2.向量

（f）归并排序

I think there is a world market

for about five computers.

- T. J. Watson, 1943

天下大势，分久必合，合久必分

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

归并排序：原理

- //分治策略

  //向量与列表通用

  //J. von Neumann，1945

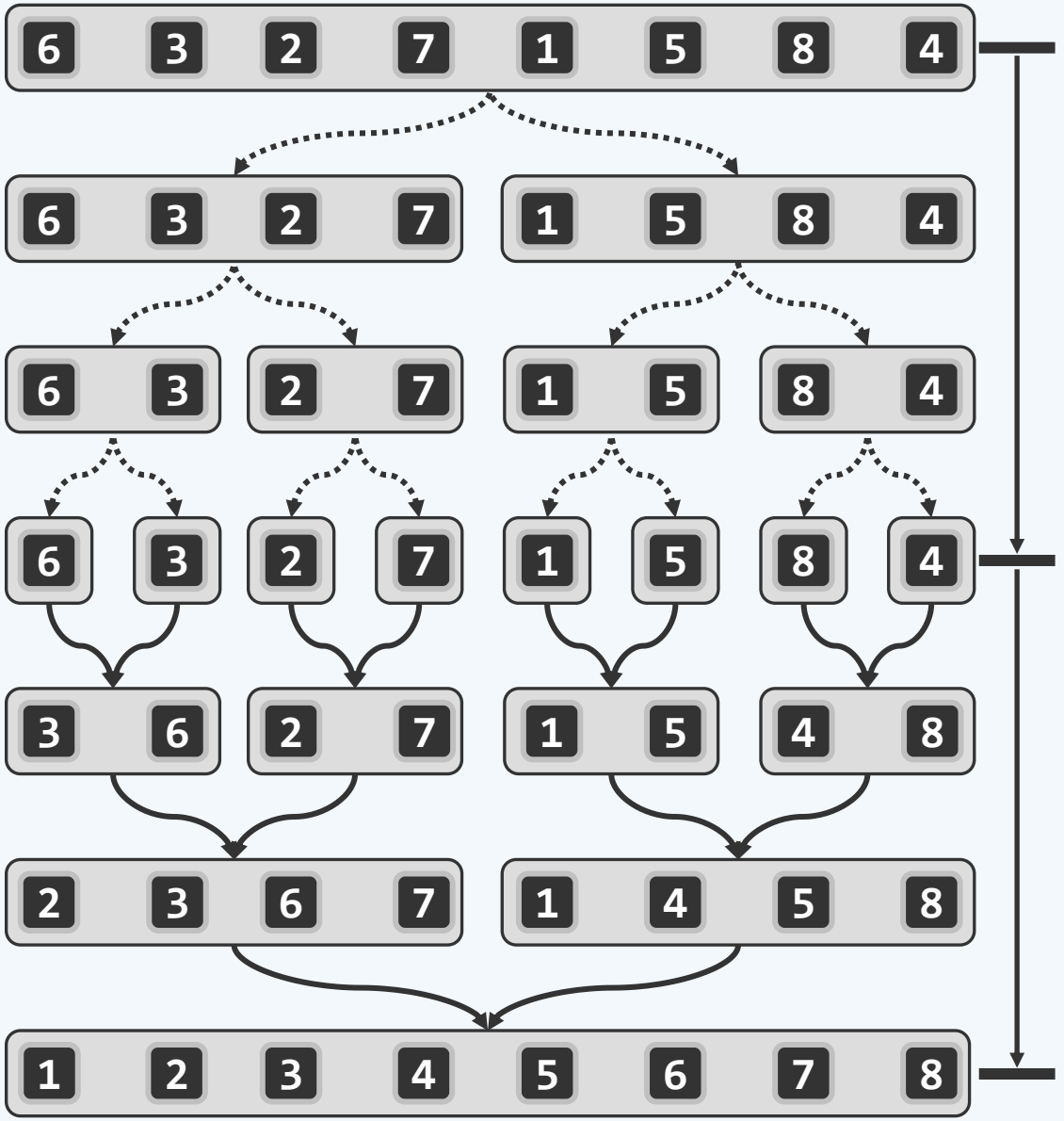
  序列一分为二 //O(1)

  子序列递归排序 //2 × T(n/2)

  合并有序子序列 //O(n)

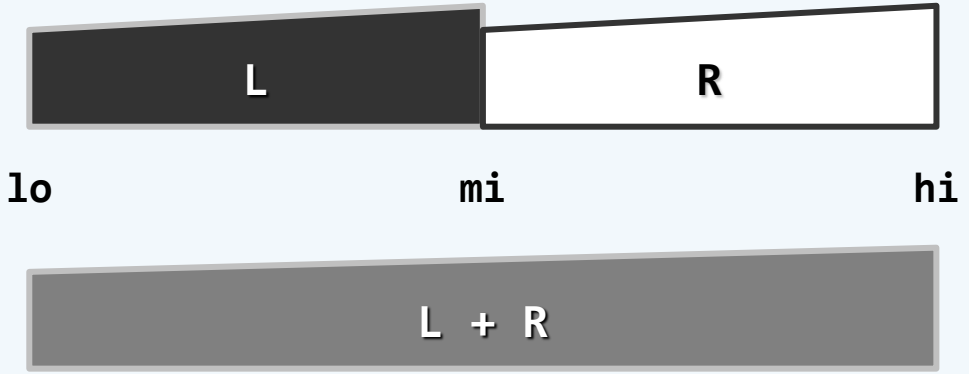
- 若真能如此，整体的运行成本应该是

  O(nlogn)



归并排序：实现

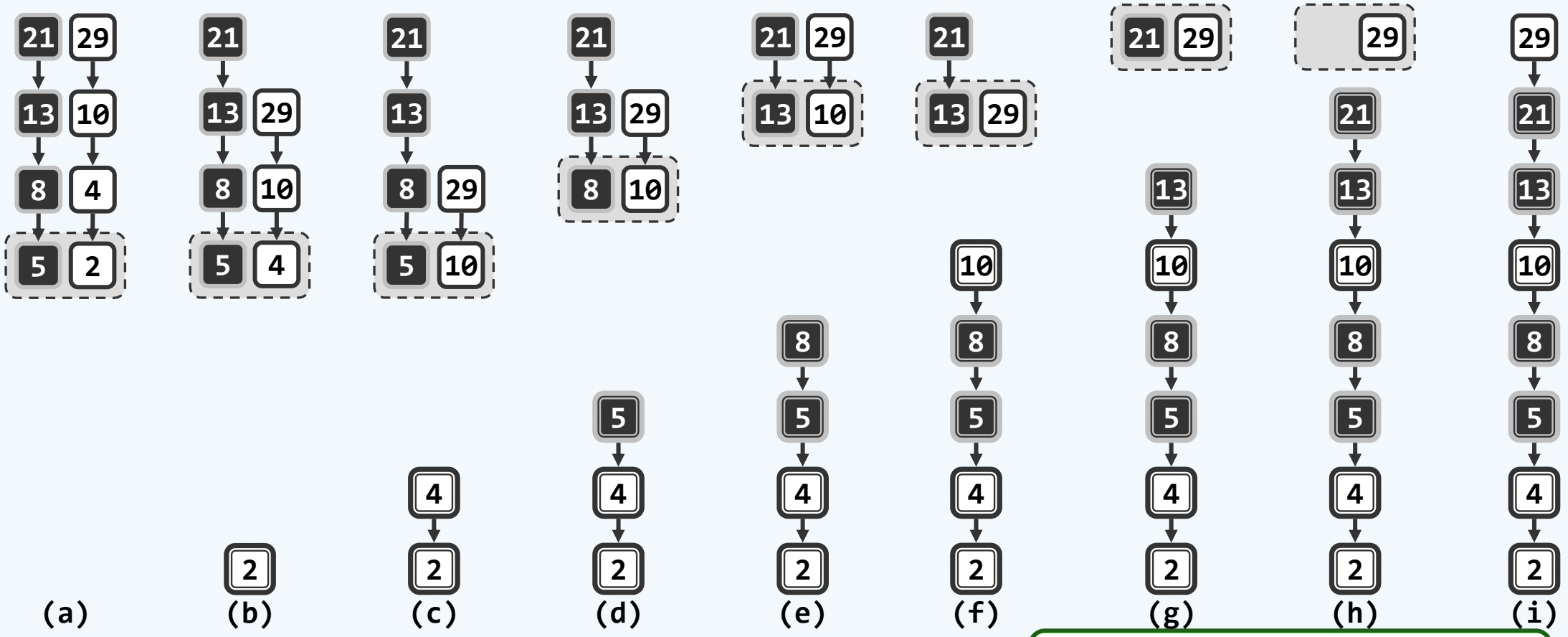
```
template <typename T>
void Vector<T>::mergeSort( Rank lo, Rank hi ) { //[lo, hi)
   if ( hi - lo < 2 ) return; //单元素区间自然有序，否则...
   int mi = (lo + hi) >> 1; //以中点为界
   mergeSort( lo, mi ); //对前半段排序
   mergeSort( mi, hi ); //对后半段排序
   merge( lo, mi, hi ); //归并
}
```



二路归并：原理

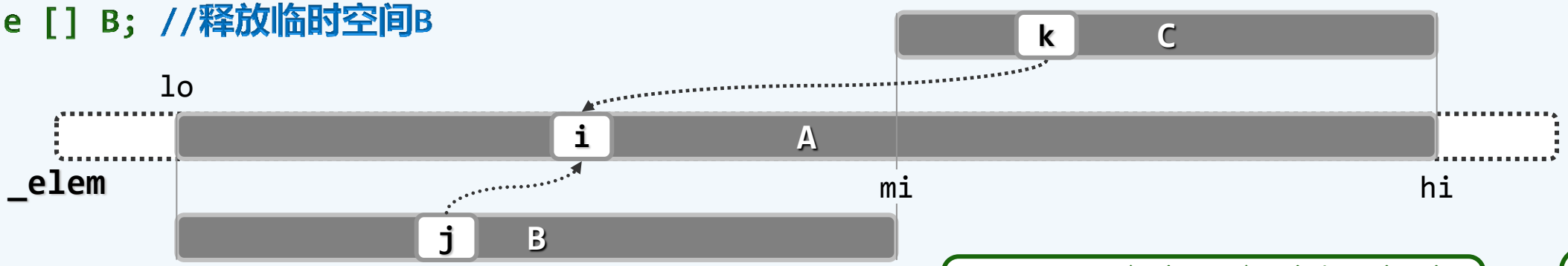
❖ 2-way merge： 两个有序序列，合并为一个有序序列：

S[lo, hi) = S[lo, mi) + S[mi, hi)

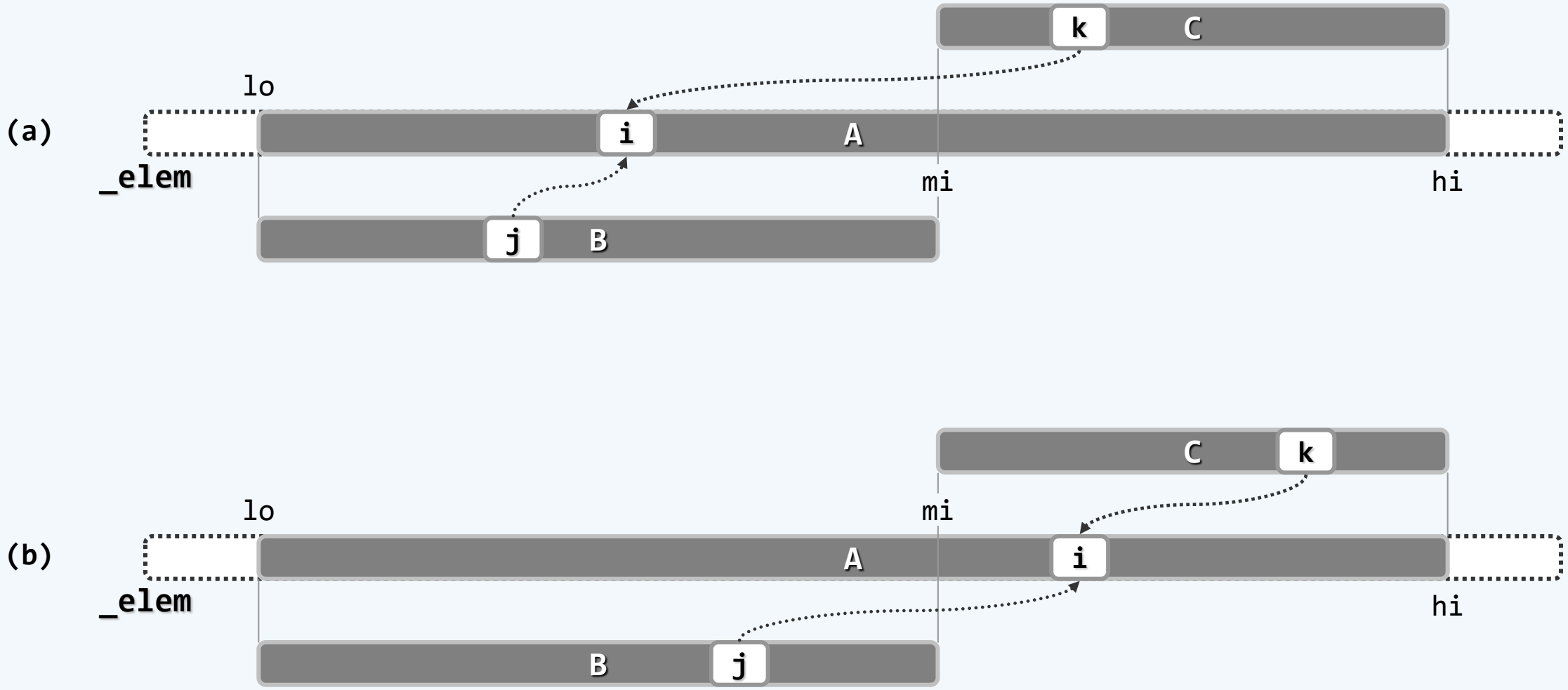


二路归并：基本实现

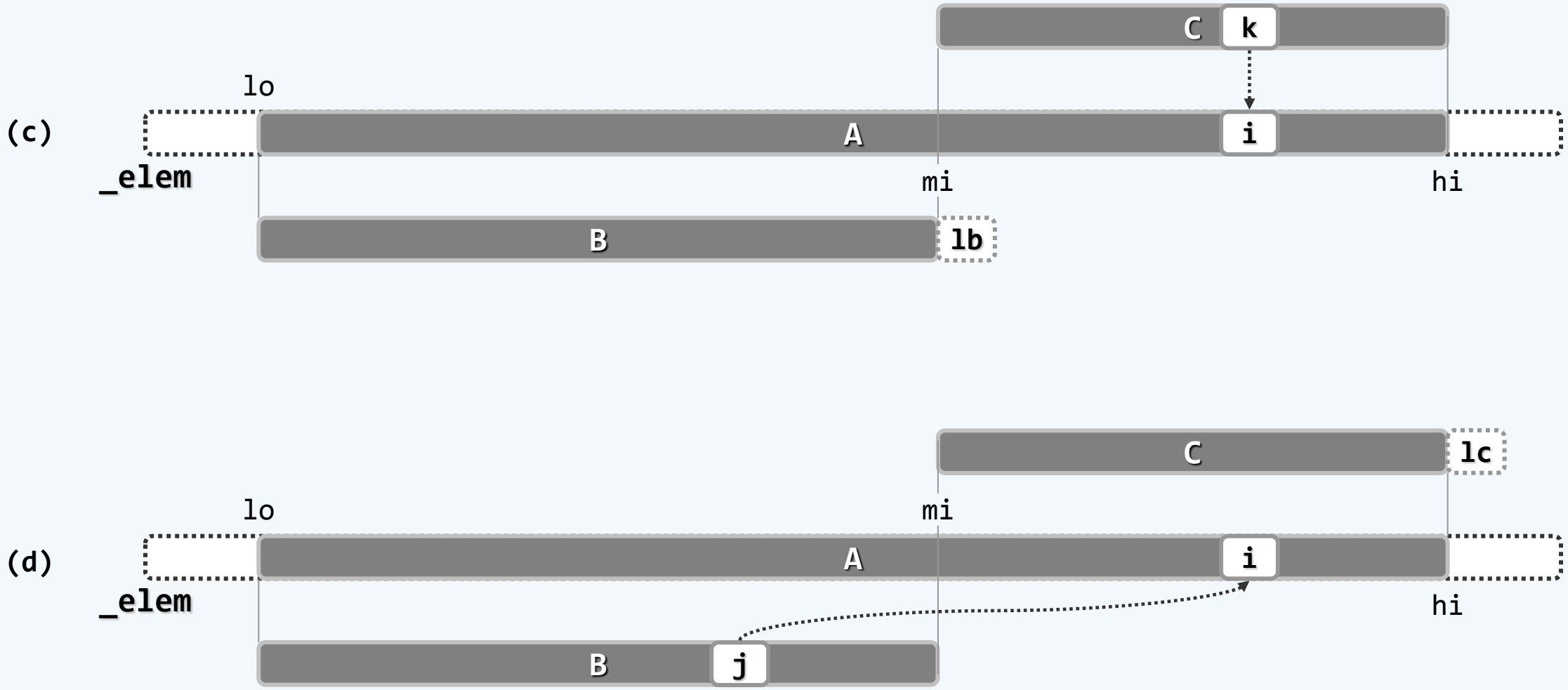
```
template <typename T> void Vector<T>::merge( Rank lo, Rank mi, Rank hi ) {
   T* A = _elem + lo; int lb = mi - lo; T* B = new T[lb]; //A[0, hi - lo) = _elem[lo, hi)
   for ( Rank i = 0; i < lb; B[i] = A[i++] ); //复制前子向量B[0, lb) = _elem[lo, mi)
   int lc = hi - mi; T* C = _elem + mi; //后子向量C[0, lc) = _elem[mi, hi)
   for ( Rank i = 0, j = 0, k = 0; j < lb || k < lc; ) { //B[j]和C[k]中小者转至A的末尾
      if ( j < lb && ( lc <= k || B[j] <= C[k] ) ) A[i++] = B[j++]; //C[k]已无或不小
      if ( k < lc && ( lb <= j || C[k] <  B[j] ) ) A[i++] = C[k++]; //B[j]已无或更大
   } //该循环实现紧凑；但就效率而言，不如拆分处理
  delete [] B; //释放临时空间B
}
```



二路归并：正确性



二路归并：正确性



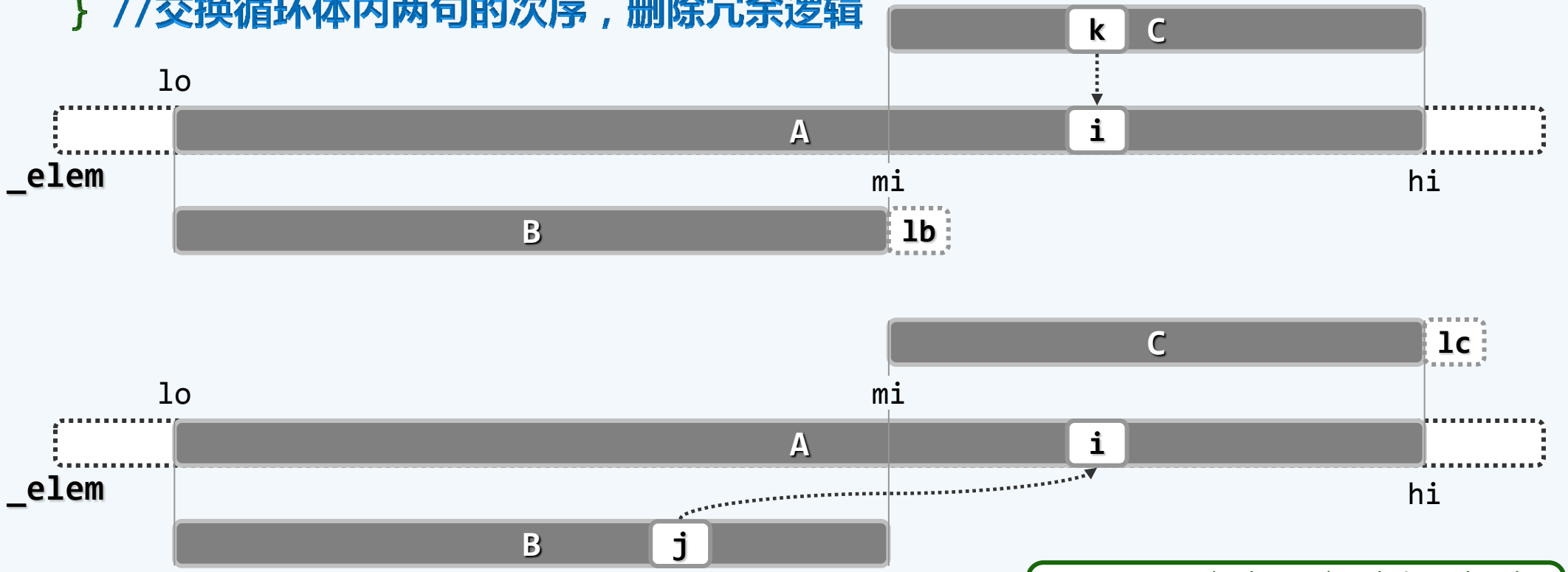
二路归并：精简实现

```
❖   for ( Rank i = 0, j = 0, k = 0; (j < lb) || (k < lc); ) {

      if ( k < lc && ( lb <= j || C[k] <  B[j] ) ) A[i++] = C[k++];

      if ( j < lb && ( lc <= k || B[j] <= C[k] ) ) A[i++] = B[j++];

    } //交换循环体内两句的次序，删除冗余逻辑
```



二路归并：复杂度

- 算法的运行时间主要消耗于for循环，共有两个控制变量

  初始：j = 0，k = 0

  最终：j = lb，k = lc

  亦即：j + k = lb + lc = hi – lo = n

- 观察：每经过一次迭代，j和k中至少有一个会加一（j + k也必至少加一）

- 故知：merge()总体迭代不过O(n)次，累计只需线性时间！

- 这一结论与排序算法的Ω(nlogn)下界并不矛盾——毕竟这里的B和C均已各自有序

- 注意：待归并子序列不必等长

  亦即：允许lb ≠ lc，mi ≠ (lo + hi)/2

- 实际上，这一算法及结论也适用于另一类序列——列表（下一章）

综合评价

❖ 优点

实现最坏情况下最优$O(n\log n)$性能的第一个排序算法

不需随机读写，完全顺序访问——尤其适用于

列表之类的序列

磁带之类的设备

只要实现恰当，可保证稳定——出现雷同元素时，左侧子向量优先

可扩展性极佳，十分适宜于外部排序——海量网页搜索结果的归并

易于并行化

❖ 缺点

非就地，需要对等规模的辅助空间——可否更加节省？

即便输入完全（或接近）有序，仍需$\Theta(n\log n)$时间——改进...