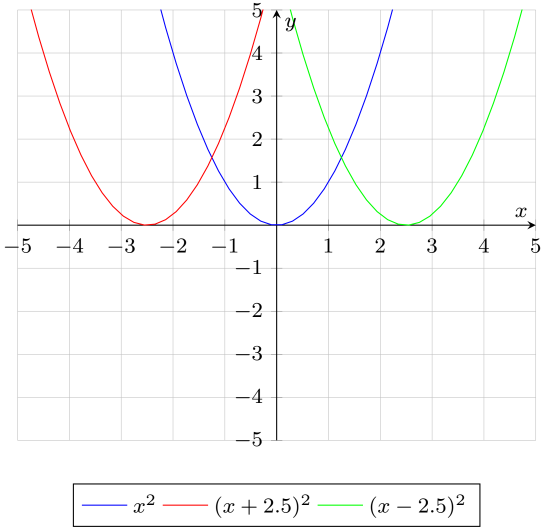
$a > 1$	Die Parabel ist nach oben geöffnet und schmaler* als die Normalparabel
$a = 1$	Die nach oben geöffnete Normalparabel
$0 < a < 1$	Die Parabel ist nach oben geöffnet und breiter** als die Normalparabel
$-1 < a < 0$	Die Parabel ist nach unten geöffnet und breiter** als die Normalparabel
$a = -1$	Die nach unten geöffnete Normalparabel
$a < -1$	Die Parabel ist nach unten geöffnet und schmaler* als die Normalparabel

* gestreckt, ** gestaucht



Parabel verschieben entlang der x-Achse

$$f(x + d) = \begin{cases} \text{Verschiebung nach rechts} & \text{für } d < 0 \\ \text{Verschiebung nach links} & \text{für } d > 0 \end{cases}$$



y-Achsenabschnitt berechnen

Die x-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse ist immer Null.
Bei quadratischen Funktionen lässt sich der y-Achsenabschnitt aus der Funktionsgleichung ablesen: Der y-Achsenabschnitt von $y = ax^2 + bx + c$ ist $y = c$.

Nullstellen berechnen

1. Funktionsgleichung gleich Null setzen
2. Gleichung lösen

Da die y-Koordinate eines Schnittpunktes mit der x-Achse immer Null ist, lautet der Ansatz zur Berechnung einer Nullstelle: $y = 0$. Wegen $y = f(x)$ kann man auch $f(x) = 0$ schreiben.

Fall 1: $f(x) = ax^2$

Funktionen vom Typ $f(x) = ax^2$ besitzen als einzige Nullstelle die Null.

Fall 2: $f(x) = ax^2 + c$.

Berechne die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 9$.
Funktionsgleichung gleich Null setzen: $x^2 - 9 = 0$

Gleichung nach x auflösen:

$$x^2 - 9 = 0 \qquad |+9$$
$$x^2 - 9 + 9 = +9$$
$$x^2 = 9$$

Wurzel ziehen:

$$x^2 = 9 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

Fall 3: $f(x) = ax^2 + bx$.

Berechne die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + 9x$.
Funktionsgleichung gleich Null setzen: $x^2 + 9x = 0$
x ausklammern: $x \cdot (x + 9) = 0$
Faktoren gleich Null setzen:

$$\underbrace{x}_{\text{1. Faktor}} \cdot \underbrace{(x+9)}_{\text{2. Faktor}} = 0$$

1. Faktor: $x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
2. Faktor:

$$x + 9 = 0 \qquad |-9$$
$$x + 9 - 9 = -9$$
$$x = -9$$

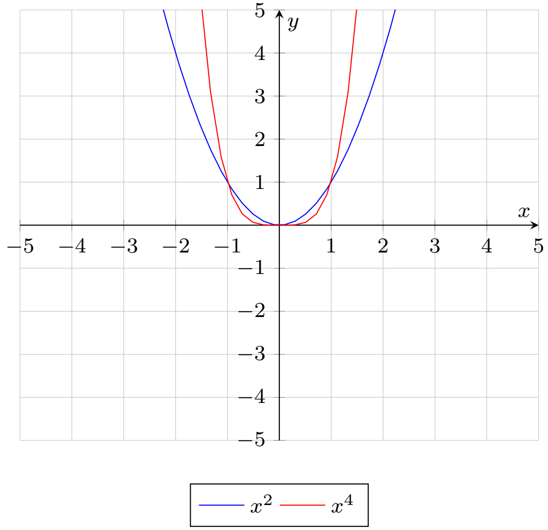
Potenzfunktionen

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung
$f(x) = x^n \quad$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ heisst Potenzfunktion.

Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5
x^2	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25
x^4	5,0625	1	0,0625	0	0,0625	1	5,0625

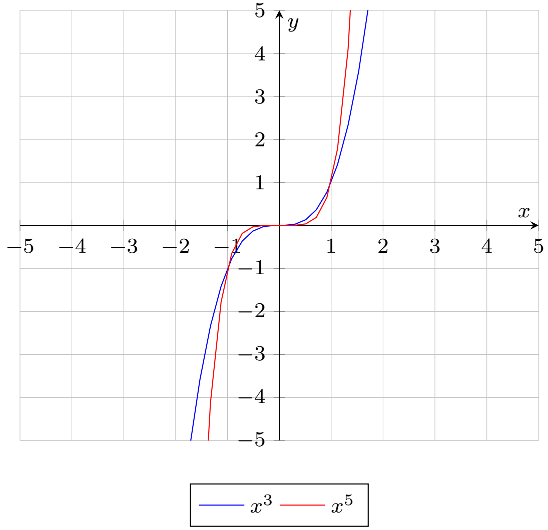


Ungerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^5$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:.

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5
x^3	−3,375	−1	−0,125	0	0,125	1	3,375
x^5	−7,59375	−1	0,03125	0	0,03125	1	7,59375

.



Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten
$\boldsymbol{f(x) = x^n}$ haben folgende Eigenschaften:

	n gerade	**n ungerade**
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-ache	punktsymetrisch zum K-Ursprung
Gemeinsame Punkte	$(-1,1)$,$(0\|0)$,$(1\|1)$	$(-1,-1)$,$(0\|0)$,$(1\|1)$

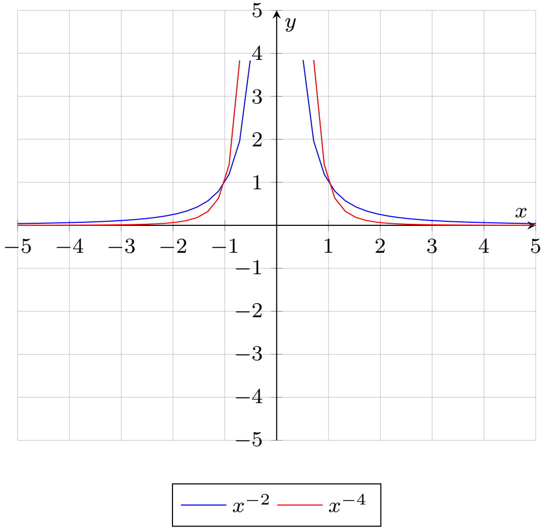
Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Die Graphen von Potenzfunktionen heißen Hyperbeln n-ter Ordnung, wenn der Exponent negativ ist.

Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^{-2}$ und $f(x) = x^{-4}$. Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

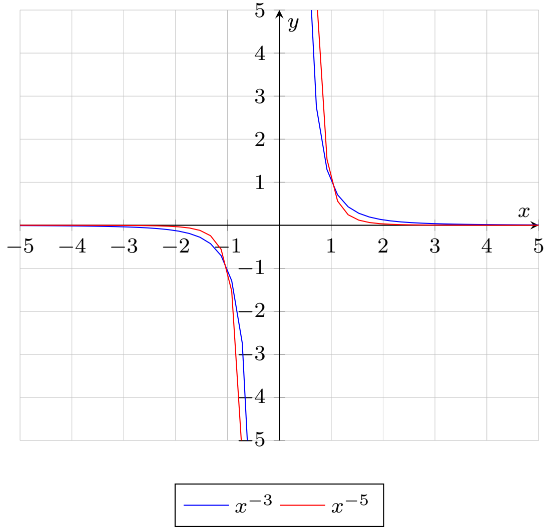
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^{-2}	$0{,}\overline{4}$	1	4	4	1	$0{,}\overline{4}$
x^{-4}	$\approx 0{,}1975$	1	16	16	1	$\approx 0{,}1975$



Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^{-3}$ und $f(x) = x^{-5}$. Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunächst einige Funktionswerte:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^{-3}	$\approx -0{,}2963$	-1	-8	8	1	$\approx 0{,}2963$
x^{-5}	$\approx -0{,}1317$	-1	-32	32	1	$\approx 0{,}1317$



Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten
$\boldsymbol{f(x) = x^{-n}}$ haben folgende Eigenschaften:

	n gerade	**n ungerade**
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-ache	punktsymetrisch zum K-Ursprung
Gemeinsame Punkte	$(-1,1)$,$(1\|1)$	$(-1,-1)$,$(1\|1)$
Asymptoten	x-Achse, y-Achse	x-Achse, y-Achse

Wurzelfunktion

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen. Die Eigenschaften der Funktionen unterscheiden sich danach, ob die (Wurzel-)Exponenten gerade oder ungerade sind.

Gerader Wurzelexponent

Wir wollen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $y = x^2$ bilden. Eine Umkehrfunktion existiert immer dann, wenn die Funktion entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist. Bei der Funktion $y = x^2$ treten jedoch beide Fälle auf. Daraus folgt: Die Funktion $y = x^2$ ist für $x \in \mathbb{R}$ nicht umkehrbar.

Lösung

Wir beschränken die Definitionsmenge auf einen Bereich, in dem die Funktion entweder nur streng monoton fallend ($x \leq 0$) oder nur streng monoton steigend ($x \geq 0$) verläuft.

Fall 1: $x \leq 0$

Für $x \leq 0$ ist die Funktion $y = x^2$ streng monoton fallend und somit umkehrbar:

1) Funktionsgleichung nach x auflösen

$$f\colon\ y = x^2 \qquad |\ \text{Wurzel ziehen}$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2}$$
$$\sqrt{y} = |x| \qquad |\ \text{Betrag auflösen: } |x| = -x \text{ wegen } x \leq 0$$
$$\sqrt{y} = -x \qquad |\ \cdot(-1)$$
$$-\sqrt{y} = x \qquad |\ \text{Seiten vertauschen}$$
$$x = -\sqrt{y}$$

2) x und y vertauschen

$$f^{-1}\colon\ y = -\sqrt{x}$$

Um die Graphen der Funktionen ordentlich zu zeichnen, fertigen wir zwei Wertetabellen an.

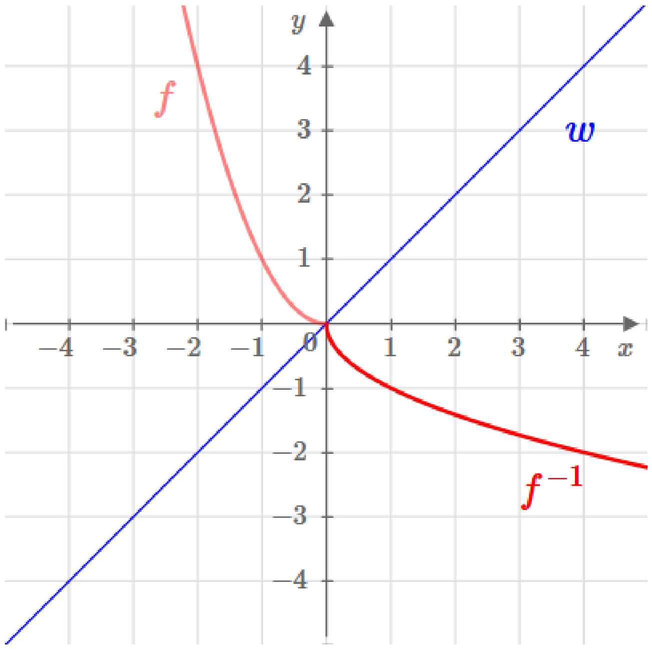
$f\colon$

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0
y	4	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0

Die Wertetabelle von f^{-1} erhält man durch Vertauschen der Zeilen der Wertetabelle von f.

$f^{-1}\colon$

x	4	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0
y	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0



Fall 2: $x \geq 0$

Für ist die Funktion$x \geq 0$ streng monoton steigend und somit umkehrbar:

1) Funktionsgleichung nach x auflösen

$f\colon\ y = x^2$ | Wurzel ziehen

$\sqrt{y} = \sqrt{x^2}$

$\sqrt{y} = |x|$ | Betrag auflösen: $|x| = x$ wegen $x \geq 0$

$\sqrt{y} = x$ | Seiten vertauschen

$x = \sqrt{y}$

2) x und y vertauschen

$f^{-1}\colon\ y = \sqrt{x}$

Um die Graphen der Funktionen ordentlich zu zeichnen, fertigen wir zwei Wertetabellen an.

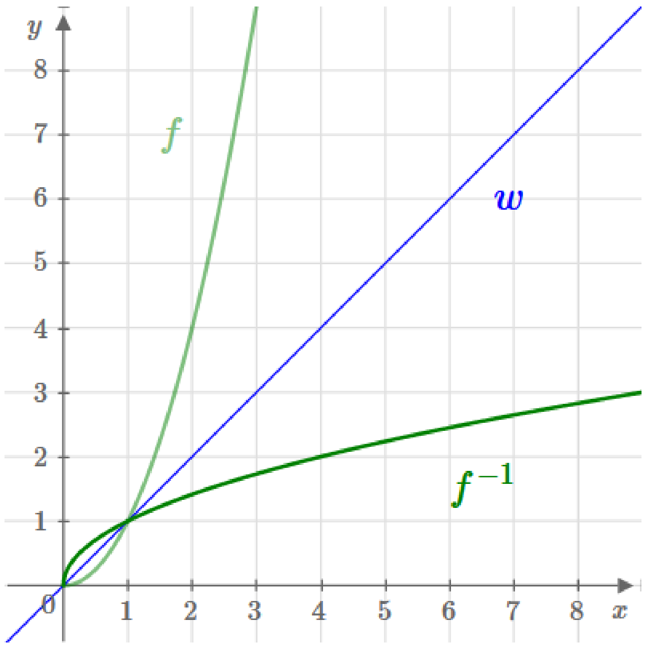
$f\colon$

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,25	1	2,25	4

Die Wertetabelle von f^{-1} erhält man durch Vertauschen der Zeilen der Wertetabelle von f.

$f^{-1}\colon$

x	0	0,25	1	2,25	4
y	0	0,5	1	1,5	2



Ungerader Wurzelexponent

Wir wollen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $y = x^3$ bilden. Da Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten in $\mathbb{R}$ ganz streng monoton steigend sind, müssen wir die Definitionsmenge nicht einschränken, um eine Umkehrfunktion zu bilden.

1) Funktionsgleichung nach x auflösen

$f\colon\ y = x^3$ | Wurzel ziehen

$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3}$

$\sqrt[3]{y} = x$ | Seiten vertauschen

$x = \sqrt[3]{y}$

2) x und y vertauschen

$f^{-1}\colon\ y = \sqrt[3]{x}$

Um die Graphen der Funktionen ordentlich zu zeichnen, fertigen wir zwei Wertetabelle an.

$f\colon$

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	−8	−3,375	−1	−0,125	0	0,125	1	3,375	8

Die Wertetabelle von f^{-1} erhält man durch Vertauschen der Zeilen der Wertetabelle von f.

$f^{-1}\colon$

x	−8	−3,375	−1	−0,125	0	0,125	1	3,375	8
x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2