MATHÉMATIQUES MP2I 2022-2023

Ce document rassemble les polycopiés de cours de mathématiques distribués dans l'année 2022-2023.

Il ne se suffit pas à lui-même car il ne contient vraiment que l'essentiel (définitions, propriétés, théorèmes) et quelques remarques ponctuelles. C'est donc un condensé du cours mais ce n'est pas le cours.

Le cours est construit, notamment en séance, et nécessite une prise de notes complémentaires (commentaires, exemples, exercices emblématiques ou preuves de résultats).

Si vous repérez des coquilles dans ce document (il y en a certainement), merci de me les signaler.

⋆ ⋆ ⋆

Progression suivie

1. Petits systèmes linéaires et méthode du pivot
2. Sommes et produits finis
3. Inégalités
4. Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles
5. Trigonométrie
6. Fonctions usuelles
7. Nombres complexes (1)
8. Calculs de primitives
9. Nombres complexes (2)
10. Équations différentielles linéaires
11. Compléments sur les réels
12. Suites numériques
13. Suites numériques particulières
14. Ensembles et applications
15. Limite et continuité des fonctions numériques

16. Calculs matriciels et système linéaires
17. Dérivabilité des fonctions numériques
18. Arithmétique sur $\mathbb{Z}$
19. Relations binaires
20. Structures algébriques usuelles
21. Polynômes y compris arithmétique des polynômes
22. Fonctions convexes .... Fin du semestre 1

23. Espaces vectoriels .... Début du semestre 2
24. Espaces vectoriels de dimension finie
25. Analyse asymptotique (1)
26. Applications linéaires (1)
27. Analyse asymptotique (2)
28. Séries numériques
29. Fractions rationnelles
30. Applications linéaires et matrices (2)
31. Groupe symétrique
32. Déterminants
33. Dénombrement
34. Probabilités et variables aléatoires sur un univers fini
35. Espaces préhilbertiens réels
36. Intégration sur un segment
37. Espérance et variance d'une variable aléatoire
38. Familles numériques sommables
39. Fonctions de deux variables

CHAPITRE 1

PETITS SYSTÈMES LINÉAIRES ET MÉTHODE DU PIVOT

I Définitions

1 Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Soit (a, b, c, a', b', c') un $6-$uplet de réels. Le système d'équations

$$(S) : \left\{ \begin{array}{cccc} ax & + & by & = c \\ a'x & + & b'y & = c' \end{array} \right.$$

d'inconnues les réels x et y est dit système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Interprétation géométrique
Lorsque $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$, résoudre ce système revient à déterminer l'intersection entre deux droites du plan.

2 Système linéaire de trois équations à trois inconnues

Soit $(a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'')$ un 12-uplet de réels. Le système d'équations

$$(S) : \left\{ \begin{array}{cccccc} ax & + & by & + & cz & = d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = d' \\ a''x & + & b''y & + & c''z & = d'' \end{array} \right.$$

d'inconnues les réels x, y et z est dit système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Interprétation géométrique
Lorsque $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ et $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$, résoudre ce système revient à déterminer l'intersection entre trois plans de l'espace.

3 Remarque

En cycle terminal, ces systèmes ont été rencontrés et résolus dans des cas simples, le plus souvent en utilisant la méthode de “substitution”.

II Algorithme du pivot

1 Opérations élémentaires

On reprend les notations du paragraphe précédent et on note L_i la $i-$ ème ligne du système (S).

On appelle opérations élémentaires sur les lignes du système linéaire (S) :

1. l'échange de deux lignes distinctes :
$$L_i \leftrightarrow L_j \text{ avec } i \neq j.$$
2. la multiplication d'une ligne par un réel non nul :
$$L_i \leftarrow \lambda L_i \text{ avec } \lambda \neq 0.$$
3. l'addition à une ligne du produit d'une autre ligne par un réel non nul :
$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \text{ avec } i \neq j \text{ et } \lambda \neq 0.$$

2 Propriété importante

Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire le transforme en un système linéaire ayant le même ensemble de solutions.

3 Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot

— Phase de descente

Par opérations élémentaires sur les lignes du système linéaire (S), on peut obtenir un système linéaire (S') de forme triangulaire comme par exemple :

$$(S') : \left\{ \begin{array}{rcrl} a_1x & + & b_1y & = c_1 \\ & & b_1'y & = c_1' \end{array} \right. \quad \text{ou } (S') : \left\{ \begin{array}{rcrcrl} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = d_1 \\ & & b_1'y & + & c_1'z & = d_1' \\ & & & & c_1''z & = d_1'' \end{array} \right.$$

— Phase de remontée

Le système triangulaire (S') obtenu est équivalent à (S). Il est facile à résoudre ce qui permet d'obtenir l'ensemble des solutions de (S).

Dans cette phase de remontée, on peut au choix :
— effectuer des substitutions successives ;
— utiliser des opérations élémentaires sur les lignes pour réduire le système sous forme diagonale.

Remarque
Les opérations élémentaires effectuées lors de la résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot doivent être indiquées en marge du système étudié.

CHAPITRE 2

SOMMES ET PRODUITS FINIS

I Généralités

Dans cette partie, sauf mention contraire, I désigne un ensemble **fini.**

1 Notations

Soit$(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I.

La somme (resp. le produit) de tous les réels de la famille $(a_i)_{i\in I}$ est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ (resp. noté $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$).

Remarques

- Si I est l'ensemble vide, on convient que : $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i = 1$.
- Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ avec n un entier naturel non nul, on écrit aussi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ pour condenser les écritures $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.

2 Propriétés

2.1 Opérations

Pour toutes familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ de réels indexées par I et tout couple (α, β) de réels, on a :

$$\sum_{i\in I} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \left(\sum_{i\in I} a_i\right) + \beta \left(\sum_{i\in I} b_i\right) \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} (a_i b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{i\in I} b_i\right)$$

2.2 Calcul par paquets

Pour toute famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels indexée par I avec $I = I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \left(\sum_{i\in I_1} a_i\right) + \left(\sum_{i\in I_2} a_i\right) \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} a_i = \left(\prod_{i\in I_1} a_i\right)\left(\prod_{i\in I_2} a_i\right)$$

3 Télescopage de termes ou facteurs

Soit $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille **finie** de réels avec n entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-b_i)$ est dite somme télescopique et vaut b_n-b_1.
2. Si tous les b_i sont non nuls, le produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}\frac{b_{i+1}}{b_i}$ est dit produit télescopique et vaut $\dfrac{b_n}{b_1}$.

4 Quelques sommes usuelles

Pour tout n entier naturel et tout x réel différent de 1, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\qquad \sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad \sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

5 Une factorisation de a^n-b^n classique

Pour tout n entier naturel non nul et tout couple (a,b) de réels, on a :

$$\begin{aligned} a^n-b^n &= (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)\\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k\\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}\end{aligned}$$

II Formule du binôme de Newton

1 Factorielle (rappels)

Soit n un entier naturel.

On appelle factorielle de n et on note $n!$ le nombre défini par $n!=\begin{cases}1 & \text{si } n=0\\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n}k & \text{si } n\neq 0\end{cases}$.

Remarque : $n!$ est un entier naturel.

2 Coefficients binomiaux (rappels)

2.1 Définition

Soit n un entier naturel et k un entier relatif.
On appelle coefficient binomial “k parmi n” et on note $\displaystyle\binom{n}{k}$ le nombre défini par :

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-k)!k!} & \text{si } k\in\{0,1,\dots,n\}\\ 0 & \text{si } k<0 \text{ ou } k>n\end{cases}.$$

2.2 Propriétés

Pour tout n entier naturel et k entier relatif, on a :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *(symétrie)*
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(relation de Pascal)*
3. $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

3 Formule du binôme

Pour tout n entier naturel et tout couple (a, b) de réels, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

III Sommes doubles

1 Définition

Soit A un ensemble **fini** de couples et $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ une famille de réels indexée par A.

La somme de tous les réels de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est notée $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ et appelée somme double.

Remarque
Si A est l'ensemble vide, on convient que : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} = 0$.

2 Sommes doubles rectangulaires

2.1 Définition - propriété

Dans le cas où $A = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$ avec n et m des entiers naturels non nuls,

— la somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ est dite rectangulaire ;

— la somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} a_{i,j}$;

— la somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ vaut :

$$\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Remarque
Un calcul de somme double rectangulaire peut donc se ramener à deux calculs de sommes simples.

$i \backslash j$	1	2	$\dots$	j	$\dots$	$\dots$		m	
1				$a_{1,j}$					
2				$a_{2,j}$					
$\vdots$				$\vdots$					
i	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\dots$	$a_{i,j}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{i,m}$	$\leftarrow \quad \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$
$\vdots$				$\vdots$					
n				$a_{n,j}$					

$$\uparrow$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

2.2 Produit de deux sommes finies

Si $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(c_j)_{1\leq j\leq m}$ sont des familles **finies** de réels, avec n et m entiers naturels non nuls, alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} b_i c_j$$

3 Un exemple de somme double triangulaire

Dans le cas où $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | 1 \leq i \leq j \leq n\}$ avec n un entier naturel non nul,

- la somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ est dite triangulaire ;
- la somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$ et vaut :

$$\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right).$$

$i \backslash j$	1	2	$\dots$	i	$\dots$	n	
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$a_{1,i}$	$\dots$	$a_{1,n}$	
2		$a_{2,2}$	$\dots$	$a_{2,i}$	$\dots$	$a_{2,n}$	
$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$	
i				$a_{i,i}$	$\dots$	$a_{i,n}$	$\leftarrow \quad \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	
n						$a_{n,n}$	

$$\uparrow$$
$$\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

CHAPITRE 3

INÉGALITÉS

I Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

1 Définition

On dit que la relation $\leq$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ car elle vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout x réel, $x \leq x$. *(réflexivité)*
2. pour tout couple (x, y) de réels tel que $x \leq y$ et $y \leq x$, on a $x = y$. *(antisymétrie)*
3. pour tout triplet (x, y, z) de réels tel que $x \leq y$ et $y \leq z$, on a $x \leq z$. *(transitivité)*

Remarque
On reviendra sur la notion de "relation d'ordre" dans le chapitre "Ensembles et applications".

2 Compatibilité avec les opérations

Soit x, y, z, t et α des réels.

1. Si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x + z \leq y + t$.
2. Si $x \leq y$ et $0 \leq \alpha$ alors $\alpha x \leq \alpha y$.
3. Si $x \leq y$ et $\alpha \leq 0$ alors $\alpha y \leq \alpha x$.
4. Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$ alors $0 \leq xz \leq yt$.

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Les parties I de $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous l'une des formes suivantes sont dites intervalles de $\mathbb{R}$:

— $I = \emptyset$
— $I = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \underset{\text{notation}}{=} [a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$.
— $I = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \underset{\text{notation}}{=} [a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ et $a < b$.
— $I = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \underset{\text{notation}}{=}]a, b]$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ et $a < b$.
— $I = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \underset{\text{notation}}{=}]a, b[$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ et $a < b$.

Remarque
On donnera une définition plus formelle de la notion d'intervalle dans le chapitre "Nombres réels".

4 Equivalences usuelles

1. Passage à l'inverse dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \forall y \in \mathbb{R}_-^*, x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

2. Passage au carré dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \forall y \in \mathbb{R}_-, x \leq y \Leftrightarrow y^2 \leq x^2$$

3. Passage à la racine carrée dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x \leq y \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$$

4. Passage à l'exponentielle ou au logarithme népérien dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^y.$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \leq y \Leftrightarrow \ln x \leq \ln y.$$

II Ordre et parties de $\mathbb{R}$

1 Parties majorées, majorants, maximum

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de A, on a : $x \leq M$.

Un tel réel M est alors dit :
- majorant de A dans le cas général.
- maximum de A dans le cas particulier où M appartient à A.

2 Parties minorées, minorants, minimum

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout réel x de A, on a : $m \leq x$.

Un tel réel m est alors dit :
- minorant de A dans le cas général.
- minimum de A dans le cas particulier où m appartient à A.

3 Parties bornées

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite bornée si elle est majorée et minorée autrement dit s'il existe deux réels m et M tel que, pour tout réel x de A, on a : $m \leq x \leq M$.

4 Remarque importante

Dans les définitions précédentes, l'ordre des quantificateurs ne peut être modifié.

III Valeur absolue d'un réel

1 Définition

Pour tout x réel, la valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

2 Propriétés

1. Pour tout x réel, on a : $0 \leq |x|$.
2. Pour tout x réel, on a : $x \leq |x|$.
3. Pour tout couple (x, y) de réels, on a : $|xy| = |x|\,|y|$.
4. Pour tout couple (x, y) de réels tel que y est non nul, on a : $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

3 Deux inéquations élémentaires

Pour tout réel x et tout réel positif α, on a :

1. $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha \Leftrightarrow x \in [-\alpha, \alpha]$.
2. $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \leq -\alpha$ ou $x \geq \alpha \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\alpha\right] \cup \left[\alpha, +\infty\right[$.

Interprétation sur la droite des réels

Soit a un réel et b un réel positif.

— L'ensemble des réels x vérifiant $|x - a| \leq b$ est l'ensemble des points de la droite des réels situés à une distance du point a inférieure ou égale à b.
— L'ensemble des réels x vérifiant $|x - a| \geq b$ est l'ensemble des points de la droite des réels situés à une distance du point a supérieure ou égale à b.

4 Inégalité triangulaire

Pour tout couple (x, y) de réels, on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Remarques

— L'inégalité triangulaire est particulièrement utilisée pour majorer une valeur absolue.
— L'inégalité triangulaire permet de démontrer l'inégalité suivante valable pour tout couple (x, y) de réels :
$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$
Cette nouvelle inégalité est particulièrement utilisée pour minorer une valeur absolue.

IV Partie entière d'un réel

1 Propriété (admise à ce stade)

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que :

$$n \leq x < n + 1.$$

2 Définition

On appelle partie entière d'un réel x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'entier relatif tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

<u>Remarque</u>
Contrairement au cas de la valeur absolue d'un réel, on ne peut énoncer de propriété générale sur la partie entière d'un produit, d'un quotient ou d'une somme.

CHAPITRE 4

FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE À VALEURS RÉELLES

Dans ce chapitre, sont rassemblés les fondamentaux liés aux fonctions de variable réelle à valeurs réelles sans preuves ni évocation de la notion de continuité qui seront abordées ultérieurement.

I Généralités sur les fonctions

1 Fonction

Une fonction de **variable réelle à valeurs réelles** notée f est un **objet mathématique** qui, à tout élément x d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, **associe un et un seul nombre** réel noté $f(x)$.
Notation fonctionnelle

$$f : x \mapsto f(x).$$

2 Ensemble de définition

2.1 Définitions

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction de variable réelle à valeurs réelles.

1. L'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe est appelé ensemble/domaine de définition de f et souvent noté $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \text{ existe}\}$.
   Notation fonctionnelle
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
2. Soit $x \in \mathcal{D}_f$. La valeur réelle $f(x)$ est appelée **l'image** de x par f.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. S'il existe x dans $\mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$ alors x est dit **un antécédent** de y par f.

2.2 Egalité entre fonctions

Deux fonctions f et g de variable réelle à valeurs réelles sont dites égales si les deux conditions suivantes sont réunies :

— les fonctions f et g ont le même ensemble de définition $\mathcal{D}$;
— pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(x) = g(x)$.

Dans ce cas, on note $f = g$.

3 Représentation graphique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, l'ensemble de points $\mathcal{C}_f$ défini par

$$\mathcal{C}_f = \{M\left(x; f(x)\right) | x \in \mathcal{D}_f\}$$

est dit représentation graphique de f (ou courbe représentative de f).

4 Parité, imparité, périodicité

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

4.1 Définitions

1. La fonction f est dite paire si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, on a :

$$-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = f(x).$$

2. La fonction f est dite impaire si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, a :

$$-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

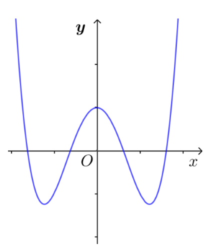
3. La fonction f est dite périodique de période un réel a si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, on a :

$$x - a \in \mathcal{D}_f, x + a \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x + a) = f(x).$$

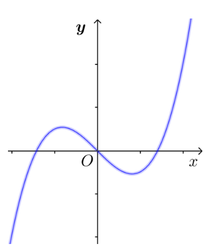
4.2 Interprétation géométrique

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

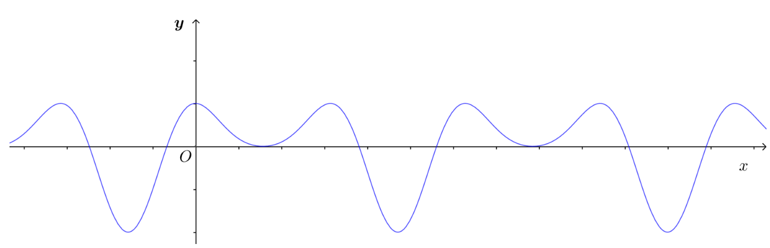
1. Si f est paire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   $\hookrightarrow$ On peut limiter l'étude de f à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$.
   $\hookrightarrow$ On obtient $\mathcal{C}_f$ en complétant la courbe obtenue par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Si f est impaire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
   $\hookrightarrow$ On peut limiter l'étude de f à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$.
   $\hookrightarrow$ On obtient $\mathcal{C}_f$ en complétant la courbe obtenue par symétrie par rapport à l'origine.
3. Si f est périodique de période a alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $ka\overrightarrow{i}$ pour tout k entier relatif.
   $\hookrightarrow$ On peut limiter l'étude de f à $\mathcal{D}_f \cap [x_0, x_0 + a]$ avec x_0 un réel quelconque.
   $\hookrightarrow$ On obtient $\mathcal{C}_f$ en complétant la courbe obtenue par les translations de vecteur $ka\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$



fonction paire



fonction impaire



fonction périodique

5 Opérations et composition

Soit $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto g(x)$ deux fonctions de variable réelle à valeurs réelles de domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

5.1 Somme

La somme de f et g est la fonction, notée $f+g$, définie par $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$.
Son domaine de définition $\mathcal{D}_{f+g}$ vérifie :

$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$

5.2 Multiplication par un réel α

La multiplication de f par le réel α est la fonction, notée αf, définie par $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$.
Son domaine de définition $\mathcal{D}_{\alpha f}$ vérifie :

$$\mathcal{D}_{\alpha f} = \mathcal{D}_f \text{ si } \alpha \neq 0.$$

5.3 Produit

Le produit de f et g est la fonction, notée fg, définie par $fg : x \mapsto f(x)g(x)$.
Son domaine de définition $\mathcal{D}_{fg}$ vérifie :

$$\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$

5.4 Quotient

Le quotient de f et g est la fonction, notée $\dfrac{f}{g}$, définie par $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Son domaine de définition $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$ vérifie :

$$\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathcal{D}_f \cap \left\{x \in \mathcal{D}_g | g(x) \neq 0\right\}.$$

5.5 Composée

La composée de g et f est la fonction, notée $g \circ f$, définie par $g \circ f : x \mapsto g\left(f(x)\right)$.
Son domaine de définition $D_{g\circ f}$ vérifie :

$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f | f(x) \in \mathcal{D}_g\}$$

6 Monotonie

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathcal{D}_f$.

1. f est dite croissante sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
2. f est dite décroissante sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.
3. f est dite strictement croissante sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.
4. f est dite strictement décroissante sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

Remarque
f est dite monotone (resp. strictement monotone) sur $\mathcal{D}$ si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur $\mathcal{D}$.

7 Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathcal{D}_f$.

7.1 Fonction majorée

f est dite majorée sur $\mathcal{D}$ si l'ensemble $\{f(x)|x \in \mathcal{D}\}$ est majoré c'est-à-dire s'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de $\mathcal{D}$, on a : $f(x) \leq M$.

Un tel réel M est alors dit :
- majorant de f sur $\mathcal{D}$ dans le cas général.
- maximum de f sur $\mathcal{D}$ dans le cas particulier où il existe x_0 dans $\mathcal{D}$ tel que $M = f(x_0)$.

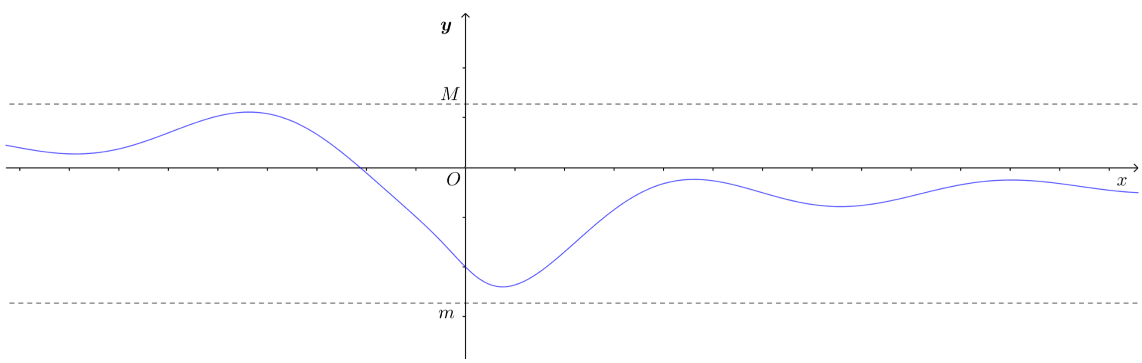
7.2 Fonction minorée

f est dite minorée sur $\mathcal{D}$ si l'ensemble $\{f(x)|x \in \mathcal{D}\}$ est minoré c'est-à-dire s'il existe un réel m tel que, pour tout réel x de $\mathcal{D}$, on a : $m \leq f(x)$.

Un tel réel m est alors dit :
- minorant de f sur $\mathcal{D}$ dans le cas général.
- minimum de f sur $\mathcal{D}$ dans le cas particulier où il existe x_0 dans $\mathcal{D}$ tel que $m = f(x_0)$.

7.3 Fonction bornée

Définition
f est dite bornée sur $\mathcal{D}$ si f est majorée et minorée sur $\mathcal{D}$ c'est-à-dire s'il existe deux réels m et M tel que, pour tout réel x de $\mathcal{D}$, on a : $m \leq f(x) \leq M$.



Propriété
f est bornée sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, la fonction $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est majorée sur $\mathcal{D}$.

7.4 Remarque importante

Dans les définitions précédentes, l'ordre des quantificateurs ne peut être modifié.

II Dérivation des fonctions d'une variable réelle

Dans tout ce paragraphe, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

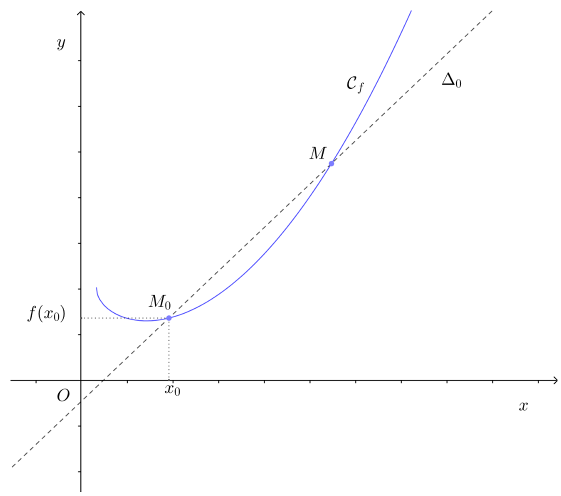
1 Définitions

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

1.1 Dérivée en un point

Soit x_0 un point de I.
f est dite dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0.

Dans ce cas,
la limite obtenue est appelée dérivée de f en x_0 et notée $f'(x_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0))$.



1.2 Fonction dérivée

f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Dans ce cas,
la fonction $x \mapsto f'(x)$ est dite fonction dérivée de f et notée f'.

2 Equation de la tangente

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
Soit x_0 un point de I.

Si f est dérivable en x_0 alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $M_0\,(x_0; f(x_0))$ a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

3 Opérations sur les fonctions dérivables (admis à ce stade)

3.1 Combinaison linéaire

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles et (α, β) un couple de réels.

Si f et g sont dérivables sur I alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

3.2 Produit

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles.

Si f et g sont dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

3.3 Quotient

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles tel que g ne s'annule pas sur I.

Si f et g sont dérivables sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

4 Composition de fonctions dérivables (admis à ce stade)

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

5 Caractérisation des fonctions constantes ou monotones (admis à ce stade)

Soit f une fonction définie sur I, dérivable sur I et à valeurs réelles.

1. f est constante si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

2. f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$.
3. f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$.

4. f est strictement croissante sur I si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réunies :
   (a) pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$;
   (b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tel que, pour tout x de $[a, b]$, $f'(x) = 0$.

5. f est strictement décroissante sur I si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réunies :
   (a) pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$;
   (b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tel que, pour tout x de $[a, b]$, $f'(x) = 0$.

6 Etude pratique d'une fonction

Le plan d'étude d'une fonction f est en général le suivant :

1. Détermination du domaine de définition de f ;
2. Réductions éventuelles du domaine d'étude selon les propriétés de f (périodicité, parité,...) ;
3. Limites aux bornes du domaine d'étude ;
4. Etude de la monotonie (le plus souvent, mais pas uniquement, après calcul de la dérivée de f et détermination du signe de celle-ci)
5. Construction du tableau de variations de f (limites aux bornes, valeurs remarquables, variations) ;
6. Tracé de la courbe représentative de f.

7 Dérivées d'ordre supérieur

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

On note
$$f^{(0)} = f$$
puis, pour tout entier naturel k tel que la fonction $f^{(k)}$ existe et est dérivable sur I, on note
$$f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'.$$

Si n est un entier naturel tel que la fonction $f^{(n)}$ existe alors on dit que f est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est la dérivée d'ordre n (ou dérivée $n-$ ième) de f.

8 Fonction réciproque

8.1 Définition

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans J.

Si, pour tout y de J, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x dans I notée $x = f^{-1}(y)$ alors :

— la fonction f est dite bijection de I sur J ;
— la fonction f^{-1} ainsi définie sur J et à valeurs dans I, est dite bijection réciproque de f.

Remarques
— $\sqrt{\ }$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ de bijection réciproque $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$.
— exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de bijection réciproque la fonction ln.

8.2 Propriété

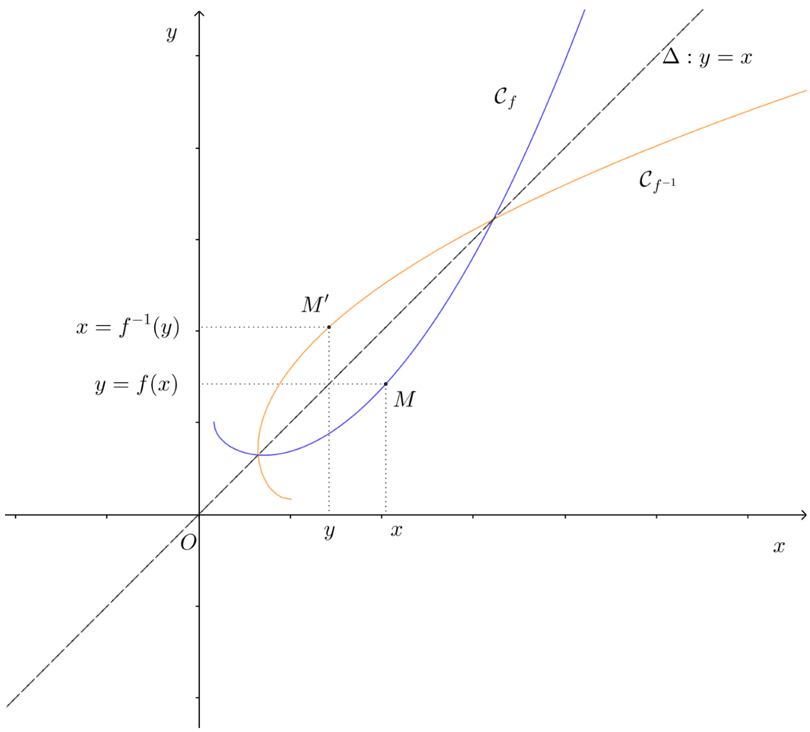
Si f est une bijection de I sur J de bijection réciproque notée f^{-1} alors on a :

1. pour tout x de I, $f^{-1}(f(x)) = x$;
2. pour tout y de J, $f(f^{-1}(y)) = y$.

8.3 Représentation graphique

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Si f est une bijection de I sur J alors les courbes représentatives de f et de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



8.4 Dérivée (admis à ce stade)

Si f est une bijection de I sur J et si f est dérivable sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en tout point y de J tel que $f'\left(f^{-1}(y)\right)$ est non nul avec, dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

<u>Remarque</u>
Ce résultat admis à ce stade sera démontré dans le chapitre “Dérivation des fonctions de variable réelle”

CHAPITRE 5

TRIGONOMÉTRIE

Dans ce chapitre, on rappelle ce qui a été vu en trigonométrie au lycée et on complète avec les formules d'addition et de duplication ainsi que l'étude de la fonction tangente.

I Cercle trigonométrique

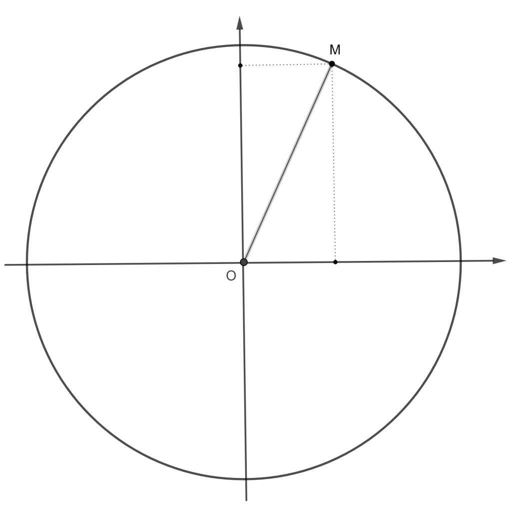
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 Définition

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.

2 Propriété

Soit M un point du plan.
M appartient au cercle trigonométrique si, et seulement si, il existe un réel t tel que les coordonnées de M dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont $(\cos t; \sin t)$.



Remarque : on obtient ainsi une paramétrisation du cercle trigonométrique.

3 Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$

3.1 Définition

Soit a et b deux réels.
On dit que a et b sont congrus modulo 2π s'il existe un entier relatif k tel que $a - b = 2k\pi$.

Notation : $a \equiv b\,[2\pi]$.

3.2 Propriétés

Soit a, b et c trois réels.

1. $a \equiv a\,[2\pi]$. *(réflexivité)*
2. Si $a \equiv b\,[2\pi]$ alors $b \equiv a\,[2\pi]$. *(symétrie)*
3. Si $a \equiv b\,[2\pi]$ et $b \equiv c\,[2\pi]$ alors $a \equiv c\,[2\pi]$. *(transitivité)*

II Cosinus et sinus

1 Formules et valeurs remarquables

1.1 Formules (ASR = à savoir retrouver à l'aide du cercle trigonométrique)

Pour tout réel t, on a :

1. $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$
2. $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$
3. $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$
4. $\cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin(t)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos(t)$

1.2 Cosinus et sinus d'angles usuels (AC = à connaître)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

1.3 Formules d'addition (AC)

Pour tout couple de réels (a, b), on a :

1. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
4. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

1.4 Formules de duplication (AC)

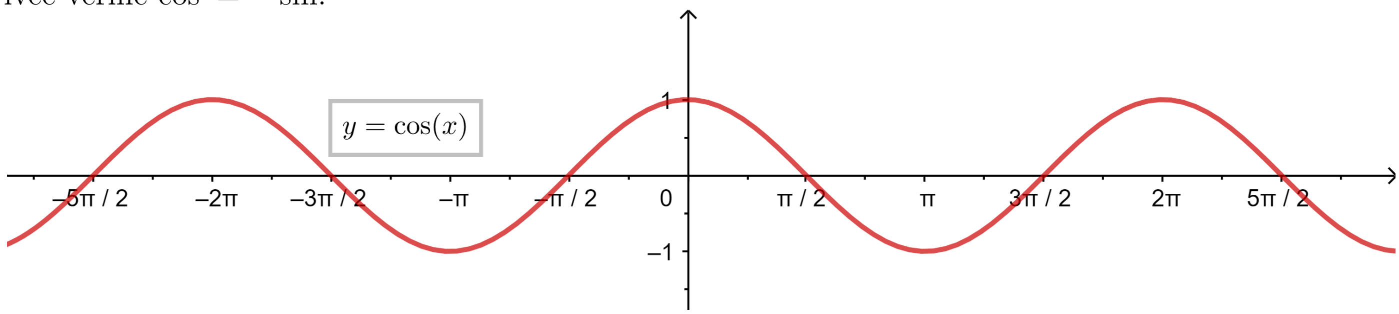
Pour tout réel a, on a :

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

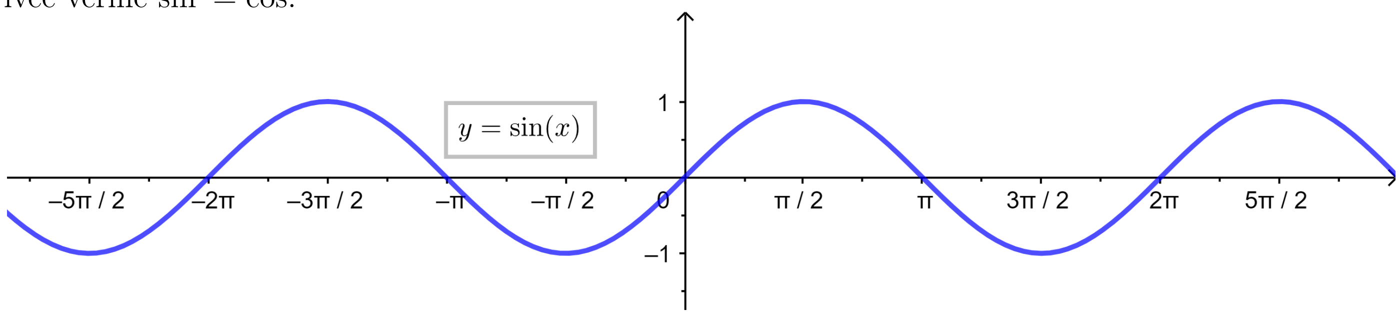
2 Fonctions circulaires cosinus et sinus

2.1 Propriétés

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $\cos' = -\sin$.



La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 2π. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $\sin' = \cos$.



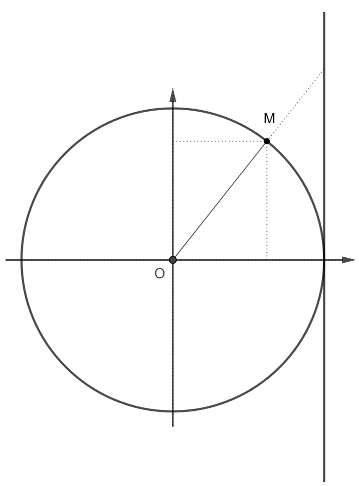
2.2 Une inégalité remarquable (AC)

Pour tout réel t,on a $|\sin(t)| \leq |t|$.

III Fonction tangente

1 Définition

La fonction $\dfrac{\sin}{\cos}$ est appelée fonction tangente et notée $\tan$.

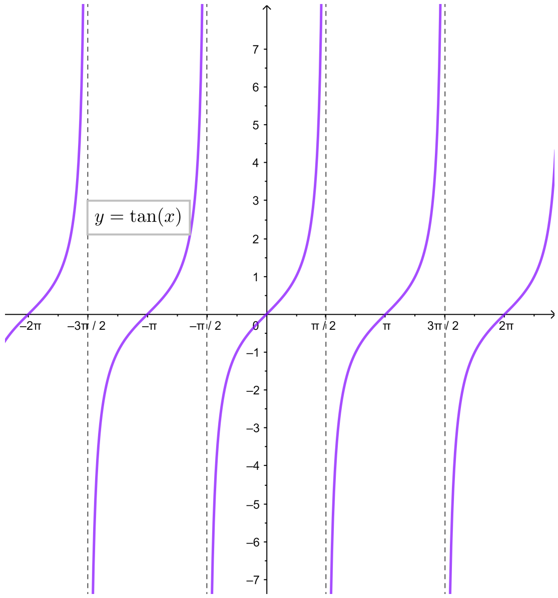


2 Propriétés

La fonction tangente est :

— définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$, impaire et périodique de période π.

— est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ de dérivée $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.



3 Formules et valeurs remarquables

3.1 Formules (ASR)

Pour tout réel t n'appartenant pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

1. $\tan(\pi - t) = -\tan(t)$;
2. $\tan(\pi + t) = \tan(t)$.

3.2 Tangente d'angles usuels (ASR)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\star$

3.3 Formules d'addition (AC)

Soit (a, b) un couple de réels n'appartenant pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Si $a + b$ n'appartient pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ alors $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.
2. Si $a - b$ n'appartient pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ alors $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

3.4 Formule de duplication (ASR)

Pour tout réel a n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a : $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

CHAPITRE 6

FONCTIONS USUELLES : RAPPELS ET COMPLÉMENTS

Dans ce chapitre,
- on rappelle et complète les résultats connus sur les fonctions exp et ln à l'issue du cycle terminal ;
- on introduit les fonctions puissances réelles que l'on compare aux fonctions précédemment citées ;
- on découvre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires réciproques.

I Fonction exponentielle

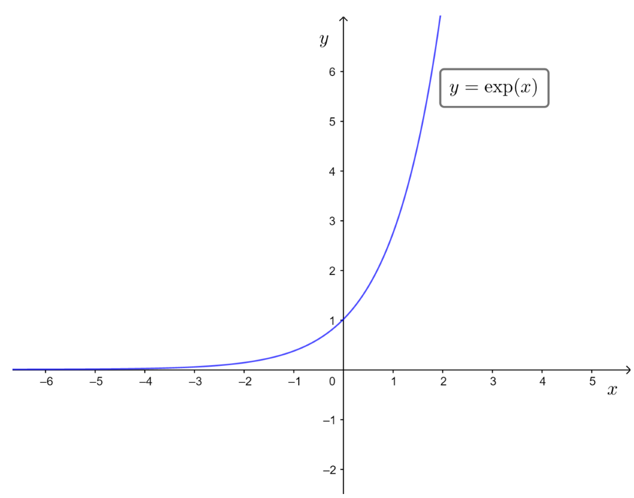
Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction, appelée fonction exponentielle et notée $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$, vérifie :
- pour tous x et y réels, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$;
- pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$;
- pour tout x réel et tout n entier relatif, $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$;
- pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$.

On note $\mathrm{e} = \exp(1)$.

<u>Variations et courbe représentative</u>

1. la fonction exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. la dérivée de exp sur $\mathbb{R}$ est exp.
3. la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
7. pour tout x réel, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$.



II Fonctions logarithmes

1 Fonction logarithme népérien

La fonction réciproque de la fonction exponentielle est appelée fonction logarithme népérien et notée $\ln$.

Elle vérifie :

— pour tous x et y réels strictement positifs, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;

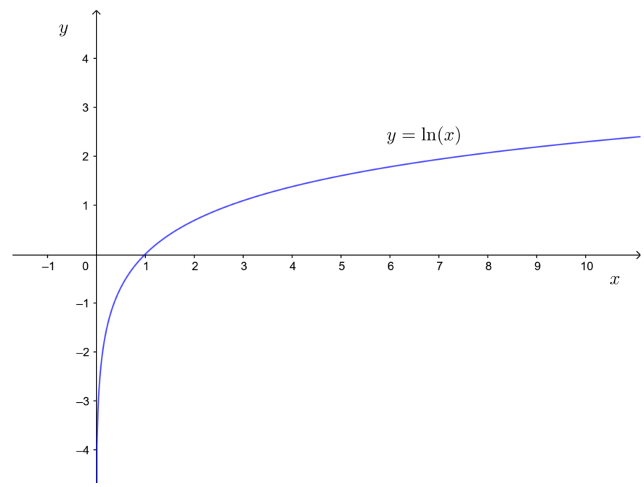
— pour tout x réel strictement positif, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$;

— $\ln(1) = 0$;

— pour tout x réel strictement positif et tout n entier relatif, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Variations et courbe représentative

1. la fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. la dérivée de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
3. la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
7. pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.



2 Fonctions logarithme en base 2 et en base 10

2.1 Définitions

Les fonctions logarithme en base 2, notée $\log_2$, et logarithme en base 10, notée $\log_{10}$, sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par, pour tout réel x strictement positif :

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \text{ et } \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

2.2 Propriétés immédiates

On a :

1. $\log_2(2) = 1$ et $\log_{10}(10) = 1$.
2. pour tout n entier relatif, $\log_2(2^n) = n$ et $\log_{10}(10^n) = n$.
3. $\log_2$ et $\log_{10}$ ont même monotonie et mêmes limites aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$ que la fonction $\ln$.

III Fonctions puissances (réelles)

1 Notation et remarque préliminaire

Pour **tout réel** α et tout **réel strictement positif** x, le réel $\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ est noté x^α ce qui permet d'écrire $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ (propriété déjà connue dans le cas α entier relatif et x réel strictement positif).

2 Définition

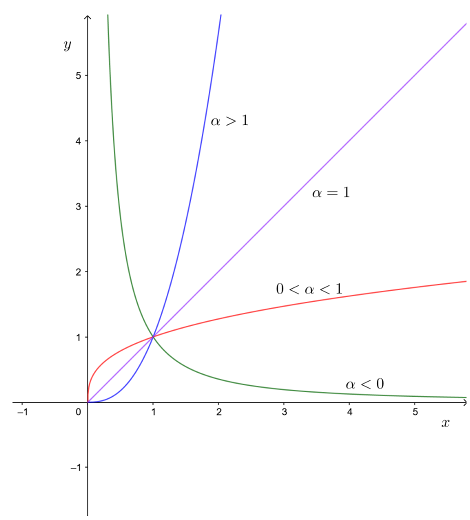
Soit α un réel.
La fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ est notée $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ et appelée fonction puissance.

Remarques
- Pour $\alpha = 0$, la fonction f_α est la fonction constante égale à 1.
- Pour $\alpha > 0$, la fonction f_α a une limite finie en 0 égale à 0.
  On dit alors que f_α est prolongeable par continuité en 0 et on note (abusivement) $f_\alpha(0) = 0$.

3 Etude de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ avec α réel non nul

Soit α un réel non nul.

1. la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. la dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
3. la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est :
   (a) strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha > 0$;
   (b) strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha < 0$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{pour } \alpha < 0 \end{cases}.$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{pour } \alpha > 0 \\ 0 & \text{pour } \alpha < 0 \end{cases}.$



4 Propriétés

Pout tout couple de réels (α, β) et tout couple de réels strictement positifs (x, y), on a :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

5 Cas particulier des puissances entières

Les fonctions vues ci-dessus étendent les notions de puissances entières déjà connues sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$:

- pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto \prod\limits_{k=1}^{n} (x)$ est notée $x \mapsto x^n$.
  elle est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto n x^{n-1}$.
- pour tout entier relatif strictement négatif n, la fonction $f_n : x \mapsto \prod\limits_{k=1}^{-n} \left(x^{-1}\right)$ est notée $x \mapsto x^n$.
  elle est définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et de dérivée $x \mapsto n x^{n-1}$.

IV Croissances comparées

1 Cas des fonctions $x \mapsto \ln x, x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto e^x$ avec $\alpha > 0$

Pour tout α **réel strictement positif,** les croissances comparées des fonctions $x \mapsto \ln x, x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto e^x$ se résument à :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0.$$

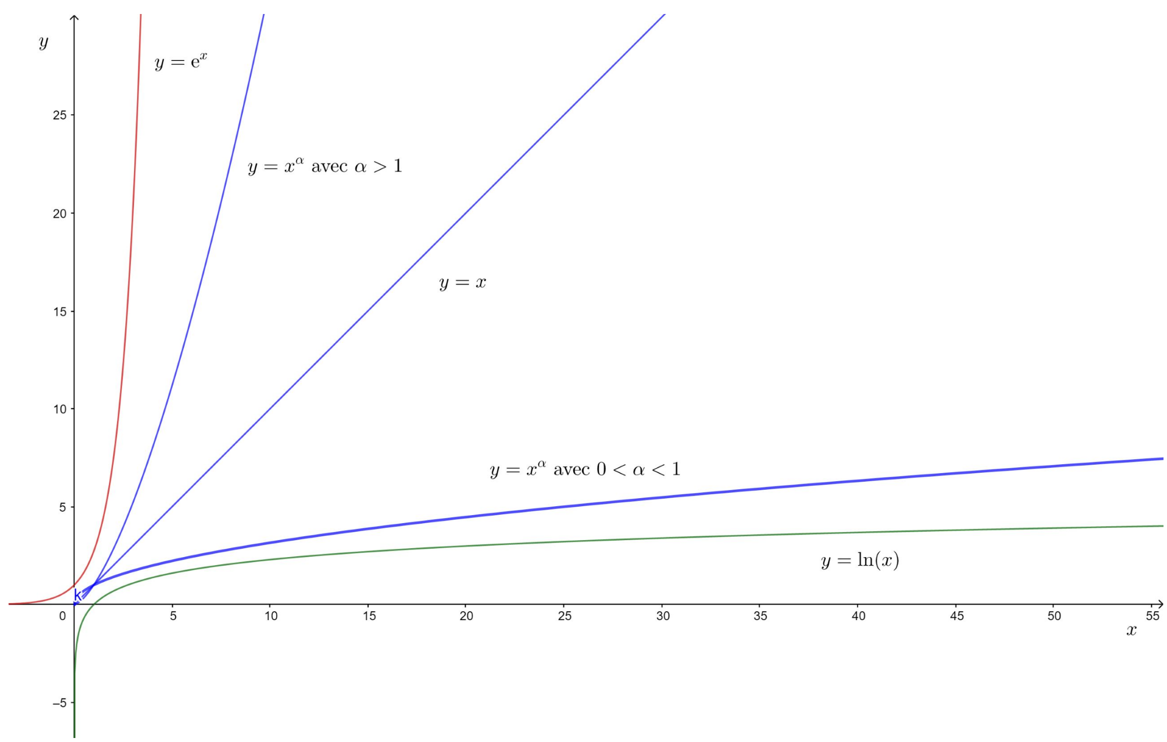
<u>Remarques</u>

On en déduit les croissances comparées en $+\infty$ des fonctions précédentes prises deux à deux :

— comparaison du logarithme népérien avec les puissances réelles ou l'exponentielle en $+\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0.$$

— comparaison des puissances réelles avec le logarithme népérien ou l'exponentielle en $+\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

— comparaison de l'exponentielle avec le logarithme népérien ou les puissances réelles en $+\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$



2 Cas des fonctions $x \mapsto |\ln x|^\beta, x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto e^{\gamma x}$ avec $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$

Pour tous **réels strictement positifs** α, β **et** γ**,** les croissances comparées des fonctions $x \mapsto |\ln x|^\beta$, $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto e^{\gamma x}$ se résument à :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0.$$

V Fonctions hyperboliques

1 Cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

1.1 Définitions

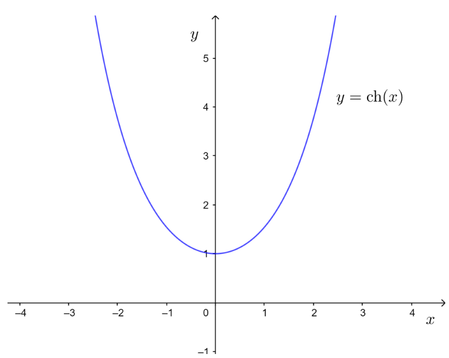
1. On appelle cosinus hyperbolique la fonction, notée ch, définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel,
$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
2. On appelle sinus hyperbolique la fonction, notée sh, définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel,
$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1.2 Relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique

Pour tout réel x, on a :
$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

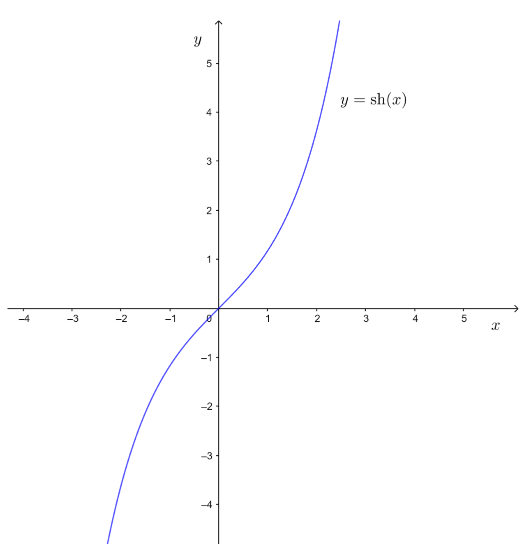
1.3 Etude de la fonction ch

1. la fonction ch est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. la dérivée de ch sur $\mathbb{R}$ est la fonction sh.
3. la fonction ch est paire avec $\operatorname{ch}(0) = 1$.
4. la fonction ch est :
   (a) strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
   (b) strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.



1.4 Etude de la fonction sh

1. la fonction sh est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. la dérivée de sh sur $\mathbb{R}$ est la fonction ch.
3. la fonction sh est impaire sur $\mathbb{R}$ donc $\operatorname{sh}(0) = 0$.
4. la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$.



2 Tangente hyperbolique

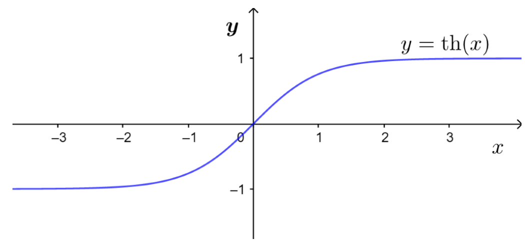
2.1 Définition

On appelle tangente hyperbolique la fonction, notée th, définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel,

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

2.2 Etude de la fonction th

1. la fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. la dérivée de th sur $\mathbb{R}$ est la fonction $1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$.
3. la fonction th est impaire sur $\mathbb{R}$ donc $\operatorname{th}(0) = 0$.
4. la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$.



3 Formules d'addition et de duplication

Comme pour les fonctions trigonométriques cos, sin et tan, il existe des formules d'addition et de duplication pour les fonctions hyperboliques ch, sh et th mais elles ne sont pas au programme de MP2I.

VI Fonctions circulaires réciproques

1 Arccos

1.1 Propriété-définition

La fonction $c : [0, \pi] \to [-1, 1]$ définie par,

$$\text{pour tout } x \text{ dans } [0, \pi]\,, c(x) = \cos(x)$$

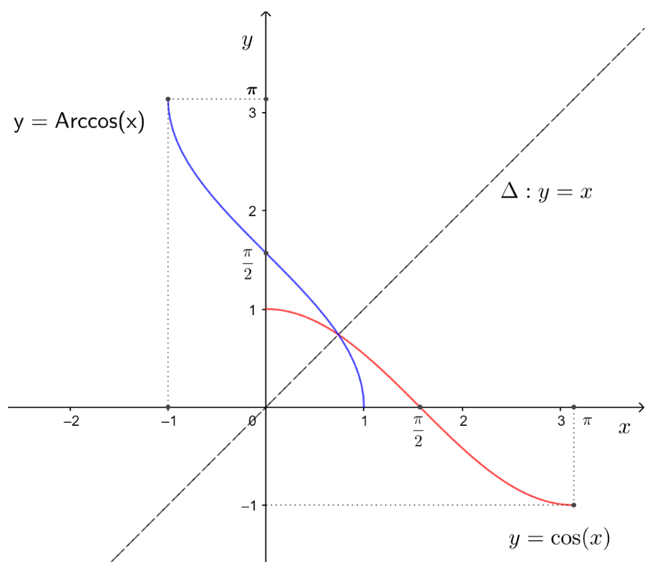
est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ de bijection réciproque $c^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ notée Arccos.

Autrement dit :

— pour tout réel y dans $[-1, 1]$, l'équation $y = \cos(x)$ admet une unique solution x dans $[0, \pi]$.
— pour tout réel y dans $[-1, 1]$, $\text{Arccos}(y)$ est l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal à y.

1.2 Etude de la fonction Arccos

1. la fonction Arccos est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.
2. la dérivée de Arccos sur $]-1, 1[$ est la fonction Arccos' : $x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
3. la fonction Arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.



Remarque
On verra dans le chapitre "Limite et continuité" que la fonction Arccos est continue sur $[-1, 1]$.

2 Arcsin

2.1 Propriété-définition

La fonction $s : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ définie par,

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], s(x) = \sin(x)$$

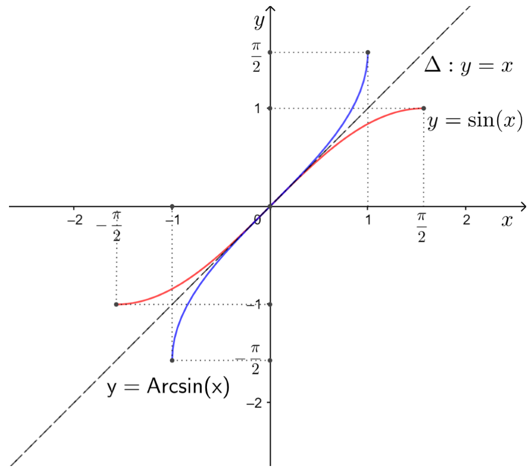
est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$ de bijection réciproque $s^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ notée Arcsin.

Autrement dit :

— pour tout réel y dans $[-1, 1]$, l'équation $y = \sin(x)$ admet une unique solution x dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
— pour tout réel y dans $[-1, 1]$, $\text{Arcsin}(y)$ est l'unique réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus est égal à y.

2.2 Etude de la fonction Arcsin

1. la fonction Arcsin est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
2. la dérivée de Arcsin sur $]-1,1[$ est la fonction Arcsin' : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. la fonction Arcsin est impaire sur $[-1,1]$.
4. la fonction Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.



Remarque
On verra dans le chapitre "Limite et continuité" que la fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$.

3 Arctan

3.1 Propriété-définition

La fonction $t : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par,

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, t(x) = \tan(x)$$

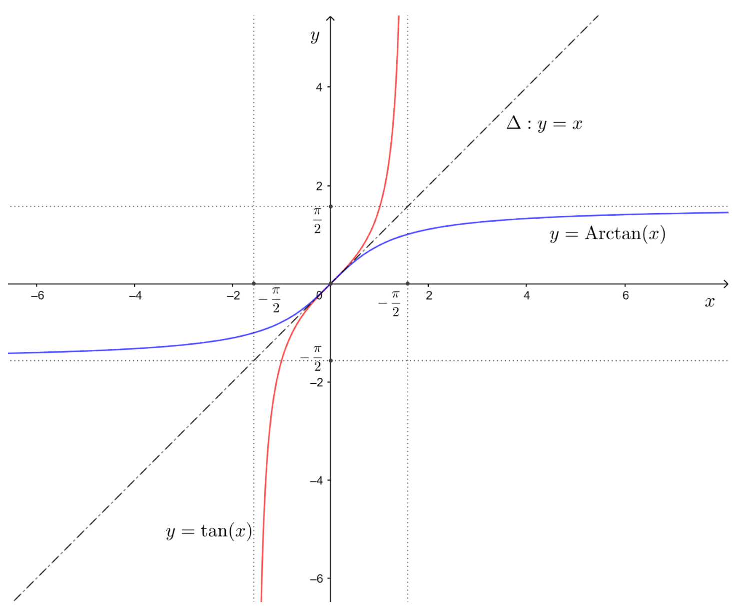
est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ de bijection réciproque $t^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ notée Arctan.

Autrement dit :

— pour tout réel y dans $\mathbb{R}$, l'équation $y = \tan(x)$ admet une unique solution x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
— pour tout réel y dans $\mathbb{R}$, $\text{Arctan}(y)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente est égale à y.

3.2 Etude de la fonction Arctan

1. la fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. la dérivée de Arctan sur $\mathbb{R}$ est la fonction Arctan' : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. la fonction Arctan est impaire sur $\mathbb{R}$.
4. la fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Arctan}(x) = +\frac{\pi}{2}$.



CHAPITRE 7

NOMBRES COMPLEXES (1)

I Généralités

1 L'ensemble $\mathbb{C}$

On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés nombres complexes, qui vérifie les propriétés suivantes :

— $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
— on peut définir deux opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$ qui étendent les opérations $+$ et $\times$ connues sur $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul que celles-ci ;
— $\mathbb{C}$ contient un élément noté i vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$;
— tout élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

La forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est dite **forme algébrique** du nombre complexe z,

— le réel a est dit **partie réelle** du nombre complexe z et noté $a = \mathrm{Re}(z)$;
— le réel b est dit **partie imaginaire** du nombre complexe z et noté $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque
L'unicité d'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique se traduit par :

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(a', b') \in \mathbb{R}^2, a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b'$ si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$.

2 Opérations sur l'ensemble $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est muni deux opérations $+$ et $\times$ définies par, pour tout nombre complexe z de forme algébrique $a + \mathrm{i}b$ et tout nombre complexe z' de forme algébrique $a' + \mathrm{i}b'$:

$$\begin{cases} z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b') \\ z \times z' = (a + \mathrm{i}b) \times (a' + \mathrm{i}b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b) \end{cases}.$$

Remarque
La somme et le produit de deux nombres complexes sont des nombres complexes.

3 Extension de résultats vus dans $\mathbb{R}$

3.1 Une somme usuelle

Pour tout n entier naturel et tout nombre complexe z différent de 1, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

3.2 Formule du binôme de Newton

Pour tout n entier naturel et tout couple (z, z') de nombres complexes, on a :

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k {z'}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} {z'}^k.$$

3.3 Une formule de factorisation usuelle

Pour tout n entier naturel non nul et tout couple (z, z') de nombres complexes, on a :

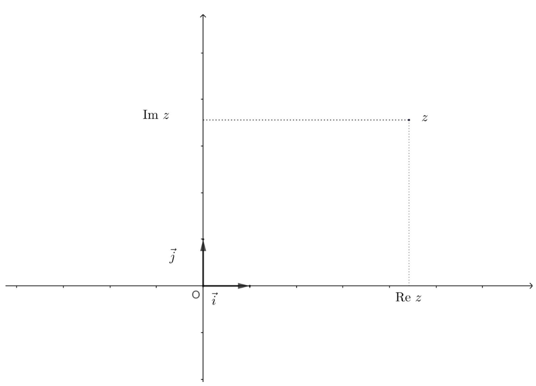
$$z^n - {z'}^n = (z - z')\left(z^{n-1} + z^{n-2}z' + \cdots + z{z'}^{n-2} + {z'}^{n-1}\right) = (z - z')\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}{z'}^k = (z - z')\sum_{k=0}^{n-1} z^k {z'}^{n-1-k}$$

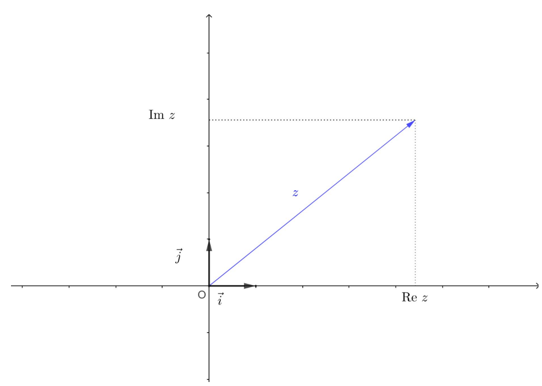
4 Plan complexe : affixe d'un point, d'un vecteur

Dans toute la suite, on considère le plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.

— A tout complexe z, on peut associer le point M de coordonnées $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ dit **image de** z.
— A tout point M de coordonnées (x, y), on peut associer le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ dit **affixe de** M.

On identifie donc $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct et on parle de **"plan complexe"**.





<u>Remarques</u>
De même, à tout complexe z on peut associer le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ dit **image de** z et à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y), on peut associer le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ dit **affixe de** $\vec{u}$. On a ainsi :

— Pour tout vecteur $\vec{u}$ d'affixe z et tout réel α, le vecteur $\alpha\vec{u}$ a pour affixe $\alpha z'$.
— Pour tout vecteur $\vec{u}$ d'affixe z et tout vecteur $\vec{u'}$ d'affixe z', le vecteur $\vec{u} + \vec{u'}$ a pour affixe $z + z'$.
— Pour tout point M d'affixe z et tout point M' d'affixe z', le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.

II Conjugué d'un nombre complexe

1 Définition

On appelle conjugué d'un nombre complexe z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z).$$

2 Image du conjugué dans le plan complexe

Pour tout nombre complexe z, le point d'affixe $\bar{z}$ et le point d'affixe z sont symétriques par rapport à l'axe des réels dans le plan complexe.

3 Propriétés

Pour tout z et z' des nombres complexes, on a :

1. $z + \bar{z} = 2\ \mathrm{Re}(z)$;
2. $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z)$;
3. $\bar{\bar{z}} = z$;
4. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
5. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$;
6. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ si z' est non nul.

III Module d'un nombre complexe

1 Définition

On appelle module d'un nombre complexe z et on note $|z|$ le nombre réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}.$$

2 Interprétations géométriques

Pour tout nombre complexe z, le module $|z|$ est :

— la distance entre le point d'affixe 0 et le point d'affixe z ;
— la norme de tout vecteur d'affixe z.

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes, le module $|z' - z|$ est :

— la distance entre les points d'affixe z et z' ;
— la norme du vecteur d'affixe $z' - z$.

Soit r un réel positif, z_0 un nombre complexe et M_0 le point d'affixe z_0.

— L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - z_0| = r$ est le cercle de centre M_0 et de rayon r.
— L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - z_0| \leq r$ est le disque de centre M_0 et de rayon r.

3 Propriétés

Pour tout z et z' des nombres complexes, on a :

1. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$;
2. $|z|^2 = z\bar{z}$;
3. $|zz'| = |z|\,|z'|$;
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ dans le cas où z' est non nul.

4 Inégalité triangulaire

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes, on a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

avec égalité si, et seulement si, il existe un réel positif α tel que $z' = \alpha z$ ou $z = \alpha z'$.

IV Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

1 L'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1\}$

On identifie le cercle trigonométrique et l'ensemble des nombres complexes de module 1 que l'on note

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1\}.$$

2 Exponentielle imaginaire

2.1 Définition

Pour tout nombre réel t, on appelle **exponentielle imaginaire** de t et on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ le nombre complexe défini par :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t.$$

2.2 Propriété

Pour tout couple (t, t') de nombres réels, on a l'égalité :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+t')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t'}.$$

3 Formules d'Euler et applications

3.1 Formule d'Euler

Pour tout nombre réel t, on a les égalités suivantes dites **formules d'Euler** :

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \text{ et } \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}.$$

3.2 Factorisation de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$ pour p et q réels

La **technique de l'angle moitié** permet l'obtention de factorisations classiques à savoir retrouver :

1. pour tout t réel,
$$\begin{cases} 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\right) = 2\cos\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} \\ 1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\sin\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} \end{cases}$$
2. pour tout couple (p,q) de réels,
$$\begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p-q}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p-q}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p-q}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p-q}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}} \end{cases}$$

Remarques
En écrivant la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$ à partir de ces factorisations, on trouve des formules de factorisation pour $\cos p \pm \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$.

3.3 Linéarisation

A l'aide des formules d'Euler et du binôme de Newton, on peut transformer une expression du type $(\cos t)^n$ ou $(\sin t)^n$ avec t réel et n entier naturel en une combinaison linéaire de $\cos(pt)$ ou de $\sin(pt)$ avec p des entiers naturels.

4 Formule de Moivre et applications

4.1 Formule de Moivre

Pour **tout nombre réel** t et **tout entier relatif** n, on a :
$$\mathrm{e}^{int} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^n$$
c'est-à-dire :
$$\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt) = (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n$$

4.2 Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

A l'aide des formules de Moivre et du binôme de Newton, on peut déterminer les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

4.3 Deux sommes classiques

Pour tout nombre réel t et tout entier naturel n, on obtient des expressions simplifiées de $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$ en calculant $C + \mathrm{i}S = \sum_{k=0}^{n} (\cos(kt) + \mathrm{i}\sin(kt))$ de la manière suivante
$$C + \mathrm{i}S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } t \equiv 0\,[2\pi] \\ \frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} & \text{sinon} \end{cases}$$
puis en exhibant la partie réelle et la partie imaginaire du complexe ainsi obtenu.

V Forme trigonométrique pour les nombres complexes non nuls

1 Propriété - définition

Tout nombre complexe **non nul** z peut s'écrire sous la forme

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

avec r un réel strictement positif et θ un réel.

Cette forme est dite **forme trigonométrique** du complexe z.

Remarque
Dans cette écriture de z,
- le réel strictement positif r est unique (car il est nécessairement égal à $|z|$) ;
- le réel θ ne l'est pas (car si θ convient alors tous les θ' tels que $\theta' \equiv \theta\,[2\pi]$ conviennent aussi).

2 Arguments

2.1 Définition

Soit z un nombre complexe **non nul**.
Les réels θ tels que z peut s'écrire $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec r réel strictement positif sont dits arguments de z.

Remarque
Si θ est un argument de z complexe non nul, on peut écrire $\arg z \equiv \theta\,[2\pi]$.

2.2 Arguments d'un produit, d'un quotient

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes **non nuls**, on a :
1. $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\,[2\pi]$;
2. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\,[2\pi]$.

3 Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$

Soit (a, b, t) un triplet de nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

On peut écrire
$$a\cos t + b\sin t = \mathrm{Re}\left[(a - \mathrm{i}b)(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\right] = \mathrm{Re}\left[(a-\mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]$$
puis $a - \mathrm{i}b = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ avec A réel strictement positif et φ un réel ce qui donne

$$a\cos t + b\sin t = \mathrm{Re}\left[(a-\mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right] = \mathrm{Re}\left[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\varphi)}\right]$$

puis
$$a\cos t + b\sin t = A\cos(t-\varphi)\,.$$

Remarque
Cette expression alternative pour $a\cos t + b\sin t$ est particulièrement intéressante en physique.

VI Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes

On étend ici brièvement, lorsque cela a du sens, des notions ou résultats vus dans le cadre des fonctions de variable réelle à valeurs réelles aux fonctions de variable réelle à valeurs complexes.

1 Définition

Une fonction de **variable réelle à valeurs complexes** notée f est un **objet mathématique** qui, à tout élément x d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, **associe un et un seul nombre** complexes noté $f(x)$.

2 Ce qui s'étend aux fonctions de variable réelle à valeurs complexes

— Notation fonctionnelle
— Domaine de définition
— Image d'un réel, antécédent d'un complexe
— Parité, imparité, périodicité
— Somme, produit, quotient de fonctions et multiplication d'une fonction par un complexe
— Dérivation (cf infra)

3 Ce qui ne s'étend pas aux fonctions de variable réelle à valeurs complexes

— Représentation graphique
— Composition de fonctions
— Monotonie
— Fonction majorée, minorée ou bornée
— Fonction réciproque

4 Dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

4.1 Définitions

Soit f une fonction définie sur I à valeurs complexes.

On note $\text{Re } f : I \to \mathbb{R}$ et $\text{Im} f : I \to \mathbb{R}$ les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles définies par :

$$\forall x \in I, (\text{Re } f)(x) = \text{Re}(f(x)) \text{ et } (\text{Im } f)(x) = \text{Im}(f(x)).$$

On dit que :

— f est dérivable en $x_0 \in I$ si les fonctions $\text{Re } f$ et $\text{Im } f$ sont dérivables en x_0 ;
— f est dérivable sur I si les fonctions $\text{Re } f$ et $\text{Im } f$ sont dérivables sur I.

Selon le cas de figure, on appelle :

— nombre dérivée de f en x_0 et on note $f'(x_0)$ le nombre complexe suivant :

$$f'(x_0) = (\text{Re } f)'(x_0) + \mathrm{i}\,(\text{Im } f)'(x_0).$$

— fonction dérivée de f sur I et on note f' la fonction de variable réelle à valeurs complexes suivante :

$$f' = (\text{Re } f)' + \mathrm{i}\,(\text{Im } f)'.$$

4.2 Propriétés

Combinaison linéaire
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes et (α, β) un couple de complexes.

Si f et g sont dérivables sur I alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Produit
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes.

Si f et g sont dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Quotient
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes tel que g ne s'annule pas sur I.

Si f et g sont dérivables sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

4.3 Un exemple important

Soit φ une fonction définie sur I à valeurs complexes.

On note $f : I \to \mathbb{C}$ la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I, f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(t))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \mathrm{Im}(\varphi(t))}$$

Si φ est dérivable sur I alors f est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$\forall t \in I, f'(t) = \varphi'(t)f(t).$$

Remarque
La fonction f sera aussi notée $f = \exp(\varphi)$ après étude de l'exponentielle complexe dans le chapitre "Nombres complexes (2)" ce qui permettra d'écrire $(\exp(f))' = \varphi' \exp(\varphi)$ et donc d'étendre une propriété déjà connue dans le cas où φ est à valeurs réelles.

CHAPITRE 8

CALCUL DE PRIMITIVES

Dans ce chapitre,
- on retrouve ce qui a été vu en terminale sur les primitives,
- on enrichit la liste de primitives usuelles connues à l'aide des nouvelles fonctions vues en MP2I,
- on pratique quelques techniques élémentaires de calcul intégral,

en admettant des résultats qui seront prouvés dans le chapitre "Intégration sur un segment".

Notations conservées dans tout le chapitre

- I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.
- $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Primitives

Dans cette partie, on considère $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction quelconque.

1 Définition

On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f.

2 Propriété

Si f admet une primitive F sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est $\{F_\lambda : x \mapsto F(x) + \lambda | \lambda \in \mathbb{K}\}$.

3 Existence de primitives (théorème fondamental de l'analyse)

Si f est **CONTINUE** sur I alors :

1. pour tout x_0 réel de I, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.
2. la fonction f admet des primitives sur I.

Remarque

Lorsque f est **CONTINUE** sur I, on note $\displaystyle\int^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int f(t)\ \mathrm{d}t$ une primitive quelconque de f

4 Application au calcul d'intégrales sur un segment

Si f est **CONTINUE** sur I et F une primitive de f sur I alors, pour tous réels a et b dans I, on a :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Remarque
$F(b) - F(a)$ est souvent noté $[F]_a^b$ ou $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$

II Primitives usuelles

1 Puissances entières ou réelles

Si la fonction f est...	alors une primitive de f est...	sur tout intervalle I inclus dans...
$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$

2 Exponentielle à valeurs réelles ou complexes et logarithme népérien

Si la fonction f est...	alors une primitive de f est...	sur tout intervalle I inclus dans...
$x \mapsto \exp(\lambda x)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{\lambda}\exp(\lambda x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$

3 Fonctions hyperboliques

Si la fonction f est...	alors une primitive de f est...	sur tout intervalle I inclus dans...
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 - \mathrm{th}^2(x)$	$x \mapsto \mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$x \mapsto \mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$

4 Fonctions circulaires et fonctions circulaires réciproques

Si la fonction f est...	alors une primitive de f est...	sur tout intervalle I inclus dans...
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$	$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arccos}(x)$	$]-1, 1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1, 1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$

5 Remarque

A l'aide des primitives usuelles vues ci-dessus, on peut déterminer des primitives de fonctions moins élémentaires par diverses techniques décrites dans le paragraphe suivant.

★★★

Les quatre tableaux construits sont donc à connaître parfaitement.

III Calculs de primitives

1 Primitives d'une combinaison linéaire de fonctions

Si $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions qui admettent des primitives sur I notées F et G alors, pour tous α et β dans $\mathbb{K}$, la fonction $\alpha f + \beta g : I \to \mathbb{K}$ admet pour primitive sur I la fonction $\alpha F + \beta G$.

2 Primitives d'une fonction dérivée de fonctions composées

Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I tel que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J et si $g : J \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable sur I alors une primitive de la fonction $f : x \mapsto u'(x)g'(u(x))$ sur I est la fonction $F : x \mapsto g(u(x))$.

Dans le tableau ci-dessous (à savoir retrouver à partir des primitives usuelles), I désigne un intervalle sur lequel u est dérivable et tel que, pour tout x de I, $u(x)$ appartient au domaine de dérivabilité de F.

Si la fonction f est...	alors une primitive F de f sur I est...
$x \mapsto u'(x)\left(u(x)\right)^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}\left(u(x)\right)^{\alpha+1}$ $x \mapsto \ln\lvert u(x)\rvert$
$x \mapsto u'(x)\exp(\lambda u(x))$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ $x \mapsto u'(x)\ln(u(x))$	$x \mapsto \dfrac{1}{\lambda}\exp(\lambda u(x))$ $x \mapsto u(x)\ln(u(x)) - u(x)$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{ch}(u(x))$ $x \mapsto u'(x)\ \mathrm{sh}(u(x))$ $x \mapsto u'(x)\left(1-\mathrm{th}^2(u(x))\right)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(u(x))$ $x \mapsto \mathrm{ch}(u(x))$ $x \mapsto \mathrm{th}(u(x))$
$x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$ $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$ $x \mapsto u'(x)\left(1+\tan^2(u(x))\right)$	$x \mapsto \sin(u(x))$ $x \mapsto -\cos(u(x))$ $x \mapsto \tan(u(x))$
$x \mapsto \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}}$ $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}}$ $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}$	$x \mapsto \mathrm{Arccos}(u(x))$ $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(u(x))$ $x \mapsto \mathrm{Arctan}(u(x))$

3 Deux théorèmes importants

3.1 Définition préliminaire

Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et de dérivée continue sur I.

3.2 Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$ sur** I alors, pour tous réels a et b dans I, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque

— Ce théorème facilite le calcul d'intégrales sur un segment (ou de de primitives) de fonctions produit de deux fonctions dont l'une est "simple" à dériver et l'autre "simple" à intégrer.

— En général, on dérive le facteur le plus "compliqué" : **A**rc... **L**og... **P**oly... **E**xpo... **S**in et apparentés.

3.3 Changement de variable

Si $\varphi : J \to \mathbb{R}$ est une fonction **de classe $\mathcal{C}^1$** sur J tel que, pour tout t de J, $\varphi(t)$ appartient à I
et
si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction **continue** sur I alors, pour tous réels α et β dans J, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque

Sous réserve que les hypothèses soient réunies, ce théorème permet notamment le calcul de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ dans le cas où, en posant $x = \varphi(t)$, la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ est plus facile à intégrer que f.

4 Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ avec a et b réels

4.1 Propriété préliminaire

Soit f et F des fonctions définies sur un intervalle I **à valeurs complexes.**

1. f admet des primitives sur I si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des primitives sur I.
2. F est une primitive de f sur I si, et seulement si, $\begin{cases} \mathrm{Re}(F) \text{ est une primitive de } \mathrm{Re}(f) \text{ sur } I \\ \mathrm{Im}(F) \text{ est une primitive de } \mathrm{Im}(f) \text{ sur } I \end{cases}$.

4.2 Une application usuelle du résultat précédent

Soit a et b des réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.

On note $\lambda = a + \mathrm{i}b$ et f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel,

$$f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos(bx) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{ax}\sin(bx) = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx} \underset{\text{déf}}{=} \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

La fonction $F_\lambda : x \mapsto \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}$ donc :

— la fonction $\mathrm{Re}\,(F_\lambda)$ est une primitive de la fonction $\mathrm{Re}(f_\lambda) : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ sur $\mathbb{R}$;

— la fonction $\mathrm{Im}\,(F_\lambda)$ est une primitive de la fonction $\mathrm{Im}(f_\lambda) : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ sur $\mathbb{R}$.

5 Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec a, b et c des réels et a non nul

Soit a, b et c des réels avec a non nul et g la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Trois cas se présentent :

1. Si g admet **deux racines réelles distinctes** r_1 et r_2 alors il existe deux réels α_1 et α_2 tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}, \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha_1}{x-r_1} + \frac{\alpha_2}{x-r_2}.$$
Dans ce cas,
une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}$ est :
$$x \mapsto \alpha_1 \ln|x-r_1| + \alpha_2 \ln|x-r_2|.$$

2. Si g admet **une racine réelle double** r alors il existe un réel α tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}, \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{(x-r)^2}.$$
Dans ce cas,
une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ est :
$$x \mapsto \frac{-\alpha}{x-r}.$$

3. Si g n'admet pa**s de racines réelles** alors, en écrivant g sous forme canonique, on peut trouver trois réels α, β et δ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{\left(\dfrac{x+\beta}{\delta}\right)^2 + 1}.$$
Dans ce cas,
une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ est :
$$x \mapsto \alpha\delta \arctan\left(\frac{x+\beta}{\delta}\right).$$

Remarque
Les formes des primitives données ci-dessus ne sont pas à connaître par coeur. Seule la méthode d'obtention de celles-ci est à maîtriser ici.

CHAPITRE 9

NOMBRES COMPLEXES (2)

I Equations algébriques

1 Préliminaires

1.1 Définition d'une fonction polynomiale

Une fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite fonction polynomiale à coefficients complexes s'il existe un entier naturel n et un $(n+1)-$ uplet de nombres complexes $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ tel que pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k.$$

1.2 Propriété de factorisation

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes et a un nombre complexe.

Si a est une racine de P, autrement dit si $P(a) = 0$, alors il existe une fonction polynomiale à coefficients complexes Q tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$P(z) = (z - a)Q(z).$$

2 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

2.1 Cas particulier des équations du type $z^2 = z_0$ avec z_0 nombre complexe

Soit z_0 et z des nombres complexes de **formes algébriques** respectives $x_0 + \mathrm{i}y_0$ et $x + \mathrm{i}y$.

$$z^2 = z_0 \text{ si, et seulement si, } \begin{cases} x^2 - y^2 & = x_0 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ 2xy & = y_0 \end{cases}$$

Remarque
Résoudre l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue z, c'est déterminer les "racines carrées" du nombre complexe z_0 mais le symbole $\sqrt{.}$ est réservé aux réels positifs et donc à **BANNIR** dans le cas des nombres complexes.

2.2 Cas général

Soit a, b et c des nombres complexes avec a **non nul**.

Racines
Les solutions de l'équation polynomiale $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue le nombre complexe z sont :
$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$
où δ est une "racine carrée" de $\Delta = b^2 - 4ac$, autrement dit où δ est un nombre complexe vérifiant :
$$\delta^2 = b^2 - 4ac.$$

Somme et produit des racines
Les racines z_1 et z_2 de la fonction polynomiale $P : z \mapsto az^2 + bz + c$ vérifient :
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

3 Résolution des équations du type $z^n = z_0$ dans $\mathbb{C}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

3.1 Définition

Soit n un entier naturel **non nul** et z_0 un nombre complexe.

On appelle **racine** $n-$ **ième de** z_0 tout nombre complexe z tel que $z^n = z_0$.

<u>Remarque</u>
Le symbole $\sqrt[n]{.}$ est réservé aux réels positifs ; il est à **BANNIR** dans le cas des nombres complexes.

3.2 Cas particulier où $z_0 = 1$

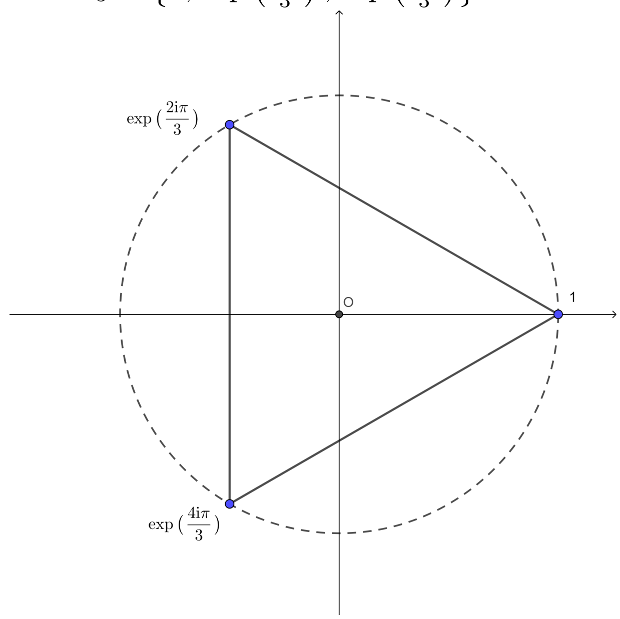
Racines
Il y a n **racines** $n-$ **ièmes de l'unité** (c'est-à-dire de 1) qui sont les nombres complexes suivants :
$$\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

L'ensemble des racines
- L'ensemble des racines $n-$ ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$.
- Les points dont les affixes sont les **racines** $n-$ **ièmes de l'unité** sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, de centre O et inscrit dans $\mathbb{U}$.

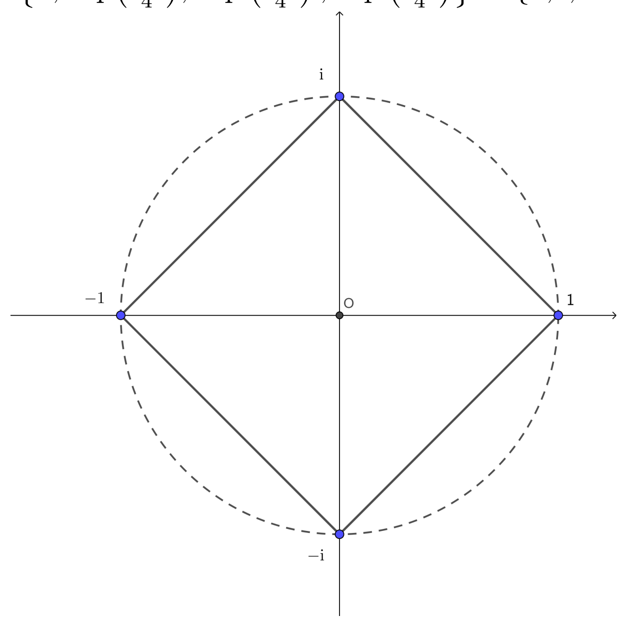
3.3 Cas général

Il y a n **racines** $n-$ **ièmes** pour le nombre complexe non nul z_0 de **forme trigonométrique** $z_0 = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ qui sont les nombres complexes suivants :
$$\sqrt[n]{r_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

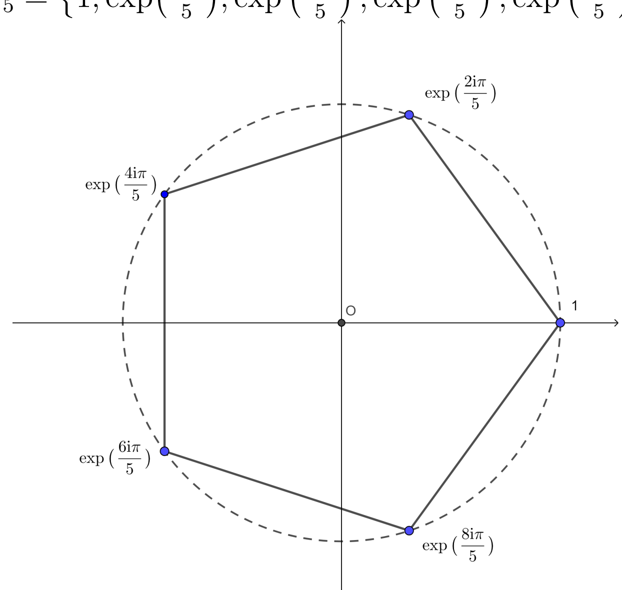
$$\mathbb{U}_3 = \left\{1, \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}\right), \exp\left(\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}\right)\right\}$$



$$\mathbb{U}_4 = \left\{1, \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{4}\right), \exp\left(\frac{4\mathrm{i}\pi}{4}\right), \exp\left(\frac{6\mathrm{i}\pi}{4}\right)\right\} = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$$



$$\mathbb{U}_5 = \left\{1, \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}\right), \exp\left(\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}\right), \exp\left(\frac{6\mathrm{i}\pi}{5}\right), \exp\left(\frac{8\mathrm{i}\pi}{5}\right)\right\}$$



II Exponentielle complexe

1 Définition

Pour tout nombre complexe z, on appelle exponentielle de z **le nombre complexe** noté e^z défini par :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$$

dont le module est $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ et les arguments vérifient $\arg(\mathrm{e}^z) \equiv \mathrm{Im}(z)\,[2\pi]$.

Remarques

— Si z est un réel alors on retrouve l'exponentielle réelle vue en lycée ;
— Si z est un imaginaire pur alors on retrouve l'exponentielle imaginaire vue en MP2I.

2 Propriétés

2.1 Exponentielle complexe d'une somme

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes, on a l'égalité suivante :

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}.$$

Remarque

On en déduit les propriétés suivantes :

1. pour tout nombre complexe z, on a :
$$\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$$
2. pour tout nombre complexe z et tout entier relatif n, on a :
$$\mathrm{e}^{nz} = (\mathrm{e}^z)^n\,.$$

2.2 Egalité entre deux exponentielles complexes

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes, on a l'équivalence suivante :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \text{ si, et seulement si, } z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$$

en notant $2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} = \{2\mathrm{i}k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

3 Résolution de l'équation $\mathrm{e}^z = a$ avec a un nombre complexe

Soit a un nombre complexe.

— Si a est nul alors l'équation $\mathrm{e}^z = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
— Si a est non nul alors l'équation $\mathrm{e}^z = a$ possède une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont les nombres complexes
$$z = \ln(r) + \mathrm{i}\theta$$
avec r le module de a et θ un argument de a.

III Interprétations géométriques

On se place dans le plan complexe.

1 Module et arguments de $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$

1.1 Propriété

Soit ω, z et z' des nombres complexes tel que $\omega \neq z$ et $\omega \neq z'$ de points images notés Ω, M et M'.

Alors :

$$\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M} \text{ et } \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) [2\pi] .$$

1.2 Traduction de l'alignement et l'orthogonalité

Soit Ω, M et M' trois points du plan tels $\Omega \neq M$ et $\Omega \neq M'$ d'affixes respectivement notées ω, z et z'.

1. Les points Ω, M et M' sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ est un réel.
2. Les droites (ΩM) et $(\Omega M')$ sont orthogonales si, et seulement si, $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ est un imaginaire pur.

2 Ecriture complexe de transformations du plan vues au collège

Dans ce paragraphe, M et M' sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'.

2.1 Translation

Soit b un nombre complexe.

M' est l'image de M par la **translation de vecteur d'affixe** b si, et seulement si,

$$z' = z + b.$$

2.2 Homothétie

Soit α un nombre **réel** et Ω un point du plan d'affixe ω.

M' est l'image de M par l'**homothétie de centre** Ω **et de rapport** α si, et seulement si,

$$z' - \omega = \alpha(z - \omega).$$

2.3 Rotations

Soit θ un nombre **réel** et Ω un point du plan d'affixe ω.

M' est l'image de M par l**a rotation de centre** Ω **et d'angle** θ si, et seulement si,

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

3 Applications $z \mapsto az+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

L'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = az + b$$

est dite **similitude directe**.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = f(z)$.

— **Cas où $a = 1$.**

On a alors l'équivalence suivante : $z' = f(z)$ si, et seulement si, $z' - z = b$.

L'application f est donc la **translation** de vecteur d'affixe b.

— **Cas où $a \neq 1$.**

f admet un point fixe ω donné par $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ dont le point image est noté Ω.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z' = f(z) \quad & \text{si, et seulement si,} \quad z' - \omega = \; a\,(z-\omega)\,. \\ & \text{si, et seulement si,} \quad z' - \omega = \; |a|\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\arg(a)}\,(z-\omega)\right). \\ & \text{si, et seulement si,} \quad z' - \omega = \; \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\arg(a)}\,(|a|\,(z-\omega))\,. \end{aligned}$$

L'application f est donc la **composée commutative** :

— de l'**homothétie** de centre Ω et de rapport $|a|$;
— de la **rotation** de centre Ω et d'angle $\arg(a)$.

4 Applications $z \mapsto a\overline{z}+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

L'application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = a\overline{z} + b$$

est dite **similitude indirecte**. Elle peut s'écrire sous la forme de la **composée non commutative**

$$g = f \circ s$$

avec :

— $s : z \mapsto \overline{z}$ qui est la **symétrie axiale** d'axe la droite des réels ;
— $f : z \mapsto az + b$ qui est une **similitude directe**.

CHAPITRE 10

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point et $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1 Définitions

Soit a et b deux **fonctions continues** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'**équation différentielle linéaire du premier ordre**

$$(E) : y' + a(t)y = b(t)$$

si f est **dérivable sur** I et vérifie $\forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$.

Remarques
- Lorsque la fonction b est nulle, on dit que l'équation (E) est **homogène**.
- Lorsque la fonction a est constante, on dit que l'équation (E) est **à coefficient constant**.

2 Forme générale des solutions

Soit a et b deux **fonctions continues** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les solutions de l'**équation différentielle linéaire du premier ordre** $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ s'obtiennent en additionnant :

- **une solution particulière** de $(E) : y' + a(t)y = b(t)$;
- **les solutions de l'équation différentielle homogène associée** $(H) : y' + a(t)y = 0$.

L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) sur I peut donc s'écrire $\mathcal{S}_E = y_0 + \mathcal{S}_H$ où y_0 est une solution particulière de (E) sur I et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H) sur I.

Remarque
On verra dans le chapitre "Espaces affines" que $\mathcal{S}_E$ est un espace affine de dimension 1 sur $\mathbb{K}$.

3 Solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$.

Soit a une **fonction continue** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire **homogène** $(H) : y' + a(t)y = 0$ sur I est

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

où A désigne une primitive de la fonction a sur I.

Remarque
Dans le chapitre "Espaces vectoriels", on verra que $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$.

4 Solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$.

4.1 Principe de superposition de solutions

Soit a, b_1 et b_2 des fonctions **continues** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si $\begin{cases} f_1 : I \to \mathbb{K} \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } y' + a(t)y = b_1(t) \text{ sur } I \\ f_2 : I \to \mathbb{K} \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } y' + a(t)y = b_2(t) \text{ sur } I \end{cases}$

alors, $f_1 + f_2 : I \to \mathbb{K}$ est solution sur I de l'équation différentielle linéaire $y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$.

4.2 Détermination d'une solution particulière y_0

Soit a et b deux **fonctions continues** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

S'il n'y a **pas de solution particulière évidente** pour

$$(E) : y' + a(t)y = b(t)$$

ou si le **principe de superposition des solutions n'est pas applicable** pour en déterminer une alors on pourra chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_0 : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$$

avec A une primitive de a sur I et λ une **fonction inconnue** dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque
Cette méthode est dite méthode de "**variation de la constante**". Elle conduit à la détermination d'une fonction λ telle que $\lambda' : t \mapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ donc à la recherche d'une primitive de la fonction $t \mapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.

5 Théorème de Cauchy : existence et unicité

Soit a et b deux **fonctions continues** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pout tout $t_0 \in I$ et tout $\alpha_0 \in \mathbb{K}$, il **existe une unique solution** f sur I de l'équation différentielle linéaire **du premier ordre**

$$y' + a(t)y = b(t)$$

telle que $f(t_0) = \alpha_0$.

Remarque
Déterminer cette unique solution f revient à résoudre un problème dit de Cauchy.

II Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1 Définitions

Soit a et b deux **éléments de** $\mathbb{K}$ et g une **application continue** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'**équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**

$$(E) : y'' + ay' + by = g(t)$$

si f est **deux fois dérivable sur** I et vérifie :

$$\forall t \in I, f''(t) + af'(t) + bf(t) = g(t).$$

Remarque
Lorsque la fonction g est nulle, on dit que l'équation (E) est **homogène**.

2 Forme générale des solutions

Soit a et b deux **éléments de** $\mathbb{K}$ et g une **application continue** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les solutions de l'**équation différentielle linéaire du second ordre** $(E) : y'' + ay' + by = g(t)$ s'obtiennent en additionnant :

— **une solution particulière de** $(E) : y'' + ay' + by = g(t)$;
— **les solutions de l'équation différentielle homogène associée** $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) sur I peut donc s'écrire $\mathcal{S}_E = y_0 + \mathcal{S}_H$ où y_0 est une solution de (E) sur I et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H) sur I.

Remarque
On verra dans le chapitre "Espaces affines" que $\mathcal{S}_E$ est un espace affine de dimension 2 sur $\mathbb{K}$.

3 Solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' + ay' + by = 0$

3.1 Equation caractéristique

Soit a et b deux **éléments de** $\mathbb{K}$.

La recherche de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

$$(H) : y'' + ay' + by = 0$$

sour la forme $t \mapsto e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{K}$ conduit à l'équation

$$(EC) : r^2 + ar + b = 0$$

dite **équation caractéristique** associée à (H).

Remarque
Dans le cas où les coefficients a et b ne sont pas tous deux constants (qui sera étudié en 2e année MPI), la recherche de solutions de (H) sous la forme $t \mapsto e^{rt}$ ne conduit pas à l'équation caractéristique. Le recours à l'équation caractéristique est donc réservé au cas des coefficients constants.

3.2 Ensemble des solutions dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit a et b deux **éléments de** $\mathbb{C}$.

On note S_H l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

- Si l'équation caractéristique (EC) a deux racines distinctes r_1 et r_2 alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \,|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

- Si l'équation caractéristique (EC) a une racine double r alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\, \mathrm{e}^{rt} \,|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

3.3 Ensemble des solutions à valeurs réelles dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit a et b deux **éléments de** $\mathbb{R}$.

On note S_H l'ensemble des **solutions réelles** sur I de l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

- Si l'équation caractéristique (EC) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \,|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si l'équation caractéristique (EC) a une racine réelle double r alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\, \mathrm{e}^{rt} \,|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si l'équation caractéristique (EC) a deux racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$ alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} \left(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)\right) \,|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

avec $\alpha = \mathrm{Re}\,(r)$ et $\beta = \mathrm{Im}(r)$.

3.4 Structure de l'ensemble des solutions

Soit a et b deux **éléments de** $\mathbb{K}$.

Les deux points précédents permettent de mettre en évidence le résultat suivant, sur lequel nous passerons rapidement à ce stade de l'année, qui sera repris et généralisé en 2e année MPI.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle linéaire $(H) : y'' + ay' + by = 0$ est donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \,|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\right\}$$

où (y_1, y_2) un couple de **fonctions non colinéaires solutions** de (H) sur I.

Remarque
Dans le chapitre "Espaces vectoriels", on verra que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{K}$.

4 Solution particulière de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = g(t)$.

4.1 Principe de superposition de solutions

Soit a et b deux **éléments** de $\mathbb{K}$, $g_1$et g_2 deux **fonctions continues** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si $\begin{cases} f_1 : I \to \mathbb{K} \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } y'' + ay' + by = g_1(t) \text{ sur } I \\ f_2 : I \to \mathbb{K} \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } y'' + ay' + by = g_2(t) \text{ sur } I \end{cases}$

alors,

$f_1 + f_2 : I \to \mathbb{K}$ est solution sur I de l'équation différentielle linéaire $y'' + ay' + by = g_1(t) + g_2(t)$.

4.2 Détermination d'une solution particulière y_0

Soit a et b deux **éléments de** $\mathbb{K}$ et g une **application continue** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Selon le programme de MP2I,

s'il n'y a **pas de solution particulière** y_0 **évidente** pour

$$(E) : y'' + ay' + by = g(t)$$

ou si le **principe de superposition ne s'applique pas** pour en déterminer une, les étudiants doivent savoir en trouver une dans les trois cas suivants.

♢ **Cas où g est une fonction polynomiale de degré n**

On pourra chercher y_0 sous la forme d'une fonction polynomiale de degré n si b est différent de 0 ou de degré $n+1$ si b est égal à 0.

♢ **Cas où $g : t \mapsto A\, e^{\lambda t}$ avec A et λ deux éléments de $\mathbb{K}$**

On pourra chercher y_0 sous l'une des formes suivantes selon la valeur de λ :

$$y_0 : t \mapsto \begin{cases} \alpha\, e^{\lambda t} & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } (EC) \\ \alpha t\, e^{\lambda t} & \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } (EC) \\ \alpha t^2\, e^{\lambda t} & \text{si } \lambda \text{ est racine double de } (EC) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{K}.$$

♢ **Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $g : t \mapsto B\, \cos(\omega t)$ [ou $g : t \mapsto B\, \sin(\omega t)$] avec B et ω deux éléments de $\mathbb{R}$**

On pourra, à l'aide de la méthode décrite ci-dessus, déterminer une solution particulière z_0 de l'équation

$$y'' + ay' + by = B\, e^{i\omega t}$$

et conclure que $y_0 = \mathrm{Re}\,(z_0)$ [ou $y_0 = \mathrm{Im}\,(z_0)$ selon le cas étudié] convient.

Remarque
Dans le cas général où la fonction g n'est pas d'une des formes vues ci-dessus, une méthode dite de "variation des constantes" sera présentée en 2e année MPI.

5 Théorème de Cauchy : existence et unicité (preuve hors programme)

Soit a et b deux **éléments de** $\mathbb{K}$ et g une **application continue** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pout tout $t_0 \in I$ et tout $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{K}^2$, il **existe une unique solution** f sur I de l'équation différentielle linéaire **du second ordre à coefficients constants**

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

telle que $f(t_0) = \alpha_0$ et $f'(t_0) = \beta_0$.

<u>Remarque</u>
Déterminer cette unique solution f revient à résoudre un problème dit de Cauchy.

CHAPITRE 11

COMPLÉMENTS SUR LES NOMBRES RÉELS

Ce chapitre complète le chapitre "Inégalités". On y présente notamment les notions de borne supérieure et borne inférieure d'une partie qui permettront de démontrer des résultats sur les suites réelles.

I Approximations décimales d'un réel

1 Propriété-définition

Pour tout réel x et tout entier naturel n, il existe **un unique nombre décimal** d_n tel que :

$$10^n d_n \text{ est un entier relatif et } d_n \leq x < d_n + \frac{1}{10^n}.$$

— d_n est appelé valeur décimale approchée de x à la précision 10^{-n} par défaut.
— $d_n + 10^{-n}$ est appelé valeur décimale approchée de x à la précision 10^{-n} par excès.

Remarques

— Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $d_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.
— Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, il existe un unique entier a_k dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ tel que $d_k - d_{k-1} = \dfrac{a_k}{10^k}$.
— Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ avec $a_0 = \lfloor x \rfloor$.

2 Développement décimal d'un réel

Pour tout réel x, la suite de nombres décimaux (d_n) définie ci-dessus converge vers x.

Avec les notations précédentes, on peut donc écrire :

$$x = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0, a_1 a_2 \ldots$$

II Parties denses de $\mathbb{R}$

1 Définition

Une partie X de $\mathbb{R}$ est dite **dense dans** $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Exemples

— $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.

— Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont denses dans $\mathbb{R}$:

  — l'ensemble des nombres décimaux noté $\mathbb{D}$;
  — l'ensemble des nombres rationnels noté $\mathbb{Q}$;
  — l'ensemble des nombres irrationnels noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2 Caractérisation séquentielle des parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, tout réel est limite d'une suite d'éléments de X.

III Borne inférieure et supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

1 Définitions

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

— S'il existe, **le plus petit des majorants** de X est appelé borne supérieure de X et noté $\sup X$.

— S'il existe, **le plus grand des minorants** de X est appelé borne inférieure de X et noté $\inf X$.

Remarques

— Si la borne supérieure (resp. la borne inférieure) d'une partie X existe, celle-ci n'est pas nécessairement un élément de X.
— Si X admet un maximum (c'est-à-dire un plus grand élément) alors X admet une borne supérieure et celle-ci est égale au maximum de X.
— Si X admet un minimum (c'est-à-dire un plus petit élément) alors X admet une borne inférieure et celle-ci est égale au minimum de X.

2 Propriété de la borne supérieure ou de la borne inférieure (admise)

— Toute **partie non vide et majorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
— Toute **partie non vide et minorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

3 Traduction séquentielle de la borne supérieure et inférieure

◇ Si X est une partie de $\mathbb{R}$ **non vide et majorée** (respectivement non vide et non majorée) alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (respectivement $+\infty$).

◇ Si X est une partie de $\mathbb{R}$ **non vide et minorée** (respectivement non vide et non minorée) alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\inf X$ (respectivement $-\infty$).

4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle **droite achevée** l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ défini par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Sur cette droite achevée, on étend la relation d'ordre $\leq$, l'addition et la multiplication connues sur $\mathbb{R}$ avec les conventions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$.
2. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
3. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.
6. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ -\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
7. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x < 0 \\ +\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$

<u>Remarque</u>
Si X est une partie non vide et non majorée (resp. non minorée) de $\mathbb{R}$, il peut être pratique de convenir que $\sup X = +\infty$ (resp. $\inf X = -\infty$) en considérant X comme une partie de $\overline{\mathbb{R}}$.

5 Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tous réels a et b dans X tels que $a \leq b$, le segment $[a, b]$ est inclus dans X.

<u>Remarques</u>

— On appelle **parties convexes** de $\mathbb{R}$ les parties X de $\mathbb{R}$ qui vérifient :

"pour tous réels a et b dans X tels que $a \leq b$, le segment $[a, b]$ est inclus dans X".

— D'après le résultat ci-dessus, les intervalles de $\mathbb{R}$ coïncident donc avec les parties convexes de $\mathbb{R}$.
— La notion de partie convexe est au programme de 2e année MPI où elle sera abordée dans le cadre plus général des espaces normés.

CHAPITRE 12

SUITES NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, on consolide et élargit les connaissances sur les suites réelles vues au lycée avant de faire une brève extension aux suites complexes.

I Généralités sur les suites réelles

1 Définition

Toute fonction u définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite suite réelle.

Notations usuelles

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est noté u_n (terme général de la suite).
- La fonction u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou encore (u_n).

Remarque

Plus généralement, on appelle suite réelle et on note $(u_n)_{n\geq p}$ toute fonction u définie sur

$$[\![p, +\infty[\![= \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq p\}$$

et à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec p un entier naturel fixé.

Dans ce chapitre, pour simplifier la présentation des résultats, on privilégie les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ mais tout peut être adapté aux suites $(u_n)_{n\geq p}$ avec p entier naturel fixé.

2 Modes de définition d'une suite

Une suite réelle (u_n) peut être définie :

1. explicitement par la donnée, pour tout entier naturel n, de l'expression de u_n en fonction de n ;
2. implicitement par la donnée d'une propriété vérifiée par les termes de la suite ;
3. par récurrence.

3 Suites majorées, minorées, bornées

3.1 Définitions

Soit (u_n) une suite réelle et $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ la partie de $\mathbb{R}$ contenant tous les termes de la suite.

— La suite (u_n) est dite **majorée** si A est majorée
c'est-à-dire s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq M$.

— La suite (u_n) est dite **minorée** si A est minorée
c'est-à-dire s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, on a $m \leq u_n$.

— La suite (u_n) est dite **bornée** si A est bornée
c'est-à-dire s'il existe des réels M et m tel que, pour tout entier naturel n, on a $m \leq u_n \leq M$.

3.2 Caractérisation du caractère borné

Une suite réelle (u_n) est bornée si, et seulement si, la suite $(|u_n|)$ est majorée par un réel strictement positif.

4 Suites stationnaires, monotones, strictement monotones

Une suite réelle (u_n) est dite :

— **stationnaire** s'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier n supérieur à p, on a $u_n = u_p$.

— **croissante** si, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq u_{n+1}$.
— **décroissante** si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

— **strictement croissante** si, pour tout entier naturel n, on a $u_n < u_{n+1}$
— **strictement décroissante** si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} < u_n$.

— **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
— **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

II Limite d'une suite réelle

1 Généralités sur les limites

1.1 Définition d'une limite finie

Soit (u_n) une suite réelle et l un réel.

On dit que la suite (u_n) a pour limite l si tout segment centré en l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, ce qui se traduit par :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

<u>Remarques</u>
On peut démontrer que cette définition est équivalente à celle vue en classe de Terminale c'est-à-dire que la suite (u_n) a pour limite un réel l si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

1.2 Définition d'une limite infinie

Soit (u_n) une suite réelle.

1. On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, ce qui se traduit par :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A.$$

2. On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang ce qui se traduit par :

$$\forall A \in \mathbb{R}_-^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A.$$

Remarques
Ces définitions correspondent à celles qui ont été vues en classe de Terminale.

1.3 Unicité de la limite d'une suite

Si (u_n) est une suite réelle de limite l alors l est **unique** et notée $l = \lim u_n$ ou $u_n \longrightarrow l$.

2 Cas particulier des limites finies : retour en 0

Soit (u_n) une suite réelle et l un réel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| = |(u_n - l) - 0| = ||u_n - l| - 0|$ donc :

— la suite (u_n) a pour limite l si, et seulement si, la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.
— la suite (u_n) a pour limite l si, et seulement si, la suite $(|u_n - l|)$ converge vers 0.

Remarque
Les deux équivalences précédentes sont très souvent utilisées en pratique.

3 Suites convergentes et divergentes

3.1 Définitions

Une suite réelle (u_n) est dite :

— **convergente** si elle admet une **limite réelle** l et, dans ce cas, on dit que (u_n) converge vers l.
— **divergente** sinon.

3.2 Propriétés

1. Toute suite réelle convergente est bornée.
2. Toute suite réelle non bornée est divergente.

Remarques

1. La propriété 2. se déduit de la propriété 1. par contraposition.
2. On dit que la propriété 2. est la contraposée de la propriété 1.

4 Opérations sur les limites

4.1 Addition

Soit (u_n) et (u'_n) deux suites réelles.

1. Si $u_n \longrightarrow l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $u'_n \longrightarrow l'$ avec $l' \in \mathbb{R}$ alors $u_n + u'_n \longrightarrow l + l'$.
2. Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $u'_n \longrightarrow l'$ avec $l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $u_n + u'_n \longrightarrow +\infty$.
3. Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $u'_n \longrightarrow l'$ avec $l' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ alors $u_n + u'_n \longrightarrow -\infty$.

4.2 Multiplication par un réel

Soit (u_n) une suite réelle et α un réel.

1. Si $u_n \longrightarrow l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors $\alpha u_n \longrightarrow \alpha l$.
2. Si $u_n \longrightarrow +\infty$ alors $\alpha u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$.
3. Si $u_n \longrightarrow -\infty$ alors $\alpha u_n \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$.

4.3 Produit

Soit (u_n) et (u'_n) deux suites réelles.

1. Si $u_n \longrightarrow l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $u'_n \longrightarrow l'$ avec $l' \in \mathbb{R}$ alors $u_n u'_n \longrightarrow ll'$.
2. Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $u'_n \longrightarrow l'$ avec $l' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ alors $u_n u'_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } l' > 0 \\ -\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$.
3. Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $u'_n \longrightarrow l'$ avec $l' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ alors $u_n u'_n \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{si } l' > 0 \\ +\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$.

4.4 Inverse

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Si $u_n \longrightarrow l$ avec $l \in \mathbb{R}^*$ alors $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow \dfrac{1}{l}$.
2. Si $u_n \longrightarrow l$ avec $l \in \{-\infty, +\infty\}$ alors $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow 0$.
3. Si $u_n \longrightarrow 0$ avec les termes u_n strictement positifs à partir d'un certain rang alors $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow +\infty$.
4. Si $u_n \longrightarrow 0$ avec les termes u_n strictement négatifs à partir d'un certain rang alors $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow -\infty$.

5 Limites et relation d'ordre

5.1 Passage à la limite d'une inégalité large

Soit (u_n) et (u'_n) deux suites réelles convergentes respectivement vers des réels l et l'.

S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq u'_n$ alors $l \leq l'$.

5.2 Signes des termes d'une suite et signe de la limite

Soit (u_n) une suite réelle de limite l appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$.

— Si $l > 0$ alors il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n sont strictement positifs.
— Si $l < 0$ alors il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n sont strictement négatifs.

6 Existence d'une limite finie

6.1 Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles et l un réel.

S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent vers l alors (u_n) converge vers l.

6.2 Propriété pratique

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles et l un réel.

S'il existe un rang à partir duquel on a

$$|u_n - l| \leq v_n \text{ avec } (v_n) \text{ convergente vers } 0$$

alors (u_n) converge vers l.

6.3 Corollaires de la propriété pratique

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Si (u_n) converge vers un réel l alors $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
2. Si (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

7 Existence d'une limite infinie

7.1 Théorème de minoration

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow v_n \leq u_n$ et si (v_n) a pour limite $+\infty$ alors (u_n) a pour limite $+\infty$.

7.2 Théorème de majoration

Soit (u_n) et (w_n) deux suites réelles.

S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq w_n$ et si (w_n) a pour limite $-\infty$ alors (u_n) a pour limite $-\infty$.

8 Cas des suites monotones

8.1 Théorèmes de la limite monotone

- Si (u_n) est une suite réelle **croissante et majorée** alors (u_n) converge vers $l = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) est une suite réelle **croissante et non majorée** alors (u_n) a pour limite $+\infty$.

- Si (u_n) est une suite réelle **décroissante et minorée** alors (u_n) converge vers $l = \inf \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) est une suite réelle **décroissante et non minorée** alors (u_n) a pour limite $-\infty$.

8.2 Théorème des suites adjacentes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(v_n - u_n)$ converge vers 0 alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite réelle l qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$.

Remarque
Deux suites réelles (u_n) et (v_n) monotones, de sens de variation opposés telles que $(v_n - u_n)$ converge vers 0 sont dites **suites adjacentes**.

III Suites extraites

1 Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

On appelle suite extraite de (u_n) toute suite (v_k) telle que $\forall k \in \mathbb{N}, v_k = u_{\varphi(k)}$ avec φ une fonction strictement croissante définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2 Suites extraites et limites

2.1 Propriété

Si (u_n) est une suite réelle de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toutes les suites extraites de (u_n) ont la même limite l.

2.2 Utilisation de suites extraites pour prouver une divergence de suite

Soit (u_n) une suite réelle.

- S'il existe une suite extraite de (u_n) qui diverge alors la suite (u_n) diverge.
- S'il existe deux suites extraites de (u_n) de limites réelles différentes alors la suite (u_n) diverge.

2.3 Utilisation des suites extraites particulières pour prouver une convergence de suite

Soit (u_n) une suite réelle.

Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite l avec l appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$ alors (u_n) a pour limite l.

2.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

IV Suites complexes

On étend ici brièvement aux suites complexes, lorsque cela a du sens, des notions ou résultats vus pour dans le cadre des suites réelles.

1 Définition

Toute fonction u définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite suite complexe.

2 Ce qui s'étend aux suites complexes

— Notation séquentielle, modes de définition d'une suite, suite stationnaire
— Limite finie : définition et caractérisation (cf infra), unicité, opérations sur les limites finies
— Convergence et divergence
— Suite bornée : définition (cf infra), lien avec la convergence
— Suites extraites : définitions, propriétés, théorème de Bolzano-Weierstrass

3 Ce qui ne s'étend pas aux suites complexes

— Suite majorée, suite minorée
— Monotonie d'une suite
— Notion de limite infinie
— Résultats utilisant la relation d'ordre dont les théorèmes d'existence de limite

4 Suite complexe bornée et limite d'une suite complexe

4.1 Suite complexe bornée

Une suite complexe (u_n) est dite bornée s'il existe un réel strictement positif M tel que, pour tout entier naturel n, $|u_n| \leq M$.

Remarque
Cela revient à dire que la suite réelle $(|u_n|)$ est majorée.

4.2 Limite d'une suite complexe

Soit (u_n) une suite complexe et l un complexe.

On dit que la suite (u_n) a pour limite l si tout disque fermé centré en l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, ce qui se traduit par :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Remarque
Cela revient à dire que la suite réelle $(|u_n - l|)$ a pour limite 0.

4.3 Caractérisation de la limite d'une suite complexe

Soit (u_n) une suite complexe et l un complexe.

La suite complexe (u_n) a pour limite l si, et seulement si, les suites réelles $(\mathrm{Re}\,(u_n))$ et $(\mathrm{Im}\,(u_n))$ ont respectivement pour limites $\mathrm{Re}\,(l)$ et $\mathrm{Im}\,(l)$.

CHAPITRE 13

SUITES NUMÉRIQUES PARTICULIÈRES

Dans ce chapitre, pour simplifier, on suppose que les suites sont indexées à partir de l'indice 0.

I Suites arithmétiques

1 Définition

Soit (u_n) une suite réelle (resp. complexe).

La suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un réel (resp. complexe) r tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est unique et appelé raison de la suite (u_n).

2 Expression du terme général

Si (u_n) est une suite arithmétique réelle (resp. complexe) de raison r alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

3 Limite

Soit (u_n) une suite arithmétique réelle (resp. complexe) de raison r.

- Si $r = 0$ alors (u_n) converge vers u_0.
- Si $r \neq 0$ alors (u_n) diverge avec**, dans le cas où la suite est réelle**, $u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$.

4 Somme finie de termes consécutifs

Si (u_n) est une suite arithmétique réelle (resp. complexe) de raison r alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}.$$

II Suites géométriques

1 Définition

Soit (u_n) une suite réelle (resp. complexe).

La suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un réel (resp. complexe) q tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est unique et appelé raison de la suite (u_n).

2 Expression du terme général

Si (u_n) est une suite géométrique réelle (resp. complexe) de raison q alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n.$$

3 Limite

Soit (u_n) une suite géométrique réelle (resp. complexe) de raison q.

— Si $|q| < 1$ ou $u_0 = 0$ alors (u_n) converge vers 0.
— Si $|q| = 1$ et $u_0 \neq 0$ alors (u_n) diverge sauf dans le cas particulier $q = 1$ où elle converge vers u_0.
— Si $|q| > 1$ et $u_0 \neq 0$ alors (u_n) diverge avec, **dans le cas où la suite est réelle et $q > 1$,**

$$u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}.$$

4 Somme finie de termes consécutifs

Si (u_n) est une suite géométrique réelle (resp. complexe) de raison q alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \sum_{k=p}^{n} u_k = \begin{cases} u_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_p \times (n-p+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

III Suites arithmético-géométriques

1 Définition

Soit (u_n) une suite réelle (resp. complexe).

La suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe un réel (resp. complexe) a et un réel (resp. complexe) b tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b.$$

Remarques

— Si $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques de raison b.
— Si $b = 0$, on retrouve les suites géométriques de raison a.

Dans la suite, on suppose que $a \neq 1$.

2 Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la donnée de u_0 réel (resp. complexe) et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

avec a et b des réels (resp. complexes) tel que $a \neq 1$.

<u>**Méthode d'obtention du terme général**</u> **(à connaître)**

— La **seule** suite (v_n) **constante** qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n + b$ et donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{b}{1-a}.$$

— La suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - v_n$ est alors une **suite géométrique** de raison a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times a^n.$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n.$$

3 Limite

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la donnée de son premier terme et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

avec a et b des réels (resp. complexes) tels que $a \neq 1$.

— Si $|a| < 1$ ou $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$ alors (u_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a}$.

— Si $|a| \geq 1$ et $u_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$ alors (u_n) diverge avec, **dans le cas où la suite est réelle et** $a > 1$**,**

$$u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > \dfrac{b}{1-a} \\ -\infty & \text{si } u_0 < \dfrac{b}{1-a} \end{cases}.$$

<u>Remarques</u>
L'expression du terme général et la limite d'une suite arithmético-géométrique ne sont pas à retenir. Elles sont à savoir retrouver avec la méthode décrite ci-dessus et les résultats sur la convergence d'une suite géométrique qui eux sont à connaître parfaitement.

IV Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1 Définition

Soit (u_n) une suite réelle (resp. complexe).

La suite (u_n) est dite **récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants** s'il existe des réels (resp. complexes) a et b tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

2 Equation caractéristique associée

Soit a et b deux réels (resp. complexes).

La recherche de suites géométriques non nulles de raison q vérifiant la relation de récurrence

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

conduit à l'équation dite **"équation caractéristique"** suivante :

$$(EC) : q^2 + aq + b = 0.$$

3 Expression du terme général

3.1 Cas où (u_n) est COMPLEXE et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

— Si (EC) a deux racines distinctes q_1 et q_2 alors **il existe des complexes** λ_1 **et** λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n.$$

— Si (EC) a une racine double q alors **il existe des complexes** λ_1 **et** λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n)\, q^n.$$

3.2 Cas où (u_n) est REELLE et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

— Si (EC) a deux racines réelles distinctes q_1 et q_2 alors **il existe des réels** λ_1 **et** λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n.$$

— Si (EC) a une racine réelle double q alors **il existe des réels** λ_1 **et** λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n)\, q^n.$$

— Si (EC) a deux racines complexes conjuguées q et $\overline{q}$ alors **il existe des réels** λ_1 **et** λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))\, r^n$$

avec $r e^{\mathrm{i}\theta}$ forme trigonométrique de q.

V Cas simples de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse à la suite réelle (u_n) définie par récurrence par la donnée de :

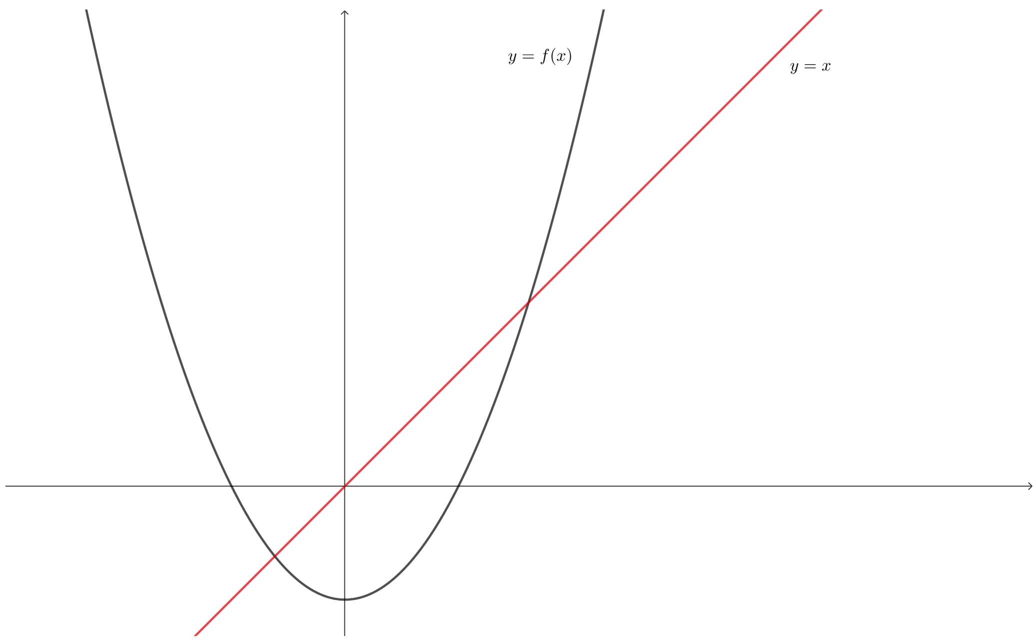
$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point et $f : I \to I$ une fonction.

Remarque
Cette suite est bien définie car, par récurrence immédiate, **tous les termes de la suite sont dans** I.

1 Représentation graphique des termes de la suite

On peut représenter graphiquement les termes de la suite réelle (u_n) sur l'axe des réels en s'appuyant sur la courbe de f et la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé du plan.



Cela peut permettre de conjecturer le comportement de la suite (u_n) : suite monotone ou non, suite bornée ou non, suite convergente ou non, valeur de la limite éventuelle,...

2 Limite éventuelle

Si (u_n) converge vers un réel $l \in I$ en lequel f est continue alors $f(l) = l$.

Remarques
- La réciproque de la propriété précédente est FAUSSE.
- La recherche des réels $l \in I$ tel que $f(l) = l$ fournit uniquement **les limites éventuelles** de (u_n).
- Une **étude complémentaire** permet de conclure si (u_n) converge vers une des valeurs trouvées.

$\diamondsuit$ Dans certains cas, l'étude de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ peut être utile pour montrer l'existence de ses racines qui sont les limites éventuelles de (u_n).

3 Monotonie éventuelle

Pour montrer une monotonie éventuelle de (u_n), on regarde si le signe de

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} f(u_n) - u_n & (1) \\ f(u_n) - f(u_{n-1}) & (2) \end{cases}$$

est **fixe lorsque** n **varie dans** $\mathbb{N}^*$ **ou à partir d'un certain rang.**

♢ Dans certains cas, l'étude de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ peut aider à déterminer le signe de (1).

♢ Dans le cas où f est **CROISSANTE** sur I,

— une récurrence simple avec (2) montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_1 - u_0$:

$$\begin{cases} \text{Si } u_0 < u_1 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{Si } u_0 > u_1 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

— l'étude de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ peut être utile pour déterminer le signe $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$.

CHAPITRE 14

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Dans ce chapitre, on commence par résumer tout ce que nous avons vu depuis le début de l'année en termes de vocabulaire et notations ensemblistes (sans aucun développement théorique conformément au programme de MP2I) puis on aborde la notion d'application entre ensembles.

I Ensembles

1 Généralités

1.1 Définitions

— Un ensemble est une **collection d'objets,** sans répétition et non ordonnée.

— Les objets de l'ensemble sont appelés les **éléments de l'ensemble.**
  — Si x est un élément de l'ensemble E, on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$.
  — Dans le cas contraire, on dit que x **n'appartient pas** à E et on note $x \notin E$.

— L'ensemble sans élément est appelé l'**ensemble vide** et noté $\emptyset$.
— Les ensembles avec un seul élément sont appelés des **singletons**.
— Les ensembles avec deux éléments sont appelés des **paires**.

1.2 Modes de définition d'un ensemble

Un ensemble E peut être défini :

— **en extension**, c'est-à-dire **en explicitant tous les éléments de l'ensemble** E, dans le cas où il compte un nombre fini d'éléments appelé **cardinal** de l'ensemble. Les éléments de l'ensemble sont ainsi **tous cités entre accolades.**

  Par exemple :
  — $E = \{\mathrm{i}\}$ singleton contenant le nombre complexe i ;
  — $E = \{\cos, \sin\}$ paire contenant les fonctions cosinus et sinus ;
  — $E = \{2, 3, 5, 7\}$ ensemble des nombres premiers inférieurs à 10 ;
  — $E = \{3, 4, \ldots, 10\}$ ensemble des entiers compris entre 3 et 10 au sens large (noté aussi $[\![3, 10]\!]$).

— **en compréhension**, c'est-à-dire **en donnant des propriétés vérifiées par les éléments de l'ensemble et eux seuls.** Là encore, on utilise **des accolades.**

Par exemple :
— $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0\,[2\pi]\}$ ensemble des réels congrus à 0 modulo 2π ;
— $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
— $E = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, z = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{5}\right)\right\}$ ensemble des racines 5−ièmes de l'unité.
— $E = \{\alpha \exp \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \alpha \exp(x)$ lorsque α parcourt $\mathbb{R}$.

2 Inclusion entre ensembles et parties

Soit E un ensemble.

2.1 Inclusion

On dit qu'un ensemble F est **inclus dans** E et on note $F \subset E$, si tous les éléments de F appartiennent à E, c'est-à-dire : $\forall x, (x \in F \Rightarrow x \in E)$.

2.2 Parties

On dit qu'un ensemble F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E si F est inclus dans E.

2.3 Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'**ensemble des parties** de E, c'est-à-dire $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$.

3 Egalité entre ensembles

3.1 Définition

On dit que deux ensembles E et F sont **égaux**, et on note $E = F$, s'ils ont les mêmes éléments, c'est-à-dire : $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$.

3.2 Caractérisation de l'égalité par double inclusion

Deux ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, $E \subset F$ et $F \subset E$.

4 Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble et, A et B deux parties de E.
Soit I un ensemble et $\{A_i \mid i \in I\}$ un ensemble de parties de E.

4.1 Réunion

On appelle réunion de A et B, et on note $A \cup B$, la partie de E définie par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Plus généralement, on définit la réunion de parties A_i de E, avec i qui varie dans un ensemble I :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i_0 \in I, x \in A_{i_0}\}.$$

4.2 Intersection

On appelle intersection de A et B, et on note $A \cap B$, la partie de E définie par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Plus généralement, on définit l'intersection de parties A_i de E, avec i qui varie dans un ensemble I :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

4.3 Différence

On appelle différence de B dans A, et on note $A \backslash B$, la partie de E définie par $A \backslash B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

4.4 Complémentaire

On appelle complémentaire de A dans E la partie $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ qui est encore notée $\overline{A}$ ou A^c (en l'absence d'ambiguité sur l'ensemble dans lequel le complémentaire est considéré).

4.5 Quelques règles de calcul

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ et $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$.
2. $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.

4.6 Recouvrement disjoint et partition d'un ensemble

L'ensemble $\{A_i \mid i \in I\}$ de parties de E est dit **recouvrement disjoint** de E si les deux conditions suivantes sont réunies :

1. $E = \bigcup_{i \in I} A_i$;
2. $\forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Dans ce cas, on note parfois $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ au lieu de $E = \bigcup_{i \in I} A_i$.

NB - Un recouvrement disjoint de E qui ne contient pas l'ensemble vide est dit **partition** de E.

5 Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles

Soient $E_1, ..., E_n$ des ensembles.

On appelle produit cartésien de $E_1, ..., E_n$ l'ensemble noté $E_1 \times \cdots \times E_n$ défini par

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i\}.$$

Remarques

— $(x_1, \ldots, x_n)$ est appelé un n-uplet : les x_i sont **ordonnés et éventuellement répétés**.

— Lorsque tous les E_i sont égaux à E, le produit cartésien de $E_1, ..., E_n$ est aussi noté E^n.

II Applications

Soit E, F et H des ensembles.

1 Définitions de base

Il s'agit ici d'étendre aux applications entre deux ensembles quelconques des notions et résultats vus au chapitre 4 dans le cadre particulier des fonctions de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

1.1 Applications

Une application f de E (ensemble de départ) dans F (ensemble d'arrivée) est un **objet mathématique** qui, **à tout élément** x de E, **associe un unique élément** de F noté $f(x)$.

Notation fonctionnelle

$$f: \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque
Conformément au programme de MP2I, on ne distingue pas les notions de fonction et d'application.

1.2 Image et antécédent

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Pour tout x élément de E, $f(x)$ est un élément de F appelé **l'image** de x par f.
2. Soit $y \in F$. S'il existe x dans E tel que $y = f(x)$ alors x est dit **un antécédent** de y par f.

1.3 Ensemble des applications

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

1.4 Egalité entre applications

On dit que deux applications f et g sont égales, et on note $f = g$, si les conditions suivantes sont réunies :
- f et g ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F ;
- pour tout x de $E, f(x) = g(x)$.

1.5 Graphe

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

On appelle graphe de f la partie G de $E \times F$ définie par :

$$G = \{(x; f(x)) \mid x \in E\}$$

1.6 Famille d'éléments d'un ensemble

Soit I et E des ensembles.

Une application f de I dans E est appelée **famille d'éléments de E indexée par I** et le plus souvent notée $(x_i)_{i\in I}$ au lieu de f en posant $x_i = f(i)$.

2 Fonctions particulières

2.1 Fonction indicatrice d'une partie

Soit A une partie de E.

L'application f de E dans $\{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in E, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est dite **fonction indicatrice** de A et notée $\mathbb{1}_A$.

2.2 Restriction

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E.

L'application $g : A \longrightarrow F$ définie par $\forall x \in A, g(x) = f(x)$ est dite **restriction** de f à A et notée $f_{|A}$.

2.3 Prolongement

Soit A une partie de E et $h : A \longrightarrow F$ une application.

Toute application $f : E \longrightarrow F$ telle que $f_{|A} = h$ est dite **prolongement** de h à E.

3 Image directe et image réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

3.1 Image

Soit A une partie de E.

On appelle image directe de A par f, et on note $f(A)$, **la partie de** F définie par :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

C'est **l'ensemble des images par f des éléments de A.**

3.2 Image réciproque

Soit B une partie de F.

On appelle image réciproque de B par f, et on note $f^{-1}(B)$, **la partie de** E définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

<u>Remarque</u>

- L'application f^{-1} n'existe pas en général donc $f^{-1}(B)$ n'est pas l'image directe de B par f^{-1}.
- Pour éviter la confusion, la notation provisoire $f^{*}(B)$ au lieu de $f^{-1}(B)$ peut être utilisée.

4 Composition d'applications

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

L'application $h : E \longrightarrow G$ définie par

$$\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$$

est dite c**omposée des applications** f et g et notée $h = g \circ f$.

5 Injection, surjection

5.1 Définitions

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite :

— **injection** (ou application injective) si tout élément de F a **au plus un antécédent** par f.

— **surjection** (ou application surjective) si tout élément de F a **au moins un antécédent** par f.

5.2 Composition

— La composée de deux injections est une injection.
— La composée de deux surjections est une surjection.

5.3 Caractérisations

Une application $f : E \longrightarrow F$ est :

— une **injection** si, et seulement si,

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

— une **surjection** si, et seulement si,

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

6 Bijection

6.1 Définitions

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **bijection** (ou application bijective) si tout élément de F a **un unique antécédent** par f.

Dans ce cas, l'application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ définie par

$$\forall y \in F, f^{-1}(y) = x \text{ avec } x \text{ l'unique élément de } E \text{ tel que } y = f(x)$$

est dite **bijection réciproque** de f et vérifie :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

6.2 Composition

— La composée de deux bijections est une bijection.
— La bijection réciproque de la composée $g \circ f$ où f et g sont des bijections est l'application

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

6.3 Caractérisation

Une application $f : E \longrightarrow F$ est une bijection si, et seulement si, f est une injection et une surjection.

CHAPITRE 15

LIMITE ET CONTINUITÉ

Dans ce chapitre, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.

I Etude locale des fonctions à valeurs réelles

1 Limite en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I.

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1 Définitions d'une limite finie

Soit l un nombre réel.

$\rightsquigarrow$ **Cas où a est un réel, appartenant à I ou extrémité de I.**

On dit que f admet pour limite l en a si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$.

$\rightsquigarrow$ **Cas où $a = +\infty$ est extrémité de I.**

On dit que f admet pour limite l en $+\infty$ si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$.

$\rightsquigarrow$ **Cas où $a = -\infty$ est extrémité de I.**

On dit que f admet pour limite l en $-\infty$ si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_-^*, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$.

1.2 Définitions d'une limite infinie

$\rightsquigarrow$ **Cas où a est un réel, appartenant à I ou extrémité de I.**

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a si : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$.
On dit que f admet pour limite $-\infty$ en a si : $\forall A \in \mathbb{R}_-^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq A$.

$\rightsquigarrow$ **Cas où $a = +\infty$ est extrémité de I.**

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$: si $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$.
On dit que f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}_-^*, \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$.

$\rightsquigarrow$ **Cas où $a = -\infty$ est extrémité de I.**

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_-^*, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A$.
On dit que f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}_-^*, \exists B \in \mathbb{R}_-^*, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A$.

1.3 Unicité

Si f admet une limite l en a alors celle-ci est unique et on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

1.4 Existence d'une limite en un point où la fonction est définie

Si f est **définie en** a et **possède une limite en** a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

<u>Remarque</u>
Dans ce cas, a est nécessairement un réel et on dit que f est continue en a. (cf II)

1.5 Condition nécessaire d'existence de limite

Si f possède une limite **finie** en a alors f est **bornée au voisinage de** a**.**

<u>Remarques</u>

- En MP2I, on se contente d'une approche simple de la notion de voisinage. Ainsi, on dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est **vraie au voisinage de** a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle :
  - ouvert centré en a si a est réel ;
  - de la forme $]A, +\infty[$ si $a = +\infty$;
  - de la forme $]-\infty, A[$ si $a = -\infty$.
- La notion de voisinage sera approfondie en MPI dans l'étude de la topologie des espaces normés.

2 Limite à gauche et à droite en un réel appartenant à I ou extrémité de I.

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2.1 Définitions

Soit a un point de $\mathbb{R}$, **appartenant à** I **ou extrémité de** I**.**

1. On dit que f admet une limite à gauche en a si la restriction $f_{|I\cap]-\infty,a[}$ admet une limite en a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ la limite obtenue.
2. On dit que f admet une limite à droite en a si la restriction $f_{|I\cap]a,+\infty[}$ admet une limite en a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ la limite obtenue.

<u>Remarque</u>
Bien noter que les intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ utilisés sont ouverts en a.

2.2 Condition nécessaire et suffisante d'existence de limite

Soit a un point de $\mathbb{R}$ **appartenant à** I **mais pas extrémité de** I**.**

f admet une limite en a si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont réunies :

1. f a une limite à gauche en a.
2. f a une limite à droite en a.
3. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

3 Caractérisation séquentielle de la limite

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$**, appartenant à** I ou **extrémité de** I, et l un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

f admet pour limite l en a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui admet pour limite a, la suite réelle $(f(x_n))$ admet pour limite l.

Remarque
Cette caractérisation séquentielle est très importante. D'une part, elle permet de démontrer la plupart des propriétés et théorèmes cités dans la suite de ce chapitre en revenant aux résultats connus sur les suites réelles. D'autre part, elle permet de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.

4 Opérations sur les limites

Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$**, appartenant à** I ou **extrémité de** I.

4.1 Addition

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles.

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ avec $l' \in \mathbb{R}$ alors $(f+g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l + l'$.
2. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ avec $l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $(f+g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ avec $l' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ alors $(f+g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

4.2 Multiplication par un réel

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles et λ un réel.

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda l$.
2. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$.
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$.

4.3 Produit

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles.

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ avec $l' \in \mathbb{R}$ alors $(fg)(x) \longrightarrow ll'$.
2. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ avec $l' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ alors $(fg)(x) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } l' > 0 \\ -\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$.
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ avec $l' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ alors $(fg)(x) \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{si } l' > 0 \\ +\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$.

4.4 Inverse

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs réelles, qui ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf éventuellement en a.

1. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ avec $l \in \mathbb{R}^*$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{l}$.
2. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ avec $l \in \{-\infty, +\infty\}$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
3. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ avec f strictement positive au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ avec$f$ strictement négative au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

4.5 Composition

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.
Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$**, appartenant à** I ou **extrémité de** I.
Soit b un point de $\overline{\mathbb{R}}$**, appartenant à** J ou **extrémité de** J.
Soit l un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Si f admet pour limite b en a et si g admet pour limite l en b alors $g \circ f$ admet pour limite l en a.
Autrement dit,

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \text{ et } g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} l \Longrightarrow g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l.$$

5 Limites et relation d'ordre

Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$**, appartenant à** I ou **extrémité de** I.

5.1 Passage à la limite d'une inégalité large

Soit $(l, l') \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

Si f et g sont deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles telles que $f \leq g$ **au voisinage de** a avec f de limite l en a et g de limite l' en a alors $l \leq l'$.

5.2 Signe de la fonction et signe de la limite

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs réelles, de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en a.

— Si $l > 0$ alors f est strictement positive au voisinage de a.
— Si $l < 0$ alors f est strictement négative au voisinage de a.

6 Existence d'une limite finie

Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$**, appartenant à** I ou **extrémité de** I.

6.1 Théorème d'encadrement

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles, et l un nombre réel.

S'il existe deux fonctions g et h définies sur I, à valeurs réelles telles que $g \leq f \leq h$ **au voisinage de** a avec g et h de même limite finie l en a alors f admet pour limite l en a.

6.2 Propriété pratique

Soit f et g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles, et l un nombre réel.

S'il existe un voisinage de a sur lequel on, a pour tout x,

$$|f(x) - l| \leq g(x) \text{ avec } g \text{ de limite } 0 \text{ en } a$$

alors f a pour limite l en a.

6.3 Corollaires de la propriété pratique

Soit f et g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles.

1. Si f a pour limite le réel l en a alors $|f|$ a pour limite $|l|$ en a.
2. Si f a pour limite 0 en a et si g est bornée au voisinage de a alors fg a pour limite 0 en a

7 Existence d'une limite infinie

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.
Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$**, appartenant à** I ou **extrémité de** I.

7.1 Théorème de minoration

S'il existe une fonction g définie sur I, à valeurs réelles, telle que $g \leq f$ **au voisinage de** a avec g de limite $+\infty$ en a alors f admet pour limite $+\infty$ en a.

7.2 Théorème de majoration

S'il existe une fonction h définie sur I, à valeurs réelles telle que $f \leq h$ **au voisinage de** a avec h de limite $-\infty$ en a alors f admet pour limite $-\infty$ en a.

8 Théorèmes de limite monotone

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.

$\leadsto$ Cas où la fonction $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $]a, b[$ est CROISSANTE

- Si f est croissante et majorée alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} (f(x))$.
- Si f est croissante et non majorée alors f admet pour limite $+\infty$ en b.

- Si f est croissante et minorée alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{x \in]a,b[} (f(x))$.
- Si f est croissante et non minorée alors f admet pour limite $-\infty$ en a.

$\leadsto$ Cas où la fonction $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $]a, b[$ est DECROISSANTE

- Si f est décroissante et minorée alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \inf\limits_{x \in]a,b[} (f(x))$.
- Si f est décroissante et non minorée alors f admet pour limite $-\infty$ en b.

- Si f est décroissante et majorée alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} (f(x))$.
- Si f est décroissante et non majorée alors f admet pour limite $+\infty$ en a.

II Continuité des fonctions à valeurs réelles en un point

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un **réel appartenant à I.**

1 Définitions

1. f est dite continue en a si f admet pour limite $f(a)$ en a.
2. f est dite continue à gauche en a si la restriction $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.
3. f est dite continue à droite en a si la restriction $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

2 Condition nécessaire et suffisante de continuité en un point

f est continue en a si, et seulement si, elle est continue à gauche et à droite en a.

3 Caractérisation séquentielle de la continuité en un point

f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui admet pour limite a, la suite réelle $(f(x_n))$ admet pour limite $f(a)$.

4 Opérations sur les fonctions continues en un point

Soit f et g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles.

4.1 Combinaison linéaire

Si f et g sont continues en a et (λ, μ) est un couple de réels alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

4.2 Produit

Si f et g sont continues en a alors fg est continue en a.

4.3 Quotient

Si f et g sont continues en a et si g ne s'annule pas au voisinage de a alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

5 Composition de fonctions continues en un point

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.
Soit a un réel de I.

Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

6 Prolongement par continuité

Soit b un réel **n'appartenant pas** à I mais **extrémité** de I.

Si f admet une limite finie l en b alors le prolongement de f à $I \cup \{b\}$ noté $\widetilde{f} : I \cup \{b\} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $\forall x \in I, \widetilde{f}(x) = f(x)$ et $\widetilde{f}(b) = l$ est continu en b et appelé prolongement par continuité de f en b.

III Continuité des fonctions sur un intervalle

1 Définition

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est dite continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque
L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I)$.

2 Opérations sur les fonctions continues

D'après les résultats vus sur la continuité en un point :

- une combinaison linéaire de fonctions continues sur I à valeurs réelles est continue sur I ;
- un produit de fonctions continues sur I à valeurs réelles est continue sur I ;
- un quotient de fonctions continues sur I à valeurs réelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est continu sur I.

3 Composition de fonctions continues

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.

Si f est continue sur I et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

4 Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit a et b deux points de I.

Si f est continue sur I avec $f(a) \leq f(b)$ alors f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

4.2 Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle de $\mathbb{R}$.

4.3 Corollaire pour les applications strictement monotones

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.

Si f est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur I alors,

- pour $I = [a, b]$, on a : $f(I) = [f(a), f(b)]$ (respectivement $[f(b), f(a)]$) ;
- pour $I =]a, b[$, on a : $f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$ (respectivement $\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$) ;
- pour $I = [a, b[$, on a : $f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$ (respectivement $\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$) ;
- pour $I =]a, b]$, on a : $f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)\right]$ (respectivement $\left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$).

5 Théorème des bornes atteintes et corollaires

5.1 Théorème des bornes atteintes

On suppose ici que $I = [a, b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.

5.2 Image d'un segment

L'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles est un segment de $\mathbb{R}$.

6 Théorème de la bijection (preuves non exigibles)

6.1 Théorème de la bijection

Si f est définie, continue et strictement monotone sur I alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$ dont la bijection réciproque f^{-1} est définie, continue sur J, strictement monotone sur J et de même monotonie que f.

6.2 Continuité et injectivité

Si f est une fonction définie, continue sur I, à valeurs réelles et injective alors f strictement monotone sur I.

IV Cas des fonctions à valeurs complexes

1 Ce qui s'étend aux fonctions complexes

- Limite finie : définition et caractérisations (cf infra), unicité, opérations sur les limites finies, lien entre existence d'une limite finie en un point et caractère borné au voisinage de ce point.
- Continuité en un point et sur un intervalle

2 Ce qui ne s'étend pas aux fonctions complexes

- Notion de limite infinie
- Résultats utilisant la relation d'ordre dont les théorèmes d'existence de limite

3 Limite d'une fonction à valeurs complexes

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs complexes, et l un nombre complexe.

3.1 Définition

On dit que f a pour limite l en a si la fonction à valeurs réelles $|f - l|$ a pour limite 0 en a.

3.2 Caractérisations

- f admet pour limite l en a (point de I ou extrémité de I) si, et seulement si, $\text{Re}\,(f)$ et $\text{Im}\,(f)$ admettent respectivement pour limite $\text{Re}(l)$ et $\text{Im}(l)$ en a.
- f est continue en a (point de I) si, et seulement si, $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont.
- f est continue sur I si, et seulement si, $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont.

CHAPITRE 16

CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Matrices rectangles

Soit $(m, n, p, q, r, s) \in (\mathbb{N}^*)^6$.

1 Généralités

1.1 Définition

Toute application $A : [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \to \mathbb{K}$ est appelée matrice de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notations et représentation

- On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ avec, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{ij} = A(i, j)$
- On représente $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ sous forme d'un tableau, à n lignes et p colonnes, dont l'élément situé en ligne i et colonne j est le nombre $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

1.2 L'ensemble des matrices rectangles

L'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.3 Opérations sur les matrices rectangles

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de deux lois :

- une loi **interne** (addition entre matrices) notée $+$ définie par :
$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2,\ A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$
- une loi **externe** (multiplication par un scalaire ie un élément de $\mathbb{K}$) notée $\boldsymbol{.}$ définie par :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda\boldsymbol{.}A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

Remarques

- L'addition de deux matrices de taille (n, p) donne une matrice de taille (n, p).
- La multiplication d'une matrice de taille (n, p) par un scalaire donne une matrice de taille (n, p).

1.4 Matrices élémentaires

Toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{ij}$$

avec E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à coefficients tous nuls, sauf celui de la i^e ligne et j^e colonne qui vaut 1.

Remarques

- On dit que A est combinaison linéaire des matrices élémentaires E_{ij} avec $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
- On verra dans le chapitre "Espaces vectoriels" que la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2 Produit

2.1 Définition

On définit le produit de deux matrices rectangles de taille (n,p) et (p,q) de la manière suivante :

$$\forall A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A \times B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Remarques

- On note plus simplement AB au lieu de $A \times B$.
- Le produit AB a du sens si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
- Le produit AB avec A de taille (n,p) et B de taille (p,q) donne une matrice de taille (n,q).

2.2 Propriétés

1. Le produit matriciel est bilinéaire, c'est-à-dire

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha A + \beta B) C = \alpha AC + \beta BC.$$

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \forall C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K}), \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, C(\alpha A + \beta B) = \alpha CA + \beta CB.$$

2. Le produit matriciel est associatif, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q,}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), A(BC) = (AB)C.$$

2.3 Produits remarquables

1. Le produit d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et d'une matrice colonne X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est une combinaison linéaire des colonnes de A.
2. Le produit des matrices élémentaires E_{xy} de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et E_{zt} de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

$$E_{xy} E_{zt} = \delta_{y,z} E_{xt} \text{ avec } \delta_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{si } y = z \\ 0 & \text{si } y \neq z \end{cases}.$$

Remarque

Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j}$ est appelé "symbole de Kronecker".

3 Transposition

3.1 Définition

La transposée de $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée $A^\top$ définie par :

$$A^\top = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \text{ avec } b_{ij} = a_{ji}.$$

Remarques
- La transposée de la transposée d'une matrice A est la matrice A elle-même.
- La transposée d'une matrice de taille (n,p) donne une matrice de taille (p,n) dont les coefficients de la ligne i sont les coefficients de la colonne i de la matrice initiale.

3.2 Linéarité de la transposition

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

Remarque
On verra dans un chapitre d'algèbre linéaire que cela traduit la linéarité de l'application $A \mapsto A^\top$.

3.3 Transposée d'un produit

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Remarque
Bien noter que, même lorsque les produits AB et $A^\top B^\top$ ont du sens, $(AB)^\top \neq A^\top B^\top$ en général...

II Opérations élémentaires, systèmes linéaires

1 Définitions

On appelle opération élémentaire sur les lignes $L_1, \dots, L_n$ d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'une des opérations suivantes :

1. Echange de deux lignes distinctes :
$$L_r \leftrightarrow L_s$$
avec $r \neq s$.
2. Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul :
$$L_r \leftarrow \lambda L_r$$
avec $\lambda \neq 0$.
3. Addition à une ligne du produit d'une autre ligne par un scalaire non nul :
$$L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$$
avec $r \neq s$ et $\lambda \neq 0$.

Remarque
On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

2 Traduction en terme de produit matriciel

La matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ définie par $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), I_n A = A$.

1. L'opération $L_r \leftrightarrow L_s$ sur $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ équivaut à la multiplication $P_{r,s} \times A$ avec $P_{r,s} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P_{r,s} = I_n + (E_{rs} + E_{sr} - E_{rr} - E_{ss}) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

2. L'opération $L_r \leftarrow \lambda L_r$ sur $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ équivaut à la multiplication $D_{r,\lambda} \times A$ avec $D_{r,\lambda} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$D_{r,\lambda} = I_n + (\lambda - 1)E_{rr} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

3. L'opération $L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$ sur $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ équivaut à la multiplication $T_{r,s,\lambda} \times A$ avec $T_{r,s,\lambda} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$T_{r,s,\lambda} = I_n + \lambda E_{rs} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Remarque

Par multiplication de A à droite par des matrices carrées de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ du même type que $P_{r,s}, D_{r,\lambda}$ et $T_{r,s,\lambda}$, on traduit les opérations élémentaires sur les colonnes de A.

3 Système d'équations linéaires

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le système linéaire $\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ d'inconnue $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ se traduit matriciellement par l'équation $AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ que l'on appelle encore système.

□ Compatibilité du système

On dit que le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A (ce qui assure l'existence de solutions au système).

□ Ensemble-solution de $\mathcal{S}$

Si le système $AX = B$ est compatible alors ses solutions sont les matrices $X_0 + Y$ avec :

1. $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière de $AX = B$;
2. $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ solution quelconque du système homogène $AX = 0$ associé.

□ Résolution effective de $\mathcal{S}$

Par opérations élémentaires sur les lignes du système $\mathcal{S}$, on peut obtenir un système $\mathcal{S}'$, dit équivalent à $\mathcal{S}$ (car il a les mêmes solutions que $\mathcal{S}$) de forme trapézoidale

$$\mathcal{S}' : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{11}x_1 + & & \ldots & + & a'_{1p}x_p & = & b'_1 \\ & a'_{22}x_2 + & \ldots & + & a'_{2p}x_p & = & b'_2 \\ & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a'_{qq}x_q \quad + & \ldots & + \ a'_{qp}x_p & = & b'_q \\ & & & & 0 & = & b'_{q+1} \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & = & b'_n \end{array} \right. \iff A'X = B'$$

avec A' matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

- les lignes de 1 à q contiennent chacune au moins un coefficient non nul
- dans chaque ligne de 2 à q, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente ;
- les lignes numérotées de $q+1$ à n sont nulles.

Les $(n-q)$ dernières équations de $\mathcal{S}'$ donnent les conditions de compatibilité du système. Ces conditions étant réunies, le nombre de paramètres pour la résolution est $p - q$.

III Matrices carrées

1 Ensemble des matrices carrées

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est souvent noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarques

- On verra dans le chapitre "Structures algébriques" que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est un **anneau** dont :
  - **l'élément neutre pour l'addition** est la matrice nulle, notée 0_n ou 0, définie par
  $$0_n = (0)_{1 \leq i,j \leq n}$$
  - **l'élément neutre pour la multiplication** est la matrice identité, notée I_n, définie par
  $$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} .$$
- Si $n \geq 2$, cet anneau :
  - **est non commutatif** : il existe des matrices A et B telles que $AB \neq BA$;
  - **admet des diviseurs de zéro** : il existe des matrices A et B non nulles telles que $AB = 0$;
  - **admet des éléments nilpotents** : il existe des matrices A non nulles et des entiers non nuls p tels que $A^p = 0$.

2 Matrices carrées de formes particulières

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1 Matrices diagonales ou triangulaires

1. A est dite scalaire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.
2. A est dite diagonale si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 , i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
3. A est dite triangulaire supérieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 , i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
4. A est dite triangulaire inférieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 , i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Remarques

Un produit de matrices scalaires (resp. diagonales, triangulaires supérieures, triangulaires inférieures) est une matrice scalaire (resp. diagonale, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure).

2.2 Matrices symétriques ou antisymétriques

1. A est dite symétrique si $A^\top = A$.
2. A est dite antisymétrique si $A^\top = -A$.

Remarques

1. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

3 Deux formules usuelles

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

3.1 Formule du binôme

Si $AB = BA$ alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

3.2 Une formule de factorisation

Si $AB = BA$ alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^{p-1-k}B^k = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}.$$

Remarques
Les deux résultats précédents ne se généralisent pas aux cas des matrices qui ne commutent pas.

4 Matrices inversibles

4.1 Définitions - propriété

1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

   Dans ce cas,
   la matrice B est unique, notée $B = A^{-1}$, et appelée matrice inverse de A.
2. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé groupe linéaire.

Remarque
On verra dans le chapitre "Structures algébriques" que $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un **groupe** (comme ensemble des **éléments inversibles d'un anneau** pour la 2e loi interne) ce qui justifie la terminologie utilisée.

4.2 Propriétés

1. Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$, autrement dit :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))^2, AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

2. Si A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A^\top$ est inversible d'inverse $(A^{-1})^\top$, autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), A^\top \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Remarques
On dit que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit et par transposition.

5 Calculs de matrices inverses

5.1 Retour sur les opérations élémentaires

Si A est une matrice carrée inversible alors la matrice obtenue à partir de A après des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes de A est inversible.

Remarques

— Autrement dit, les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice carrée **préservent l'inversibilité**.

— Cela résulte de l'inversibilité des matrices de permutation, de dilatation et de transvection $P_{r,s}, D_{r,\lambda}$ et $T_{r,s,\lambda}$ vues au **II.2.** et de la stabilité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ par produit.

— Par contraposition, si la matrice obtenue à partir de A après des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes n'est pas inversible alors la matrice A n'est pas inversible.

5.2 Calcul de l'inverse par résolution d'un système (à privilégier)

La résolution du système $AX = Y$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$ permet de déterminer si la matrice A est inversible et d'obtenir son inverse si celle-ci existe.

En effet,

— si A est inversible alors le système $AX = Y$ a une unique solution $X = A^{-1}Y$. Dans ce cas, l'expression de X en fonction de Y obtenue après résolution permet d'expliciter A^{-1}.

— Si le système $AX = Y$ n'a pas de solution unique (pas de solution ou plusieurs solutions) alors A n'est pas inversible.

5.3 Calcul de l'inverse par opérations élémentaires (à utiliser avec précaution)

En réalisant en parallèle les mêmes opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de la matrice identité I_n, on peut déterminer si la matrice A est inversible et obtenir son inverse si celle-ci existe. (méthode du pivot de Gauss-Jordan).

Remarque

Dans cette méthode, il est impératif de **ne pas mélanger les opérations sur les lignes et les colonnes** : autrement dit, on agit uniquement sur les lignes ou uniquement sur les colonnes. On lui préfèrera la méthode de résolution du système vue au **III.5.3** dans laquelle la confusion ne peut se faire.

6 Cas particuliers

6.1 Matrices diagonales

1. Une matrice diagonale est inversible si, et seulement si, tous les coefficients de sa diagonale sont non nuls.
2. Si une matrice diagonale est inversible alors sa matrice inverse est diagonale.

6.2 Matrices triangulaires

1. Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, tous les coefficients de sa diagonale sont non nuls.
2. Si une matrice triangulaire est inversible alors sa matrice inverse est triangulaire.

CHAPITRE 17

DÉRIVATION

Dans ce chapitre, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.

I Dérivation des fonctions à valeurs réelles

1 Dérivée en un point

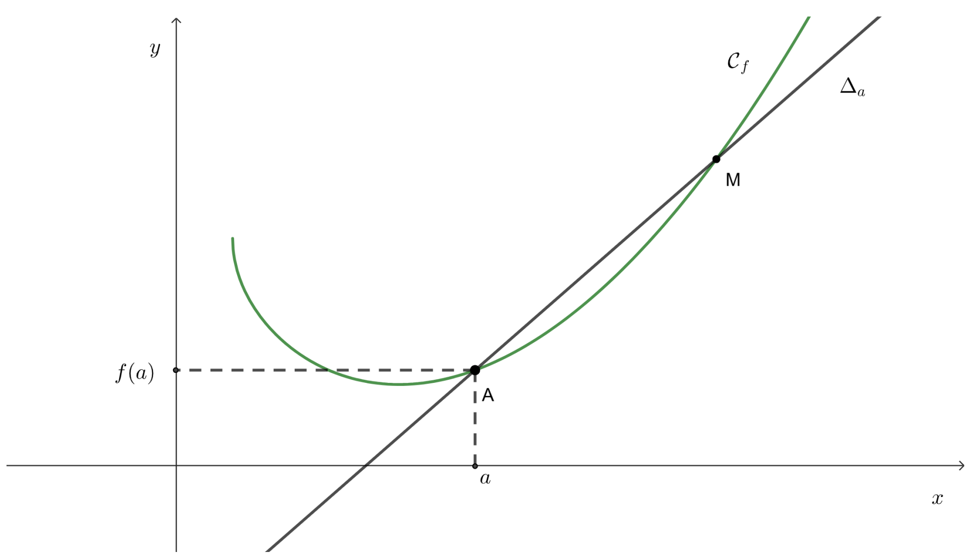
Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

1.1 Définition avec le taux d'accroissement

f est dite dérivable en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite réelle l en a.

Dans ce cas,
la limite l obtenue est appelée dérivée de f en a et notée $f'(a)$.

Remarque
On peut réécrire la définition de manière à ramener le problème à une existence de limite en 0.
Ainsi : f est dite dérivable en a si la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle l en 0.



1.2 Caractérisation de la dérivabilité en un point par développement limité d'ordre 1

f est dérivable en a si, et seulement si, il existe $(b_0, b_1) \in \mathbb{R}^2$ et une application $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, f(x) = b_0 + b_1(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Dans ce cas, $b_0 = f(a)$ et $b_1 = f'(a)$ et on dit que f **admet un développement limité à l'ordre 1 en** a.

Remarque
Dans ce cas, on peut donc écrire

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

ou encore

$$\forall h \in \mathbb{R}, a+h \in I \Rightarrow f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

1.3 Condition nécessaire de dérivabilité en un point

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Remarque
La réciproque est **FAUSSE** comme le prouve l'exemple classique de la fonction valeur absolue en 0.

1.4 Interprétations géométrique et cinématique

- Si f admet une dérivée au point a alors la courbe représentative de f admet une tangente en $M(a, f(a))$ dont la pente est égale à $f'(a)$.
- Si $f(t)$ est l'abscisse à l'instant $t \geq 0$ d'un mobile se déplaçant sur une droite et si f admet une dérivée au point $a \geq 0$ alors $f'(a)$ est la vitesse instantanée de ce mobile à l'instant a.

2 Dérivabilité à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

2.1 Définitions

1. On suppose ici que a n'est pas l'extrémité gauche de I.

   f est dite dérivable à gauche en a si $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}\,(f(x) - f(a))$ admet une limite à gauche en a.
   La limite obtenue (unique si elle existe) est appelée dérivée à gauche de f en a et notée $f'_g(a)$.

2. On suppose ici que a n'est pas l'extrémité droite de I.

   f est dite dérivable à droite en a si $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}\,(f(x) - f(a))$ admet une limite à droite en a.
   La limite obtenue (unique si elle existe) est appelée dérivée à droite de f en a et notée $f'_d(a)$.

2.2 Propriété

On suppose ici que a n'est pas extrémité de I.

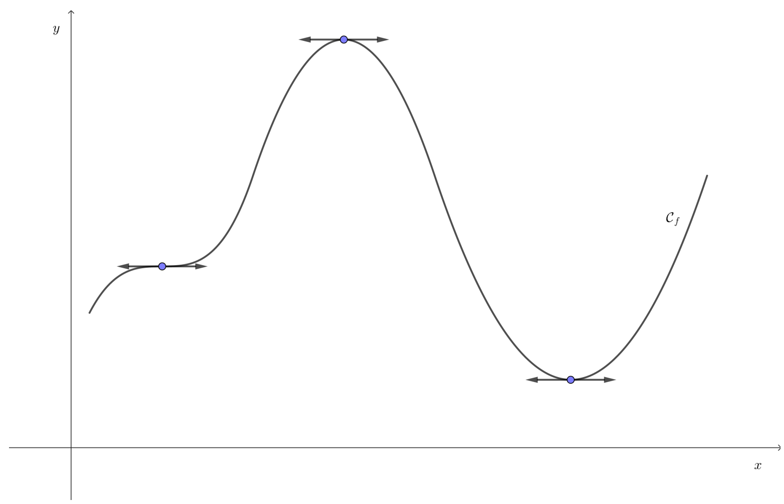
f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Dans ce cas, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

3 Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f admet un extremum local en un point a de I qui n'est pas une extrémité de I, et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.



Remarques

- Les points a de I en lequels f est dérivable avec $f'(a) = 0$ sont dits **points critiques** de f.
- La détermination des points critiques indique où des extremums sont susceptibles d'exister. Une étude complémentaire du signe de $f(x) - f(a)$ au voisinage du point critique a est nécessaire pour conclure s'il y extremum local ou non en ce point a.
- Il peut y avoir des extremums locaux pour f **en un point extrémité** a de l'intervalle I en lequel f est dérivable sans que $f'(a)$ ne soit égal à 0.

4 Dérivée sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.1 Définition

f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I.

Dans ce cas,
la fonction qui, à tout a de I fait correspondre $f'(a)$ est appelée application dérivée de f et notée f'.

Notation
Dans la suite, on note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur I, à valeurs réelles.

4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Les opérations sur les limites vues dans le chapitre "Limite et continuité" permettent de montrer que $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, produit et quotient (sous réserve que cela ait du sens).

Plus précisément :

— une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I à valeurs réelles est dérivable sur I :
$$\forall (f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \text{ et } (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

— un produit de fonctions dérivables sur I à valeurs réelles est dérivable sur I :
$$\forall (f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2, fg \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \text{ et } (fg)' = f'g + fg'.$$

— un quotient de fonctions dérivables sur I à valeurs réelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est dérivable sur I :
$$\forall (f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2, \forall x \in I, g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

4.3 Composition de fonctions dérivables

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J. Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.

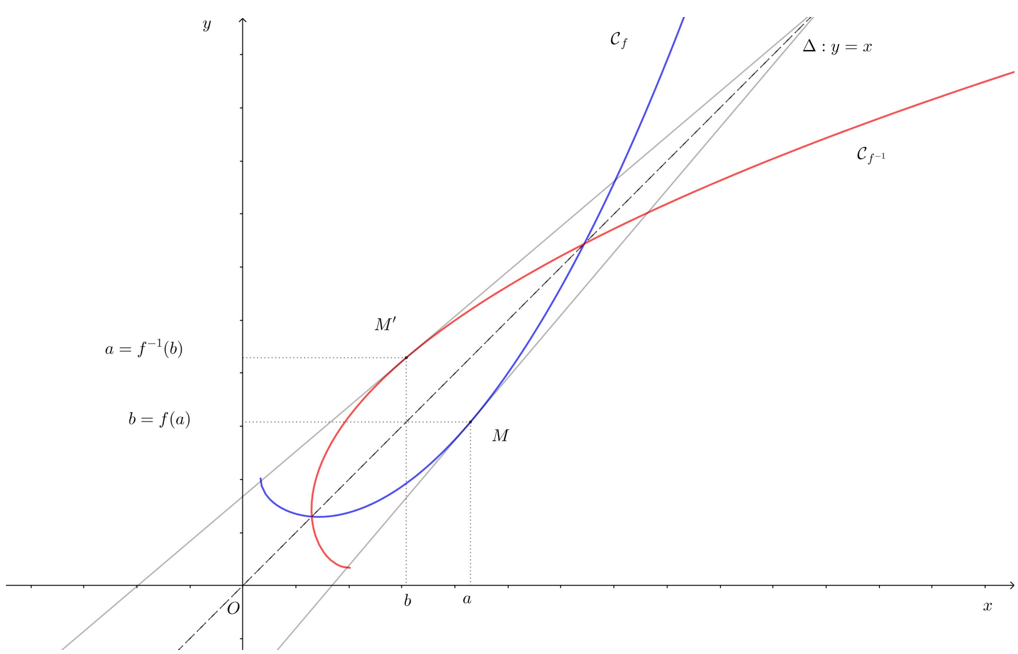
Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I avec
$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

4.4 Réciproque d'une fonction dérivable

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

Si f est une bijection de I sur $J = f(I)$, dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et vérifie
$$\forall y \in J, \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Remarque
Sous réserve que les hypothèses de cette propriété soient réunies, il existe une tangente en tout point $M'(b,a)$ de la courbe représentative de f^{-1}. Cette droite a pour pente l'inverse de la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point $M(a,b)$.

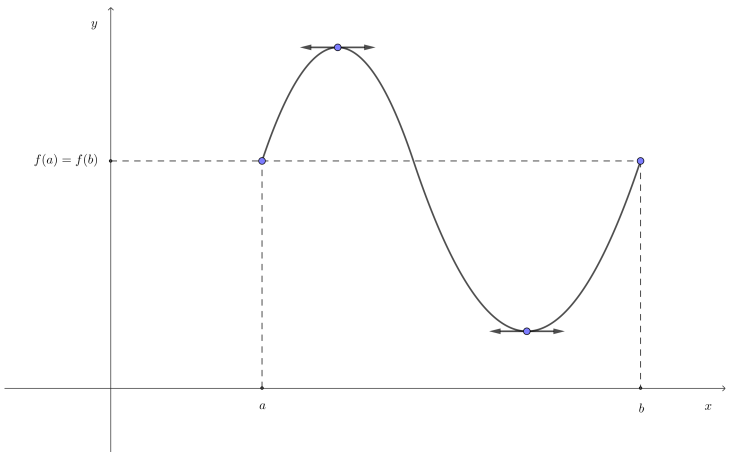


II Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

1 Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Si f est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel c dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétations géométrique et cinématique

Si les hypothèses du théorème de Rolle sont réunies alors :

- il existe un point en lequel la courbe représentative de f admet une tangente horizontale;
- il existe un instant c en lequel la vitesse instantanée d'un mobile dont l'abscisse à l'instant $t \geq 0$ sur une droite est donnée par $f(t)$, est nulle.

2 Accroissements finis

2.1 Egalité des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe c dans $]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2.2 Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par un réel k alors f est $k-$lipschitzienne, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Remarque

Cette inégalité est intéressante pour montrer la convergence ou préciser la vitesse de convergence de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

3 Applications des théorèmes des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs réelles.

3.1 Caractérisation des applications constantes

f est constante si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

3.2 Caractérisation des fonctions dérivables monotones

1. f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$.

3.3 Caractérisation des fonctions dérivables strictement monotones

1. f est strictement croissante sur I si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :
   (a) pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$.
   (b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tel que, pour tout x de $[a, b]$, $f'(x) = 0$.
2. f est strictement décroissante sur I si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :
   (a) pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$.
   (b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tel que, pour tout x de $[a, b]$, $f'(x) = 0$.

3.4 Théorème de la limite de la dérivée

Soit a un point de I.

Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'_{|I\setminus\{a\}}$ admet une **limite réelle** l en a alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Dans ce cas :

1. f est dérivable en a avec $f'(a) = l$;
2. f' est continue en a.

Remarques

Ce résultat, souvent utilisé dans l'étude des raccords de solutions d'équations différentielles linéaires (programme de MPI), ne doit pas remplacer le recours à la définition de la dérivabilité en un point qui reste le moyen le plus naturel de prouver la dérivabilité.

3.5 Extension du théorème de la limite de la dérivée

Soit a un point de I.

Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'_{|I\setminus\{a\}}$ admet une **limite infinie** l en a alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

III Classe $\mathcal{C}^k$

Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

1 Notations

On pose $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, sous réserve que cela ait du sens, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.

2 Définitions

Soit $k \in \mathbb{N}$.
- f est dite k fois dérivable sur I si $f^{(k)}$ existe.
- f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I avec $f^{(k)}$ continue sur I.
- f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Remarque
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

$\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, produit et quotient (sous réserve que cela ait du sens).

Plus précisément :

- une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I :

$$\forall (f, g) \in \left(\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})\right)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}) \text{ et } (\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

- un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I :

$$\forall (f, g) \in \left(\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})\right)^2, fg \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}) \text{ et } \underbrace{(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)} g^{(i)}}_{\text{(formule de Leibniz)}}.$$

- un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

4 Composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et si g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

5 Réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

Si f est une bijection de I sur $J = f(I)$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et que sa dérivée ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

IV Cas des fonctions à valeurs complexes

1 Ce qui s'étend aux fonctions complexes

- Dérivée en un point et sur un intervalle : définition et caractérisations, lien avec la continuité, dérivées à gauche et à droite, opérations
- Classe $\mathcal{C}^k$: définition, opérations
- Inégalité des accroissements finis

2 Ce qui ne s'étend pas aux fonctions complexes

- Résultats utilisant la relation d'ordre :
  - la notion d'extremum local (et donc la condition nécessaire d'existence d'un extremum local) ;
  - le théorème de Rolle ;
  - l'égalité des accroissements finis ;
  - les caractérisations des fonctions constantes ou monotones parmi les fonctions dérivables.
- Composition de fonctions dérivables
- Réciproque d'une fonction dérivable

3 Quelques résultats qui s'étendent détaillés

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs complexes.

3.1 Définitions

- f est dite dérivable en $a \in I$ si la fonction à valeurs complexes $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite complexe l en a appelée nombre dérivé de f en a et notée $l = f'(a)$.
- f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

3.2 Caractérisations

- f est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.

  Dans ce cas,
  $$(\mathrm{Re}(f))'(a) = (\mathrm{Re}\,(f'(a))) \text{ et } (\mathrm{Im}(f))'(a) = (\mathrm{Im}(f'(a))).$$
- f est dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$) sur I si, et seulement si, $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.

3.3 Inégalité des accroissements finis

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si $|f'|$ est majorée par un réel k alors f est $k-$lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|.$$

CHAPITRE 18

ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{Z}$

I Division euclidienne

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

1.1 Définitions

S'il existe q dans $\mathbb{Z}$ tel que $a = bq$, on dit que b **divise** a (ou b est un diviseur de a) et on note $b \mid a$.

Dans ce cas,
on dit aussi que a **est divisible par** b (ou a est un multiple de b).

Remarque
Si b est non nul et si b divise a alors il existe un unique q dans $\mathbb{Z}$ tel que $a = bq$.

1.2 Ensembles des diviseurs et des multiples

- On note $\mathcal{D}(a) = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z}, a = bq\}$ **l'ensemble des diviseurs de** a.
  - Si $a = 0$ alors $\mathcal{D}(a) = \mathbb{Z}$ donc $\mathcal{D}(a)$ est infini.
  - Si $a \neq 0$ alors $\mathcal{D}(a) \subset [\![-|a|, |a|]\!]$ donc $\mathcal{D}(a)$ est fini.

- On note $b\mathbb{Z} = \{bq \mid q \in \mathbb{Z}\}$ **l'ensemble des multiples de** b.
  - Si $b = 0$ alors $b\mathbb{Z} = \{0\}$ donc $b\mathbb{Z}$ est fini.
  - Si $b \neq 0$ alors $b\mathbb{Z}$ est infini.

1.3 Caractérisation des couples d'entiers associés

Si l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée, on dit que les entiers a et b sont **associés.**

1. $a \mid b$ et $b \mid a$.
2. $|a| = |b|$.
3. $a = b$ ou $a = -b$.

1.4 Propriétés immédiates

1. $a \mid a$.
2. Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.
3. Si $a \mid b$ et $c|d$ alors $ac \mid bd$.
4. Si $a \mid b$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a^n|b^n$.
5. Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors, pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2, c \mid au + bv$.

Remarque
La relation de divisibilité $\mid$ dans $\mathbb{Z}$ est réflexive (cf 1.) et transitive (cf 2.) mais n'est pas antisymétrique (on a, par exemple, $1 \mid -1$ et $-1 \mid 1$ mais $1 \neq -1$)

2 Division euclidienne

2.1 Théorème de la division euclidienne

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple (q,r) de $\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r \leq b-1.$$

Dans la division euclidienne de a par b, a est appelé **dividende**, b **diviseur**, q **quotient** et r **reste.**

2.2 Caractérisation de la divisibilité

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

b divise a si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

II PGCD et PPCM

1 Cas de deux entiers naturels

1.1 Définition du PGCD

Soit $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Le plus grand élément (au sens de $\leq$) de l'ensemble des **diviseurs communs** à a et b est dit PGCD de a et b et noté $a \wedge b$:

$$a \wedge b = \max\left(\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)\right).$$

Remarques
— Pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \wedge b = b$.
— Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a : $a \wedge 1 = 1$.
— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$, on a : $a \wedge b = b \wedge a$.
— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$, $a \wedge b$ est un entier naturel.

1.2 Propriété importante

Soit $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) & = & \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r) \\ a \wedge b & = & b \wedge r \end{array} \right.$.

Remarque
Plus généralement si $a = bv + c$ avec $(a,b,c,v) \in \mathbb{N}^4$ alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(c)$.

1.3 Algorithme d'Euclide

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

On pose $r_0 = a$ et $r_1 = b$ puis, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_i \neq 0$, on définit r_{i+1} comme suit :

$$r_{i+1} \text{ est le reste de la division euclidienne de } r_{i-1} \text{ par } r_i.$$

Alors :

— il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$r_{n+1} = 0 \text{ et } r_n \neq 0$$

— pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,
$$r_{i-1} \wedge r_i = r_i \wedge r_{i+1}.$$

En particulier $r_0 \wedge r_1 = r_n \wedge r_{n+1}$ donc :
$$a \wedge b = r_n.$$

Remarque
Le PGCD de a et b est donc le **dernier reste non nul** dans l'algorithme d'Euclide encore appelé algorithme des **divisions euclidiennes successives**.

1.4 Caractérisation du PGCD

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$:

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$$

Le PGCD de a et b est donc **le plus grand élément** (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des **diviseurs communs** à a et b, c'est-à-dire que :

1. $a \wedge b \,|\, a$ et $a \wedge b \,|\, b$
2. $\forall d \in \mathbb{N}, d \,|\, a$ et $d \,|\, b \Rightarrow d \,|\, a \wedge b$.

1.5 Propriété de factorisation du PGCD

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le PGCD de ka et kb vérifie

$$ka \wedge kb = k\,(a \wedge b)\,.$$

2 Cas de deux entiers relatifs

2.1 Définition

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

On appelle PGCD de a et b l'**entier naturel** noté $a \wedge b$ défini par :

$$a \wedge b = \begin{cases} |a| \wedge |b| & \text{si } (a, b) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (a, b) = (0, 0) \end{cases}.$$

2.2 Extension des résultats vus pour les entiers naturels

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (a) $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de $\leq$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
   (b) $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de $|$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.
   (a) $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $ka \wedge kb = |k|\,(a \wedge b)$.

2.3 Relation de Bézout

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.
Il existe un couple d'entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, dit couple de Bézout, tel que $au + bv = a \wedge b$.

Remarque
Un tel couple, qui n'est **PAS UNIQUE**, peut être déterminé par **l'algorithme d'Euclide étendu** dans le cas $(a,b) \neq (0,0)$. En effet, en reprenant les notations du **II. 1. 3**, on peut définir deux familles d'entiers relatifs $(u_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(v_i)_{0\leq i\leq n}$ par :

$$(u_0, v_0) = (1,0) \text{ et } (u_1, v_1) = (0,1)$$

et, pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$(u_{i+1}, v_{i+1}) = (u_{i-1} - q_i u_i, v_{i-1} - q_i v_i).$$

avec

$$r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1} \text{ (division euclidienne de } r_{i-1} \text{ par } r_i)$$

et n le plus petit entier tel que

$$r_{n+1} = 0.$$

Ainsi :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], au_i + bv_i = r_i$$

Comme $r_n = a \wedge b$, on en déduit que

$$a \wedge b = au_n + bv_n.$$

Remarque
Il n'est pas nécessaire de connaître les relations de récurrence définissant les familles $(u_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(v_i)_{0\leq i\leq n}$.

3 PPCM

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

Le PPCM de a et b est **l'entier naturel** noté $a \vee b$ défini par

$$a \vee b = \begin{cases} \min\left(|a|\,\mathbb{N}^* \cap |b|\,\mathbb{N}^*\right) & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{cases}.$$

Pour $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $a \vee b$ est le **plus petit entier naturel non nul, multiple commun** de a et b.

Remarques
Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \vee a = a \vee 1 = |a|$.

III Entiers premiers entre eux

1 Cas de couples d'entiers

Soit $(a, b, c, n) \in \mathbb{Z}^4$.

1.1 Définition

Les entiers a et b sont dits premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Remarque
Autrement dit, a et b sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont -1 et 1.

1.2 Théorème de Bézout

a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$.

1.3 Lemme de Gauss

Si c divise ab et si a et c sont premiers entre eux alors c divise b.

Remarque
Tout nombre rationnel r non nul peut s'écrire sous la forme $r = \dfrac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$. Cette écriture est unique et appelée forme irréductible de r.

1.4 Propriétés sur le produit

1. Si a et b sont premiers entre eux et si a et b divisent n alors ab divise n.
2. Si a et n sont premiers entre eux et si b et n sont premiers entre eux alors ab et n sont premiers entre eux.

2 Cas de n-uplet d'entiers avec $n \geq 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

2.1 PGCD d'un nombre fini d'entiers

On appelle PGCD des entiers $a_1, \ldots, a_n$ **l'entier naturel**, noté $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$, tel que

$$\mathcal{D}(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = \mathcal{D}(a_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(a_n).$$

2.2 Relation de Bézout

Il existe un n-uplet d'entiers $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$.

2.3 Entiers premiers entre eux

Les entiers $a_1, \ldots, a_n$ sont dits :

— premiers entre eux dans leur ensemble si $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$.
— premiers entre eux deux à deux si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], i \neq j \Rightarrow a_i \wedge a_j = 1$.

IV Nombres premiers

1 Généralités

1.1 Définition

Un nombre entier naturel non nul p est dit premier s'il admet **uniquement deux diviseurs entiers naturels distincts** (qui sont 1 et p).

1.2 Crible d'Eratosthène

Cette méthode permet d'obtenir tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

Dans le tableau ci-dessous avec $n = 100$, on raye d'abord tous les entiers multiples de 2, autres que 2, puis on raye tous les entiers multiples de 3, autres que 3, et ainsi de suite. A la fin du processus, les entiers non rayés sont les nombres premiers compris entre 2 et 100.

	2	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~90~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

1.3 Ensemble des nombres premiers

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

2 Décomposition en produit de nombres premiers

2.1 Théorème

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ avec $\forall i \in [\![1, k]\!]\,, \alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et p_i est un nombre premier.

2.2 Corollaire

Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p}$$

où $(\alpha_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une **famille presque nulle d'entiers naturels**, c'est-à-dire une famille dans laquelle tous les éléments sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

3 Valuation p-adique

3.1 Définition

Soit p un nombre premier et n un entier naturel non nul.

L'entier α_p qui apparaît dans la décomposition primaire de n est appelé **valuation p-adique** de n et noté $v_p(n)$.

Remarque
$v_p(n)$ est le **plus grand entier naturel** k tel que p^k divise n.

3.2 Valuation p-adique d'un produit

Pour tout nombre premier p et tous entiers naturels non nuls n et n', on a :

$$v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n')$$

3.3 Caractérisation de la divisibilité

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

b divise a si, et seulement si, pour tout nombre premier p, on a : $v_p(b) \leq v_p(a)$.

3.4 PGCD et PPCM

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Les PGCD et PPCM des entiers a et b vérifient :

$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$$

$$a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$$

Remarque
On en déduit, en particulier, que $ab = (a \wedge b)(a \vee b)$.

V Congruences

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Définition

x est dit congru à y modulo n s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + nk$ autrement dit si $x - y \in n\mathbb{Z}$.

Notation : $x \equiv y \, [n]$

2 Caractérisation

$x \equiv y \, [n]$ si, et seulement si, les restes des divisions euclidiennes de x et y par n sont égaux.

3 Propriétés

1. $x \equiv x\,[n]$ (réflexivité)
2. si $x \equiv y\,[n]$ alors $y \equiv x\,[n]$ (symétrie)
3. si $x \equiv y\,[n]$ et $y \equiv z\,[n]$ alors $x \equiv z\,[n]$ (transitivité)

4 Opérations

1. Si $x \equiv y\,[n]$ et $z \equiv t\,[n]$ alors $x + z \equiv y + t\,[n]$. (compatibilité avec l'addition)
2. Si $x \equiv y\,[n]$ et $z \equiv t\,[n]$ alors $xz \equiv yt\,[n]$. (compatibilité avec la multiplication)

Remarque
En général, dans le cas où $xz \equiv yz\,[n]$, on ne peut pas conclure que $x \equiv y\,[n]$.

5 Inverse modulo n

— Si x et n sont premiers entre eux, il existe un couple d'entiers (u, v) tel que $ux + vn = 1$.

On en déduit que
$$ux \equiv 1\,[n]$$
et on dit que u est un inverse de x modulo n.

— Si u est un inverse de x modulo n alors il existe un couple d'entiers (u, v) tel que $ux + vn = 1$.

On en déduit que x et n sont premiers entre eux.

Remarque
La connaissance d'un inverse modulo n peut permettre de résoudre des congruences modulo n.

6 Petit théorème de Fermat

Si p est un nombre premier alors :

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, a^p \equiv a\,[p]$.
2. $\forall a \in \mathbb{Z}, a \wedge p = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

CHAPITRE 19

RELATIONS BINAIRES

Dans ce chapitre très court, on formalise les notions de relation binaire sur un ensemble, de relation d'ordre et de relation d'équivalence déjà rencontrées à plusieurs reprises depuis le début d'année.

I Relation binaire sur un ensemble

1 Définitions

On appelle relation binaire sur un ensemble E toute partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$.

Pour tout $(x,y) \in \mathcal{R}$,

— on dit que x est en relation avec y par la relation $\mathcal{R}$;
— on note usuellement $x\mathcal{R}y$.

2 Propriétés

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est :

— réflexive si : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
— transitive si : $\forall\,(x,y,z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$;
— symétrique : $\forall\,(x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$;
— antisymétrique si : $\forall\,(x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$.

3 Quelques exemples déjà rencontrés

1. Sur un ensemble E : la relation d'égalité.
2. Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E : la relation d'inclusion.
3. Sur l'ensemble $\mathbb{R}$: les relations $\leqslant$, $<$ et la relation de congruence modulo un réel non nul.
4. Sur l'ensemble $\mathcal{F}(D,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^D$ des applications d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: la relation $\leq$.
5. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$: les relations de divisibilité $|$ et de congruence modulo un entier non nul.

II Relations d'équivalence

1 Définition

Toute relation binaire sur un ensemble E qui est **réflexive**, **transitive** et **symétrique** est dite relation d'équivalence sur E. Les relations d'équivalence sont souvent notées $\sim, \simeq, \approx$ ou $\equiv$.

2 Théorème

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

Alors la famille d'ensembles $(\{y \in E \mid x \sim y\})_{x \in E}$ est une partition de E.

Remarque
Pour $x \in E$, l'ensemble $\{y \in E \mid x \sim y\}$ est appelé la classe d'équivalence de x pour la relation $\sim$.

3 Exemples des relations de congruence

- La relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
  Les classes d'équivalence sont les ensembles $x+2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ avec x qui décrit $[0, 2\pi[$.
- La relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
  Les classes d'équivalence sont les ensembles $r+n\mathbb{Z} = \{r + nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$ avec r qui décrit $[\![0, n-1]\!]$.

III Relation d'ordre

1 Définition

Toute relation binaire sur un ensemble E qui est **réflexive**, **transitive** et **antisymétrique** est dite relation d'ordre sur E. Les relations d'ordre sont souvent notées $\leq, \preceq, \lesssim$ ou $\precsim$.

2 Ordre partiel et ordre total

Une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est dite **totale** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.$$

Dans le cas contraire, la relation d'ordre $\preceq$ est dite **partielle**.

3 Minorant, majorant, maximum, minimum, etc.

Les notions de partie minorée, majorée ou bornée ainsi que que celles de minorant, majorant, minimum, maximum, borne inférieure ou borne supérieure vues pour les parties de $\mathbb{R}$ peuvent être étendues aux parties d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.

Par exemple, pour E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$ et A une partie de E,

- A est dite majorée pour $\preceq$ s'il existe M dans E tel que, pour tout élément x de A, on a : $x \preceq M$.
  Dans ce cas, on dit que M est un majorant de A pour $\preceq$.
- si A admet un majorant M pour $\preceq$ qui appartient à A alors celui-ci est unique et est appelé le maximum de A ou le plus grand élément de A pour $\preceq$.

CHAPITRE 20

STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES

Dans ce chapitre, on découvre que des ensembles particuliers de nombres, de fonctions ou de matrices déjà rencontrés cette année ont une même structure algébrique.

I Loi de composition interne

Soit E un ensemble.

1 Définition

On appelle loi de composition interne sur E toute application f de $E \times E$ dans E.

A tout couple (x, y) de $E \times E$, est ainsi associée une unique image $f(x, y) \in E$ souvent notée

$$x \star y \text{ ou } x \top y$$

et appelée composé de x et y pour la loi de composition interne $\star$ ou $\top$.

2 Propriétés

2.1 Associativité

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite associative si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z) .$$

2.2 Commutativité

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite commutative si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \star y = y \star x.$$

2.3 Elément neutre

On dit qu'une loi de composition interne $\star$ sur E admet un élément neutre s'il existe e dans E tel que

$$\forall x \in E, x \star e = e \star x = x.$$

Remarque
Si $\star$ admet un élément neutre sur E alors celui-ci est **UNIQUE**.

2.4 Inversibilité

Soit $\star$ une loi de composition interne sur E qui admet un élément neutre e.

Un élément x de E est dit inversible s'il existe x' dans E tel que

$$x \star x' = x' \star x = e.$$

Dans ce cas, si la loi est **associative**, l'élément x' est **UNIQUE** et dit inverse de x.

Remarques

— Les termes "symétrisable" et "symétrique" sont parfois utilisés à la place de "inversible" et inverse".

— Si $x \in E$ et $y \in E$ sont inversibles pour la loi **associative** $\star$ alors $x \star y \in E$ est inversible d'inverse $y' \star x' \in E$ avec $x' \in E$ inverse de x et $y' \in E$ inverse de y.

2.5 Distributivité

Soit $\star$ et $\top$ deux lois de composition interne sur E.

On dit que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $\star$ si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \top (y \star z) = (x \top y) \star (x \top z) \\ (y \star z) \top x = (y \top x) \star (z \top x) \end{cases}.$$

2.6 Quelques exemples usuels de lois de composition interne déjà rencontrées cette année

☐ **Loi** $+$

— sur les ensembles de nombres $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

— sur les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$;

— sur les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

☐ **Loi** $\times$

— sur les ensembles de nombres $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}, \mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$;

— sur les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$;

— sur les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

☐ **Autres lois**

— sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E : $\cup$, $\cap$ et $\setminus$;

— sur l'ensemble des applications de E dans E avec E un ensemble : $\circ$.

3 Partie stable

Soit $\star$ une loi de composition interne sur E.

On dit qu'une partie A de E est stable pour la loi $\star$ si $\forall (x, y) \in A^2, x \star y \in A$.

II Groupes, sous-groupes

1 Groupes

1.1 Définitions

Un **groupe** est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\star$ telle que :

1. $\star$ est associative.
2. G admet un élément neutre e_G pour la loi $\star$.
3. Tout élément x de G admet un inverse x' pour la loi $\star$.

Remarques

1. Il y a unicité de l'élément neutre de G et de l'inverse de tout élément de G.
2. Dans tout groupe, il y a au moins un élément : le neutre pour la loi du groupe.
3. Si $\star$ est commutative, on dit que G est un groupe commutatif (ou groupe abélien).

1.2 Notations dans un groupe additif et un groupe multiplicatif

☐ Lorsque la loi du groupe G est notée $+$ alors on parle de **groupe additif** et on écrit :

1. 0_G au lieu de e_G ;
2. $-x$ au lieu de x' ;
3. $nx = \begin{cases} x + \cdots + x \ (n \text{ fois}) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0_G & \text{si } n = 0 \\ -(-nx) & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$

☐ Lorsque la loi du groupe G est notée $\times$ alors on parle de **groupe multiplicatif** et on écrit :

1. 1_G au lieu de e_G ;
2. x^{-1} au lieu de x' ;
3. $x^n = \begin{cases} x \times \cdots \times x \ (n \text{ fois}) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 1_G & \text{si } n = 0 \\ (x^{-n})^{-1} & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}.$

1.3 Quelques exemples usuels de groupes déjà rencontrés cette année

☐ **Groupes additifs**

- dans les ensembles de nombres : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
- dans les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$;
- dans les ensembles de matrices : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}), \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

☐ **Groupes multiplicatifs**

- dans les ensembles de nombres : $\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$;
- dans les ensembles de matrices : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

1.4 Groupe des permutations d'un ensemble

Soit X un ensemble.

L'ensemble des applications de X dans X qui sont des bijections est un groupe pour la loi de composition interne $\circ$, appelé **groupe des permutations** de l'ensemble X et noté S_X.

1.5 Produit fini de groupes

Soit $(G_1, \perp)$ et $(G_2, \top)$ deux groupes.

Le produit cartésien $G_1 \times G_2$ muni de la loi $\star$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2, \forall (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2, (x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 \perp y_1, x_2 \top y_2)$$

est un groupe, dit **groupe-produit**.

Dans ce groupe-produit,

- l'élément neutre est (e_{G_1}, e_{G_2}) où e_{G_1} est le neutre de G_1 et e_{G_2} est le neutre de G_2 ;
- l'inverse de (x_1, x_2) de $G_1 \times G_2$ est (x_1', x_2') où x_1' est l'inverse de x_1 et x_2' l'inverse de x_2.

Remarques

- On en déduit, par exemple, que :
  - $\mathbb{K}^2$ est un groupe additif de neutre $(0,0)$ dans lequel $(-x, -y)$ est l'inverse de (x, y) ;
  - $(\mathbb{K}^*)^2$ est un groupe multiplicatif de neutre $(1,1)$ dans lequel (x^{-1}, y^{-1}) est l'inverse de (x, y).
- La propriété s'étend à un nombre fini $m\,(\geq 2)$ de groupes $(G_1, \underset{1}{\perp}), (G_2, \underset{2}{\perp}), \ldots, (G_m, \underset{m}{\perp})$.
  Ainsi, par exemple, $\mathbb{K}^m$ est un groupe additif et $(\mathbb{K}^*)^m$ est un groupe multiplicatif.

2 Sous-groupes

2.1 Définition

Soit $(G, \star)$ un groupe.

Une partie H de G est dite **sous-groupe** de G si les deux conditions suivantes sont réunies :

1. H est une partie stable pour la loi $\star$;
2. H est un groupe pour la loi de composition interne obtenue par restriction à H de la loi de composition interne $\star$ de G.

2.2 Caractérisation

Une partie H d'un groupe $(G, \star)$ est un **sous-groupe** de G si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :

1. $H \neq \emptyset$;
2. $\forall (x, y) \in H^2, x \star y \in H$;
3. $\forall x \in H, x' \in H$ avec x' l'inverse de x dans $(G, \star)$.

Remarque
On en déduit une caractérisation alternative : une partie H d'un groupe $(G, \star)$ est un **sous-groupe** de G si, et seulement si : $H \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in H^2, x \star y' \in H$ avec y' l'inverse de y dans $(G, \star)$.

III Morphisme de groupes

1 Morphisme

1.1 Définition

Une application $f : G \to G'$ est dite **morphisme de groupes** si G et G' sont des groupes de lois respectives $\star$ et $\perp$ avec

$$\forall (x,y) \in G \times G, f(x \star y) = f(x) \perp f(y)$$

1.2 Propriété

Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes alors :

— l'image de l'élément neutre de G par f est l'élément neutre de G', c'est-à-dire :

$$f(e_G) = e_{G'}$$

— pour tout $x \in G$, l'inverse de l'image de x par f est l'image de l'inverse de x par f, c'est-à-dire :

$$(f(x))' = f(x').$$

1.3 Image directe et réciproque

Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes alors,

1. l'image directe de tout sous-groupe H de G, est un sous-groupe de G'.
2. l'image réciproque de tout sous-groupe H' de G' est un sous-groupe de G.

1.4 Noyau et image d'un morphisme de groupes

Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes alors,

1. L'image directe $f(G)$ est un sous-groupe particulier de G', dit image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{Im} f \underset{\text{déf}}{=} f(G) \underset{\text{déf}}{=} \{y \in G' \mid \exists x \in G, y = f(x)\}$$

2. L'image réciproque $f^{-1}(\{e_{G'}\})$ est un sous-groupe particulier de G, dit noyau de f et noté $\operatorname{Ker} f$.

$$\operatorname{Ker} f \underset{\text{déf}}{=} f^{-1}(\{e_{G'}\}) \underset{\text{déf}}{=} \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$$

1.5 Morphisme injectif

Un morphisme de groupes $f : G \to G'$ est injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$

2 Isomorphisme

2.1 Définition

f est dit isomorphisme de groupes si f est un morphisme de groupes et f est bijective.

2.2 Propriété

Si $f : G \to G'$ est un isomorphisme de groupes alors $f^{-1} : G' \to G$ est un isomorphisme de groupes.

IV Anneaux, corps

1 Anneaux

1.1 Définition

Un **anneau** est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $\star$ et $\top$ telles que :

1. $(A, \star)$ est un groupe commutatif ;
2. $\top$ est associative ;
3. $\top$ est distributive par rapport à la loi $\star$;
4. A admet un élément neutre pour la loi $\top$.

Remarques

1. Il y a unicité de l'élément neutre pour la loi $\top$.
2. Si $\top$ est commutative, on dit que A est un anneau commutatif.
3. Si les lois de A sont notées $+$ et $\times$, les éléments neutres de A pour les lois $+$ et $\times$ sont alors souvent notés respectivement 0_A et 1_A (ou 0 et 1 s'il n'y a pas de confusion possible) et 1_A est appelé élément unité de l'anneau.

1.2 Quelques exemples usuels d'anneaux déjà rencontrés cette année

— Dans les ensembles de nombres : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

— Dans les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}\left(I, \mathbb{K}\right)$ et $\mathcal{C}^n\left(I, \mathbb{K}\right)$;

— Dans les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$

1.3 Calculs dans un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

1. $\forall x \in A, 0_A \times x = x \times 0_A = 0_A$ et $\forall x \in A, (-1_A) \times x = x \times (-1_A) = -x$.
2. $\forall (x, y) \in A^2, (-x) \times y = x \times (-y) = -(x \times y)$ et $(-x) \times (-y) = x \times y$.
3. $\forall (x, y, z) \in A^3, (x - y) \times z = (x \times z) - (y \times z)$ et $z \times (x - y) = (z \times x) - (z \times y)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in A^2, x \times y = y \times x \Rightarrow (x + y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times y^{n-k}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in A^2, x \times y = y \times x \Rightarrow x^n - y^n = (x - y) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \times y^{n-1-k}$.

1.4 Groupe des inversibles d'un anneau

Si $(A, +, \times)$ est un anneau alors l'ensemble

$$G = \{x \in A \mid x \text{ admet un symétrique pour la loi } \times \text{ dans } A\}$$

muni de la loi $\times$ est un groupe, dit **groupe des inversibles de l'anneau** $(A, +, \times)$.

2 Sous-anneaux

Une partie H d'un anneau $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de A si, et seulement si,

1. $1_A \in H$.
2. $\forall (x, y) \in H^2, x + y \in H$
3. $\forall x \in H, -x \in H$.
4. $\forall (x, y) \in H^2, x \times y \in H$.

Remarque
On peut remplacer les conditions 2. et 3. par $\forall (x, y) \in H^2, x - y \in H$.

3 Morphisme d'anneaux

3.1 Définition

Une application $f : A \to B$ est dite morphisme d'anneaux si A et B sont des anneaux de lois respectives $(+, \times)$ et $(\star, \top)$ avec :

1. $f(1_A) = 1_B$.
2. $\forall (x, y) \in A^2, f(x + y) = f(x) \star f(y)$.
3. $\forall (x, y) \in A^2, f(x \times y) = f(x) \top f(y)$.

3.2 Propriété

Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux alors f est un morphisme de groupes.

3.3 Image et noyau d'un morphisme d'anneaux

— Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux alors $\mathrm{Im}\ f$ est un sous-anneau de B.

— Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux avec $B \neq \{0_B\}$ alors $\mathrm{Ker}\ f$ n'est pas sous-anneau de A.

En effet, on a $f(1_A) = 1_B$ mais $1_B \neq 0_B$ (sinon B serait égal à $\{0_B\}$) donc 1_A n'appartient pas à $\mathrm{Ker}\ f = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$ et, par conséquent, $\mathrm{Ker}\ f$ n'est pas sous-anneau de A.

4 Isomorphisme d'anneaux

4.1 Définition

f est dit isomorphisme d'anneaux si f est un morphisme d'anneaux et f est bijective.

4.2 Propriété

Si $f : A \to B$ est un isomorphisme d'anneaux alors $f^{-1} : B \to A$ est un isomorphisme d'anneaux.

5 Anneau intègre

5.1 Définition

On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est un **anneau intègre** si les conditions suivantes sont réunies :

1. $A \neq \{0_A\}$.
2. $\forall (a, b) \in A^2, a \times b = 0_A \Rightarrow a = 0_A$ ou $b = 0_A$.

Remarque
Des éléments a et b de A tels que $a \times b = 0_A$ avec $a \neq 0_A$ et $b \neq 0_A$ sont dits **diviseurs de 0_A.**

5.2 Quelques exemples d'anneaux intègres/non intègres déja rencontrés cette année

- Dans les ensembles de nombres : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des anneaux intègres.
- Dans les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ ne sont pas des anneaux intègres.
- Dans les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un anneau intègre.

6 Corps commutatif

6.1 Définition

On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est un **corps commutatif** si les conditions suivantes sont réunies :

1. $A \neq \{0_A\}$.
2. A est commutatif.
3. tout élément de A différent de 0_A admet un inverse dans A pour la loi $\times$.

Remarque
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps commutatifs.

6.2 Propriété

Tout corps commutatif est un anneau intègre.

6.3 Sous-corps

Une partie H d'un corps $(A, +, \times)$ est un sous-corps de A si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :

1. H est un sous-anneau de A.
2. $\forall x \in H, x \neq 0_A \Rightarrow x^{-1} \in H$ (où x^{-1} désigne l'inverse de x pour la loi $\times$)

CHAPITRE 21

POLYNÔMES

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Anneau des polynômes à une indéterminée

1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'étant pas au programme, on se contente ici d'une présentation sommaire.

1.1 Polynômes (formels) à coefficients dans $\mathbb{K}$

Une suite $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang est dite **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'élément a_k est appelé **coefficient de degré** k de P.

Notations

- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est dit polynôme nul et noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ ou même 0.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de degré k qui vaut 1 est noté X^k.

1.2 Egalité entre deux polynômes (formels)

Deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients de même degré sont égaux.

1.3 Degré d'un polynôme (formel)

Le **degré d'un polynôme** $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ est noté $\deg(P)$ et défini de la manière suivante :

$$\deg(P) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} & \text{si } P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \\ -\infty & \text{si } P = 0_{\mathbb{K}[X]} \end{cases}$$

1.4 Coefficient dominant d'un polynôme (formel)

Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.

- Si P est de degré n alors a_n est dit **coefficient dominant** de P.
- Si le coefficient dominant de P est égal à 1, on dit que P est un **polynôme unitaire**.

2 L'anneau intègre $(\mathbb{K}[X],+,\times)$

2.1 Multiplication par un scalaire, somme et produit

Soit $P=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $Q=(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

— Le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ noté $\lambda.P$ défini ci-dessous est dit polynôme multiplication de P par λ :

$$\lambda.P=(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

— Le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ noté $P+Q$ défini ci-dessous est dit polynôme somme de P et Q :

$$P+Q=(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

— Le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ noté $P\times Q$ défini ci-dessous est dit polynôme produit de P et Q :

$$P\times Q=(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec, pour tout } n\in\mathbb{N}, c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k$$

Remarque
On peut faire l'analogie ici avec les expressions des coefficients des applications polynomiales obtenues après multiplication d'une application polynomiale par un scalaire, addition ou multiplication de deux applications polynomiales. En particulier, l'expression imposée pour les coefficients du produit de deux polynômes s'explique en pensant aux produits d'applications polynomiales déjà vus cette année.

2.2 Notation usuelle des polynômes

Si $P=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ alors on note

$$P=\sum_{k=0}^{\deg(P)}a_kX^k \text{ ou } P=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k$$

Remarques

— La somme $\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k$ est finie car tous ses termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

— Par définition du produit de deux polynômes, on a bien $X^2=X\times X$ et même plus généralement, $X^k=X\times X^{k-1}=X^{k-1}\times X$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ ce qui justifie a posteriori la notation X^k choisie.

2.3 Effet des opérations polynomiales sur le degré

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ alors :

$$\deg(\lambda.P)=\deg(P) \text{ si } \lambda\neq 0$$

$$\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$$

$$\begin{cases}\deg(P+Q)=\max(\deg(P),\deg(Q)) & \text{si } \deg(P)\neq\deg(Q)\\ \deg(P+Q)\leq\max(\deg(P),\deg(Q)) & \text{si } \deg(P)=\deg(Q)\end{cases}$$

2.4 Structure d'anneau intègre commutatif

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un **anneau intègre commutatif** dont l'élément neutre

- pour la loi $+$ est le polynôme nul $(0, 0, \ldots\ldots)$ noté $0_{\mathbb{K}[X]}$;
- pour la loi $\times$ est le polynôme $X^0 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ noté $1_{\mathbb{K}[X]}$.

En particulier, on a :
$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \Longrightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Remarque
On verra dans le chapitre "Espaces vectoriels" que $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

3 L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$

3.1 Définitions

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré **inférieur ou égal** à n.

Remarques

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_{n+1}[X]$.
- Les éléments de $\mathbb{K}_0[X]$ sont appelés les polynômes constants.

3.2 Structure de $\mathbb{K}_n[X]$

$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

Remarques

- $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable pour la loi $\times$ donc n'est pas un anneau pour les lois usuelles $+$ et $\times$.
- On verra dans le chapitre "Espaces vectoriels" que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, .)$.

4 Composition de polynômes

4.1 Définition

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$.

On appelle polynôme composé de P et Q et on note $P \circ Q$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k.$$

Remarque
On rappelle que $Q^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$.

4.2 Degré

Si P et Q sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et si Q est non constant alors

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).$$

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Soit $(A, B, C, D) \in (\mathbb{K}[X])^4$.

1 Divisibilité

1.1 Définitions

S'il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$, on dit que B **divise** A (ou que B est un diviseur de A, ou que A **est divisible par** B ou encore que A est un multiple de B) et on note $B|A$.

Remarque
Si B est non nul et si B divise A alors il existe un unique Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

1.2 Ensembles des diviseurs et des multiples

— On note $\mathcal{D}(A) = \{B \in \mathbb{K}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{K}[X], A = BQ\}$ **l'ensemble des diviseurs de** A.
  — Si $A = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\mathcal{D}(A) = \mathbb{K}[X]$.
  — Si $A \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\mathcal{D}(A)$ est composée de polynômes de degré $n \leq \deg(A)$.

— On note $B\mathbb{K}[X] = \{BQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$ **l'ensemble des multiples de** B.
  — Si $B = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $B\mathbb{K}[X] = \left\{0_{\mathbb{K}[X]}\right\}$.
  — Si $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $B\mathbb{K}[X]$ est composé de $0_{\mathbb{K}[X]}$ et de polynômes de degré $n \geq \deg(B)$.

1.3 Caractérisation des polynômes associés

$A|B$ et $B|A$ si, et seulement si, il existe λ dans $\mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$. (A et B sont alors dits **associés**)

1.4 Propriétés immédiates

1. $A|A$.
2. Si $A|B$ et $B|C$ alors $A|C$.
3. Si $A|B$ et $C|D$ alors $AC|BD$.
4. Si $A|B$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n|B^n$.
5. Si $C|A$ et $C|B$ alors, pour tout $(U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2, C \mid AU + BV$.

2 Division euclidienne

2.1 Théorème de la division euclidienne

Pour tout (A, B) de $(\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, il existe un unique couple (Q, R) de $(\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

Dans la division euclidienne de A par B, A est appelé **dividende**, B **diviseur**, Q **quotient** et R **reste.**

2.2 Caractérisation de la divisibilité

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

B divise A si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

III Fonctions polynomiales et racines

1 Fonction polynomiale associée à un polynôme

1.1 Définition

A tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on peut associer une fonction $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

Cette fonction $\widetilde{P}$ est dite fonction polynomiale associée à P.

Remarque
Par abus d'écriture, on utilise souvent la même notation pour P et $\widetilde{P}$ alors que ce sont des **objets de nature différente** (une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ presque nulle pour l'un et une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ pour l'autre).

1.2 Propriétés

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P} \qquad \widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q} \qquad \widetilde{P \times Q} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q} \qquad \widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}.$$

2 Racine (ou zéro) d'un polynôme

2.1 Définition

On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine (ou un zéro) du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.

Remarques
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, l'écriture $P(\alpha)$ n'a a priori pas de sens car P est une suite et pas une fonction. En pratique, on note tout de même $P(\alpha)$ au lieu de $\widetilde{P}(\alpha)$ et on parle d'**évaluation du polynôme P en α** et non pas de la valeur de P en $X = \alpha$ ce qui n'a pas de sens.

2.2 Caractérisation en termes de divisibilité

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, le polynôme $X - \alpha$ divise P.

2.3 Propriété sur le nombre de racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors P a une infinité de racines dans $\mathbb{K}$.
— Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors P a au plus $\deg(P)$ racines dans $\mathbb{K}$.

Remarque
Le polynôme P est entièrement déterminé par la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ associée. En effet, si $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$ alors $\widetilde{P - Q} = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{K}}}$ donc $P - Q$ a une infinité de racines et par conséquent $P - Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ puis $P = Q$.

2.4 Multiplicité d'une racine

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$.

On dit que α est **racine de multiplicité** m dans P si $\begin{cases} (X-\alpha)^m \text{ divise } P \\ (X-\alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P \end{cases}$

autrement dit s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-\alpha)^m Q \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0.$$

Remarques

- Dire que α est de multiplicité 0 dans P signifie que α n'est pas racine de P.
- Une racine de P est dite simple (resp. double, triple, ...) si sa multiplicité est 1 (resp. 2, 3, ...).

3 Polynôme scindé

3.1 Définition

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1 (non nécessairement distincts).

3.2 Propriété sur le degré

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$.

Si P est scindé sur $\mathbb{K}$ alors le degré de P est égal à la somme des multiplicité de ses racines dans $\mathbb{K}$.

IV Polynômes dérivés

1 Dérivée formelle d'un polynôme

1.1 Définition

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme dérivé formel du polynôme P le polynôme noté P' défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

1.2 Degré du polynôme dérivé

Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors $\begin{cases} \deg(P') = \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ P' = 0_{\mathbb{K}[X]} & \text{sinon} \end{cases}$.

1.3 Lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée

Dans le cas particulier où P est un **polynôme à coefficients réels**, on a : $\widetilde{P'} = \left(\widetilde{P}\right)'$.

1.4 Opérations sur les polynômes dérivés

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors :

$$(\lambda P)' = \lambda P' \qquad (P+Q)' = P' + Q' \qquad (P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q' \qquad (P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$$

2 Polynômes dérivés successifs

2.1 Définition

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On pose $P^{(0)} = P$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$ appelé polynôme dérivé formel de P d'ordre $k+1$.

2.2 Degré des polynômes dérivés successifs

Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et n un entier naturel alors $\begin{cases} \deg\left(P^{(n)}\right) = \deg(P) - n & \text{si } \deg(P) \geq n \\ P^{(n)} = 0_{\mathbb{K}[X]} & \text{sinon} \end{cases}$.

2.3 Opérations sur les polynômes dérivés successifs

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Alors :

$$(\lambda P)^{(n)} = \lambda P^{(n)}$$

$$(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$$

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} \times Q^{(k)}$$

(Formule de Leibniz)

2.4 Formule de Taylor polynomiale

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ et tout α dans $\mathbb{K}$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

Remarque

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le coefficient de degré k de P est $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

2.5 Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

α est racine de multiplicité m dans P si, et seulement si, $\begin{cases} P^{(k)}(\alpha) = 0 & \text{pour tout } k \in [\![0, m-1]\!] \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$.

Remarque

On en déduit que si α est de multiplicité m non nulle dans P alors α est de multiplicité $m-1$ dans P'.

V Trois classiques incontournables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale

L'évaluation en $\alpha \in \mathbb{K}$ du polynôme de degré n, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, peut se faire ainsi :

$$P(\alpha) = a_0 + \alpha\left[a_1 + \alpha\left[a_2 + \cdots + \alpha\left[a_{n-1} + \alpha a_n\right]\right]\right]$$

Cet algorithme dit "schéma de Horner" a une complexité linéaire (en version itérative ou récursive) alors que la méthode naïve d'évaluation a une complexité quadratique.

2 Formule d'interpolation de Lagrange

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une famille de n éléments de $\mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall j \in [\![1, n]\!], P(x_j) = y_j$. Ce polynôme, dit **polynôme interpolateur de Lagrange**, est donné par :

$$P = y_1 L_1 + \ldots + y_n L_n \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], L_i = \frac{\displaystyle\prod_{k=1, k\neq i}^{n} (X - x_k)}{\displaystyle\prod_{k=1, k\neq i}^{n} (x_i - x_k)}.$$

<u>Remarques</u>

- $\forall (i, j) \in ([\![1, n]\!])^2, L_i(x_j) = \delta_{ij}$
- Plus généralement, les polynômes Q de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\forall j \in [\![1, n]\!], Q(x_j) = y_j$ sont les polynômes

$$Q = P + \left(\prod_{k=1}^{n} (X - x_k)\right) S$$

  où P est le polynôme interpolateur de Lagrange et S un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

3 Relations entre coefficients et racines (formules de Viète)

Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n, **scindé** sur $\mathbb{K}$ de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (répétées avec multiplicité) alors, en notant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sigma_i = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_i = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_i \leq n} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \ldots \alpha_{k_i}$$

<u>Remarque</u>
Les formules concernant la somme σ_1 et le produit des racines σ_n sont à connaître par coeur :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Les autres sont à savoir retrouver rapidement.

VI Polynômes irréductibles

1 Théorème de D'Alembert-Gauss (ADMIS)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

Remarque
On en déduit que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

2 Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$

2.1 Définition

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si les conditions suivantes sont réunies :

1. P n'est pas constant.
2. les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants et les polynômes associés à P.

Remarque
Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ n'a donc comme seuls diviseurs, à une constante multiplicative près, que $1_{\mathbb{K}[X]}$ et lui-même.

2.2 Caractérisation des polynômes irréductibles

— Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

— Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racine réelle.

3 Décomposition en facteurs irréductibles

3.1 Théorèmes

— Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ admet **au moins un diviseur irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$.

— Tout polynôme non constant P de $\mathbb{K}[X]$ peut s'écrire, de manière unique à l'ordre près des facteurs, sous la forme

$$P = \lambda (P_1)^{\alpha_1} (P_2)^{\alpha_2} \dots (P_m)^{\alpha_m}$$

avec

1. λ le coefficient dominant de P.
2. $m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ des entiers naturels non nuls.
3. $P_1, P_2, \dots, P_m$ des polynômes **irréductibles unitaires** deux à deux distincts de $\mathbb{K}[X]$.

3.2 Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $(A, B) \in (\mathbb{C}[X])^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

B divise A si, et seulement si, toute racine de B de multiplicité β est racine de A de multiplicité $\alpha \geq \beta$.

3.3 Racines conjuguées des polynômes de $\mathbb{R}[X]$

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

VII Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1 PGCD de deux polynômes

1.1 Définition des PGCD

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Tout **diviseur commun** de A et B dans $\mathbb{K}[X]$ **de degré maximal** est dit PGCD des polynômes A et B.

<u>Remarques</u>

- Pour tout $B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, les PGCD de $0_{\mathbb{K}[X]}$ et B sont les associés du polynôme B.
- Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, les PGCD de A et $1_{\mathbb{K}[X]}$ sont les associés du polynôme $1_{\mathbb{K}[X]}$.
- Pour tout $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $(A, B) \neq (0_{\mathbb{K}[X]}, 0_{\mathbb{K}[X]})$, les PGCD de A et B sont les PGCD de B et A.

1.2 Propriété importante des PGCD

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Si R est le reste de la division euclidienne de A par B alors

$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R)$$

donc les PGCD de A et B sont les PGCD de B et de R.

1.3 Algorithme d'Euclide

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

On pose :

$$R_0 = A \text{ et } R_1 = B$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $R_i \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on définit R_{i+1} comme suit :

$$R_{i+1} \text{ est le reste de la division euclidienne de } R_{i-1} \text{ par } R_i.$$

Alors :

- il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$R_{n+1} = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ et } R_n \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$$
- pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, les PGCD de R_{i-1} et R_i sont les PGCD de R_i et R_{i+1} .

En particulier, les PGCD de A et B sont les PGCD de R_n et R_{n+1} donc sont les polynômes associés à R_n.

<u>Remarques</u>

- Les PGCD de A et B sont les polynômes associés au **dernier reste non nul** dans l'algorithme d'Euclide encore appelé **algorithme des divisions euclidiennes successives**.
- Parmi les polynômes associés au dernier reste non nul R_n, **un seul est unitaire.**

1.4 Caractérisation des PGCD

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD.

1.5 Définition et caractérisation du PGCD

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

- Le **polynôme unitaire de plus haut degré** de $\mathbb{K}[X]$ **diviseur commun** de A et B est appelé **le PGCD** de A et B et noté $A \wedge B$.

- Le polynôme $A \wedge B$ est caractérisé par les trois propriétés suivantes :
  1. $A \wedge B$ est un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$.
  2. $A \wedge B \,|\, A$ et $A \wedge B \,|\, B$.
  3. $\forall D \in \mathbb{K}[X], D \,|\, A$ et $D \,|\, B \Rightarrow D \,|\, A \wedge B$.

1.6 Relation de Bézout

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Il existe **un** couple de polynômes $(U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$, dit couple de Bézout, tel que $AU + BV = A \wedge B$.

Remarque
Un tel couple, qui n'est pas unique, peut être déterminé par **l'algorithme d'Euclide étendu** selon le même principe que celui vu dans $\mathbb{Z}$.

2 PPCM de deux polynômes

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $A \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

- Tout **multiple commun non nul** de A et B de **degré minimal** est dit PPCM de A et B.
- **L'unique polynôme unitaire de plus bas degré** de $\mathbb{K}[X]$ qui est **multiple commun** de A et B est appelé **le PPCM** de A et B et noté $A \vee B$.

3 Couple de polynômes premiers entre eux

Soit $(A, B, C) \in (\mathbb{K}[X])^3$ avec $A \neq 0_{\mathbb{K}[X]}, B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $C \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

3.1 Définition

On dit que les polynômes A et B sont premiers entre eux si $A \wedge B = 1_{\mathbb{K}[X]}$.

3.2 Théorème de Bézout

A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $AU + BV = 1_{\mathbb{K}[X]}$.

3.3 Lemme de Gauss

Si C divise AB et si C est premier avec A alors C divise B.

3.4 Propriétés sur le produit

1. Si A et B sont premiers entre eux et divisent C alors AB divise C.
2. Si A et C sont premiers entre eux et si B et C sont premiers entre eux alors AB et C sont premiers entre eux.

4 PGCD d'un nombre fini de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $(A_1, \dots, A_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$ tel que l'un au moins des A_i est différent de $0_{\mathbb{K}[X]}$.

4.1 PGCD

On appelle PGCD des polynômes $A_1, A_2, \dots$ et A_n et on note $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ **le polynôme unitaire de degré maximal de $\mathbb{K}[X]$ diviseur commun de $A_1, A_2, \dots$ et A_n.**

On a alors :

$$\mathcal{D}(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) = \mathcal{D}(A_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(A_n).$$

4.2 Relation de Bézout

Il existe un n-uplet de polynômes $(U_1, \dots, U_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$ tel que $A_1U_1 + \cdots + A_nU_n = A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$.

4.3 Polynômes premiers entre eux

Les polynômes $A_1, A_2, \dots$ et A_n sont dits :

- premiers entre eux dans leur ensemble si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n = 1_{\mathbb{K}[X]}$.
- premiers entre eux deux à deux si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!], i \neq j \Rightarrow A_i \wedge A_j = 1_{\mathbb{K}[X]}$.

CHAPITRE 22

FONCTIONS CONVEXES

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

I Généralités

1 Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]\,, f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

Interprétation géométrique

f est convexe si, et seulement si, **tout sous-arc de sa courbe représentative** est **situé au-dessous de la corde** correspondante.

2 Inégalité de Jensen

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur I alors, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

3 Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes

$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I **si, et seulement si,** pour tout $a \in I$, la fonction $\Delta_a : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \Delta_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est croissante.

<u>Remarque</u>
On appelle parfois Δ_a la fonction "pente en a".

4 Inégalité des trois pentes

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I alors, pour tout $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$, on a :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

5 Position de la courbe représentative par rapport aux sécantes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.

La courbe représentative de f est située :

— sous la sécante à la courbe aux points d'abscisse x et y sur le segment $[x, y]$;
— au-dessus de la sécante à la courbe aux points d'abscisse x et y sur $I \setminus [x, y]$.

II Convexité et fonctions dérivables ou deux fois dérivables

1 Fonctions convexes dérivables

1.1 Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

Alors : f est convexe sur I **si, et seulement si,** f' est croissante sur I.

1.2 Position de la courbe représentative par rapport aux tangentes

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et dérivable sur I alors la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes.

2 Fonctions convexes deux fois dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I.

Alors : f est convexe sur I **si, et seulement si,** f'' est positive sur I.

III Quelques exemples d'inégalités de convexité (à retrouver)

1 Inégalités usuelles

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{\exp(x)+\exp(y)}{2}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$.
4. $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$.
5. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
6. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, |\tan(x)| \geqslant |x|$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, |\mathrm{Arctan}(x)| \leqslant |x|$.

2 Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique (cf E08-DSL 3)

Pour $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, on appelle moyenne :

— arithmétique des réels $x_1, \dots, x_n$ le réel A_n défini par

$$A_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right);$$

— géométrique des réels $x_1, \dots, x_n$ le réel G_n défini par

$$G_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}};$$

— harmonique des réels $x_1, \dots, x_n$ le réel H_n défini par

$$H_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}.$$

Ces trois réels vérifient :

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n.$$

CHAPITRE 23

ESPACES VECTORIELS

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels

1 Définition

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}-$espace vectoriel) tout ensemble E muni d'une **loi de composition interne** $+$ et d'une **loi de composition externe** $.$ telles que :

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y.$
3. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x.$
4. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x).$
5. $\forall x \in E, 1.x = x$ avec 1 l'élément unité de $\mathbb{K}$.

Remarque
Les éléments d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel sont appelés **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

2 Propriétés immédiates (règles de calcul)

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel alors :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, -(\lambda.x) = (-\lambda).x = \lambda.(-x).$

3 Produit fini d'espaces vectoriels

Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels alors le produit cartésien $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ muni des lois $+$ et $.$ définies, par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \forall y \in E, \begin{cases} x+y & = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \\ \lambda.x & = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \dots, \lambda.x_n) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel dit espace vectoriel produit.

4 Espaces vectoriels de référence déjà rencontrés

— $\mathbb{K}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
— $\mathbb{K}[X]$.
— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
— $\mathbb{K}^\Omega$ avec Ω un ensemble quelconque non vide.
— $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.

Remarque
Plus généralement, l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, E)$ des fonctions de Ω (ensemble quelconque non vide) dans E ($\mathbb{K}-$espace vectoriel) est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

5 Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

5.1 Cas particulier d'une famille finie de vecteurs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ s'il existe n éléments de $\mathbb{K}$ notés $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés **coefficients de la combinaison linéaire**.

Exemples
— Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de la famille de vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec

$$e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni}).$$

— Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de la famille de matrices $(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ avec

$$E_{ij} = (\delta_{is}\delta_{jt})_{(s,t) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$$

5.2 Cas général d'une famille quelconque de vecteurs

Soit I un ensemble et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire de la famille $(e_i)_{i \in I}$ s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ **presque nulle (ou à support fini)** d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i.$$

La famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ est appelée famille des **coefficients de la combinaison linéaire**.

Exemple
Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire de la famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

II Sous-espaces vectoriels

1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Une partie H de E est dite sous-espace vectoriel de E si :

1. H est une partie stable par addition et par multiplication par un scalaire ;
2. H est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel pour les lois de composition interne et externe obtenues par restriction à H des lois de E.

2 Caractérisation

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et H une partie de E.

H est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :

1. $0_E \in H$;
2. H est stable par combinaison linéaire : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in H^2, \lambda.x + \mu.y \in H$.

Exemples

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

— $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel nul.**

— Si E est différent de $\{0_E\}$ alors, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, l'ensemble $H = \{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E dit **droite vectorielle** de E engendrée par le vecteur non nul x.

Remarques

— En pratique, le recours à cette caractérisation est à **privilégier systématiquement** par rapport à la définition de sous-espace vectoriel dont la vérification des axiomes serait trop coûteuse.

— Cette caractérisation permet aussi de montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe est un espace vectoriel en démontrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence pour ces lois.

3 Quelques exemples de sous-espaces vectoriels déjà rencontrés

— $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

— $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

— $\left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ converge}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

— L'ensemble des solutions d'un **système linéaire homogène** d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

— Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dit **droite vectorielle** de $\mathbb{R}^2$.

— Si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ alors $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dit **plan vectoriel** de $\mathbb{R}^3$.

4 Intersection de sous-espaces vectoriels

L'intersection d'une famille (quelconque) de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque
En revanche, la réunion d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E.

5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

5.1 Définition

L'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant la partie A est appelée sous-espace vectoriel de E **engendré par la partie** A et notée $\mathrm{Vect}(A)$.

Remarque
Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E, on note aussi $\mathrm{Vect}(a_i)_{i\in I}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie $\{a_i \mid i \in I\}$ de E.

5.2 Caractérisation

$\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, qui contient A.

5.3 Théorème

— Si A est vide alors $\mathrm{Vect}(A)$ est égal à $\{0_E\}$.
— Si A est non vide alors $\mathrm{Vect}(A)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

III Familles génératrice, libre ou base d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille (partie) de E.

1 Famille (partie) génératrice

La famille (partie) $\mathcal{F}$ de E est dite **génératrice** de E si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Remarques

— On dit aussi que "$\mathcal{F}$ engendre E" au lieu de "$\mathcal{F}$ est génératrice de E".
— En pratique,
  — seule l'inclusion $E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est à établir pour montrer que $\mathcal{F}$ engendre E. L'autre inclusion est immédiate car E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel donc stable par combinaison linéaire.
  — montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E, c'est donc montrer que tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de cette famille $\mathcal{F}$.

2 Famille (partie) libre

2.1 Définition

La famille (ou partie) $\mathcal{F}$ de E est dite **libre (ou linéairement indépendante)** si toute combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{F}$ a ses coefficients nuls.

ATTENTION à ne pas commettre la confusion avec "si les coefficients de la combinaison linéaire sont tous nuls alors celle-ci est nulle" ce qui est vrai que la famille soit libre ou non.

2.2 Propriété

L'ajout à une famille libre de E d'un élément de E qui n'est pas combinaison linéaire de cette famille donne une nouvelle famille libre de E.

2.3 Un exemple important à connaître

Toute famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de **degrés distincts** est libre.

3 Famille (partie) liée

3.1 Définition

La famille (partie) $\mathcal{F}$ de E est dite **liée (ou dépendante linéairement)** si elle n'est pas libre.

Remarque
Les familles (parties) de E qui contiennent le vecteur 0_E sont liées.

3.2 Caractérisations

La famille $\mathcal{F}$ de E est liée si, et seulement si, l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. il existe une combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{F}$ qui n'a pas tous ses coefficients nuls.
2. il existe un élément de la famille $\mathcal{F}$ qui est combinaison linéaire des autres éléments de $\mathcal{F}$.

4 Base

4.1 Définition

La famille $\mathcal{F}$ est dite base de E si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E et libre.

4.2 Caractérisation

La famille $\mathcal{F}$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire de $\mathcal{F}$.

Dans ce cas, la famille presque nulle des coefficients de la combinaison linéaire égale au vecteur x est appelée famille des **coordonnées de x dans la base $\mathcal{F}$** de E.

4.3 Bases de référence à connaître

- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

IV Somme et somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

1 Somme de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel

1.1 Définition

La somme des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 est l'ensemble noté $E_1 + E_2$ défini par :

$$E_1 + E_2 = \{x \in E \mid \exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2\}.$$

1.2 Propriété

Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque
$E_1 + E_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $E_1 \cup E_2$.

2 Somme directe

2.1 Définition

La somme $E_1 + E_2$ est dite directe, et notée dans ce cas $E_1 \oplus E_2$, si la décomposition de tout vecteur de $E_1 + E_2$ comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est **unique.**

2.2 Caractérisation par l'intersection

La somme $E_1 + E_2$ est directe si, et seulement si, $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

3 Sous-espaces supplémentaires

3.1 Définition

E_1 et E_2 sont dits supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$.

3.2 Caractérisations pratiques

1. E_1 et E_2 sont supplémentaires si, et seulement si, $\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2$.
2. E_1 et E_2 sont supplémentaires si, et seulement si, $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Remarque
Le recours à une figure dans le plan ou l'espace pour représenter des sous-espaces supplémentaires est pertinent car il favorise la compréhension intuitive de la situation étudiée.

CHAPITRE 24

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Existence de bases

1 Définition

On dit qu'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Exemples : $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie mais pas $\mathbb{K}[X]$.

2 Algorithme de construction de bases

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leq n$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E **de dimension finie.** Si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est génératrice de E alors E admet une base qui contient à la fois :

— **tous les vecteurs** $x_1, \ldots, x_p$;
— **certains vecteurs** parmi les vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

3 Théorèmes

3.1 Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E **de dimension finie différent de** $\{0_E\}$**,** on peut extraire une base **finie** de E.

3.2 Théorème de la base incomplète

Toute famille libre d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E **de dimension finie différent de** $\{0_E\}$ peut être complétée en une base **finie** de E.

4 Existence de base en dimension finie

Tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel E **de dimension finie différent de** $\{0_E\}$ admet des bases **finies**.

II Dimension d'un espace vectoriel

1 Propriétés préliminaires

1.1 Cardinal des familles libres en dimension finie

Si un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E admet une famille génératrice finie de n vecteurs alors toute famille de $n+1$ vecteurs de E est liée.

Remarque
Autrement dit, dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E engendré par une famille finie de n vecteurs, les familles libres comportent au plus n vecteurs.

1.2 Cardinal des bases en dimension finie

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel **de dimension finie non réduit à** $\{0_E\}$ alors toutes les bases de E sont finies et ont le **même nombre de vecteurs** (appelé cardinal des bases).

2 Dimension

2.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

On appelle dimension de E, et on note $\dim E$, l'entier naturel défini de la manière suivante :

— Si $E \neq \{0_E\}$ alors $\dim E = \text{card }(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.
— Si $E = \{0_E\}$ alors $\dim E = 0$.

Remarque
L'espace vectoriel nul est donc le seul $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie égale à 0.

2.2 Dimension d'espaces vectoriels déjà rencontrés

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$.

2. $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

3. $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

4. Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.
   Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.
   L'ensemble-solution sur I de $(E) : y' + a(t)y = 0$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 1.

5. Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants
   Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
   L'ensemble-solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y'' + ay' + by = 0$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2.

6. Suites récurrentes linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants
   Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
   L'ensemble des suites (u_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2.

3 Caractérisation de bases en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel **de dimension finie égale à** $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Une famille libre de E est une base de E si, et seulement si, elle compte n vecteurs.
2. Une famille génératrice de E est une base de E si, et seulement si, elle compte n vecteurs.

4 Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels **de dimension finie** alors le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $E_1 \times \cdots \times E_n$ est **de dimension finie** avec

$$\dim E_1 \times \cdots \times E_n = \dim E_1 + \cdots + \dim E_n.$$

5 Rang d'une famille finie de vecteurs

On appelle **rang d'une famille finie** de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, et on note $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\mathrm{rg}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dim \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Remarque
On a $\mathrm{rg}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq n$ avec égalité si, et seulement si, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre.

III Sous-espaces vectoriels en dimension finie

1 Propriétés

1.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de **dimension finie égale à** n alors

1. tout sous-espace vectoriel H de E est de dimension finie, inférieure ou égale à n.
2. un sous-espace vectoriel H de E est égal à E si, et seulement si, sa dimension est égale à n.

Remarque
Une base de E obtenue en complétant une base d'un sous-espace vectoriel H de E est dite base de E adaptée à H.

1.2 Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels : formule de Grassmann.

Soit H et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

Si H et G sont **de dimension finie** alors $H + G$ est de dimension finie avec

$$\dim H + G = \dim H + \dim G - \dim H \cap G.$$

Remarques

Si de plus la somme $H + G$ est directe alors :

— $\dim H \oplus G = \dim H + \dim G$;

— la réunion de deux bases de H et G donne une base de $H \oplus G$ dite adaptée à la somme directe.

2 Sous-espaces supplémentaires

2.1 Théorème

Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel **de dimension finie** possède un supplémentaire.

Remarque
Il n'y a pas unicité des supplémentaires d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

2.2 Caractérisation des sous-espaces supplémentaires avec la dimension

Soit H et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E **de dimension finie**.

1. H et G sont supplémentaires si, et seulement si, $\dim E = \dim H + \dim G$ et $H + G = E$.
2. H et G sont supplémentaires si, et seulement si, $\dim E = \dim H + \dim G$ et $H \cap G = \{0_E\}$.

Remarque

Lorsque H et G sont des sous-espaces supplémentaires de E, la réunion de deux bases de H et G donne une base de E dite adaptée à la décomposition en somme directe.

CHAPITRE 25

ANALYSE ASYMPTOTIQUE (1)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

I Relations de comparaison pour les fonctions

1 Définitions

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que a est un point ou une extrémité de I.

1.1 Domination

On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction $M : I \cap V_a \longrightarrow \mathbb{K}$ **bornée** tel que

$$\forall x \in I \cap V_a, f(x) = M(x)g(x)$$

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$.

1.2 Négligeabilité

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction $\varepsilon : I \cap V_a \longrightarrow \mathbb{K}$ **de limite nulle en** a tel que

$$\forall x \in I \cap V_a, f(x) = \varepsilon(x)g(x)$$

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

1.3 Equivalence

On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction $u : I \cap V_a \longrightarrow \mathbb{K}$ **de limite égale à 1 en** a tel que

$$\forall x \in I \cap V_a, f(x) = u(x)g(x)$$

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

2 Caractérisations pratiques

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que a est un point ou une extrémité de I.

Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a, on a les équivalences suivantes :

1. $f \underset{a}{=} O(g)$ si, et seulement si, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
2. $f \underset{a}{=} o(g)$ si, et seulement si, la fonction $\dfrac{f}{g}$ a pour limite 0 en a.
3. $f \underset{a}{\sim} g$ si, et seulement si, la fonction $\dfrac{f}{g}$ a pour limite 1 en a.

<u>Remarques</u>

— En pratique, ce sont des caractérisations qui seront utilisées plutôt que les définitions.

— Les équivalences précédentes sont encore valables dans le cas où f **et** g **s'annulent en** a **avec** g **qui ne s'annule pas sur un voisinage de** a **privé de** a.

<u>Rappel</u>

L'étude de f au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ se ramène à l'étude de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0.

3 Lien entre les relations de comparaison

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que a est un point ou une extrémité de I.
Alors, on a :

1. $f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$;
2. $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$;
3. $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{a}{=} g + o(g)$.

4 Traduction des croissances comparées à l'aide des "o"

4.1 Au voisinage de $+\infty$

Pour tous **réels strictement positifs** α, β **et** γ**,** on a :

1. $(\ln(x))^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\alpha\right)$;
2. $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma x}\right)$;
3. $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ dans le cas $\alpha < \beta$.

4.2 Au voisinage de 0

Pour tous **réels strictement positifs** α **et** β**,** on a :

1. $|\ln(x)|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$;
2. $x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(x^\beta\right)$ dans le cas $\alpha > \beta$.

Dans la suite de la partie I, les notations étant suffisamment explicites, on ne précise pas la nature des objets afin d'alléger la présentation.

5 Utilisation des équivalents

5.1 Limite, signe et équivalent

— Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont **même "comportement"** au voisinage de a, c'est-à-dire que :

  - ☐ f a pour limite l en a si, et seulement si, g a pour limite l en a.
  - ☐ f n'a pas de limite en a si, et seulement si, g n'a pas de limite en a.

— Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont le **même signe** au voisinage de a.

5.2 Obtention d'un équivalent par encadrement pour une fonction réelle

Si f, g et h sont à **valeurs réelles** et vérifient $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a avec $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} g$.

6 Règles usuelles de manipulation des relations de comparaison

6.1 Cas des équivalents

1. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.
3. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$.
4. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
5. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $fh \underset{a}{\sim} gh$.
6. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $i \underset{a}{\sim} h$ alors $fi \underset{a}{\sim} gh$.
7. Si $f \underset{a}{\sim} g$ avec f et g strictement positives au voisinage de a alors, pour tout réel β, $f^\beta \underset{a}{\sim} g^\beta$.
8. Si $f \underset{a}{\sim} g$ avec f et g ne s'annulant pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
9. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{b} h = a$ alors $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$. *"composition des $\sim$ à droite"*

ATTENTION : pas de **"composition à gauche"** ni de **somme d'équivalents** sans preuve directe.

6.2 Cas des o

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$.
2. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ alors $f + h \underset{a}{=} o(g)$.
3. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
4. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gh)$.
5. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $i \underset{a}{=} o(h)$ alors $fi \underset{a}{=} o(gh)$.
6. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lim\limits_{b} h = a$ alors $f \circ h \underset{b}{=} o(g \circ h)$. *"composition des o à droite"*

ATTENTION : pas de **"composition des o à gauche"** sans preuve directe.

6.3 Cas des O

1. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $f \underset{a}{=} O(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{a}{=} O(g)$.
2. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $h \underset{a}{=} O(g)$ alors $f + h \underset{a}{=} O(g)$.
3. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$.
4. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ alors $fh \underset{a}{=} O(gh)$.
5. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $i \underset{a}{=} O(h)$ alors $fi \underset{a}{=} O(gh)$.
6. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $\lim\limits_{b} h = a$ alors $f \circ h \underset{b}{=} O(g \circ h)$. *"composition des O" à droite*"

ATTENTION : pas de **"composition des O à gauche"** sans preuve directe.

II Développements limités

1 Généralités

Dans cette partie, sauf mention contraire, $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction et a un **RÉEL**, point ou une extrémité de I.

1.1 Définition

On dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a (abrégé en $\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe des éléments $b_0, ..., b_n$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Remarque
La recherche d'un développement limité pour la fonction f en a se ramène à la recherche d'un développement limité pour la fonction $h \mapsto f(a+h)$ en 0.

1.2 Exemple important déjà vu

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ qui est :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

1.3 Unicité d'un développement limité

S'il existe des éléments $b_0, ..., b_n$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors ces éléments sont uniques.

— Ces éléments $b_0, ..., b_n$ sont appelés **coefficients** du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f.

— La fonction polynomiale $x \mapsto b_0 + \cdots + b_n(x-a)^n$ est dite **partie régulière** du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f.

1.4 Troncature d'un développement limité

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a qui s'écrit

$$f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors f admet un développement limité à tout ordre $m \in [\![0, n]\!]$ obtenu par troncature du $\mathrm{DL}_n(a)$:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_m(x-a)^m + o\left((x-a)^m\right).$$

2 Premiers résultats importants

2.1 Développement limité et équivalent

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et a un **RÉEL**, point ou extrémité de I.

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a qui s'écrit

$$f(x) \underset{x \to a}{=} b_p(x-a)^p + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

avec $p \in [\![0, n]\!]$ et $b_p \neq 0$ alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} b_p(x-a)^p.$$

Remarque

Dans ce cas, le signe de f au voisinage de a est celui de la fonction $x \mapsto b_p(x-a)^p$.

2.2 Cas des fonctions paires ou impaires

On suppose ici que I est **centré en 0.**

Si $f : I \to \mathbb{K}$ admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ **en 0** et que

1. f est paire alors la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0)$) ne comporte que des monômes pairs.
2. f est impaire alors la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0)$) ne comporte que des monômes impairs.

2.3 Caractérisation de la continuité et la dérivabilité avec un développement limité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et a un **RÉEL appartenant à** I.

1. f est continue en a si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 0 en a.

   Dans ce cas, on a :

   $$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o(1).$$

2. f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

   Dans ce cas, on a :

   $$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o\left((x-a)\right).$$

ATTENTION

Ce résultat n'est **pas généralisable pour montrer l'existence de** $f^{(n)}(a)$ **dans le cas** $n \geq 2$.

Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ qui est $f(x) = o(x^2)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

3 Opérations sur les développements limités

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to \mathbb{K}$ des fonctions et a un **RÉEL** tel que a est point ou extrémité de I.

3.1 Combinaison linéaire

Si f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(a)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont la partie régulière est obtenue par **combinaison linéaire des parties régulières** des $\mathrm{DL}_n(a)$ de f et g.

3.2 Produit

Si f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(a)$ alors la fonction fg admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont la partie régulière peut s'obtenir par **troncature à l'ordre n du produit des parties régulières** des $\mathrm{DL}_n(a)$ de f et g.

Remarque

En pratique, on peut souvent faire mieux (au sens de moins calculatoire) que d'utiliser ce résultat général directement. En particulier, la **mise en facteur** dans les expressions de $f(x)$ et $g(x)$ **des termes prépondérants** permet de prévoir l'ordre suffisant des développements limités à utiliser pour obtenir la précision souhaitée pour le développement limité du produit fg.

3.3 Inverse/quotient

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et que $\lim\limits_a f = 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{1-f}$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui peut s'obtenir **par troncature à l'ordre n de la composée à droite de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$** de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ **par la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$** de f.

Remarques

- Cette propriété, combinée à celle vue sur le produit, permet d'obtenir des développements limités pour des quotients de fonctions. Là encore, dans ce cas de figure, **la mise en facteur des termes prépondérants** au numérateur et au dénominateur est un **préalable à tout calcul**.
- Aucun résultat général sur la composition de développements limités n'est au programme.

4 Primitivation d'un développement limité

4.1 Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et a un **RÉEL appartenant à I.**

Si f est dérivable sur I et si f' admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de la forme

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en a qui est

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \frac{c_0}{1}(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right).$$

4.2 Un exemple important

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ qui est :

$$-\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

5 Théorème - Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et a un **RÉEL appartenant à I.**

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

ce qui peut s'écrire encore

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Remarque

Ce théorème donne une **condition suffisante** d'existence d'un développement limité à l'ordre n en a pour f. Ce n'est **pas une condition nécessaire** : cf l'exemple de la fonction $x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

.

6 Développements limités usuels (à connaître PARFAITEMENT)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k + o(x^n)$.
2. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$.
3. $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n})$.
4. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$.
5. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n})$.
6. $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.
7. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k + o(x^n)$.
8. $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}\, x^k + o(x^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
9. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$.
10. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

7 Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction

7.1 Calcul d'équivalents (déjà vu)

7.2 Calculs de limites

La connaissance de DL permet de déterminer des limites de manière rapide en cas d'indétermination.

7.3 Position relative d'une courbe et de sa tangente

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs **RÉELLES** et a **un REEL appartenant à** I..

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ en a qui s'écrit

$$f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1 (x-a) + \ldots + b_n (x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors f est dérivable en a avec $b_0 = f(a)$ et $b_1 = f'(a)$ donc

$$f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a)\right) \underset{x \to a}{=} b_2 (x-a)^2 + \ldots + b_n (x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Si de plus, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq p \leq n$ et $b_p \neq 0$, on obtient alors :

$$f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a)\right) \underset{x \to a}{\sim} b_p (x-a)^p.$$

Cela permet de connaître, **au voisinage de** a**,** le signe de $f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a)\right)$ donc les positions relatives de la courbe de f et de sa tangente au point $(a, f(a))$ dans un repère du plan.

7.4 Condition nécessaire/suffisante d'existence d'un extremum local

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs **RÉELLES** et a **un point de** I mais **pas extrémité** de I.

- Si f a un extremum local en a avec f dérivable en a alors $f'(a) = 0$ ie a est point critique de f.
- Si a est point critique de f et si f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ en a qui s'écrit

  $$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + b_p (x-a)^p + \ldots + b_n (x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

  avec $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq p \leq n$ et $b_p \neq 0$ alors

  $$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} b_p (x-a)^p.$$

  $f(x) - f(a)$ est donc de signe constant localement au voisinage de a **uniquement pour** p **pair.**

  Dans ce cas, f **admet un extremum local en** a qui vaut $f(a)$.

7.5 Détermination d'asymptotes

- Pour étudier une fonction f au voisinage de $-\infty$ (ou $+\infty$), on peut commencer par calculer un développement limité de la fonction $g : t \mapsto f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ en 0^- (ou 0^+).
- En revenant à f avec $f : x \mapsto g\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on obtient alors un développement asymptotique de f au voisinage de $-\infty$ (ou $+\infty$) qu'on peut utiliser pour déterminer d'éventuelles asymptotes à la courbe de f dans un repère.

CHAPITRE 26

APPLICATIONS LINÉAIRES (1)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire E, F et G sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

I Généralités

1 Définitions

Une application u de E dans F est dite application linéaire de E dans F si :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall(x,y)\in E^2, u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y).$$

Remarques

1. Les applications linéaires de E dans F constituent $\mathcal{L}(E,F)$.
2. Les applications linéaires bijectives de E dans F sont dites **isomorphismes** de E sur F.
3. Les applications linéaires de E dans E sont dites **endomorphismes** de E et constituent $\mathcal{L}(E)$.
4. Les endomorphismes bijectifs de E sont dits **automorphismes** de E et constituent $\mathcal{GL}(E)$.

2 Opérations

1. La combinaison linéaire de deux applications linéaires est une application linéaire.
2. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
3. La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

3 Structures algébriques des ensembles d'applications linéaires

1. $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel car sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}-$ espace vectoriel $\mathcal{F}(E,F)$.
2. $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau dont l'élément neutre pour la loi $\circ$ est Id_E .
3. $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ est un groupe dit groupe linéaire.

4 Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Si u est une application linéaire de E dans F alors

1. l'image directe par u d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F ;
2. l'image réciproque par u d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

5 Image et noyau d'une application linéaire

5.1 Définitions

Si u est une application linéaire de E dans F alors :

1. $\text{Im } u = u(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de u ;
2. $\text{Ker } u = u^{-1}\{0_F\} = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé noyau de u.

5.2 Famille génératrice de l'image d'une application linéaire

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $E = \text{Vect} < (x_i)_{i\in I} >$ alors $\text{Im}(u) = \text{Vect} < (u(x_i))_{i\in I} >$.

5.3 Application linéaire injective

Une application **linéaire** u de E dans F est injective si, et seulement si, $\text{Ker } u = \{0_E\}$.

<u>Remarque</u>
L'équivalence "$u : E \to F$ surjective si, et seulement si, $\text{Im } u = F$" est vraie même si u n'est pas linéaire.

6 Rang d'une application linéaire

6.1 Définition du rang d'une application linéaire

Une application linéaire u de E dans F est dite de **rang fini** si son image $\text{Im}(u)$ est de dimension finie. Dans ce cas, la dimension de $\text{Im }(u)$ est appelée rang de u et notée $\text{rg}(u)$:

$$\text{rg}(u) = \dim\left(\text{Im }(u)\right).$$

<u>Remarque</u>
Dans le cas particulier où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de **dimension finie,** u est donc de rang fini avec $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(x_1), \ldots, u(x_n))$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice finie de E.

6.2 Rang d'une composée

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Si u et v sont de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et vérifie $\text{rg}\,(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

6.3 Invariance du rang par composition par un isomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. si u est un isomorphisme et v de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\text{rg }(v \circ u) = \text{rg }(v)$.
2. si v est un isomorphisme et u de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\text{rg }(v \circ u) = \text{rg }(u)$.

II Endomorphismes usuels : homothétie, projecteur, symétrie

1 Notations usuelles

— Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, l'endomorphisme Id_E de E est souvent noté Id.
— Pour $(u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, on note souvent uv au lieu de $u \circ v$.
— Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, on note u^k au lieu de $\underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$ avec $u^0 = \mathrm{Id}$.
— Pour $u \in \mathcal{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}_-^*$, on note u^k au lieu de $\underbrace{u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1}}_{-k \text{ fois}}$.

2 Homothéties

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application h_λ définie sur E par

$$\forall x \in E, h_\lambda(x) = \lambda x$$

est un endomorphisme de E appelé homothétie de rapport λ.

3 Projection/projecteur

On suppose dans ce paragraphe que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. Alors :

$$\forall x \in E, \exists!(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2.$$

3.1 Définition géométrique

L'application $p : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E, p(x) = x_1$$

est appelée projection (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2.

3.2 Propriété

Si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 alors :

1. p est un endomorphisme de E ;
2. $E_1 = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$;
3. $E_2 = \mathrm{Ker}\, p$.

3.3 Caractérisation algébrique

Une application $p : E \to E$ est un projecteur de E si, et seulement si, p est linéaire et $p^2 = p$.

Dans ce cas :

1. $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$;
2. p est la projection sur $\mathrm{Im} p = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker} p$;
3. $\forall x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in \mathrm{Im}\, p$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$.

Remarque
Le seul projecteur p de E qui soit un automorphisme de E est $p = \mathrm{Id}$.

4 Symétrie

On suppose dans ce paragraphe que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. Alors :

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2.$$

4.1 Définition géométrique

L'application $s : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E, s(x) = x_1 - x_2$$

est appelée symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Remarque
Cette application vérifie $s = 2p - \mathrm{Id}$ où p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

4.2 Propriété

Si s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 alors :

1. s est un endomorphisme de E ;
2. $E_1 = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$;
3. $E_2 = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$.

4.3 Caractérisation algébrique

Une application $s : E \to E$ est une symétrie de E si, et seulement si, s est linéaire et $s^2 = \mathrm{Id}$.

Dans ce cas :

1. $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id})$;
2. s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id})$;
3. $\forall x \in E, x = \frac{1}{2}\,(x + s(x)) + \frac{1}{2}\,(x - s(x))$ avec $\begin{cases} \frac{1}{2}\,(x + s(x)) \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) \\ \frac{1}{2}\,(x - s(x)) \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}) \end{cases}$.

4.4 Bijectivité des symétries

Toute symétrie s de E est un **automorphisme** de E dont la bijection réciproque est s.

III Formes linéaires et hyperplans

1 Formes linéaires

1.1 Définition

Toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ est dite forme linéaire sur E.

1.2 Exemple des formes coordonnées relativement à une base

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour tout $i \in I$,on note $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ l'application définie par

$$\forall x \in E, e_i^*(x) = x_i$$

où x_i est la coordonnée de x suivant le vecteur e_i dans la base $\mathcal{B}$.

Alors les e_i^* sont des formes linéaires sur E dites formes coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$.

2 Hyperplans

2.1 Définition

Un sous-espace vectoriel de E est dit **hyperplan** s'il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

2.2 Caractérisations des hyperplans comme supplémentaires de droites

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

H est un hyperplan de E si, et seulement si, H est supplémentaire d'une droite de E.

<u>Remarque</u>
Dans le cas où H est un hyperplan, pour toute droite D de E non contenue dans H, on a : $E = H \oplus D$.

3 Hyperplans en dimension finie

Sauf mention contraire, dans cette partie, E est de **dimension finie non nulle** notée n.

3.1 Caractérisations des hyperplans avec la dimension

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

3.2 Equations d'un hyperplan en dimension finie

On suppose ici que E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

H est un hyperplan de E si, et seulement si, il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ tel que :

$$x \in H \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0$$

avec $(x_1, \ldots, x_n)$ la famille des coordonnées du vecteur x de E dans la base $\mathcal{B}$.

<u>Remarque</u>
Dans ce cas, $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0$ est dite équation de H dans la base $\mathcal{B}$ et on a $H = \text{Ker}\varphi$ avec $\varphi : x \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n$ forme linéaire non nulle sur E.

3.3 Comparaison des équations d'un hyperplan en dimension finie

Soit H un hyperplan de E.

Si φ et ψ sont deux formes linéaires sur E non nulles tel que $H = \text{Ker}\varphi = \text{Ker}\psi$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

3.4 Hyperplans en dimension 2 et 3

— Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à 2 sont les droites de E.
Leurs équations dans une base de E sont de la forme

$$ax + by = 0$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en notant x et y les coordonnées d'un vecteur de E dans la base considérée.

— Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à 3 sont les plans de E.
Leurs équations dans une base de E sont de la forme

$$ax + by + cz = 0$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ en notant x, y et z les coordonnées d'un vecteur de E dans la base considérée.

Remarque
On retrouve ainsi la forme des équations cartésiennes de droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ vues dans le chapitre "Espaces vectoriels".

4 Intersection d'hyperplans en dimension finie

On suppose ici que E est de **dimension finie** $n \in \mathbb{N}^*$ et que $m \in [\![1, n]\!]$.

4.1 Théorème

1. L'intersection de m hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins $n - m$.
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans de E.

4.2 Système d'équations d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$.

On note $H_1, \ldots, H_m$ des hyperplans de E tels que $F = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{m} H_k$.

Le système d'équations obtenu en rassemblant des équations des m hyperplans H_i relativement à une base $\mathcal{B}$ de E est appelé système d'équations du sous-espace vectoriel F relativement à $\mathcal{B}$.

Remarque
Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ a donc un système d'équations du type $\begin{cases} ax + by + cz & = 0 \\ a'x + b'y + c'z & = 0 \end{cases}$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

IV Détermination d'une application linéaire

1 Détermination d'une application linéaire par action sur une base

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F alors il **existe un unique** $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que :

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i.$$

Remarque
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par la connaissance de son action sur les vecteurs d'une base de son espace vectoriel de départ.

2 Caractérisations de l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité

Soit u une application linéaire de E dans F et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.

1. u est surjective si, et seulement si, $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
2. u est injective si, et seulement si, $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille libre de F.
3. u est bijective si, et seulement si, $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.

3 Espaces vectoriels isomorphes

3.1 Définition

Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de E vers F.

3.2 Caractérisation par la dimension

Si E est de **dimension finie** alors F est isomorphe à E si, et seulement si, E et F ont même dimension.

3.3 Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$

Si E et F sont de **dimension finie** alors $\mathcal{L}(E,F)$ l'est aussi et $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

4 Applications linéaires entre espaces de même dimension finie

4.1 Théorème de caractérisation des isomorphismes

Si u est une **application linéaire** entre deux espaces E et F de **même dimension finie** alors les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes.

1. u est injective
2. u est surjective
3. u est bijective.

4.2 Théorème de caractérisation des automorphismes

Si u est un **endomorphisme** de E avec E de **dimension finie** alors les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes.

1. u est bijective.
2. u est inversible à droite (c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}$).
3. u est inversible à gauche (c'est-à-dire qu'il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = \mathrm{Id}$).

5 Détermination d'une application linéaire par recollement

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E avec $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ alors il **existe un unique** $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$u_1 = u_{|E_1} \text{ et } u_2 = u_{|E_2}.$$

Remarque
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par la connaissance de son action sur les vecteurs de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de son espace vectoriel de départ.

V Théorème du rang

1 Théorème du rang (forme géométrique)

Si u est une application linéaire de E vers F et si S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E alors l'application $\widetilde{u} : S \to \text{Im}u$ définie par

$$\forall x \in S, \widetilde{u}(x) = u(x)$$

est un isomorphisme.

Remarque
On dit que u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$.

2 Théorème du rang

Si u est une application linéaire de E vers F avec E **de dimension finie** alors

1. u est de rang fini ;
2. $\dim E = \dim \text{Ker }(u) + \text{rg}(u)$.

ATTENTION : ce résultat fondamental n'implique pas $E = \text{Ker}u \oplus \text{Im}u$...

En effet,

— cette égalité n'a aucun sens si E et F sont distincts ;
— cette égalité peut être fausse si E et F sont égaux comme le montre l'exemple de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = P'$.

CHAPITRE 27

ANALYSE ASYMPTOTIQUE (2)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Relations de comparaison pour les fonctions

Se reporter au chapitre "Analyse asymptotique (1)"

II Relation de comparaison pour les suites

Sauf mention contraire, dans cette partie, (u_n) et (v_n) désignent deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Définitions

1.1 Domination

On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) s'il existe un entier naturel n_0 et une suite (w_n) **bornée** tel que

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![\, , u_n = v_n w_n$$

On note alors $u_n = O(v_n)$.

1.2 Négligeabilité

On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) s'il existe un entier naturel n_0 et une suite (w_n) **de limite nulle** tel que

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![\, , u_n = v_n w_n$$

On note alors $u_n = o(v_n)$.

1.3 Equivalence

On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) s'il existe un entier naturel n_0 et une suite (w_n) **de limite égale à 1** tel que

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![\, , u_n = v_n w_n$$

On note alors $u_n \sim v_n$.

2 Caractérisations pratiques

Dans le cas où (v_n) **ne s'annule pas à partir d'un certain rang**, on a les équivalences suivantes :

1. $u_n = O(v_n)$ si, et seulement si,la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
2. $u_n = o(v_n)$ si, et seulement si, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite 0.
3. $u_n \sim v_n$ si, et seulement si, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite 1.

3 Lien entre les relations de comparaison

1. $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$;
2. $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = O(v_n)$;
3. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.

4 Croissances comparées de suites usuelles

Pour tous **réels strictement positifs** α, β **et** γ**,** on a :

1. $(\ln(n))^\beta = o\left(n^\alpha\right)$ $\qquad n^\alpha = o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$ $\qquad \mathrm{e}^{\gamma n} = o\left(n!\right)$.
2. $n^\alpha = o\left(n^\beta\right)$ dans le cas $\alpha < \beta$.

5 Règles usuelles de manipulation des relations de comparaison

5.1 Cas des O

1. Si $u_n = O(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $u_n = O(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = O(v_n)$.
2. Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(v_n)$ alors $u_n + w_n = O(v_n)$.
3. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.
4. Si $u_n = O(v_n)$ alors $u_n w_n = O(v_n w_n)$.
5. Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(x_n)$ alors $u_n w_n = O(v_n x_n)$.
6. Si $u_n = O(v_n)$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante alors $u_{\varphi(n)} = O(v_{\varphi(n)})$.

<u>ATTENTION</u> : pas de **"composition des O à gauche"** par une fonction sans preuve directe.

5.2 Cas des o

1. Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $u_n = o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = o(v_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.
3. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
4. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
5. Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(x_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n x_n)$.
6. Si $u_n = o(v_n)$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante alors $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$.

<u>ATTENTION</u> : pas de **"composition des o à gauche"** par une fonction sans preuve directe.

5.3 Cas des équivalents

1. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
3. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = O(w_n)$.
4. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.
5. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n w_n \sim v_n w_n$.
6. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$ alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.
7. Si $u_n \sim v_n$ avec (u_n) et (v_n) strictement positives à partir d'un certain rang alors $u_n^\beta \sim v_n^\beta$ pour tout réel β.
8. Si $u_n \sim v_n$ avec (u_n) et (v_n) qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang alors $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.
9. Si $u_n \sim v_n$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

ATTENTION : pas de **"composition à gauche"** par une fonction ni de **somme d'équivalents** sans preuve directe.

6 Retour sur les équivalents

6.1 Limite, signe et équivalent

— Si $u_n \sim v_n$ alors (u_n) et (v_n) ont **même "comportement"** c'est-à-dire que :

- ☐ (u_n) a pour limite l si, et seulement si, (v_n) a pour limite l.
- ☐ (u_n) n'a pas de limite si, et seulement si, (v_n) n'a pas de limite.

— Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont le **même signe** à partir d'un certain rang.

6.2 Obtention d'un équivalent par encadrement pour une suite réelle

Si $(u_n), (v_n)$ et (w_n) sont à **valeurs réelles** et vérifient $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang avec $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim v_n$.

7 Formule de Stirling (à connaître)

Un équivalent de la suite $(n!)$ est donné par la formule de Stirling suivante :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Remarques

— La démonstration de ce résultat de cours n'est pas exigible. On en verra une dans le chapitre à venir sur les séries numériques.

— On peut déduire de cet équivalent un développement asymptotique de la suite $(\ln n!)$ qui est :

$$\ln n! = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1).$$

8 Utilisation des développements limités et équivalents usuels

Une connaissance parfaite des développements limités et équivalents usuels vus pour les fonctions dans le chapitre “Analyse asymptotique (1)” est nécessaire pour traiter les problèmes d’analyse asymptotique sur les suites et aborder le chapitre à venir sur les séries numériques.

CHAPITRE 28

SÉRIES NUMÉRIQUES

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

Dans cette partie, sauf mention contraire, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathbb{K}$.

1 Définition et notation d'une série

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série de terme général u_n et notée $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

2 Nature d'une série

La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Sinon, elle est dite divergente.

3 Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Attention : la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

4 Divergence grossière

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ diverge.

Dans ce cas,
on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

5 Somme et reste d'une série convergente

5.1 Définitions

Si la série $\sum u_n$ converge alors :

1. la limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de la série $\sum u_n$ et notée $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ et noté $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

5.2 Propriété

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes d'une série convergente a pour limite 0.

6 Lien suite-série

La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

7 Premières séries de référence : les séries géométriques de raison $a \in \mathbb{K}$

1. La série géométrique $\sum a^n$ est convergente si, et seulement si, $|a| < 1$.
2. Dans le cas $|a| < 1$, on a :

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k = \frac{a^{n+1}}{1-a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8 Opérations algébriques sur les séries convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

1. la série $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.

Remarque
On en déduit que l'application qui, à une série convergente associe sa somme, est linéaire.

9 Cas des séries à termes complexes

La série de nombres complexes $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les séries de nombres réels $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Im}\,(u_n)$ convergent. Dans ce cas, les sommes de ses séries vérifient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\,(u_k)\right) + \mathrm{i}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\,(u_k)\right).$$

II Séries à termes réels positifs

1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Une série $\sum u_n$ de **nombres réels positifs** converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée avec, en cas de convergence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_n S_n = \sup_n S_n.$$

2 Théorèmes de comparaison

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de **nombres réels** telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ alors,
   - la convergence de la série $\sum v_n$ implique la convergence de la série $\sum u_n$.
   - la divergence de la série $\sum u_n$ implique la divergence celle de la série $\sum v_n$.

   En cas de convergence, les sommes de ces séries vérifient :

   $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de **nombres réels positifs** telles que $u_n = O(v_n)$ alors,
   - la convergence de la série $\sum v_n$ implique la convergence de la série $\sum u_n$.
   - la divergence de la série $\sum u_n$ implique la divergence de la série $\sum v_n$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de **nombres réels positifs** telles que $u_n \sim v_n$

   alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarques
En cas de convergence des séries avec $u_n = O(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$, on ne peut pas écrire de relation de comparaison entre leurs sommes.

3 Encadrement des sommes partielles par la méthode des rectangles

Si f est une application **continue** sur $[0, +\infty[$, **à valeurs positives et décroissante** alors, pour tout entier naturel n, on a :

$$\int_0^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarques
- Le résultat est conservé si on remplace 0 par $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ par $n \in [\![n_0, +\infty [\![$.
- Le résultat s'adapte dans le cas où f est croissante en changeant le sens des inégalités.

4 Autres séries de référence : les séries de Riemann

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Remarque
Contrairement aux séries géométriques, il n'existe pas de formule générale donnant la valeur des sommes des séries de Riemann convergentes.

III Convergence absolue d'une série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$.

1 Définition

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

2 Propriété importante

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors la série $\sum u_n$ converge avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|$$

3 Théorème de domination

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de **nombres réels positifs** tel que $u_n = O(v_n)$ alors, la convergence de la série $\sum v_n$ implique la convergence absolue de la série $\sum u_n$ donc sa convergence.

4 Une dernière série de référence : la série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{K}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument donc converge. Sa somme est notée $\exp(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ et appelée exponentielle du nombre z.

IV Séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de **nombres réels**.

1 Définition

La série $\sum u_n$ est dite série alternée si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} et u_n sont de signes contraires.

2 Théorème spécial pour certaines séries alternées

Si la suite (u_n) **converge en décroissant vers 0** alors :

1. la série $\sum (-1)^n u_n$ converge ;
2. pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ a même signe que son premier terme $(-1)^{n_0} u_{n_0}$ et vérifie

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n u_n\right| \leq |(-1)^{n_0} u_{n_0}|.$$

<u>Remarque</u>
Une série alternée peut être convergente sans vérifier les hypothèses du critère spécial.

CHAPITRE 29

FRACTIONS RATIONNELLES

I Généralités

La construction de l'ensemble des fractions rationnelles étant hors programme, la présentation faite ici est volontairement élémentaire.

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$

1.1 Définitions, notations

— On appelle fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout quotient (formel) du type

$$F = \frac{A}{B} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{K}[X] \text{ et } B \in \mathbb{K}[X] \setminus \left\{0_{\mathbb{K}[X]}\right\}$$

Si A et B sont **premiers entre eux**, on dit que la fraction rationnelle est **irréductible**.

— L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.

Remarques
— Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ se manipulent comme les éléments de $\mathbb{Q}$.
— Tout polynôme A est identifié à la fraction rationnelle $\dfrac{A}{1_{\mathbb{K}[X]}}$ donc $\mathbb{K}[X]$ est inclus dans $\mathbb{K}(X)$.
— Les fractions rationnelles $\dfrac{A_1}{B_1}$ et $\dfrac{A_2}{B_2}$ sont égales si, et seulement si, A_1B_2 et A_2B_1 sont égaux.

1.2 Opérations sur l'ensemble $\mathbb{K}(X)$

Pour tous $F_1 = \dfrac{A_1}{B_1}$ et $F_2 = \dfrac{A_2}{B_2}$ éléments de $\mathbb{K}(X)$, on pose :

$$F_1 + F_2 = \frac{A_1B_2 + A_2B_1}{B_1B_2} \qquad \text{et} \qquad F_1 \times F_2 = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$$

Remarque
Ces opérations, qui ne dépendent pas de l'écriture des fractions rationnelles F_1 et F_2, prolongent l'addition et la multiplication vues dans $\mathbb{K}[X]$.

1.3 Structure de corps

L'ensemble $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps :

- dont l'élément neutre pour l'addition est le polynôme $0_{\mathbb{K}[X]}$;
- dont l'élément neutre pour la multiplication est le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]}$;
- qui contient l'anneau intègre $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Remarque
Avec la loi externe . définie sur $\mathbb{K}(X)$ par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X), \lambda.F = \frac{\lambda A}{B}$$

$(\mathbb{K}(X), +, .)$ est aussi un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

2 Degré d'une fraction rationnelle

Pour tout $F = \dfrac{A}{B}$ de $\mathbb{K}(X)$, on définit le degré de la fraction rationnelle F, noté $\deg(F)$, par :

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B).$$

Remarque
Le degré d'une fraction rationnelle, qui ne dépend pas de l'écriture de celle-ci, appartient à $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ et prolonge la notion de degré vu pour les polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

3 Partie entière d'une fraction rationnelle

Toute fraction rationnelle F de $\mathbb{K}(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme $F = E + F_1$ avec :

- E un **polynôme** de $\mathbb{K}[X]$, appelé **partie entière** de la fraction rationnelle F ;
- F_1 une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ de **degré strictement négatif.**

Remarque
Si on écrit $F = \dfrac{A}{B}$ alors E est le quotient de la division euclidienne de A par B et $F_1 = \dfrac{R}{B}$ où R est le reste de la division euclidienne de A par B.

4 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle **irréductible** de $\mathbb{K}(X)$ et $m \in \mathbb{N}$.

- Toute racine du polynôme A de multiplicité m est dite **zéro de F de multiplicité m.**
- Toute racine du polynôme B de multiplicité m est dite **pôle de F de multiplicité m.**

5 Fonction rationnelle

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle **irréductible** de $\mathbb{K}(X)$.

La fonction $\widetilde{F} : x \mapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$ définie sur $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble (fini) des pôles de F et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite fonction rationnelle associée à la fraction rationnelle F.

II Décomposition en éléments simples

1 Théorème de décomposition sur $\mathbb{C}$ (preuve hors programme)

Si F est une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ de partie entière E et de pôles deux-à-deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités $m_1, \dots, m_r$ alors il **existe une unique famille de complexes** $(a_{k,p})_{(k,p)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,m_k]\!]}$ telle que :

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{p=1}^{m_k} \frac{a_{k,p}}{(X-\lambda_k)^p} \right)$$

autrement dit :

$$F = E + \underbrace{\left[\frac{a_{1,1}}{(X-\lambda_1)} + \frac{a_{1,2}}{(X-\lambda_1)^2} + \dots + \frac{a_{1,m_1}}{(X-\lambda_1)^{m_1}}\right]}_{\text{Partie polaire associée au pôle } \lambda_1} + \dots + \underbrace{\left[\frac{a_{r,1}}{(X-\lambda_r)} + \frac{a_{r,2}}{(X-\lambda_r)^2} + \dots + \frac{a_{r,m_r}}{(X-\lambda_r)^{m_r}}\right]}_{\text{Partie polaire associée au pôle } \lambda_r}.$$

Remarque

Pour décomposer une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ en éléments simples, il convient de l'écrire sous forme irréductible puis de décomposer son dénominateur en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, c'est-à-dire en produit de polynômes de degré 1.

2 Théorème de décomposition sur $\mathbb{R}$ (preuve hors programme)

Si $F = \dfrac{A}{B}$ est une fraction rationnelle **irréductible** de $\mathbb{R}(X)$ de partie entière E et que la décomposition du polynôme B en **facteurs irréductibles** de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit

$$B = \beta \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{s} \left(X^2 + b_k X + c_k\right)^{n_k}$$

alors il existe d'uniques suites de réels $(a_{k,p})_{(k,p)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,m_k]\!]}$, $(d_{k,p})_{(k,p)\in[\![1,s]\!]\times[\![1,n_k]\!]}$ et $(e_{k,p})_{(k,p)\in[\![1,s]\!]\times[\![1,n_k]\!]}$ telles que :

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{p=1}^{m_k} \frac{a_{k,p}}{(X-\lambda_k)^p} \right) + \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{p=1}^{n_k} \frac{d_{k,p}X + e_{k,p}}{(X^2 + b_k X + c_k)^p} \right).$$

Remarque

Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle. Dans la décomposition en facteurs irréductibles écrite pour B ci-dessus, les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les racines réelles deux-à-deux distinctes de B de mutiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$, les couples deux-à-deux distincts de réels (b_k, c_k) vérifient $b_k^2 - 4c_k < 0$ et les n_k sont des entiers non nuls.

3 Quelques applications des décompositions en éléments simples

3.1 Calcul de primitives

3.2 Calcul de dérivées successives

3.3 Calcul de sommes de séries numériques

4 Deux cas particuliers

4.1 Coefficients des éléments simples associés aux pôles simples

Si $F = \dfrac{A}{B}$ est une fraction rationnelle **irréductible** de $\mathbb{K}(X)$ et λ est **un pôle simple** de F alors, dans la décomposition en éléments simples de F, le coefficient de l'élément simple $\dfrac{1}{X-\lambda}$ est :

$$a = \frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}.$$

Remarque

Plus généralement, lorsque λ est un pôle de multiplicité m de la fraction irréductible F, l'évaluation en λ de la fraction rationnelle obtenue après réduction de $(X-\lambda)^m F$ donne le coefficient de l'élément simple $\dfrac{1}{(X-\lambda)^m}$ dans la décomposition en éléments simples de F.

4.2 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle du type $\dfrac{B'}{B}$

Soit $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$.

— On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que la décomposition de B en **facteurs irréductibles** de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit

$$B = \beta \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k}.$$

Alors, la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F = \dfrac{B'}{B}$ sur $\mathbb{C}$ est :

$$\frac{B'}{B} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-\lambda_k}.$$

— On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que la décomposition de B en **facteurs irréductibles** de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit

$$B = \beta \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{s} \left(X^2 + b_k X + c_k\right)^{n_k}.$$

Alors, la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F = \dfrac{B'}{B}$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\frac{B'}{B} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-\lambda_k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{n_k(2X+b_k)}{X^2+b_kX+c_k}.$$

CHAPITRE 30

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES (2)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

I Matrice d'une application linéaire en dimension finie

1 Matrice d'un vecteur et d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

1.1 Cas d'un vecteur

Soit x un vecteur de E dont l'écriture dans la base $\mathcal{B}$ de E est $x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

On appelle matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$, et on note $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

1.2 Cas d'une famille finie de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille finie de p vecteurs de E.

On appelle matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{F})$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j^e colonne contient les coordonnées de x_j, le j^e vecteur de $\mathcal{F}$, dans $\mathcal{B}$:

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & \dots & x_j & \dots & x_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Soit F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.
Soit G un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie m muni d'une base $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_m)$.

2.1 Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle matrice de l'application linéaire u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et on note $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$, la matrice de la famille de vecteurs $(u(\mathcal{B}))$ dans la base $\mathcal{C}$ de F :

$$\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}\left(u(e_1), \dots, u(e_p)\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & & u(e_j) & & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

2.2 Isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ bases fixées de E et F, l'application $\psi : u \mapsto \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, on a :

$$\forall (u, v) \in \left(\mathcal{L}(E, F)\right)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u) + \mu \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(v).$$

2.3 Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x, y) \in E \times F$.
Alors,

$$u(x) = y \Leftrightarrow AX = Y \text{ avec } \begin{cases} A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \\ X = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \\ Y = \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(y) \end{cases}$$

2.4 Matrice d'une composée d'applications linéaires

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G), \underset{\mathcal{B},\mathcal{D}}{\mathrm{Mat}}(v \circ u) = \underset{\mathcal{C},\mathcal{D}}{\mathrm{Mat}}(v) \times \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u).$$

2.5 Matrice d'un isomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de **même dimension finie**.

u est un isomorphisme de E sur F si, et seulement si, $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est inversible avec, dans ce cas,

$$\underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u^{-1}) = \left(\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u)\right)^{-1}.$$

.

3 Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

3.1 Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle matrice de l'endomorphisme u relativement à la base $\mathcal{B}$, et on note $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$, la matrice $\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$.

3.2 Isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Pour $\mathcal{B}$ base fixée de E, l'application $\psi : u \mapsto \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En particulier,

1. $\forall (u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) + \mu \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(v)$.
2. $\forall (u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(v \circ u) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(v) \times \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$.
3. $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{Id}) = I_n$.

3.3 Matrice d'un automorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
u est un automorphisme de E si, et seulement si, $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est inversible avec, dans ce cas,

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u^{-1}) = \left(\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)\right)^{-1}.$$

II Application linéaire canoniquement associée à une matrice

1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle application linéaire canoniquement associée à A l'application u de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que

$$\underset{\mathcal{B}_{can},\mathcal{C}_{can}}{\mathrm{Mat}}(u) = A$$

où $\mathcal{B}_{can}$ et $\mathcal{C}_{can}$ sont les bases canoniques (i.e. usuelles) de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

2 Identification usuelle de $\mathbb{K}^m$ et $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$

L'application de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ qui à $x \in \mathbb{K}^m$ associe $X = \underset{\mathcal{D}_{can}}{\mathrm{Mat}}(x)$ où $\mathcal{D}_{can}$ est la base usuelle de $\mathbb{K}^m$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque
Dans la suite de ce cours, on identifiera donc souvent tout vecteur de $\mathbb{K}^m$ à la matrice-colonne de ses coordonnées dans la base usuelle de $\mathbb{K}^m$ autrement dit, on identifiera $\mathbb{K}^m$ et $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$.

3 Noyau, image, rang d'une matrice

3.1 Définitions

On appelle noyau (resp. image, resp. rang) de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on note Ker A (resp. Im A, resp. rg A) le noyau (resp. l'image, resp. le rang) de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.

Autrement dit,

1. $\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{K}^p \mid u(x) = 0_{\mathbb{K}^n}\} = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}.$
2. $\text{Im } A = \{u(x) \mid x \in \mathbb{K}^p\} = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}.$
3. $\text{rg } A = \dim \text{Im } u = \dim \text{Im } A.$

3.2 Propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ avec $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A.
2. $\text{rg } A = \dim \text{Vect}(C_1, \ldots, C_p) = \text{rg}(C_1, \ldots, C_p)$ donc $\text{rg}(A) \leq \min(n,p)$.
3. Ker$A$ a pour système d'équations $\left\{\begin{array}{c} L_1X = 0 \\ \vdots \\ L_nX = 0 \end{array}\right.$ avec $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A.

3.3 Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

1. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. $\text{Ker } A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
3. $\text{Im } A = \mathbb{K}^n$ (i. e. les colonnes de A engendrent $\mathbb{K}^n$).
4. $\text{rg } A = n$.
5. A est inversible à droite (i. e. il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$).
6. A est inversible à gauche (i. e. il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$).

3.4 Cas des matrices triangulaires

Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

<u>Remarque</u>
L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) et

$$\text{pour } T = \begin{pmatrix} t_{11} & \times & \ldots & \times \\ 0 & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \text{ on a } T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11}^{-1} & \star & \ldots & \star \\ 0 & t_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \ldots & 0 & t_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

4 Retour sur les systèmes linéaires

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

4.1 Rappels

Le système linéaire $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ d'inconnue $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est équivalent à $AX = B$.

Dans le cas où $B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, on dit que le système linéaire est **homogène**.

Remarque
Autrement dit, le système linéaire est équivalent à l'équation linéaire $u(x) = b$ où u est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A, x est le vecteur de $\mathbb{K}^p$ de matrice X dans la base usuelle de $\mathbb{K}^p$ et b le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de matrice B dans la base usuelle de $\mathbb{K}^n$.

4.2 Solutions d'un système linéaire

□ Cas d'un système linéaire homogène

- On appelle rang du système linéaire homogène $AX = 0$ le **rang** de A.
- L'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$ est le **noyau** de A donc est un $\mathbb{K}-$**espace vectoriel** de dimension $p - r$ où r est le rang du système.

□ Cas d'un système linéaire non homogène

- On dit que le système $AX = B$ est **compatible** si B appartient à l'**image** de A.
- Si le système $AX = B$ est compatible alors ses solutions sont les matrices $X_0 + Y$ avec :
  1. $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière de $AX = B$;
  2. $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ solution quelconque du système homogène $AX = 0$ associé.

L'ensemble-solution du système linéaire $AX = B$ est donc :

- soit l'ensemble-vide (si le système n'est pas compatible) ;
- soit l'ensemble noté $X_0 + \mathrm{Ker}A$ défini par

$$X_0 + \mathrm{Ker}A = \{X_0 + Y \mid Y \in \mathrm{Ker}A\}$$

  On dit alors que c'est un $\mathbb{K}-$**espace affine** passant par X_0 (solution particulière de $AX = B$) et dirigé par $\mathrm{Ker}A$ (espace vectoriel des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ associé).

4.3 Cas particulier où la matrice du système est inversible

On se place ici dans le cas où $n = p$.

Le système linéaire $AX = B$ admet une solution et une seule si, et seulement si, A est inversible.

Dans ce cas, on dit que le système est de **Cramer**.

III Changement de bases

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non nulle muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Soit F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non nulle muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

1 Matrice de passage entre deux bases

1.1 Définition

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $\mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e'_1 & \dots & e'_j & \dots & e'_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_p \end{array}$$

1.2 Propriétés

1. $\mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{Id}_E)$.
2. $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

2 Effet des changements de bases...

2.1 ... sur la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base

Pour $x \in E$, on a

$$X = PX'$$

avec

$$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'), X = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \text{ et } X' = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(x).$$

<u>Remarque</u>
Cette formule est très simple mais elle donne les coordonnées d'un vecteur dans "l'ancienne base" en fonction des coordonnées dans "la nouvelle base" ce qui n'est pas ce que l'on cherche à obtenir en général.

2.2 ... sur la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

avec

$$A' = \underset{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}{\mathrm{Mat}}(u), Q = \mathrm{Pass}(\mathcal{C} \to \mathcal{C}'), A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \text{ et } P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

2.3 ... sur la matrice d'un endomorphisme dans une base

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$A' = P^{-1}AP$$

avec

$$A' = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(u), A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \text{ et } P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

IV Matrices (rectangles) équivalentes et rang

1 Définition

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe une matrice U dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice V dans $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = UAV$.

Remarque
Les matrices d'une même application linéaire dans des couples différents de base sont équivalentes.

2 Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \text{rg } UA = \text{rg } A$.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}), \text{rg } AV = \text{rg } A$.

Remarques
— Le rang d'une matrice est conservé par multiplication (à droite/gauche) par une matrice inversible.
— Des matrices équivalentes ont même rang.

3 Caractérisation des matrices de rang r

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et, seulement si, A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Remarque
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r alors il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.

4 Rang et transposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Le rang de A est égal au rang de $A^\top$.
2. Le rang de A est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

5 Rang et opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) d'une matrice conservent l'image (resp. le rang, resp. le noyau).

6 Rang et matrices extraites

6.1 Définition

Toute matrice obtenue en otant des lignes ou colonnes de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite matrice extraite de A.

6.2 Propriété

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **supérieur ou égal** au rang de toute matrice extraite de A.

6.3 Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la taille maximale des matrices extraites de A qui sont inversibles.

V Matrices semblables et trace

1 Matrices (carrées) semblables

1.1 Définition

Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice P dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

1.2 Caractérisation géométrique

Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Remarque
Un des enjeux majeurs du programme d'algébre linéaire en MPI est de réduire les matrices en déterminant des matrices diagonales ou triangulaires qui leur sont semblables.

2 Trace d'une matrice (carrée)

2.1 Définition

On appelle trace de la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on note $\mathrm{tr}(A)$, le scalaire égal à la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,(\in \mathbb{K})\,.$$

2.2 Propriétés

1. $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda\ \mathrm{tr}(A) + \mu\ \mathrm{tr}(B)$
2. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Deux matrices semblables ont même trace.

3 Trace d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non nulle.

3.1 Définition

On appelle trace de l'endomorphisme u de E, et on note $\mathrm{tr}(u)$, la trace d'une matrice représentant u dans une base quelconque de E.

3.2 Propriétés

1. $\forall (u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \mathrm{tr}(\lambda u + \mu v) = \lambda\ \mathrm{tr}(u) + \mu\ \mathrm{tr}(v)$.
2. $\forall (u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

3.3 Cas particulier des projecteurs

La trace d'un projecteur de E est égale à son rang.

CHAPITRE 31

GROUPE SYMÉTRIQUE

I Généralités

1 Groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Rappel sur le groupe des permutations d'un ensemble

Soit X un ensemble.

L'ensemble des applications de X dans X qui sont des bijections est un groupe pour la loi de composition interne $\circ$, appelé **groupe des permutations** de l'ensemble X et noté S_X.

1.2 Groupe symétrique

Le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$ est appelé **groupe symétrique** et souvent noté S_n plutôt que $S_{[\![1,n]\!]}$.

2 Cycles, transposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

2.1 Cycle de longueur p

Soit $p \in [\![2, n]\!]$.

Tout élément σ de S_n pour lequel il existe des éléments distincts $a_1, \ldots, a_p$ de $[\![1, n]\!]$ tel que :

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \sigma(a_{p-1}) = a_p, \sigma(a_p) = a_1$$

et

$$\sigma(k) = k \text{ si } k \in [\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$$

est dit **cycle de longueur** p de $[\![1, n]\!]$ et noté $\sigma = (a_1 a_2 \ldots a_p)$.

2.2 Transposition

Tout cycle de longueur 2 de $[\![1, n]\!]$ est aussi appelé **transposition** de $[\![1, n]\!]$.

3 Décomposition des permutations en produit de cycles disjoints

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

3.1 Cycles disjoints

Les cycles $(a_1 a_2 \dots a_p)$ et $(b_1 b_2 \dots b_q)$ de $[\![1, n]\!]$ sont dits **disjoints** si $\{a_1, \dots, a_p\} \cap \{b_1, \dots, b_q\} = \emptyset$.

Remarques

— Deux cycles disjoints commutent.

— Le terme "cycles disjoints" est parfois remplacé par "cycles à supports disjoints" ; le support d'une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ étant l'ensemble des éléments de $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas invariants par σ.

3.2 Théorème de décomposition des permutations (ADMIS)

Toute permutation de $[\![1, n]\!]$ peut s'écrire comme **composée de cycles disjoints**. Cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.

Remarque

Le terme "produit" remplace le terme "composée" si on utilise la notation usuelle $\sigma\sigma$' au lieu de $\sigma \circ \sigma'$.

II Signature d'une permutation

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

1 Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

Toute permutation de $[\![1, n]\!]$ peut s'écrire comme **composée de transpositions**.

Remarque

La décomposition d'une permutation de $[\![1, n]\!]$ comme composée de transpositions n'est pas unique.

2 Théorème d'existence et unicité de la signature (ADMIS)

Il existe un morphisme de groupes ε de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$ qui envoie les transpositions sur -1.
Il est défini par :

$$\forall \sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in A} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

où

$$A = \left\{ \{i, j\} \mid (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \right\}.$$

Ce morphisme de groupes est **unique** et appelé **signature** de S_n.

Remarques

— La signature d'un cycle de longueur p est $(-1)^{p-1}$.

— La signature sera utilisée dans le chapitre "Déterminants" pour définir formellement le déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endormorphisme ou d'une matrice carrée.

CHAPITRE 32

DÉTERMINANTS

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Formes $n-$linéaires alternées

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie non nulle n.

1 Définition

Une application $f : E^n \to \mathbb{K}$ est dite **forme $n-$linéaire alternée** sur E si :

1. $\forall j \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in E^{n-1}, (x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
2. f s'annule en tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ pour lequel il existe $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $j \neq k$ et $x_j = x_k$.

2 Propriétés

2.1 Effet sur les familles liées

Si f est une forme $n-$linéaire alternée sur E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E liée alors

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

2.2 Antisymétrie

Si f est une forme $n-$linéaire alternée sur E alors f est **antisymétrique**, c'est-à-dire que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \forall (j, k) \in [\![1, n]\!]^2, j < k \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

Remarque
En notant ε la signature de S_n, l'antisymétrie de f se traduit par : pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et pour toute transposition τ de $[\![1, n]\!]$, $f\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}\right) = \varepsilon(\tau) f(x_1, \ldots, x_n)$.

2.3 Effet d'une permutation

Si f est une forme $n-$linéaire alternée sur E alors :

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n).$$

II Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie non nulle n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

1 Théorème

1. Il **existe une unique forme** $n-$**linéaire alternée** f sur E telle que $f(\mathcal{B}) = f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
   Cette forme $n-$linéaire alternée sur E est notée $\det_{\mathcal{B}}$ et vérifie :
   $$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1.$$
2. **Toute forme** $n-$**linéaire alternée** g sur E est un **multiple de** $\det_{\mathcal{B}}$ avec, plus précisément :
   $$g = g(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}.$$

2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

2.1 Définition

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est dit **déterminant de la famille** $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

2.2 Expression du déterminant avec les coordonnées

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E et $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]} = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x_1, \ldots, x_n)$ alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \right).$$

Remarque
A l'issue de ce chapitre, on disposera de moyens plus pratiques que le recours à **cette formule théorique** pour calculer le déterminant d'une famille de vecteurs.

2.3 Cas particuliers des dimension 2 et 3

— Si E est de dimension 2 et (x, y) une famille de deux vecteurs de E de matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \underset{\text{Not.}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

— Si E est de dimension 3 et (x, y, z) une famille de trois vecteurs de E de matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 \underset{\text{Not.}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3 Formule de changement de bases

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ c'est-à-dire que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E, \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

4 Caractérisation des bases par le déterminant

Une famille $\mathcal{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ avec dans ce cas,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = (\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}))^{-1}.$$

Remarque
En 2e année MPI, les notions d'orientation d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et de bases directes ou indirectes seront définies en utilisant la notion de déterminant.

III Déterminant d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

1 Cas d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie non nulle.

1.1 Théorème-définition

Soit u un endomorphisme de E.

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$, qui ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E considérée, est appelé **déterminant de** u et noté $\det(u)$:

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \text{ avec } \mathcal{B} \text{ base quelconque de } E$$

Exemples simples

- En particulier, $\det\left(0_{\mathcal{L}(E)}\right) = 0$ et $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
- Plus généralement,
  - le déterminant d'une homothétie h_α de E de rapport α est : $\det(h_\alpha) = \alpha^{\dim E}$.
  - le déterminant d'une projection p de E autre que l'identité est : $\det(p) = 0$.
  - de déterminant d'une symétrie s de E est : $\det(s) = (-1)^{\dim E - \dim F}$ où $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.

1.2 Propriétés

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathcal{L}(E), \det(\lambda u) = \lambda^{\dim E} \det(u)$.
2. $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \det(v \circ u) = \det(v) \det(u) = \det(u) \det(v)$.
3. $\forall q \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathcal{L}(E), \det(u^q) = (\det u)^q$.

1.3 Caractérisation des automorphismes avec le déterminant

Un endomorphisme u de E est bijectif si, et seulement si, $\det(u) \neq 0$ avec dans ce cas,

$$\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}.$$

1.4 Morphisme de groupes de $\mathcal{GL}(E)$ vers $\mathbb{K}^*$

L'application $u \in \mathcal{GL}(E) \mapsto \det(u)$ est un morphisme de groupes de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ vers $(\mathbb{K}^*, \times)$.

2 Déterminant d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1 Définition

On appelle **déterminant d'une matrice** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on note $\det(A)$, le déterminant de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

Exemples simples

En particulier, $\det\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right) = 0$ et $\det(I_n) = 1$.

2.2 Caractère $n-$linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes

Si $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}_{can}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ alors

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_{can}}(C_1, \ldots, C_n).$$

donc le déterminant d'une matrice carrée est $n-$**linéaire alterné par rapport aux colonnes**.

2.3 Propriétés

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $q \in \mathbb{N}$.

1. $\det(A) = -\det(A')$ où A' est la matrice obtenue en échangeant deux colonnes de A.
2. Si deux colonnes de A sont égales (resp. si les colonnes de A sont liées) alors $\det(A) = 0$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)$.
5. $\det(A^q) = (\det(A))^q$.

2.4 Caractérisation des matrices inversibles avec le déterminant

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$ avec, dans ce cas,

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

2.5 Morphisme de groupes de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}^*$

L'application $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A)$ est un morphisme de groupes de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ vers $(\mathbb{K}^*, \times)$.

2.6 Déterminant de matrices semblables

Si A et B sont des matrices semblables alors $\det(A) = \det(B)$.

2.7 Expression du déterminant à l'aide des coefficients de la matrice

Si $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \right).$$

2.8 Déterminant et transposition

Les déterminants d'une matrice carrée et de sa transposée sont égaux :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A^\top) = \det(A).$$

Remarque
Les propriétés vues sur le déterminant d'une matrice carrée relatives à ses colonnes s'étendent aux lignes.

3 Calcul de déterminants en pratique

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes (resp. $L_1, \dots, L_n$ les lignes) de $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.1 Effet des opérations élémentaires sur un déterminant

1. L'opération élémentaire $C_r \leftarrow \lambda C_r$ multiplie le déterminant par λ.
2. L'opération élémentaire $C_r \leftrightarrow C_s$ avec $r \neq s$ multiplie le déterminant par -1.
3. L'opération élémentaire $C_r \leftarrow C_r + \lambda C_s$ avec $r \neq s$ ne modifie pas le déterminant.

Remarques
- On obtient le même résultat avec les opérations élémentaires sur les lignes.
- Dans la mesure du possible, on **commencera par des opérations élémentaires pour faire apparaître des zéros** avant d'utiliser les formules de développement qui suivent.

3.2 Développement suivant une colonne (ou une ligne)

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle **cofacteur du coefficient** a_{ij} de A le scalaire noté A_{ij} défini par :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

où M_{ij} est le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant L_i et C_j.

1. Formule de calcul du déterminant par développement suivant la j^{e} colonne.

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

2. Formule de calcul du déterminant par développement suivant la i^{e} ligne.

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

3.3 Déterminant de matrices particulières

1. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.
2. Déterminant de la matrice de Vandermonde pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq s < t \leq n} (x_t - x_s).$$

4 Comatrice

4.1 Définition

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle **comatrice de** A, et on note $\operatorname{com}(A)$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\operatorname{com}(A) = (A_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

où A_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A.

Remarque
Autrement dit, la comatrice de A est la matrice des cofacteurs de A.

4.2 Relation liant A et sa comatrice

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A(\operatorname{com}(A))^\top = (\operatorname{com}(A))^\top A = \det(A) I_n.$$

4.3 Expression de l'inverse d'une matrice

Si A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{com}(A))^\top.$$

Remarque
Cette formule est **à bannir pour des calculs pratiques** lorsque $n \geq 3$ en raison de la lourdeur des calculs qu'elle implique.

CHAPITRE 33

DÉNOMBREMENT

I Cardinal d'un ensemble fini

Conformément au programme officiel de MP2I, les propriétés intuitives de cette partie sont admises et le recours systématique à des bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu.

1 Définitions

Soit A un ensemble.

A est dit fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[\![1, n]\!]$ vers A.

Dans ce cas,

— si A est vide, on dit que A est de cardinal égal à 0.
— si A est non vide alors l'entier n ci-dessus est unique et appelé cardinal de A.

Notations utilisées pour le cardinal : $\mathrm{card}\,(A)$ ou $|A|$.

2 Propriétés sur le cardinal

2.1 Cardinal d'une partie

Si B est une partie d'un ensemble fini A alors B est un ensemble fini et $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$ avec égalité si, et seulement si, $B = A$.

2.2 Opérations sur les cardinaux

1. Si A et B sont deux ensembles finis alors :
   (a) la réunion $A \cup B$ est un ensemble fini et $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}\,(A) + \mathrm{card}\,(B) - \mathrm{card}\,(A \cap B)$.
   (b) le produit cartésien $A \times B$ est un ensemble fini et $\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B)$.
2. Soit A et B des parties d'un ensemble fini E.
   (a) La différence $A \backslash B$ est un ensemble fini et $\mathrm{card}(A \backslash B) = \mathrm{card}(A) - \mathrm{card}(A \cap B)$
   (b) Le complémentaire de A dans E est un ensemble fini et $\mathrm{card}(\overline{A}) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$.

2.3 Caractérisation des applications bijectives entre ensembles finis

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si, et seulement si, elle est injective, si, et seulement si, elle est surjective.

2.4 Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis

Si A et B sont des ensembles finis alors l'ensemble B^A des applications de A vers B est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}\left(B^A\right) = \operatorname{card}\left(B\right)^{\operatorname{card}(A)}.$$

2.5 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Si A est un ensemble fini alors l'ensemble $\mathcal{P}\left(A\right)$ des parties de A est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}\left(A\right)\right) = 2^{\operatorname{card}(A)}.$$

II Listes et combinaisons

1 Définitions

Soit A un ensemble fini et p un entier naturel.

1. On appelle $p-$liste (ou $p-$uplet) d'éléments de A tout élément $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de A^p.
2. On appelle $p-$combinaison d'éléments de A toute partie de A à p éléments.

Remarque
Les $p-$uplets d'**éléments distincts** de A sont aussi appelés $p-$arrangements d'éléments de A.

2 Propriétés

Soit A un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n.

1. Le nombre de $p-$listes d'éléments de A est égal à n^p.
2. Le nombre de $p-$listes d'éléments distincts de A est égal à $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(n-k) = \frac{n!}{(n-p)!}$.
3. Le nombre de $p-$combinaisons d'éléments de A est égal à $\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dbinom{n}{p}$.

Remarques
Le nombre d'applications

- injectives d'un ensemble fini de cardinal p dans un ensemble fini de cardinal n est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
- bijectives d'un ensemble fini de cardinal n dans lui-même est égal à $n!$.

3 Retour sur les formules de Pascal et du binôme

1. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, p \leq n \Rightarrow \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$ *(formule du triangle de Pascal)*
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, (a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$ *(formule du binôme de Newton)*

CHAPITRE 34

PROBABILITÉS ET VARIABLES ALÉATOIRES SUR UN UNIVERS FINI

I Probabilités sur un univers fini

1 Expérience aléatoire et univers

1.1 Expérience aléatoire

Une expérience qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles dont on ne peut prévoir le résultat par avance est dite expérience aléatoire .

1.2 Univers

L'ensemble des issues (résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers (ou espace d'états) et souvent noté Ω.

Conformément au programme de MP2I, on se limite en 1^{re} année à des univers finis.

1.3 Evénements

1. Toute partie de l'univers Ω est appelée événement.
2. Parmi les parties de l'univers Ω, on trouve :
   - la partie $\emptyset$, dite **événement impossible** ;
   - la partie Ω, dite **événement certain** ;
   - les singletons de Ω, dits **événements élémentaires** souvent notés $\{\omega\}$.
3. Soient A et B deux parties de l'univers Ω (autrement dit deux événements).
   - La partie $\overline{A} = \Omega \setminus A = A^c$ est dite **événement contraire** de A.
   - La partie $A \cup B$ est dite **événement "A ou B"**.
   - La partie $A \cap B$ est dite **événement "A et B"**.
   - Les parties A et B sont dites **événements incompatibles (ou disjoints)** si $A \cap B = \emptyset$.
4. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_q$ des parties de Ω.

   $\{A_1, A_2, \ldots, A_q\}$ est dit **système complet d'événements** de Ω si c'est une partition de Ω

autrement dit si :

— $\bigcup_{i=1}^{q} A_i = \Omega$;
— $\forall i \in [\![1, q]\!], A_i \neq \emptyset$;
— $\forall (i,j) \in [\![1, q]\!]^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$. *(événements deux à deux disjoints/incompatibles)*

Remarque
On note parfois $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{q} A_i$ pour indiquer que les événements A_i sont deux à deux disjoints.

2 Variable aléatoire

2.1 Définition

Toute application X définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E est dite **variable aléatoire.**

Remarque
Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

2.2 Notations

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E.

Pour toute partie A de E, l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ est noté $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$:

$$(X \in A) = \{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A).$$

3 Espace probabilisés finis

3.1 Définitions

1. On appelle **probabilité sur un univers fini** Ω toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que :
   (a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
   (b) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}) \times \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}), A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
2. On appelle **espace probabilisé fini** tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini non vide et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

3.2 Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. *(événement impossible)*
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. *(événement contraire)*
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. *(réunion d'événements)*
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(différence d'événements)*
5. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega), A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. *(croissance des probabilités)*

3.3 Distribution de probabilités

On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble fini I toute famille de réels positifs indexée par I et de somme égale à 1 .

3.4 Détermination d'une probabilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ est un univers fini et $p_1, \ldots, p_n$ des réels positifs tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ et une seule sur Ω telle que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Remarque

Autrement dit, une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée :

- par sa valeur sur les singletons de l'univers.
- par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.

3.5 Probabilité uniforme

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

$\mathbb{P}$ est dite probabilité uniforme sur Ω s'il existe $p \in [0, 1]$ tel que $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = p$.

Dans ce cas,

$$p = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

4 Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

4.1 Définition

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B** le réel, noté $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$, défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque

Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application $\mathbb{P}_B : A \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur Ω.

4.2 Formule des probabilités composées

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ est non nulle alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2|A_1)\, \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

4.3 Formule des probabilités totales

Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements et B un événement quelconque alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\, \mathbb{P}(A_i)$$

avec la convention usuelle $\mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i) = 0$ si $\mathbb{P}(A_i) = 0$ (conservée dans la suite du chapitre).

4.4 Formules de Bayes

1. Si A est un événement quelconque et B un événement de probabilité non nulle alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

2. Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements et B un événement de probabilité non nulle alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,, \mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}.$$

5 Evénements indépendants

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

5.1 Couple d'événements indépendants

Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Remarque
Dans le cas où B est de probabilité non nulle l'indépendance de A et B se traduit par $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

5.2 Famille finie d'événements indépendants

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **indépendants** si, pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} (\mathbb{P}(A_i))$$

Remarque
— Si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants, ils sont deux à deux indépendants.
— La réciproque est fausse pour $n \geq 3$: l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

5.3 Indépendance et événements contraires

— Si A et B sont deux événements indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants alors les événements $A'_1, \ldots, A'_n$ avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A'_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$, le sont aussi.

II Loi d'une variable aléatoire

Dans cette partie, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

1 Définition

Soit E un ensemble.

On appelle **loi de la variable aléatoire** $X : \Omega \to E$, l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1]$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Remarques

— $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

— la loi de la variable aléatoire $X : \Omega \to E$ (autrement dit $\mathbb{P}_X$) est entièrement déterminée par la connaissance de l'ensemble fini $X(\Omega)$ et des valeurs $\mathbb{P}(X = x)$ pour x variant dans $X(\Omega)$ avec :

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x).$$

— la loi de la variable aléatoire $X : \Omega \to E$ (autrement dit $\mathbb{P}_X$) est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ sur $X(\Omega)$ et on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

2 Notation

Si X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω de même loi, c'est-à-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, alors on note $X \sim Y$.

3 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Soit E et F deux ensembles.

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω et $f : E \to F$ une application.

1. L'application $f \circ X : \Omega \to F$ est une variable aléatoire sur Ω, notée $f(X)$, dite image de la variable aléatoire X par f.
2. La loi de $f(X)$ est entièrement déterminée par la connaissance de f et de la loi de X :

$$\forall y \in f(X(\Omega)), \mathbb{P}_{f(X)}(\{y\}) = \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X = x).$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(f(X(\Omega))), \mathbb{P}_{f(X)}(A) = \mathbb{P}(f(X) \in A) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) \in A}} P(X = x).$$

Remarque

Si X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω de même loi alors, sous réserve que cela ait du sens, les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

4 Lois usuelles

4.1 Loi uniforme

Soit E un ensemble fini non vide.

On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \to E$ **suit la loi uniforme sur** E (ou que X est une variable uniforme sur E) si sa loi $\mathbb{P}_X$ est la probabilité uniforme sur E, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}.$$

On le note $X \sim \mathcal{U}(E)$.

4.2 Loi de Bernoulli

Soit p un réel de $[0,1]$.

On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \to \{0,1\}$ **suit la loi de Bernoulli de paramètre** p (ou que X est une variable de Bernoulli de paramètre p) si sa loi $\mathbb{P}_X$ vérifie

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(X=1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}(X=0) = 1-p.$$

On le note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

☐ Indicatrice d'un événement
Soit A un événement.
L'indicatrice de A est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$: $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

☐ Interprétation/Modélisation
Pour une expérience aléatoire du type "Succès-Echec", la variable aléatoire réelle prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(\text{"Succès"})$.

4.3 Loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $[0,1]$.

On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \to [\![0,n]\!]$ **suit la loi binomiale de paramètres** n **et** p (ou que X est une variable binomiale de paramètres n et p) si sa loi $\mathbb{P}_X$ vérifie

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On le note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

☐ Interprétations/Modélisations

1. Si on répète n expériences aléatoires indépendantes du type "Succès-Echec" de même probabilité de succès, la variable aléatoire réelle comptabilisant le nombre de succès obtenus après les n expériences suit la loi binomiale de paramètres n et p.
2. Si on considère "une urne" contenant uniquement des "boules blanches" en proportion $p \in [0,1]$ et des "boules noires" en proportion $1-p$ et qu'on effectue n tirages successifs "d'une boule" dans "l'urne" avec remise après chaque tirage, la variable aléatoire réelle comptabilisant le nombre de "boules blanches" tirées après les n tirages suit la loi binomiale de paramètres n et p.

5 Loi conditionnelle d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur Ω et A un événement de probabilité non nulle.

On appelle **"loi conditionnelle de X sachant l'événement A"** l'application de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ dans $[0,1]$ qui, à tout B de $\mathcal{P}(X(\Omega))$, associe le réel $\mathbb{P}_A(X \in B)$.

Remarque
Cette loi est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}_A(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ sur $X(\Omega)$:

$$\forall B \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \mathbb{P}_A(X \in B) = \sum_{x\in B} \mathbb{P}_A(X=x).$$

6 Couple de variables aléatoires

6.1 Définition

Si $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ sont deux variables aléatoires alors l'application $Z : \Omega \to E \times F$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

est une variable aléatoire, dite **couple des variables aléatoires X et Y** et notée $Z = (X,Y)$.

Ces notations sont conservées dans la suite de ce paragraphe.

6.2 Loi conjointe, lois marginales

1. La loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ du couple (X,Y), dite **loi conjointe de X et Y**, est définie par :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{(x,y)\}) = \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) = \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)).$$

2. La loi $\mathbb{P}_X$ est dite **première loi marginale du couple** (X,Y) et vérifie :

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)).$$

3. La loi $\mathbb{P}_Y$ est dite **seconde loi marginale du couple** (X,Y) et vérifie :

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)).$$

Remarques

- La probabilité $\mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y))$ est souvent $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$.
- La loi conjointe permet de déterminer les lois marginales ; la réciproque est fausse.
- La connaissance de la loi de X et de la loi de Y sachant l'événement $\{X=x\}$ pour tout $x \in X(\Omega)$ permet de déterminer la loi conjointe de X et Y :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) = \mathbb{P}(Y=y|X=x)\mathbb{P}(X=x).$$

7 Extension

On définit de même la notion de n-uplet de variables aléatoires (avec $n \geq 3$) et, dans ce cadre, les notions de loi conjointe et lois marginales.

III Variables aléatoires indépendantes

Dans cette partie, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

1 Cas de deux variables aléatoires

1.1 Définition

Les variables aléatoires X et Y définies sur Ω sont dites **indépendantes** si, pour tout (A, B) de $\mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

1.2 Caractérisation

Les variables aléatoires X et Y définies sur Ω sont **indépendantes** si, et seulement si,

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}\left((X,Y) = (x,y)\right) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

1.3 Images de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω indépendantes et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2 Cas des $n-$uplets de variables aléatoires avec $n \geq 2$

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2.1 Définition

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur Ω sont dites **indépendantes** si pour tout $(A_1, \ldots, A_n)$ de $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n)$ sont indépendants.

2.2 Caractérisation

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur Ω sont **indépendantes** si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), = \mathbb{P}\left((X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

☐ Modélisation
Pour modéliser n expériences aléatoires indépendantes, on peut utiliser un $n-$uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes correspondant aux résultats des différentes expériences.

2.3 Somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur Ω, indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2.4 Lemme des coalitions

Si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur Ω sont indépendantes et, si f et g sont des applications alors, sous réserve que cela ait du sens, les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

CHAPITRE 35

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I Généralités

1 Produit scalaire

1. On appelle produit scalaire sur E toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

   (a) $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. *($\varphi$ symétrique)*

   (b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y, z) \in E^3, \varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, z)$. *($\varphi$ linéaire à droite)*

   (c) $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$. *($\varphi$ positive)*

   (d) $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$. *($\varphi$ définie)*

   Remarques

   — Le réel $\varphi(x, y)$ est souvent noté $< x|y >$, $(x|y)$ ou encore $x \cdot y$.

   — L'application φ est une **forme bilinéaire symétrique définie positive** sur $E \times E$.

2. Un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit :

   (a) **espace préhilbertien réel ;**

   (b) **espace euclidien** s'il est de plus de dimension finie.

2 Quatre exemples usuels à connaître

1. L'application $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. L'application $(X, Y) \mapsto X^\top Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. L'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

   L'application $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

3 Inégalités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $< .|. >$.

3.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x,y) \in E^2, |< x|y >| \leq \sqrt{< x|x >}\sqrt{< y|y >}.$$

Remarque
Il y a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

3.2 Inégalité de Minkowski

$$\forall (x,y) \in E^2, \sqrt{< x+y|x+y >} \leq \sqrt{< x|x >} + \sqrt{< y|y >}.$$

Remarque
Il y a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, $x = 0_E$ ou ($x \neq 0_E$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, y = \alpha x$).

4 Norme associée à un produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $< .|. >$.

4.1 Propriété - définitions

☐ L'application de E dans $\mathbb{R}_+$, notée $\| . \|$, définie par

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{< x|x >}$$

vérifie :

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$; *(séparation)*
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$; *(homogénéité)*
3. $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(inégalité triangulaire)*

On dit que c'est une norme sur E (la notion de norme sera reprise dans un cadre plus général en MPI) et plus particulièrement que c'est la **norme associée au produit scalaire** $< .|. >$.

Remarque
Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si, et seulement si, $x = 0_E$ ou ($x \neq 0_E$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, y = \alpha x$).

☐ L'application $d : E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = \|x - y\|$ est dite **distance associée à la norme** $\| . \|$.

4.2 Deux identités remarquables

Si $\| . \|$ est la norme associée au produit scalaire $< .|. >$ sur l'espace préhilbertien réel E alors :

1. $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x|y >$;
2. $\forall (x,y) \in E^2, < x|y > = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$. *(formule de polarisation)*

II Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire $< . | . >$ et de norme associée $\| . \|$.

1 Vecteurs orthogonaux et vecteurs unitaires

1. Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si $< x|y >= 0$.
2. Un vecteur x de E est dit unitaire (ou normé) si $\|x\| = 1$.

2 Orthogonal d'une partie

2.1 Définition

L'ensemble des vecteurs de E qui sont **orthogonaux à tous les vecteurs d'une partie** F de E est appelé orthogonal de F et noté $F^\perp$:

$$F^\perp = \{y \in E \,|\, \forall x_F \in F, < x_F|y >= 0\}.$$

2.2 Structure de l'orthogonal

Si F est une partie de E alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

3 Familles orthogonales et familles orthonormales

3.1 Définitions

Une famille de vecteurs de E est dite :

1. orthogonale si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
2. orthonormale (orthonormée) si elle est orthogonale et que ses vecteurs sont unitaires (normés).

3.2 Liberté des familles orthogonales

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est une famille libre de E.

Remarque
En particulier, toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre.

3.3 Théorème de Pythagore

Soit $p \in \mathbb{N}^*, p \geq 2$.

Si la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille orthogonale de E alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2.$$

Remarque
La réciproque est vraie pour $p = 2$ et fausse pour $p \geq 3$.

III Bases orthonormales

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de produit scalaire $< . | . >$ et de norme associée $\| . \|$.

1 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de E.

— *Etape 1 : on pose $u_1 = e_1$.*

— *Etape 2 : on pose $u_2 = e_2 + \alpha_1 u_1$ et on cherche $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que $< u_1 | u_2 > = 0$.*

Par linéarité à droite, on trouve : $\alpha_1 = -\dfrac{< u_1 | e_2 >}{< u_1 | u_1 >}$ puisque $u_1 \neq 0_E$. Avec cette valeur de α_1, on obtient un vecteur u_2 orthogonal à u_1 tel que $u_2 \neq 0_E$.

— *Etape 3 : on pose $u_3 = e_3 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ et on cherche $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $< u_1 | u_3 > = 0$ et $< u_2 | u_3 > = 0$.*

Par linéarité à droite, on trouve : $\beta_1 = -\dfrac{< u_1 | e_3 >}{< u_1 | u_1 >}$ et $\beta_2 = -\dfrac{< u_2 | e_3 >}{< u_2 | u_2 >}$ puisque $u_1 \neq 0_E$ et $u_2 \neq 0_E$. Avec ces valeurs de β_1 et β_2, on obtient un vecteur u_3 orthogonal à u_1 et u_2 avec $u_3 \neq 0_E$.

Après n étapes, on obtient $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ famille orthogonale de vecteurs non nuls de E donc famille libre de E. Cette famille de E étant orthogonale, libre et de cardinal égal à la dimension de E, on en déduit que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base orthogonale de E.

La famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ définie par $\forall i \in [\![1; n]\!], e'_i = \dfrac{1}{\|u_i\|} u_i$ est alors une base orthonormée de E.

2 Existence de bases orthonormales

1. Tout espace euclidien de dimension non nulle admet au moins une base orthonormale.
2. Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

3 Calculs dans une base orthonormale

3.1 Coordonnées d'un vecteur

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une **base orthonormée** de E alors les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un vecteur x de E dans la base $\mathcal{B}$ vérifient

$$\forall i \in [\![1; n]\!], x_i = < e_i | x > \text{ i. e. } X = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} < e_1 | x > \\ \vdots \\ < e_n | x > \end{pmatrix}$$

3.2 Expression de la norme et du produit scalaire

Soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E et $(x, y) \in E^2$ tel que $X = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x)$ et $Y = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(y)$.
Alors :

$$< x | y > = X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|x\| = \sqrt{X^\top X}.$$

IV Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire $< . | . >$ et de norme associée $\| . \|$.

1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

Si F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E alors $E = F \oplus F^\perp$.

Remarques

1. Cette propriété n'est pas conservée lorsque F est un sous-espace vectoriel de dimension non finie.
2. **Dans le cas particulier où E est euclidien**, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :

$$E = F \oplus F^\perp \text{ et } \dim E = \dim F + \dim F^\perp.$$

2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Si F est un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie** alors :

1. on peut définir la projection sur F parallèlement à $F^\perp$;
2. cette projection est appelée **projection orthogonale** sur F et souvent notée p_F ;
3. pour tout x de E, $p_F(x)$ est appelé **projeté orthogonal** de x sur F.

3 Détermination pratique du projeté orthogonal d'un vecteur

Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie** et $p_F(x)$ le projeté orthogonal sur F de $x \in E$.

1. Utilisation d'une base orthonormée de F

   Si $(e_1, \dots, e_q)$ est une **base orthonormée** de F alors,

$$p_F(x) = < e_1 | x > e_1 + \cdots + < e_q | x > e_q.$$

2. Utilisation d'une famille génératrice de F

   En écrivant que $p_F(x)$ est un vecteur de F tel $x - p_F(x)$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de F, on obtient un système linéaire qui permet de déterminer $p_F(x)$.

4 Caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur

Si F est un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie** alors, pour tout x de E, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y_0 de F tel que

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

Ce minimum est appelé distance de x à F, noté $d(x, F)$, et vérifie donc :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

Remarque
On dit que le projeté orthogonal de x sur le sous-espace de dimension finie F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F .

5 Cas particulier des hyperplans

On suppose ici que E est un espace euclidien de dimension non nulle.

5.1 Vecteur normal à un hyperplan

Si H est un hyperplan de E alors tout vecteur directeur de la droite $H^\perp$ est appelé vecteur normal à H.

Remarque

Si H est un hyperplan de E dont l'équation dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E est

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

alors le vecteur a de E de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est vecteur normal à H.

5.2 Distance d'un vecteur à un hyperplan H

Si x est un vecteur de E et H un hyperplan de E de **vecteur normal unitaire** a alors

$$d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \|p_{H^\perp}(x)\| = |< a|x >| \,.$$

CHAPITRE 36

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

I Continuité et continuité uniforme

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Rappels

1. f est dite **continue sur** I si, pour tout réel a de I, la fonction f a pour limite $f(a)$ en a :

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon.$$

2. f est dite **lipschitzienne sur** I s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (a,x) \in I^2, |f(x)-f(a)| \leq k\,|x-a|\,.$$

2 Continuité uniforme

2.1 Définition

f est dite **uniformément continue** sur I si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (a,x) \in I^2, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon.$$

2.2 Propriétés

1. Si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I.
2. Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I.

Remarque
Les réciproques de ces propriétés sont fausses.

3 Théorème de Heine (preuve non exigible)

Toute fonction numérique, qui est **continue sur un segment** de $\mathbb{R}$, y est **uniformément continue**.

II Continuité par morceaux sur un segment

1 Définitions, notations

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1.1 Subdivision d'un segment

On appelle **subdivision du segment** $[a, b]$ toute famille finie $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ tel que

$$a = a_0 \qquad a_0 < a_1 < \cdots < a_n \qquad a_n = b.$$

Le réel positif $\sigma = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |a_i - a_{i-1}|$ est appelé pas de cette subdivision.

1.2 Fonctions en escalier sur un segment

Une fonction f définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est dite **en escalier sur le segment** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]a_{i-1}, a_i[$ est une fonction constante. Une telle **subdivision** est dite **adaptée** à f.

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est noté $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

1.3 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Une fonction f définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est dite **continue par morceaux sur le segment** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]a_{i-1}, a_i[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$. Une telle **subdivision** est dite **adaptée** à f.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est noté $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Remarques

- $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.
- $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K}), +, .)$ et sous-anneau de $(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K}), +, \times)$.

2 Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux

Soit f une fonction **continue par morceaux sur le segment** $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier sur le segment $[a, b]$ telle que

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

- La borne supérieure écrite ci-dessus a du sens car les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont bornées.
- En MPI, lorsque la notion de norme aura été vue dans le cas général et particulièrement la norme infinie sur $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, on déduira du résultat précédent que :

  toute fonction f de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ c'est-à-dire qu'il existe une suite de fonctions $(\varphi_n) \in (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ telle que :

  $$\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ avec } \|f - \varphi_n\|_\infty \underset{déf}{=} \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi_n(t)|.$$

III Intégrale sur un segment d'une fonction continue par mcx

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1 Cas particulier des fonctions en escalier sur un segment

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ et $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note λ_i la valeur prise par f sur $]a_{i-1}, a_i[$.

Alors, le scalaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(a_i - a_{i-1}\right)$ est :

— indépendant de la subdivision de $[a, b]$ adaptée à f choisie ;

— appelé l'intégrale de f sur $[a, b]$ et noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(a_i - a_{i-1}\right).$$

Remarque
Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut interpréter cette intégrale comme "aire algébrique sous la courbe de f".

2 Cas général des fonctions continues par morceaux sur un segment

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une **fonction continue par morceaux** sur $[a, b]$.

Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

autrement dit qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors, la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ converge et sa limite est :

— indépendante du choix de la suite (φ_n) ;

— appelée l'intégrale de f sur $[a, b]$ et notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right).$$

Remarque
Cette définition prolonge bien celle vu pour les fonctions en escalier sur le segment $[a, b]$ car, lorsque f est en escalier sur $[a, b]$, on retrouve la même intégrale que celle définie dans le paragraphe précédent.

3 Valeur moyenne

Pour $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, le scalaire $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ est dit valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

4 Propriétés

4.1 Linéarité de l'intégrale

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ sont deux **fonctions continues par morceaux** sur $[a,b]$ et, α et β deux éléments de $\mathbb{K}$ alors

$$\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_{[a,b]} f \right) + \beta \left(\int_{[a,b]} g \right).$$

4.2 Positivité (pour les fonctions à valeurs réelles)

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **continue par morceaux et positive** sur $[a,b]$ alors

$$\int_{[a,b]} f \geq 0.$$

4.3 Croissance (pour les fonctions à valeurs réelles)

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions **continues par morceaux** telles que $f \leq g$ alors

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$$

4.4 Inégalité triangulaire intégrale

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction **continue par morceaux** sur $[a,b]$ alors

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

4.5 Relation de Chasles

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction **continue par morceaux** sur $[a,b]$.

Alors, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in [a,b]$, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^\gamma f(t)\ \mathrm{d}t + \int_\gamma^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$$

avec les notations suivantes

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{[\alpha,\beta]} f & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ -\int_{[\beta,\alpha]} f & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}.$$

4.6 Nullité (pour les fonctions à valeurs réelles)

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **CONTINUE, positive et d'intégrale nulle** sur $[a,b]$ alors f est la fonction nulle.

Remarque

Cette propriété n'est pas conservée dans le cas où f est seulement continue par morceaux.

4.7 Cas des fonctions à valeurs complexes

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction **continue par morceaux** sur $[a,b]$.
Alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{i} \int_{[a,b]} \mathrm{Im}\,(f)$$

4.8 Cas des fonctions paires ou impaires

Soit a un réel strictement positif et $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[-a,a]$.

1. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

4.9 Cas des fonctions périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Si f est périodique de période T alors, pour tout réel a, on a : $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\ \mathrm{d}t$.

4.10 Conséquences pratiques de la définition

— Si f et g sont des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui coïncident sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points alors

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g.$$

— Si f est une fonction continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$ contenant les points de discontinuité de f alors

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{[a_{i-1},a_i]} f \right).$$

5 Sommes de Riemann à pas constant

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction **continue par morceaux** sur $[a,b]$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right) = \int_{[a,b]} f.$$

Remarque

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le réel $\displaystyle\frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right)$ correspond à la somme des aires de n rectangles de largeur $\displaystyle\frac{b-a}{n}$ et de longueur $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ avec k qui varie dans $[\![0, n-1]\!]$.

IV Lien entre intégrale et primitive d'une fonction continue

Soit f une fonction définie sur I, **continue** sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Théorème fondamental

1. Pour tout a appartenant à I, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est :

   — dérivable sur I de dérivée la fonction f ;

   — l'unique primitive de la fonction f sur I qui s'annule en a.

2. Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

2 Existence de primitives

Toute fonction numérique continue sur un intervalle I admet des primitives sur I et celles-ci permettent de calculer les intégrales de cette fonction sur tout segment inclus dans I.

V Formules de Taylor globales

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ alors, pour tout couple $(a,x) \in I^2$, on a :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

avec

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \qquad \text{et} \qquad R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ alors, pour tout couple $(a,x) \in I^2$, on a :

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

avec

$$M_{n+1} \text{ un majorant de } \left|f^{(n+1)}\right| \text{ sur } [a,x]\,(\text{ou}\,[x,a]).$$

3 Remarque

Les deux formules précédentes ont une nature globale contrairement à la formule de Taylor-Young vue dans le chapitre “Analyse asymptotique (1)” qui elle a une nature locale.

CHAPITRE 37

ESPÉRANCE ET VARIANCE

Dans ce chapitre, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

1 Généralités

1.1 Définition

Si $X : \Omega \to \mathbb{K}$ est une variable aléatoire numérique telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_q\}$ alors le scalaire

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{q} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

est dit **espérance** de la variable aléatoire X. Si $\mathrm{E}(X) = 0$, X est dite **variable aléatoire centrée**.

Remarque
$\mathrm{E}(X)$ est la moyenne des valeurs de X pondérées par leurs probabilités ; c'est un **indicateur** de **position.**

1.2 Expression alternative de $\mathbf{E}(X)$

Si $X : \Omega \to \mathbb{K}$ est une variable aléatoire numérique alors

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Remarque
Il s'agit ici de réécrire $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$ en utilisant le système complet d'événements $\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$.

2 Propriétés

Soient $X : \Omega \to \mathbb{K}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{K}$ des variables aléatoires numériques et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

1. $\mathrm{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathrm{E}(X) + \beta \mathrm{E}(Y)$. *(linéarité de l'espérance)*
2. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X \geq 0 \Rightarrow \mathrm{E}(X) \geq 0$. *(positivité de l'espérance)*
3. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X \leq Y \Rightarrow \mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$. *(croissance de l'espérance)*
4. $|\mathrm{E}(X)| \leq \mathrm{E}(|X|)$. *(inégalité triangulaire)*

3 Espérance de variables aléatoires usuelles

1. Si X est une variable aléatoire numérique constante égale à m alors $\mathrm{E}(X) = m$.
2. Si X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathrm{E}(X) = p$.
3. Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p, alors $\mathrm{E}(X) = np$.

Remarque
En particulier, pour toute partie A de Ω, on a : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

4 Formule de transfert

Soit E un ensemble quelconque.

Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to \mathbb{K}$ une application numérique alors

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Remarques

1. Pour déterminer l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$:
   - il suffit de connaître la loi de X ;
   - il n'est pas nécessaire de connaître la loi de $f(X)$.
2. En particulier,

   si $(X_1, \dots, X_n)$ est un $n-$uplet de variables aléatoires défini sur Ω et $f : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{K}$ une application numérique, la formule de transfert s'écrit :

$$\mathrm{E}(f(X_1, \dots, X_n)) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)} f(x_1, \dots, x_n)\mathbb{P}\left((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)\right).$$

5 Produit de variables aléatoires indépendantes

Si $X : \Omega \to \mathbb{K}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{K}$ sont des variables aléatoires numériques indépendantes alors

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

Remarques

- Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$, si $X_1 : \Omega \to \mathbb{K}, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{K}$ sont des variables aléatoires numériques indépendantes alors
$$\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i).$$
- Les réciproques sont fausses.

II Variance, écart type, covariance

1 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

1.1 Définitions

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

1. On appelle variance de X le réel, noté $\mathrm{V}(X)$, défini par

$$V(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right).$$

   Dans le cas $\mathrm{V}(X) = 1$, X est dite **variable aléatoire réduite**.

2. On appelle écart-type de X le réel, noté $\sigma(X)$, défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}.$$

Remarque
Les réels positifs $\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(X)$ sont des **indicateurs** de **dispersion** des valeurs de X autour de $\mathrm{E}(X)$; s'ils sont petits (resp. grands), il y a faible (resp. forte) dispersion.

1.2 Propriétés

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle et (α, β) un couple de réels.

1. On a : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$.
2. On a : $\mathrm{V}(\alpha X + \beta) = \alpha^2\ \mathrm{V}(X)$.

Remarque
Dans le cas $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est **centrée réduite**.

1.3 Variance de variables aléatoires suivant des lois usuelles

1. Si X est une variable aléatoire réelle constante égale à m alors $\mathrm{V}(X) = 0$.
2. Si X est une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$.
3. Si X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p, alors $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

2 Covariance de deux variables aléatoires réelles

2.1 Définitions

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles alors le réel, noté $\mathrm{cov}(X, Y)$, défini par

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))\,(Y - \mathrm{E}(Y))\right)$$

est dit covariance de X et Y.

Dans le cas où $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, on dit que les variables aléatoires X et Y sont **décorrélées**.

2.2 Propriété

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles alors

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

2.3 Covariance de deux variables aléatoires réelles indépendantes

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles **indépendantes** alors $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Remarque
Autrement dit, deux variables aléatoires réelles indépendantes sont décorrélées ; la réciproque est fausse.

2.4 Variance d'une somme de deux variables aléatoires réelles

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles alors :

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y).$$

2.5 Variance d'une somme de deux variables aléatoires réelles décorrélées

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles.

X et Y sont décorrélées si, et seulement si, $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$.

2.6 Variance de n variables aléatoires réelles (programme de 2e année MPI)

La variance de la somme de $n(\geq 3)$ variables aléatoires réelles sera abordée en MPI :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$

Remarque
Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p alors on écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p et **indépendantes.** On retrouve alors la variance connue pour une variable aléatoire binomiale X avec la formule ci-dessus :

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

3 Inégalités probabilistes

3.1 Inégalité de Markov

Si $X : \Omega \to \mathbb{K}$ est une variable aléatoire numérique et a un réel strictement positif alors

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left(|X|\right)}{a}.$$

3.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle et a un réel strictement positif alors

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{V}\left(X\right)}{a^2}.$$

CHAPITRE 38

FAMILLES SOMMABLES DE RÉELS OU COMPLEXES

Dans ce chapitre où $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année dans le chapitre "Sommes et produits finis" en présentant un cadre qui permet de sommer "en vrac" une famille infinie et procure ainsi un grand confort de calcul. On se concentre sur la pratique, vu son importance en MPI, dans les calculs d'espérance et de variance de variables aléatoires discrètes.

I Familles sommables de réels positifs

1 Relation d'ordre dans la demi-droite achevée $[0, +\infty]$

☐ On appelle **demi-droite achevée** l'ensemble noté $[0, +\infty]$ défini par $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Sur cette demi-droite achevée, on étend la relation d'ordre $\leq$, l'addition et la multiplication connues sur $[0, +\infty[$ avec les conventions suivantes :

1. $\forall x \in [0, +\infty[\,, x < +\infty$.
2. $\forall x \in [0, +\infty]\,, x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.
3. $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.
4. $\forall x \in [0, +\infty] \setminus \{0\}\,, x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty$.

☐ Toute partie X de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure (plus petit des majorants) notée $\sup X$.

— Cas où X est une partie non vide et majorée :

$$\sup X \text{ est égale à la borne supérieure de } X \text{ vue comme partie de } \mathbb{R}.$$

— Cas où X est la partie vide ou où X est une partie non majorée :

$$\sup X = \begin{cases} 0 & \text{si } X = \emptyset \\ +\infty & \text{si } X \text{ est non vide et non majorée} \end{cases}$$

2 Somme d'une famille de réels positifs

Soit I un ensemble quelconque.

On appelle somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, et on note $\sum_{i\in I} u_i$, la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i \,|\, F \text{ partie finie de } I\right\}$$

<u>Remarques</u>

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.

- Dans le cas où I est fini, la somme $\sum_{i\in I} u_i$ coïncide avec la notion de somme finie usuelle connue.
- Dans le cas où $I=\mathbb{N}$, la somme $\sum_{i\in I} u_i$ coïncide avec la notion de somme de la série $\sum u_n$:
  - dans le cas où la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ converge ;
  - dans le cas où la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge avec la convention $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

- <u>Invariance de la somme par permutation</u>

  Si σ est une permutation de I (i.e. une bijection de I sur I) alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

3 Sommabilité d'une famille de réels positifs

Soit I un intervalle quelconque.

3.1 Définition

La famille de **réels positifs** $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si sa somme vérifie $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

3.2 Propriété

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles **de réels positifs** tel que, pour tout i de I, $0\leq a_i\leq b_i$ et si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est sommable alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$.

4 Opérations

Soit I un intervalle quelconque.

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles de **réels positifs** et α **un réel positif** alors

$$\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i = \sum_{i\in I}(u_i+v_i) \qquad \text{et} \qquad \alpha\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I}\alpha u_i.$$

Remarque

Les conventions de calcul imposées dans $[0,+\infty]$ donnent du sens à ces égalités y compris dans le cas où l'une des familles de réels positifs écrites n'est pas sommable.

5 Théorème de sommation par paquets positif (ADMIS)

Soit I et J deux ensembles quelconques.

Si l'ensemble I est la réunion disjointe des ensembles I_j lorsque j décrit J et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de **réels positifs** alors la somme de cette famille vérifie

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Remarque

Les conventions de calcul imposées dans $[0,+\infty]$ donnent du sens à cette égalité y compris dans le cas où l'une des familles de réels positifs écrites n'est pas sommable.

6 Théorème de Fubini positif

Soit J et K des ensembles quelconques.

Si $(a_{j,k})_{(j,k)\in J\times K}$ est une famille de réels positifs alors la somme de cette famille vérifie

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} a_{j,k} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{k\in K} a_{j,k}\right) = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J} a_{j,k}\right).$$

Remarques

- Les conventions de calcul imposées dans $[0,+\infty]$ donnent du sens à ces égalités y compris dans le cas où l'une des familles de réels positifs écrites n'est pas sommable.
- Ce théorème est une conséquence du théorème de sommation par paquets vu ci-dessus pour les familles de réels positifs. Il résulte de l'écriture de l'ensemble $I = J\times K$ comme réunion disjointe :
  - des ensembles $A_j = \{(j,k)\,|\,k\in K\}$ lorsque j décrit J d'une part ;
  - des ensembles $B_k = \{(j,k)\,|\,j\in J\}$ lorsque k décrit K d'autre part.
- Dans le cas où J et K sont finis, on retrouve un résultat vu dans le chapitre "Sommes et produits finis" pour les sommes doubles rectangulaires.

II Familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$

Soit I un ensemble quelconque.

1 Généralités

1.1 Sommabilité

La famille $(u_i)_{i\in I}$ **d'éléments de** $\mathbb{K}$ est dite sommable si la famille de **réels positifs** $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est, autrement dit si la somme $\displaystyle\sum_{i\in I}|u_i|$ vérifie

$$\sum_{i\in I}|u_i|<+\infty.$$

On note $l^1(I,\mathbb{K})$ ou plus simplement $l^1(I)$ l'ensemble des familles $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de I sommables.

Remarque
Une sous-famille d'une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ sommable est sommable.

1.2 Somme d'une famille sommable

— Si $(u_i)_{i\in I}$ est une **famille de réels sommable**, sa somme est définie par :

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_i^+-\sum_{i\in I}u_i^-$$

où $u_i^+=\frac{1}{2}\left(|u_i|+u_i\right)$ et $u_i^-=\frac{1}{2}\left(|u_i|-u_i\right)$

— si $(u_i)_{i\in I}$ est une **famille de complexes sommable**, sa somme est définie par :

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}\text{Re }u_i+i\sum_{i\in I}\text{Im }u_i.$$

Remarques

— Ces définitions ont du sens puisque que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de réels (resp. complexes) **sommable** alors, d'après I. 3. 2., les familles de réels positifs $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ (resp. de réels $(\text{Re }u_i)_{i\in I}$ et $(\text{Im }u_i)_{i\in I}$) sont **sommables** puisque, pour tout i de I, on a :

$$0\leq u_i^+\leq|u_i|\ \text{ et } 0\leq u_i^-\leq|u_i|$$

$$(\text{resp. } 0\leq|\text{Re }u_i|\leq|u_i|\ \text{ et } 0\leq|\text{Im }u_i|\leq|u_i|).$$

— Approximation de la somme d'une famille sommable par une somme finie
Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ **sommable** et si $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que

$$\left|\sum_{i\in I}u_i-\sum_{i\in F}u_i\right|\leqslant\varepsilon.$$

— Conservation de la sommabilité et invariance de la somme par permutation.
Si σ est une permutation de I et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ **sommable** alors la famille $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est **sommable**

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_{\sigma(i)}.$$

2 Cas particulier important des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$

Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ est **sommable** si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ **converge absolument**.

Dans ce cas,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

3 Théorème de majoration

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et (v_i) une famille **sommable de réels positifs** tel que, pour tout $i \in I, |u_i| \leqslant v_i$ alors la la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable**.

4 Linéarité de la somme

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}$ et (α, β) un couple d'éléments de $\mathbb{K}$.

Si les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont **sommables** alors la famille $(\alpha u_i + \beta v_i)_{i\in I}$ est **sommable**, de somme :

$$\sum_{i\in I} (\alpha u_i + \beta v_i) = \alpha \sum_{i\in I} u_i + \beta \sum_{i\in I} v_i$$

5 Théorème de sommation par paquets (ADMIS)

Si l'ensemble I est la réunion disjointe des ensembles I_j lorsque j décrit J et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'**éléments de $\mathbb{K}$ sommable** alors la somme de cette famille vérifie

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right).$$

6 Théorème de Fubini

Soit J et K des ensembles quelconques.

Si $(a_{j,k})_{(j,k)\in J\times K}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ **sommable** alors la somme de cette famille vérifie

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} a_{j,k} = \sum_{j\in J} \left(\sum_{k\in K} a_{j,k} \right) = \sum_{k\in K} \left(\sum_{j\in J} a_{j,k} \right).$$

7 Cas particulier

Si $(b_j)_{j\in J}$ et $(c_k)_{k\in K}$ sont **sommables** alors $(b_j c_k)_{(j,k)\in J\times K}$ est **sommable** et

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} b_j c_k = \sum_{j\in J} b_j \times \sum_{k\in K} c_k.$$

Remarque
C'est une application du théorème de Fubini avec la famille $(a_{j,k})_{(j,k)\in J\times K}$ où $a_{j,k} = b_j c_k$.

8 Produit de Cauchy

Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **d'éléments de** $\mathbb{K}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$w_p = \sum_{m+n=p} u_m v_n.$$

Si les séries $\sum u_m$ et $\sum v_n$ **convergent absolument** alors la série $\sum w_p$ **converge absolument** avec

$$\sum_{p=0}^{+\infty} w_p = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

La série $\sum w_p$ est dite série série produit de Cauchy des séries $\sum u_m$ et $\sum v_n$.

Remarque

Ceci est une conséquence du résultat vu au II. 7. appliqué à la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ où $a_{m,n} = u_m v_n$ et du théorème de sommation par paquets vu au II. 5. appliqué avec la partition $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $I = \mathbb{N}^2$ définie par $I_p = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 / m+n = p\}$.

CHAPITRE 39

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles (vision géométrique, calculs de dérivées partielles et "règle de la chaîne" essentiellement). Ce chapitre sera entièrement repris en MPI dans un cadre plus général ; le point de vue du cours de MP2I est donc essentiellement pratique sans extension ou développement théorique.

I Ouverts et boules de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^2$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel noté $<\,,\,>$ et de la norme associée notée $\|\,.\,\|$.

1 Boules pour la norme euclidienne

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle boule ouverte de centre $a = (x_0, y_0)$ et de rayon r pour la norme $\|\,.\,\|$, l'ensemble $\mathcal{B}(a, r)$ défini par :

$$\mathcal{B}(a,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < r\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r\right\}.$$

2 Ouverts pour la norme euclidienne

Soit $\mathcal{O}$ une partie de $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{O}$ est dit ouvert de $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne) si tout point de $\mathcal{O}$ est centre d'une boule ouverte (pour la norme euclidienne) incluse dans $\mathcal{O}$:

$$\forall a \in \mathcal{O}, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a,r) \subset \mathcal{O}.$$

3 Continuité des fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles

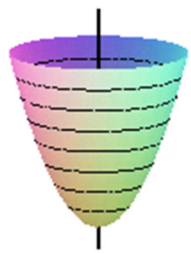
3.1 Représentation graphique

A toute fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ définie sur une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut être associé l'ensemble de points de $\mathbb{R}^3$

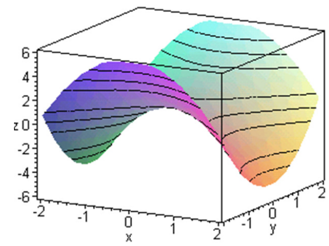
$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{U}\}$$

dit surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$ permettant ainsi de représenter graphiquement f.

Exemple avec $f(x, y) = x^2 + y^2$



Exemple avec $f(x, y) = -\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}y^2$



3.2 Continuité sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{O}$.

f est dite continue sur l'ouvert $\mathcal{O}$ si f est continue en tout (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$ ce qui se traduit par :

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{O}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathcal{O}, \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{=\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \leq \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon.$$

<u>Remarque</u>
Cette définition étend la notion de continuité vue pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ; la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ remplace ici la valeur absolue, norme usuelle sur $\mathbb{R}$.

3.3 Propriétés

1. La combinaison linéaire de fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue.

2. Le produit de fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continu.

3. L'inverse d'une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ est continue.

4. La composée, à gauche ou à droite, d'une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par une fonction continue est continue. Plus précisément :
   — Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est continue sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ et si $g : \mathcal{O}' \to \mathbb{R}^2$ est continue sur un ouvert $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}^2$ avec $g(\mathcal{O}') \subset \mathcal{O}$ alors $f \circ g$ est continue sur $\mathcal{O}'$.
   — Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est continue sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ et si $h : \mathcal{O}' \to \mathbb{R}$ est continue sur un ouvert $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}$ avec $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}'$ alors $h \circ f$ est continue sur $\mathcal{O}$.

3.4 Exemples

— Les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$.

— Les quotients de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}^2$ sont continues sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ où leur dénominateur ne s'annule pas.

II Dérivées partielles d'ordre 1

1 Dérivées partielles d'ordre 1

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ et $a = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{O}$.

1.1 Dérivées partielles en un point

☐ On dit f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en (x_0, y_0) par rapport à la première place si la fonction $f_1 : t \mapsto f(t, y_0)$ est dérivable en x_0.

Dans ce cas, la dérivée obtenue est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0) = \lim_{t \to x_0} \frac{f(t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + x_0, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

☐ On dit f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en (x_0, y_0) par rapport à la seconde place si la fonction $f_2 : t \mapsto f(x_0, t)$ est dérivable en y_0.

Dans ce cas, la dérivée obtenue est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0) = \lim_{t \to y_0} \frac{f(x_0, t) - f(x_0, y_0)}{t - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, h + y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

<u>Remarque</u>
Pour $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, les fonctions $f_1 : t \mapsto f(t, y_0)$ et $f_2 : t \mapsto f(x_0, t)$ sont respectivement appelées première fonction partielle et seconde fonction partielle de f en (x_0, y_0).

1.2 Dérivées partielles sur un ouvert

Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en tout (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$ par rapport :

— à la première place alors la fonction $(x_0, y_0) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ définie sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est appelée première fonction dérivée partielle d'ordre 1 et notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$;

— à la seconde place alors la fonction $(x_0, y_0) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ définie sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est appelée seconde fonction dérivée partielle d'ordre 1 et notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2 Existence de dérivées partielles et continuité

Contrairement aux cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles pour lesquelles la dérivabilité implique la continuité, l'existence de dérivées partielles d'ordre 1 pour une fonction de deux variables réelles réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ n'implique pas sa continuité.

<u>Exemple</u>
La fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 en 0 mais n'est pas continue en $(0, 0)$ car la suite $\left((\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right)_{n \geq 1}$ tend vers $(0, 0)$ alors que la suite $\left(g(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right)$ ne tend pas vers $g(0, 0)$.

3 Classe $\mathcal{C}^1$

3.1 Définition

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$ si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur $\mathcal{O}$.

3.2 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$

1. La combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. L'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. La composée, à gauche ou à droite, d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$. (preuve avec la règle de la chaîne vue au II).

3.3 Exemples

— Les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$.

— Les quotients de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ où leur dénominateur ne s'annule pas.

3.4 Développement limité (preuve hors programme)

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$ alors,

pour tout (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$ et pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h, y_0+k) \in \mathcal{O}$, on a :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k + o(\|(h,k)\|)$$

avec

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(\|(h,k)\|)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Remarques

— Pour tout $(x_0,y_0) \in \mathcal{O}$, le caractère "ouvert" de $\mathcal{O}$ assure la possibilité de trouver une boule ouverte centrée en (x_0,y_0) incluse dans $\mathcal{O}$ donc de trouver des $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h, y_0+k) \in \mathcal{O}$.

— Ce développement limité de f en (x_0,y_0) donne une approximation locale en (x_0,y_0) de la fonction $(h,k) \mapsto f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ par l'application linéaire

$$(h,k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k$$

Cela préfigure la notion de différentielle de f en (x_0,y_0) qui sera vue en MPI.

— Si on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle, le plan d'équation cartésienne

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est dit plan tangent à la surface S d'équation $z = f(x, y)$ au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

4 Continuité et classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ alors f est continue sur $\mathcal{O}$.

5 Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

5.1 Définition par les coordonnées

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de $\mathcal{O}$.

On appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur de $\mathbb{R}^2$ noté $\nabla f(x_0, y_0)$ défini par

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

dans la base usuelle de $\mathbb{R}^2$.

5.2 Propriété

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$ et (x_0, y_0) est un point de $\mathcal{O}$ alors

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, < \nabla f(x_0, y_0), (h, k) >= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k$$

où $< , >$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Remarques</u>

— Cela résulte du fait que la base usuelle de $\mathbb{R}^2$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel.

— Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$, le développement limité de f en tout (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$ à l'ordre 1 peut donc s'écrire sous la forme

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), (h, k) > + o(\|(h, k)\|).$$

Lorsque $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, le vecteur gradient donne la direction dans laquelle f croît le plus vite.

III Règle de la chaîne

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

1 Dérivée selon un vecteur

□ On dit que la fonction f est dérivable en $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ selon le vecteur $u = (h, k)$ de $\mathbb{R}^2$ si la fonction $t \mapsto f((x_0, y_0) + t(h, k))$ est dérivable en 0. On note alors

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f((x_0, y_0) + t(h, k)) - f(x_0, y_0) \right)$$

et on dit que $D_u f(x_0, y_0)$ est la dérivée de f en (x_0, y_0) selon le vecteur u.

Remarque
Lorsqu'elles existent, les dérivées partielles premières de f en (x_0, y_0) sont donc les dérivées de f en (x_0, y_0) selon les deux vecteurs e_1 et e_2 de la base usuelle de $\mathbb{R}^2$.

□ Si f admet des dérivées en tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ selon le vecteur $u = (h, k)$ de $\mathbb{R}^2$ alors la fonction $(x_0, y_0) \mapsto D_u f(x_0, y_0)$ définie sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est appelée fonction dérivée de f selon le vecteur u et notée $D_u f$. On a, en particulier :

$$D_{e_1} f = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad D_{e_2} f = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

2 Expression des dérivées directionnelles avec le gradient

Si f est une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de $\mathcal{O}$ alors f admet des dérivées en (x_0, y_0) selon tout vecteur $u = (h, k)$ de $\mathbb{R}^2$ données par :

$$D_u f(x_0, y_0) = < \nabla f(x_0, y_0), u >$$

3 Règle de la chaîne

3.1 Théorème

Soit x et y des fonctions de I (intervalle non vide, non réduit à un point, de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}.$$

Si x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$ alors la fonction

$$\psi : t \mapsto f\left(x(t), y(t)\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est :

$$\psi' : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) y'(t).$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) y'(t).$$

3.2 Interprétation géométrique de la règle de la chaîne

Avec les hypothèses et notations du II. 3. 1., en notant $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2$ la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie par

$$\forall t \in I, \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

la dérivée de la fonction $f \circ \gamma$ peut s'écrire :

$$\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = < \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) > .$$

On parle alors de dérivée de f le long de l'arc paramétré donné par $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$.

3.3 Application géométrique de la règle de la chaîne

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ avec $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ et $f(x_0, y_0) = k$ alors $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la courbe

$$C_k = \{(x, y) \in \mathcal{O} \,|\, f(x, y) = k\}$$

appelée ligne de niveau de f.

4 Propriété

Soit x et y des fonctions de $\mathcal{O}'$ (ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$) dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{O}', (x(u, v), y(u, v)) \in \mathcal{O}.$$

Si x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}'$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ alors l'application

$$g : (u, v) \mapsto f\left(x(u, v), y(u, v)\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}'$ et ses dérivées partielles d'ordre 1 sont :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(u, v), y(u, v)\right) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(u, v), y(u, v)\right).$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(u, v), y(u, v)\right) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(u, v), y(u, v)\right).$$

<u>Exemple important du passage en coordonnées polaires</u>

Soit $\mathcal{O}'$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ tel que $\forall (r, \theta) \in \mathcal{O}', (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathcal{O}$.

- Les fonctions $x : (r, \theta) \mapsto r\cos\theta$ et $y : \theta \mapsto r\sin\theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}'$ car leurs dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues.
- Ainsi, si f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ alors $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}'$ avec :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right).$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right).$$

IV Extremums

1 Définitions

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de $\mathcal{U}$.

1. On dit que f admet :
   (a) un maximum local en $a = (x_0, y_0)$ s'il existe $r > 0$ tel que :
   $$\forall (x, y) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{B}(a, r), f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$
   (b) un minimum local en $a = (x_0, y_0)$ s'il existe $r > 0$ tel que :
   $$\forall (x, y) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{B}(a, r), f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$
   (c) un extremum local en $a = (x_0, y_0)$ si f admet un maximum ou un minimum local en a.
2. On dit que f admet :
   (a) un maximum global en $a = (x_0, y_0)$ si : $\forall (x, y) \in \mathcal{U}, f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.
   (b) un minimum global en $a = (x_0, y_0)$ si : $\forall (x, y) \in \mathcal{U}, f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.
   (c) un extremum global en a si f admet un maximum ou un minimum global en a.

2 Condition NECESSAIRE d'existence d'un extremum local

Si f est une fonction définie et de classe de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles qui admet un **extremum local en** $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ alors

$$\nabla f((x_0, y_0)) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Remarques

- Tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ tel que $\nabla f((x_0, y_0)) = 0_{\mathbb{R}^2}$ est dit **point critique** de f.
- La recherche d'éventuel extremum local pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, à valeurs réelles,
  - commence par la détermination des éventuels points critiques de f sur l'ouvert ;
  - se pousuit par l'étude du signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ au voisinage des points critiques (x_0, y_0) :
    - si ce signe est constant sur une boule ouverte centrée en (x_0, y_0) alors il y extremum local ;
    - si ce n'est pas le cas, il n'y a pas d'extremum local.

Le cours de mathématiques de l'année 2022/2023 se termine sur cette 233$^{\text{e}}$ page.

Bon courage pour la suite !