TD 2 : Logique propositionnelle — syntaxe et sémantique

Exercice 1 – Formules de la logique propositionnelle

▶ **Question 1** Parmi les expressions suivantes, quelles sont les formules de la logique propositionnelle ? Représenter les formules sous forme d'arbre.

1. $r \lor (p \land \neg((\land q) \to \neg r))$
2. $p \land (r \land ((\neg q) \to \neg p))$
3. $((q \lor \neg p) \to (\neg\neg q \lor \neg p)) \land r$
4. $((q \lor p)\neg q \land p) \to r$
5. $\forall x\, p(x) \land q(x)$
6. $(\neg p \lor p \lor q) \to (\neg r \land \neg q)$

Exercice 2 – Encore des inductions

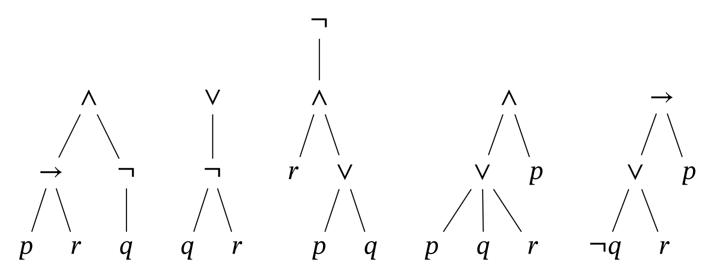
▶ **Question 1** Définir par induction le nombre d'occurences d'une variable propositionnelle dans une formule.

▶ **Question 2** Définir par induction l'ensemble des propositions apparaissant dans une formule.

▶ **Question 3** Définir par induction le nombre de connecteurs logiques d'une formule.

Exercice 3 – Arbre syntaxique et formules

Parmi les arbres suivants, repérer les arbres syntaxiques de la logique propositionnelle et les traduire en formules.



Exercice 4 – Ensemble des modèles d'une formule

▶ **Question 1** Calculez l'ensemble des modèles de la formule $((p \to q) \lor (\neg p \to \neg q)) \land ((q \land r) \to \neg p)$.

▶ **Question 2** Proposer une définition par induction de l'ensemble des modèles d'une formule φ. On notera $Mod(\varphi)$ la fonction que l'on définit par induction.

▶ **Question 3** Montrer que cette définition inductive de l'ensemble des modèles est la même que la définition d'un modèle du cours, c'est-à-dire pour toute valuation ν :

$$\nu \vDash \varphi \text{ ssi } \nu \in Mod(\varphi)$$

Exercice 5 – Complétude fonctionnelle

On va compléter la Remarque 27 pour démontrer la propriété suivante :

Propriété 1

Supposons que $\mathcal{P}$ est fini. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des valuations sur $\mathcal{P}$. Alors, à toute fonction $f : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$ correspond la sémantique d'une formule propositionnelle sur $\mathcal{P}$, c'est-à-dire : il existe φ telle que pour toute valuation $\nu \in \mathcal{V}$, on a $\nu \vDash \varphi$ si et seulement si $f(\nu) = \texttt{vrai}$.

▶ **Question 1** Pour $\mathcal{P} = \{p_1\}$, quelles sont toutes les fonctions possibles de $\mathcal{V}$ vers $\mathbb{B}$? Écrire des formules représentant ces fonctions.

▶ **Question 2** Montrer la Propriété 1. *Indication : on peut le montrer par récurrence sur le nombre de variables propositionnelles dans $\mathcal{P}$.*

▶ **Question 3** Est-ce que cela reste vrai si $\mathcal{P}$ est infini ?

Exercice 6 – Le théorème de lecture unique démontré

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de lecture unique écrit en cours. Cette fois-ci, on considère que les mots utilisent l'alphabet $\Sigma = \mathcal{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}$. On reprend les définitions de préfixe, de $|\cdot|_($ et $|\cdot|_)$. On ajoute la définition suivante : un *préfixe propre* d'un mot u est est un préfixe de u non vide et non égale à u.

▶ **Question 1** Montrer que pour toute formule φ vue comme un mot de Σ^*, on a $|\varphi|_(= |\varphi|_)$.

▶ **Question 2** Soit φ une formule et u un préfixe de φ vu comme un mot de Σ^*. Montrer que $|u|_(\geq |u|_)$.

▶ **Question 3** Soit φ une formule, et supposons que son premier symbole est "(". Soit u un préfixe propre de φ. Montrer que $|u|_(> |u|_)$.

▶ **Question 4** Montrer qu'un préfixe propre d'une formule est une formule.

▶ **Question 5** Montrer le théorème de lecture unique.

Si ce n'est pas déjà fait, on peut corriger les Exercices II à IV. Ensuite, on peut faire l'Exercices V et VI. Ensuite :

Exercice 7 – Fonction parité

On souhaite étudier la taille d'une formule φ_n sur les variables propositionnelles $\mathcal{P}_n = \{p_1, \dots, p_n\}$ qui représente la fonction parité :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathcal{V} & \rightarrow & \{0,1\} \\ & \nu & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \delta_{\nu(p_i)}^{\mathtt{vrai}} \mod 2. \end{array}$$

avec $\delta_{b_1}^{b_2} = 1$ si $b_1 = b_2$, et $\delta_{b_1}^{b_2} = 0$ sinon. Pour cet exercice, on va avoir besoin de la notation $\mathcal{O}$: pour $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathcal{O}(g)$ est l'ensemble des fonctions majorées par une constante fois g sur $\mathbb{N}$. Quand on l'utilise à l'intérieur d'une expression mathématique, $\mathcal{O}(g)$ désigne un de ses éléments : par exemple, on pourra écrire $g_1(n) = g_2(n) + \mathcal{O}(g(n))$ (même si cette notation est complètement impropre).

▶ **Question 1** Donner une formule φ_n de taille quadratique (c.-à-d. dans $\mathcal{O}(n^2)$) dont la sémantique corespond à la fonction parité (en assimilant `vrai` à 1 et `faux` à 0). *Indication : pour une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \leq 4g(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + h(n)$ et $h \in \mathcal{O}(1)$, on a g quadratique.*

▶ **Question 2** Montrer que toute formule en forme normale disjonctive qui représente la fonction parité est de taille supérieure ou égale à $n2^{n-1}$.

▶ **Question 3** Montrer qu'il en est de même pour une forme normale conjonctive.

Les étudiants intéressés pourront lire la démonstration dans le livre de Arora et Barak, *Computational Complexity — A Modern Approach*, p. 287.

Exercice 8 – Transformation de Tseitin

On cherche à montrer que, pour toute formule φ du calcul propositionnel, il existe une formule $tr(\varphi)$ sous forme normale conjonctive (CNF) de taille $\mathcal{O}(|\varphi|)$ et telle que φ et $tr(\varphi)$ sont *équisatisfaisables* (c'est-à-dire φ est satisfaisable ssi $tr(\varphi)$ est satisfaisable), avec $tr(\varphi)$ calculable en temps polynomial en la taille de φ.

▶ **Question 1** Expliquer pourquoi on peut supposer sans perte de généralité que φ ne possède que les connecteurs $\wedge, \vee, \neg$.

On note $SF(\varphi)$ l'ensemble des sous-formules de φ (y compris φ). On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables de φ.

Pour toute sous-formule $\psi \in SF(\varphi)$, on introduit une nouvelle variable propositionnelle p_ψ. La lecture intuitive de p_ψ est ψ est vraie.

▶ **Question 2** Trouver des formules équivalentes à $p_{\psi_1 \bowtie \psi_2} \leftrightarrow p_{\psi_1} \bowtie p_{\psi_2}$ sous CNF pour $\bowtie \in \{\wedge, \vee\}$ et une formule équivalente à $p_{\neg\psi} \leftrightarrow \neg p_\psi$ sous CNF. On appelle respectivement ces formules $tr'(\psi_1 \bowtie \psi_2)$ et $tr'(\neg\psi)$.

On pose :

$$tr(\varphi) = p_\varphi \wedge \bigwedge_{\psi \in SF(\varphi) \setminus \mathcal{P}} tr'(\psi)$$

▶ **Question 3** Montrer que $tr(\varphi)$ est de taille $O(|\varphi|)$.

▶ **Question 4** Montrer que φ et $tr(\varphi)$ sont équisatisfaisables.