

等概率随机函数的实现

题目：已知随机函数 `rand()`，以 p 的概率产生 0，以 $1-p$ 的概率产生 1，现在要求设计一个新的随机函数 `newRand()`，使其以 $1/n$ 的等概率产生 $1 \sim n$ 之间的任意一个数。

解决思路：可以通过已知随机函数 `rand()` 产生等概率产生 0 和 1 的新随机函数 `Rand()`，然后调用 k (k 为整数 n 的二进制表示的位数) 次 `Rand()` 函数，得到一个长度为 k 的 0 和 1 序列，以此序列所形成的整数即为 $1 \sim n$ 之间的数字。注意：从产生序列得到的整数有可能大于 n ，如果大于 n 的话，则重新产生直至得到的整数不大于 n 。

第一步：由 `rand()` 函数产生 `Rand()` 函数，`Rand()` 函数等概率产生 0 和 1。

```
1. int Rand()
2. {
3.     int i1 = rand();
4.     int i2 = rand();
5.     if(i1==0 && i2==1)
6.         return 1;
7.     else if(i1==1 && i2==0)
8.         return 0;
9.     else
10.        return Rand();
11.    return -1;
12.}
```

第二步：计算整数 n 的二进制表示所拥有的位数 k ， $k = 1 + \log_2 n$ (\log 以 2 为底 n)

第三步：调用 k 次 `Rand()` 产生随机数。

```
1. int newRand()
2. {
```

```

3.  int result = 0;
4.  for(int i = 0 ; i < k ; ++i)
5.  {
6.      if(Rand() == 1)
7.          result |= (1<<i);
8.  }
9.  if(result > n)
10.     return newRand();
11. return result;
12.}

```

题目：

给定一个函数 rand5(), 该函数可以随机生成 1-5 的整数, 且生成概率一样。现要求使用该函数构造函数 rand7(), 使函数 rand7() 可以随机等概率的生成 1-7 的整数。

思路：

很多人的第一反应是利用 rand5() + rand()%3 来实现 rand7() 函数, 这个方法确实可以产生 1-7 之间的随机数, 但是仔细想想可以发现数字生成的概率是不相等的。rand()%3 产生 0 的概率是 1/5, 而产生 1 和 2 的概率都是 2/5, 所以这个方法产生 6 和 7 的概率大于产生 5 的概率。

正确的方法是利用 rand5() 函数生成 1-25 之间的数字, 然后将其中的 1-21 映射成 1-7, 丢弃 22-25。例如生成 (1, 1), (1, 2), (1, 3), 则看成 rand7() 中的 1, 如果出现剩下的 4 种, 则丢弃重新生成。

简单实现：

```

1. int rand7()
2. {
3.     int x = 0;
4.     do
5.     {
6.         x = 5 * (rand5() - 1) + rand5();

```

```

7.     }while(x > 21);

8.     return 1 + x%7;

9. }

```

我的备注：

这种思想是基于，`rand()`产生 $[0, N-1]$ ，把`rand()`视为 N 进制的一位数产生器，那么可以使用 `rand()*N+rand()`来产生 2 位的 N 进制数，以此类推，可以产生 3 位，4 位，5 位...的 N 进制数。这种按构造 N 进制数的方式生成的随机数，必定能保证随机，而相反，借助其他方式来使用 `rand()`产生随机数(如 `rand5() + rand()%3`)都是不能保证概率平均的。

此题中 N 为 5，因此可以使用 `rand5()*5+rand5()`来产生 2 位的 5 进制数，范围就是 1 到 25。再去掉 22-25，剩余的除 3，以此作为 `rand7()`的产生器。

给定一个函数 `rand()`能产生 0 到 $n-1$ 之间的等概率随机数，问如何产生 0 到 $m-1$ 之间等概率的随机数？

```

1. int random(int m , int n)

2. {

3.     int k = rand();

4.     int max = n-1;

5.     while(k < m)

6.     {

7.         k = k*n + rand();

8.         max = max*n + n-1;

9.     }

10.    return k/(max/n);

11.}

```

如何产生如下概率的随机数？0 出 1 次，1 出现 2 次，2 出现 3 次， $n-1$ 出现 n 次？

```

1. int random(int size)

2. {

```

3. **while(true)**

4. {

5. **int** m = rand(size);

6. **int** n = rand(size);

7. **if**(m + n < size)

8. **return** m+n;

9. }

10. }