Unicité d'un développement limité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et a un **RÉEL**, point ou une extrémité de I.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

S'il existe des éléments $b_0, ..., b_n$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors ces éléments sont uniques.

Preuve

On raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe $(b_0, ..., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(c_0, ..., c_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $(b_0, ..., b_n) \neq (c_0, ..., c_n)$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$
$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

On note p le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ tel que $b_p \neq c_p$.

Puisque $b_k = c_k$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, on a alors :

$$b_p(x-a)^p + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) = \underset{x\to a}{=} c_p(x-a)^p + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Après division par $(x-a)^p$ sur un voisinage de a privé de a, on trouve :

$$b_p + \cdots + b_n(x-a)^{n-p} + o\left((x-a)^{n-p}\right) = c_p + \cdots + c_n(x-a)^{n-p} + o\left((x-a)^{n-p}\right)$$

Par passage à la limite en a dans cette égalité, on obtient

$$b_p = c_p$$

ce qui est faux par hypothèse sur b_p et c_p.

On en déduit que l'hypothèse initiale est fausse ce qui permet de conclure.

Conclusion : si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a alors il est unique.

Forme du développement limité d'une fonction paire/impaire

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose ici que I est **centré en 0.**

Si $f : I \to \mathbb{K}$ admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ **en 0** et que

1. f est paire alors la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0))$ ne comporte que des monômes pairs.
2. f est impaire alors la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0))$ ne comporte que des monômes impairs.

Preuve

On se place dans le cas où f est paire (preuve facile à adapter pour f impaire) et où f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ **en 0.**

Alors, il existe $(b_0, ..., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o\left(x^n\right)$$

Par composition **à droite** par la fonction $h : x \mapsto -x$, on trouve :

$$f(-x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (-x)^k + o\left(x^n\right)$$

donc

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k x^k + o\left(x^n\right)$$

car f est paire.

Par unicité d'écriture du développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de f en 0, on en déduit :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], b_k = (-1)^k b_k$$

ce qui donne, pour tous les k impairs, $b_k = -b_k$ donc $b_k = 0$. Les coefficients de tous les monômes impairs dans le développement limité de f en 0 sont donc nuls.

Conclusion : la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0))$ de f ne comporte que des monômes pairs.

Primitivation d'un développement limité

Théorème
Soit $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction et a un **RÉEL appartenant à I.**

Si f est dérivable sur I et si f' admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de la forme

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en a qui est

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \frac{c_0}{1}(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Preuve **(dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$)**

Montrons que $g(x) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^{n+1}\right)$ avec la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$.

D'après les théorèmes généraux, g est dérivable sur I de dérivée $g' : x \mapsto f'(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$.

D'après l'hypothèse faite sur f', on a donc $g'(x) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$. $(*)$

☐ Soit $x \in I \cap]a, +\infty[$. Alors g est continue sur le segment $[a, x]$, dérivable sur $]a, x[$ et à valeurs réelles. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe donc $c_x \in]a, x[$ tel que $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(c_x)$.

☐ On peut faire de même avec $x \in I \cap]-\infty, a[$ en travaillant sur $[x, a]$ et $]x, a[$.

Ainsi, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, il existe $c_x \in I \setminus \{a\}$ tel que $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(c_x)$ avec $|c_x - a| \leq |x - a|$.

On a donc $c_x \underset{x \to a}{\longrightarrow} a$ (par théorème d'encadrement) et on peut écrire :

$$\frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \times \frac{1}{(x-a)^n} = \frac{g'(c_x)}{(x-a)^n} = \frac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n} \times \frac{(c_x-a)^n}{(x-a)^n}$$

avec :

- $\dfrac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ par composition de limites, car $c_x \underset{x \to a}{\longrightarrow} a$ et $\dfrac{g'(t)}{(t-a)^n} \underset{t \to a}{\longrightarrow} 0$ d'après $(*)$;
- $x \mapsto \left|\dfrac{(c_x-a)^n}{(x-a)^n}\right|$ bornée (par 1) sur voisinage de a privé de a.

Ainsi $\dfrac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ donc $g(x) - g(a) = o\left((x-a)^{n+1}\right)$ puis $g(x) = o\left((x-a)^{n+1}\right)$ car $g(a) = 0$.

En revenant à la définition de g, cela donne $f(x) - f(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^{n+1}\right)$ ce qui permet de conclure.

Conclusion : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$.

(ie on peut toujours primitiver un DL terme à terme)

Théorème de Taylor-Young

Théorème

Soit $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction et a un **RÉEL appartenant à I.**

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

ce qui peut s'écrire encore

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Preuve

On peut procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour montrer la propriété suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}), f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Initialisation

On a déjà vu que : $\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}), f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$ (par continuité de f en a) donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n.

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$.

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à f' car f' appartient à $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$. Cela donne :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(f'\right)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Par théorème de primitivation des développements limités, on en déduit que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

ce qui donne après changement d'indice

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^{n+1}\right) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.