7.二叉搜索树

（b）算法及实现

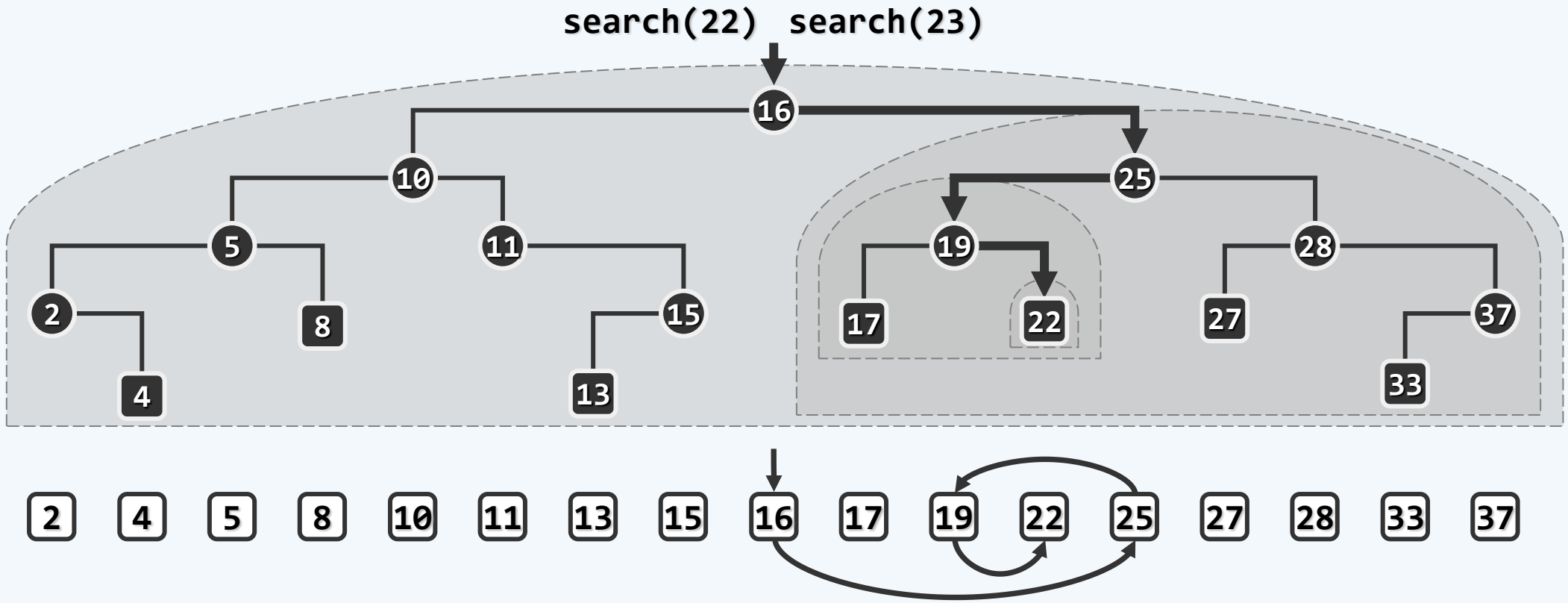
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

查找：算法

❖ **减而治之**　从根节点出发，逐步地缩小查找范围，直到

发现目标（成功），或查找范围缩小至空树（失败）



❖ 对照中序遍历序列可见，整个过程可视作是在**仿效**有序向量的**二分查找**

查找：实现

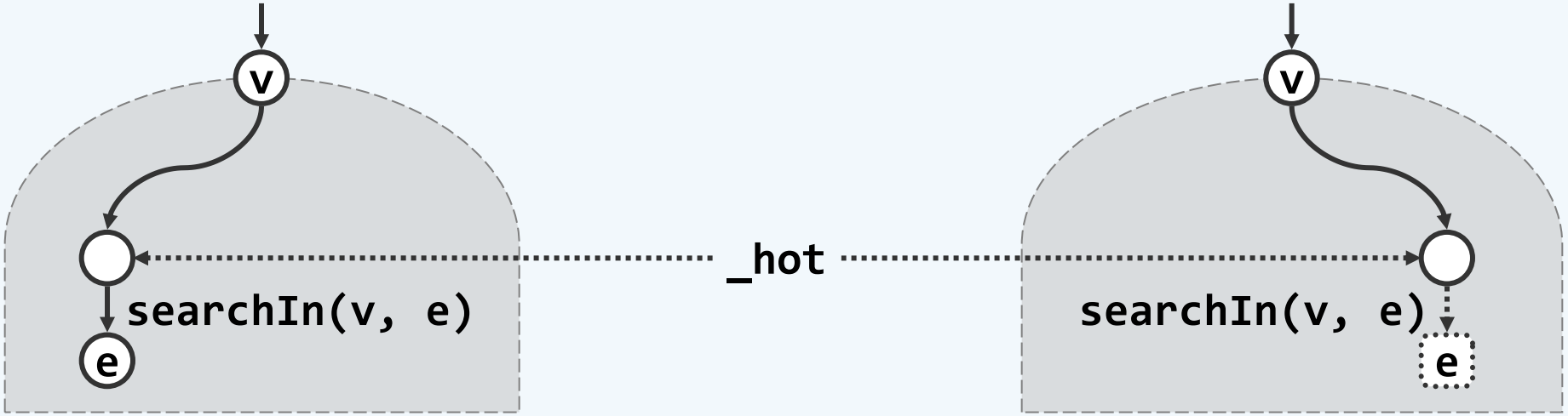
```
❖ template <typename T> BinNodePosi(T) & BST<T>::search(const T & e)
     { return searchIn( _root, e, _hot = NULL ); } //从根节点启动查找

❖ static BinNodePosi(T) & searchIn( //典型的尾递归，可改为迭代版
     BinNodePosi(T) & v,  const T & e, BinNodePosi(T) & hot) {
  // 当前（子）树根、目标关键码、记忆热点
     if ( !v || ( e == v->data ) ) return v; //足以确定失败、成功，或者
     hot = v; //先记下当前（非空）节点，然后再...
     return searchIn( ( e < v->data ? v->lc : v->rc ), e, hot );
  } //运行时间正比于返回节点v的深度，不超过树高O(h)
```

查找：接口语义

❖ 返回的引用值： 成功时，指向一个关键码为e且真实存在的节点

失败时，指向最后一次试图转向的空节点NULL



❖ 失败时，不妨假想地将此空节点，转换为一个数值为e的哨兵节点

如此，依然满足BST的充要条件；而且更重要地...

❖ 无论成功与否：返回值总是等效地指向命中节点，而_hot总是指向命中节点的父亲

插入：算法

- 先借助search(e)确定插入位置及方向

  再将新节点作为叶子插入

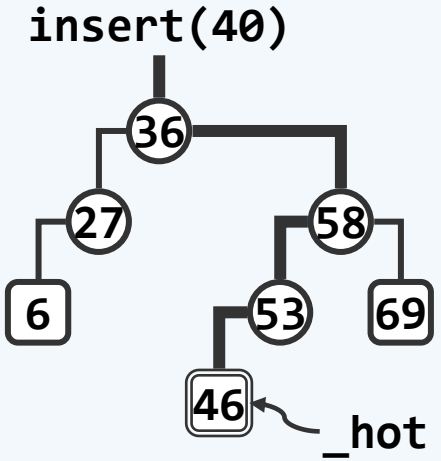
- 若e尚不存在，则

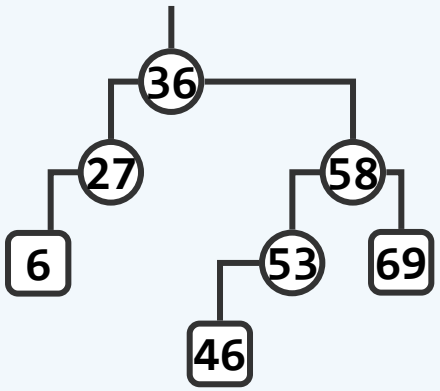
  _hot为新节点的父亲

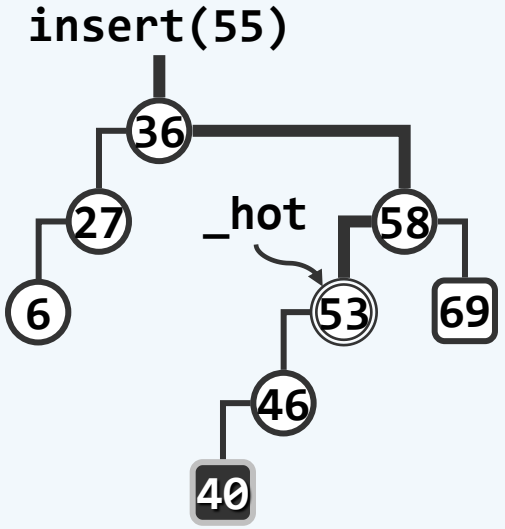
  v = search(e)为_hot对新孩子的引用

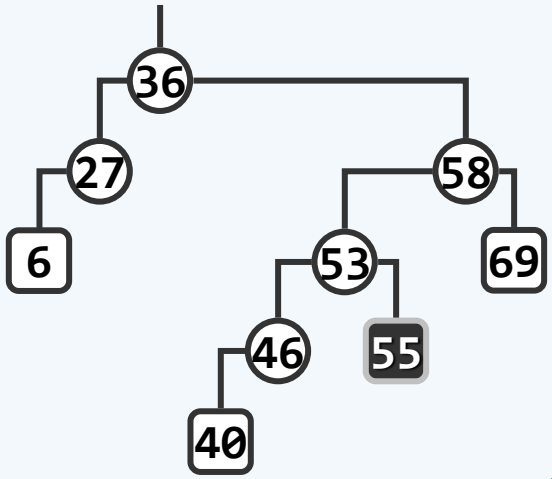
- 于是，只需

  令_hot通过v指向新节点









插入：实现

```
template <typename T> BinNodePosi(T) BST<T>::insert( const T & e ) {
    BinNodePosi(T) & x = search( e ); //查找目标（留意_hot的设置）
    if ( ! x ) { //既禁止雷同元素，故仅在查找失败时才实施插入操作
       x = new BinNode<T>( e, _hot ); //在x处创建新节点，以_hot为父亲
       _size++; updateHeightAbove( x ); //更新全树规模，更新x及其历代祖先的高度
    }
    return x; //无论e是否存在于原树中，至此总有x->data == e
} //验证：对于首个节点插入之类的边界情况，均可正确处置
```

- 时间主要消耗于search(e)和updateHeightAbove(x)

  均线性正比于返回节点x的深度，不超过树高O(h)

删除：算法

```
template <typename T> bool BST<T>::remove( const T & e ) {
    BinNodePosi(T) & x = search( e ); //定位目标节点
    if ( !x ) return false; //确认目标存在（此时_hot为x的父亲）
    removeAt( x, _hot ); //分两大类情况实施删除，更新全树规模
    _size--; //更新全树规模
    updateHeightAbove( _hot ); //更新_hot及其历代祖先的高度
    return true;
} //删除成功与否，由返回值指示
```

- 时间主要消耗于search()、updateHeightAbove()

  还有removeAt()中可能调用的succ()

  累计$O(h)$

删除：情况一

❖ 若*x（69）的某一子树为空

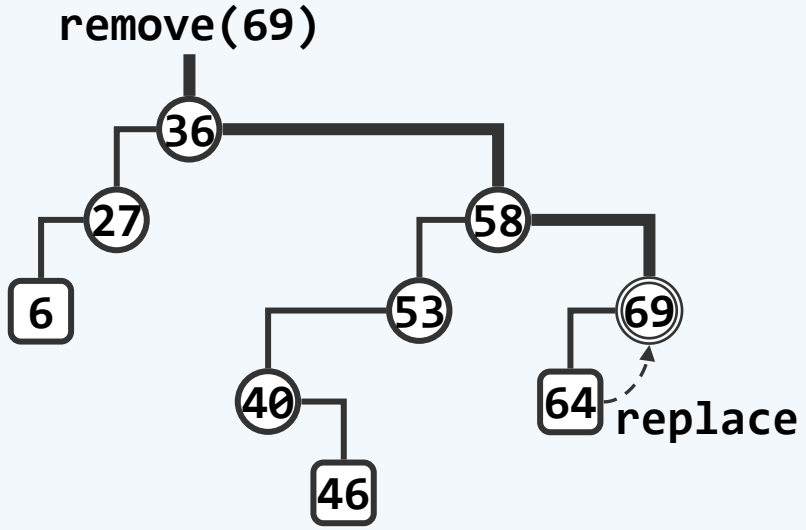
则可将其替换为另一子树（64）

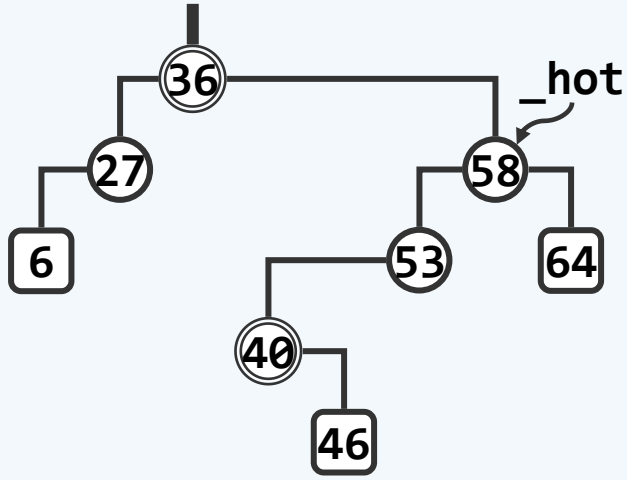
❖ 验证：

如此操作之后，二叉搜索树的

拓扑结构依然完整

顺序性依然满足





删除：情况一

```
❖ template <typename T> static BinNodePosi(T)
  removeAt( BinNodePosi(T) & x, BinNodePosi(T) & hot ) {
     BinNodePosi(T) w = x; //实际被摘除的节点，初值同x
     BinNodePosi(T) succ = NULL; //实际被删除节点的接替者
     if      ( ! HasLChild( *x ) ) succ = x = x->rChild; //左子树为空
     else if ( ! HasRChild( *x ) ) succ = x = x->lChild; //右子树为空
     else { /* ...左、右子树并存的情况，略微复杂些... */ }
     hot = w->parent; //记录实际被删除节点的父亲
     if ( succ ) succ->parent = hot; //将被删除节点的接替者与hot相联
     release( w->data ); release( w ); //释放被摘除节点
     return succ; //返回接替者
  } //此类情况仅需O(1)时间
```

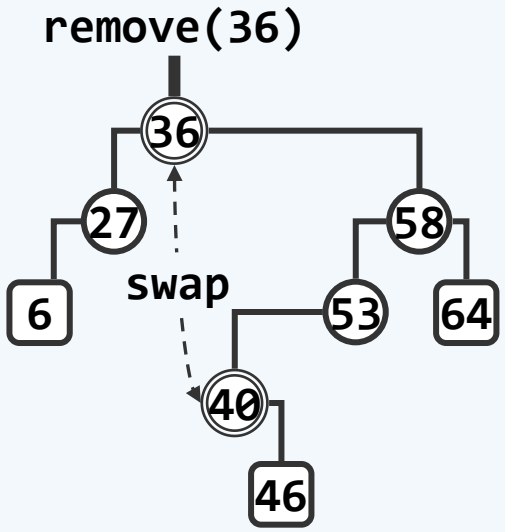
删除：情况二

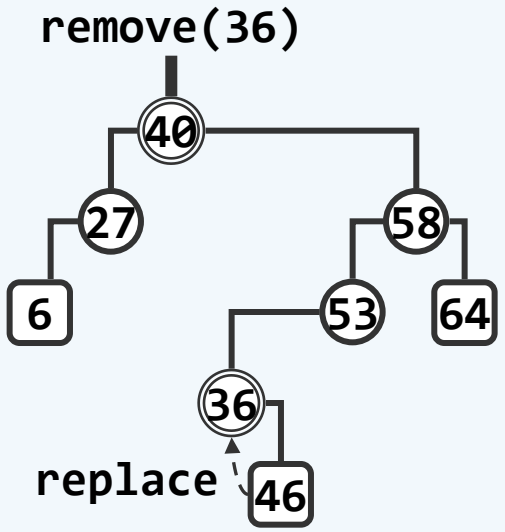
- 若：*x（36）左、右孩子并存

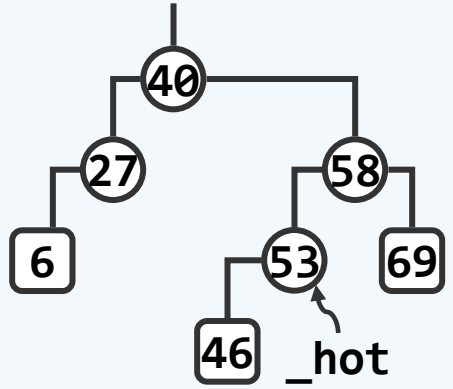
  则：调用BinNode::succ()找到x的直接后继（必无左孩子）；交换*x（36）与*w（40）

- 于是问题转化为删除w，可按前一情况处理

- 尽管顺序性曾在中途一度不合，但最终必将重新恢复







删除：情况二

```
template <typename T> static BinNodePosi(T)
removeAt( BinNodePosi(T) & x, BinNodePosi(T) & hot ) {
   /* ..... */
    else { //若x的左、右子树并存，则
       w = w->succ(); swap( x->data, w->data ); //令*x与其后继*w互换数据
       BinNodePosi(T) u = w->parent; //原问题即转化为，摘除非二度的节点w
       ( u == x ? u->rc : u->lc ) = succ = w->rc;
    }
   /* ..... */
}
```

- 时间主要消耗于succ()，正比于x的高度——更精确地，search()与succ()总共不过O(h)