

```

/* D. Osovlanski & B. Nissenbaum, 1990 */
int v,i,j,k,l,s,a[99];void main(){for(scanf("%d",&s);*a-s;
v=a[j*=v]-a[i],k=i<s,j+=(v=j<s&&(!k&&!!printf(2+"\n\n%c"-(
!l<<!j)), " .Q"[1^v?(1^j)&1:2]))&&+1||a[i]<s&&v&&v-i+j&&v+i-
j))&&!(l%=s),v||(i==j?a[i+=k]=0:++a[i])>=s*k&&+a[--i]);}

```

```

/* Andor@net9.org, 2002 */
#define q(o)a[j]o[j+i+7]o[j-i+31]
a[39];
main(i,j)
{ for(j=9;--j;i>8?printf("%10d",a[j]):q(|a)|| (q(=a)=i,main(i+1),q(=a)=0)); }

```

4. 栈与队列

(xb) 试探回溯法：八皇后

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

指数爆炸

❖ 很多问题的解，形式上都可看作若干元素按特定次序构成的序列

以TSP问题为例，即给定n个城市之间总成本最低的环游路线

❖ 每一排列组合都是一个候选解，往往构成一个极大的搜索空间

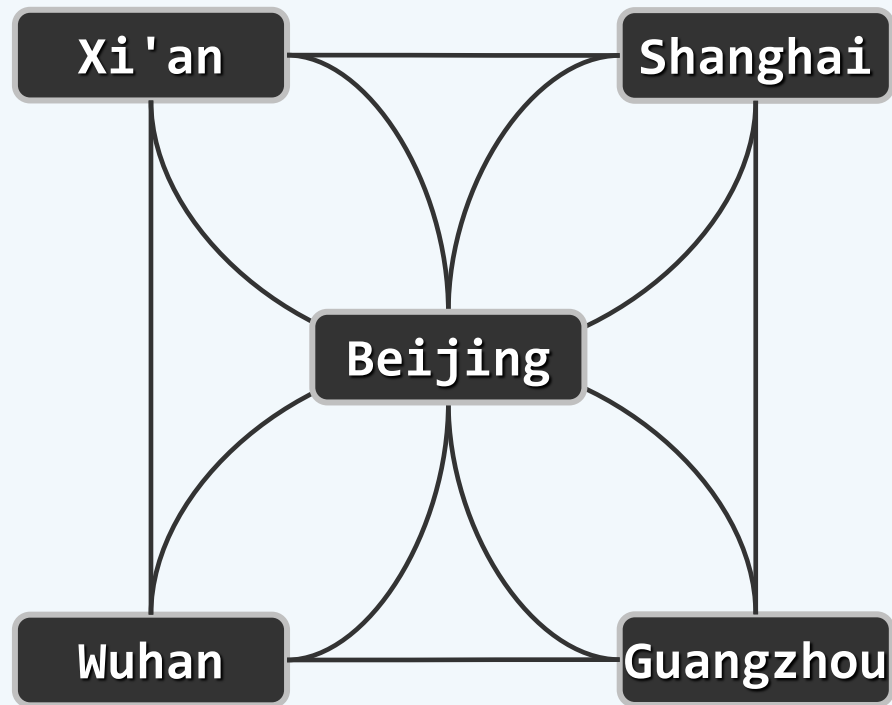
仍以TSP为例，共有：

$$n!/n = (n-1)! = O(n^n)$$

❖ 若采用蛮力策略求解

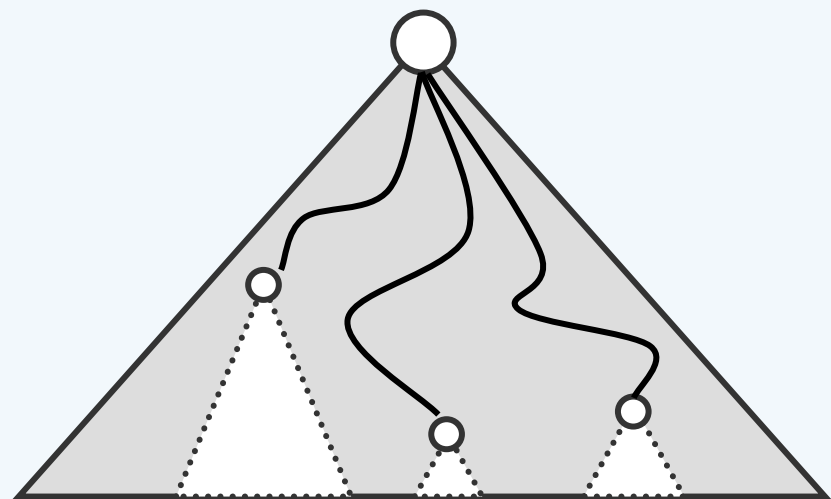
需逐一生成可能的候选解，并检查其是否合理

如此，必然无法将时间复杂度控制在多项式以内



试探-回溯-剪枝

- ❖ 为尽可能多、尽可能早地排除候选解，须深刻理解应用问题，并利用其特有的规律
- ❖ 事实上，根据候选解的某种**局部特征**，即可判断其是否合理
此时只要策略得当，便可成批地排除候选解
此即所谓剪枝（pruning）
- ❖ 试探回溯（probe-backtrack）模式
从0开始，逐渐增加候选解长度 // 试探
一旦发现注定要失败，则
收缩至前一长度，并 // 剪枝回溯
继续试探
- ❖ 特修斯的法宝 = 线绳 + 粉笔
如何以数据结构的形式兑现？



八皇后

❖ 在 $n \times n$ 的棋盘上放置 n 个皇后，使得她们彼此互不攻击

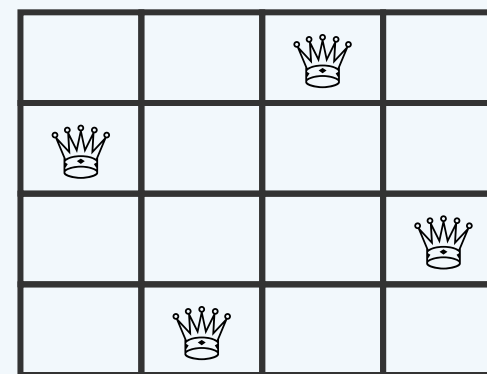
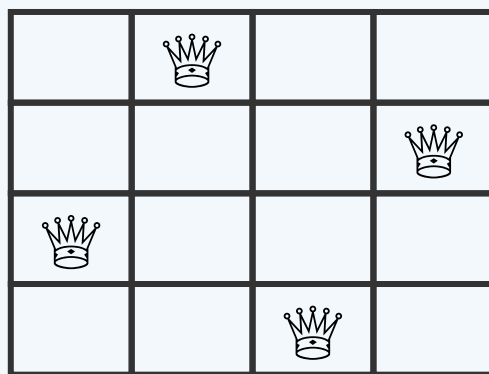
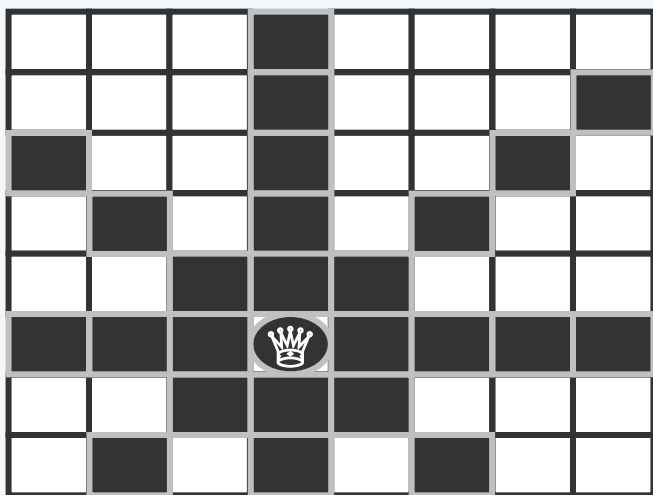
有多少种可行的布局？如何布局？

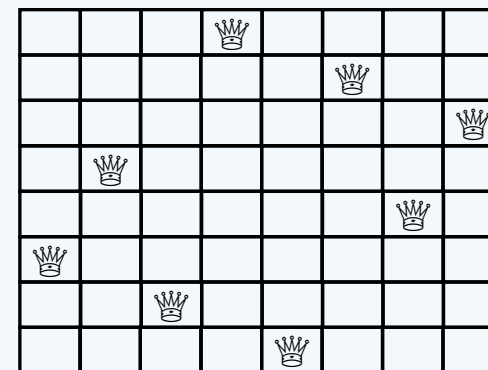
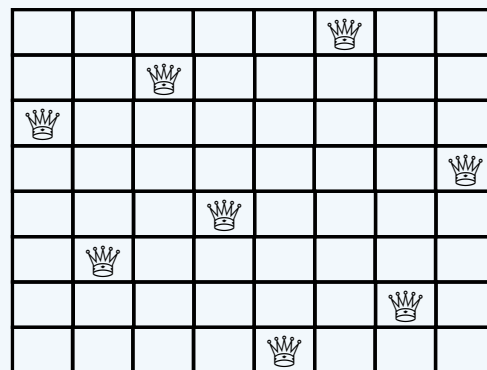
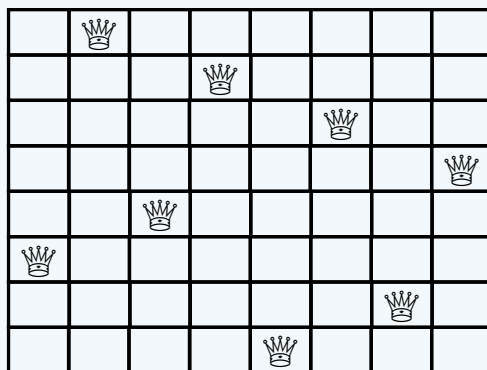
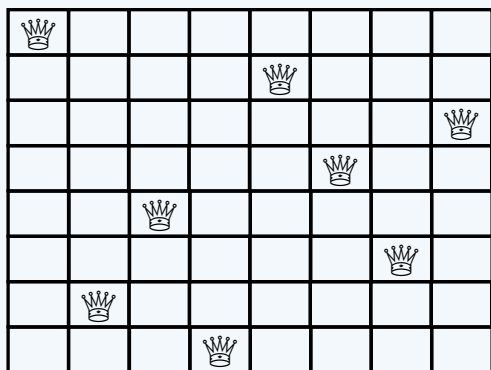
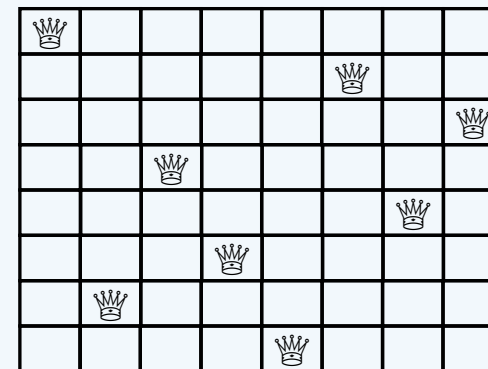
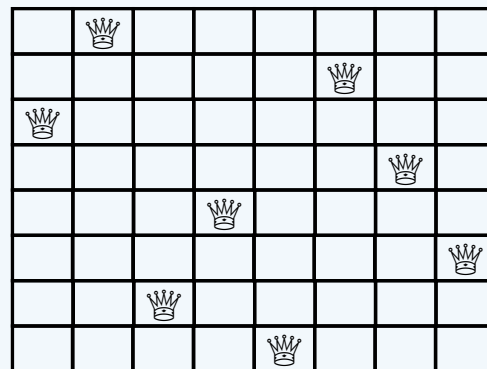
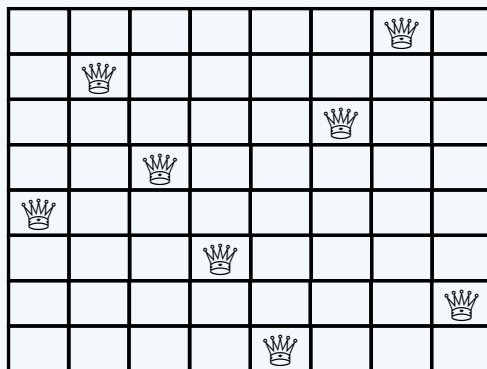
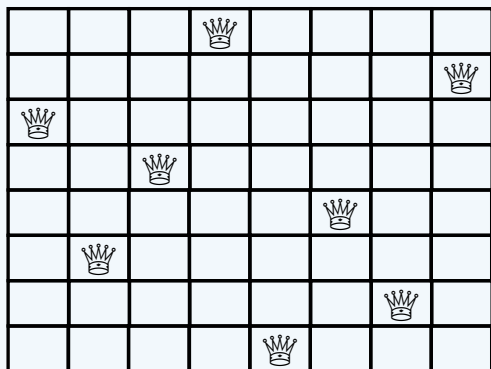
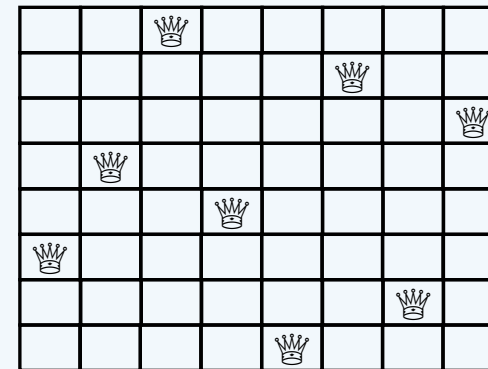
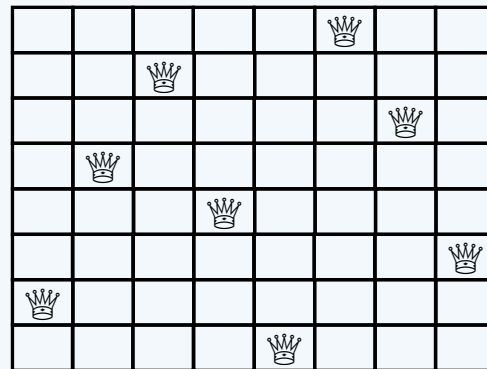
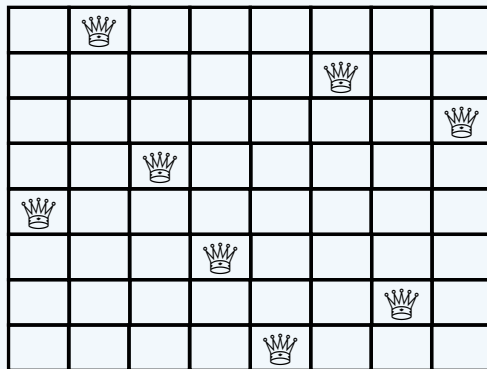
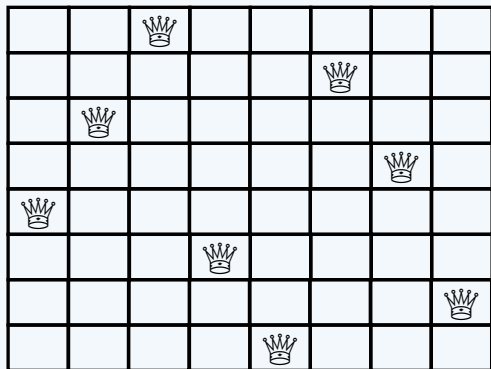
是否考虑**旋转**、**翻转**之后的等价？

❖ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

允许重复：1, 0, 0, 2, 10, 4, 40, 92, ...

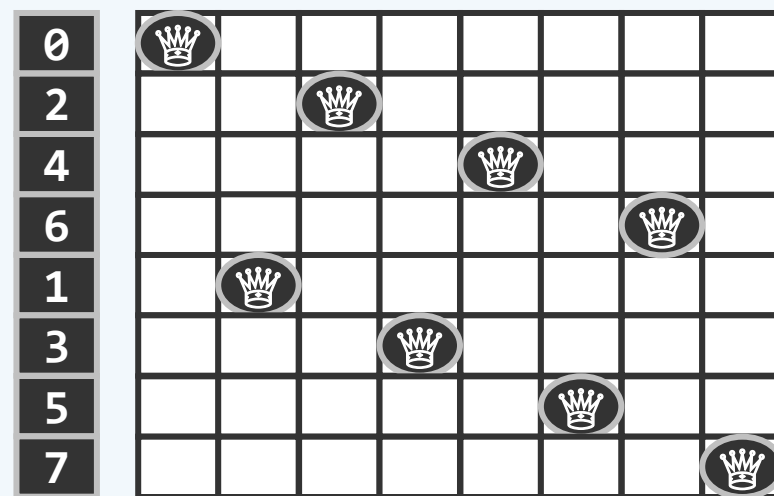
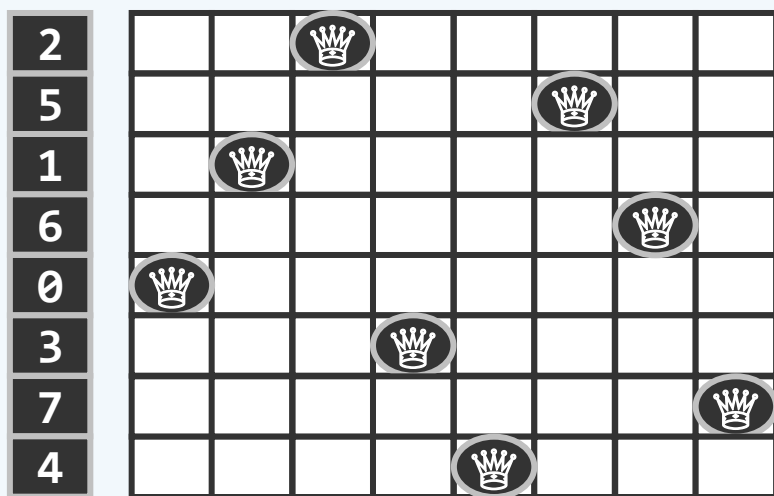
不许重复：1, 0, 0, 1, 2, 1, 6, 12, 46, 92, ...





编码

- ❖ 观察：每行（列）有且仅有一个皇后
- ❖ 因此，每一布局（候选解）都可编码为整数 $\{ 0, \dots, n - 1 \}$ 的一个排列
- ❖ 反之，每一这样的排列，未必是一个可行布局（解）



蛮力搜索

```
❖ void place4Queens_BruteForce() { //4皇后蛮力算法
    int solu[4]; //候选解编码向量
    for (solu[0] = 0; solu[0] < 4; solu[0]++)
        for (solu[1] = 0; solu[1] < 4; solu[1]++)
            for (solu[2] = 0; solu[2] < 4; solu[2]++)
                for (solu[3] = 0; solu[3] < 4; solu[3]++) { //枚举所有候选解
                    if (collide(solu, 0)) continue;
                    if (collide(solu, 1)) continue;
                    if (collide(solu, 2)) continue;
                    if (collide(solu, 3)) continue;
                    nSolu++; displaySolution(solu, 4);
                }
    } //复杂度高达 $O(4^4) = O(n^n)$ 
```

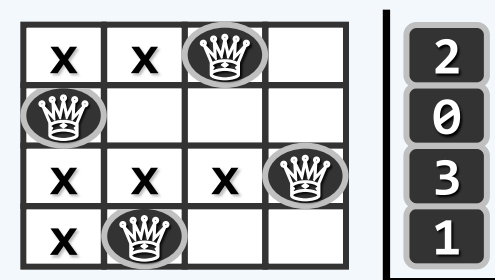
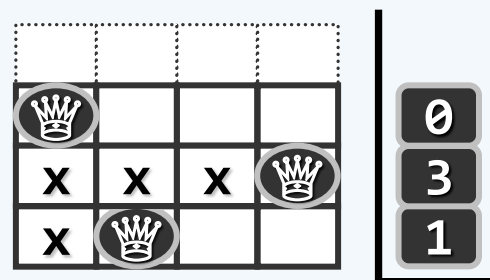
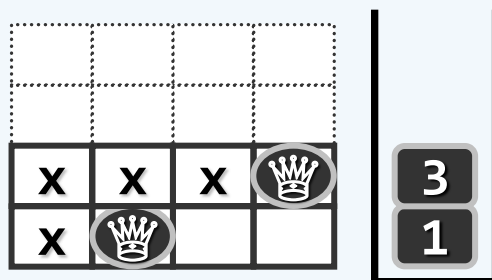
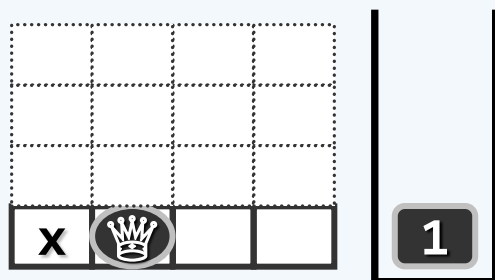
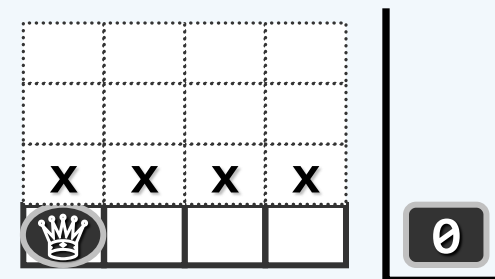
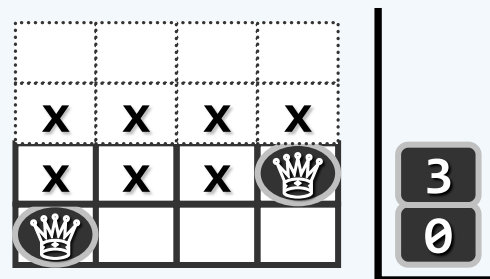
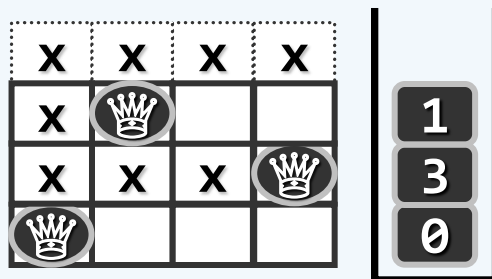
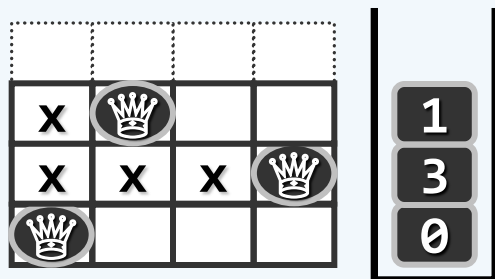
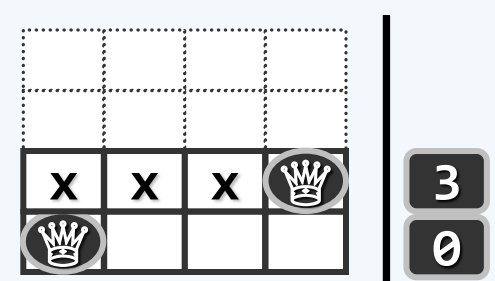
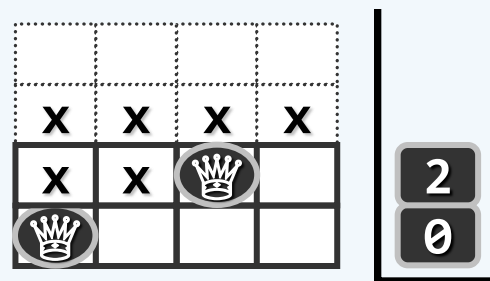
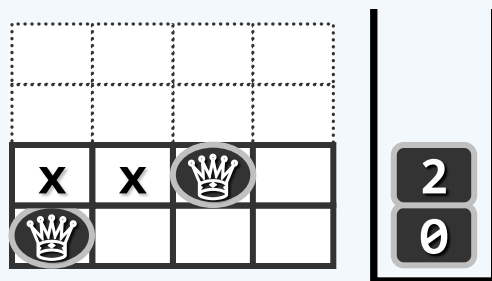
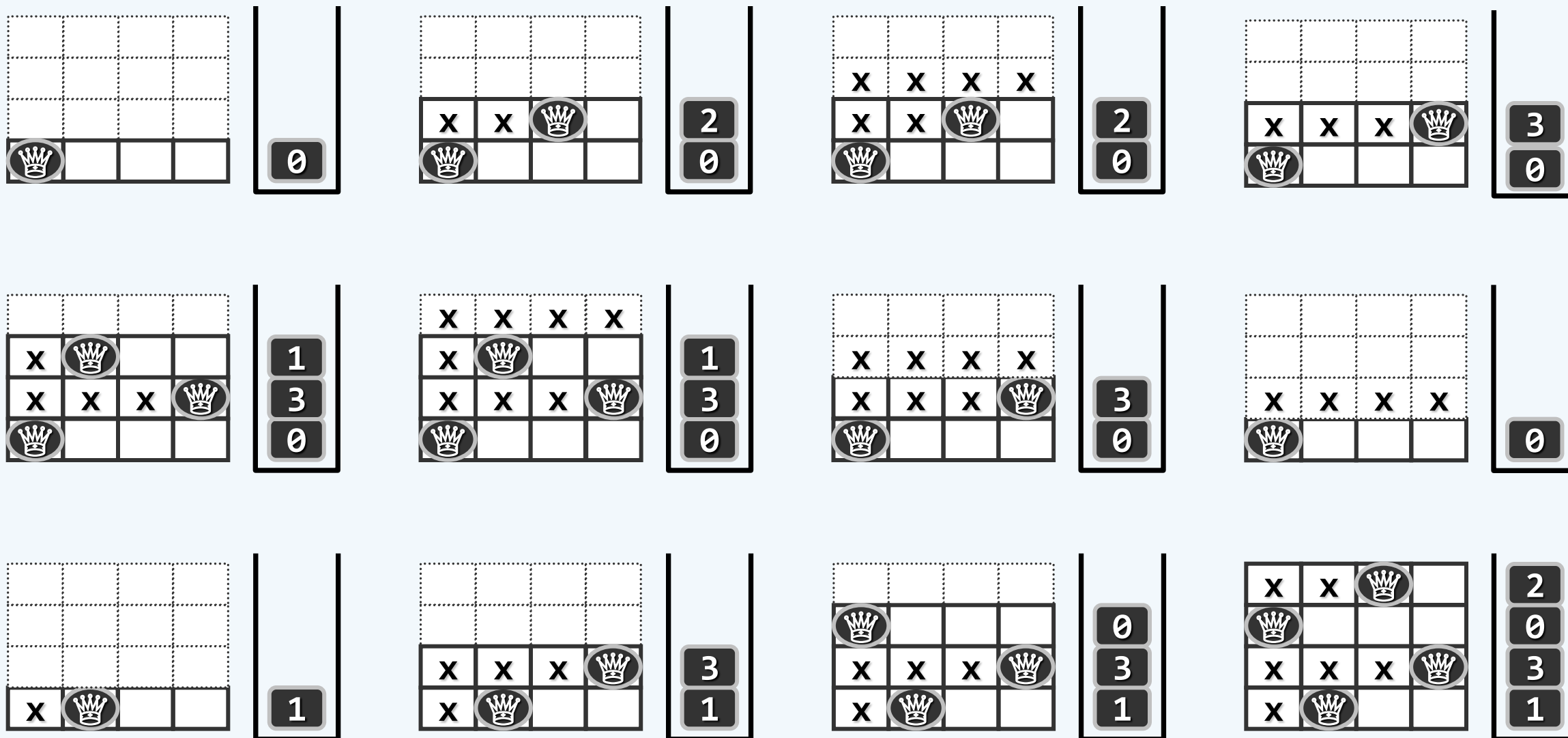
剪枝

```
❖ void place4Queens() { //4皇后剪枝算法
    int solu[4]; //候选解编码向量
    for (solu[0] = 0; solu[0] < 4; solu[0]++)
        if (!collide(solu, 0)) //剪枝
            for (solu[1] = 0; solu[1] < 4; solu[1]++)
                if (!collide(solu, 1)) //剪枝
                    for (solu[2] = 0; solu[2] < 4; solu[2]++)
                        if (!collide(solu, 2)) //剪枝
                            for (solu[3] = 0; solu[3] < 4; solu[3]++)
                                if (!collide(solu, 3)) { //剪枝
                                    nSolu++; displaySolution(solu, 4);
                                }
    } //复杂度大大降低，但算法的通用性欠佳
```


通用算法

```
❖ void placeQueens(int N) { //N = 棋盘大小 = 皇后总数, 问题的规模可任意
    Stack<Queen> solu; Queen q(0, 0); //存放 (部分) 解的栈, 从原点位置出发
    do { //反复试探、回溯
        if (N <= solu.size() || N <= q.y) { //若已出界, 则
            q = solu.pop(); q.y++; //回溯一行, 并继续试探下一列
        } else { //否则, 试探下一行
            while ( (q.y < N) && ( 0 <= solu.find(q) ) ) //通过与已有皇后的比对
                q.y++; //尝试找到可摆放下一皇后的列
            if (N > q.y) { //若存在可摆放的列, 则摆上当前皇后
                solu.push(q); if (N <= solu.size()) nSolu++; //若局部解已成全局解, 则计数
                q.x++; q.y = 0; //转入下一行, 从第0列开始, 试探下一皇后
            }
        }
    } while ((0 < q.x) || (q.y < N)); //直至所有分支均已被检查或剪枝
}
```

实例



❖ 以上算法中的 “solu.find(q)” , 如何利用栈 (向量) 的查找接口 ?

❖ 定义皇后类Queen , 重新定义判等器 , 使之在语义上与冲突等价

❖ struct Queen { //皇后类

int x, y; Queen(int xx = 0, int yy = 0) : x(xx), y(yy) {}; //皇后的坐标

bool operator==(Queen const & q) { //重载判等操作符

return (x == q.x) //行冲突 (不会发生 , 可省略)

|| (y == q.y) //列冲突

|| (x + y == q.x + q.y) //沿正对角线冲突

|| (x - y == q.x - q.y); //沿反对角线冲突

}

bool operator!=(Queen const & q) { return !(*this == q); }

};