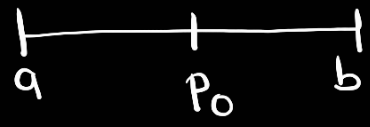
Convergencia Bisección

Sea $f \in C([a,b])$ con $f(a)f(b) < 0$ y llamamos p a una raíz de f en $[a,b]$

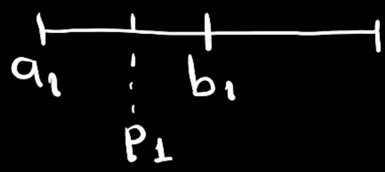
Sea $p_0 = \dfrac{a+b}{2}$



sin pérdida de generalidad asumimos que

$f(a)f(p_0) < 0$ entonces $a_1 = a$ y $b_1 = p_0$

Luego $|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b-a|$ y sabemos que $p \in [a_1, b_1]$



Ahora spg asumimos que $f(a_1)f(p_1) < 0$ entonces

$a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$

Luego $|b_2 - a_2| = \frac{1}{2}|b_1 - a_1| = \frac{1}{2^2}|b-a|$

y sabemos que $p \in [a_2, b_2]$.

continuamos así y concluimos que

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b-a| ,$$

$$p_n = \frac{b_n + a_n}{2} \in [a_n, b_n] \quad \text{y} \quad p \in [a_n, b_n]$$

Por lo tanto $|p_n - p| \leq |b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b-a|$

$$\boxed{p_n = p \pm \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)}$$