

12. 排序

(a2) 快速排序：性能分析

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

性能分析

❖ **unstable** : lo/hi的移动方向相反, 左/右侧的大/小重复元素可能前/后**颠倒**

❖ **in-place** : 只需 $O(1)$ 附加空间——时间呢?

❖ 最好情况: 每次划分都(接近)**平均**, 轴点总是(接近)**中央**

$$T(n) = 2 \times T\left(\frac{n-1}{2}\right) + O(n) = O(n \log n) \quad // \text{到达下界!}$$

❖ 最坏情况: 每次划分都**极不均衡** //比如, 轴点总是**最小/大元素**

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + O(n) = O(n^2) \quad // \text{与起泡排序相当!}$$

❖ 即便采用**随机选取**、(Unix) **三者取中**之类的策略

也只能**降低**最坏情况的概率, 而无法**杜绝**

❖ 既然如此, 为何还称作**快速**排序?

平均性能

❖ $O(n \log n)$ —— 以均匀独立分布为例...

$$\begin{aligned}\text{❖ } T(n) &= (n + 1) + (\boxed{1}/n) \times \sum_{k=0}^{n-1} [T(k) + T(n - k - 1)] \\ &= (n + 1) + (\boxed{2}/n) \times \sum_{k=0}^{n-1} T(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{❖ } n * T(n) &= n * (n + 1) + 2 \times \sum_{k=0}^{n-1} T(k) \\ (n - 1) * T(n - 1) &= (n - 1) * n + 2 \times \sum_{k=0}^{n-2} T(k)\end{aligned}$$

$$\text{❖ } n * T(n) - (n - 1) * T(n - 1) = 2 * n + 2 * T(n - 1)$$

$$\text{❖ } n * T(n) - (n + 1) * T(n - 1) = 2 * n$$

$$\begin{aligned}\text{❖ } T(n)/(n + 1) &= 2/(n+1) + T(n-1)/n = 2/(n+1) + 2/n + T(n-2)/(n-1) \\ &= 2/(n+1) + 2/n + 2/(n-1) + \dots + 2/2 + T(0)/1 \\ &= (2 * \ln 2) * \log n = \boxed{1.39} \times \log n\end{aligned}$$