6.图

(g) Prim算法

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

最小 + 支撑 + 树

❖ 连通网络$N = (V; E)$的子图$T = (V; F)$

1) 支撑/spanning

覆盖N中所有顶点

2) 树/tree

连通且无环，$|V| = |F| + 1$

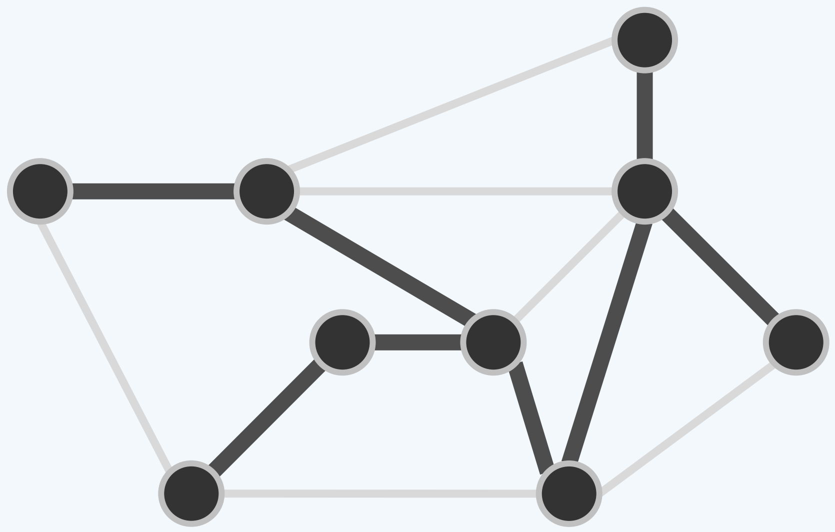
加边出单环，再删同环边即恢复为树

删边不连通，再加联接边即恢复为树

不难验证，同一网络的支撑树不唯一

3) 最小/minimum

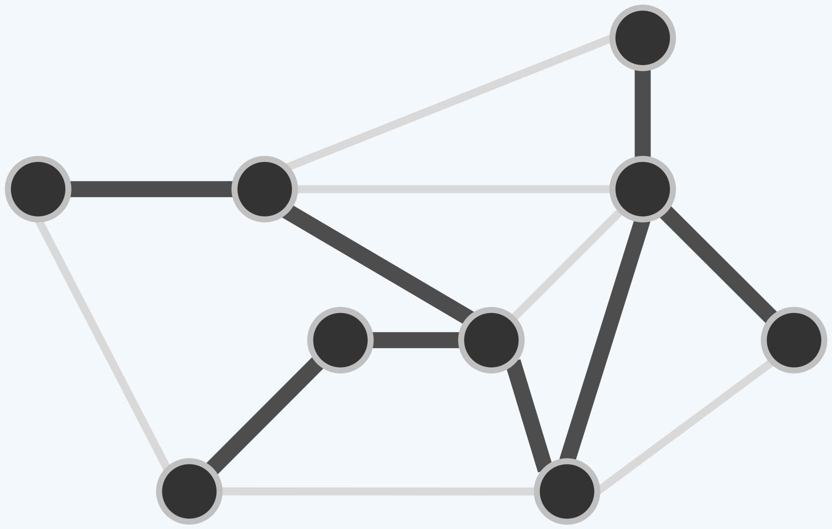
各边总权重$wt(T) = \sum_{e \in F} wt(e)$达到最小



MST

❖ 谁感兴趣？

电信公司、网络设计师、VLSI布线算法设计师、...



❖ 为何重要？

应用中常见的共性问题，也是很多优化问题的 $\boxed{\text{基本模型}}$

自身可 $\boxed{\text{有效计算}}$ //具体算法稍后介绍

为许多NP问题提供足够好的 $\boxed{\text{近似解}}$ //比如，Euclidean TSP

❖ 算法

Boruvka-1926, Jarnik-1930/Prim-1956, Kruskal-1956, ...

Karger-Klein-Tarjan-1995, Chazelle-2000

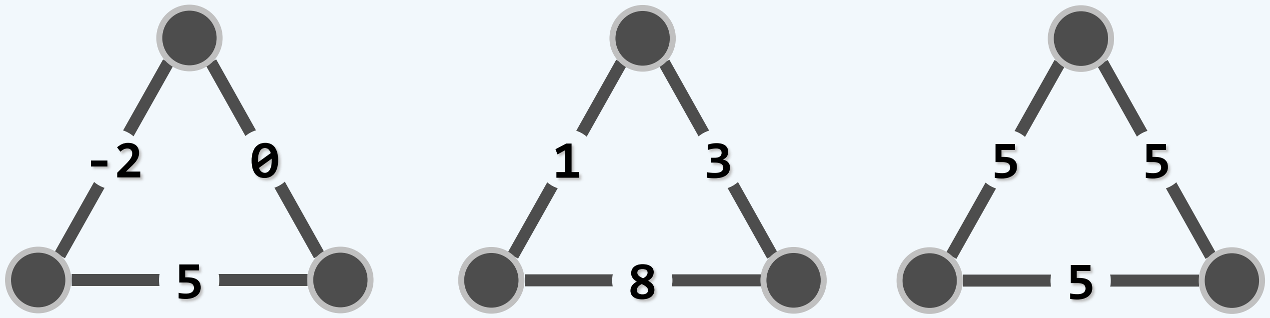
...是否存在$\mathcal{O}$(n + e)算法？

退化

❖ 权值必须是$\boxed{\text{正数}}$？

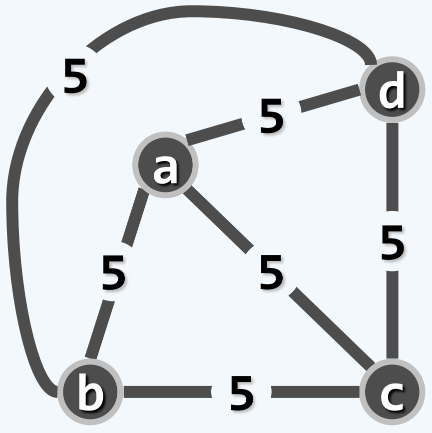
允许为$\boxed{\text{零}}$，会有什么影响？

允许为$\boxed{\text{负数}}$呢？



❖ 所有支撑树所含的边数，必然相等

故可统一调整：increase(1 - findMin())



❖ The minimum？

A minimal 同一网络N可能有多棵MST

The minimum！ 可强制消除歧义...

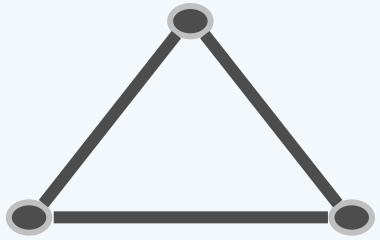
❖ 合成数（composite number）：(w(u, v), min(u, v), max(u, v))

5ab < 5ac < 5ad < 5bc < 5bd < 5cd

蛮力算法

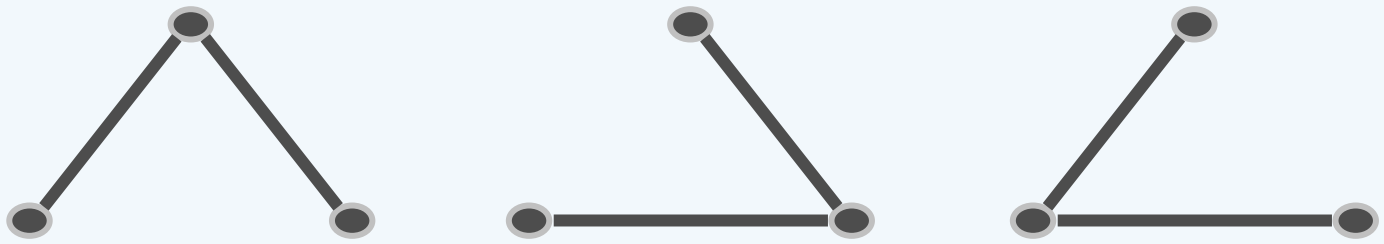
- 枚举出N的所有支撑树，从中找出代价最小者

- 这一策略是否可行，取决于...



- n个互异顶点组成的图，可能有多少棵支撑树？

n = 1	1
n = 2	1
n = 3	3
n = 4	16
...	...



- Cayley公式： 联接n个互异顶点的树共有n^{n-2}棵；或等价地，完全图K_n有n^{n-2}棵支撑树

- 如何高效地构造MST呢？

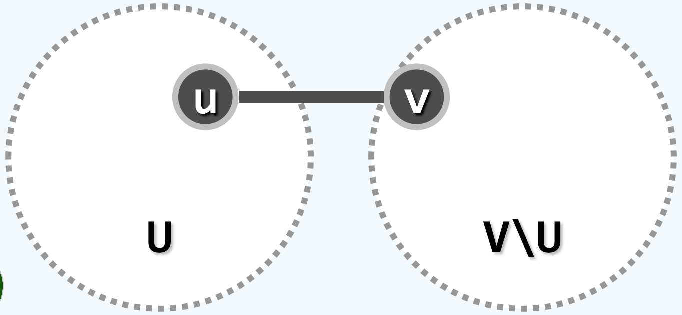
割 & 极短跨边

❖ 设(U; V\U)是N的割(cut)

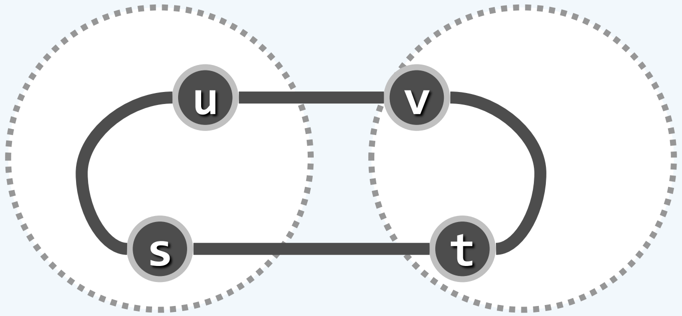
❖ 【Cut Property-A】

若：(u, v)是该割的极短跨边(shortest crossing edge)

则：必存在一棵包含(u, v)的MST



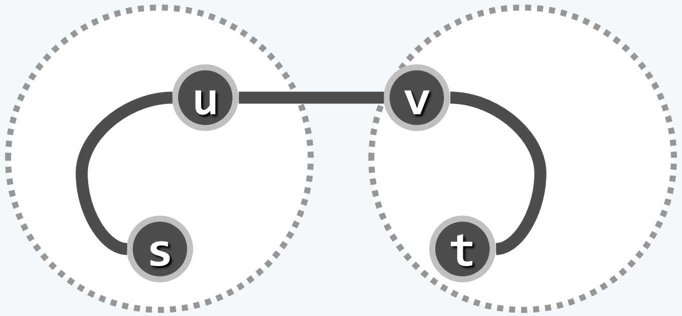
❖ 反证：假设(u, v)未被任何MST采用...



❖ 任取一棵MST，将(u, v)加入其中，于是

将出现唯一的回路，且该回路必经过

(u, v)以及至少另一跨边(s, t)



❖ 现在，将原MST中的(s, t)替换为(u, v)...

❖ 【Cut Property-B】反之，N的任一MST也必通过极短跨边联接每一割

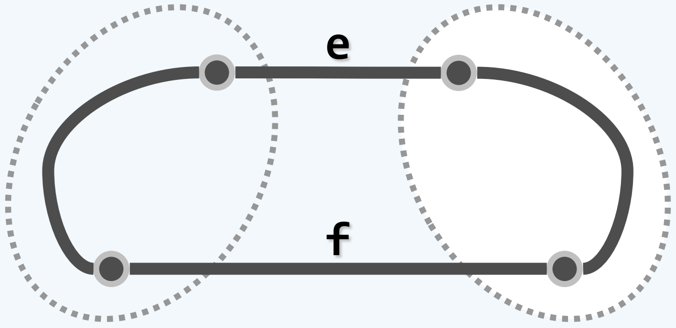
环 & 极长环边

❖ 设T是N的一棵MST，且在N中添加边e后得到N'

❖ 【Cycle Property】

若：沿着e在T中对应的环路，f为一 极长边

则：T - {f} + {e}即为N'的一棵MST



❖ 1)若e为环路上的 最长边 ，则与前同理，e不可能属于N'的MST

此时，f = e，T - {f} + {e} = T依然是N'的MST

❖ 2)否则有：|e| ≤ |f|；移除f后T - {f}一分为二，对应于N/N'的割

在N/N'中，f/e应是该割的 极短跨边

此割在N和N'中导出的一对互补子图完全一致

故，这对子图各自的MST经e联接后，即是N'的一棵MST

算法

- 从$\boxed{T_1}$ = ($\{v_1\}$; ∅)开始，逐步构造$\boxed{T_2}$、$\boxed{T_3}$、...、$\boxed{T_n}$，其中

  v_1可以任选

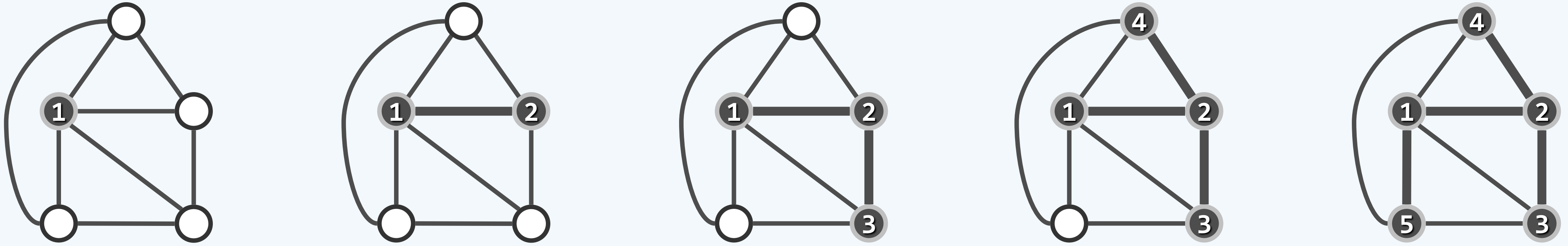
  $T_k = (V_k; E_k)$，$|V_k| = k$，$|E_k| = k-1$，$V_k \subset V_{k+1}$

- 由以上分析，为由$\boxed{T_k}$构造$\boxed{T_{k+1}}$，只需

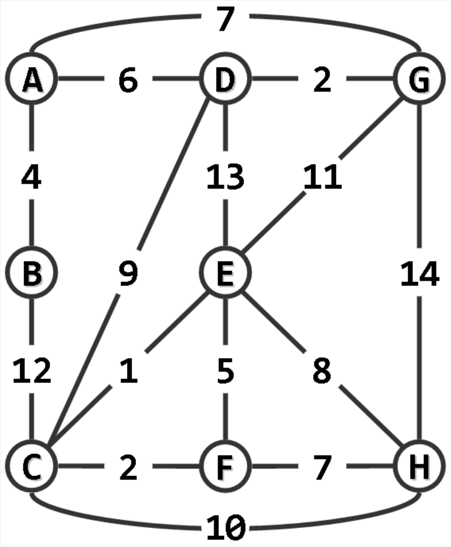
  将$(V_k : V \backslash V_k)$视作原图的一个割

  在该割的所有跨边中，找出$\boxed{\text{极短者}}$ $e_k = (v_k, u_k)$

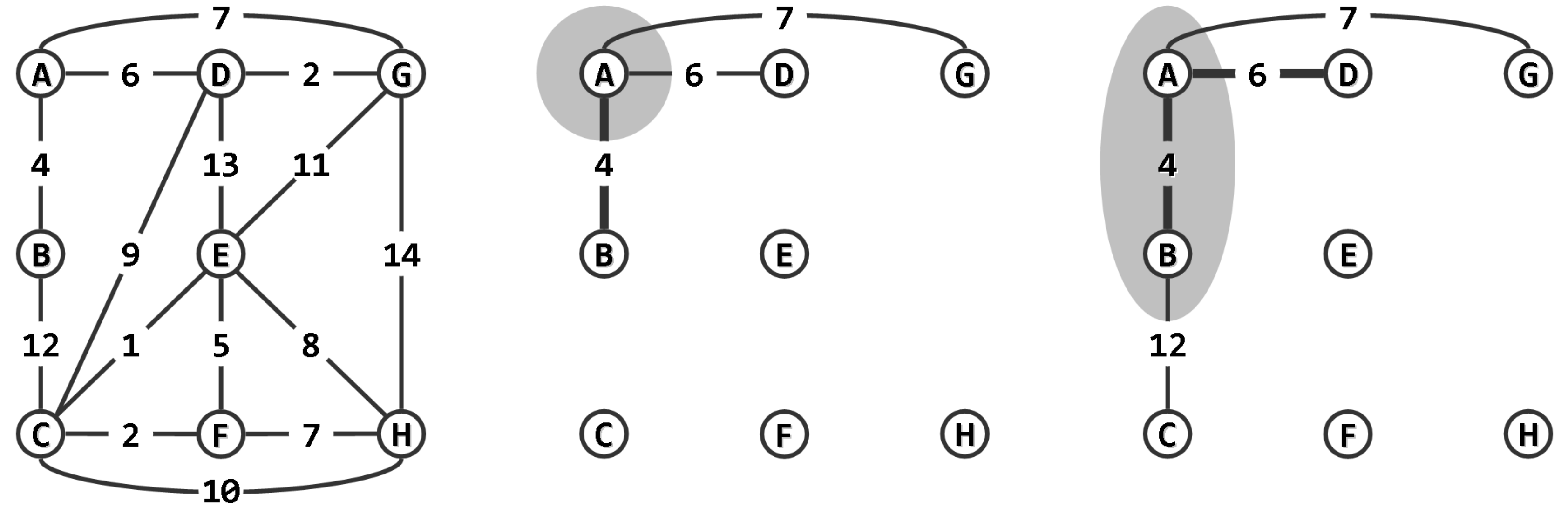
  令$T_{k+1} = (V_{k+1}; E_{k+1}) = (V_k \cup \{u_k\}; E_k \cup \{e_k\})$



实例



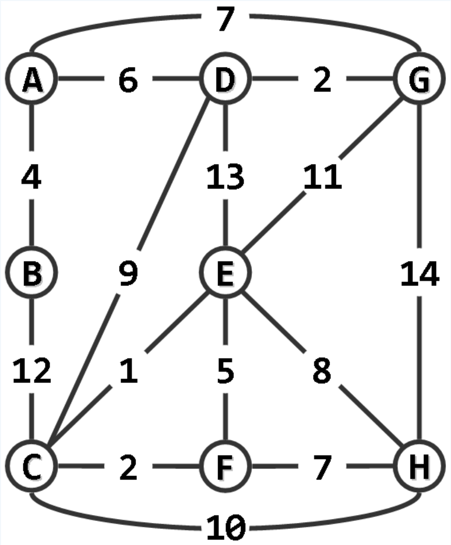
7
A
6
D
2
G
4
13
11
B
9
E
14
12
1
5
8
C
2
F
7
H
10

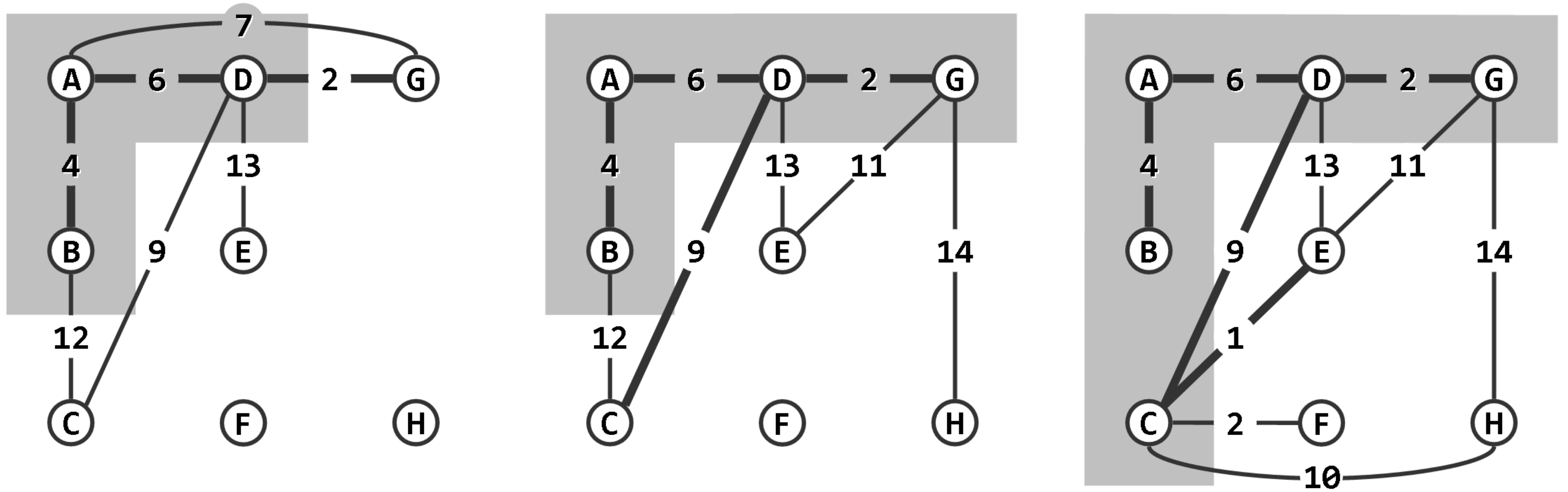


7
A
6
D
2
G
4
13
11
B
9
E
14
12
1
5
8
C
2
F
7
H
10
7
A
6
D
G
4
B
E
C
F
H
7
A
6
D
G
4
B
E
12
C
F
H

(a) (b) (c)

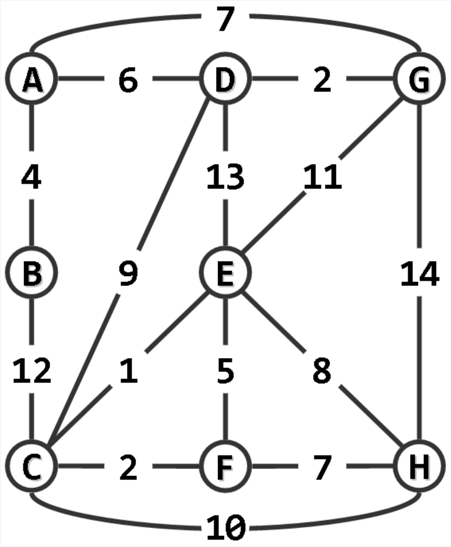
实例


A B C D E F G H
7 6 2 4 13 11 9 14 12 1 5 8 2 7 10

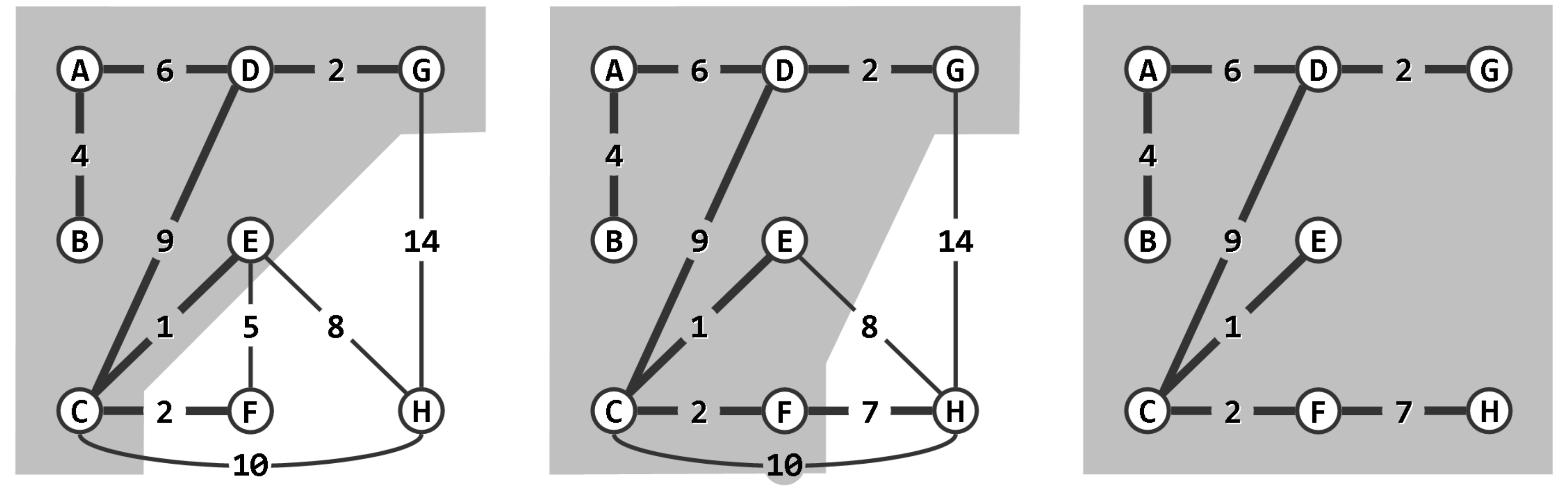

A B C D E F G H
7 6 2 4 13 9 12
6 2 4 13 11 9 14 12
6 2 4 13 11 9 14 1 2 10

(d) (e) (f)

实例



7
A 6 D 2 G
4 13 11
B 9 E 14
12 1 5 8
C 2 F 7 H
10



A 6 D 2 G
4
B 9 E 14
1 5 8
C 2 F H
10
A 6 D 2 G
4
B 9 E 14
1 8
C 2 F 7 H
10
A 6 D 2 G
4
B 9 E
1
C 2 F 7 H

(g) (h) (i)

正确性

❖ 设Prim依次选取边{ e_2, e_3, ..., e_n }，构造出树T

则其中每一条边e_k都属于某棵MST

——的确如此，但在MST $\boxed{\text{不唯一}}$ 时并不充分

——满足这一性质的一组边，未必构成一棵MST

❖ 反例...

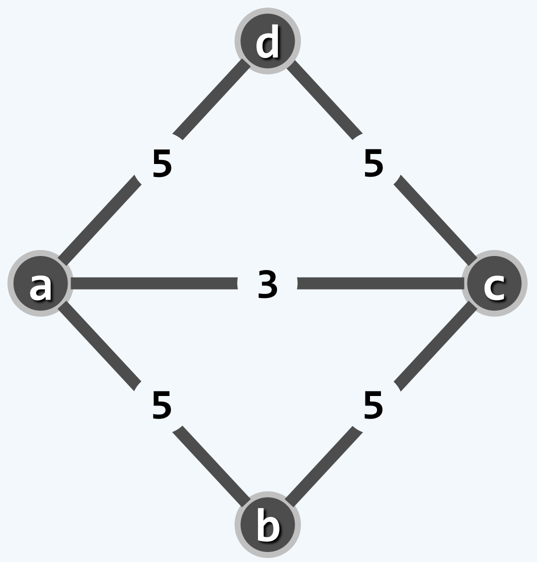
❖ 可行的证明方法...

1)在不增加总权重的前提下，可以将任一MST $\boxed{\text{转换}}$ 为T

数学归纳

2)每一T_k都是某棵MST的 $\boxed{\text{子树}}$ ，$1 \le k \le n$

数学归纳



实现

- 对于V_k之外的每一顶点v，令：priority(v) = v到$\boxed{V_k}$的距离
  于是套用优先级遍历算法框架...
- 为将$\boxed{T_k}$扩充至$\boxed{T_{k+1}}$，可以
  - 选出优先级最高的（$\boxed{\text{极短}}$）跨边e_k及其对应顶点u_k，并将其加入T_k
  - 随后，更新V_{k+1}之外每一顶点的优先级（数）
- 注意，优先级数随后有可能改变（降低）的顶点，必与u_k邻接
- 因此，只需遍历枚举u_k的每一邻接顶点v，并取
  priority(v) = min(priority(v), $|u_k$, v$|$)
- 以上完全符合PFS的框架，唯一要做的工作无非是
  按照$\boxed{\texttt{prioUpdater()}}$模式，编写一个优先级（数）更新器...

实现

❖ `g->pfs( 0, PrimPU<char, int>() ); //从顶点0出发，启动Prim算法`

❖
```
template <typename Tv, typename Te> //顶点类型、边类型
struct PrimPU { //Prim算法的顶点优先级更新器
   virtual void operator()( Graph<Tv, Te>* g, int uk, int v ) {
      if ( UNDISCOVERED != g->status(v) ) return;
   // 对uk的每个尚未被发现的邻居v，按Prim策略做松弛
      if ( g->priority(v) > g->weight(uk, v) ) {
         g->priority(v) = g->weight(uk, v);
         g->parent(v)   = uk;
      }
   }
};
```