Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie non nulle n.
Si u est un endomorphisme de E et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$' sont deux bases de E alors

$$\det_{\mathcal{B}'}\left(u(\mathcal{B}')\right) = \det_{\mathcal{B}}\left(u(\mathcal{B})\right).$$

Ce scalaire est appelé déterminant de u et noté $\det u$.

Preuve :

On considère l'application $g : E^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in E^n, g\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \det_{\mathcal{B}'}\left(u(x_1), \ldots, u(x_n)\right).$$

Montrons que $g(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}}\left(u(\mathcal{B})\right)$ ce qui donnera le résultat souhaité.

Comme $\det_{\mathcal{B}'}$ est une forme $n-$linéaire alternée sur E et que u est un endomorphisme de E, on vérifie aisément que g est une forme $n-$linéaire alternée sur E.

Par théorème, on a donc :

$$g = g(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}.$$

En particulier :

$$g(\mathcal{B}') = g(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right).$$

Or $g(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}'}\left(u(\mathcal{B})\right)$ (par définition de g) et $\det_{\mathcal{B}'}\left(u(\mathcal{B})\right) = \det_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{B}\right)\det_{\mathcal{B}}\left(u(\mathcal{B})\right)$ (par formule de changement de bases) donc :

$$g(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{B}\right)\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right)\det_{\mathcal{B}}\left(u(\mathcal{B})\right).$$

Comme $\det_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{B}\right)\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right) = \det_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{B}'\right)$ (par formule de changement de bases) et $\det_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{B}'\right) = 1$ (car $\mathcal{B}'$ est une base), on en déduit que :

$$g(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}}\left(u(\mathcal{B})\right)$$

autrement dit

$$\det_{\mathcal{B}'}\left(u(\mathcal{B}')\right) = \det_{\mathcal{B}}\left(u(\mathcal{B})\right).$$

Développement du déterminant d'une matrice carrée suivant une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ notée $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

La formule de calcul du déterminant de A par développement suivant la j^{e} colonne est

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

où A_{ij} est le cofacteur associé au coefficient a_{ij} défini par :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

où M_{ij} est le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant L_i et C_j.

Preuve :

On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes (resp $L_1, \ldots, L_n$ les lignes) de A et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base usuelle de $\mathbb{K}^n$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
Par définition du déterminant de A,on a :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(C_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_j, \ldots, C_n\right).$$

Par linéarité du déterminant d'une matrice par rapport à chacune des ses colonnes, on trouve :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, e_j, \ldots, C_n) \;\; (*)$$

On note

$$A_{ij} = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots C_{j-1}, e_j, C_{j+1}, \ldots, C_n).$$

Comme l'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par -1, en intervertissant successivement les colonnes j et $j+1$, puis $j+1$ et $j+2$ jusqu'aux colonnes $n-1$ et n (ce qui fait $n-j$ interversions), on trouve :

$$A_{ij} = (-1)^{n-j} \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots C_{j-1}, C_{j+1}, C_{j+2}, \ldots, C_n, e_j).$$

On procède de même avec les lignes en intervertissant successivement les lignes i et $i+1$, puis $i+1$ et $i+2$ jusqu'aux lignes $n-1$ et n (ce qui fait $n-i$ interversions) et on trouve :

$$A_{ij} = (-1)^{n-j}(-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & & a_{i-1,n} & \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det B_{ij}$ $(**)$ où B_{ij} est la matrice définie par blocs

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} C_{ij} & 0_{n-1,1} \\ D_{ij} & 1 \end{pmatrix}$$

avec

- C_{ij} matrice extraite de A en otant L_i et C_j
- D_{ij} ligne extraite de L_i en otant sa colonne j.

<u>Montrons que $\det B_{ij} = \det C_{ij}$</u>
(cas particulier d'un résultat général qui sera montré en MPI : le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux)

Pour simplifier, on note B (resp. C) et pas B_{ij} (resp. C_{ij}) avec $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}$.

On sait que

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \dots b_{\sigma(n),n}$$

avec, par définition de B, $b_{\sigma(n),n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(n) \neq n \\ 1 & \text{si } \sigma(n) = n \end{cases}$.
Ainsi :

$$\det B = \sum_{\sigma \in T_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \dots b_{\sigma(n-1),n-1}$$

avec $T_n = \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(n) = n\}$ (i. e. l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ qui laissent n invariant).

$\psi : T_n \to S_{n-1}$ définie par $\forall \sigma \in T_n, \psi(\sigma) = \sigma'$ avec $\sigma \in S_{n-1}$ tel que $\forall i \in [\![1, n-1]\!], \sigma'(i) = \sigma(i)$

- est bijective (de bijection réciproque $\phi : S_{n-1} \to T_n$ définie par $\forall \sigma' \in S_{n-1}, \phi(\sigma') = \sigma$ avec $\sigma \in S_n$ tel que $\forall i \in [\![1, n-1]\!], \sigma(i) = \sigma'(i)$ et $\sigma(n) = n$)
- conserve la signature des permutations i. e. $\forall \sigma \in T_n, \varepsilon(\psi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)$ car, comme σ et $\sigma' = \psi(\sigma)$ coïncident sur $[\![1, n-1]\!]$ et que n est invariant par σ, les permutations σ et $\psi(\sigma)$ peuvent se décomposer en le même produit de transpositions donc ont même signature.

On en déduit, avec le changement d'indice bijectif $\sigma' = \psi(\sigma)$, que

$$\det B = \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') b_{\sigma'(1),1} b_{\sigma'(2),2} \dots b_{\sigma'(n-1),n-1}$$

Vu le lien entre les coefficients de C et ceux de B, on en déduit que

$$\det B = \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') c_{\sigma'(1),1} c_{\sigma'(2),2} \dots c_{\sigma'(n-1),n-1}$$

ce qui donne, par formule théorique du déterminant de C :

$$\det B = \det C.$$

Conclusion : avec les résultats $(*)$ et $(**)$ trouvés, on en déduit que :

$$\det(A) = a_{1j} A_{1j} + \dots + a_{nj} A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

où $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ où $M_{ij} = \det(C_{ij})$ avec C_{ij}, matrice extraite de A en otant L_i et C_j.