

Algebra HSLU Kevin Häusler

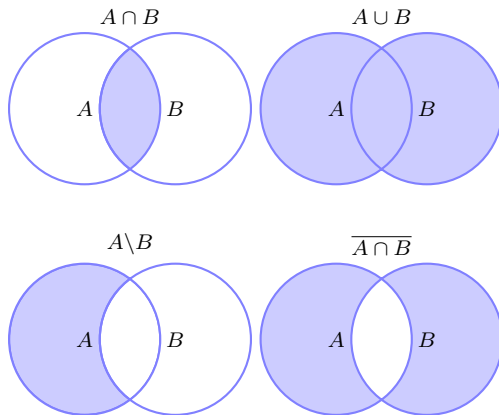
Zahlen und Logik

Zahlen

*	Bedeutung	Beispiel
\mathbb{N}	Natürliche Zahlen = ganze Positive	$\{1;2;3;\}$
\mathbb{N}_0	Natürliche Zahlen mit 0	$\{0;1;2;\}$
\mathbb{Z}	Ganze Zahlen = \mathbb{N} + ganze Negative	$\{-1;0;1;\}$
\mathbb{Q}	Rationale Zahlen = Bruchzahlen	$\frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}$
	Irrationale Zahlen = Nachkommastellen	0.3281
\mathbb{R}	Reelle Zahlen = \mathbb{Q} + Irrationale Zahlen	Alle

Mengen Operationen

*	Bedeutung
\emptyset oder $\{\}$	Leere Menge, enthält keine Elemente
$x \in A$	Beschreibt Element x ist in Menge A
$x \notin A$	Beschreibt Element x ist nicht in Menge A
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge von B
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$A \setminus B$	Differenzbildung, Menge von A ohne B



Aussagenlogik

Term: Ein Term ist eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern. Ein Term hat keinen Wahrheitsgehalt, ist also weder wahr noch falsch.

Aussage: Eine Aussage beschreibt durch Worte oder Zeichen einen Sachverhalt. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Aussageform: Jeder sprachliche oder zeichensymbolische Ausdruck mit wenigstens einer Variablen wenn er durch jede sinnvolle Belegung der Variablen jeweils eine Aussage wird.

*	Bedeutung	Beispiel
$ A $	Kardinalität/Mächtigkeit beschreibt Anzahl Elemente einer Menge	$A = \{1;2\}$ $ A = 2$
\wedge	Konjunktion/UND $A \wedge B$ = Wahr wenn A und B beide Wahr sind	$A \wedge B$ $A, B = W$
\vee	Disjunktion/ODER $A \vee B$ = Wahr wenn A oder B jeweils Wahr ist	$\{-1;0;1;\}$
\neg	Negation A = Wahr $\neg A$ = Falsch	$\neg A$
\implies	Implikation: Daraus folgt	
\iff	Äquivalenz $A \iff B$ wenn beide wahr oder falsch sind	
\forall	Für Alle	$\forall x \in \mathbb{N}$
\exists	Es Existiert	$\exists x \in \mathbb{N}$

A B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg B$	$A \vee \neg B$
T T	T T	T T	F T	T T
T F	F F	T F	T F	T T
F T	F F	F T	F T	F F
F F	F F	F F	T F	F T

Summe und Produkte

Summezeichen:

Es sei: $n, k \in \mathbb{Z}$ und $n \geq k$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

k heisst Laufvariable, Laufindex oder Summationsvariable

1 heisst Startwert oder untere Grenze

n heisst Endwert oder obere Grenze

a_k ist die Funktion bezüglich der Laufvariable

Beispiel: $\sum_{k=1}^5 k^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Produktzeichen:

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

k heisst Laufvariable oder Laufindex

1 heisst Startwert oder untere Grenze

n heisst Endwert oder obere Grenze

a_k ist die Funktion bezüglich der Laufvariable

Beispiel: $\prod_{k=1}^5 k^2$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^5 k^2 &= 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \\ &= 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \\ &= 14400 \end{aligned}$$

Gleichungen

Gleichungen Lösen

Jede Zahl aus der Definitionsmenge, die beim Einsetzen für x zu einer wahren Aussage führt, heisst Lösung der Gleichung.

Grundmenge, Definitionsbereich \mathbb{D}

Die Menge aus der die Lösungen stammen dürfen.

Lösungsvariable

Variable nach der aufgelöst wird.

Formvariablen, Parameter

Alle anderen Variablen.

Lösungsmenge

Menge aller Elemente aus der Definitionsmenge, die zu einer wahren Aussage führen.

Äquivalenz

Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn beim Ersetzen der Variablen durch die gleichen Elemente der "gemeinsamen" Definitionsmenge entweder beide in eine wahre oder falsche Aussage übergehen.

Beispiel:

$$4(x+1,5) = 9x - 6 - 7x \quad | \text{ Terme vereinfachen}$$

$$4x + 6 = 2x - 6 \quad | - 2x$$

$$4x - 2x + 6 = 2x - 2x - 6$$

$$2x + 6 = -6 \quad | - 6$$

$$2x - 6 = -6 - 6$$

$$2x = -12 \quad | : 2$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-12}{2}$$

$$x = -6 \quad | \text{ Lösungsmenge ablesen}$$

Äquivalenzumformungen

Umformungen einer Gleichung, bei denen die Lösungsmenge gleich bleibt, heißen Äquivalenzumformungen.

Folgende Äquivalenzumformungen sind möglich:

1. Termumformungen

$$2x + 5 - 3 = 0 \iff 2x + 2 = 0$$

2. Add./Sub.. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten

3. Mult./Div. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten

Achtung: Ausser mit 0

4. Beidseitige Add./Sub. mit dem gleichen Term

5. Beidseitige Mult./Div. mit dem gleichen Term

Lineare Gleichungen

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $ax + b = 0$ bringen lässt, heisst lineare Gleichung. Wir können lineare Gleichungen daran erkennen, dass die Variable nur in der 1. Potenz auftritt – also kein x^2, x^3, \dots enthalten.

Beispiel Lösung einer linearen Gleichung

$$2(2x - 1) = 3(x + 1) \quad | \text{ Ausmultiplizieren}$$

$$4x - 2 = 3x + 3 \quad | - 3x$$

$$x - 2 = 3 \quad | + 2$$

$$x = 5$$

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{5\}$

Quadratische Gleichungen

Gleichungen, die sich durch Äquivalenzumformungen auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$) bringen lassen, heißen quadratische Gleichungen. Wir können quadratische Gleichungen daran erkennen, dass die Variable x in der 2. Potenz x^2 , aber in keiner höheren Potenz vorkommt. Es gibt 4 Arten/Formen von Quadratischen Gleichungen.

Beispiel Lösung einer Reinquadratische Gleichung

$ax^2 = 0$: Reinquadratische Gleichungen ohne Absolutglied besitzen als einzige Lösung die Null.

$$x^2 = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{0}$$

$$x = \pm 0$$

$$x = 0$$

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = 0$

Beispiel Lösung einer Reinquadratische Gleichung mit Absolutglied

$x^2 - 9 = 0$ Gleichung nach x^2 auflösen:

$$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$$

$$x^2 - 9 + 9 = 0 + 9$$

$$x^2 = 9$$

Wurzel ziehen:

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

Fall Unterscheidung:

$$x_2 = 3, x_2 = -3$$

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

Beispiel Lösung einer Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied

Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied lösen wir folgendermaßen:

$-2x^2 + 4x = 0$ Quadratische Gleichung in Normalform bringen:

$$-2x^2 + 4x = 0 \quad | : (-2)$$

$$\frac{-2x^2 + 4x}{-2} = \frac{0}{-2}$$

$$\frac{-2x^2}{-2} + \frac{4x}{-2} = \frac{0}{-2}$$

$$x^2 - 2x = 0$$

x ausklammern:

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

Faktoren gleich Null setzen:

$$\underbrace{x}_{=0} \cdot \underbrace{(x-2)}_{=0} = 0$$

Gleichungen nach x auflösen:

1. Faktor: $x = 0$

2. Faktor:

$$x - 2 = 0 \quad | + 2$$

$$x - 2 + 2 = 0 + 2$$

$$x = 2$$

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{0; 2\}$

Mitternachtsformel

Gemischtquadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit Absolutglied lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fallunterscheidung:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Regeln

Wenn das lineare Glied fehlt, gilt $b = 0$.

Wenn das absolute Glied fehlt, gilt $c = 0$.

Wenn das x^2 allein steht, gilt $a = 0$ (wegen $1 \cdot x^2 = x^2$). Wenn das x allein steht, gilt (wegen $1 \cdot x = x$).

Lösen einer Quadratischen Gleichung mit Mitternachtsformel

$2x^2 - 8x + 8 = 0$ a, b und c aus der allgemeinen Form herauslesen:

$$a = 2, b = -8 \text{ und } c = 8$$

a, b und c in die Mitternachtsformel einsetzen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} \end{aligned}$$

Lösungen berechnen:

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{0}}{4}$$

Wenn $b^2 - 4ac = 0 \dots$

$$= \frac{8 \pm 0}{4}$$

$$= \frac{8}{4}$$

$$= 2$$

Lösungsmenge angeben:

$$\mathbb{L} = \{2\}$$

...dann gibt es eine Lösung!

Bruchgleichung

Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung mit mindestens einem Bruchterm, in dem die Variable x im Nenner vorkommt.

Lösen einer Bruchgleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$$

Definitionsmenge bestimmen:

Wann wird der Nenner des Bruchs gleich Null?

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Für $x = 0$ wird der Nenner gleich Null. Daraus folgt:

1. Nenner $x = 0$, 2. Nenner $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

Gleichung nach x auflösen. Brüche auf eine Seite bringen:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = 0$$

Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x}{x} &= 0 \\ \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{2x}{x(x+1)} &= 0 \\ \frac{(x+1) - 2x}{x(x+1)} &= 0 \\ \frac{-x+1}{x(x+1)} &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Hauptnenner multiplizieren, um den Bruch zu beseitigen:

$$\begin{aligned} \frac{-x+1}{x(x+1)} \cdot x(x+1) &= 0 \cdot x(x+1) \\ \frac{-x+1}{\cancel{x(x+1)}} \cdot \cancel{x(x+1)} &= 0 \\ -x+1 &= 0 \end{aligned}$$

Nach x auflösen:

$$-x+1=0 \quad | +x$$

Prüfen, ob der x -Wert in der Definitionsmenge enthalten ist:
Da $x = 1$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ liegt, haben wir eine gültige Lösung berechnet.

Kehrwert

Den Kehrwert eines Bruchs erhält man durch Vertauschen von Zähler und Nenner.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$$

Umschreiben zu: $x = 0,5x + 0,5$ und auflösen zu
 $0,5x = 0,5 \quad | \cdot 2 \Rightarrow x = 1$

Multiplikation übers Kreuz

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung jeweils ein Bruch steht, kann eine Multiplikation über Kreuz sinnvoll sein.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{2}{x+1} \\ 1 \cdot (x+1) &= 2 \cdot x \\ x+1 &= 2x \quad | -x \\ \Rightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

Betragsgleichung

Betragsgleichungen lassen sich durch Fallunterscheidung lösen.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Aus der Definition des Betrags ergeben sich folgende zwei Fälle:

- Wenn der Term im Betrag größer oder gleich Null ist ($a \geq 0$), können wir den Term einfach ohne Betragsstriche schreiben ($|a| = a$)
- Wenn der Term im Betrag kleiner als Null ist ($a < 0$), müssen wir die Vorzeichen des Terms umdrehen, um die Betragsstriche weglassen zu können ($|a| = -a$).

Die Lösungsmengen der einzelnen Fälle geben wir als Intervalle an.

Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen.

Beispiel $|x+1| = 3$

Aus der Definition des Betrag ergibt sich:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{für } x+1 < 0 \end{cases}$$

Fallunterscheidung Fall 1: $x+1 \geq 0$:

$$x+1 \geq 0 \quad | -1$$

$$x \geq -1$$

Fallunterscheidung Fall 2: $x+1 < 0$:

$$x+1 < 0 \quad | -1$$

$$x < -1$$

Zusammenfassung:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

Lösungsmengen der einzelnen Fälle bestimmen:

Fall 1 $x+1 \geq 0$:

Für $x \geq -1$ können wir Gleichung $|x+1| = 3$ umschreiben zu $x+1 = 3$, Jetzt müssen wir noch die Gleichung nach x auflösen:

$$\begin{aligned} x+1-1 &= 3-1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge \mathbb{L}_1 muss sowohl die Bedingung $x \geq -1$ (1. Fall) als auch $x = 2$ (Lösung 1. Fall) erfüllen:

$$\mathbb{L}_1 = \{2\}$$

Fall 2: $x < -1$

Für $x < -1$ können wir Gleichung umschreiben zu $|x+1| = 3$
Jetzt müssen wir noch die Gleichung nach x auflösen:

$$\begin{aligned} -x-1 &= 3 \\ -x-1+1 &= 3+1 \\ -x &= 4 \\ -x \cdot (-1) &= 4 \cdot (-1) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge muss sowohl die Bedingung $x < -1$ (2. Fall) als auch $x = -4$ (Lösung 2. Fall) erfüllen:

$$\mathbb{L}_2 = \{-4\}$$

Lösungsmenge der Betragsgleichung bestimmen

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2\} \cup \{-4\} = \{-4; 2\}$$

Potenzgleichungen

Eine Potenzgleichung ist eine Gleichung, die aus nur einer Potenz einer Variable und einer Konstanten besteht: $x^n = a$

Die Vorgehensweise unterscheidet sich danach, wie der Exponent n aussieht:

- 1. Typ: $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}$
- 2. Typ: $x^{-n} = a$ mit $n \in \mathbb{N}$
- 3. Typ: $x^{\frac{m}{n}} = a$ mit $n \in \mathbb{N}$ und mit $m \in \mathbb{Z}$

Grundsätzlich lösen wir Potenzgleichungen durch Wurzelziehen. Das Problem ist, dass das Wurzelziehen im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist. Um zu verhindern, dass Lösungen verloren gehen, muss man bei geraden Exponenten Betragsstriche setzen:

- Wenn n gerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.
- Wenn n ungerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Typ 1: $n \in \mathbb{N}$

$x^2 = 4$

| $\sqrt{}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$

| Da n gerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

$|x| = 2$

$x = \pm 2$

Die Lösung der Potenzgleichung $x^2 = 0$ ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

$x^3 = 8$

| $\sqrt[3]{}$

$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$

| Da n ungerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = x$

$x = 2$

Die Lösung der Potenzgleichung $x^3 = 8$ ist $\mathbb{L} = \{2\}$.

Typ 2: $x^{-n} = a$
Vorgehensweise: Umformung der Gleichung zu Typ 1 (falls $a \neq 0$)
Mögliche Lösungen

- : $a = 0$ Es gibt keine Lösung $\mathbb{L} = \{\}$.
- $a \neq 0$ Die Gleichung $x^{-n} = a$ ist äquivalent zu $x^n = \frac{1}{a}$.

$x^{-2} = 3$

| Potenzgesetz anwenden: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$\frac{1}{x^2} = 3$

| Kehrwert

$x^2 = \frac{1}{3}$

| $\sqrt{}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

| Da n gerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

$|x| = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

Die Lösung der Potenzgleichung $x^{-2} = 3$ ist $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}; +\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}$.

Typ 3: $m \in \mathbb{Z}$
Vorgehensweise: Potenzieren mit n
Ist der Exponent $\frac{m}{n}$ keine ganze Zahl, so sind die Gleichungen in \mathbb{R}^- nicht definiert. In \mathbb{R}_0^+ sind die Gleichungen $x^{\frac{m}{n}} = a$ und $\sqrt[n]{x^m} = a$ äquivalent.

$x^{\frac{2}{3}} = 4$

| Potenzieren mit 3

$(x^{\frac{2}{3}})^3 = 4^3$

$x^2 = 64$

| $\sqrt{}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$

| Da n gerade ist, gilt: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

$|x| = 8$

$x = \pm 8$

$x_1 = -8$ gehört nicht zur Definitionsmenge \mathbb{R}_0^+ .
 $x_2 = 8$ ist eine mögliche Lösung. Da Potenzieren i. Allg. keine Äquivalenzumformung ist, ist eine Probe unerlässlich.

$x^{\frac{2}{3}} = 4$

| $x_2 = 8$

$8^{\frac{2}{3}} = 4$

$4 = 4$

Wahre Aussage!

Die Lösung der Potenzgleichung $x^{\frac{2}{3}} = 4$ ist $\mathbb{L} = \{8\}$.

Wurzelgleichung

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der die Variable (auch) unter einer Wurzel vorkommt.

1. Wurzeln beseitigen
 - (a) Wurzel isolieren
 - (b) Potenzieren
2. Algebraische Gleichung lösen
3. Probe Machen
4. Lösungsmenge aufschreiben

Beispiel: $\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2$
Die Wurzel ist bereits isoliert, gehe direkt zu Potenzieren:

$\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2$

| Quadrieren

$\sqrt{x + \sqrt{2x}}^2 = 2^2$

$x + \sqrt{2x} = 4$

Wurzel isolieren:

$x + \sqrt{2x} = 4$

| $-x$

$\sqrt{2x} = 4 - x$

Potenzieren:

$\sqrt{2x} = 4 - x$

| Quadrieren

$\sqrt{2x}^2 = (4 - x)^2$

$2x = 16 - 8x + x^2$

Schritt 2: Algebraische Gleichung lösen:
Quadratische Gleichung in Normalform bringen:

$2x = 16 - 8x + x^2$

| $-2x$

$0 = 16 - 10x + x^2$

| Seiten vertauschen

$16 - 10x + x^2 = 0$

| Nach Potenzen von x sortieren

$x^2 - 10x + 16 = 0$

Quadratische Gleichung mit der Mitternachtsformel lösen:

$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

[Formel hinschreiben]

$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} =$

[Zahlen für a, b und c einsetzen]

$= \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2}$

[Nenner sowie Term innerhalb der Wurzel ausrechnen]

$= \frac{10 \pm 6}{2}$

[Wurzel berechnen]

Daraus folgt:
 $x_1 = \frac{10+6}{2} = 8$ und $x_2 = \frac{10-6}{2} = 2$

Schritt 3 Probe Machen

$\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2 \quad | \quad x_1 = 2$

$\sqrt{\textcolor{red}{2} + \sqrt{2 \cdot \textcolor{red}{2}}} = 2$

$\sqrt{2 + \sqrt{4}} = 2$

$\sqrt{2+2} = 2$

$\sqrt{4} = 2$

$2 = 2 \quad \textcolor{green}{\text{Wahre Aussage!}}$

$x_1 = 2$ gehört zur Lösung der Wurzelgleichung.

$\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2 \quad | \quad x_2 = 8$

$\sqrt{\textcolor{red}{8} + \sqrt{2 \cdot \textcolor{red}{8}}} = 2$

$\sqrt{8 + \sqrt{16}} = 2$

$\sqrt{8+4} = 2$

$\sqrt{12} = 2 \quad \textcolor{red}{\text{Falsche Aussage!}}$

$x_2 = 8$ ist offensichtlich nur eine Scheinlösung.

Schritt 4 Lösungsmenge aufschreiben

$\mathbb{L} = \{2\}$

Exponentialgleichungen

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Exponenten einer Potenz steht.

Lösung durch Logarithmieren Beispiel 1

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$

Löse $2^x = 9$.

$2^x = 9 \quad | \quad \textcolor{orange}{\text{Logarithmieren}}$

$\log 2^x = \log 9 \quad | \quad \text{Exponent vorziehen}$

$x \cdot \log 2 = \log 9 \quad | \quad : \log 2$

$x = \frac{\log 9}{\log 2} \quad | \quad \text{Taschenrechner!}$

$x \approx 3,1699 \Rightarrow \mathbb{L} = \{3,1699\}$

Lösung durch Logarithmieren Beispiel 2

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$

Löse $2^{x+3} = 3^x$.

$2^{x+3} = 3^x \quad | \quad \textcolor{orange}{\text{Logarithmieren}}$

$\log 2^{x+3} = \log 3^x \quad | \quad \text{Exponent vorziehen}$

$(x+3) \cdot \log 2 = x \cdot \log 3 \quad | \quad \text{Klammer ausmulti}$

$x \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 2 = x \cdot \log 3 \quad | \quad -(x \cdot \log 2)$

$3 \cdot \log 2 = x \cdot \log 3 - x \cdot \log 2 \quad | \quad x \text{ ausklammern}$

$3 \cdot \log 2 = x \cdot (\log 3 - \log 2) \quad | \quad : (\log 3 - \log 2)$

$x = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 3 - \log 2} \quad | \quad \text{Taschenrechner!}$

$x \approx 5,1285 \Rightarrow \mathbb{L} = \{5,1285\}$

Logarithmusgleichungen

Eine Logarithmusgleichung ist eine Gleichung, in der die Variable im Numerus des Logarithmus steht.

Lösung mithilfe der Definition des Logarithmus

Eine Lösung mithilfe der Definition des Logarithmus ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so umzuformen, dass sich auf der einen Seite ein Logarithmus und auf der anderen Seite eine Konstante ergeben.

$\log_2 x = 3 \quad | \quad \textcolor{orange}{\text{Anwendung der Definition des Logarithmus}}$

$x = 2^3 \quad | \quad \text{Potenz ausrechnen}$

$x = 8 \Rightarrow \mathbb{L} = \{8\}$

$2 \cdot \log_4 x = 2 \quad | \quad : 2$

$\log_4 x = 1 \quad | \quad \textcolor{orange}{\text{Anwendung der Definition des Logarithmus}}$

$x = 4^1 \quad | \quad \text{Potenz ausrechnen}$

$x = 4 \Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$

$\log_3 9 + \log_3 x = 4 \quad | \quad \text{Logarithmen zusammenfassen}$

$\log_3 9x = 4 \quad | \quad \textcolor{orange}{\text{Anwendung der Definition des Logarithmus}}$

$9x = 3^4 \quad | \quad \text{Potenz ausrechnen}$

$9x = 81 \quad | \quad : 9$

$x = 9 \Rightarrow \mathbb{L} = \{9\}$

Definitionsmenge einer Logarithmusgleichung

Da $\log_b x = a$ nur für $x > 0$ definiert ist, kann die Definitionsmenge eingeschränkt sein.

In der Praxis bedeutet das, dass wir stets die Probe machen sollten, d.h. überprüfen, ob die berechneten Lösungen eingesetzt in die gegebene Gleichung zu einer wahren Aussage führen.

$2 \cdot \log_7 x = \log_7 16 \quad | \quad \text{Faktor beseitigen}$

$\log_7 x^2 = \log_7 16 \quad | \quad \textcolor{orange}{\text{Numerivergleich}}$

$x^2 = 16 \quad | \quad \text{Wurzel ziehen}$

$x = \pm\sqrt{16} \quad | \quad \text{Wurzel berechnen}$

$x = \pm 4$

Als Lösungen erhalten wir $x_1 = -4$ und $x_2 = +4$.

Da $\log_b x = a$ nur für $x > 0$ definiert ist, ist $x_1 = -4$ nur eine **Scheinlösung**.

Die einzige Lösung der Logarithmusgleichung ist $x_2 = 4$:

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$

Lineare Gleichungssysteme

Mehrere lineare Gleichungen, die alle zusammen gelten sollen, bilden ein lineares Gleichungssystem.

Gleichsetzungsverfahren

1. Gleichungen nach der gleichen Variable auflösen
2. Gleichungen gleichsetzen
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen

4. Berechneten Wert in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Beispiel LGS mit Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Schritt 1 Gleichungen nach der gleichen Variable auflösen

Wir entscheiden uns dafür, die Gleichungen nach x aufzulösen.

1. Gleichung:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 & | -3y \\ 2x + 3y - 3y &= 14 - 3y \\ 2x &= 14 - 3y & | :2 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{14 - 3y}{2} \\ x &= 7 - 1,5y \end{aligned}$$

2. Gleichung:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 8 & | -2y \\ x + 2y - 2y &= 8 - 2y \\ x &= 8 - 2y \end{aligned}$$

Schritt 2 Gleichungen gleichsetzen

Es gilt $x = x$ bzw. $7 - 1,5y = 8 - 2y$

Schritt 3 Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen

Wir lösen die Gleichung nach y auf

$$\begin{aligned} 7 - 1,5y &= 8 - 2y & | +2y \\ 7 - 1,5y + 2y &= 8 - 2y + 2y \\ 7 + 0,5y &= 8 & | -7 \\ 7 - 7 + 0,5y &= 8 - 7 \\ 0,5y &= 1 & | :0,5 \\ \frac{0,5y}{0,5} &= \frac{1}{0,5} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Schritt 4 Berechneten Wert in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen

Wenn $y = 2$ wir entweder in die Gleichung $x = 7 - 1,5y$ oder in die Gleichung $x = 8 - 2y$ einsetzen, so erhalten wir den zweiten Wert $x = 4$

Schritt 5 Lösungsmenge aufschreiben

$$\mathbb{L} = \{(4|2)\}$$

Einsetzungsverfahren

1. Eine Gleichung nach einer Variable auflösen
2. Berechneten Term für diese Variable in die andere Gleichung einsetzen
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen
4. Berechneten Wert in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Beispiel LGS mit Einsetzungsverfahren

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Schritt 1 Eine Gleichung nach einer Variable auflösen

Wir entscheiden uns dafür, die 2. Gleichung nach x aufzulösen, da wir dafür nur 2y subtrahieren müssen.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 8 & | -2y \\ x + 2y - 2y &= 8 - 2y \\ x &= 8 - 2y \end{aligned}$$

Schritt 2 Berechneten Term für diese Variable in die andere Gleichung einsetzen

Wir setzen $x = 8 - 2y$ in die 1. Gleichung

$$2x + 3y = 14$$

ein und erhalten

$$2 \cdot (8 - 2y) + 3y = 14$$

Schritt 3 Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen

Wir lösen die Gleichung nach y auf

$$\begin{aligned} 2 \cdot (8 - 2y) + 3y &= 14 \\ 16 - 4y + 3y &= 14 \\ 16 - y &= 14 & | -16 \\ 16 - 16 - y &= 14 - 16 \\ -y &= -2 & | \cdot (-1) \\ -y \cdot (-1) &= -2 \cdot (-1) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Schritt 4 Berechneten Wert in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 einsetzen und zweiten Wert berechnen

Die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 ist

$$x = 8 - 2y$$

In diese Gleichung setzen wir $y = 2$ ein

$$x = 8 - 2 \cdot 2$$

$$x = 4$$

Schritt 5 Lösungsmenge aufschreiben

$$\mathbb{L} = \{(4|2)\}$$

Additionsverfahren

1. Gleichungen so umformen, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden
2. Gleichungen addieren
3. Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen
4. Berechneten Wert in eine der ursprünglichen Gleichungen einsetzen und zweiten Wert berechnen
5. Lösungsmenge aufschreiben

Damit die Koeffizienten der Variablen Gegenzahlen werden, bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Koeffizienten und formen die Gleichungen anschließend entsprechend um. **Beispiel LGS mit Additionsverfahren**

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Schritt 1 Gleichungen so umformen, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen werden

Wir entscheiden uns dafür, die Koeffizienten der Variable x zu Gegenzahlen zu machen. Dazu bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Koeffizienten von x:

$$\text{kgV}(1; 2) = 2$$

Damit in einer Gleichung eine 2 und in der anderen Gleichung eine -2 vor dem x steht, müssen wir lediglich die 2. Gleichung mit -2 multiplizieren:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ x + 2y &= 8 & | \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ -2x - 4y &= -16 \end{aligned}$$

Schritt 2 Gleichungen addieren

Jetzt addieren wir die beiden Gleichungen, wodurch die Variable x eliminiert wird. Übrig bleibt:

-y = -2

Schritt 3 Gleichung nach der enthaltenen Variable auflösen

Wir lösen die eben berechnete Gleichung nach auf, indem wir mit -1 multiplizieren:

-y = -2 | ·(-1)
-y · (-1) = -2 · (-1)
y = 2

Schritt 4 Berechneten Wert in eine der ursprünglichen Gleichungen einsetzen und zweiten Wert berechnen

Wir setzen y=2 in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein, um x zu berechnen:

2x + 3 · 2 = 14
x + 2 · 2 = 8

Unabhängig davon, welche der beiden Gleichungen wir nach x auflösen, das Ergebnis ist dasselbe:

x = 4

Schritt 5 Lösungsmenge aufschreiben

L = {(4|2)}

Ungleichungen

Eine Ungleichung ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Termen besteht, die durch eines der Vergleichszeichen < (Kleinerzeichen), ≤ (Kleinergleichzeichen), ≥ (Größerzeichen) oder ≥ (Größergleichzeichen) verbunden sind.

Lineare Ungleichungen

- 1. Ungleichung nach x auflösen
- 2. Lösungsmenge aufschreiben

- Terme auf beiden Seiten der Ungleichung zusammenfassen
- Denselben Term auf beiden Seiten der Ungleichung addieren/subtrahieren
- Beide Seiten der Ungleichung mit derselben positiven* Zahl multiplizieren

- Beide Seiten der Ungleichung durch dieselbe positive* Zahl dividieren

* Bei der Multiplikation bzw. Division mit einer negativen Zahl müssen wir das Ungleichungszeichen umdrehen.

Beispiel:

x - 3 ≤ 3(x - 1) + 5

Schritt 1 Ungleichung nach x auflösen

x - 3 ≤ 3(x - 1) + 5
x - 3 ≤ 3 · x + 3 · (-1) + 5
x - 3 ≤ 3x - 3 + 5

zusammenfassen

x - 3 ≤ 3x + 2

Ungleichung nach x auflösen

x - 3x - 3 ≤ 3x - 3x + 2
-2x - 3 ≤ 2
-2x - 3 + 3 ≤ 2 + 3
-2x ≤ 5

Um die Lösung zu erhalten, müssen wir durch -2 dividieren. Zur Erinnerung: Bei der Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

-2x / -2 ≥ 5 / -2
x ≥ 5 / -2

oder in Dezimalschreibweise

x ≥ -2,5

Schritt 2 Lösungsmenge aufschreiben

L = [-2,5; ∞[

Funktionen

Eine Funktion f ist eine Zuordnung, bei der jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element y der Wertemenge W zugeordnet ist.

Symbol	Bedeutung
f	Name der Funktion
x	Argument, x-Wert, unabhängige Variable
y	Funktionswert, y-Wert, abhängige Variable
y = f(x)	Funktionsgleichung, Zuordnungsvorschrift*!
D oder D	Definitionsmenge, Definitionsbereich
W oder W	Wertemenge, Wertebereich

Lineare Funktionen

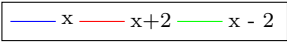
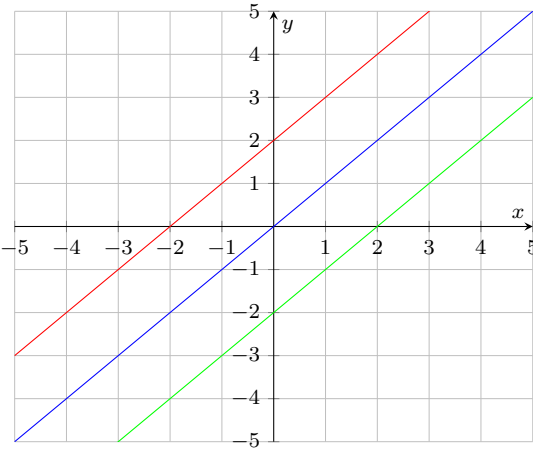
Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung f(x) = mx + n heisst lineare Funktion.

Wegen y = f(x) können wir statt f(x) = mx + n auch y = mx + n schreiben:

- y: Abhängige Variable, y-Wert, Funktionswert
- m: Steigung
- x: Unabhängige Variable, x-Wert, (Funktions-)Argument
- n : y-Achsenabschnitt

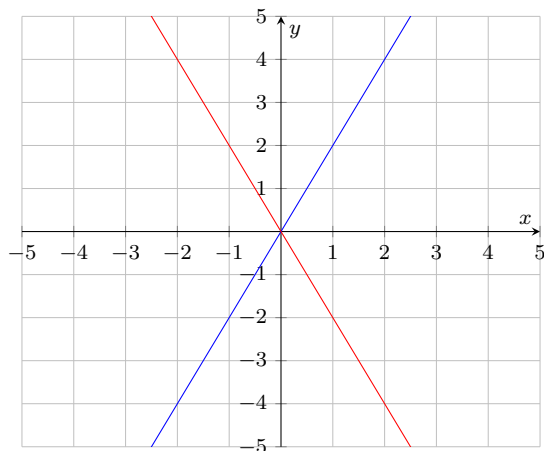
Wenn wir den y-Achsenabschnitt n in f(x) = mx + n verändern, passiert Folgendes:

- Gilt n > 0, ist die Gerade nach oben verschoben.
- Gilt n < 0 , ist die Gerade nach unten verschoben.



Wenn wir die Steigung m in f(x) = mx + n verändern, passiert Folgendes:

- Gilt m > 0, steigt die Gerade.
- Gilt m < 0 , fällt die Gerade.



— 2x — -2x

Nullstelle berechnen

Berechne die Nullstelle der linearen Funktion $y = 3x + 3$.

Wir setzen die Funktion gleich Null, d.h. wir setzen für den y Wert 0 ein: $0 = 3x + 3$

Jetzt müssen wir die Gleichung nach x auflösen, um die gesuchte Nullstelle zu finden:

$$3x + 3 = 0 \quad | -3$$

$$3x + 3 - 3 = -3$$

$$3x = -3 \quad | :3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$x = -1$$

Steigung berechnen

Wir lesen zwei beliebige Punkte ab:

$$P_0(0|1) \text{ und } P_1(4|3)$$

und setzen sie in die Steigungsformel ein:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{3 - (1)}{4 - 0} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Schnittpunkt berechnen

Ein Schnittpunkt existiert nur, wenn die beiden gegebenen Geraden eine unterschiedliche Steigung besitzen.

$$g: y = 2x + 1$$

$$h: y = 2x + 3$$

Die Geraden besitzen dieselbe Steigung. **Es existiert kein Schnittpunkt.**

1. Funktionsgleichungen gleichsetzen
2. Gleichung nach x auflösen
3. x in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, um y zu berechnen
4. Ergebnis aufschreiben

Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden $y = \frac{1}{2}x - 1$ und $y = -2x - 6$.

Schritt 1 Funktionsgleichungen gleichsetzen:

$$\frac{1}{2}x - 1 = -2x - 6$$

Schritt 2 Gleichung nach x auflösen:

$$\frac{1}{2}x - 1 = -2x - 6 \quad | +2x$$

$$\frac{1}{2}x + 2x - 1 = -2x + 2x - 6$$

$$2,5x - 1 = -6 \quad | +1$$

$$2,5x - 1 + 1 = -6 + 1$$

$$2,5x = -5 \quad | :2,5$$

$$\frac{2,5x}{2,5} = \frac{-5}{2,5}$$

$$x = -2$$

Schritt 3 x in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, um y zu berechnen:

Wir setzen $x = -2$ in die erste Gleichung ein:

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-2) - 1$$

$$= -2$$

Schritt 4 Ergebnis aufschreiben:

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $S(-2 | -2)$

Umkehrfunktion bilden

1. Funktionsgleichung nach x auflösen
2. x und y vertauschen

Bilde die Umkehrfunktion von $f: y = 2x + 1$.

Schritt 1 Funktionsgleichung nach x auflösen:

$$y = 2x + 1 \quad | -1$$

$$y - 1 = 2x \quad | :2$$

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = x \quad | \text{Seiten vertauschen}$$

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

Schritt 2 x und y vertauschen:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

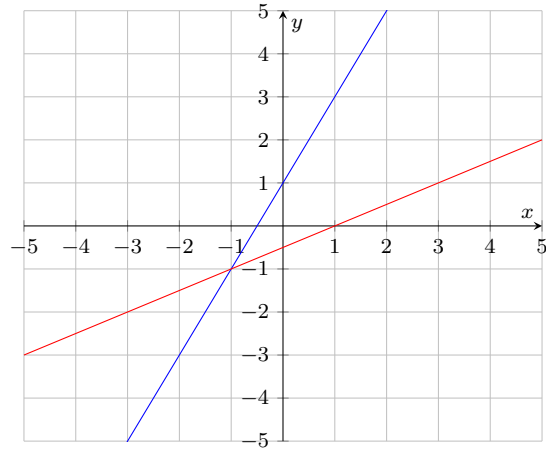
Die Umkehrfunktion der Funktion $f: y = 2x + 1$ ist $f^{-1}: y = 0,5x - 0,5$.

Um die Graphen von f und f^{-1} ordentlich zu zeichnen, fertigen wir zwei Wertetabellen an.

$f:$	x	-2	-1	0	1	2
	y	-3	-1	1	3	5

Die Wertetabelle von f^{-1} erhält man durch Vertauschen der Zeilen der Wertetabelle von f .

$f^{-1}:$	x	-3	-1	1	3	5
	y	-2	-1	0	1	2



\LaTeX (usually pronounced “LAY teck,” sometimes “LAH teck,” and never “LAY tex”) is a mathematics typesetting program that is the standard for most professional mathematics writing. It is based on the typesetting program \TeX created by Donald Knuth of Stanford University (his first version appeared in 1978). Leslie Lamport was responsible for creating \LaTeX a more user friendly version of \TeX . A team of \LaTeX programmers created the current version, $\LaTeX 2\epsilon$.

Math vs. text vs. functions

In properly typeset mathematics variables appear in italics (e.g., $f(x) = x^2 + 2x - 3$). The exception to this rule is predefined functions (e.g., $\sin(x)$). Thus it is important to **always** treat text, variables, and functions correctly. See the difference between x and x , -1 and -1 , and $\sin(x)$ and $\sin(x)$.

$\alpha Z \frac{1}{2}$

There are two ways to present a mathematical expression—*inline* or as an *equation*.

Inline mathematical expressions

Inline expressions occur in the middle of a sentence. To produce an inline expression, place the math expression between dollar signs (\$). For example, typing 90° is the same as $\frac{\pi}{2}$ radians yields 90° is the same as $\frac{\pi}{2}$ radians.

Equations

Equations are mathematical expressions that are given their own line and are centered on the page. These are usually used for important equations that deserve to be showcased on their own line or for large equations that cannot fit inline. To produce an inline expression, place the mathematical expression between the symbols \[and \]. Typing
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 yields

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Displaystyle

To get full-sized inline mathematical expressions use
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
 I want this
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
, not this
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
.

Images

You can put images (pdf, png, jpg, or gif) in your document. They need to be in the same location as your .tex file when you compile the document. Omit [width=.5in] if you want the image to be full-sized.

```
\begin{figure}[ht]
\includegraphics[width=.5in]{imagename.jpg}
\caption{The (optional) caption goes here.}
\end{figure}
```

Text decorations

Your text can be *italics* ($\textit{italics}$), **boldface** ($\textbf{boldface}$), or underlined ($\underline{\text{underlined}}$).

Your math can contain boldface, \mathbf{R} , or blackboard bold, \mathbb{R} . You may want to used these to express the sets of real numbers (\mathbb{R} or \mathbf{R}), integers (\mathbb{Z} or \mathbf{Z}), rational numbers (\mathbb{Q} or \mathbf{Q}), and natural numbers (\mathbb{N} or \mathbf{N}).

To have text appear in a math expression use $\text{}$. $(0,1] = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ and } x \leq 1\}$. (Without the $\text{}$ command it treats “and” as three variables: $(0,1] = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ and } x \leq 1\}$.)

Spaces and new lines

\LaTeX ignores extra spaces and new lines. For example,

This sentence will look fine after it is compiled.

This sentence will look fine after it is compiled.

Leave one full empty line between two paragraphs. Place \backslash at the end of a line to create a new line (but not create a new paragraph).

This compiles

like \backslash

this.

This compiles

like
this.

Use \noindent to prevent a paragraph from indenting.

Comments

Use % to create a comment. Nothing on the line after the % will be typeset. $\$f(x)=\sin(x)\%$ this is the sine function

yields $f(x) = \sin(x)$

Delimiters

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
parentheses	<code>(x)</code>	(x)
brackets	<code>[x]</code>	$[x]$
curly braces	<code>\{x\}</code>	$\{x\}$

To make your delimiters large enough to fit the content, use them together with `\right` and `\left`. For example, `\left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\sim\infty}` produces $\left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_n^\infty$.

Curly braces are non-printing characters that are used to gather text that has more than one character. Observe the differences between the four expressions `x^2`, `x^{2}`, `x^{2t}`, `x^{2t}` when typeset: x^2 , x^2 , x^2t , x^{2t} .

Lists

You can produce ordered and unordered lists.

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
unordered list	<code>\begin{itemize}</code>	
	<code>\item</code>	
	Thing 1	• Thing 1
	<code>\item</code>	• Thing 2
	Thing 2	
ordered list	<code>\end{itemize}</code>	
	<code>\begin{enumerate}</code>	
	<code>\item</code>	
	Thing 1	1. Thing 1
	<code>\item</code>	2. Thing 2
	Thing 2	
	<code>\end{enumerate}</code>	

Symbols (in *math* mode)

The basics

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
addition	<code>+</code>	$+$
subtraction	<code>-</code>	$-$
plus or minus	<code>\pm</code>	\pm
multiplication (times)	<code>\times</code>	\times
multiplication (dot)	<code>\cdot</code>	\cdot
division symbol	<code>\div</code>	\div
division (slash)	<code>/</code>	$/$
circle plus	<code>\oplus</code>	\oplus
circle times	<code>\otimes</code>	\otimes
equal	<code>=</code>	$=$
not equal	<code>\neq</code>	\neq
less than	<code><</code>	$<$
greater than	<code>></code>	$>$
less than or equal to	<code>\leq</code>	\leq
greater than or equal to	<code>\geq</code>	\geq
approximately equal to	<code>\approx</code>	\approx
infinity	<code>\infty</code>	∞
dots	<code>1,2,3,\ldots</code>	$1, 2, 3, \dots$
dots	<code>1+2+3+\cdots</code>	$1 + 2 + 3 + \dots$
fraction	<code>\frac{a}{b}</code>	$\frac{a}{b}$
square root	<code>\sqrt{x}</code>	\sqrt{x}
<i>n</i> th root	<code>\sqrt[n]{x}</code>	$\sqrt[n]{x}$
exponentiation	<code>a^b</code>	a^b
subscript	<code>a_b</code>	a_b
absolute value	<code> x </code>	$ x $
natural log	<code>\ln(x)</code>	$\ln(x)$
logarithms	<code>\log_{a}b</code>	$\log_a b$
exponential function	<code>e^x=\exp(x)</code>	$e^x = \exp(x)$
degree	<code>\deg(f)</code>	$\deg(f)$

Functions

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
maps to	<code>\to</code>	\rightarrow
composition	<code>\circ</code>	\circ
piecewise function	<code>\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}</code>	$ x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Greek and Hebrew letters

<i>command</i>	<i>output</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
<code>\alpha</code>	α	<code>\tau</code>	τ
<code>\beta</code>	β	<code>\theta</code>	θ
<code>\chi</code>	χ	<code>\upsilon</code>	υ
<code>\delta</code>	δ	<code>\xi</code>	ξ
<code>\epsilon</code>	ϵ	<code>\zeta</code>	ζ
<code>\varepsilon</code>	ε	<code>\Delta</code>	Δ
<code>\eta</code>	η	<code>\Gamma</code>	Γ
<code>\gamma</code>	γ	<code>\Lambda</code>	Λ
<code>\iota</code>	ι	<code>\Omega</code>	Ω
<code>\kappa</code>	κ	<code>\Phi</code>	Φ
<code>\lambda</code>	λ	<code>\Pi</code>	Π
<code>\mu</code>	μ	<code>\Psi</code>	Ψ
<code>\nu</code>	ν	<code>\Sigma</code>	Σ
<code>\omega</code>	ω	<code>\Theta</code>	Θ
<code>\phi</code>	ϕ	<code>\Upsilon</code>	Υ
<code>\varphi</code>	φ	<code>\Xi</code>	Ξ
<code>\pi</code>	π	<code>\aleph</code>	\aleph
<code>\psi</code>	ψ	<code>\beth</code>	\beth
<code>\rho</code>	ρ	<code>\daleth</code>	\daleth
<code>\sigma</code>	σ	<code>\gimel</code>	\gimel

Set theory

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
set brackets	<code>\{1,2,3\}</code>	$\{1,2,3\}$
element of	<code>\in</code>	\in
not an element of	<code>\notin</code>	\notin
subset of	<code>\subset</code>	\subset
subset of	<code>\subseteq</code>	\subseteq
not a subset of	<code>\not\subset</code>	$\not\subset$
contains	<code>\supset</code>	\supset
contains	<code>\supseteq</code>	\supseteq
union	<code>\cup</code>	\cup
intersection	<code>\cap</code>	\cap
big union	<code>\bigcup_{n=1}^{10} A_n</code>	$\bigcup_{n=1}^{10} A_n$
big intersection	<code>\bigcap_{n=1}^{10} A_n</code>	$\bigcap_{n=1}^{10} A_n$
empty set	<code>\emptyset</code>	\emptyset
power set	<code>\mathcal{P}</code>	\mathcal{P}
minimum	<code>\min</code>	\min
maximum	<code>\max</code>	\max
supremum	<code>\sup</code>	\sup
infimum	<code>\inf</code>	\inf
limit superior	<code>\limsup</code>	\limsup
limit inferior	<code>\liminf</code>	\liminf
closure	<code>\overline{A}</code>	\overline{A}

Calculus

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
derivative	<code>\frac{df}{dx}</code>	$\frac{df}{dx}$
derivative	<code>f'</code>	f'
partial derivative	<code>\frac{\partial f}{\partial x}</code>	$\frac{\partial f}{\partial x}$
integral	<code>\int</code>	\int
double integral	<code>\iint</code>	\iint
triple integral	<code>\iiint</code>	\iiint
limits	<code>\lim_{x \rightarrow \infty}</code>	$\lim_{x \rightarrow \infty}$
summation	<code>\sum_{n=1}^{\infty} a_n</code>	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
product	<code>\prod_{n=1}^{\infty} a_n</code>	$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

Logic

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
not	<code>\sim</code>	\sim
and	<code>\land</code>	\wedge
or	<code>\lor</code>	\vee
if...then	<code>\to</code>	\rightarrow
if and only if	<code>\leftrightarrow</code>	\leftrightarrow
logical equivalence	<code>\equiv</code>	\equiv
therefore	<code>\therefore</code>	\therefore
there exists	<code>\exists</code>	\exists
for all	<code>\forall</code>	\forall
implies	<code>\Rightarrow</code>	\Rightarrow
equivalent	<code>\Leftrightarrow</code>	\Leftrightarrow

Linear algebra

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
vector	<code>\vec{v}</code>	\vec{v}
vector	<code>\mathbf{v}</code>	\mathbf{v}
norm	<code> \vec{v} </code>	$ \vec{v} $
matrix	<code>\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$
determinant	<code>\det(A)</code>	$\det(A)$
trace	<code>\operatorname{tr}(A)</code>	$\operatorname{tr}(A)$
dimension	<code>\dim(V)</code>	$\dim(V)$

Number theory

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
divides	<code> </code>	$ $
does not divide	<code>\nmid</code>	\nmid
div	<code>\operatorname{div}</code>	div
mod	<code>\bmod</code>	\bmod
greatest common divisor	<code>\gcd</code>	\gcd
ceiling	<code>\lceil x \rceil</code>	$\lceil x \rceil$
floor	<code>\lfloor x \rfloor</code>	$\lfloor x \rfloor$

Geometry and trigonometry

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
angle	<code>\angle ABC</code>	$\angle ABC$
degree	<code>90^{\circ}</code>	90°
triangle	<code>\triangle ABC</code>	$\triangle ABC$
segment	<code>\overline{AB}</code>	\overline{AB}
sine	<code>\sin</code>	sin
cosine	<code>\cos</code>	cos
tangent	<code>\tan</code>	tan
cotangent	<code>\cot</code>	cot
secant	<code>\sec</code>	sec
cosecant	<code>\csc</code>	csc
inverse sine	<code>\arcsin</code>	arcsin
inverse cosine	<code>\arccos</code>	arccos
inverse tangent	<code>\arctan</code>	arctan

Symbols (in *text* mode)

The followign symbols do **not** have to be surrounded by dollar signs.

<i>description</i>	<i>command</i>	<i>output</i>
dollar sign	<code>\\$</code>	\$
percent	<code>\%</code>	%
ampersand	<code>\&</code>	&
pound	<code>\#</code>	#
backslash	<code>\textbackslash</code>	\
left quote marks	<code>‘ ‘</code>	“
right quote marks	<code>’ ’</code>	”
single left quote	<code>‘</code>	‘
single right quote	<code>’</code>	’
hyphen	<code>X-ray</code>	X-ray
en-dash	<code>pp. 5--15</code>	pp. 5–15
em-dash	<code>Yes---or no?</code>	Yes—or no?

Resources

Great symbol look-up site: [Detexify](#)
[L^AT_EX Mathematical Symbols](#)
[The Comprehensive L^AT_EX Symbol List](#)
[The Not So Short Introduction to L^AT_EX 2 \$\epsilon\$](#)
[TUG: The T_EX Users Group](#)
[CTAN: The Comprehensive T_EX Archive Network](#)

L^AT_EX for the Mac: [MacT_EX](#)
L^AT_EX for the PC: [T_EXnicCenter](#) and [MiK_T_EX](#)
L^AT_EX online: [WriteLaTeX](#).

Dave Richeson, Dickinson College, <http://divisbyzero.com/>