7.二叉搜索树

（d）AVL树

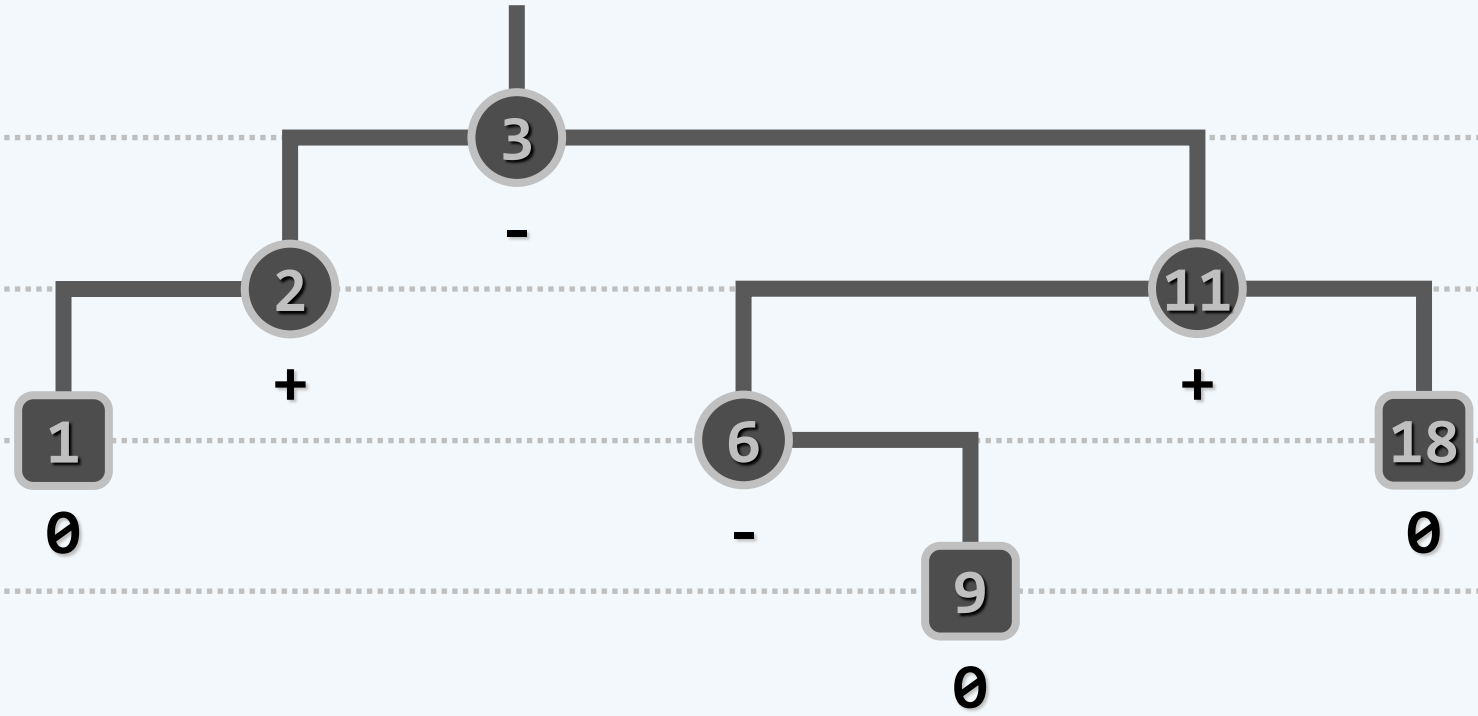
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

平衡因子

❖ balFac(v) = height(lc(v)) - height(rc(v))

❖ G. Adelson-Velsky & E. Landis (1962): ∀ v, | balFac(v) | ≤ 1



❖ AVL树未必理想平衡，必然适度平衡...

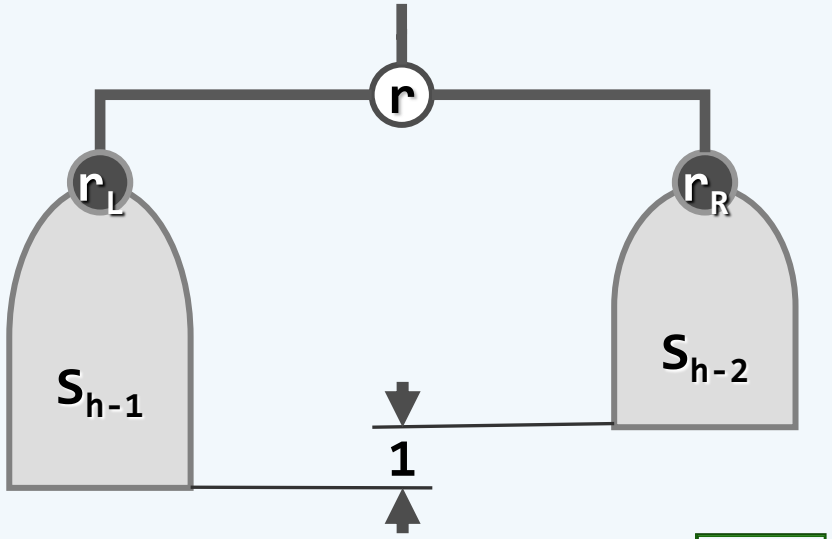
AVL = 适度平衡

❖ 高度为h的AVL树，至少包含 $S(h) = fib(h + 3) - 1$ 个节点

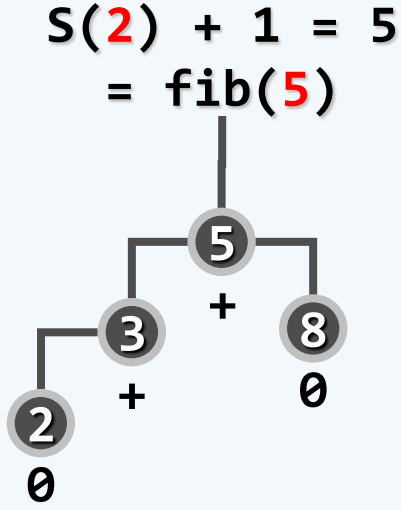
❖ $S(h) = 1 + S(h - 1) + S(h - 2)$

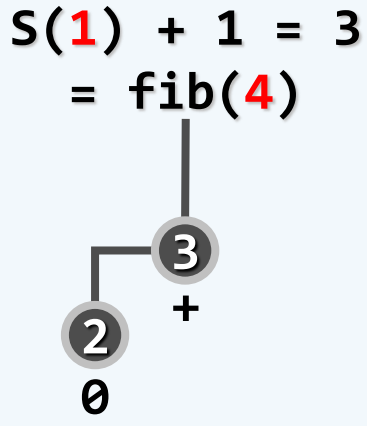
❖ $S(h) + 1 = [S(h - 1) + 1] + [S(h - 2) + 1]$

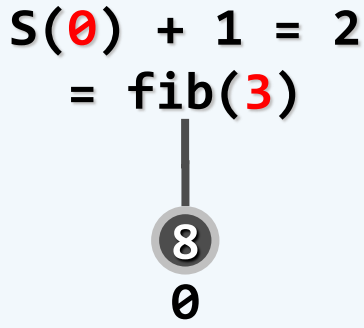
❖ $fib(h + 3) = fib(h + 2) + fib(h + 1)$



❖ 反过来，由n个节点构成的AVL树，高度至多为 $O(\log n)$





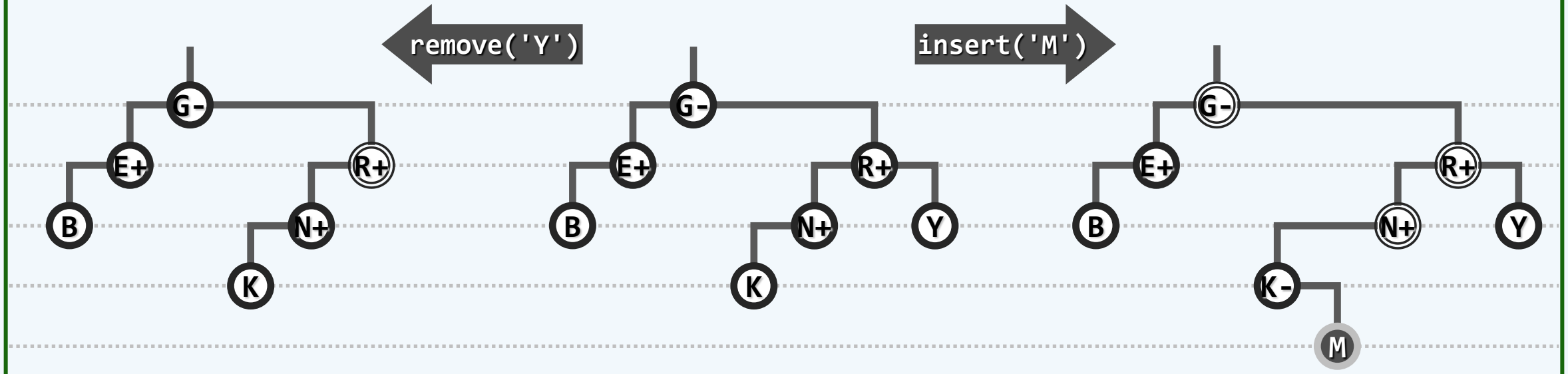


AVL：接口

```
❖ #define Balanced(x) \ //理想平衡
     ( stature( (x).lc ) == stature( (x).rc ) )
  #define BalFac(x) \ //平衡因子
     ( stature( (x).lc ) - stature( (x).rc ) )
  #define AvlBalanced(x) \ //AVL平衡条件
     ( ( -2 < BalFac(x) ) && ( BalFac(x) < 2 ) )
❖ template <typename T> class AVL : public BST<T> { //由BST派生
  public: // BST::search()等接口，可直接沿用
     BinNodePosi(T) insert( const T & ); //插入 重写
     bool remove( const T & ); //删除 重写
  };
```

失衡与重平衡

❖ 按BST规则插入或删除节点之后，AVL平衡性可能破坏——如何恢复？



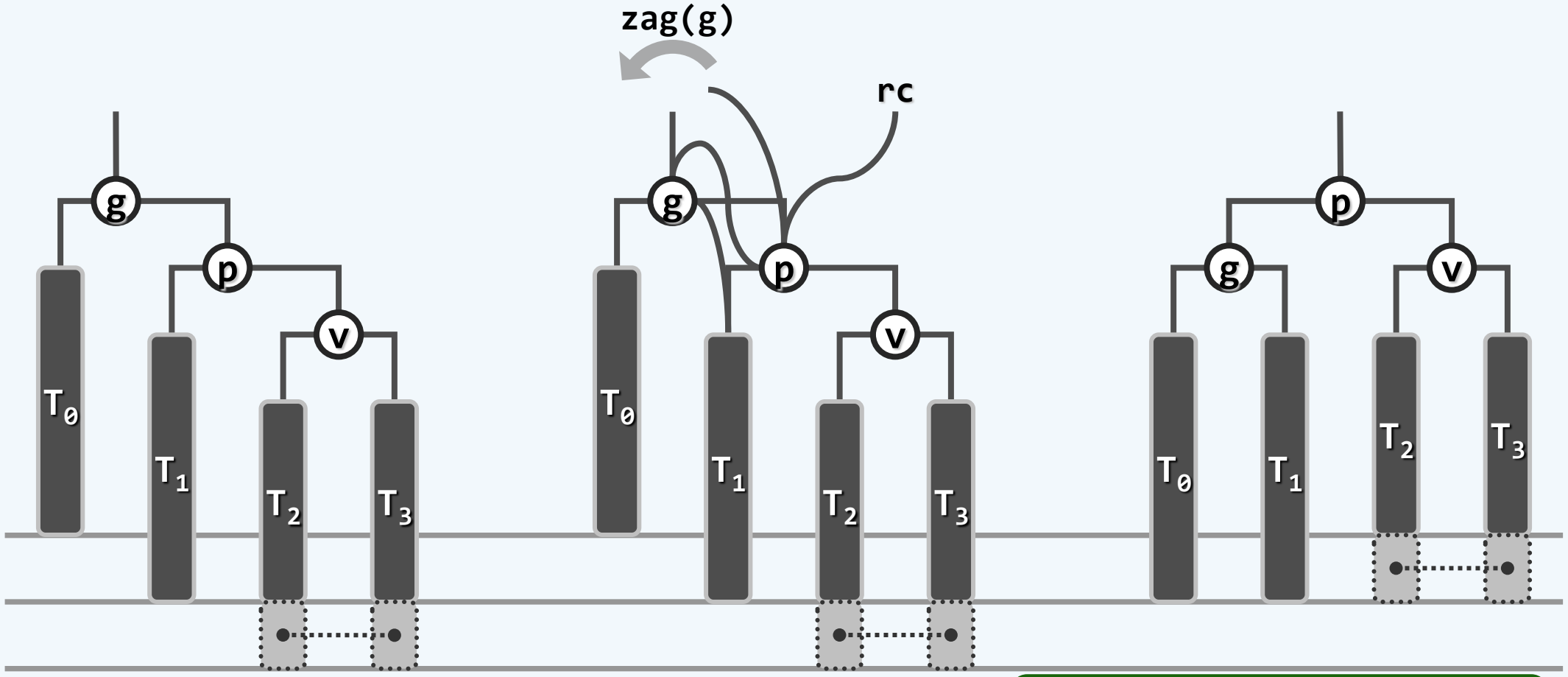
❖ 蛮力不足取，须借助等价变换

局部性：所有的旋转都在局部进行 //每次只需O(1)时间

快速性：在每一深度只需检查并旋转至多一次 //共O(logn)次

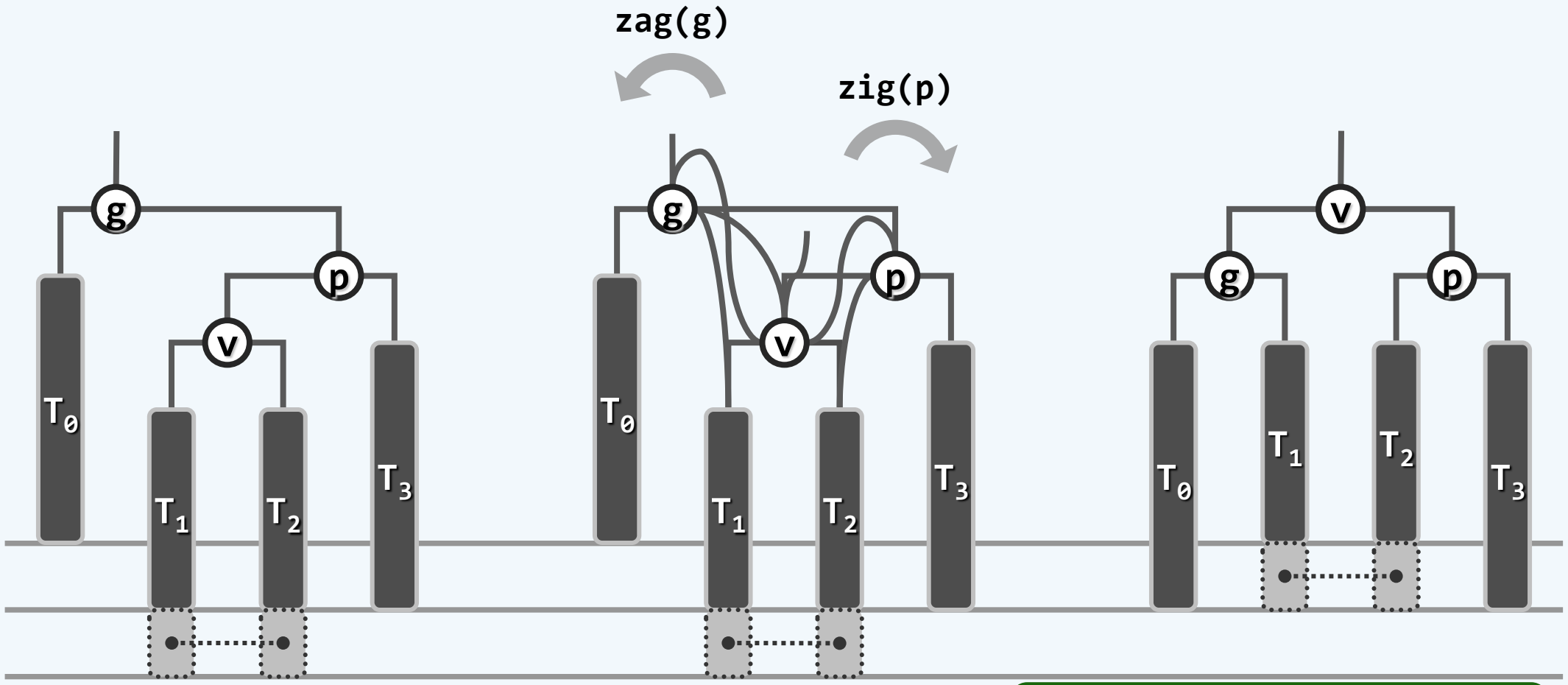
插入：单旋

- 同时可有多个失衡节点，最低者g不低于x祖父
- g经单旋调整后复衡，子树高度复原；更高祖先也必平衡，全树复衡



插入：双旋

- 同时可有多个失衡节点，最低者g不低于x祖父
- g经双旋调整后复衡，子树高度复原；更高祖先也必平衡，全树复衡

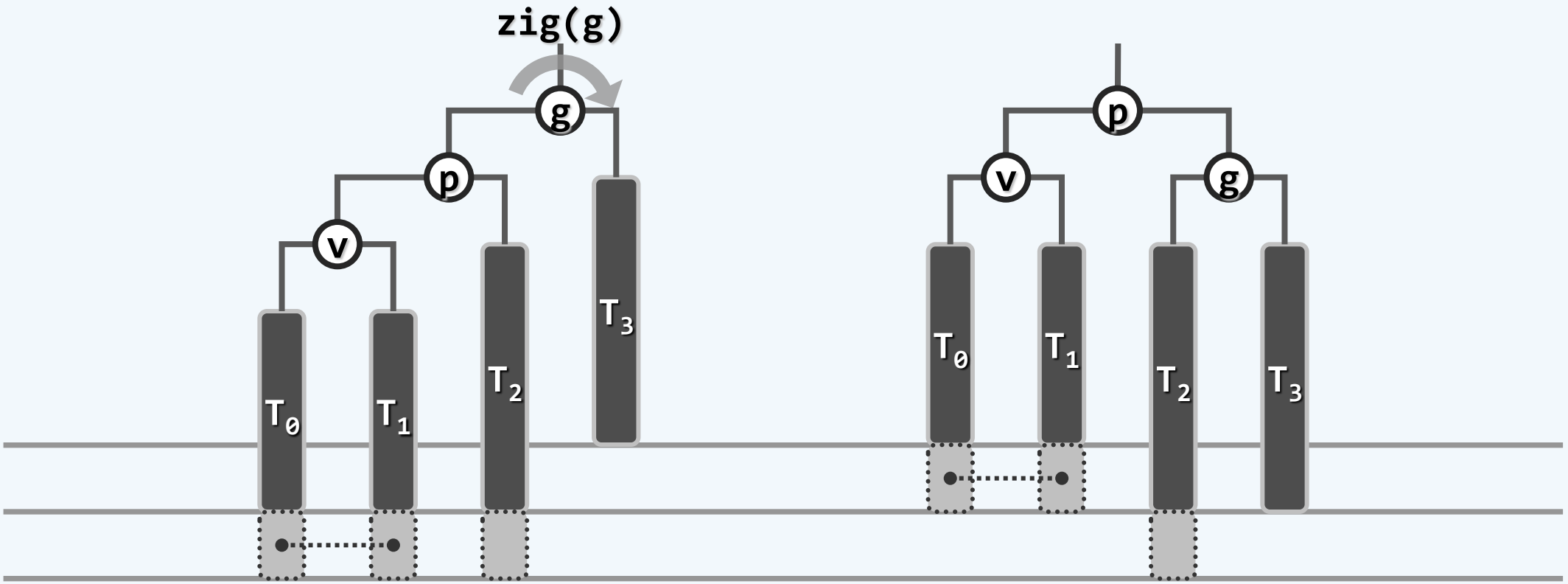


插入：实现

```
❖template <typename T> BinNodePosi(T) AVL<T>::insert( const T & e ) {
    BinNodePosi(T) & x = search( e ); if ( x ) return x; //若目标尚不存在
    BinNodePosi(T) xx = x = new BinNode<T>( e, _hot ); _size++; //则创建新节点
  // 此时，若x的父亲_hot增高，则祖父有可能失衡。故以下从_hot起，向上逐层检查各代祖先
    for ( BinNodePosi(T) g = _hot; g; g = g->parent )
       if ( ! AvlBalanced( *g ) ) { //一旦发现g失衡，则通过调整恢复平衡
          FromParentTo( *g ) = rotateAt( tallerChild( tallerChild( g ) ) );
          break; //g复衡后，局部子树高度必然复原；其祖先亦必如此，故调整结束
       } else //否则（在依然平衡的祖先处），只需简单地
          updateHeight( g ); //更新其高度（平衡性虽不变，高度却可能改变）
    return xx; //返回新节点：至多只需一次调整
}
```

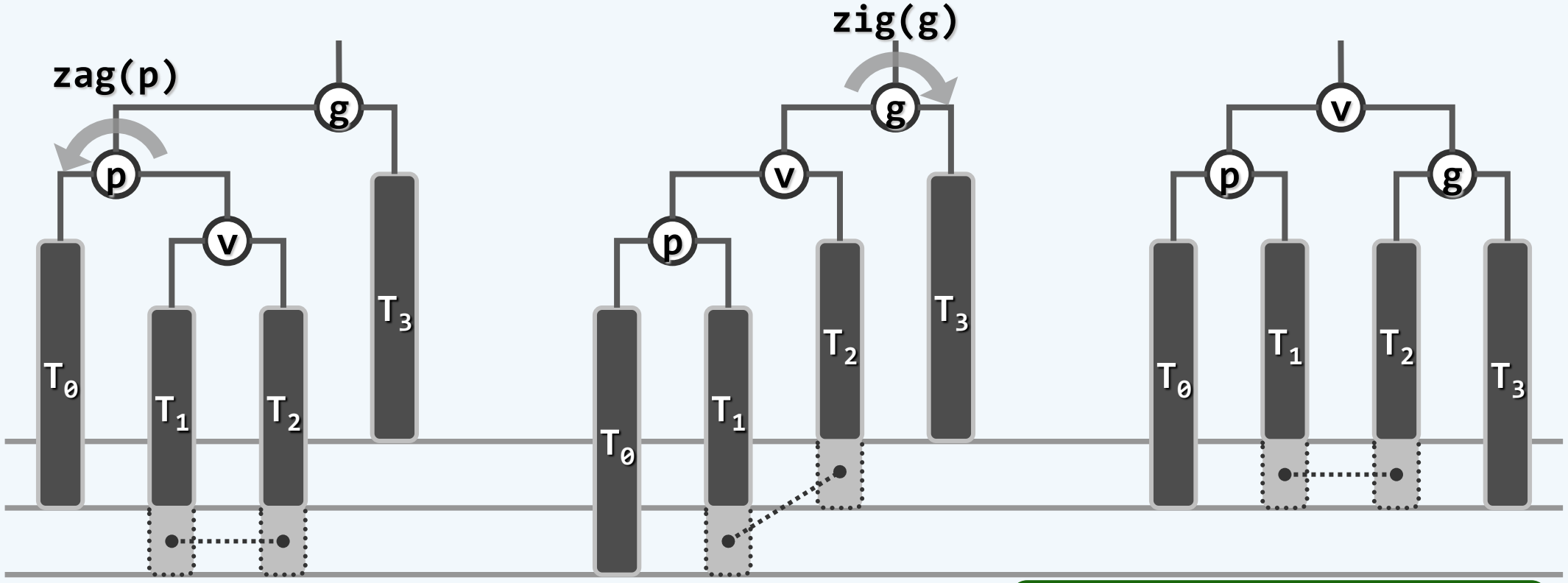
删除：单旋

- 同时至多一个失衡节点g，首个可能就是x的父亲_hot
- g经单旋调整后复衡，子树高度未必复原；更高祖先仍可能失衡
- 因有失衡传播现象，可能需做O(logn)次调整



删除：双旋

- 同时至多一个失衡节点g，首个可能就是x的父亲_hot
- g经单旋调整后复衡，子树高度未必复原；更高祖先仍可能失衡
- 因有失衡传播现象，可能需做O(logn)次调整



删除：实现

```
❖template <typename T> bool AVL<T>::remove( const T & e ) {
    BinNodePosi(T) & x = search( e ); if ( !x ) return false; //若目标的确存在
    removeAt( x, _hot ); _size--; //则在按BST规则删除之后，_hot及祖先均有可能失衡
  // 以下，从_hot出发逐层向上，依次检查各代祖先g
    for ( BinNodePosi(T) g = _hot; g; g = g->parent ) {
       if ( ! AvlBalanced( *g ) ) //一旦发现g失衡，则通过调整恢复平衡
          g = FromParentTo( *g ) = rotateAt( tallerChild( tallerChild( g ) ) );
       updateHeight( g ); //并更新其高度
    } //可能需做过Ω(logn)次调整；无论是否做过调整，全树高度均可能下降
    return true; //删除成功
  }
```

3+4重构：算法

❖ 设g(x)为最低的失衡节点，考察祖孙三代：g ~ p ~ v

按中序遍历次序，将其重命名为：a < b < c

❖ 它们总共拥有互不相交的四棵（可能为空的）子树

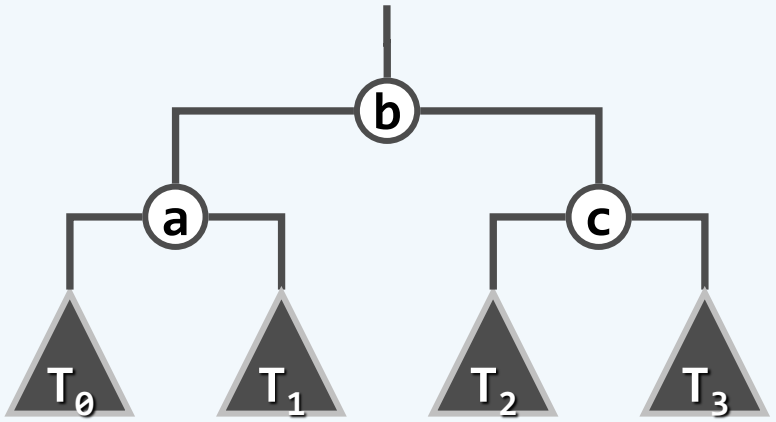
按中序遍历次序，将其重命名为：$T_0 < T_1 < T_2 < T_3$

❖ 将原先以g为根的子树S，替换为一棵新子树S'

root(S') = b

lc(b) = a　　rc(b) = c

lT(a) = T0　rT(a) = T1　lT(c) = T2　rT(c) = T3



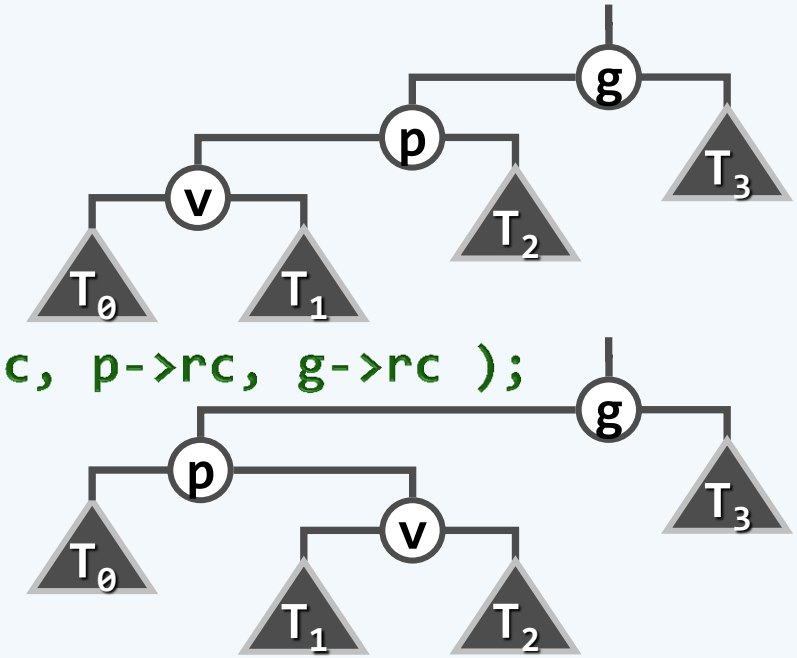
❖ 等价变换，保持中序遍历次序：$T_0 < a < T_1 < b < T_2 < c < T_3$

3+4重构：实现

```
❖template <typename T> BinNodePosi(T) BST<T>::connect34(
    BinNodePosi(T) a, BinNodePosi(T) b, BinNodePosi(T) c,
    BinNodePosi(T) T0, BinNodePosi(T) T1, BinNodePosi(T) T2, BinNodePosi(T) T3)
  {
    a->lc = T0; if (T0) T0->parent = a;
    a->rc = T1; if (T1) T1->parent = a; updateHeight(a);
    c->lc = T2; if (T2) T2->parent = c;
    c->rc = T3; if (T3) T3->parent = c; updateHeight(c);
    b->lc = a; a->parent = b;
    b->rc = c; c->parent = b; updateHeight(b);
    return b; //该子树新的根节点
  }
```

统一调整：实现

```
❖ template<typename T> BinNodePosi(T) BST<T>::rotateAt( BinNodePosi(T) v ) {
    BinNodePosi(T) p = v->parent, g = p->parent; //父亲、祖父
    if ( IsLChild( * p ) ) //zig
       if ( IsLChild( * v ) ) { //zig-zig
          p->parent = g->parent; //向上联接
          return connect34( v, p, g, v->lc, v->rc, p->rc, g->rc );
       } else { //zig-zag
          v->parent = g->parent; //向上联接
          return connect34( p, v, g, p->lc, v->lc, v->rc, g->rc );
       }
    else { /*.. zag-zig & zag-zag ..*/ }
 }
```



综合评价

❖ 优点　无论查找、插入或删除，最坏情况下的复杂度均为$O(\log n)$

$O(n)$的存储空间

❖ 缺点　借助高度或平衡因子，为此需改造元素结构，或额外封装

实测复杂度与理论值尚有差距

插入/删除后的旋转，成本不菲

删除操作后，最多需旋转$\Omega(\log n)$次（Knuth：平均仅0.21次）

若需频繁进行插入/删除操作，未免得不偿失

单次动态调整后，全树拓扑结构的变化量可能高达$\Omega(\log n)$

❖ 有没有更好的结构呢？　//保持兴趣