

2. 向量

(d5) 有序向量：插值查找

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

原理与算法

❖ 假设：已知有序向量中各元素随机分布的规律

比如：均匀且独立的随机分布

❖ 于是：[lo, hi)内各元素应大致按照线性趋势增长

$$\frac{mi - lo}{hi - lo} \approx \frac{e - A[lo]}{A[hi] - A[lo]}$$

❖ 因此：通过猜测轴点mi，可以极大地提高收敛速度

$$mi \approx lo + (hi - lo) \cdot \frac{e - A[lo]}{A[hi] - A[lo]}$$

❖ 以英文词典为例：binary大致位于2/26处

search大致位于19/26处

[lo]	0	A	1	[1,53)
	1	B	74	[53,104)
	2	C	158	[104,156)
	3	D	292	[156,208)
	4	E	368	[208,259)
	5	F	409	[259,311)
	6	G	473	[311,363)
	7	H	516	[363,414)
	8	I	562	[414,466)
	9	J	607	[466,518)
	10	K	617	[518,569)
	11	L	628	[569,621)
	12	M	681	[621,673)
	13	N	748	[673,724)
	14	O	771	[724,776)
	15	P	806	[776,827)
	16	Q	915	[827,879)
	17	R	922	[879,931)
	18	S	1002	[931,982)
	19	T	1176	[982,1034)
	20	U	1253	[1034,1086)
	21	V	1271	[1086,1137)
	22	W	1289	[1137,1189)
	23	X	1337	[1189,1241)
	24	Y	1338	[1241,1292)
	25	Z	1341	[1292,1344)
[hi]	26		1344	

实例

❖ $e = 50$

$lo = 0, hi = 18$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	10	12	14	26	31	38	39	42	46	49	51	54	59	72	79	82	86	92

插值: $mi = 0 + (18 - 0) * (50 - 5) / (92 - 5) \approx 9.3$

取: $mi = 9$

比较: $A[9] = 46 < e$

❖ $lo = 10, hi = 18$

插值: $mi = 10 + (18 - 10) * (50 - 49) / (92 - 49) \approx 10.2$

取: $mi = 10$

比较: $A[10] = 49 < e$

❖ $lo = 11, hi = 18$

插值: $mi = 11 + (18 - 11) * (50 - 51) / (92 - 51) \approx 10.8$

取: $mi = 10 < lo$

查找完成 (NOT_FOUND)

性能

❖ 最坏： $O(h_i - l_o) = O(n)$

//具体实例？

❖ 平均：每经一次比较，待查找区间宽度由 n 缩至 \sqrt{n} // [Yao76, PIA78]，习题解析[2-24]

$$n, \sqrt{n}, \sqrt{\sqrt{n}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}, \dots, 2$$

$$n, n^{1/2}, n^{1/2^2}, \dots, n^{1/2^k}, \dots, 2$$

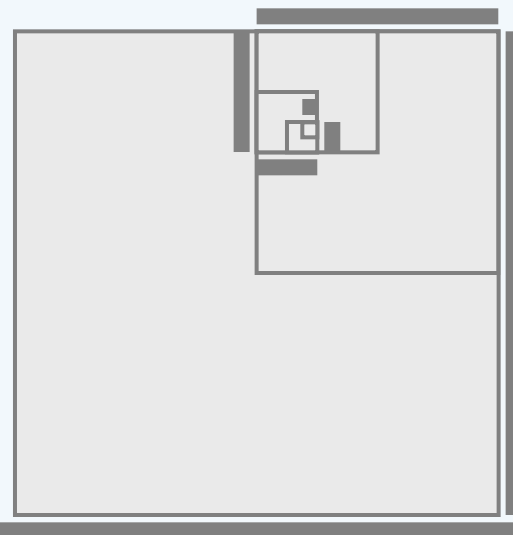
❖ 经多少次比较之后，有 $n^{1/2^k} < 2$ ，或等价地， $1/2^k \cdot \log n < 1$ ？

不难解得： $k = O(\log \log n)$ //如何理解？

❖ 每经一次比较，待查找区间宽度的数值 n 开方，有效字长 $\log n$ 减半

插值查找 = 在字长意义上的折半查找

二分查找 = 在字长意义上的顺序查找



- ❖ 从 $O(\log n)$ 到 $O(\log \log n)$ ，是否值得？
- ❖ 通常优势不明显
 - 除非查找区间宽度极大，或者比较操作成本极高
 - 比如， $n = 2^{(2^5)} = 2^{32} = 4\text{G}$ 时
 - $\log_2(n) = 32$ ， $\log_2(\log_2(n)) = 5$
- ❖ 易受小扰动的干扰和“蒙骗”
- ❖ 须引入乘法、除法运算
- ❖ 实际可行的方法
 - 首先通过插值查找，将查找范围缩小到一定的尺度
 - 然后再进行二分查找

❖ 关于插值查找算法的平均性能分析，试阅读：

A. C. Yao & F. F. Yao

"The Complexity of Searching an Ordered Random Table"

Proc. of 17th FOCS (1976), 222-227