30-05-2024

Υπολογιστική Φυσική Στερεάς Κατάστασης

Problem 5

Haka Kevin

Σε αυτή την εργασία επρόκειτο να δούμε μια από τις πιο σύγχρονες χρήσεις δικτύων, τα νευρωνικά δίκτια. Θα δούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε την κατασκευή ενός τέτοιου δικτύου για την επίλυση προβλημάτων πρόβλεψης, στην περίπτωση μας θα επιλύσουμε το πρόβλημα XOR και θα εξηγήσουμε πως το δίκτυο εν τέλει μαθαίνει.

Καταρχάς να αναφέρουμε ποιο είναι το πρόβλημα XOR. Το XOR είναι ένας λογικός τελεστής που παίρνει ως είσοδο δυο λογικές τιμές True ή False (θα τα πούμε 1 και 0 αντίστοιχα για απλότητα) και δίνει ως αποτέλεσμα False αν και οι δυο τιμές εισόδου είναι ίδιες και True αν οι τιμές εισόδου είναι διαφορετικές (σχέσεις 1-4). Η δυσκολία του προβλήματος οφείλεται στο ότι τα σημεία σε ένα δυσδιάστατο χώρο δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμα (Figure 1), συνεπώς χριζόμαστε μη-γραμμικό διαχωρισμό.

$$XOR(0,0) = 0 \tag{1}$$

$$XOR(0,1) = 1 \tag{2}$$

$$XOR(1,0) = 1 \tag{3}$$

$$XOR(1,1) = 0 \tag{4}$$

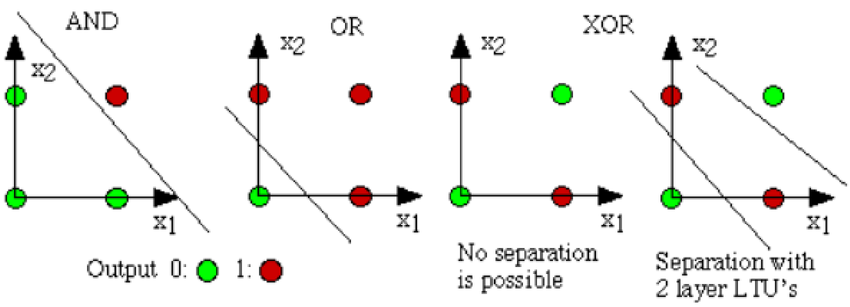

Figure 1 Γραφική αναπαράσταση διαχωρισμού αποτελεσμάτων λογικών τελεστών.

Για να επιτευχθεί μη-γραμμικό διαχωρισμό σε ένα νευρωνικό δίκτυο χρειάζεται το νευρωσικό δίκτυο να έχει κρυφά επίπεδα. Για να παραμείνει απλό το νευρωνικό δίκτυο και εφόσον δεν απαιτείται κάτι πιο περίπλοκο για το πρόβλημα XOR, θα αρκεστούμε σε ένα μόνο κρυφό επίπεδο με 2 νευρώνες. Το τελικό δίχτυο που θα χρησιμοποιήσουμε φαίνεται στο Figure 2.

Θα πρέπει να αναφερθεί πως οι νευρώνες στο επίπεδο εισόδου δεν μετασχηματίζουν καθόλου το σήμα ενώ το μόνο που κάνουν είναι να το προωθήσουν στο πρώτο κρυφό επίπεδο. Το δίκτυο στο Figure 2 έχει συνολικά 9 παραμέτρους να εκπαιδεύσει, 3 παραμέτρους προκαταλήψεις (bias) για τους νευρώνες 3, 4, και 5, καθώς και 6 παραμέτρους βαρών (weights) που ανήκουν στις συνδέσεις 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-5 και 4-5. Στις παραμέτρους αυτές κατά την διάρκεια της εκπαιδεύσεις θεωρούμε ότι αποθηκεύεται η πληροφορία για τα δεδομένα εκπαιδεύσεις.

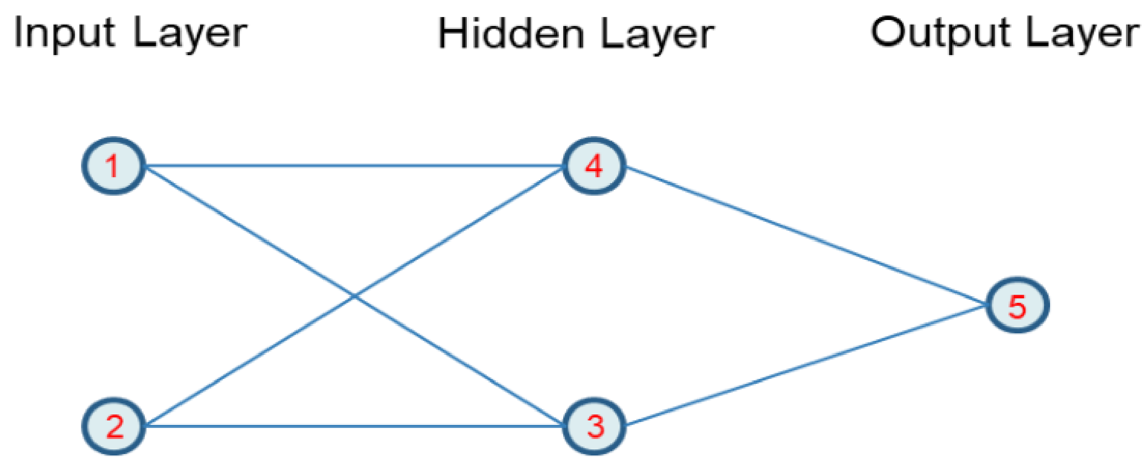

Figure 2 *Γραφική αναπαράσταση νευρωνικού δικτύου με 2 νευρώνες στο επίπεδο εισόδου 1 νευρώνα εξόδου και ένα κρυμμένο επίπεδο με δυο νευρώνες.*

Έστω **x** και **y** τα σήματα εισόδου και εξόδου αντίστοιχα ενός νευρώνα καθώς και **w** το βάρος της σύνδεσης ανάμεσα σε δυο νευρώνες, με **b** συμβολίζουμε την προκατάληψη του νευρώνα. Το σήμα εισόδου σε ένα νευρώνα πέρα από τους νευρώνες στο επίπεδο εισόδου (που τα δίνουμε εμείς ως είσοδο), δίνεται από την σχέση 5. Το σήμα εξόδου από έναν νευρώνα δίνεται από την σχέση 6 όπου **f(x)** είναι μια συνάρτηση ενεργοποίησης. Εμείς ως συνάρτηση ενεργοποιήσεις θα χρησιμοποιήσουμε την σιγμοειδή συνάρτηση που είναι η σχέση 11. Το πως διορθώνονται σε κάθε εκπαίδευση τα βάρη και οι προκαταλήψεις φαίνονται από τις σχέσεις 7 και 8 αντίστοιχα, όπου **η**, είναι μια σταθερά που την καθορίζουμε εμείς και ονομάζεται ρυθμός εκπαίδευσης, και **δ**, είναι μια ποσότητα που υπολογίζεται από την σχέση 9 για όλους τους νευρώνες εκτός από τους νευρώνες στο επίπεδο εξόδου που υπολογίζονται από την σχέση 10. Με **t** συμβολίζεται η τιμή στόχος για τον εκάστοτε νευρώνα στο επίπεδο εξόδου.

$$x_j = \sum_i y_i w_{ij} + b_j \tag{5}$$

$$y_j = f(x_j) \tag{6}$$

$$w_{ij}(n+1) = w_{ij}(n) + 2 * \eta * \delta_i * y_j \tag{7}$$

$$b_j(n+1) = b_j(n) + 2 * \eta * \delta_j \tag{8}$$

$$\delta_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_j} * \sum_i \delta_i w_{ij} \tag{9}$$

$$\delta_j = (t_j - y_j)\frac{\partial y_j}{\partial x_j} \tag{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \tag{11}$$

Με τις παραπάνω σχέσης καθώς και με την αρχιτεκτονική στο Figure 2 ήμαστε έτοιμοι να επιλύσουμε το πρόβλημα XOR. Τα αρχικά βάρη και τις προκαταλήψεις για το νευρωνικό δίκτυο θα τα ορίσουμε τυχαία με τιμές στο διάστημα (-1,1) από ομοιόμορφη κατανομή ενώ τον ρυθμό εκπαίδευσης θα το θεωρήσουμε 0.2.

Με βάση 1000 νευρικιά δίκτια που κατασκευάστηκαν προέκυψε πως για να επιτευχθεί ένα μέσο τεραγονικό σφάλμα (MSE) μικρότερο του 0.001 χρειάζονται περίπου 5748.5 ± 4288.8 εποχές. Να σημειωθεί πως ο μέγιστος αριθμός εποχών που μπορούσε να τρέξει κάθε νευρωνικό δίκτυο ήταν 10^5, τα δίκτυα που δεν είχαν συγκλίνει μέχρι τότε απορρίπτονταν γιατί κατά πάσα πιθανότητα είχαν εγκλωβιστεί σε κάποιο τοπικό ελάχιστο που δεν ήταν επαρκής. Από τα 1000 λοιπών μόνο τα 830 σύγκλιναν στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Στο Figure 3 μπορούμε να δούμε μια ενδεικτική μείωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος σαν συνάρτηση με τις εποχές καθώς το δίκτυο εκπαιδεύεται. Στο Figure 4 μπορούμε να δούμε το μη-γραμμικό επίπεδο που έχει προσαρμοστεί στα δεδομένα εκπαίδευσης. Ενδεικτικά αναφέρω παρακάτω τις τιμές που επιστρέφει το δίκτυο ανάλογα με τις τιμές εισόδου.

Είσοδος – Έξοδος – Στόχος

- $(0,0) \rightarrow 0.0303 \mid\mid 0$
- $(0,1) \rightarrow 0.9662 \mid\mid 1$
- $(1,0) \rightarrow 0.9657 \mid\mid 1$
- $(1,1) \rightarrow 0.0275 \mid\mid 0$

Προφανώς αν το δίκτυο ήταν πιο ισχυρό, με διαφορετική αρχιτεκτονική ή αν χρησιμοποιούταν μια άλλη συνάρτηση ενεργοποίησης ή αν αφήναμε το δίκτυο να εκπαιδευτεί και άλλο, αφού δεν φαίνεται από το Figure 3 να έχει φτάσει σε πλατό κτλ.

Πιθανότατα τα αποτέλεσμα να ήταν ακόμα καλύτερα αλλά για τις ανάγκες αυτής τις εργασίας τα παραπάνω μας αρκούν.

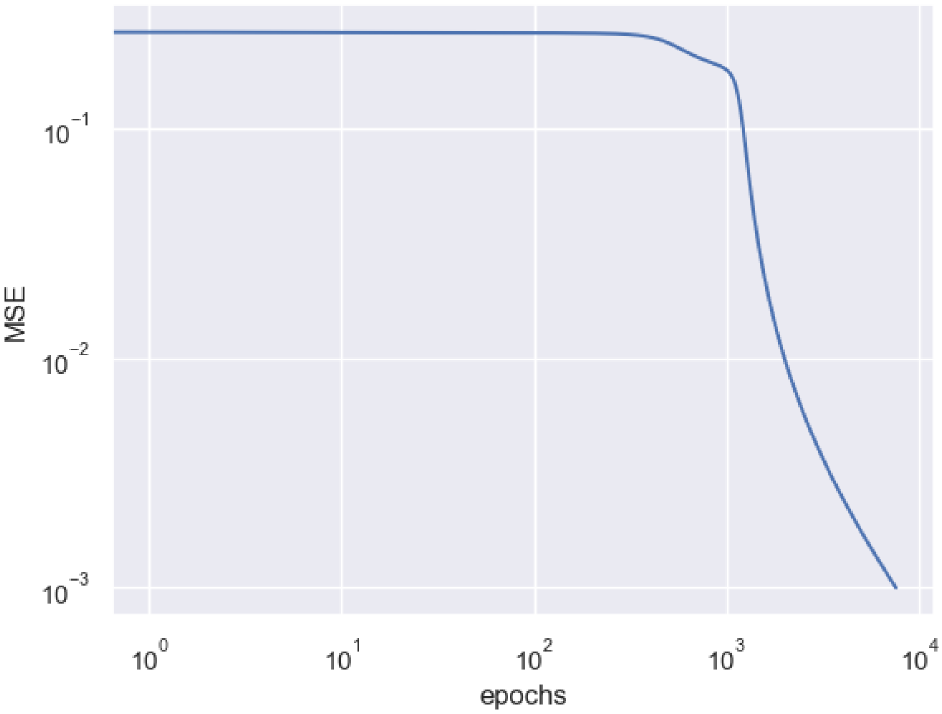

Figure 3 *Διπλό λογαριθμικό διάγραμμα που δείχνει πως μεταβλήθηκε το μέσο τεραγονικό σφάλμα με τις εποχές.*

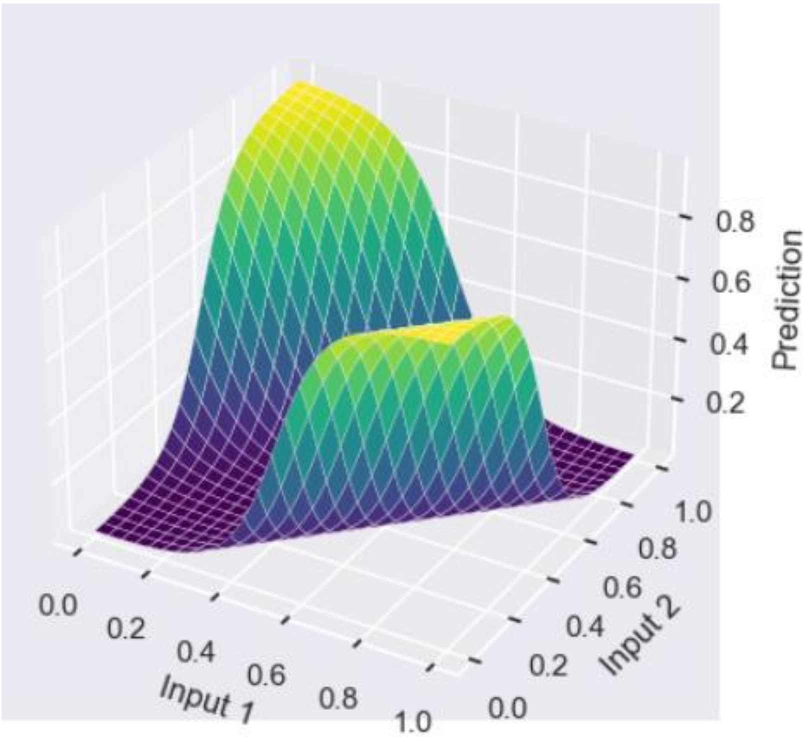

Figure 4 *Διάγραμμα που δείχνει το μη-γραμμικό επίπεδο που έχει προσαρμοστεί ώστε να δίνει τα σωστά αποτελέσματα στο πρόβλημα XOR.*

Τα βάρη και οι προκαταλήψεις που προέκυψαν από την εκπαίδευση του δικτύου στο Figure 2 και έδωσαν το αποτέλεσμα στο Figure 4 είναι:

- $w_{14} = -6.8999$
- $w_{13} = 6.1791$
- $w_{24} = 6.9888$
- $w_{23} = -5.9201$
- $w_{45} = -7.7851$
- $w_{35} = -7.6687$

- $b_4 = 2.9770$
- $b_3 = 3.5372$
- $b_5 = 11.3952$