Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Technik & Architektur

Aufnahmeprüfung 2019 in Mathematik

13. Juni 2019

Name: ______________________________

Bedingungen (für die Prüfung):

Zeit: 3 h

Hilfsmittel: Beliebige schriftliche Unterlagen (Open book), offizieller HSLU TR (zu Beginn des ZS abgegeben).

Bitte beachten Sie:

- Mit Bleistift oder mit roter Farbe schreiben ist ***nicht*** gestattet.
- Lösungen auf den dafür vorgesehenen Platz eintragen, ev. Rückseiten oder die ***angehängten Zusatzblätter*** benutzen.
- Lesen Sie zuerst die Aufgaben, bevor Sie zu lösen anfangen!
- Saubere und deutliche Resultatformulierung
- Unbelegte oder nicht nachvollziehbare Resultate werden nicht berücksichtigt.
- Ungültiges ist sauber durchzustreichen, Mehrfachlösungen werden nicht gewertet.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein.
- Koordinatensysteme sind sauber zu beschriften (Achsen und Einheiten).
- Im Koordinatensystem enthaltene Funktionen sind anzuschreiben.
- ***Rechenaufgaben*** werden mit dem ***Unterstreichen*** des Resultates beendet.
- ***Gleichungen*** werden mit Angabe der ***Lösungsmenge*** beendet.
- Zu ***Textaufgaben*** gehört am Schluss ein ***Resultatsatz*** in Prosa.

Punktzahlen:

maximal: **146**
für die Note 6: **120**
für die Note 4: **70**

Ich wünsche Ihnen viel Glück und viel Erfolg

Josef Schuler

Punkteübersicht:

Aufgabe	Max. Punktzahl	Max. PZ pro Aufg.	erreichte Punktzahl	
1.1)	4			
1.2)	4			
1.3)	4	20		
1.4)	3			
1.5)	5			
2.1)	5			
2.2)	5	21		
2.3)	4			
2.4)	7			
3.1)	3			
3.2)	6	20		
3.3)	7			
3.4)	4			
4.1)	7			
4.2)	7	22		
4.3)	8			
5.1)	6			
5.2)	5			
5.3)	5	30		
5.4)	7			
5.5)	7			
6.1)	4			
6.2)	6	33		
6.3)	4			
6.4)	8			
6.5)	11			
	---------------	---------------		Note
Total	146	146		
	==========	==========	==============	

Notenskala:

$\mathbf{Note} = 0{,}04 \cdot \text{erreichte Punktzahl} + 0{,}95$; dann auf halbe Noten runden.

Note	Punkte
6	≥ 120
5,5	$\geq 107{,}5$
5	≥ 95
4,5	$\geq 82{,}5$
4	≥ 70
3,5	$\geq 57{,}5$
3	≥ 45
2,5	$\geq 32{,}5$
2	≥ 20
1,5	$\geq 7{,}5$
1	≥ 0

Max. Punktzahl: 146

Aufgabe 1: Kurzaufgaben **4 + 4 + 4 + 3 + 5 = 20 Punkte**

1.1) [4 P.] Führen Sie die Polynomdivision durch

$(-2x^3 + 2x^2 + 10x + 6) : (x - 3)$

1.2)

a) [3 P.] Füllen Sie die Wahrheitstabelle aus.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

b) [1 P.] Welche Folgerung(en) kann (können) nun gemacht werden?

1.3) Berechnen Sie

a) [2 P.]

$$\sum_{i=-1}^{3}(4i+1)=$$

b) [2 P.]

$$\prod_{i=1}^{5}(3-2i)=$$

1.4) [3 P.] Begründen Sie, ob das folgende Gesetz gilt oder nicht.

$$a!\cdot b!=(a\cdot b)!$$

1.5) [5 P.] Lesen Sie den unten aufgeführten (gekürzten) Artikel des TagesAnzeigers. Beachten Sie die angegebenen Grössen (3 Zahlengrössen sind angegeben). Offensichtlich kann da etwas nicht stimmen. Korrigieren Sie die Angaben so, dass die Aussagen realistisch werden. Dabei können Sie annehmen, dass die Anzahl der Beschäftigten, also 4‘300, korrekt ist. Alle anderen Angaben resp. Zahlen sollen kritisch hinterfragt werden

Artikel des TA: Das unfreiwillige Weihnachtsgeschenk der AXA-Winterthur (Tagi, S.8, 24.12.2018)

Ja, ist denn heute schon Weihnachten? Das haben sich die rund 4‘300 Beschäftigten des Schweizer Versicherers Axa mit Sicherheit gedacht, als sie kurz vor dem Fest ihren Lohnzettel in den Händen hielten. Denn dort standen ungewöhnlich hohe Summen. Konkret: Jeder Mitarbeitende hat exakt das Doppelte bekommen. Die Axa hat ihren Angestellten das Dezembergehalt gleich zweimal ausbezahlt.
Gemäss dem Unternehmenssprecher handelte es sich um einen Fehler an der Schnittstelle zur Hausbank. Wie viel genau zu viel ausbezahlt worden ist, dazu will der Versicherer keine Angaben machen. Geht man allerdings konservativ von einem Durchschnittslohn von 80'000 Franken je Mitarbeiter aus, könnte der zusätzliche Lohn bei der Axa mit gut 340 Millionen Franken zu Buche schlagen.

Aufgabe 2: Diverse Gleichungen 5 + 5 + 4 + 7 = 21 Punkte

2.1) [5 P.] Karin und Elvira reden über ihren momentanen Kassenstand. Karin sagt: "Wenn du mir CHF 18.- gibst, haben wir beide gleich viel Geld." Darauf sagt Elvira: "Besser du gibst mir nur CHF 10.-, dann hätte ich 5 mal so viel wie du." Wie viel Geld haben Karin und Elvira momentan?

2.2) [5 P.] Lösen Sie die folgende Formel auf die Variable a auf.

$$ln\left(\sqrt{a^2 + 1}\right) - b = 0$$

2.3) [4 P.] Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an. Das Resultat ist auf 3 Stellen nach dem Komma anzugeben.

$$5 \cdot 1{,}04^x - 2(1{,}04^x - 1) = 6$$

2.4) Bestimmen Sie

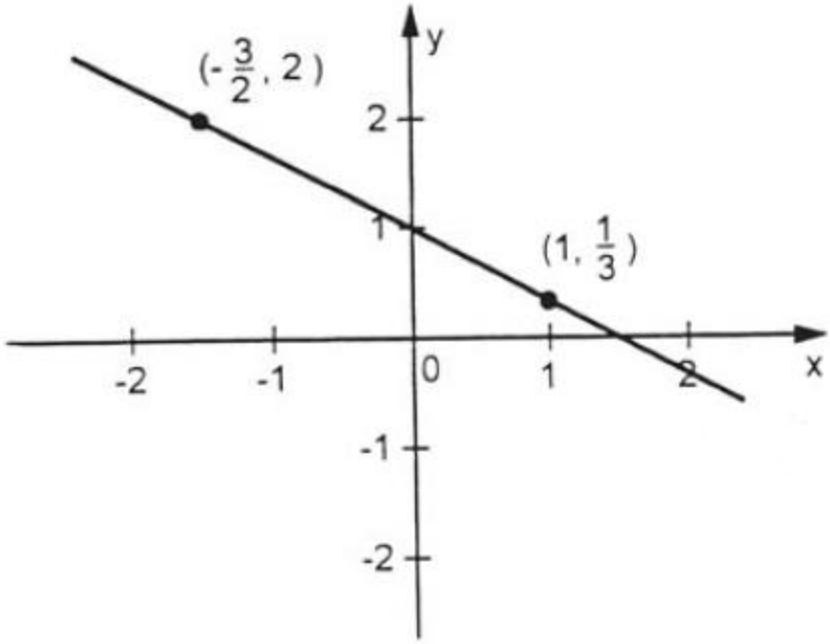
a) [1 P.] den Definitionsbereich in der Grundmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

b) [6 P.] die Lösungsmenge der Gleichung. Das Resultat ist auf 3 Stellen nach dem Komma anzugeben.

$$1 + lg(x) = 2 \cdot lg(x-1)$$

Aufgabe 3: Funktionen I **3 + 6 + 7 + 4 = 20 Punkte**

3.1) Aus einem Buch wurde die folgende Zeichnung herauskopiert.



[3 P.] Bestimmen Sie die Gleichung der gezeichneten Geraden. Alle Angaben dürfen aus dem Diagramm entnommen werden. Die Geradengleichung ist soweit wie möglich zu vereinfachen.

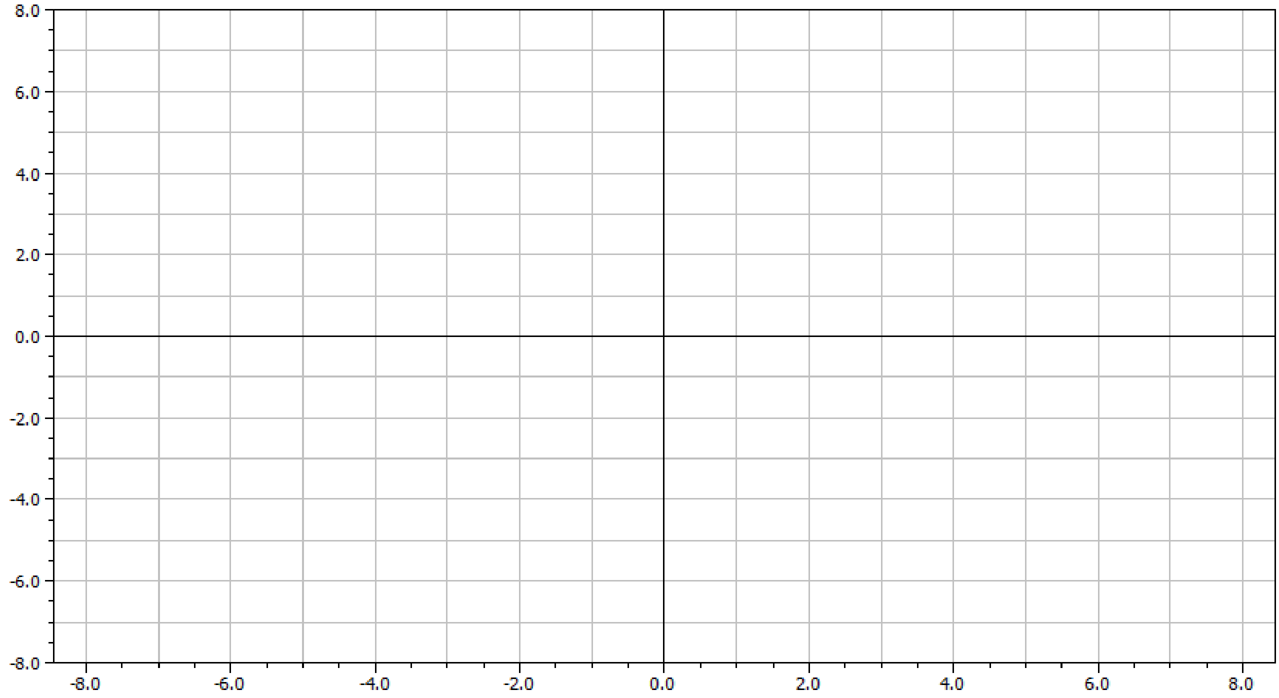
3.2) Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion y = f(x)

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & f\text{ür } x < 1 \\ 2x - 1 & f\text{ür } 1 \leq x < 3 \\ -3x + 14 & f\text{ür } x \geq 3 \end{cases}$$

a) [1 P.] Bestimmen Sie rechnerisch den/die Schnittpunkt(e) mit der y-Achse.

b) [2 P.] Bestimmen Sie rechnerisch den/die Nullstelle(n).

c) [3 P.] Zeichnen Sie die Funktion ins untenstehende Diagramm. Sollte es nötig sein, dann ist klar aufzuzeichnen, ob ein Endpunkt zum einen oder zum anderen Teilstück gehört.



3.3)

a) [3 P.] Ein Video hatte zu Beginn 12‘000 Klicks. Nach einem Tweet ging es plötzlich „viral“ – also exponentiell – um die Welt. Nach 10 Stunden wurden schon 1 Million Klicks gezählt. Um wie viele Prozente nahm die Anzahl der Klicks durchschnittlich pro Stunde zu?

b) [2 P.] Die Anzahl der Klicks eines anderen Videos verbreitet sich gemäss der Formel: $g(t) = 2'770 \cdot 1{,}13^t$. Dabei ist t die Zeit in Stunden. In wie vielen Stunden verfünffacht sich die Anzahl der Klicks?

c) [2 P.] Die Anzahl der Klicks eines dritten Videos stiegen innerhalb von 6 Stunden von 10‘000 auf 170‘000, also um das 17-fache. Geben Sie die Formel des Wachstumsprozesses in der Form $h(t) = a \cdot b^t$ an. Nicht aufgehende Werte sind auf 3 Stellen nach dem Komma anzugeben.

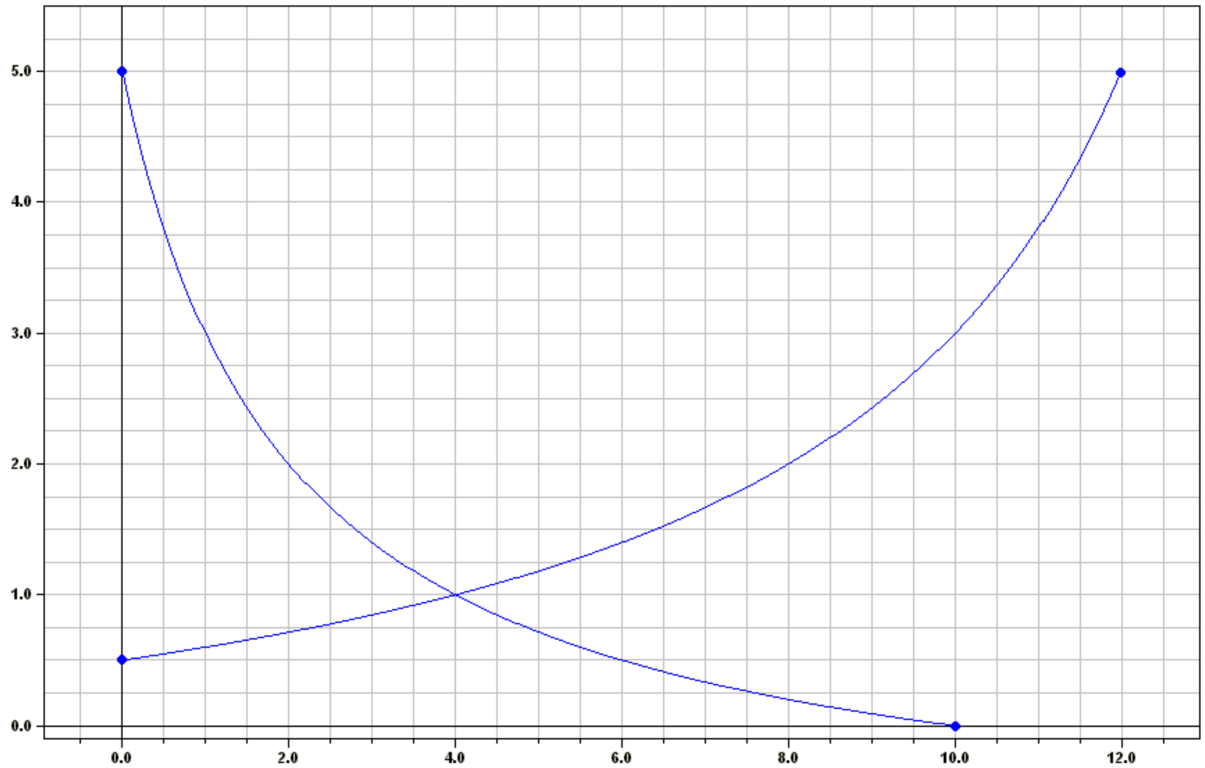
3.4) [4 P.] Von einer quadratischen Funktion sind die Nullstellen $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$ gegeben. Zudem liegt der Punkt Q(3; 12) auf dem Graphen der zugehörigen Parabel. Geben Sie Funktionsgleichung dieser quadratischen Funktion in der Normalenform an.

Aufgabe 4: Funktionen II **7 + 7 + 8 = 22 Punkte**

4.1) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Bestimmen Sie von der Funktion...

i. [1 P.] den Schnittpunkt S mit y-Achse.
ii. [4 P.] falls vorhanden die Nullstelle(n).
iii. [2 P.] falls vorhanden die Symmetrieeigenschaft (gerade/ungerade).

4.2) Die zwei Funktionen mit $y = f(x) = \frac{18}{\frac{3}{2}x+3} - 1$ und $y = g(x) = \frac{24}{16-x} - 1$ seien gegeben und im nachfolgenden Diagramm gezeichnet.



a) [1 P.] Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f(x).

b) [2 P.] Vereinfachen Sie y = f(x) soweit als möglich.

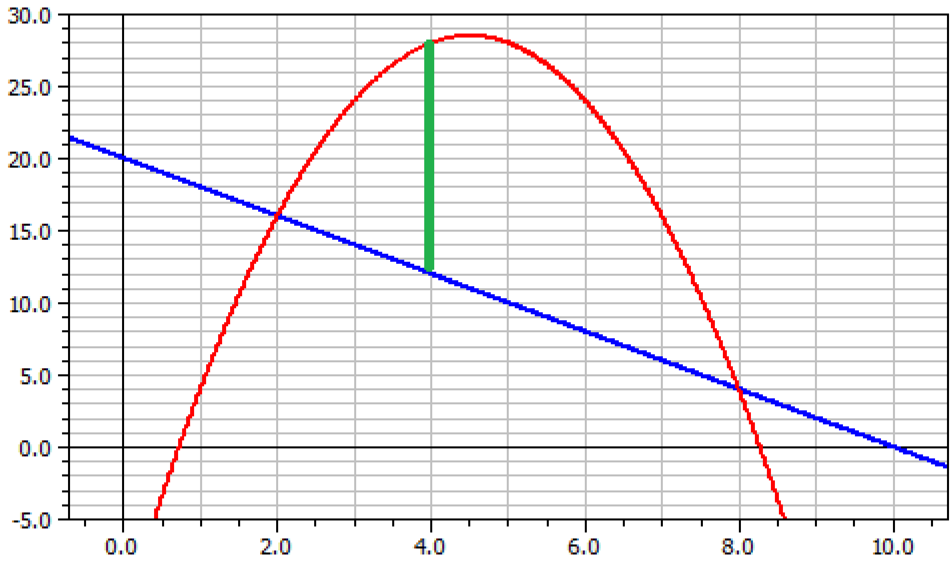
c) [1 P.] Geben Sie im Diagramm an, welche Funktion welche ist.

d) [3 P.] Berechnen Sie den Schnittpunkt dieser zwei Funktionen. (Ein Herauslesen des Schnittpunktes aus dem Diagramm, also ohne Berechnungen gibt ½ P.)

Fortsetzung der Aufgabe 4.2:

4.3) [8 P.] Gegeben seien die quadratische Funktion $y = f(x) = -2x^2 + 18x - 12$ und die lineare Funktion $y = g(x) = -2x + 20$. An welcher Stelle zwischen x = 2 und x = 8 ist die Distanz der beiden Funktionen maximal? Wie gross ist dieser grösste Abstand?

Tipp:
Die grüne Linie symbolisiert den Abstand zwischen diesen zwei Funktionen an einer beliebigen Stelle x.



Fortsetzung der Aufgabe 4.3:

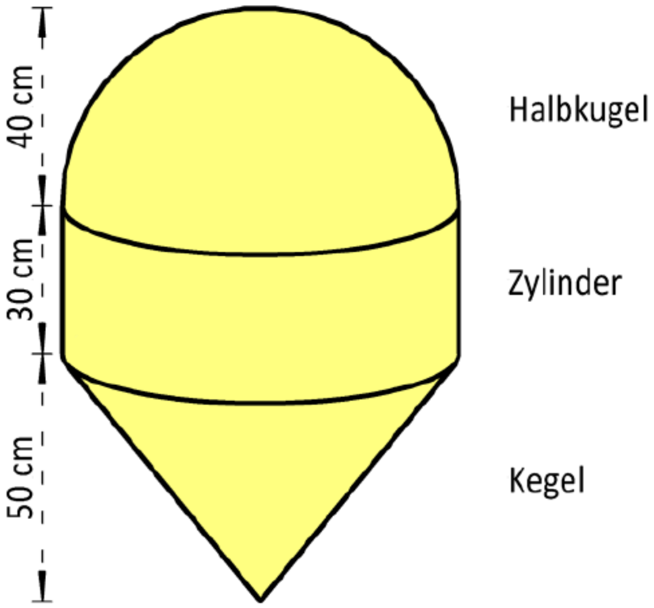
Aufgabe 5: Trigonometrie und Geometrie 6 + 5 + 5 + 7 + 7 = 30 Punkte

Aufgabe 5.1: 6 Punkte

Die abgebildete Meeresboje setzt sich aus einer Halbkugel, einem Zylinder und einem Kegel zusammen.

a) [5 P.] Bestimmen Sie das Volumen der abgebildeten Boje, geben Sie das Volumen in Liter an! Die Literangabe ist auf 1 Stelle nach dem Komma anzugeben.

b) [1 P.] Um welchen Faktor vergrössert sich das Volumen, wenn sämtliche Längen verdoppelt werden?



Aufgabe 5.2: **5 Punkte**

Berechnen Sie aus einem Dreieck mit a = 7cm, c = 10cm und $\alpha = 40^0$ die Seite b und die Winkel β und γ.

Tipps: Machen Sie eine Skizze und beachten Sie die Anzahl möglicher Lösungen.

Aufgabe 5.3 **5 Punkte**

Tipp für die folgende Aufgabe: Sowohl tan(x) wie cot(x) mit sin(x) und cos(x) ausdrücken.

Vereinfachen Sie soweit als möglich:

$$\frac{2}{tan(x)\ +cot(x)} =$$

Aufgabe 5.4: **7 Punkte**

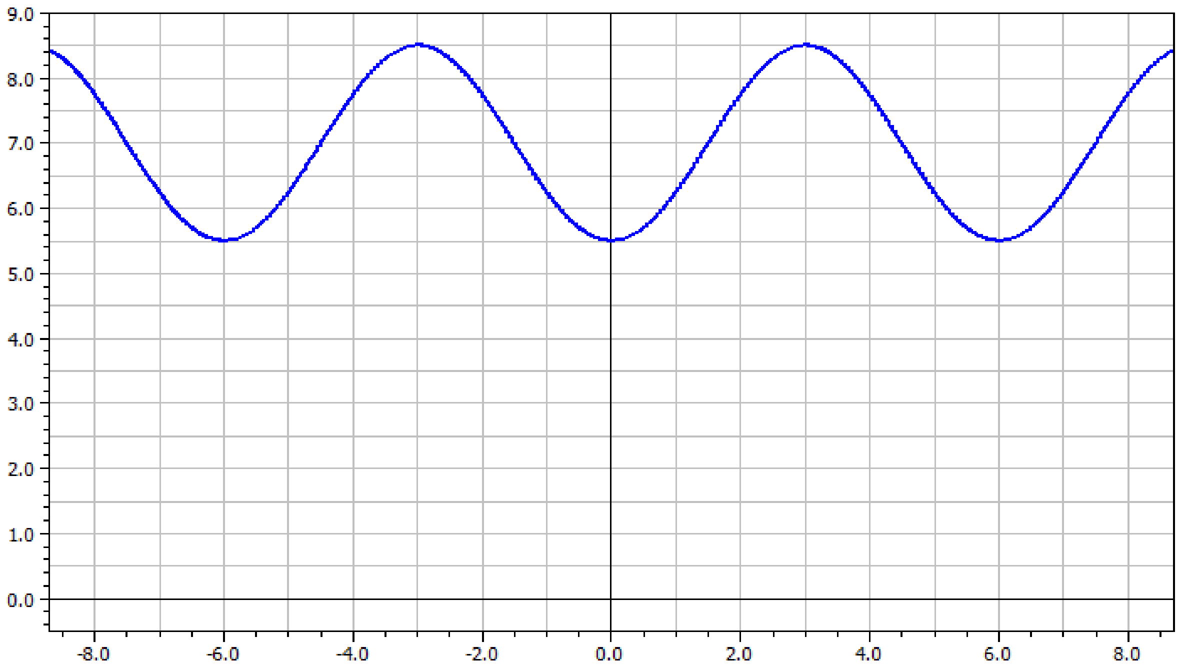
Gegeben ist die Gleichung $\left(sin(x) - cos(x)\right)^2 = 1 + sin(x)$ mit Grundmenge G = [0^0; 360^0].
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

Aufgabe 5.5: **7 Punkte**

In einem Ausgleichsbecken verändert sich die Höhe y des Wasserstandes sinusförmig in Abhängigkeit der Zeit t. Die Zeit t sei in Stunden, die Höhe des Wasserstandes sei in Meter.
Es gelten die folgenden Eckwerte:

- Zur Zeit t = 0 sei der tiefste Wasserstand, nämlich 5,5 m.
- Innerhalb von 3 Stunden schwillt der Wasserstand vom Minimum ins Maximum von 8,5 m. Resp. innerhalb von 3 Stunden schwellt der Wasserstand vom Maximum 8,5 m auf das Minimum von 5,5 m usw.

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift derjenigen Sinusfunktion $y = f(t) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ der diesen Prozess beschreibt und im untenstehenden Graph dargestellt ist.
Tipp: Unbedingt im Bogenmass arbeiten, d.h. die Zeit t als Bogenmass betrachten.



Fortsetzung der Aufgabe 5.5:

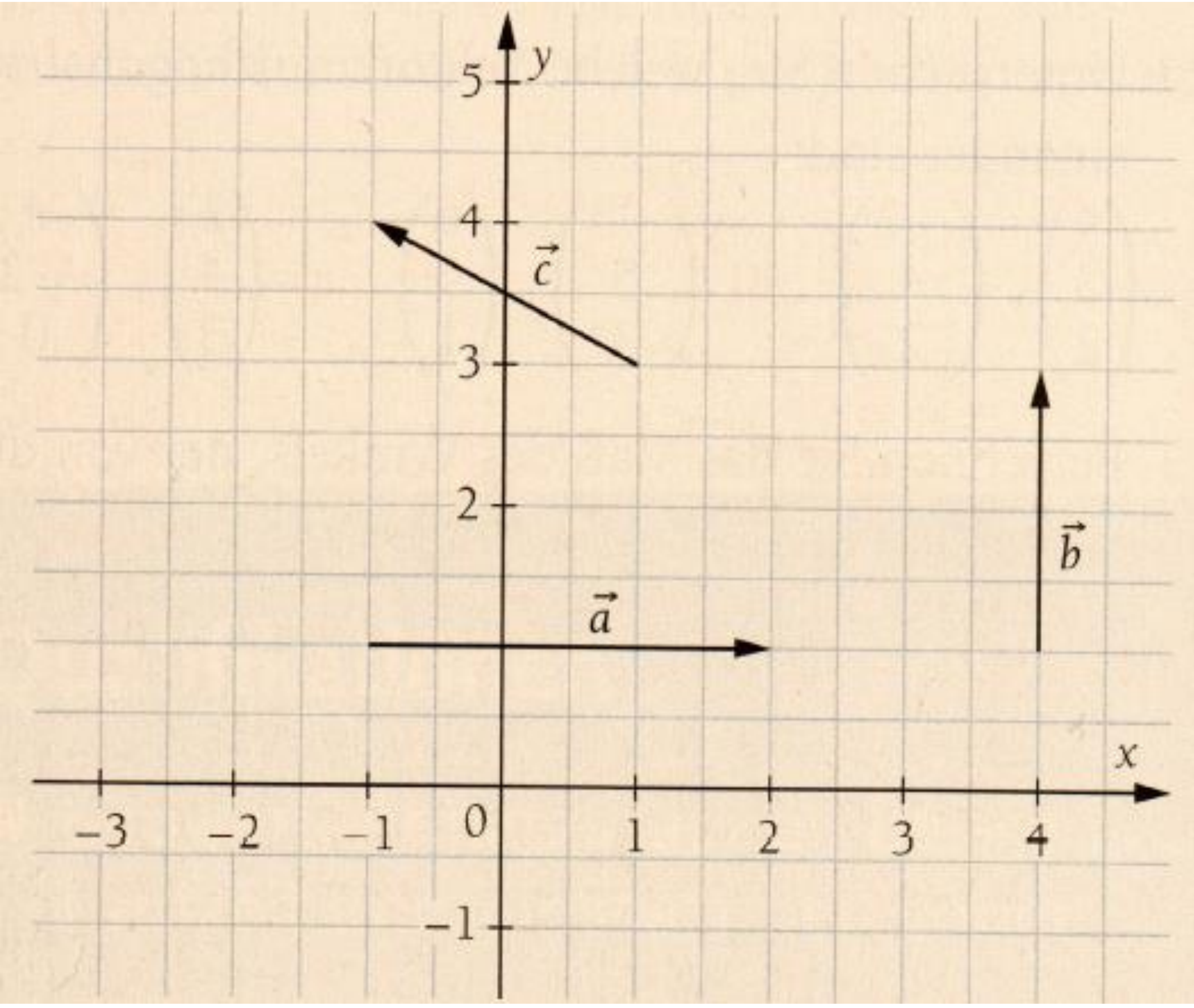
Aufgabe 6: Vektorgeometrie **4 + 6 + 4 + 8 + 11 = 33 Punkte**

Aufgabe 6.1: **4 Punkte**

Gegeben seien die unten gezeichneten Vektoren.

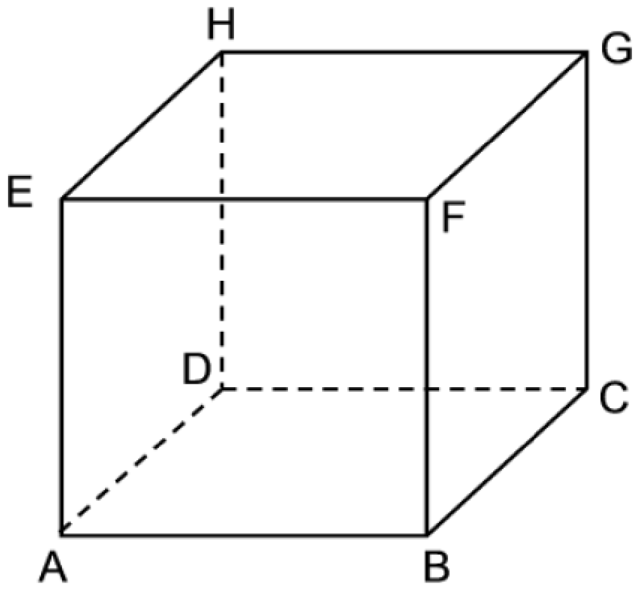
a) [3 P.] Bestimmen Sie rechnerisch den Vektor $\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 3\vec{c}$.

b) [1 P.] Zeichen Sie den Vektor $\vec{d}$ als Ortsvektor ins Diagramm ein.



Aufgabe 6.2: **6 Punkte**

Gegeben ist der Würfel ABCDEFGH.



a) [3 P.] Sind die folgenden Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig? Die Antworten sind zu begründen.

i) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}$

ii) $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{GH}$

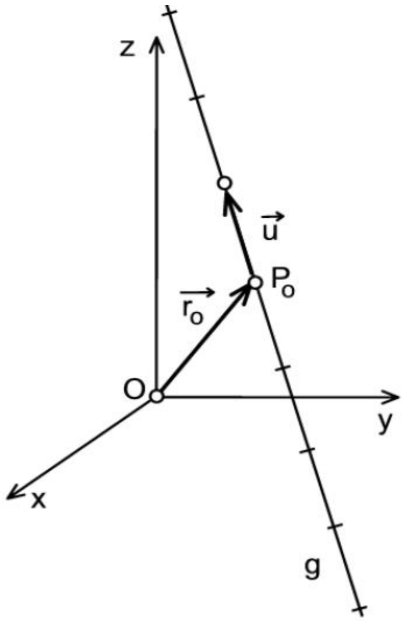
iii) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GA}$

b) [3 P.] Drücken Sie – dort wo es möglich ist – in i) bis iii) jeweils den ersten Vektor durch die anderen aus. Dort wo das nicht möglich ist, ist zu begründen, warum es nicht möglich ist.

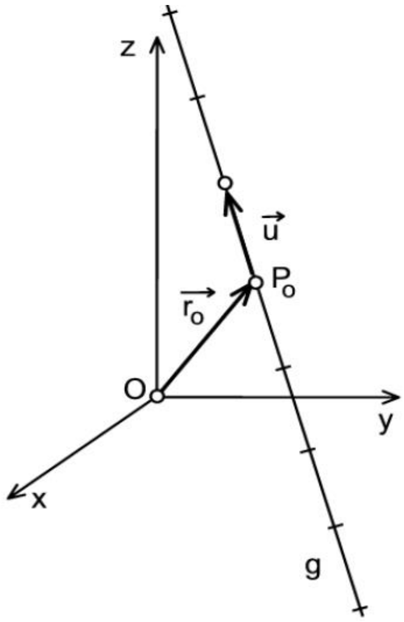
Aufgabe 6.3: **4 Punkte**

Welche geometrische Figur (Punkte, Halbgerade, Strecke) wird durch die Gleichung $\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{u}$ und die folgenden Parameter definiert? Zeichnen Sie die Lösung direkt in die Diagramme ein.

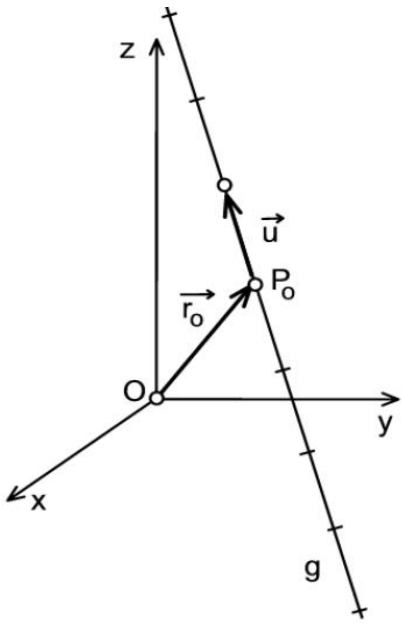
a) $t > 0 \ (t \in \mathbb{R})$



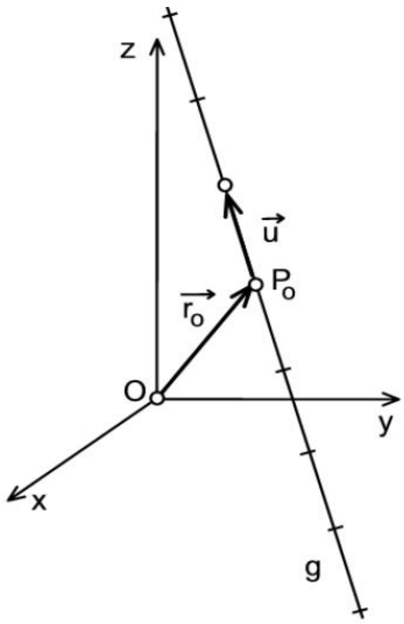
b) $-1 \leq t \leq 0 \ (t \in \mathbb{R})$



c) $|t| \leq 2 \ (t \in \mathbb{R})$



d) $|t| \leq 3 \ (t \in \mathbb{Z})$



Aufgabe 6.4: **8 Punkte**

Gegeben sind die zwei Punkte P(-1; 2) und Q(7; -4).

a) [6 P.] Bestimmen Sie

i) den Ortsvektor $\overrightarrow{OP} =$

ii) den Vektor $\overrightarrow{QP} =$

iii) die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ =

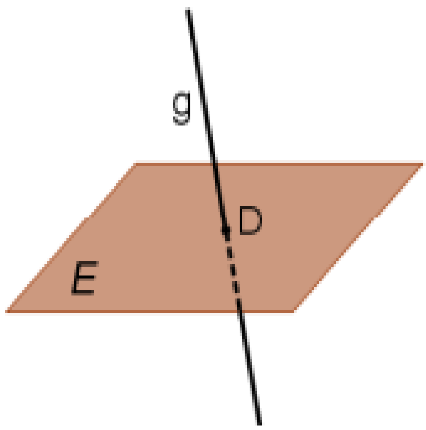
iv) den Einheitsvektor (= Vektor mit Länge 1) in Richtung $\overrightarrow{PQ} =$

v) die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{PQ}$

b) [2 P.] Wenn die Strecke PQ über Q hinaus verdoppelt wird, so erhalten wir den Punkt R. Wie lauten die Koordinaten des Punktes R?

Aufgabe 6.5: **11 Punkte**

Gegeben ist die Ebene E: $2x + 5y + 3z - 2 = 0$ und die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.



a) [4 P.] Bestimmen Sie den Durchstosspunkt D.
b) [3 P.] Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Normalenvektor auf der Ebene E und der Geraden.
c) [4 P.] Zeigen Sie, dass die Ebene E auch durch $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

Fortsetzung der Aufgabe 6.5:

Zusatzblatt: