6.图

（e）拓扑排序

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

有向无环图

❖ DAG

(Directed Acyclic Graph)

❖ 应用

类派生和继承关系图中，是否存在循环定义

操作系统中，相互等待的一组线程可否调度，如何调度

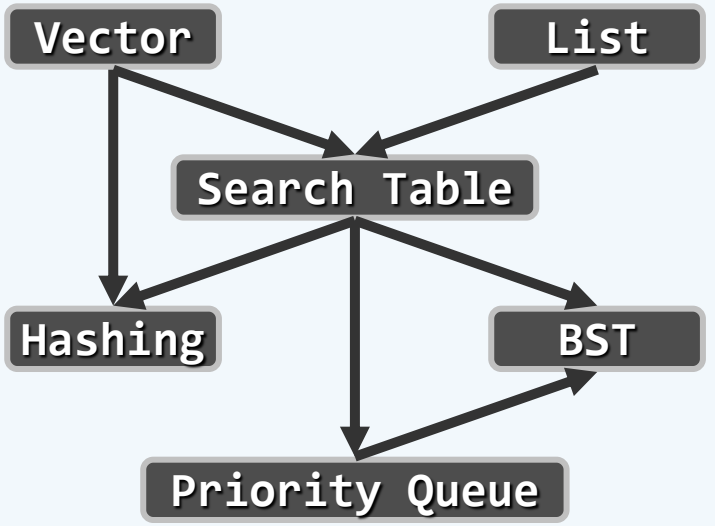
给定一组相互依赖的课程，是否存在可行的培养方案

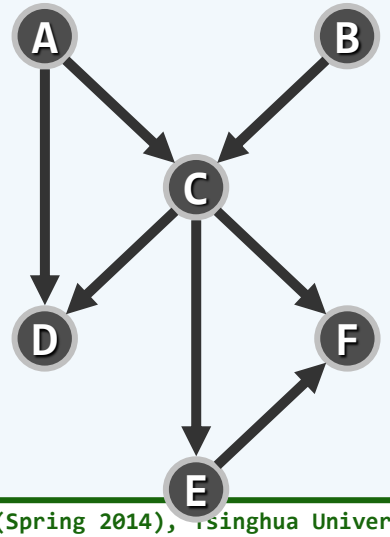
给定一组相互依赖的知识点，是否存在可行的教学进度方案

项目工程图中，是否存在可串行施工的方案

email系统中，是否存在自动转发或回复的回路

...





拓扑排序

❖ 任给有向图G，不一定是DAG

❖ 尝试将其中顶点排成一个**线性序列**

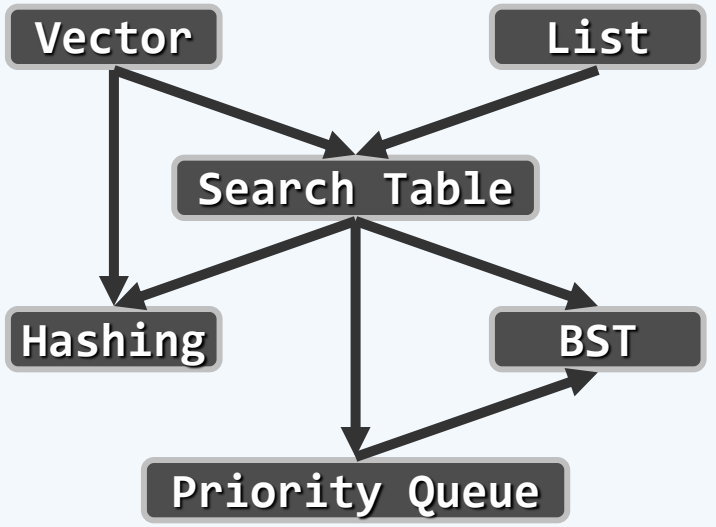
其次序须与原图**相容**，亦即

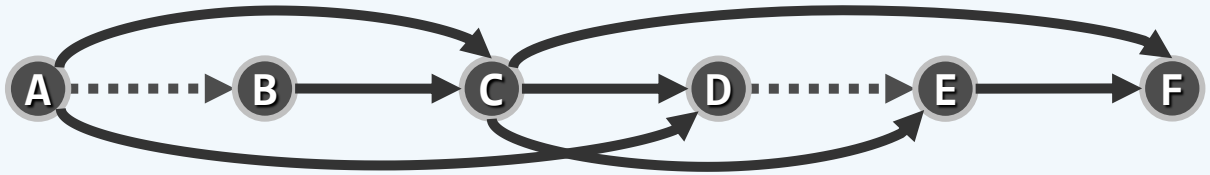
每一顶点都不会通过边指向**前驱**顶点

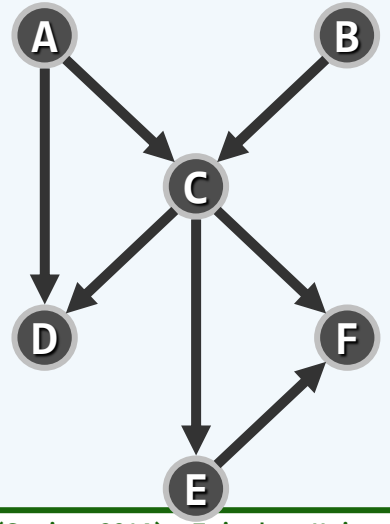
❖ 算法要求

若原图存在回路（即并非DAG），检查并报告

否则，给出一个相容的线性序列







存在性

- 每个DAG对应于一个偏序集；拓扑排序对应于一个全序集

  所谓的拓扑排序，即构造一个与指定偏序集相容的全序集

- 可以拓扑排序的有向图，必定无环 //反之

  任何DAG，都存在（至少）一种拓扑排序？是的！ //为什么...

- 有限偏序集必有极大/极大元素

  任何DAG都存在（至少）一种拓扑排序

- 可归纳证明，并直接导出一个算法...

存在性

1. 任何DAG，必有（至少一个）顶点入度为零 //记作m

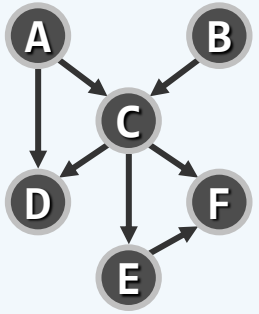
2. 若 DAG \ {m} 存在拓扑排序 S = <u_{k1}, …, $u_{k(n-1)}$> //subtraction

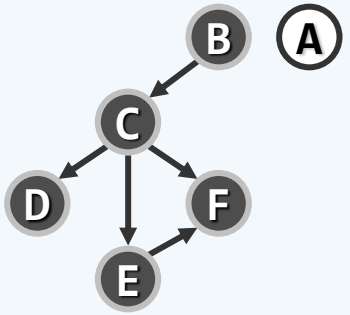
   则 S' = <m, u_{k1}, ..., $u_{k(n-1)}$> 即为DAG的拓扑排序 //DAG子图亦为DAG

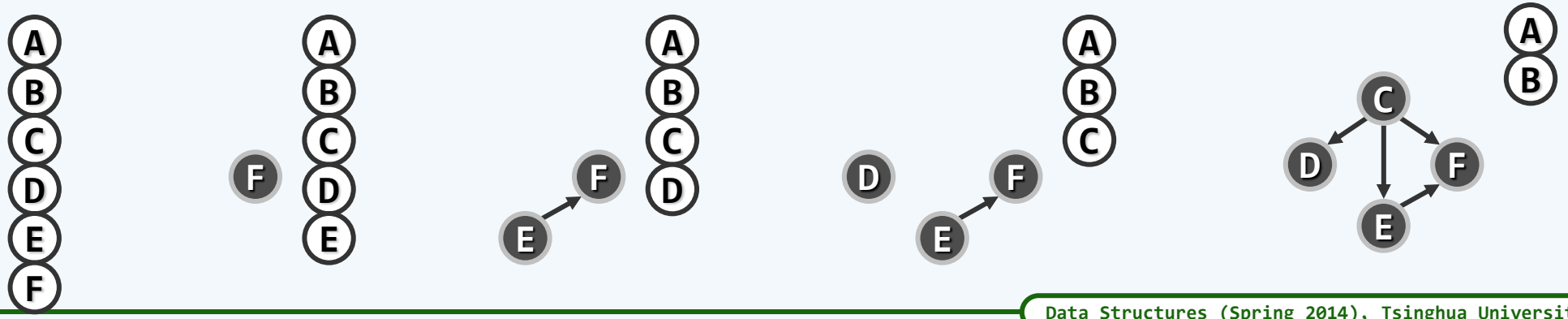
❖ 只要m不唯一，拓扑排序也应不唯一 //反之呢？

算法A：顺序输出零入度顶点

```
将所有入度为零的顶点存入栈S，取空队列Q //O(n)
while ( ! S.empty() ) { //O(n)
   Q.enqueue( v = S.pop() ); //栈顶v转入队列
   for each edge(v, u) //v的邻接顶点u若入度仅为1
      if ( inDegree(u) < 2 ) S.push(u); //则入栈
   G = G \ {v}; //删除v及其关联边（邻接顶点入度减1）
} //总体O(n + e)
return |G| ? Q : "NOT_DAG"; //残留的G空，当且仅当原图可拓扑排序
```







算法B：逆序输出零出度顶点

❖ /* 基于DFS，借助栈S */

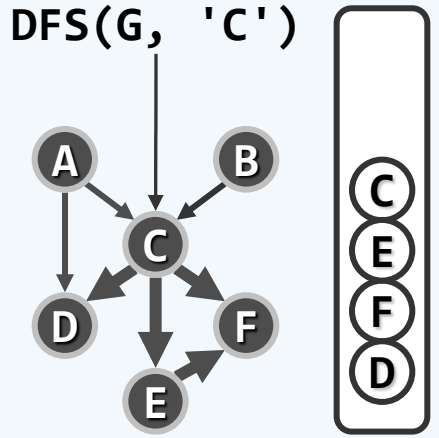
对图G做DFS，其间 //得到组成DFS森林的一系列DFS树

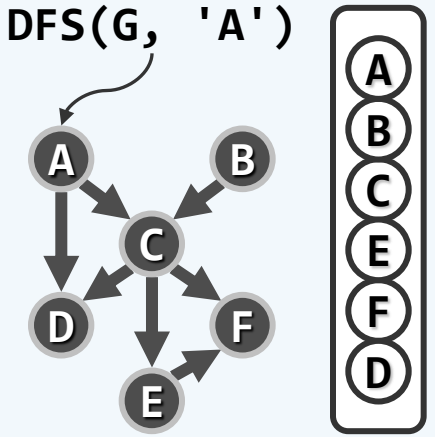
每当有顶点被标记为VISITED，则将其压入S

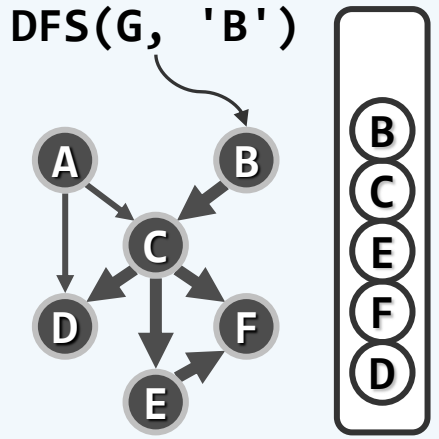
一旦发现有后向边，则报告非DAG并退出

DFS结束后，顺序弹出S中的各个顶点

❖ 复杂度与DFS相当，也是O(n + e)







算法B：实现

```
❖ template <typename Tv, typename Te> //顶点类型、边类型
  bool Graph<Tv, Te>::TSort(int v, int & clock, Stack<Tv>* S) {
     dTime(v) = ++clock; status(v) = DISCOVERED; //发现顶点v
     for ( int u = firstNbr(v); -1 < u; u = nextNbr(v, u) ) //枚举v所有邻居u
        /* ... 视u的状态，分别处理 ... */
     status(v) = VISITED; S->push( vertex(v) ); //顶点被标记为VISITED时入栈
     return true;
  }
```

算法B：实现

```
❖   for ( int u = firstNbr(v); -1 < u; u = nextNbr(v, u) ) //枚举v所有邻居u
       switch ( status(u) ) { //并视u的状态分别处理
          case UNDISCOVERED:
             parent(u) = v; type(v, u) = TREE; //树边(v, u)
             if ( !TSort(u, clock, S) ) return false; break; //从顶点u处深入
          case DISCOVERED: //一旦发现后向边（非DAG）
             type(v, u) = BACKWARD; return false; //则退出而不再深入
          default: //VISITED (digraphs only)
             type(v, u) = dTime(v) < dTime(u) ? FORWARD : CROSS; break;
       }
```