シミュレーション工学
第１テーマ：動的モデル

氏名　JIANG Weihang
学籍番号　26001904824

提出日　2021 年 10 月 27 日

1　課題内容

課題 3 の主な目的は, ロミオとジュリエットの愛の微分方程式

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ \tag{1}$$

$$\frac{dJ}{dt} = cR + dJ \tag{2}$$

を解くことと, 線形微分方程式の平衡点を解いて,τ と Δ の関係を調べて, 対応する画像を座標に描く.

2　理論と方法

2.1　行列式

この問題を研究するために, 微分方程式系の形式は通常, 行列式として書き直されます.
行列式は

$$\begin{pmatrix} \frac{dR}{dt} \\ \frac{dJ}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3}$$

2.2　線形微分方程式の解析解

1 変数の 1 階線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{4}$$

の一般解は,C を任意の実数として,$x(t) = Ce^{at}$ と求めることができた. 式 (3) と (4) の類似性から、式 (3) の解は

$$x(t) = e^{tA}C \tag{5}$$

と表せる（C は任意のベクトル)。

行列 A の 2 つの固有値を λ_1, λ_2, 対応する固有ベクトルを e_1, e_2 とする. 固有値を対角要素に並べてできる行列を $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 、固有ベクトルを並べてできる行列を $P = (e_1 e_2)$ とおくと、

$$AP = P\Lambda$$

なので、P に逆行列 P^{-1} が存在すれば,$A = P\Lambda P^{-1}$ となる. 逆行列の性質を使用する

$$e^{tA} = P(I + t\Lambda + \frac{1}{2}t^2\Lambda^2 + \frac{1}{6}t^3\Lambda^3 + \dots)P^{-1}$$

となる。$\Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ であるから、

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる. 従って,

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}C$$

となる. $P^{-1}C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}^T$ とすると,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2$$

を得, 解の振る舞いは、行列 A の固有値の値により決定される。
固有値は, 特性方程式から,

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

となることがわかる. ここで,

$$trA = a + d = \tau$$

$$detA = ad + bc = \Delta$$

とおくと、

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

となる。

3　線形システムの分類

ロミオとジュリエットの関係を分類するために知っておく必要があるのは, 行列 A のトレースと行列式だけである. 固有値の観点からこれらを書き直すことができる.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \tau$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \Delta$$

3.1　$\tau^2 - 4\Delta > 0$

3.1.1　$\tau > 0, \Delta > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

この場合，平衡点から僅かに離れた点であっても，時間が経つにつれ、急速に平衡点から離れるため，この平衡点は、不安定結節点と呼ばれる.

3.1.2　$\tau < 0, \Delta > 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

この場合，平衡点から十分離れた点であっても，時間が経つにつれ、急速に平衡点に近くため，この平衡点は、安定結節点と呼ばれる.

3.1.3　$\Delta < 0, \lambda_1\lambda_2$ 符号が異なる

時間が十分に経てば，最終的には正の固有ベクトルの方向に沿う軌道を描き，平衡点から離れる。このような場合の平衡点は鞍点と呼ばれる.

3.2 $\tau^2 - 4\Delta < 0$

固有値を $\lambda = \alpha \pm i\beta$ とすると、オイラーの公式 $e^{ix} = cosx + isinx$ より、x のいずれの成分も

$$x_i(t) = e^{\alpha t}(c_1 cos\beta t + c_2 sin\beta t)$$

の形に表される

3.2.1 $a = 0$ あるいは $\tau = 0$

x は周期関数になり，解は周期軌道を描く．この場合の平衡点は中心点と呼ばれる．

3.2.2 $a > 0$ あるいは $\tau > 0$

x は回転しながら，平衡点との距離を指数関数的に伸びるように変化し，平衡点に遠ざかる．したがって，この時の平衡点は不安定であり，不安定焦点と呼ばれる．

3.2.3 $a < 0$ あるいは $\tau < 0$

x は回転しながら，平衡点との距離を指数関数的に縮めるように変化し，平衡点に近づく．したがって，この時の平衡点は安定であり，安定焦点と呼ばれる．

4 実行例

4.1 鞍点

最初のケースは鞍点である．対応する状況は $\Delta < 0, \lambda_1 \lambda_2$ 符号が異なる．テストの実行例は $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である．そうすると，$\lambda = \pm\sqrt{3}$ 符号が異なる．

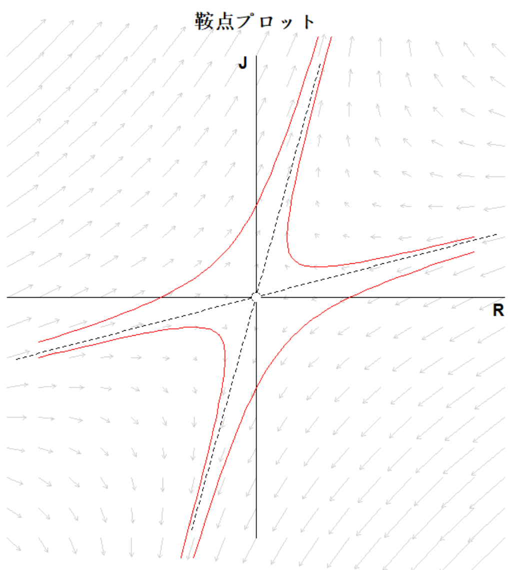

Figure 1: 鞍点プロット

Figure1 は，結果のベクトル場, 標準基底（実線）, 固有ベクトル（破線），および 4 つの軌道例（赤い線）を視覚化したものである。固有ベクトルは，標準基底とは異なる象限 (固有象限) を定義する．

ロミオとジュリエットが右上または左上の固有象限から始まる場合，つまり固有ベクトルが正の場合，R が固有ベクトルの正の方向で増加すると，J も増加する．

ロミオとジュリエットが左下または右下の固有象限から始まる場合，つまり固有ベクトルが負の場合，R が固有ベクトルの正の方向で減少すると，J も減少する．

時間が十分に経てば，最終的には正の固有ベクトルの方向に沿う軌道を描き，平衡点から離れる．このような場合の平衡点は鞍点と呼ばれる．

4.2 安定結節点と不安定結節点

次のケースは安定結節点と不安定結節点である．

安定結節点の対応する状況は $\tau > 0, \Delta > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ テストの実行例は $A = \begin{pmatrix} -1 & 0.50 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である．そうすると，λ の符号がともに正となる．

不安定結節点の対応する状況は $\tau < 0, \Delta > 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ テストの実行例は $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である．そうすると，λ の符号がともに負となる．

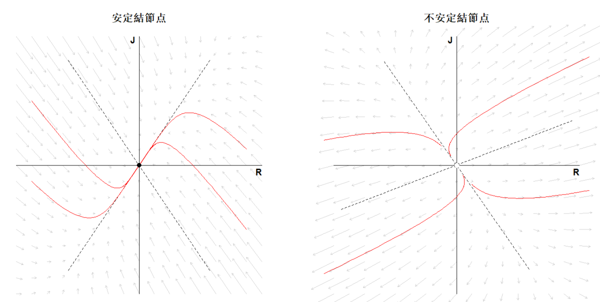

Figure 2: 安定結節点と不安定結節点

Figure2 によると，$\tau < 0, \Delta > 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ の場合，開始点に関係なく，R が固有ベクトルの正の方向で移動すると，J は急速に平衡点に近くため，必ず原点に到達する．この平衡点は，安定結節点と呼ばれる。

逆的に，$\tau > 0, \Delta > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ の場合，R が固有ベクトルの正の方向で移動すると，J は急速に平衡点に離れるため，この平衡点は，不安定結節点と呼ばれる．

4.3 $\tau^2 - 4\Delta = 0$

次のケースは $\tau^2 - 4\Delta = 0$ である．

この状況は二つがある．

一番目の実行例は $A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$ である。この場合，A は対角化可能です。つまり，次のような行列 Λ と E は $A = E\Lambda E^{-1}$ で表現できる． $\lambda = -1$ と仮定すると，次のようにすると A が $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 返されます．A を対角化可能にするには，固有ベクトルの行列である E が可逆である必要があります．行列がフルランクの場合，行列は可逆であり，固有ベクトルが独立している必要があります．

これにより，二番目の実行例が発生する． $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と仮定する．しかしこの場合は，行列を対角化すると，E は特異である，つまり可逆ではないため，エラーが発生します．ですから，別の解決策が必要です．

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0 e^{At}}{dt} = Ax = Ax_0 e^{At}$$

この結論を使用して，A の行列インデックスが線形微分方程式系の解であることを示します．行列指数解は，非対角行列 A への固有分解を使用して解を一般化します．

$x_0 = (1, 1)$ と 仮定すると，問題の解決策は次のとおりである．

$$x(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{At}$$

次の図 (Figure3) は，固有分解を使用してこれまで計算できなかったこのシステムのいくつかの軌跡を視覚化したものです．

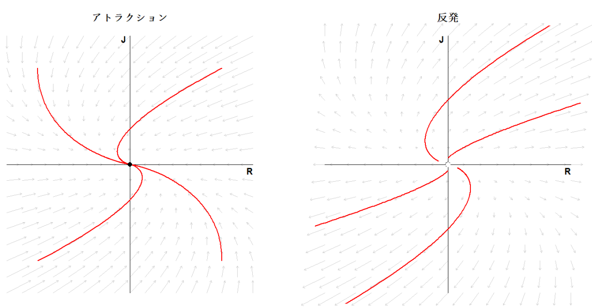

Figure 3: $\tau^2 - 4\Delta = 0$

4.4 安定焦点と不安定焦点と中心点

次の実行例は $\tau^2 - 4\Delta < 0$ である．

安定焦点の対応する状況は $a < 0$ あるいは $\tau < 0$ テストの実行例は $A = \begin{pmatrix}-0.2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ である。

不安定焦点の対応する状況は $a > 0$ あるいは $\tau > 0$ テストの実行例は $A = \begin{pmatrix}0.1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ である。

中心点の対応する状況は $a = 0$ あるいは $\tau = 0$ テストの実行例は $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ である。

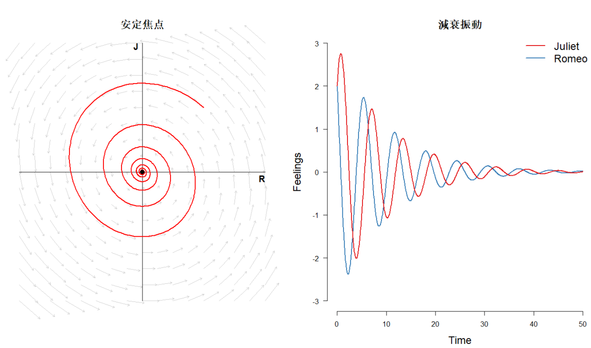

Figure 4: 安定焦点

Figure4 によると，$a < 0$ あるいは $\tau < 0$ の場合，R が固有ベクトルの正の方向で移動すると，J は急速に平衡点に近く．平衡点との距離を指数関数的に縮めるように変化し，平衡点に近づく．したがって，この時の平衡点は安定であり，安定焦点と呼ばれる．

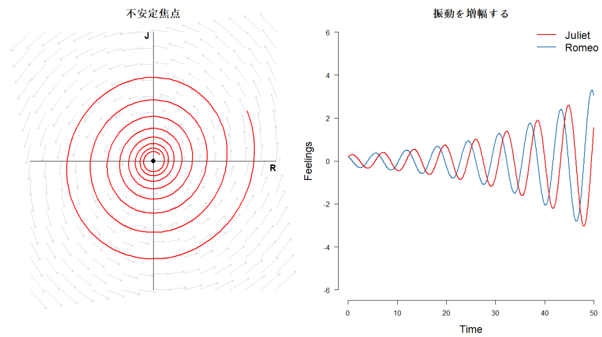

Figure 5: 不安定焦点

Figure5 によると，$a > 0$ あるいは $\tau > 0$ の場合，R が固有ベクトルの負の方向で移動すると，J は急速に平衡点に離れる．平衡点との距離を指数関数的に伸びるように変化し，平衡点に遠ざかる。したがって，この時の平衡点は不安定であり，不安定焦点と呼ばれる．

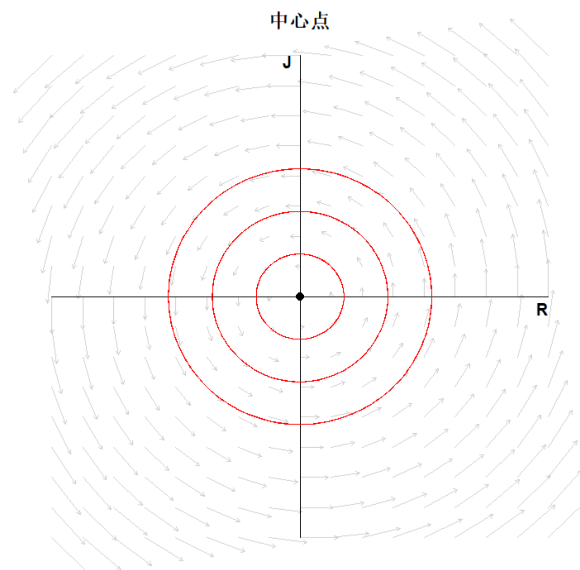

Figure 6: 中心点

Figure6 によると、$a = 0$ あるいは $\tau = 0$ の場合，曲線は閉じたリングになる．解は周期軌道を描く．この場合の平衡点は中心点と呼ばれる．

4.5 $\Delta - \tau$ 平面

$\tau = 0$ と $\Delta = 0$ の両方の場合，固有値はゼロであり，解は開始した場所に永遠にとどまります．不動点の平面がある．

$\tau = 0$ であるが $\Delta \neq 0$ の場合、固定点の線がある．

$\tau^2 - 4\Delta > 0$ の場合，$\tau \neq 0$ かつ $\Delta < 0$ のときに鞍点が発生します。これは，一方の固有値が正でもう一方が負であることを意味する。つまり，一方の固有方向で指数関数的に成長し，もう一方の方向で指数関数的に減衰する．

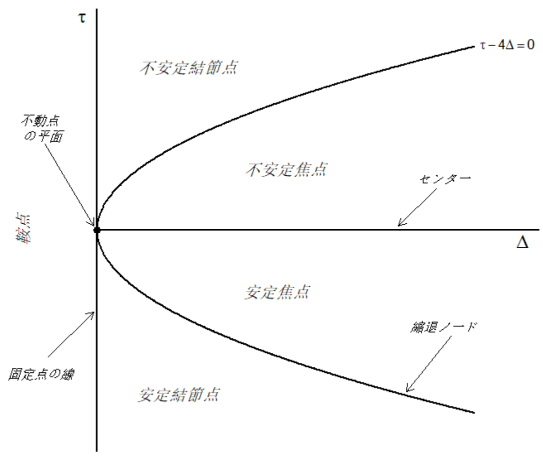

Figure 7: $\tau - \Delta$ 平面

$\tau^2 - 4\Delta < 0$ の場合，すべての固有値は虚数であり，リングになる．固有値に実数部があり，振動の増幅（$\tau > 0$）または振動の減衰（$\tau < 0$）が発生するため，$\tau \neq 0$ の場合，これらはスパイラルになる．

$\tau^2 - 4\Delta = 0$ で表される放物線上に，固有値が繰り返されている．結果の固有ベクトルが独立している場合，すべての方向が原点に向かう（$\lambda < 0$）か，原点から離れる（$\lambda > 0$）スターノードがある．

5　考察

この課題から，線形微分方程式のシステムは線形代数行列式の方法で解くことができることがわかります．テストサンプルから判断すると，結果は 3 つのカテゴリに分類される．そして，画像を使用して，平面上の各タイプのパーツを視覚化する． 鞍点については，負の固有値に対応する固有ベクトルの方向では平衡点に近づくが，正の固有値に対応する固有ベクトルの方向では平衡点から遠ざかる．この説明を通して，円錐曲線の双曲線を思い出させる．画像も円錐曲線のようなもので，正しいことが予想される．ただし，安定結節点，不安定結節点と安定焦点，不安定焦点には同様の説明がありますが，提示される軌道は完全に異なる．焦点の軌道はスパイラルですが，これは予想外であった．

参考文献

[1] Strogatz, Steven H. "Love affairs and differential equations." Mathematics Magazine 61.1 (1988): 35-35.

[2] Strogatz, Steven H. Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. CRC press, 2018.

[3] Ryan, Ois?n, Rebecca M. Kuiper, and Ellen L. Hamaker. "A continuous-time approach to intensive longitudinal data: what, why, and how?." Continuous time modeling in the behavioral and related sciences. Springer, Cham, 2018. 27-54.

[4] Moler, Cleve, and Charles Van Loan. "Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later." SIAM review 45.1 (2003): 3-49.

[5] https://fabiandablander.com/r/Linear-Love.html