7. 二叉搜索树

(c) 平衡与等价

邓俊辉

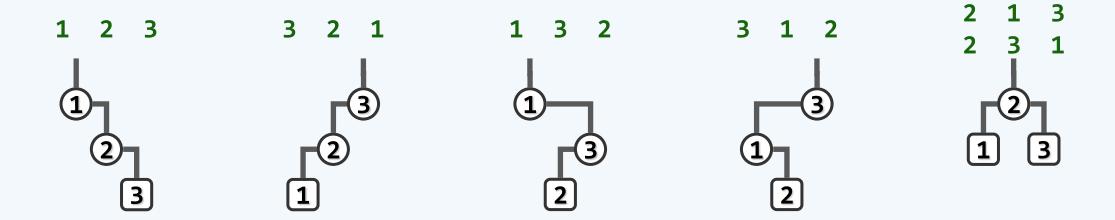
deng@tsinghua.edu.cn

树高

- ◆ 由以上的实现与分析, BST主要接口search()、insert()和remove()的运行时间 在最坏情况下,均线性正比于其高度 𝒪(h)
- ❖ 因此,若不能有效地控制树高,则就实际的性能而言 较之此前的向量和列表等数据结构,BST将无法体现出明显优势
- ❖ 比如在最坏情况下,二叉搜索树可能彻底地退化为列表 此时的查找效率甚至会降至 ○(n),线性正比于树(列表)的规模
- ❖ 那么,出现此类最坏或较坏情况的概率有多大?
 或者,从平均复杂度的角度看,二叉搜索树的性能究竟如何呢?
- ❖以下按两种常用的随机统计 口径 ,就BST的 平均性能 做一分析和对比

随机生成

- ❖ 考查n个互异词条{ e₁, e₂, ..., en }, 对任一排列σ = (e₁, e₁, e₁, ..., e₁n) ...
- ❖ 从空树开始,反复调用insert()接口将各词条 依次插入 ,得到T(σ)
- ❖与♂相对应的T(♂),称由♂随机生成(randomly generated)

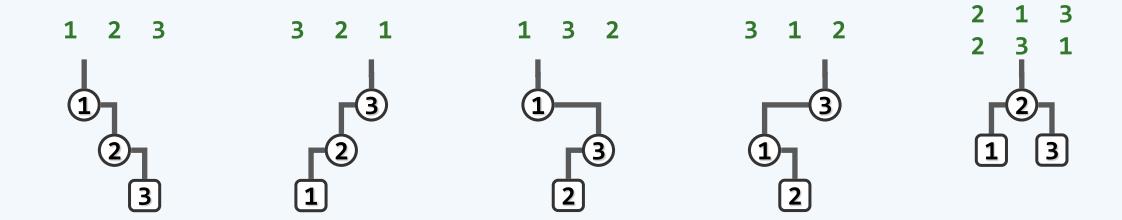


❖ 若假定任一排列σ作为输入的概率均等 1/n!

则由n个互异词条随机生成的二叉搜索树,平均高度为Θ(logn)

随机组成

- ❖ n个互异节点,在遵守顺序性的前提下,可随机确定拓扑联接关系
- ❖如此所得的BST,称由这组节点随机组成 (randomly composed)



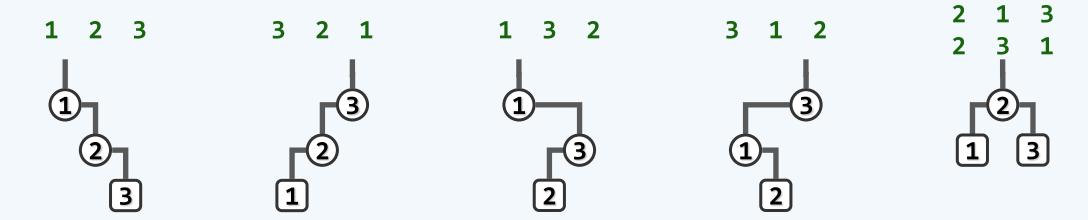
❖由n个互异节点随机组成的BST,若共计T(n)棵,则有

$$T(n) = \left| \sum_{k=1}^{n} SP(k-1) \cdot SP(n-k) \right| = Catalan(n) = (2n)! / (n+1)! / n!$$

 \diamond 假定所有BST等概率出现,则其平均高度为 $\Theta(\sqrt{n})$

$\Theta(\log n)$ vs. $\Theta(\operatorname{sqrt}(n))$

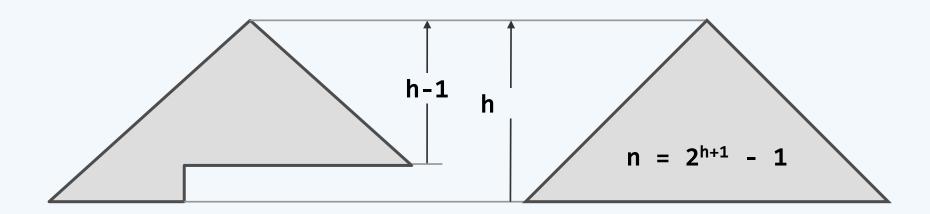
❖ 按两种口径所估计的平均性能,差异极大——谁更可信?谁更接近于真实情况?



- ❖ 前一口径中,越低的BST被 重复统计 更多次——故嫌过于 乐观
- ❖若删除算法固定使用<u>succ()</u>,则每棵BST都有越来越左倾的趋势
- ❖ 理想随机在实际中并不常见,关键码往往按单调 甚至 线性 的次序出现 极高 的BST频繁出现,不足为怪

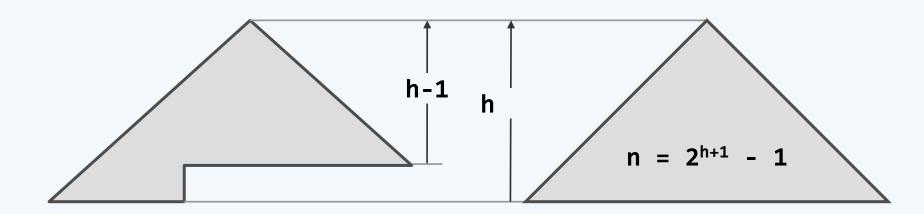
理想平衡

- ❖ 节点数目固定时,兄弟子树高度越接近(平衡),全树也将倾向于更低
- ❖ 由n个节点组成的二叉树,高度不低于Llog₂n」——恰为Llog₂n」时,称作理想平衡
- ❖ 大致相当于 完全树 甚至 满树:叶节点只能出现于最底部的两层——条件过于苛刻



适度平衡

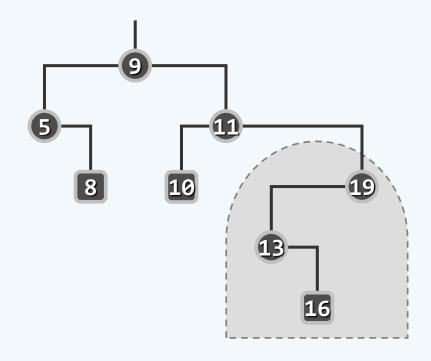
- ❖ 理想平衡出现 概率 极低、维护 成本 过高,故须适当地放松标准
- ❖ 退一步海阔天空 : 高度 渐进地 不超过 ℓ (logn),即可称作 适度平衡
- ❖ 适度平衡的BST,称作平衡二叉搜索树 (BBST)



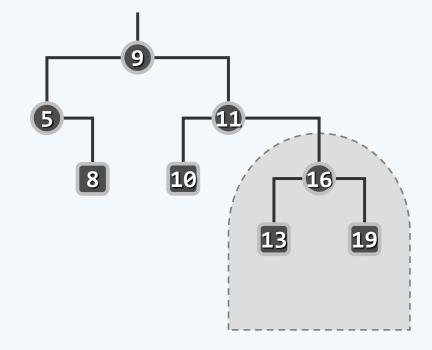
等价BST

❖ 上下可变 : 联接关系不尽相同,承袭关系可能颠倒

左右不乱:中序遍历序列完全一致,全局单调非降



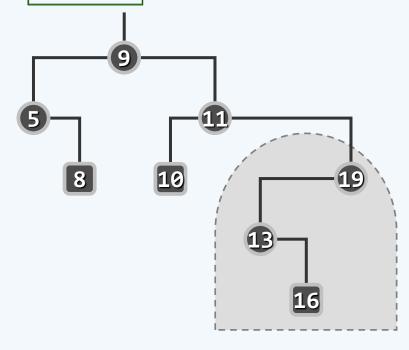
5 8 9 10 11 13 16 19



5 8 9 10 11 13 16 19

限制条件 + 局部性

- ❖ 各种BBST都可视作BST的某一子集,相应地满足精心设计的 限制条件
 - 1)单次动态修改操作后,至多 (1)处局部不再满足限制条件
 - 2)可在 Ø(logn) 时间内,使这些局部(以至全树)重新满足



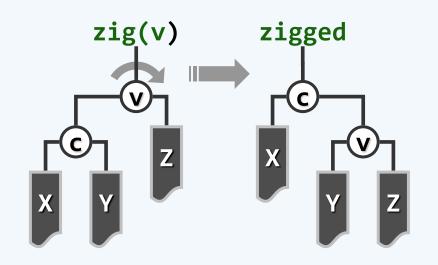
8 10 16 19

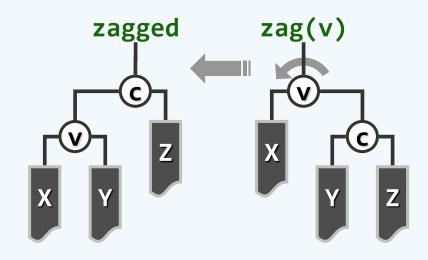
5 8 9 10 11 13 16 19

5 8 9 10 11 13 16 19

等价变换 + 旋转调整

❖ 刚刚失衡的BST,必可迅速 转换为一棵等价的BBST——为此,只需 O(logn) 甚至 O(1) 次旋转





- ❖ zig和zag:仅涉及 常数 个节点,只需调整其间的联接关系;均属于 局部 操作、 基本 操作
- ❖ 调整之后:v/c深度加/减1,子(全)树高度的变化幅度,上下 不超过1
- ❖ 实际上,经过不超过 Ø(n) 次旋转,等价的BST均可相互转化 习题解析[7-15]