

# Algebra HSLU Kevin Häusler

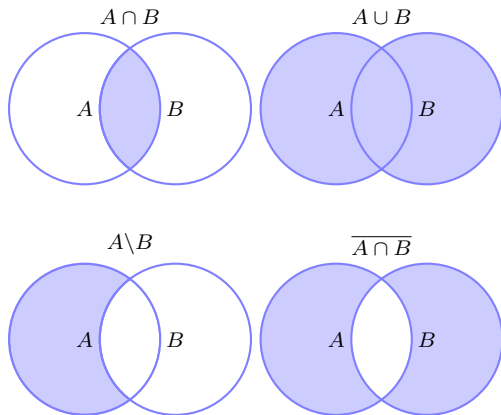
## Zahlen und Logik

### Zahlen

| *              | Bedeutung   | Beispiel                                |
|----------------|---|---|
| $\mathbb{N}$   | Natürliche Zahlen = ganze Positive                | $\{1;2;3;\}$                            |
| $\mathbb{N}_0$ | Natürliche Zahlen mit 0                           | $\{0;1;2;\}$                            |
| $\mathbb{Z}$   | Ganze Zahlen = $\mathbb{N}$ + ganze Negative      | $\{-1;0;1;\}$                           |
| $\mathbb{Q}$   | Rationale Zahlen = Bruchzahlen                    | $\frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}$ |
|                | Irrationale Zahlen = Nachkommastellen             | 0.3281                                  |
| $\mathbb{R}$   | Reelle Zahlen = $\mathbb{Q}$ + Irrationale Zahlen | Alle                                    |

### Mengen Operationen

| *                       | Bedeutung                                 |
|-------------------------|---|
| $\emptyset$ oder $\{\}$ | Leere Menge, enthält keine Elemente       |
| $x \in A$               | Beschreibt Element x ist in Menge A       |
| $x \notin A$            | Beschreibt Element x ist nicht in Menge A |
| $A \subset B$           | A ist eine Teilmenge von B                |
| $A \cap B$              | Schnittmenge von A und B                  |
| $A \cup B$              | Vereinigungsmenge von A und B             |
| $A \setminus B$         | Differenzbildung, Menge von A ohne B      |



### Aussagenlogik

**Term:** Ein Term ist eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern. Ein Term hat keinen Wahrheitsgehalt, ist also weder wahr noch falsch.

**Aussage:** Eine Aussage beschreibt durch Worte oder Zeichen einen Sachverhalt. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

**Aussageform:** Jeder sprachliche oder zeichensymbolische Ausdruck mit wenigstens einer Variablen wenn er durch jede sinnvolle Belegung der Variablen jeweils eine Aussage wird.

| *          | Bedeutung   | Beispiel                   |
|------------|---|----------------------------|
| $ A $      | Kardinalität/Mächtigkeit beschreibt Anzahl Elemente einer Menge   | $A = \{1;2\}$<br>$ A  = 2$ |
| $\wedge$   | Konjunktion/UND $A \wedge B$ = Wahr wenn A und B beide Wahr sind  | $A \wedge B$<br>$A, B = W$ |
| $\vee$     | Disjunktion/ODER $A \vee B$ = Wahr wenn A oder B jeweils Wahr ist | $\{-1;0;1;\}$              |
| $\neg$     | Negation A = Wahr $\neg A$ = Falsch                               | $\neg A$                   |
| $\implies$ | Implikation: Daraus folgt   |                            |
| $\iff$     | Äquivalenz $A \iff B$ wenn beide wahr oder falsch sind            |                            |
| $\forall$  | Für Alle  | $\forall x \in \mathbb{N}$ |
| $\exists$  | Es Existiert  | $\exists x \in \mathbb{N}$ |

| A B | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $\neg B$ | $A \vee \neg B$ |
|-----|--------------|------------|----------|-----------------|
| T T | T            | T          | F        | T               |
| T F | F            | T          | T        | T               |
| F T | F            | T          | F        | F               |
| F F | F            | F          | T        | T               |

### Summe und Produkte

#### Summezeichen:

Es sei:  $n, k \in \mathbb{Z}$  und  $n \geq k$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

k heisst Laufvariable, Laufindex oder Summationsvariable

1 heisst Startwert oder untere Grenze

n heisst Endwert oder obere Grenze

$a_k$  ist die Funktion bezüglich der Laufvariable

**Beispiel:**  $\sum_{k=1}^5 k^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \\ &= 55 \end{aligned}$$

#### Produktzeichen:

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

k heisst Laufvariable oder Laufindex

1 heisst Startwert oder untere Grenze

n heisst Endwert oder obere Grenze

$a_k$  ist die Funktion bezüglich der Laufvariable

**Beispiel:**  $\prod_{k=1}^5 k^2$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^5 k^2 &= 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \\ &= 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \\ &= 14400 \end{aligned}$$

## Gleichungen

### Gleichungen Lösen

Jede Zahl aus der Definitionsmenge, die beim Einsetzen für x zu einer wahren Aussage führt, heisst Lösung der Gleichung.

**Grundmenge, Definitionsbereich**  $\mathbb{D}$

Die Menge aus der die Lösungen stammen dürfen.

### Lösungsvariable

Variable nach der aufgelöst wird.

### Formvariablen, Parameter

Alle anderen Variablen.

### Lösungsmenge

Menge aller Elemente aus der Definitionsmenge, die zu einer wahren Aussage führen.

### Äquivalenz

Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn beim Ersetzen der Variablen durch die gleichen Elemente der "gemeinsamen" Definitionsmenge entweder beide in eine wahre oder falsche Aussage übergehen.

### Beispiel:

$$4(x+1,5) = 9x - 6 - 7x \quad | \text{ Terme vereinfachen}$$

$$4x + 6 = 2x - 6 \quad | - 2x$$

$$4x - 2x + 6 = 2x - 2x - 6$$

$$2x + 6 = -6 \quad | - 6$$

$$2x - 6 = -6 - 6$$

$$2x = -12 \quad | : 2$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-12}{2}$$

$$x = -6 \quad | \text{ Lösungsmenge ablesen}$$

## Äquivalenzumformungen

Umformungen einer Gleichung, bei denen die Lösungsmenge gleich bleibt, heißen Äquivalenzumformungen.

Folgende Äquivalenzumformungen sind möglich:

### 1. Termumformungen

$$2x + 5 - 3 = 0 \iff 2x + 2 = 0$$

### 2. Add./Sub.. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten

### 3. Mult./Div. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten

Achtung: Ausser mit 0

### 4. Beidseitige Add./Sub. mit dem gleichen Term

### 5. Beidseitige Mult./Div. mit dem gleichen Term

## Lineare Gleichungen

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form  $ax + b = 0$  bringen lässt, heisst lineare Gleichung. Wir können lineare Gleichungen daran erkennen, dass die Variable nur in der 1. Potenz auftritt – also kein  $x^2, x^3, \dots$  enthalten.

### Beispiel Lösung einer linearen Gleichung

$$2(2x - 1) = 3(x + 1) \quad | \text{ Ausmultiplizieren}$$

$$4x - 2 = 3x + 3 \quad | - 3x$$

$$x - 2 = 3 \quad | + 2$$

$$x = 5$$

Lösungsmenge angeben:  $\mathbb{L} = \{5\}$

## Quadratische Gleichungen

Gleichungen, die sich durch Äquivalenzumformungen auf die Form  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ) bringen lassen, heißen quadratische Gleichungen. Wir können quadratische Gleichungen daran erkennen, dass die Variable  $x$  in der 2. Potenz  $x^2$ , aber in keiner höheren Potenz vorkommt. Es gibt 4 Arten/Formen von Quadratischen Gleichungen.

### Beispiel Lösung einer Reinquadratische Gleichung

$ax^2 = 0$ : Reinquadratische Gleichungen ohne Absolutglied besitzen als einzige Lösung die Null.

$$x^2 = 0 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{0}$$

$$x = \pm 0$$

$$x = 0$$

Lösungsmenge angeben:  $\mathbb{L} = 0$

### Beispiel Lösung einer Reinquadratische Gleichung mit Absolutglied

$x^2 - 9 = 0$  Gleichung nach  $x^2$  auflösen:

$$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$$

$$x^2 - 9 + 9 = 0 + 9$$

$$x^2 = 9$$

Wurzel ziehen:

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

Fall Unterscheidung:

$$x_2 = 3, x_2 = -3$$

Lösungsmenge angeben:  $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

### Beispiel Lösung einer Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied

Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied lösen wir folgendermaßen:

$-2x^2 + 4x = 0$  Quadratische Gleichung in Normalform bringen:

$$-2x^2 + 4x = 0 \quad | : (-2)$$

$$\frac{-2x^2 + 4x}{-2} = \frac{0}{-2}$$

$$\frac{-2x^2}{-2} + \frac{4x}{-2} = \frac{0}{-2}$$

$$x^2 - 2x = 0$$

x ausklammern:

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

Faktoren gleich Null setzen:

$$\underbrace{x}_{=0} \cdot \underbrace{(x-2)}_{=0} = 0$$

Gleichungen nach x auflösen:

1. Faktor:  $x = 0$

2. Faktor:

$$x - 2 = 0 \quad | + 2$$

$$x - 2 + 2 = 0 + 2$$

$$x = 2$$

Lösungsmenge angeben:  $\mathbb{L} = \{0; 2\}$

## Mitternachtsformel

Gemischtquadratische Gleichungen  $ax^2 + bx + c = 0$  mit Absolutglied lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fallunterscheidung:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Regeln

Wenn das lineare Glied fehlt, gilt  $b = 0$ .

Wenn das absolute Glied fehlt, gilt  $c = 0$ .

Wenn das  $x^2$  allein steht, gilt  $a = 0$  (wegen  $1 \cdot x^2 = x^2$ ). Wenn das  $x$  allein steht, gilt (wegen  $1 \cdot x = x$ ).

### Lösen einer Quadratischen Gleichung mit Mitternachtsformel

$2x^2 - 8x + 8 = 0$  a, b und c aus der allgemeinen Form herauslesen:

$$a = 2, b = -8 \text{ und } c = 8$$

a, b und c in die Mitternachtsformel einsetzen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} \end{aligned}$$

Lösungen berechnen:

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{0}}{4}$$

Wenn  $b^2 - 4ac = 0 \dots$

$$= \frac{8 \pm 0}{4}$$

$$= \frac{8}{4}$$

$$= 2$$

Lösungsmenge angeben:

$$\mathbb{L} = \{2\}$$

...dann gibt es eine Lösung!

## Bruchgleichung

Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung mit mindestens einem Bruchterm, in dem die Variable  $x$  im Nenner vorkommt.

### Lösen einer Bruchgleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$$

Definitionsmenge bestimmen:

Wann wird der Nenner des Bruchs gleich Null?

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Für  $x = 0$  wird der Nenner gleich Null. Daraus folgt:

1. Nenner  $x = 0$ , 2. Nenner  $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Definitionsmenge:  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

Gleichung nach  $x$  auflösen. Brüche auf eine Seite bringen:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = 0$$

Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x}{x} &= 0 \\ \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{2x}{x(x+1)} &= 0 \\ \frac{(x+1) - 2x}{x(x+1)} &= 0 \\ \frac{-x+1}{x(x+1)} &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Hauptnenner multiplizieren, um den Bruch zu beseitigen:

$$\begin{aligned} \frac{-x+1}{x(x+1)} \cdot x(x+1) &= 0 \cdot x(x+1) \\ \frac{-x+1}{\cancel{x(x+1)}} \cdot \cancel{x(x+1)} &= 0 \\ -x+1 &= 0 \end{aligned}$$

Nach  $x$  auflösen:

$$-x+1=0 \quad | +x$$

Prüfen, ob der  $x$ -Wert in der Definitionsmenge enthalten ist:  
Da  $x = 1$  in der Definitionsmenge  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  liegt, haben wir eine gültige Lösung berechnet.

### Kehrwert

Den Kehrwert eines Bruchs erhält man durch Vertauschen von Zähler und Nenner.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$$

Umschreiben zu:  $x = 0,5x + 0,5$  und auflösen zu  
 $0,5x = 0,5 \quad | \cdot 2 \Rightarrow x = 1$

### Multiplikation übers Kreuz

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung jeweils ein Bruch steht, kann eine Multiplikation über Kreuz sinnvoll sein.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{2}{x+1} \\ 1 \cdot (x+1) &= 2 \cdot x \\ x+1 &= 2x \quad | -x \\ \Rightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

## Betragsgleichung

Betragsgleichungen lassen sich durch Fallunterscheidung lösen.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Aus der Definition des Betrags ergeben sich folgende zwei Fälle:

- Wenn der Term im Betrag größer oder gleich Null ist ( $a \geq 0$ ), können wir den Term einfach ohne Betragsstriche schreiben ( $|a| = a$ )
- Wenn der Term im Betrag kleiner als Null ist ( $a < 0$ ), müssen wir die Vorzeichen des Terms umdrehen, um die Betragsstriche weglassen zu können ( $|a| = -a$ ).

Die Lösungsmengen der einzelnen Fälle geben wir als Intervalle an.

Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen.

**Beispiel**  $|x+1| = 3$

Aus der Definition des Betrag ergibt sich:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{für } x+1 < 0 \end{cases}$$

Fallunterscheidung Fall 1:  $x+1 \geq 0$ :

$$x+1 \geq 0 \quad | -1$$

$$x \geq -1$$

Fallunterscheidung Fall 2:  $x+1 < 0$ :

$$x+1 < 0 \quad | -1$$

$$x < -1$$

Zusammenfassung:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

### Lösungsmengen der einzelnen Fälle bestimmen:

Fall 1  $x+1 \geq 0$ :

Für  $x \geq -1$  können wir Gleichung  $|x+1| = 3$  umschreiben zu  $x+1 = 3$ , Jetzt müssen wir noch die Gleichung nach  $x$  auflösen:

$$\begin{aligned} x+1-1 &= 3-1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge  $\mathbb{L}_1$  muss sowohl die Bedingung  $x \geq -1$  (1. Fall) als auch  $x = 2$  (Lösung 1. Fall) erfüllen:

$$\mathbb{L}_1 = \{2\}$$

Fall 2:  $x < -1$

Für  $x < -1$  können wir Gleichung umschreiben zu  $|x+1| = 3$   
Jetzt müssen wir noch die Gleichung nach  $x$  auflösen:

$$\begin{aligned} -x-1 &= 3 \\ -x-1+1 &= 3+1 \\ -x &= 4 \\ -x \cdot (-1) &= 4 \cdot (-1) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge muss sowohl die Bedingung  $x < -1$  (2. Fall) als auch  $x = -4$  (Lösung 2. Fall) erfüllen:

$$\mathbb{L}_2 = \{-4\}$$

### Lösungsmenge der Betragsgleichung bestimmen

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2\} \cup \{-4\} = \{-4; 2\}$$

Potenzgleichungen

Eine Potenzgleichung ist eine Gleichung, die aus nur einer Potenz einer Variable und einer Konstanten besteht:  $x^n = a$

Die Vorgehensweise unterscheidet sich danach, wie der Exponent n aussieht:

- 1. Typ:  $x^n = a$  mit  $n \in \mathbb{N}$
- 2. Typ:  $x^{-n} = a$  mit  $n \in \mathbb{N}$
- 3. Typ:  $x^{\frac{m}{n}} = a$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und mit  $m \in \mathbb{Z}$

Grundsätzlich lösen wir Potenzgleichungen durch Wurzelziehen. Das Problem ist, dass das Wurzelziehen im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist. Um zu verhindern, dass Lösungen verloren gehen, muss man bei geraden Exponenten Betragsstriche setzen:

- Wenn n gerade ist, gilt:  $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ .
- Wenn n ungerade ist, gilt:  $\sqrt[n]{x^n} = x$ .

Typ 1:  $n \in \mathbb{N}$

$x^2 = 4$

|  $\sqrt{\phantom{x}}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$

| Da  $n$  gerade ist, gilt:  $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

$|x| = 2$

$x = \pm 2$

Die Lösung der Potenzgleichung  $x^2 = 0$  ist  $\mathbb{L} = \{0\}$ .

$x^3 = 8$

|  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$

$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$

| Da  $n$  ungerade ist, gilt:  $\sqrt[n]{x^n} = x$

$x = 2$

Die Lösung der Potenzgleichung  $x^3 = 8$  ist  $\mathbb{L} = \{2\}$ .

Typ 2:  $x^{-n} = a$   
Vorgehensweise: Umformung der Gleichung zu Typ 1 (falls  $a \neq 0$ )  
Mögliche Lösungen

- :  $a = 0$  Es gibt keine Lösung  $\mathbb{L} = \{\}$ .
- $a \neq 0$  Die Gleichung  $x^{-n} = a$  ist äquivalent zu  $x^n = \frac{1}{a}$ .

$x^{-2} = 3$

| Potenzgesetz anwenden:  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$\frac{1}{x^2} = 3$

| Kehrwert

$x^2 = \frac{1}{3}$

|  $\sqrt{\phantom{x}}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

| Da  $n$  gerade ist, gilt:  $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

$|x| = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

Die Lösung der Potenzgleichung  $x^{-2} = 3$  ist  $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}; +\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}$ .

Typ 3:  $m \in \mathbb{Z}$   
Vorgehensweise: Potenzieren mit n  
Ist der Exponent  $\frac{m}{n}$  keine ganze Zahl, so sind die Gleichungen in  $\mathbb{R}^-$  nicht definiert. In  $\mathbb{R}_0^+$  sind die Gleichungen  $x^{\frac{m}{n}} = a$  und  $\sqrt[n]{x^m} = a$  äquivalent.

$x^{\frac{2}{3}} = 4$

| Potenzieren mit 3

$(x^{\frac{2}{3}})^3 = 4^3$

$x^2 = 64$

|  $\sqrt{\phantom{x}}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$

| Da  $n$  gerade ist, gilt:  $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

$|x| = 8$

$x = \pm 8$

$x_1 = -8$  gehört nicht zur Definitionsmenge  $\mathbb{R}_0^+$ .  
 $x_2 = 8$  ist eine mögliche Lösung. Da Potenzieren i. Allg. keine Äquivalenzumformung ist, ist eine Probe unerlässlich.

$x^{\frac{2}{3}} = 4$

|  $x_2 = 8$

$8^{\frac{2}{3}} = 4$

$4 = 4$

Wahre Aussage!

Die Lösung der Potenzgleichung  $x^{\frac{2}{3}} = 4$  ist  $\mathbb{L} = \{8\}$ .

Wurzelgleichung

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der die Variable (auch) unter einer Wurzel vorkommt.

1. Wurzeln beseitigen
  - (a) Wurzel isolieren
  - (b) Potenzieren
2. Algebraische Gleichung lösen
3. Probe Machen
4. Lösungsmenge aufschreiben

Beispiel:  $\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2$   
Die Wurzel ist bereits isoliert, gehe direkt zu Potenzieren:

$\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2$

| Quadrieren

$\sqrt{x + \sqrt{2x}}^2 = 2^2$

$x + \sqrt{2x} = 4$

Wurzel isolieren:

$x + \sqrt{2x} = 4$

|  $-x$

$\sqrt{2x} = 4 - x$

Potenzieren:

$\sqrt{2x} = 4 - x$

| Quadrieren

$\sqrt{2x}^2 = (4 - x)^2$

$2x = 16 - 8x + x^2$

Schritt 2: Algebraische Gleichung lösen:  
Quadratische Gleichung in Normalform bringen:

$2x = 16 - 8x + x^2$

|  $-2x$

$0 = 16 - 10x + x^2$

| Seiten vertauschen

$16 - 10x + x^2 = 0$

| Nach Potenzen von  $x$  sortieren

$x^2 - 10x + 16 = 0$

Quadratische Gleichung mit der Mitternachtsformel lösen:

$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

[Formel hinschreiben]

$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} =$

[Zahlen für a, b und c einsetzen]

$= \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2}$

[Nenner sowie Term innerhalb der Wurzel ausrechnen]

$= \frac{10 \pm 6}{2}$

[Wurzel berechnen]

Daraus folgt:  
 $x_1 = \frac{10+6}{2} = 8$  und  $x_2 = \frac{10-6}{2} = 2$

Schritt 3 Probe Machen

$\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2$  |  $x_1 = 2$

$\sqrt{2 + \sqrt{2 \cdot 2}} = 2$

$\sqrt{2 + \sqrt{4}} = 2$

$\sqrt{2 + 2} = 2$

$\sqrt{4} = 2$

$2 = 2$       Wahre Aussage!

$x_1 = 2$  gehört zur Lösung der Wurzelgleichung.

$\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2$  |  $x_2 = 8$

$\sqrt{8 + \sqrt{2 \cdot 8}} = 2$

$\sqrt{8 + \sqrt{16}} = 2$

$\sqrt{8 + 4} = 2$

$\sqrt{12} = 2$       Falsche Aussage!

$x_2 = 8$  ist offensichtlich nur eine Scheinlösung.

Schritt 4 Lösungsmenge aufschreiben

$\mathbb{L} = \{2\}$

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (usually pronounced “LAY teck,” sometimes “LAH teck,” and never “LAY tex”) is a mathematics typesetting program that is the standard for most professional mathematics writing. It is based on the typesetting program T<sub>E</sub>X created by Donald Knuth of Stanford University (his first version appeared in 1978). Leslie Lamport was responsible for creating L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X a more user friendly version of T<sub>E</sub>X. A team of L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X programmers created the current version, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>.

Math vs. text vs. functions

In properly typeset mathematics variables appear in italics (e.g.,  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ). The exception to this rule is predefined functions (e.g.,  $\sin(x)$ ). Thus it is important to **always** treat text, variables, and functions correctly. See the difference between  $x$  and  $x$ ,  $-1$  and  $-1$ , and  $\sin(x)$  and  $\sin(x)$ .

$\alpha Z \frac{1}{2}$

There are two ways to present a mathematical expression—*inline* or as an *equation*.

Inline mathematical expressions

Inline expressions occur in the middle of a sentence. To produce an inline expression, place the math expression between dollar signs (\$). For example, typing  $90^\circ$  is the same as  $\frac{\pi}{2}$  radians yields  $90^\circ$  is the same as  $\frac{\pi}{2}$  radians.

Equations

Equations are mathematical expressions that are given their own line and are centered on the page. These are usually used for important equations that deserve to be showcased on their own line or for large equations that cannot fit inline. To produce an inline expression, place the mathematical expression between the symbols \[ and \]. Typing 
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 yields

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Displaystyle

To get full-sized inline mathematical expressions use `\displaystyle`. Use this sparingly. Typing `\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}`, not this `\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}`. yields I want this  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , not this  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Images

You can put images (pdf, png, jpg, or gif) in your document. They need to be in the same location as your .tex file when you compile the document. Omit `[width=.5in]` if you want the image to be full-sized.

```
\begin{figure}[ht]
\includegraphics[width=.5in]{imagename.jpg}
\caption{The (optional) caption goes here.}
\end{figure}
```

Text decorations

Your text can be *italics* (`\textit{italics}`), **boldface** (`\textbf{boldface}`), or underlined (`\underline{underlined}`).

Your math can contain boldface, **R** (`\mathbf{R}`), or blackboard bold, **ℝ** (`\mathbb{R}`). You may want to used these to express the sets of real numbers ( $\mathbb{R}$  or **R**), integers ( $\mathbb{Z}$  or **Z**), rational numbers ( $\mathbb{Q}$  or **Q**), and natural numbers ( $\mathbb{N}$  or **N**).

To have text appear in a math expression use `\text`. `(0,1]=\{x\in\mathbb{R}:x>0\text{ and }x\leq 1\}` yields  $(0,1] = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ and } x \leq 1\}$ . (Without the `\text` command it treats “and” as three variables:  $(0,1] = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ and } x \leq 1\}$ .)

Spaces and new lines

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ignores extra spaces and new lines. For example,

This sentence will look fine after it is compiled.

This sentence will look fine after it is compiled.

Leave one full empty line between two paragraphs. Place `\` at the end of a line to create a new line (but not create a new paragraph).

This compiles

like\

this.

This compiles

like this.

Use `\noindent` to prevent a paragraph from indenting.

Comments

Use `%` to create a comment. Nothing on the line after the `%` will be typeset. `$f(x)=\sin(x)$ %this is the sine function`

yields  $f(x) = \sin(x)$

Delimiters

| <i>description</i> | <i>command</i>     | <i>output</i> |
|--------------------|--------------------|---------------|
| parentheses        | <code>(x)</code>   | (x)           |
| brackets           | <code>[x]</code>   | [x]           |
| curly braces       | <code>\{x\}</code> | {x}           |

To make your delimiters large enough to fit the content, use them together with `\right` and `\left`. For example, `\left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_n` produces  $\left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_n$ .

Curly braces are non-printing characters that are used to gather text that has more than one character. Observe the differences between the four expressions `x^2`, `x^{2}`, `x^{2t}`, `x^{2t}` when typeset:  $x^2$ ,  $x^2$ ,  $x^2t$ ,  $x^{2t}$ .

Lists

You can produce ordered and unordered lists.

| <i>description</i> | <i>command</i>                 | <i>output</i> |
|--------------------|--------------------------------|---------------|
| unordered list     | <code>\begin{itemize}</code>   |               |
|                    | <code>\item</code>             |               |
|                    | Thing 1                        | • Thing 1     |
|                    | <code>\item</code>             | • Thing 2     |
|                    | Thing 2                        |               |
| ordered list       | <code>\end{itemize}</code>     |               |
|                    | <code>\begin{enumerate}</code> |               |
|                    | <code>\item</code>             |               |
|                    | Thing 1                        | 1. Thing 1    |
|                    | <code>\item</code>             | 2. Thing 2    |
|                    | Thing 2                        |               |
|                    | <code>\end{enumerate}</code>   |               |

Symbols (in *math* mode)

The basics

| <i>description</i>       | <i>command</i>            | <i>output</i>   |
|--------------------------|---------------------------|-----------------|
| addition                 | <code>+</code>            | +               |
| subtraction              | <code>-</code>            | −               |
| plus or minus            | <code>\pm</code>          | ±               |
| multiplication (times)   | <code>\times</code>       | ×               |
| multiplication (dot)     | <code>\cdot</code>        | ⋅               |
| division symbol          | <code>\div</code>         | ÷               |
| division (slash)         | <code>/</code>            | /               |
| circle plus              | <code>\oplus</code>       | ⊕               |
| circle times             | <code>\otimes</code>      | ⊗               |
| equal                    | <code>=</code>            | =               |
| not equal                | <code>\neq</code>         | ≠               |
| less than                | <code>&lt;</code>         | <               |
| greater than             | <code>&gt;</code>         | >               |
| less than or equal to    | <code>\leq</code>         | ≤               |
| greater than or equal to | <code>\geq</code>         | ≥               |
| approximately equal to   | <code>\approx</code>      | ≈               |
| infinity                 | <code>\infty</code>       | ∞               |
| dots                     | <code>1,2,3,\ldots</code> | 1, 2, 3, ...    |
| dots                     | <code>1+2+3+\cdots</code> | 1 + 2 + 3 + ... |
| fraction                 | <code>\frac{a}{b}</code>  | $\frac{a}{b}$   |
| square root              | <code>\sqrt{x}</code>     | $\sqrt{x}$      |
| <i>n</i> th root         | <code>\sqrt[n]{x}</code>  | $\sqrt[n]{x}$   |
| exponentiation           | <code>a^b</code>          | $a^b$           |
| subscript                | <code>a_b</code>          | $a_b$           |
| absolute value           | <code> x </code>          | $ x $           |
| natural log              | <code>\ln(x)</code>       | $\ln(x)$        |
| logarithms               | <code>\log_{a}b</code>    | $\log_a b$      |
| exponential function     | <code>e^x=\exp(x)</code>  | $e^x = \exp(x)$ |
| degree                   | <code>\deg(f)</code>      | $\deg(f)$       |

Functions

| <i>description</i> | <i>command</i>   | <i>output</i>  |
|--------------------|--|--|
| maps to            | <code>\to</code>   | $\rightarrow$  |
| composition        | <code>\circ</code>   | $\circ$  |
| piecewise function | <code>\begin{cases} x &amp; x \geq 0 \\ -x &amp; x &lt; 0 \end{cases}</code> | $ x  = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ |

Greek and Hebrew letters

| <i>command</i>           | <i>output</i> | <i>command</i>        | <i>output</i> |
|--------------------------|---------------|-----------------------|---------------|
| <code>\alpha</code>      | $\alpha$      | <code>\tau</code>     | $\tau$        |
| <code>\beta</code>       | $\beta$       | <code>\theta</code>   | $\theta$      |
| <code>\chi</code>        | $\chi$        | <code>\upsilon</code> | $\upsilon$    |
| <code>\delta</code>      | $\delta$      | <code>\xi</code>      | $\xi$         |
| <code>\epsilon</code>    | $\epsilon$    | <code>\zeta</code>    | $\zeta$       |
| <code>\varepsilon</code> | $\varepsilon$ | <code>\Delta</code>   | $\Delta$      |
| <code>\eta</code>        | $\eta$        | <code>\Gamma</code>   | $\Gamma$      |
| <code>\gamma</code>      | $\gamma$      | <code>\Lambda</code>  | $\Lambda$     |
| <code>\iota</code>       | $\iota$       | <code>\Omega</code>   | $\Omega$      |
| <code>\kappa</code>      | $\kappa$      | <code>\Phi</code>     | $\Phi$        |
| <code>\lambda</code>     | $\lambda$     | <code>\Pi</code>      | $\Pi$         |
| <code>\mu</code>         | $\mu$         | <code>\Psi</code>     | $\Psi$        |
| <code>\nu</code>         | $\nu$         | <code>\Sigma</code>   | $\Sigma$      |
| <code>\omega</code>      | $\omega$      | <code>\Theta</code>   | $\Theta$      |
| <code>\phi</code>        | $\phi$        | <code>\Upsilon</code> | $\Upsilon$    |
| <code>\varphi</code>     | $\varphi$     | <code>\Xi</code>      | $\Xi$         |
| <code>\pi</code>         | $\pi$         | <code>\aleph</code>   | $\aleph$      |
| <code>\psi</code>        | $\psi$        | <code>\beth</code>    | $\beth$       |
| <code>\rho</code>        | $\rho$        | <code>\daleth</code>  | $\daleth$     |
| <code>\sigma</code>      | $\sigma$      | <code>\gimel</code>   | $\gimel$      |

Set theory

| <i>description</i> | <i>command</i>                      | <i>output</i>            |
|--------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| set brackets       | <code>\{1,2,3\}</code>              | $\{1, 2, 3\}$            |
| element of         | <code>\in</code>                    | $\in$                    |
| not an element of  | <code>\notin</code>                 | $\notin$                 |
| subset of          | <code>\subset</code>                | $\subset$                |
| subset of          | <code>\subseteq</code>              | $\subseteq$              |
| not a subset of    | <code>\not\subset</code>            | $\not\subset$            |
| contains           | <code>\supset</code>                | $\supset$                |
| contains           | <code>\supseteq</code>              | $\supseteq$              |
| union              | <code>\cup</code>                   | $\cup$                   |
| intersection       | <code>\cap</code>                   | $\cap$                   |
| big union          | <code>\bigcup_{n=1}^{10} A_n</code> | $\bigcup_{n=1}^{10} A_n$ |
| big intersection   | <code>\bigcap_{n=1}^{10} A_n</code> | $\bigcap_{n=1}^{10} A_n$ |
| empty set          | <code>\emptyset</code>              | $\emptyset$              |
| power set          | <code>\mathcal{P}</code>            | $\mathcal{P}$            |
| minimum            | <code>\min</code>                   | $\min$                   |
| maximum            | <code>\max</code>                   | $\max$                   |
| supremum           | <code>\sup</code>                   | $\sup$                   |
| infimum            | <code>\inf</code>                   | $\inf$                   |
| limit superior     | <code>\limsup</code>                | $\limsup$                |
| limit inferior     | <code>\liminf</code>                | $\liminf$                |
| closure            | <code>\overline{A}</code>           | $\overline{A}$           |

Calculus

| <i>description</i> | <i>command</i>                             | <i>output</i>                   |
|--------------------|--|---------------------------------|
| derivative         | <code>\frac{df}{dx}</code>                 | $\frac{df}{dx}$                 |
| derivative         | <code>f'</code>                            | $f'$                            |
| partial derivative | <code>\frac{\partial f}{\partial x}</code> | $\frac{\partial f}{\partial x}$ |
| integral           | <code>\int</code>                          | $\int$                          |
| double integral    | <code>\iint</code>                         | $\iint$                         |
| triple integral    | <code>\iiint</code>                        | $\iiint$                        |
| limits             | <code>\lim_{x \rightarrow \infty}</code>   | $\lim_{x \rightarrow \infty}$   |
| summation          | <code>\sum_{n=1}^{\infty} a_n</code>       | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$       |
| product            | <code>\prod_{n=1}^{\infty} a_n</code>      | $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$      |

Logic

| <i>description</i>  | <i>command</i>               | <i>output</i>     |
|---------------------|------------------------------|-------------------|
| not                 | <code>\sim</code>            | $\sim$            |
| and                 | <code>\land</code>           | $\wedge$          |
| or                  | <code>\lor</code>            | $\vee$            |
| if...then           | <code>\to</code>             | $\rightarrow$     |
| if and only if      | <code>\leftrightarrow</code> | $\leftrightarrow$ |
| logical equivalence | <code>\equiv</code>          | $\equiv$          |
| therefore           | <code>\therefore</code>      | $\therefore$      |
| there exists        | <code>\exists</code>         | $\exists$         |
| for all             | <code>\forall</code>         | $\forall$         |
| implies             | <code>\Rightarrow</code>     | $\Rightarrow$     |
| equivalent          | <code>\Leftrightarrow</code> | $\Leftrightarrow$ |

Linear algebra

| <i>description</i> | <i>command</i>   | <i>output</i>   |
|--------------------|--|---|
| vector             | <code>\vec{v}</code>   | $\vec{v}$   |
| vector             | <code>\mathbf{v}</code>  | $\mathbf{v}$  |
| norm               | <code>  \vec{v}  </code>   | $  \vec{v}  $   |
| matrix             | <code>\begin{bmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ 4 &amp; 5 &amp; 6 \\ 7 &amp; 8 &amp; 0 \end{bmatrix}</code> | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ |
| determinant        | <code>\det(A)</code>   | $\det(A)$   |
| trace              | <code>\operatorname{tr}(A)</code>  | $\operatorname{tr}(A)$  |
| dimension          | <code>\dim(V)</code>   | $\dim(V)$   |

Number theory

| <i>description</i>      | <i>command</i>                  | <i>output</i>        |
|-------------------------|---------------------------------|----------------------|
| divides                 | <code> </code>                  | $ $                  |
| does not divide         | <code>\nmid</code>              | $\nmid$              |
| div                     | <code>\operatorname{div}</code> | $\operatorname{div}$ |
| mod                     | <code>\bmod</code>              | $\bmod$              |
| greatest common divisor | <code>\gcd</code>               | $\gcd$               |
| ceiling                 | <code>\lceil x \rceil</code>    | $\lceil x \rceil$    |
| floor                   | <code>\lfloor x \rfloor</code>  | $\lfloor x \rfloor$  |

# Geometry and trigonometry

| <i>description</i> | <i>command</i>             | <i>output</i>   |
|--------------------|----------------------------|-----------------|
| angle              | <code>\angle ABC</code>    | $\angle ABC$    |
| degree             | <code>90^{\circ}</code>    | $90^\circ$      |
| triangle           | <code>\triangle ABC</code> | $\triangle ABC$ |
| segment            | <code>\overline{AB}</code> | $\overline{AB}$ |
| sine               | <code>\sin</code>          | sin             |
| cosine             | <code>\cos</code>          | cos             |
| tangent            | <code>\tan</code>          | tan             |
| cotangent          | <code>\cot</code>          | cot             |
| secant             | <code>\sec</code>          | sec             |
| cosecant           | <code>\csc</code>          | csc             |
| inverse sine       | <code>\arcsin</code>       | arcsin          |
| inverse cosine     | <code>\arccos</code>       | arccos          |
| inverse tangent    | <code>\arctan</code>       | arctan          |

# Symbols (in *text* mode)

The followign symbols do **not** have to be surrounded by dollar signs.

| <i>description</i> | <i>command</i>              | <i>output</i> |
|--------------------|-----------------------------|---------------|
| dollar sign        | <code>\\$</code>            | \$            |
| percent            | <code>\%</code>             | %             |
| ampersand          | <code>\&amp;</code>         | &             |
| pound              | <code>\#</code>             | #             |
| backslash          | <code>\textbackslash</code> | \             |
| left quote marks   | <code>‘ ‘</code>            | “             |
| right quote marks  | <code>’ ’</code>            | ”             |
| single left quote  | <code>‘</code>              | ‘             |
| single right quote | <code>’</code>              | ’             |
| hyphen             | <code>X-ray</code>          | X-ray         |
| en-dash            | <code>pp. 5--15</code>      | pp. 5–15      |
| em-dash            | <code>Yes---or no?</code>   | Yes—or no?    |

# Resources

Great symbol look-up site: [Detexify](#)  
[L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Mathematical Symbols](#)  
[The Comprehensive L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Symbol List](#)  
[The Not So Short Introduction to L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2 \$\epsilon\$](#)   
[TUG: The T<sub>E</sub>X Users Group](#)  
[CTAN: The Comprehensive T<sub>E</sub>X Archive Network](#)  
  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X for the Mac: [MacT<sub>E</sub>X](#)  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X for the PC: [T<sub>E</sub>XnicCenter](#) and [MiK<sub>T</sub><sub>E</sub>X](#)  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X online: [WriteLaTeX](#).

---

Dave Richeson, Dickinson College, <http://divisbyzero.com/>