10.优先级队列

(xa1) 左式堆：结构

左之左之，君子宜之

右之右之，君子有之

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

堆合并

❖ H = merge(A, B)：将堆A和B合二为一 //不妨设|A| = n ≥ m = |B|

❖ 方法一：A.insert(B.delMax())

$\mathcal{O}(m * (\log m + \log(n + m)))$

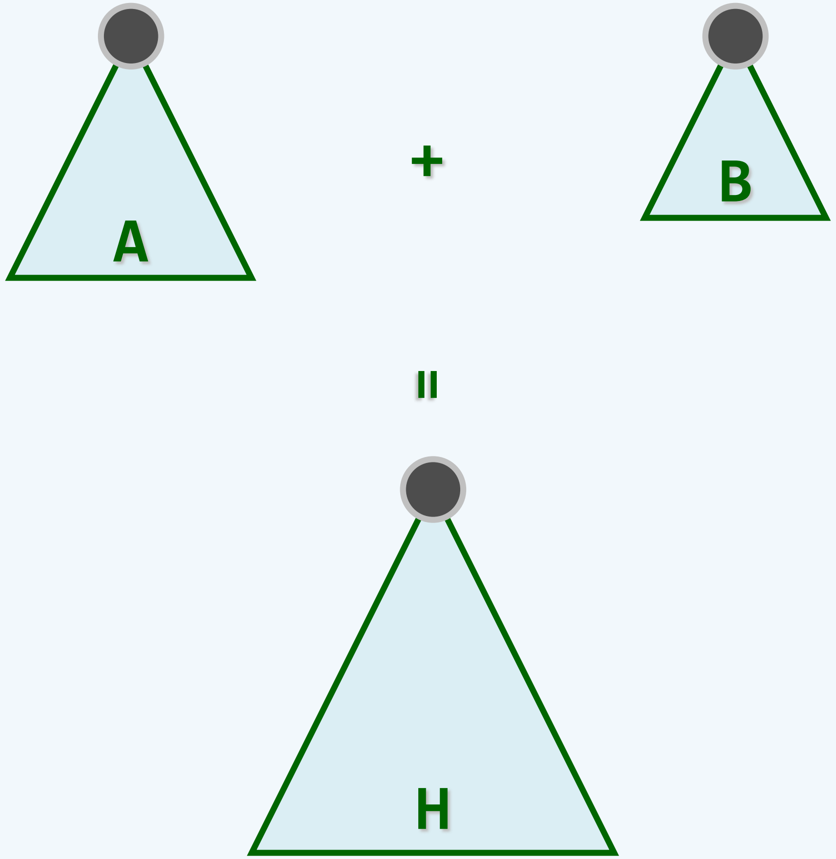
$= \mathcal{O}(m * \log(n + m))$

❖ 方法二：union(A, B).heapify(n + m)

$\mathcal{O}(m + n)$

❖ 有没有更好的办法？比如...

❖ 可否奢望在...$\mathcal{O}(\log n)$...时间内实现merge()？



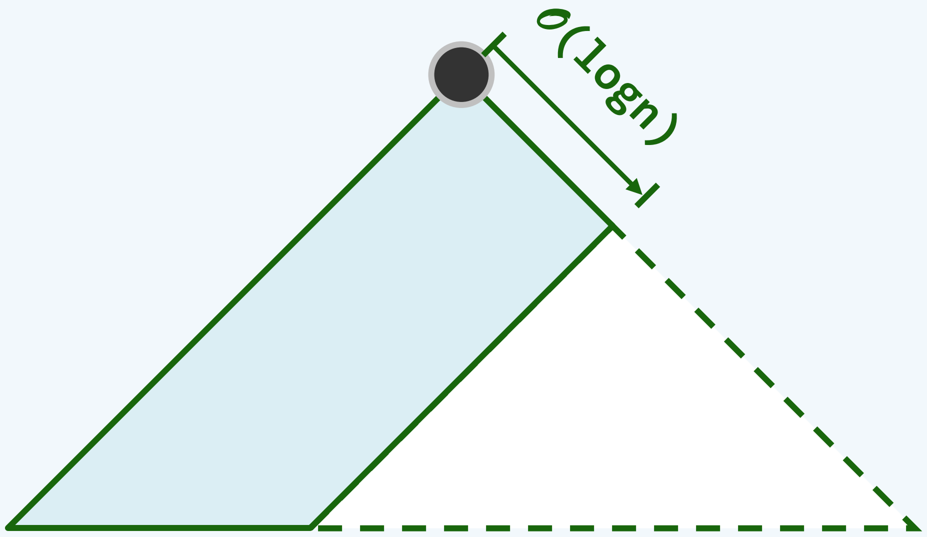
单侧倾斜

❖ C. A. Crane, 1972： 保持$\boxed{\text{堆序性}}$，附加$\boxed{\text{新条件}}$，使得

在堆合并过程中，只需调整$\boxed{\text{很少}}$部分的节点 $\boxed{\mathcal{O}(\log n)}$

❖ 新条件 = $\boxed{\text{单侧倾斜}}$： $\boxed{\text{节点分布}}$偏向于$\boxed{\text{左}}$侧

$\boxed{\text{合并操作}}$只涉及$\boxed{\text{右}}$侧



❖ 可是，果真如此，则...

❖ 拓扑上不见得是$\boxed{\text{完全}}$二叉树，$\boxed{\text{结构性}}$无法保证！？

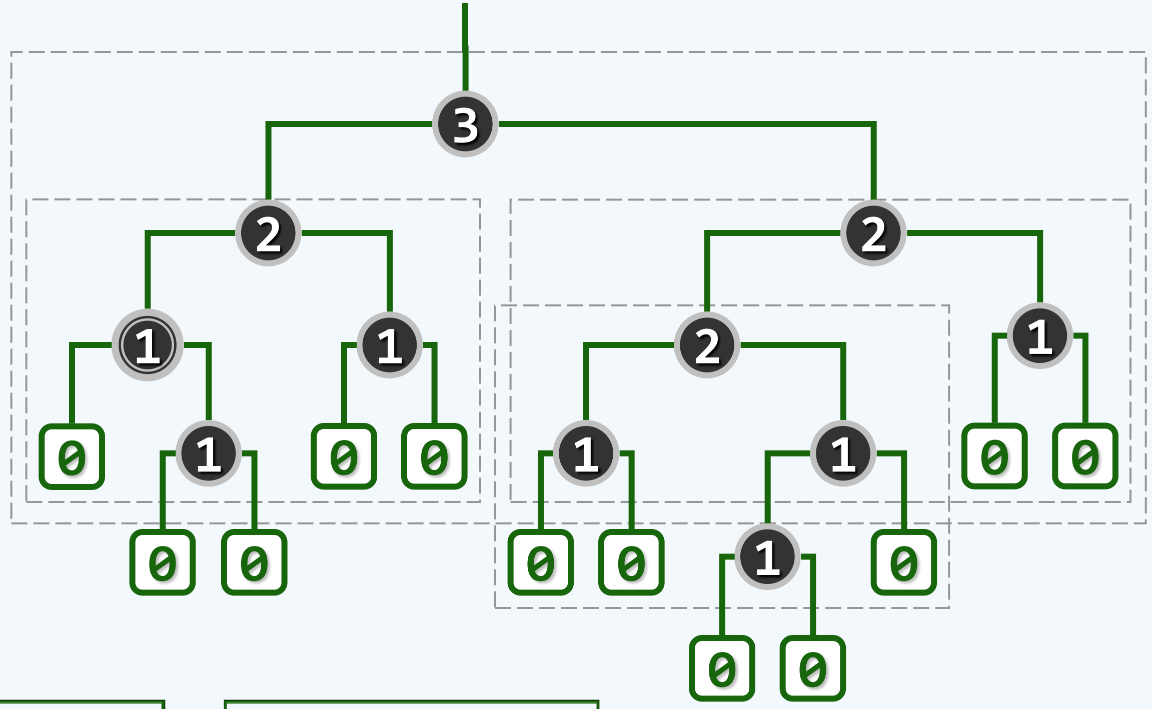
❖ 是的，实际上，$\boxed{\text{结构性}}$并非堆结构的$\boxed{\text{本质}}$要求

空节点路径长度

❖ 引入所有的外部节点

消除 $\boxed{\text{一度}}$ 节点

转为 $\boxed{\text{真}}$ 二叉树



❖ Null Path Length

0) npl(NULL) = 0

1) npl(x) = 1 + min(npl(lc(x)), npl(rc(x)))

❖ 验证： npl(x) = x到外部节点的最近距离

npl(x) = 以x为根的最大满子树的高度

左倾性 & 左式堆

- 左倾：对任何内节点x，都有 npl($\boxed{\text{lc(x)}}$) ≥ npl($\boxed{\text{rc(x)}}$)

  推论：对任何内节点x，都有 npl($\boxed{\text{x}}$) = $\boxed{1}$ + npl($\boxed{\text{rc(x)}}$)

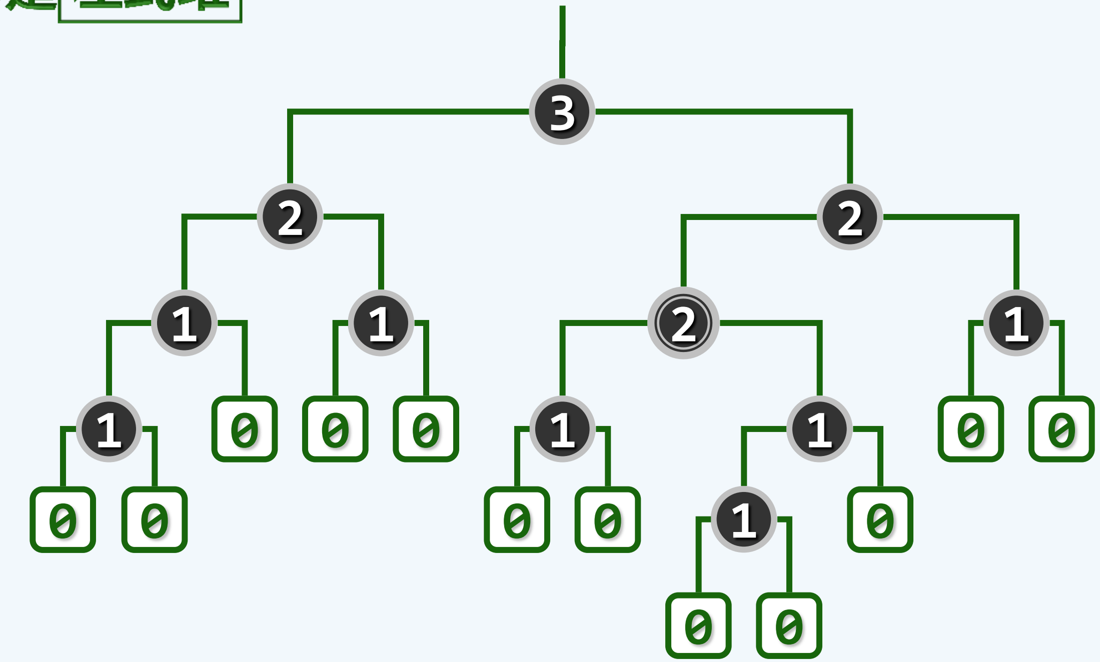
- 满足左倾性 leftist property 的堆，即是 左式堆

- 左倾性与堆序性，相容而不矛盾

- 左式堆的子堆，必是左式堆

- 左式堆倾向于

  更多节点分布于左侧分支



- 这是否意味着，左子堆的规模和高度必然大于右子堆？

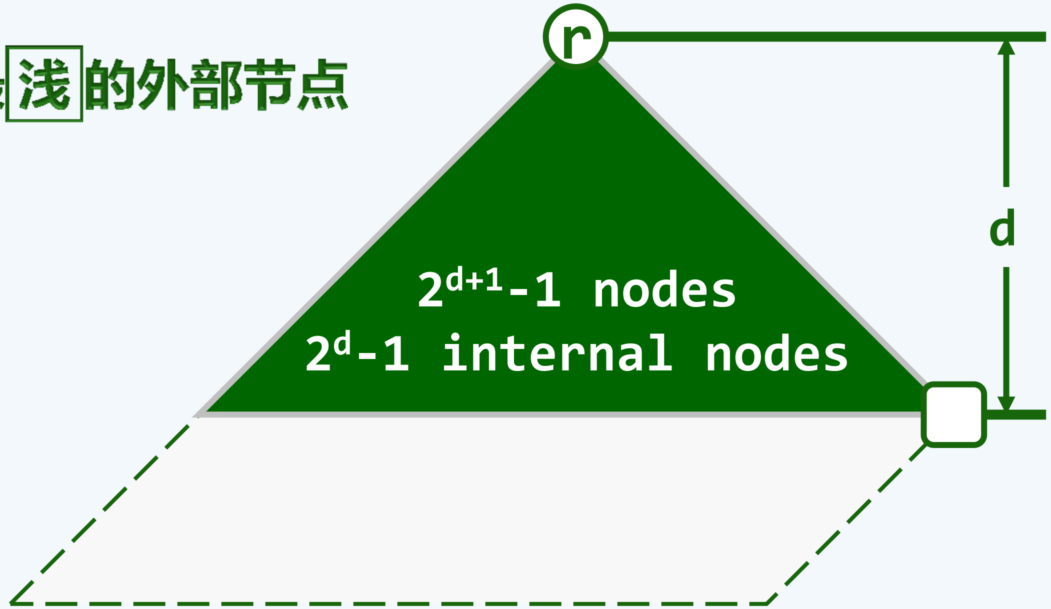
右侧链

❖ $\boxed{\texttt{rChain(x)}}$：从节点x出发，一直沿$\boxed{\text{右分支}}$前进

❖ 特别地，rChain(root)的终点，必为全堆中最$\boxed{\text{浅}}$的外部节点

$$npl(r) \equiv |\, rChain(r) \,| = d$$

存在一棵以r为根、高度为d的满子树



❖ 右侧链长为d的左式堆，$\boxed{\text{至少}}$包含

$\boxed{2^d - 1}$个内部节点、$\boxed{2^{d+1} - 1}$个节点

❖ 反之，在包含n个节点的左式堆中

右侧链的长度 $d \le \lfloor \log_2(n + 1) \rfloor - 1 = \mathcal{O}(\log n)$