TD 1.1 : Induction — suite et fin

1. Encore des définitions par induction

Décrire explicitement les ensembles définis par induction suivants :

- Pour $\Sigma = \{a, b, c\}$, soit $L_1 \subseteq \Sigma^*$ tel que $b \in L_1$ et si $u \in L_1$, alors $a \cdot u \cdot c \in L_1$.[1]
- Pour Σ un ensemble de symboles, soit $L_2 \subseteq \Sigma^*$ tel que $\varepsilon \in L_2$ et si $u \in L_2$ et $\ell, \ell^{'} \in \Sigma$, alors $\ell \cdot u \cdot \ell^{'} \in L_2$.
- Pour Σ un ensemble de symboles, soit $L_2 \subseteq \Sigma^*$ tel que $\Sigma \cup \{\varepsilon\} \subseteq L_3$ et si $u \in L_3$ et $\ell \in \Sigma$, alors $\ell \cdot u \cdot \ell \in L_3$.

2. La fonction d'Ackermann est bien définie

On reprend le principe d'induction bien fondée défini dans le TD 1.

2.1 Rappeler la définition de l'ordre lexicographique sur l'ensemble $\mathbb{N}^2$. *Dans la suite, on le note* $\leq_{lex}$.

2.2 Montrer par induction bien fondée que l'algorithme suivant *termine*, c'est-à-dire que la séquence d'instructions exécutées dans l'algorithme sur toute entrée est finie (pas de "boucles infinies") :

Pseudo-code

```
Données : n, m ∈ ℕ
Ackermann (n, m)
    si n = 0 alors
        retourner m + 1
    sinon si m = 0 alors
        retourner Ackermann(n − 1,1)
    sinon
        k ← Ackermann(m,n − 1)
        retourner Ackermann(n − 1, k)
```

Indication : on peut utiliser dans cette question que $\leq_{lex}$ *est bien fondé.*

2.3 Écrire explicitement la sortie de `Ackermann(1,k)`, `Ackermann(2,k)` et `Ackermann(3,k)` pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2.4 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que `Ackermann(n,m)` $> m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

La fonction d'Ackermann calculée par cet algorithme est l'exemple classique de fonction *non primitive récursive* : il n'existe pas d'algorithme (n'utilisant pas d'appels récursifs) calculant cette fonction sans utiliser de boucles non bornées, i.e. sans utiliser de **while**. Le montrer est cependant un exercice difficile.

1. $\cdot$ étant le symbole de concaténation de deux mots.