Existence et unicité de la signature de S_n (preuve non exigible)

Il existe un unique morphisme de groupes ε de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \times)$ qui envoie les transpositions sur -1. Il est défini par :

$$\forall \sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

où

$$A = \left\{ \{i,j\} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \right\}.$$

Ce morphisme de groupes est appelé **signature** de S_n.

Preuve :

☐ Montrons que ε est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ vers $\{-1,1\}$.

On remarque d'abord que ε est bien définie car, pour tout $\{i,j\} \in A$, on a $i \neq j$.

— Soit $\sigma \in S_n$.

  $\Psi_\sigma : \{i,j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ est une bijection de A vers A (de réciproque $\Psi_{\sigma^{-1}}$) donc, avec le changement d'indice $\{k,l\} = \psi_\sigma(\{i,j\})$, on a $\prod\limits_{\{i,j\} \in A} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod\limits_{\{k,l\} \in A} |k - l| = \prod\limits_{\{i,j\} \in A} |j - i|$

  donc $\dfrac{\prod\limits_{\{i,j\} \in A} |\sigma(j) - \sigma(i)|}{\prod\limits_{\{i,j\} \in A} |j - i|} = 1$ ce qui donne bien $\varepsilon(\sigma) \in \{-1,1\}$.

— Soit $(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2$.

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma \circ \sigma'(j) - \sigma \circ \sigma'(i)}{j - i} = \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma \circ \sigma'(j) - \sigma \circ \sigma'(i)}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \times \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i}$$

  Avec le changement d'indice $\{k,l\} = \psi_{\sigma'}(\{i,j\})$, on a :

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \prod_{\{k,l\} \in A} \frac{\sigma(k) - \sigma(l)}{k - l} \times \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma')$$

  ce qui donne bien que ε est un morphisme de groupes.

Conclusion : ε est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ vers $\{-1,1\}$.

☐ Montrons que ε envoie toute transposition de S_n vers -1.

Soit $\tau = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in S_n$ une transposition avec $a < b$ et $\{i,j\} \in A$.

— Si $i \in \{a, b\}$ et $j \in \{a, b\}$ alors

$$\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=\frac{\tau(b)-\tau(a)}{b-a}=\frac{a-b}{b-a}=-1$$

— Si $i \notin \{a, b\}$ et $j=a$ alors
$$\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=\frac{\tau(a)-\tau(i)}{a-i}=\frac{b-i}{a-i}$$

— Si $i \notin \{a, b\}$ et $j=b$ alors
$$\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=\frac{\tau(b)-\tau(i)}{b-i}=\frac{a-i}{b-i}$$

— Si $i \notin \{a, b\}$ et $j \notin \{a, b\}$ alors
$$\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=\frac{j-i}{j-i}=1.$$

Les ensembles
$$A_1=\{\{a, b\}\}, A_2=\{\{i, j\} \in A \mid i \notin\{a, b\} \text{ et } j \in\{a, b\}\}$$
et
$$A_3=\{\{i, j\} \in A \mid i \notin\{a, b\} \text{ et } j \notin\{a, b\}\}$$
formant une partition de A, on en déduit que :

$$\varepsilon(\tau)=\prod_{\{i, j\} \in A_1} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \times \prod_{\{i, j\} \in A_2} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \times \prod_{\{i, j\} \in A_3} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$

donc que
$$\varepsilon(\tau)=-1 \times \prod_{\{i, j\} \in A_2} \underbrace{\left(\frac{b-i}{a-i} \times \frac{a-i}{b-i}\right)}_{=1} \times \prod_{\{i, j\} \in A_3} 1$$

et enfin $\varepsilon(\tau)=-1$.

□ Montrons que ε est l'unique morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ vers $\{-1,1\}$ qui envoie les transpositions sur -1.

Supposons qu'il existe un autre morphisme de groupes, noté ε', de $(S_n, \circ)$ vers $\{-1,1\}$ qui envoie les transpositions sur -1.

Soit $\sigma \in S_n$. Alors σ peut s'écrire comme composée de p transpositions notées $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$:

$$\sigma=\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p$$

Alors, par hypothèse sur les applications ε et ε', on a :

$$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon\left(\tau_1\right) \varepsilon\left(\tau_2\right) \ldots \varepsilon\left(\tau_p\right)=(-1)^p \text{ et } \varepsilon'(\sigma)=\varepsilon'\left(\tau_1\right) \varepsilon'\left(\tau_2\right) \ldots \varepsilon'\left(\tau_p\right)=(-1)^p$$

donc $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon'(\sigma)$.

Conclusion : $\varepsilon=\varepsilon'$ d'où l'unicité du morphisme de groupes vérifiant les conditions souhaitées.