HSLU Zulassungsstudium Formelsammlung

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Zahlen und Logik

1.1.1 Zahlenbereiche

*	Bedeutung	Beispiel
$\mathbb{N}$	Ganze Positive Zahlen	1;2;3;
$\mathbb{N}_0$	Ganze Positive Zahlen mit 0	0;1;2;
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	-1;0;1;
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen = Bruchzahlen	$\frac{3}{7}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{3}$
	Irrationale Zahlen = Nachkommastellen	0.3281
$\mathbb{R}$	Reele Zahlen = Q + Irrationale Zahlen	Alle

1.1.2 Summe und Produkte

Summezeichen:
Es sei: n, k $\in$ Z und n $\geq$ k

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

k heisst Laufvariable, Laufindex oder Summationsvariable
1 heisst Startwert oder untere Grenze
n heisst Endwert oder obere Grenze
a_k ist die Funktion bezueglich der Laufvariable

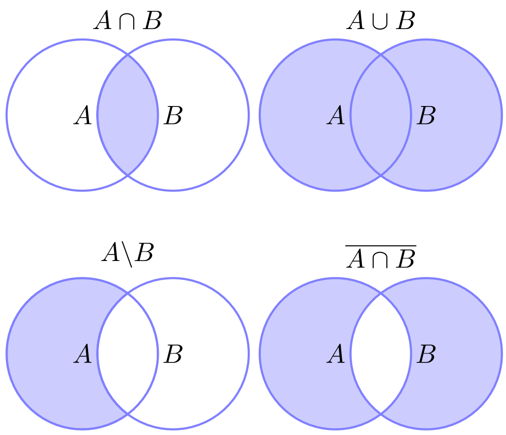
Produktzeichen:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

k heisst Laufvariable oder Laufindex
1 heisst Startwert oder untere Grenze
n heisst Endwert oder obere Grenze
a_k ist die Funktion bezueglich der Laufvariable

1.1.3 Mengen Operationen

*	Bedeutung
$\varnothing$ oder	Leere Menge, enthaelt keine Elemente
$x \in A$	Beschreibt Element x ist in Menge A
$x \notin A$	Beschreibt Element x ist nicht in Menge A
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge von B
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$A \backslash B$	Differenzbildung, Menge von A ohne B



*	Bedeutung	Beispiel
$\|A\|$	Kardinalitaet/Maechtigkeit beschreibt Anzahl Elemente einer Menge	A = 1;2 —$\|A\|$ = 2
$\wedge$	Konkuktion/UND A $\wedge$ B = Wahr wenn A und B beide Wahr sind	A $\wedge$ B A, B = W
$\vee$	Disjunktion/ODER A $\vee$ B = Wahr wenn A oder B jeweils Wahr ist	-1;0;1;
$\neg$	Negation A = Wahr$\neg$A = Falsch	$\neg$A
$\Longrightarrow$	Implikation: Daraus folgt	
$\Longleftrightarrow$	aequivalenz A $\Longleftrightarrow$ B wenn beide wahr oder falsch sind	
$\forall$	Fuer Alle	$\forall\ x \in \mathbb{N}$
$\exists$	Es Existiert	$\exists\ x \in \mathbb{N}$

A	B	A	$\wedge$	B	A	$\vee$	B	$\neg$	B	A	$\vee$	$\neg$	B
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	T	T	F	T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T	T	F

1.2 Aussagenlogik

1.2.1 Definitionen

Term: Ein Term ist eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern. Ein Term hat keinen Wahrheitsgehalt, ist also weder wahr noch falsch.
Aussage: Eine Aussage beschreibt durch Worte oder Zeichen einen Sachverhalt. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
Aussageform: Jeder sprachliche oder zeichensymbolische Ausdruck mit wenigstens einer Variablen wenn er durch jede sinnvolle Belegung der Variablen jeweils eine Aussage wird.

2 Gleichungen

2.1 Allgemein

2.1.1 Definitionen

Gleichungen Loesen
Jede Zahl aus der Definitionsmenge, die beim Einsetzen fuer x zu einer wahren Aussage fuehrt, heisst Loesung der Gleichung.
Grundmenge, Definitionsbereich $\mathbb{D}$
Die Menge aus der die Loesungen stammen duerfen.
Loesungsvariable
Variable nach der aufgeloest wird.
Formvariablen, Parameter
Alle anderen Variablen.
Loesungsmenge
Menge aller Elemente aus der Definitionsmenge, die zu einer wahren Aussage fuehren.
Aequivalenz
Zwei Gleichungen sind aequivalent, wenn beim Ersetzen der Variablen durch die gleichen Elemente der "gemeinsamen" Definitonsmenge entweder beide in eine wahre oder falsche Aussage uebergehen.

2.1.2 Aequivalenzumformungen

Umformungen einer Gleichung, bei denen die Loesungsmenge gleich bleibt, heissen aequivalenzumformungen.

1. Termunformungen
$2x + 5 - 3 = 0 \Longleftrightarrow 2x + 2 = 0$
2. Add./Sub.. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten
3. Mult./Div. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten
Achtung: Ausser mit 0
4. Beidseitige Add./Sub. mit dem gleichen Term
5. Beidseitige Mult./Div. mit dem gleichen Term

2.2 Lineare Gleichungen

2.2.1 Definition

Eine Gleichung, die sich durch aequivalenzumformungen in die Form $ax + b = 0$ bringen laesst, heisst lineare Gleichung. Wir koennen lineare Gleichungen daran erkennen, dass die Variable nur in der 1. Potenz auftritt, also kein x^2, x^3... enthalten.

2.2.2 Loesen einer linearen Gleichung

1. Gleichung nach x aufloesen
2. Loesungsmenge aufschreiben

2.3 Quadratische Gleichungen

2.3.1 Definition

Gleichungen, die sich durch aequivalenzumformungen auf die Form $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ bringen lassen, heissen quadratische Gleichungen. Wir koennen quadratische Gleichungen daran erkennen, dass die Variable x in der 2. Potenz x^2, aber in keiner hoeheren Potenz vorkommt. Es gibt 4 Arten/Formen von Quadratischen Gleichungen.

2.3.2 Loesen einer quadratischen Gleichung

Loesung einer Reinquadratische Gleichung $ax^2 = 0$
Reinquadratische Gleichungen ohne Absolutglied besitzen als einzige Loesung die Null.

1. Gleichung nach x^2 aufloesen
2. Wurzel ziehen
3. Loesungsmenge aufschreiben

Beispiel Loesung einer Reinquadratische Gleichung mit Absolutglied $ax^2 + c = 0$

1. Gleichung nach x^2 aufloesen
2. Wurzel ziehen
3. Loesungsmenge aufschreiben

Beispiel Loesung einer Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied $ax^2 + bx = 0$

1. Quadratische Gleichung in Normalform bringen
2. x ausklammern
3. Faktoren gleich Null setzen
4. Gleichung nach x^2 aufloesen
5. Loesungsmenge aufschreiben

2.3.3 Mitternachtsformel

Gemischtquadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit Absolutglied loesen wir mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fallunterscheidung:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uebersicht

	Allgemeine Form	**Normalform**
Reinquadratisch ohne Absolutglied	$2x^2 = 0$, $a = 2$, $b = 0$ und $c = 0$	$x^2 = 0$, $a = 1$, $b = 0$ und $c = 0$
Reinquadratisch mit Absolutglied	$2x^2 - 8 = 0$, $a = 2$, $b = 0$ und $c = -8$	$x^2 - 4 = 0$, $a = 1$, $b = 0$ und $c = -4$
Gemischtquadrat-isch ohne Absolutglied	$2x^2 - 8x = 0$, $a = 2$, $b = -8$ und $c = 0$	$x^2 - 4x = 0$, $a = 1$, $b = -4$ und $c = 0$
Gemischtquadrat-isch mit Absolutglied	$2x^2 - 8x + 6 = 0$, $a = 2$, $b = -8$ und $c = 6$	$x^2 - 4x + 3 = 0$, $a = 1$, $b = -4$ und $c = 3$

Regeln

Wenn das lineare Glied fehlt, gilt b = 0.
Wenn das absolute Glied fehlt, gilt c = 0.
Wenn das x^2 allein steht, gilt a = 0 (wegen $1 \cdot x^2 = x^2$).
Wenn das x allein steht, gilt (wegen $1 \cdot x = x$).

Loesen einer Quadratischen Gleichung mit Mitternachtsformel

1. Quadratische Gleichung in allgemeine Form bringen
2. a, b und c aus der allgemeinen Form herauslesen
3. a, b und c in die Mitternachtsformel einsetzen
4. Loesung berechnen
5. Loesungsmenge aufschreiben

2.4 Bruchgleichung

2.4.1 Definition

Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung mit mindestens einem Bruchterm, in dem die Variable x im Nenner vorkommt.

2.4.2 Loesen einer Bruchgleichung

1. Definitionsmenge bestimmen
2. Gleichung nach x aufloesen
3. Pruefen, ob der x-Wert in der Definitionsmenge ist
4. Loesungsmenge aufschreiben

2.4.3 Kehrwert

Wenn die Zaehler der Brueche nur aus Zahlen bestehen, kann eine Kehrwertbildung sinnvoll sein. Den Kehrwert eines Bruchs erhaelt man durch Vertauschen von Zaehler und Nenner.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{x+1}{2}$$

2.4.4 Multiplikation uebers Kreuz

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung jeweils ein Bruch steht, kann eine Multiplikation ueber Kreuz sinnvoll sein.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow 1 \cdot x+1 = 2 \cdot x$$

2.5 Betragsgleichung

2.5.1 Definition

Betragsgleichungen lassen sich durch Fallunterscheidung loesen.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{fuer } a \geq 0 \\ -a & \text{fuer } a < 0 \end{cases}$$

Aus der Definition des Betrags ergeben sich folgende zwei Faelle:

- Wenn der Term im Betrag groesser oder gleich Null ist ($a \geq 0$), koennen wir den Term einfach ohne Betragsstriche schreiben ($|a| = a$)
- Wenn der Term im Betrag kleiner als Null ist ($a < 0$) , muessen wir die Vorzeichen des Terms umdrehen, um die Betragsstriche weglassen zu koennen ($|a| = -a$).

Die Loesungsmengen der einzelnen Faelle geben wir als Intervalle an.
Die Loesungmenge der Gleichung ist die Vereinigungsmenge der einzelnen Loesungsmengen.

Fallunterscheidung

1. Betrag durch Fallunterscheidung aufloesen
2. Loesungsmengen der einzelnen Faelle bestimmen
3. Loesungsmenge der Betragsgleichung bestimmen

Aus der Definition des Betrags

$$|a| = \begin{cases} a & \text{fuer } a \geq 0 \\ -a & \text{fuer } a < 0 \end{cases}$$

ergeben sich folgende zwei Faelle: Wenn der Term im Betrag groesser oder gleich Null ist ($a \geq 0$), koennen wir den Term einfach ohne Betragsstriche schreiben ($|a| = a$).
Wenn der Term im Betrag kleiner als Null ist $a < 0$, muessen wir die Vorzeichen des Terms umdrehen, um die Betragsstriche weglassen zu koennen ($|a| = -a$).

Quadrieren

1. Betragsgleichung Quadrieren
2. Gleichung loesen

Durch Quadrieren verschwindet der Betrag, denn es gilt: $|a|^2 = a^2$.

2.6 Potenzgleichungen

2.6.1 Definition

Eine Potenzgleichung ist eine Gleichung, die aus nur einer Potenz einer Variable und einer Konstanten besteht: $x^n = a$

Die Vorgehensweise unterscheidet sich danach, wie der Exponent n aussieht:

1. Typ: $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}$
2. Typ: $x^{-n} = a$ mit $n \in \mathbb{N}$
3. Typ: $x^{\frac{m}{n}} = a$ mit $n \in \mathbb{N}$ und mit $m \in \mathbb{Z}$

Grundsaetzlich loesen wir Potenzgleichungen durch Wurzelziehen. Das Problem ist, dass das Wurzelziehen im Allgemeinen keine aequivalenzumformung ist. Um zu verhindern, das Loesungen verloren gehen, muss man bei geraden Exponenten Betragsstriche setzen:

- Wenn n gerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.
- Wenn n ungerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = x$.

2.6.2 Loesen einer Potenzgleichung

Typ 1: $x^n = a$ **(**$n \in \mathbb{N}$**;**$a \in \mathbb{R}$**)**
Vorgehensweise: n-te Wurzel ziehen
Moegliche Loesungen

	n ist gerade	**n ist ungerade**
$a > 0$	$\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}; +\sqrt[n]{a}\}$	$\mathbb{L} = \{+\sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$\mathbb{L} = \{0\}$	$\mathbb{L} = \{0\}$
$a < 0$	$\mathbb{L} = \{\}$	$\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\}$

Die Loesung der Potenzgleichung $x^3 = 8$ ist $\mathbb{L} = \{2\}$.

Typ 2: $x^{-n} = a$
Vorgehensweise: Umformung der Gleichung zu Typ 1 (falls $a \neq 0$)
Moegliche Loesungen

- $a = 0$ Es gibt keine Loesung $\mathbb{L} = \{\}$.
- $a \neq 0$ Die Gleichung $x^{-n} = a$ ist aequivalent zu $x^n = \frac{1}{a}$.

Typ 3: $m \in \mathbb{Z}$
Vorgehensweise: Potenzieren mit n
Ist der Exponent $\frac{m}{n}$ keine ganze Zahl, so sind die Gleichungen in $\mathbb{R}^-$ nicht definiert. In $\mathbb{R}_0^+$ sind die Gleichungen $x^{\frac{m}{n}} = a$ und $\sqrt[n]{x^m} = a$ aequivalent.

2.7 Wurzelgleichung

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der die Variable (auch) unter einer Wurzel vorkommt.

1. Wurzeln beseitigen
   (a) Wurzel isolieren
   (b) Potenzieren
2. Algebraische Gleichung loesen
3. Probe Machen
4. Loesungsmenge aufschreiben

Erklaerung:
Wurzel isolieren = Gleichung so umformen, dass die Wurzel allein auf einer Seite steht.

Um die Wurzel $\sqrt[n]{x}$ zu beseitigen, muessen wir sie mit dem Wurzelexponenten potenzieren. Das Potenzieren mit 2, um eine Quadratwurzel $\sqrt{x}$ zu beseitigen, heisst auch "Quadrieren".

Ziel des Potenzierens aus Schritt 1.2 ist es, die Wurzelgleichung in eine algebraische Gleichung (z.B. lineare Gleichung, quadratische Gleichung oder kubische Gleichung) zu ueberfuehren. Diese Gleichung koennen wir dann mit den bekannten Methoden loesen.

Das Potenzieren aus Schritt 1.2 ist i. Allg. keine aequivalenzumformung: Durch das Potenzieren koennen Loesungen (sog. Scheinloesungen) hinzukommen, es gehen aber keine verloren. Um Scheinloesungen auszusortieren, machen wir die Probe, d.h., wir setzen die moeglichen Loesungen in die Ausgangsgleichung ein. Nur die Loesungen, die zu einer wahren Aussage fuehren, gehoeren auch wirklich zur Loesung der Wurzelgleichung.

2.8 Exponential- und Logarithmusgleichungen

2.8.1 Definition

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Exponenten einer Potenz steht.
Eine Logarithmusgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Numerus des Logarithmus steht.

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$$

Logarithmen mit der Basis e (der eulerschen Zahl) heissen natuerliche Logarithmen.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$\exp x = e^x$ und $\ln x$ sind Kehrwertfunktionen

$$e^{\ln x} = x \text{ and } \ln e^x = x.$$

Exponentenregeln fuer Exponentengleichung

$$e^x e^y = e^{x+y},\ \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \text{ and } (e^x)^k = e^{xk}.$$

Exponentenregeln fuer Logarithmengleichung

$$\ln x + \ln y = \ln xy,\ \ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right), \text{ and } \ln\left(a^b\right) = b \ln a.$$

Wir koennen auch einen Logarithmus jeder Basis schreiben, indem wir natuerliche Logarithmen verwenden:

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Loesung mithilfe der Definition des Logarithmus
Eine Loesung mithilfe der Definition des Logarithmus ist nur dann moeglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so umzuformen, dass sich auf der einen Seite ein Logarithmus und auf der anderen Seite eine Konstante ergeben.

Definitionsmenge einer Logarithmusgleichung
Da $\log_b x = a$ nur fuer $x > 0$ definiert ist, kann die Definitionsmenge eingeschraenkt sein. In der Praxis bedeutet das, dass wir stets die Probe machen sollten, d.h. ueberpruefen, ob die berechneten Loesungen eingesetzt in die gegebene Gleichung zu einer wahren Aussage fuehren.

2.9 Lineare Gleichungssysteme

2.9.1 Definition

Mehrere lineare Gleichungen, die alle zusammen gelten sollen, bilden ein lineares Gleichungssystem.

2.9.2 Gleichsetzungsverfahren

1. Gleichungen nach der gleichen Variable aufloesen
2. Gleichungen gleichsetzen
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable aufloesen
4. Berechneten Wert in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Loesungsmenge aufschreiben

2.9.3 Einsetzungsverfahren

1. Eine Gleichung nach einer Variable aufloesen
2. Berechneten Term fuer diese Variable in die andere Gleichung einsetzen
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable aufloesen
4. Berechneten Wert in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Loesungsmenge aufschreiben

2.9.4 Additionsverfahren

1. Gleichungen so umformen, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden
2. Gleichungen addieren
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable aufloesen
4. Berechneten Wert in eine der urspruenglichen Gleichungen einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Loesungsmenge aufschreiben

Damit die Koeffizienten der Variablen Gegenzahlen werden, bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Koeffizienten und formen die Gleichungen anschliessend entsprechend um.

2.10 Ungleichungen

2.10.1 Definition

Eine Ungleichung ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Termen besteht, die durch eines der Vergleichszeichen ¡ (Kleinerzeichen), $\leq$ (Kleinergleichzeichen), ¿ (Groesserzeichen) oder $\geq$ (Groessergleichzeichen) verbunden sind.

2.10.2 Lineare Ungleichungen

1. Ungleichung nach x aufloesen
2. Loesungsmenge aufschreiben

- Terme auf beiden Seiten der Ungleichung zusammenfassen
- Denselben Term auf beiden Seiten der Ungleichung addieren/subtrahieren
- Beide Seiten der Ungleichung mit derselben positiven* Zahl multiplizieren
- Beide Seiten der Ungleichung durch dieselbe positive* Zahl dividieren

* Bei der Multiplikation bzw. Division mit einer negativen Zahl muessen wir das Ungleichungszeichen umdrehen.

3 Funktionen

3.1 Allgemein

3.1.1 Definition

Eine Funktion f ist eine Zuordnung, bei der jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element y der Wertemenge W zugeordnet ist.

Symbol	Bedeutung
f	Name der Funktion
x	Argument, x-Wert, unabhaengige Variable
y	Funktionswert, y-Wert, abhaengige Variable
$y = f(x)$	Funktionsgleichung, Zuordnungsvorschrift*!
D oder $\mathbb{D}$	Definitionsmenge, Definitionsbereich
W oder$\mathbb{W}$	Wertemenge, Wertebereich

3.2 Lineare Funktionen

3.2.1 Definiton

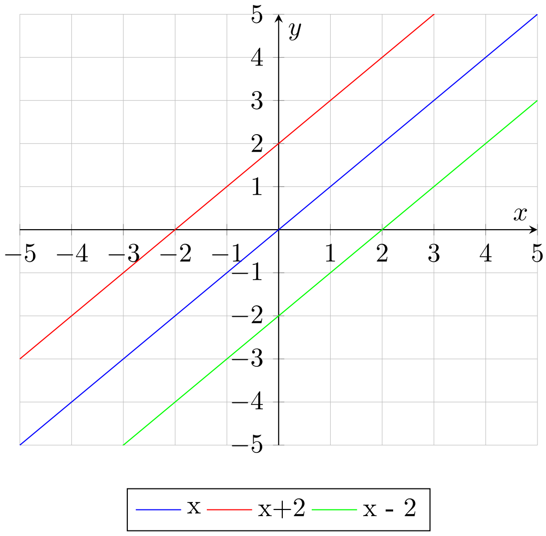
Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = mx+n$ heisst lineare Funktion.
Wegen $y = f(x)$ koennen wir statt $f(x) = mx + n$ auch $y = mx + n$ schreiben:

- y: Abhaengige Variable, y-Wert, Funktionswert
- m: Steigung
- x: Unabhaengige Variable, x-Wert, (Funktions-)Argument
- n : y-Achsenabschnitt

3.2.2 Achsenabschnitte veraendern

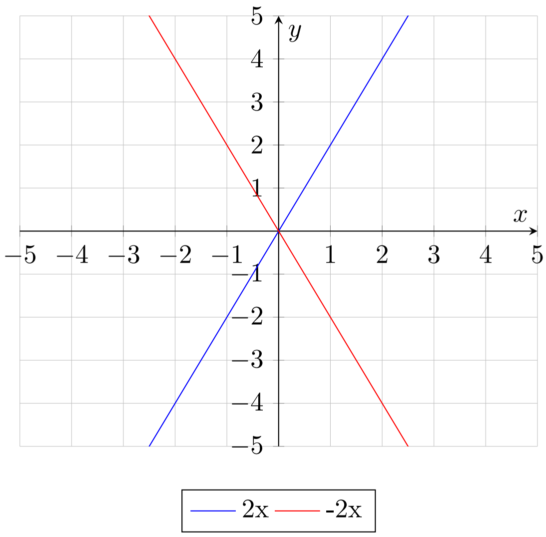
Wenn wir den y-Achsenabschnitt n in $f(x) = mx + n$ veraendern, passiert Folgendes:

- Gilt $n > 0$, ist die Gerade nach oben verschoben.
- Gilt $n < 0$, ist die Gerade nach unten verschoben.



Wenn wir die Steigungt m in $f(x) = mx + n$ veraendern, passiert Folgendes:

- Gilt $m > 0$, steigt die Gerade.
- Gilt $m < 0$, faellt die Gerade.



3.2.3 Nullstelle berechnen

Berechne die Nullstelle der linearen Funktion $y = 3x + 3$.
Wir setzen die Funktion gleich Null, d.h. wir setzen fuer den y Wert 0 ein: $0 = 3x + 3$
Jetzt muessen wir die Gleichung nach x aufloesen, um die gesuchte Nullstelle zu finden.

3.2.4 Steigung berechnen

Wir lesen zwei beliebige Punkte ab:

$$P_0(0|1) \text{ und } P_1(4|3)$$

und setzen sie in die Steigungsformel ein:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{3 - (1)}{4 - 0} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.2.5 Schnittpunkt berechnen

Ein Schnittpunkt existiert nur, wenn die beiden gegebenen Geraden eine unterschiedliche Steigung besitzen.

$$g\colon \; y = 2x + 1$$

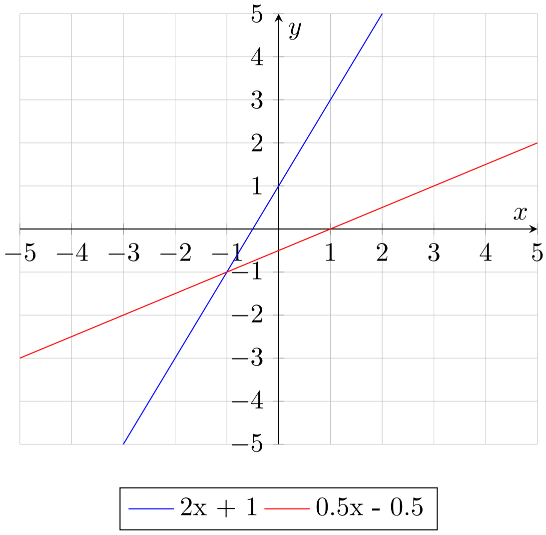
$$h\colon \; y = 2x + 3$$

Die Geraden besitzen dieselbe Steigung das heisst: **Es existiert kein Schnittpunkt**.
Ansonsten gilt:

1. Funktionsgleichungen gleichsetzen
2. Gleichung nach x aufloesen
3. x in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, um y zu berechnen
4. Ergebnis aufschreiben

3.2.6 Umkehrfunktion bilden

1. Funktionsgleichung nach x aufloesen
2. x und y vertauschen



3.3 Quadratische Funktionen

3.3.1 Definition

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ heisst quadratische Funktion. Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

3.3.2 Quadratische Funktion Zeichnen

Dazu berechnen wir zunaechst einige Funktionswerte:

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = 0^2 = 0$$

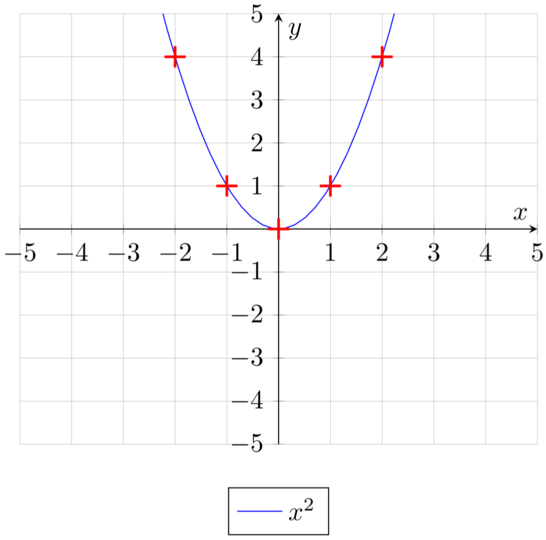
$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

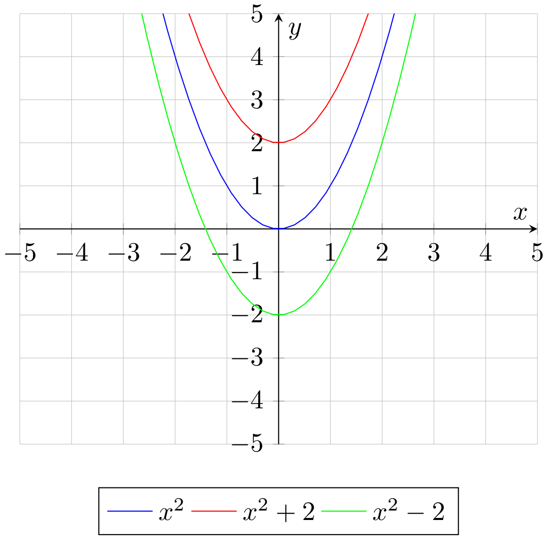
Der uebersichtlichkeit halber fassen unsere Berechnungen in einer Wertetabelle zusammen:

x-Werte	-2	-1	0	1	2
y-Werte	4	1	0	1	4

Wenn wir jetzt die berechneten Punkte in ein Koordinatensystem eintragen und anschliessend die Punkte verbinden, erhalten wir den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$, die sog. Normalparabel.



3.3.3 Normalparabel nach oben/unten verschieben



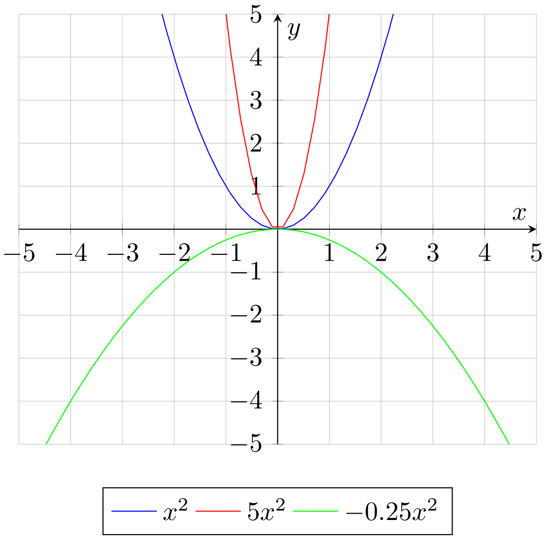
$$f(x) + c = \begin{cases} \text{Verschiebung nach oben} & \text{fuer } c > 0 \\ \text{Verschiebung nach unten} & \text{fuer } c < 0 \end{cases}$$

3.3.4 Normalparabel stauchen/strecken

Moechte man die Normalparabel stauchen oder strecken, muss man sich die Parabelgleichung $f(x) = ax^2$ anschauen.

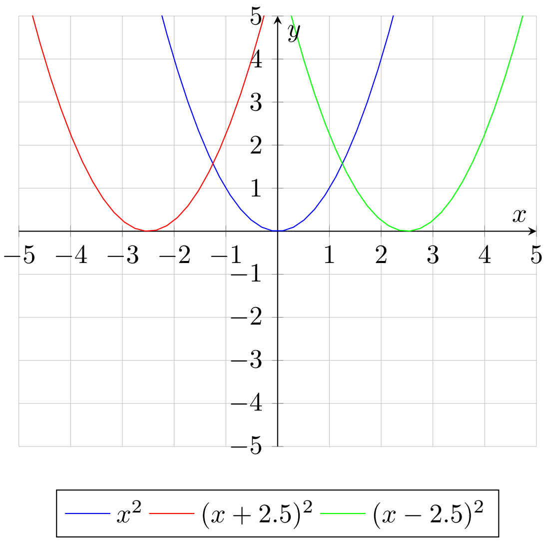
$a > 1$	Die Parabel ist nach oben geoeffnet und schmaler* als die Normalparabel
$a = 1$	Die nach oben geoeffnete Normalparabel
$0 < a < 1$	Die Parabel ist nach oben geoeffnet und breiter** als die Normalparabel
$-1 < a < 0$	Die Parabel ist nach unten geoeffnet und breiter** als die Normalparabel
$a = -1$	Die nach unten geoeffnete Normalparabel
$a < -1$	Die Parabel ist nach unten geoeffnet und schmaler* als die Normalparabel

* gestreckt, ** gestaucht



3.3.5 Parabel verschieben entlang der x-Achse

$$f(x + d) = \begin{cases} \text{Verschiebung nach rechts} & \text{fuer } d < 0 \\ \text{Verschiebung nach links} & \text{fuer } d > 0 \end{cases}$$



3.3.6 y-Achsenabschnitt berechnen

Die x-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse ist immer Null.
Bei quadratischen Funktionen laesst sich der y-Achsenabschnitt aus der Funktionsgleichung ablesen: Der y-Achsenabschnitt von $y = ax^2 + bx + c$ ist $y = c$.

3.3.7 Nullstellen berechnen

1. Funktionsgleichung gleich Null setzen
2. Gleichung loesen

Da die y-Koordinate eines Schnittpunktes mit der x-Achse immer Null ist, lautet der Ansatz zur Berechnung einer Nullstelle: $y = 0$. Wegen $y = f(x)$ kann man auch $f(x) = 0$ schreiben.

Fall 1: $f(x) = ax^2$

Funktionen vom Typ $f(x) = ax^2$ besitzen als einzige Nullstelle die Null.

Fall 2: $f(x) = ax^2 + c$.

1. Funktionsgleichung gleich Null setzen
2. Gleichung nach x^2 aufloesen
3. Wurzel ziehen

Fall 3: $f(x) = ax^2 + bx$.

1. Funktionsgleichung gleich Null setzen
2. Gleichung nach x ausklammern
3. Faktoren gleich Null setzen

Fall 4: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Quadratische Gleichungen dieses Typs loesen wir mit der Mitternachtsformel

3.4 Potenzfunktionen

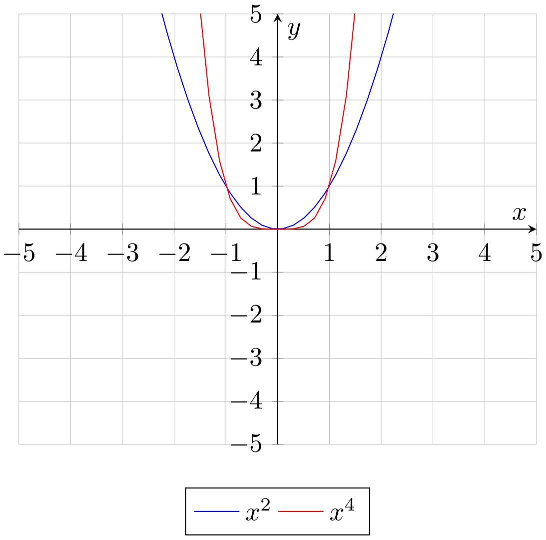
3.4.1 Definition

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ heisst Potenzfunktion.

3.4.2 Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunaechst einige Funktionswerte:

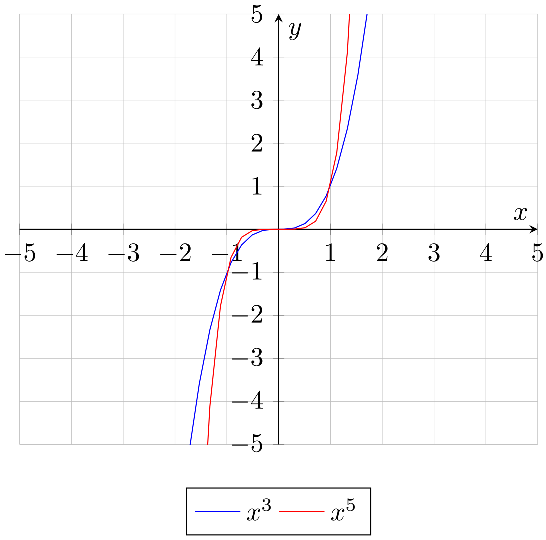
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^2	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25
x^4	5,0625	1	0,0625	0	0,0625	1	5,0625



3.4.3 Ungerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^5$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunaechst einige Funktionswerte:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^3	$-3{,}375$	-1	$-0{,}125$	0	0,125	1	3,375
x^5	$-7{,}59375$	-1	0,03125	0	0,03125	1	7,59375



3.4.4 Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten $f(x) = x^n$ haben folgende Eigenschaften:

	n gerade	**n ungerade**
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-ache	punktsymetrisch zum K-Ursprung
Gemeinsame Punkte	$(-1,1)$,$(0\|0)$,$(1\|1)$	$(-1,-1)$,$(0\|0)$,$(1\|1)$

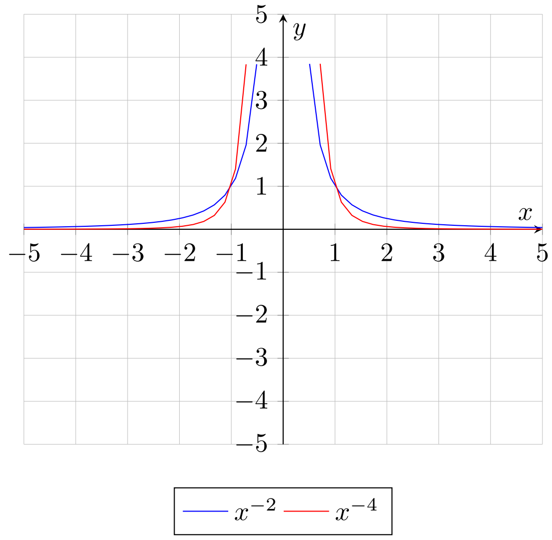
3.5 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Die Graphen von Potenzfunktionen heissen Hyperbeln n-ter Ordnung, wenn der Exponent negativ ist.

3.5.1 Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^{-2}$ und $f(x) = x^{-4}$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunaechst einige Funktionswerte:

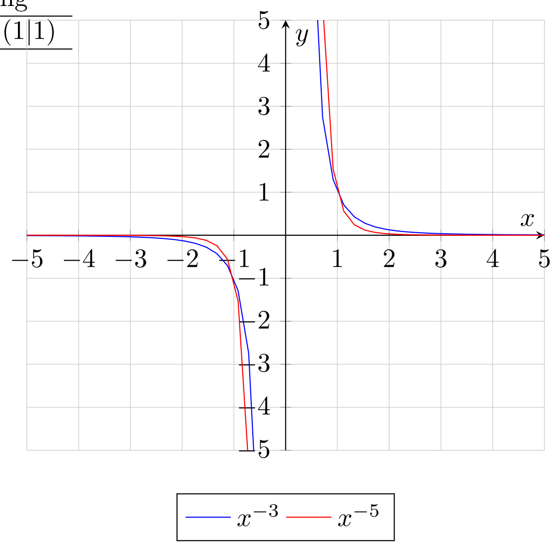
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^{-2}	$0{,}\bar{4}$	1	4	4	1	$0{,}\bar{4}$
x^{-4}	$\approx 0{,}1975$	1	16	16	1	$\approx 0{,}1975$



3.5.2 Gerade Exponenten

Als Beispiele dienen die Funktionen $f(x) = x^{-3}$ und $f(x) = x^{-5}$.
Um die Graphen besser zu zeichnen, berechnen wir zunaechst einige Funktionswerte:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
x^{-3}	$\approx -0{,}2963$	-1	-8	8	1	$\approx 0{,}2963$
x^{-5}	$\approx -0{,}1317$	-1	-32	32	1	$\approx 0{,}1317$



3.5.3 Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten $f(x) = x^{-n}$ haben folgende Eigenschaften:

	n gerade	**n ungerade**
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-ache	punktsymetrisch zum K-Ursprung
Gemeinsame Punkte	$(-1,1)$,$(1\|1)$	$(-1,-1)$,$(1\|1)$
Asymptoten	x-Achse, y-Achse	x-Achse, y-Achse

3.6 Wurzelfunktion

3.6.1 Definition

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen. Die Eigenschaften der Funktionen unterscheiden sich danach, ob die (Wurzel-)Exponenten gerade oder ungerade sind.

3.6.2 Gerader Wurzelexponent

Wir wollen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $y = x^2$ bilden.
Eine Umkehrfunktion existiert immer dann, wenn die Funktion entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist. Bei der Funktion $y = x^2$ treten jedoch beide Faelle auf. Daraus folgt: Die Funktion $y = x^2$ ist fuer $x \in \mathbb{R}$ nicht umkehrbar.

Loesung

Wir beschraenken die Definitionsmenge auf einen Bereich, in dem die Funktion entweder nur streng monoton fallend ($x \leq 0$) oder nur streng monoton steigend ($x \geq 0$) verlaeuft.

Fall 1: $x \leq 0$

Fuer $x \leq 0$ ist die Funktion $y = x^2$ streng monoton fallend und somit umkehrbar:

1) Funktionsgleichung nach x aufloesen

$$
\begin{aligned}
f\colon\ y &= x^2 && \mid \text{Wurzel ziehen} \\
\sqrt{y} &= \sqrt{x^2} \\
\sqrt{y} &= |x| && \mid \text{Betrag aufloesen: } |x| = -x \text{ wegen } x \leq 0 \\
\sqrt{y} &= -x && \mid \cdot(-1) \\
-\sqrt{y} &= x && \mid \text{Seiten vertauschen} \\
x &= -\sqrt{y}
\end{aligned}
$$

2) x und y vertauschen

$$f^{-1}\colon\ y = -\sqrt{x}$$

Um die Graphen der Funktionen ordentlich zu zeichnen, fertigen wir zwei Wertetabellen an.

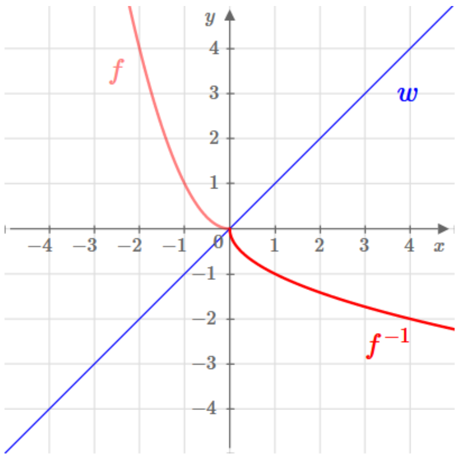
$f\colon$

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0
y	4	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0

Die Wertetabelle von f^{-1} erhaelt man durch Vertauschen der Zeilen der Wertetabelle von f.

$f^{-1}\colon$

x	4	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0
y	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0



Fall 2: $x \geq 0$

Fuer ist die Funktion$x \geq 0$ streng monoton steigend und somit umkehrbar:

1) Funktionsgleichung nach x aufloesen

$$
\begin{aligned}
f\colon\ y &= x^2 && \mid \text{Wurzel ziehen} \\
\sqrt{y} &= \sqrt{x^2} \\
\sqrt{y} &= |x| && \mid \text{Betrag aufloesen: } |x| = x \text{ wegen } x \geq 0 \\
\sqrt{y} &= x && \mid \text{Seiten vertauschen} \\
x &= \sqrt{y}
\end{aligned}
$$

2) x und y vertauschen

$$f^{-1}\colon\ y = \sqrt{x}$$

Um die Graphen der Funktionen ordentlich zu zeichnen, fertigen wir zwei Wertetabellen an.

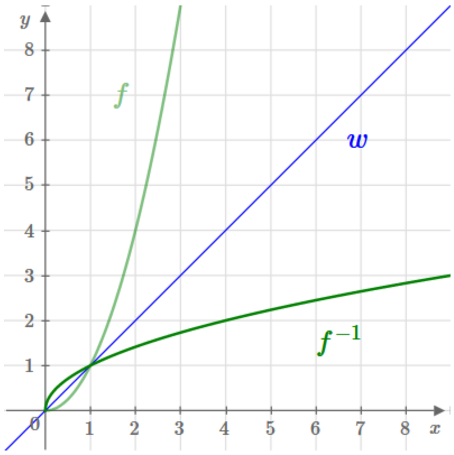
$f\colon$

x	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
y	0	$0{,}25$	1	$2{,}25$	4

Die Wertetabelle von f^{-1} erhaelt man durch Vertauschen der Zeilen der Wertetabelle von f.

$f^{-1}\colon$

x	0	$0{,}25$	1	$2{,}25$	4
y	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2



3.6.3 Ungerader Wurzelexponent

Wir wollen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $y = x^3$ bilden.
Da Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten in $\mathbb{R}$ ganz streng monoton steigend sind, muessen wir die Definitionsmenge nicht einschraenken, um eine Umkehrfunktion zu bilden.

1) Funktionsgleichung nach x aufloesen

$$f:\ y = x^3 \qquad |\ \text{Wurzel ziehen}$$
$$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3}$$
$$\sqrt[3]{y} = x \qquad |\ \text{Seiten vertauschen}$$
$$x = \sqrt[3]{y}$$

2) x und y vertauschen

$$f^{-1}:\ y = \sqrt[3]{x}$$

Um die Graphen der Funktionen ordentlich zu zeichnen, fertigen wir zwei Wertetabelle an.

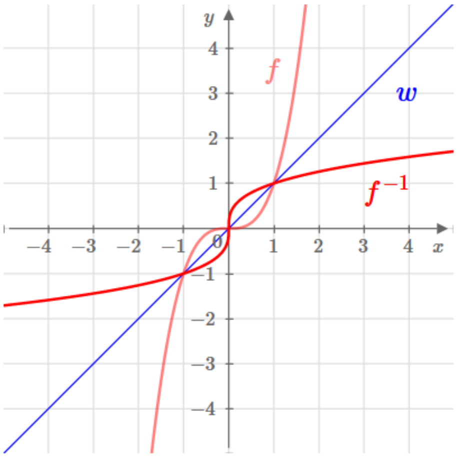
$f:$

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
y	-8	$-3{,}375$	-1	$-0{,}125$	0	$0{,}125$	1	$3{,}375$	8

Die Wertetabelle von f^{-1} erhaelt man durch Vertauschen der Zeilen der Wertetabelle von f.

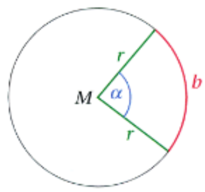
$f^{-1}:$

x	-8	$-3{,}375$	-1	$-0{,}125$	0	$0{,}125$	1	$3{,}375$	8
x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2



4 Trigonometrie

4.1 Gradmass, Bogenmass

Gradmass	Grösse des Winkels α (β, γ, δ, ...) bezogen auf den Vollwinkel. Ein Winkel mit der Grösse von einem **Grad** ist der 360ste Teil des ebenen Vollwinkels (Schreibweise 1°). Ein Winkel dieser Grösse ergibt sich, indem ein Kreis durch Radien in 360 deckungsgleiche Teile zerlegt wird.
Bogenmass	Grösse des (Zentri-) Winkels α als Verhältnis von Bogenlänge b zu Radius r (bzw. als Masszahl der Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis): $\text{arc}\ \alpha = \hat{\alpha} = \frac{b}{r}$ Ein Winkel hat die Grösse von einem **Radiant** (Schreibweise: 1 rad), wenn b = r gilt (bzw. wenn die Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis den Wert 1 hat). 
Umrechnung	Der Umfang eines Kreises mit Radius r = 1 beträgt 2π. Somit kann man den Bogen b = 2π den vollen Winkel 360° Grad zuordnen. $b : \alpha = 2\pi : 360$ **Umrechnung von Grad- in Bogenmass:** $b = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$ $\quad 1° \approx 0.01475$ rad **Umrechnung von Bogen- in Gradmass:** $\alpha = \frac{180° \cdot b}{\pi}$ $\quad 1$ rad $\approx 57{,}296°$

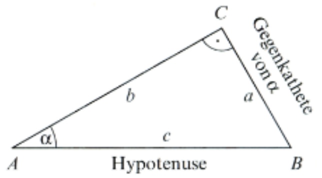
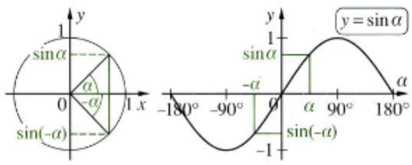
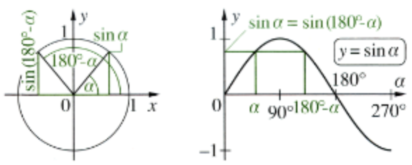
Bogenmass spezieller (im Gradmass gegebener) Winkel

Gradmass	30°	45°	60°	90°	180°	360°	57°17‘45“	57.29577°
Bogenmass	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad	1 rad

4.2 Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck

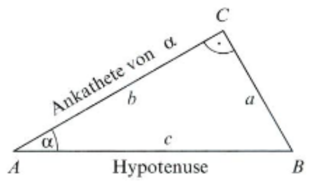
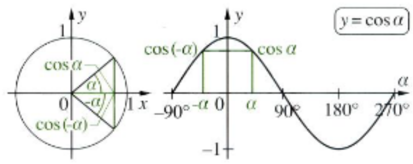
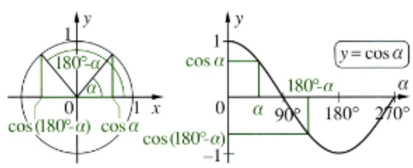
4.2.1 Sinus, Kosekans

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Sinuswert	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Definition des Sinus, Kosekans von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Gegenkathete** von α zur **Hypotenuse** den **Sinus** (sin) von α	$\sin(\alpha) = \dfrac{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}{\textbf{Hypotenuse}}$ $\sin(\alpha) = \dfrac{GK}{H} = \dfrac{a}{c}$	
Die **Arkusfunktion Sinus** (arc sin / inv sin) ist die **Umkehrfunktion** von Sinus.	$\alpha = \arcsin\left(\dfrac{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}{\textbf{Hypotenuse}}\right)$ $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{GK}{H}\right) = \arcsin\left(\dfrac{a}{c}\right)$	
Der **Kehrwert** von **Sinus** wird als **Kosekans** (csc) bezeichnet.	$\csc(\alpha) = \dfrac{\textbf{Hypotenuse}}{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}$ $\csc(\alpha) = \dfrac{H}{GK} = \dfrac{c}{a}$	

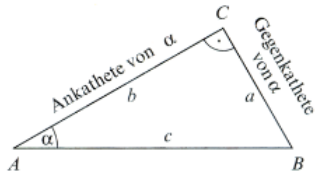
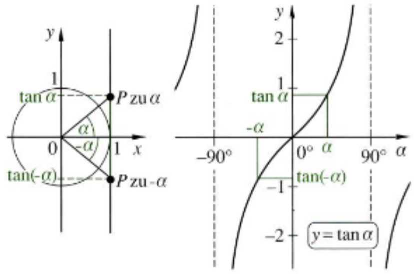
4.2.2 Kosinus, Sekans

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Kosinuswert	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

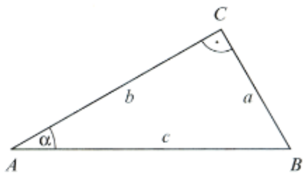
Definition des Kosinus von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Ankathete** von α zur **Hypotenuse** den **Kosinus** (cos) von α	$\cos(\alpha) = \dfrac{\textbf{Ankathete von } \alpha}{\textbf{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \dfrac{AK}{H} = \dfrac{b}{c}$	
Die **Arkusfunktion Kosinus** (arc cos / inv cos) ist die **Umkehrfunktion** von Kosinus.	$\alpha = \arccos\left(\dfrac{\textbf{Ankathete von } \alpha}{\textbf{Hypotenuse}}\right)$ $\alpha = \arccos\left(\dfrac{AK}{H}\right) = \arccos\left(\dfrac{b}{c}\right)$	
Der **Kehrwert** von **Kosinus** wird als **Sekans** (sec) bezeichnet.	$\sec(\alpha) = \dfrac{\textbf{Hypotenuse}}{\textbf{Ankathete von } \alpha}$ $\sec(\alpha) = \dfrac{H}{AK} = \dfrac{b}{c}$	

4.2.3 Tangens, Kotangens

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Tangenswert	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Definition des Tangens von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Gegenkathete** von α zur **Ankathete** den **Tangens** (tan) von α	$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$ $\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK} = \frac{a}{b} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$	
Die **Arkusfunktion Tangens** (arc tan / inv tan) ist die **Umkehrfunktion** von Tangens.	$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}\right)$ $\alpha = \arctan\left(\frac{GK}{AK}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$	
Der **Kehrwert** von **Tangens** wird als **Kotangens** (cot) bezeichnet.	$\cot(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha}$ $\cot(\alpha) = \frac{AK}{GK} = \frac{b}{a} = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$	

4.2.4 Sinus- Kosinus- und Tangensfunktion am rechtwinkligen Dreieck

Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion	
Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel γ bei C gilt:	
$\text{Sinus eines Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\text{Kosinus eines Winkels} = \frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$
$\text{Tangens eines Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Ankathete des Winkels}}$	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\tan\beta = \frac{b}{a}$

4.3 Trigonometrische Funktionen am schiefwinkligen Dreieck

4.3.1 Kosinussatz

Wir teilen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke und suchen nach einer Beziehung zwischen den Seiten a und b sowie dem Winkel α und β.

Herleitung Sinussatz

Im **roten** Teildreieck gilt:

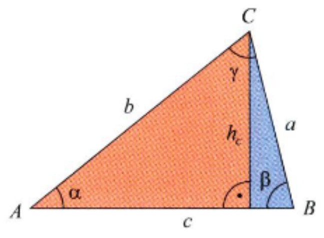
$$\sin(\alpha) = \frac{GK}{H} = \frac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h_c = b \cdot \sin(\alpha)$$

Im **blauen** Teildreieck gilt:

$$\sin(\beta) = \frac{GK}{H} = \frac{h_c}{a} \quad \Rightarrow \quad h_c = a \cdot \sin(\beta)$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \text{const.}$$

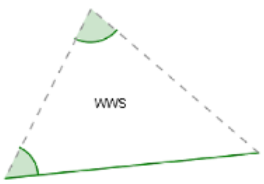


Analog kann man mit den beiden anderen Höhen des Dreiecks gleich verfahren.

In jedem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ ist das **Verhältnis** der **Länge einer Seite** zum **Sinus** des **gegenüberliegenden Winkels** gleich dem Durchmesser des Umkreises.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin(\alpha)}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin(\beta)}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{\sin(\gamma)}} = \mathbf{2r}$$

Der Sinussatz kann verwendet werden, wenn zwei Winkel und eine Seite (wsw und wws) gegeben sind. Zudem kann er auch angewandt werden, wenn zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind. (Das entspricht den Gegebenheiten der Kongruenzsätze WSW und SsW, vgl. 1.2.5.)

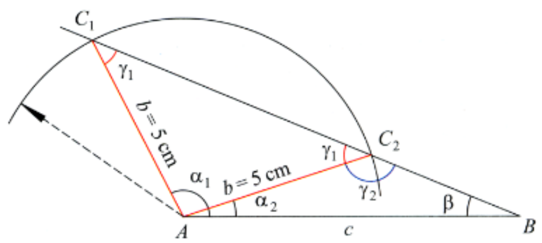


Liegt bei ssw der Winkel der grösseren Seite gegenüber (Ssw), dann gibt es <u>ein</u> mögliches Dreieck.

Liegt jedoch der Winkel der kleineren Seite gegenüber (sSw), dann gibt es wie beim Konstruieren erkennbar <u>zwei Lösungen</u>.

Der Rechner liefert nur die spitzwinklige ($\alpha < 90°$) Lösung α_1, die stumpfwinklige ($\alpha > 90°$) α_2 kann mit folgender Formel berechnet werden:
$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$.

Musterbeispiel:
Gegeben: Dreieck $\triangle ABC$ mit b = 5cm, c = 8cm und $\beta = 20°$
Gesucht: Winkel α und γ



$$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{c \cdot \sin(\beta)}{b}\right) = \arcsin\left(\frac{8 \cdot \sin(20°)}{5}\right) = 33.2°$$

$$\gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 180° - 33.2° = 146.8°$$

4.3.2 Sinussatz

Wir teilen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke und suchen nach einer Beziehung zwischen den Seiten a, b und c sowie dem Winkel α.

Herleitung Kosinussatz

Im **roten** Teildreieck gilt nach Pythagoras:

$b^2 = h_c^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad h_c^2 = b^2 - x^2$

Im **blauen** Teildreieck gilt nach Pythagoras:

$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 \quad \Rightarrow \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$

Gleichsetzen und nach a2 auflösen:

$a^2 - (c-x)^2 = b^2 - x^2$

$a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$

$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$

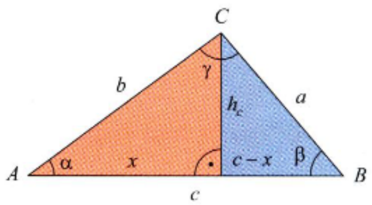
$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

Im **roten** Teildreieck gilt weiter:

$\cos(\alpha) = \frac{AK}{H} = \frac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad x = b \cdot \cos(\alpha)$

Durch einsetzten erhalten wir:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$



Analog kann man mit den beiden anderen Höhen des Dreiecks gleich verfahren.

In jedem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ ist das **Quadrat** der **Länge einer Seite** aus dem **gegenüberliegenden Winkel** und den **anliegenden Seiten** berechenbar.

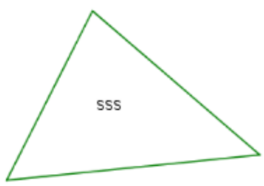
$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)}$$

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \qquad \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Den Kosinussatz können wir verwenden, wenn zwei Seiten und der dazwischenliegende Winkel (sws) oder drei Seiten gegeben sind (sss).



Der Kosinussatz gilt auch dann, wenn der jeweilige Winkel grösser als 90°, also ein stumpfer Winkel ist.

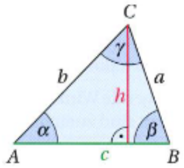
4.3.3 Flaechensatz

Flächensatz

Kennt man von einem Dreieck die beiden Seiten b und c sowie den dazwischen liegenden Winkel α, so ist der Flächeninhalt A der Dreiecksfläche gegeben durch:

$$\mathbf{A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)}$$

Die Gleichung gilt auch für stumpfe Winkel $\alpha \in]90°; 180]$. $(90° < \alpha \leq 180°)$



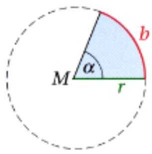
4.3.4 Berechnung am Kreissektor (auch Kreisausschnitt)

Berechnung am Kreissektor (auch Kreisausschnitt)

Zur Berechnung der Bogenlänge oder der Sektor-Fläche kann das Bogenmass verwendet werden. Wir bezeichnen den Winkel im Bogenmass mit $\widehat{\varphi}$.
Wir können nun die bekannten Formeln auch im Bogenmass angeben, wenn wir die Umrechnungsformel $\widehat{\varphi} = \frac{\pi \cdot \varphi}{180°}$ verwenden und einsetzen.

$$\mathbf{b = \frac{r \cdot \pi \cdot \varphi}{180°} = \widehat{\varphi} \cdot r}$$

$$\mathbf{A_{Sektor} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°} = \frac{r^2 \cdot \widehat{\varphi}}{2} = \frac{b \cdot r}{2}}$$



4.3.5 Kreissegment (auch Kreisabschnitt)

Flächensatz

Durch den Flächensatz (vgl. 3.4.3) gilt:

$$A_{Dreieck} = \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin(\varphi)$$

Berechnung des Kreissektors (vgl. 3.4.4):

$$A_{Sektor} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°}$$

Kreissegment:

$$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{Dreieck}$$

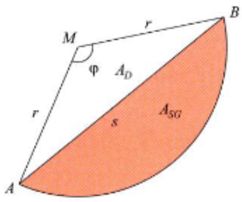
$$A_{SG} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°} - \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\varphi)$$

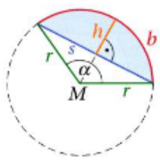
$$A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \varphi}{180°} - \sin(\varphi)\right)$$

Der Flächeninhalt der **Segmentfläche A_{SG}** kann aus dem **Radius r** und dem **Zentriwinkel φ** berechnet werden:

$$\mathbf{A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \varphi}{180°} - \sin(\varphi)\right)}$$

$$\mathbf{A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot (\widehat{\varphi} - \sin(\widehat{\varphi}))}$$





4.4 Einheitskreis

4.4.1 Definition

Der Einheitskreis ist ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius r = 1 Laengeneinheit.

4.4.2 Sinus- und Kosinusfunktion

Sinus- und Kosinusfunktion

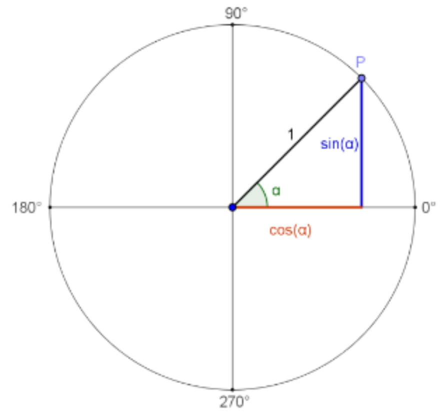
Am Einheitskreis gilt für einen beliebigen Punkt P (X_P; Y_P) auf der Kreislinie und den zugehörigen Zentriwinkel α:

Die **y-Koordinate** des Punktes P ist der **Sinuswert** von α:

$$y_p = \sin(\alpha)$$

Die **x-Koordinate** des Punktes P ist der **Kosinuswert** von α:

$$x_p = \cos(\alpha)$$



4.4.3 Tangentsfunktion

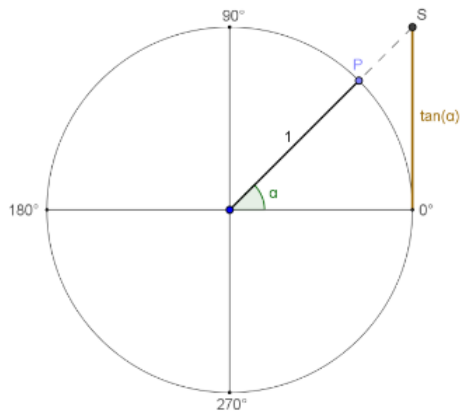
Tangensfunktion

Am Einheitskreis gilt für einen beliebigen Punkt P auf der Kreis-linie und den zugehörigen Zentriwinkel α:

Die **y-Koordinate** des **Punktes S** ist der **Tangens** von α:

$$y_s = \tan(\alpha)$$

Dies entspricht der Länge des **Tangentenabschnitts** auf der rechten Tangente.



4.4.4 Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen (Phytagoras am Einheitskreis)

Beziehungen zwischen Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion

Pythagoras am Einheitskreis:

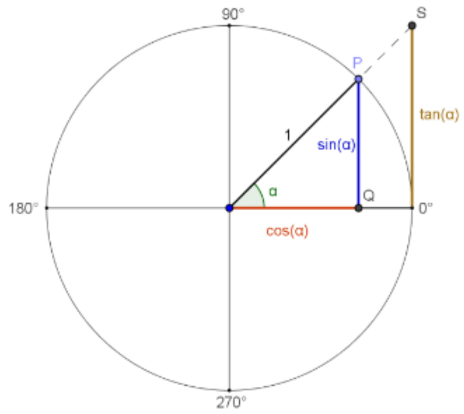
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Ähnlichkeit am Einheitskreis:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1$$

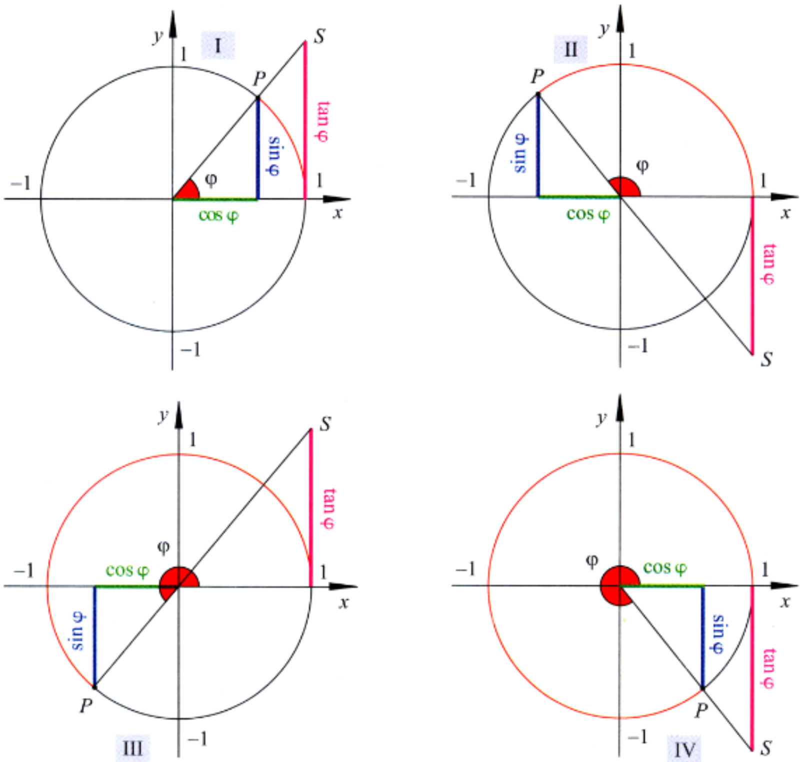


Mithilfe der Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen finden wir weitere Beziehungen, so dass sich jede der drei (resp. mit cot vier) Winkelfunktionen in die beiden (drei) anderen umrechnen lässt:

	sin (φ)	**cos (φ)**	**tan (φ)**	**cot (φ)**
sin (φ)	-	$\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}$	$\frac{\tan(\varphi)}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(\varphi)}}$
cos (φ)	$\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}$	$\frac{\cot(\varphi)}{\sqrt{1+\cot^2(\varphi)}}$
tan (φ)	$\frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}{\cos(\varphi)}$	-	$\frac{1}{\cot(\varphi)}$
cot (φ)	$\frac{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}{\sin(\varphi)}$	$\frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}$	$\frac{1}{\tan(\varphi)}$	-

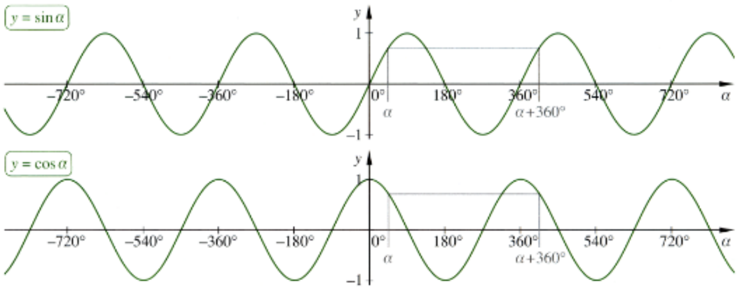
4.4.5 Vorzeichen der Trigonometrischen Funktionen

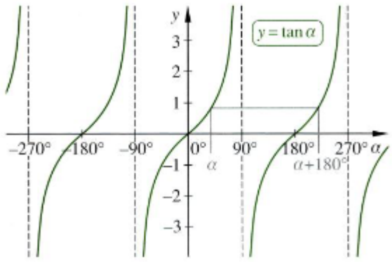
Wenn wir den Punkt P auf der Kreislinie rotieren lassen, können wir herausfinden, welche Vorzeichen die Funktionswerte in den Quadranten I bis IV, das heisst für Winkel zwischen 0° und 360°, haben.



Quadrant	Intervall	sin (φ)	cos (φ)	tan (φ)
I	0° < φ < 90°	+	+	+
II	90° < φ < 180°	+	−	−
III	180° < φ < 270°	−	−	+
IV	270° < φ < 360°	−	+	−

4.5 Eigenschaften der Funktionen





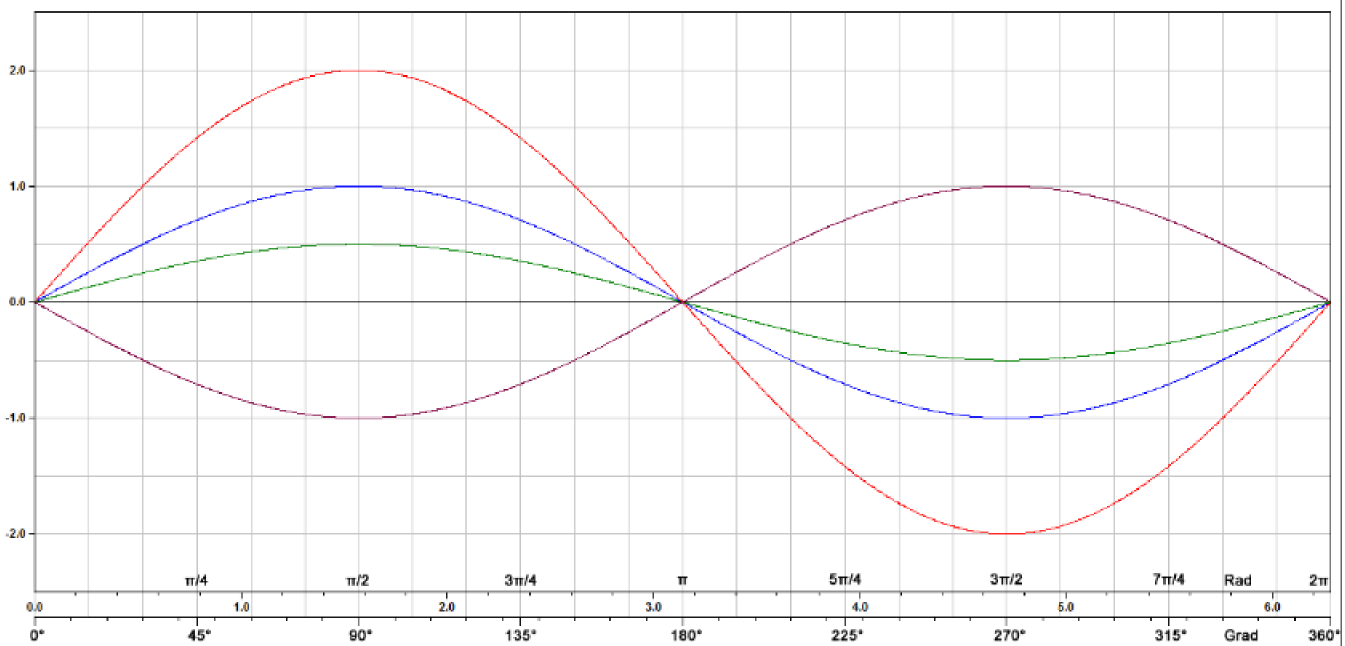
	Sinus	**Kosinus**	**Tangens**
	y = f(x) = sin (x)	**y = f(x) = cos (x)**	**y = f(x) = tan (x)**
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[resp. DB = $\mathbb{R}$	]-∞; ∞[resp. DB = $\mathbb{R}$	DB = $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}\right)$
Wertebereich:	[-1; 1]	[-1; 1]	]-∞; ∞[resp. WB = $\mathbb{R}$
Periodizität:	Periodenlänge: 2π: sin(x + 2k · π) = sin(x), $k \in \mathbb{Z}$	Periodenlänge: 2π: cos(x + 2k · π) = cos(x), $k \in \mathbb{Z}$	Periodenlänge: π: tan(x + k · π) = tan(x), $k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie:	Punktsymmetrisch zum Ursprung: ungerade Funktion sin(-x) = -sin(x)	symmetrisch zur y-Achse: gerade Funktion cos(x) = cos(-x)	Punktsymmetrisch zum Ursprung: ungerade Funktion tan(-x) = -tan(x)
Symmetrieachsen:	$x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$	-
Nullstellen:	$\{x \mid x = k\cdot\pi\}, k \in \mathbb{Z}$	$\left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$	$\{x \mid x = k\cdot\pi\}, k \in \mathbb{Z}$
Maximal Punkte:	$P_{Max}(x; 1)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x; 1)$ $x = 2k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$	-
Minimal Punkte:	$P_{Min}(x; -1)$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x; -1)$ $x = \pi + 2k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$	-
Es gilt:	Den Graphen der Kosinusfunktion erhält man, indem man den Graphen der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschiebt: $\cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.		$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

4.6 Transformation der Sinusfunktion

4.6.1 Parameter a: Strecken. Stauchen auf der y-Achse (Amplitude)

$y = a \cdot \sin(x)$ wobei $a \in \mathbb{R} \setminus 0$

Parameter a: Amplitude



Blau:	**Rot:**	**Grün:**	**Violett:**
$y = \sin(x)$	$y = 2 \cdot \sin(x)$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$	$y = (-1) \cdot \sin(x)$

|a| > 1	**0 < |a| < 1**	**a < 0**
Streckung in y-Richtung	Stauchung in y-Richtung	Zusätzliche Spiegelung an der x-Achse

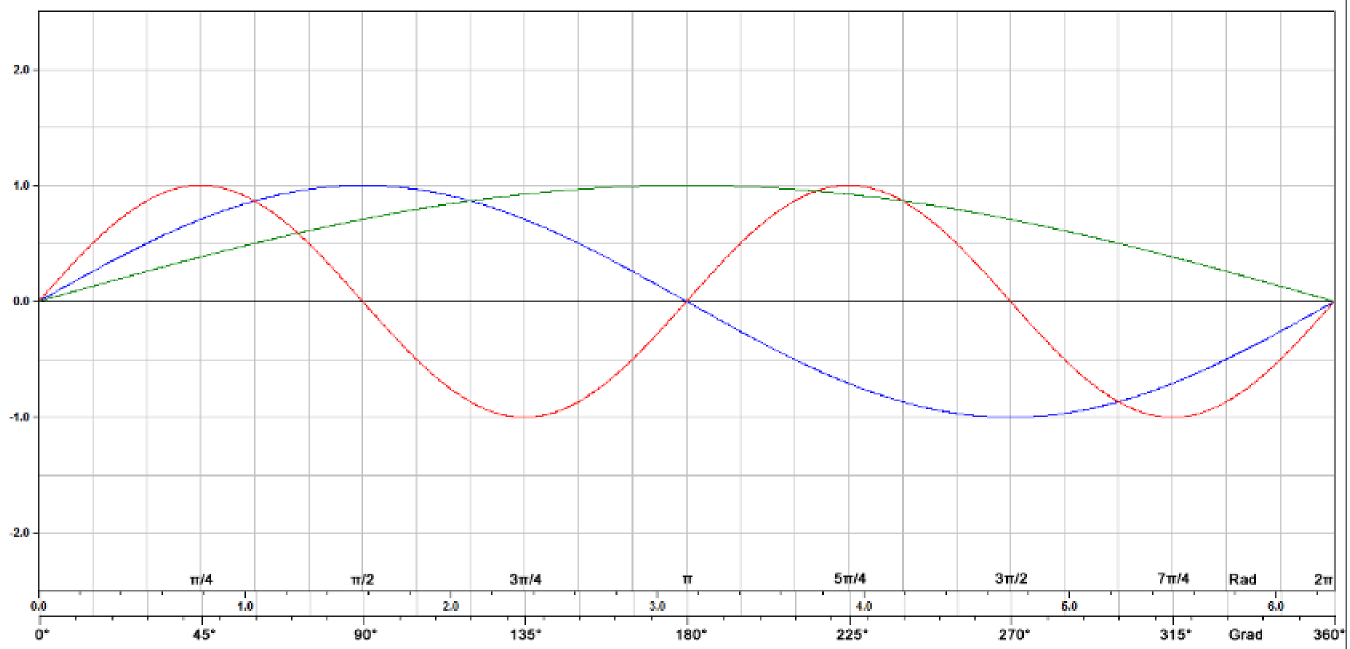
Eigenschaften von f(x) = a · sin(x)

	y = f(x) = sin(x)	**y = f(x) = a · sin(x)**
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[	]-∞; ∞[
Wertebereich:	[-1; 1]	**[-a; a]**
Periodizität:	Periodenlänge: 2π	Periodenlänge: 2π
Nullstellen:	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$
Maximal Punkte:	$P_{Max}(x; 1)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x;$ **a**$)$ (*) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Minimal Punkte:	$P_{Min}(x; -1)$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Min}(x;$ **-a**$)$ (*) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(*) für a < 0 umgekehrt

4.6.2 Parameter b: Strecken. Stauchen auf der x-Achse

Parameter b



Blau:	**Rot:**	**Grün:**
$y = \sin(x)$	$y = \sin(2 \cdot x)$	$y = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$

b > 1	**0 < b < 1**
Stauchung in x-Richtung um den Faktor b. (kleinere Periode, höhere Frequenz)	Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{b}$. (grössere Periode, kleinere Frequenz)

Eigenschaften von f(x) = sin(b · x)

	y = f(x) = sin(x)	**y = f(x) = sin(b · x)**
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[	]-∞; ∞[
Wertebereich:	[-1; 1]	[-1; 1]
Periodizität:	Periodenlänge: 2π	**Periodenlänge:** $\mathbf{\frac{2\pi}{b}}$
Nullstellen:	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbf{x = \frac{k \cdot \pi}{b}, k \in \mathbb{Z}}$
Maximal Punkte:	$P_{Max}(x; 1)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x; 1)$ $\mathbf{x = \frac{\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}}$
Minimal Punkte:	$P_{Min}(x; -1)$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Min}(x; -1)$ $\mathbf{x = \frac{3\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}}$

5 Goniometrie

5.1 Grundlagen

5.1.1 Beziehungen

Vom Einheitskreis her sind folgende Beziehungen bekannt		
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ $\Rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$ $\Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$	Pythagoras am Einheitskreis	
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	Ähnlichkeit; Beweis:	$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{GK}{H}}{\frac{AK}{H}} = \frac{GK \cdot H}{AK \cdot H} = \frac{GK}{AK} = \tan(\alpha)$
$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$	Herleitung:	$\frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\frac{AK}{H}}{\frac{GK}{H}} = \frac{AK \cdot H}{GK \cdot H} = \frac{AK}{GK}$
$\tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1$	Beweis:	$\tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = \frac{GK}{AK} \cdot \frac{AK}{GK} = 1$

5.1.2 Additionstheoreme

Additionstheoreme
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$
$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot(\alpha) \cdot \cot(\beta) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}$ $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot(\alpha) \cdot \cot(\beta) + 1}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}$

5.1.3 Winkelfunktionen des doppelten Winkels

Winkelfunktionen des doppelten Winkels
$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = 2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1$ $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha)$
$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

5.1.4 Winkelfunktionen des dreifachen Winkels

Winkelfunktionen des dreifachen Winkels
$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha)$ $\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin(\alpha) - 4 \cdot \sin^3(\alpha)$
$\cos(3\alpha) = 4 \cdot \cos^3(\alpha) - 3 \cdot \cos(\alpha)$
$\tan(3\alpha) = \frac{3 \cdot \tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3 \cdot \tan^2(\alpha)}$

5.1.5 Winkelfunktionen des halben Winkels

Winkelfunktionen des halben Winkels
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$
$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$

6 Vektorgeometrie

Vektor:
Ein Vektor ist festgelegt durch eine Laenge (Groesse) und eine Richtung.
Freie Vektoren: Sie beschreiben Merkmale, bei denen es nur auf GrÃ¶sse und Richtung ankommt
Ortsvektoren: Sie beschreiben Merkmale, bei denen es auf GrÃ¶sse, Richtung und Anfangspunkt ankommt

6.1 Grundrechenarten

6.1.1 Addition von Vektoren

6.1.2 Subtraktion von Vektoren

6.1.3 Multiplikation mit einer Zahl

6.1.4 Skalarprodukt

6.1.5 Vektorprodukt