Théorème de Heine

Théorème

Toute fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui est **continue sur un segment** de $\mathbb{R}$, y est **uniformément continue**.

Preuve

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

Montrons que f est uniformément continue sur le segment $[a,b]$ en raisonnant par l'absurde.

On suppose que f n'est pas uniformément continue ce qui se traduit par :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists\,(x,y) \in [a,b]^2, |x-y| \leq \delta \text{ et } |f(x)-f(y)| > \varepsilon.$$

Pour cet $\varepsilon > 0$, on peut en déduire, en particulier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\,(x_n,y_n) \in [a,b]^2, |x_n-y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n)-f(y_n)| > \varepsilon.$$

— Comme la suite (x_n) est à valeurs dans le segment $[a,b]$, elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une suite $\left(x_{\phi(n)}\right)$, avec ϕ application strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, qui converge vers $c \in [a,b]$ ce qui implique

$$\left|x_{\phi(n)} - c\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

— Par inégalité triangulaire vérifiée par $|\,.\,|$ (valeur absolue ou module), on a successivement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|y_{\phi(n)} - c\right| \leq \left|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\right| + \left|x_{\phi(n)} - c\right|.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|y_{\phi(n)} - c\right| \leq \frac{1}{\phi(n)} + \left|x_{\phi(n)} - c\right|$$

et enfin, par théorème d'encadrement :

$$\left|y_{\phi(n)} - c\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent, la suite $\left(y_{\phi(n)}\right)$ converge aussi vers $c \in [a,b]$.

— Comme f est continue sur $[a,b]$, elle l'est en c. Par caractérisation séquentielle de la continuité de f en c, on en déduit que les suites $\left(f\left(x_{\phi(n)}\right)\right)$ et $\left(f\left(y_{\phi(n)}\right)\right)$ convergent toutes deux vers $f(c)$ donc que la suite $\left(f\left(x_{\phi(n)}\right) - f\left(y_{\phi(n)}\right)\right)$ converge vers 0. Ainsi, $\left|f\left(x_{\phi(n)}\right) - f\left(y_{\phi(n)}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui est incompatible avec les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|f\left(x_{\phi(n)}\right) - f\left(y_{\phi(n)}\right)\right| > \varepsilon.$$

Conclusion : l'hypothèse initiale est fausse donc f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux

Théorème

Soit f une fonction **continue par morceaux sur le segment** $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier sur le segment $[a,b]$ telle que

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Preuve

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Montrons l'existence de $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier sur le segment $[a,b]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.

□ **Cas particulier où f est continue sur le segment $[a,b]$.**

Dans ce cas, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[a,b]$.

Il existe donc un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \qquad (*)$.

On note n un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leq \delta$ (fixé dans la suite).

On crée alors une subdivision $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ du segment $[a,b]$ en posant, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$.

On considère enfin la fonction φ, en escalier sur le segment $[a,b]$, définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall x \in [a_{i-1}, a_i[, \varphi(x) = f(a_{i-1}) \quad \text{et } \varphi(b) = f(b).$$

<u>Montrons que</u> $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.

Pour tout $t \in [a,b[$, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $t \in [a_{i-1}, a_i[$ donc $|t - a_{i-1}| \leq a_i - a_{i-1} \leq \dfrac{b-a}{n} \leq \delta$.

Par continuité uniforme de f, avec $(*)$, on a : $|f(t) - \varphi(t)| = |f(t) - f(a_{i-1})| \leq \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall t \in [a,b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$$

(car l'inégalité est triviale pour $t = b$).

Comme la fonction $t \mapsto |f(t) - \varphi(t)|$ est par ε sur le segment $[a,b]$, elle admet une borne supérieure qui vérifie $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$ (en cas d'existence, la borne supérieure est le plus petit des majorants).

<u>Conclusion</u> : il existe $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier sur le segment $[a,b]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.

☐ **Cas général où f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.**

On note $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision du segment $[a, b]$ adaptée à la fonction f.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Par définition, la restriction $f_{|]a_{i-1},a_i[}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_{i-1}, a_i]$.

D'après le point précédent, il existe donc une fonction en escalier $\varphi_i : [a_{i-1}, a_i] \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que

$$\forall t \in \,]a_{i-1}, a_i[\, , |f(t) - \varphi_i(t)| \leqslant \varepsilon.$$

On définit alors une fonction en escalier φ sur $[a, b]$ en posant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall t \in \,]a_{i-1}, a_i[\, , \varphi(t) = \varphi_i(t)$$

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \varphi(a_i) = f(a_i)$$

Par construction, cette fonction φ vérifie

$$\forall t \in [a, b] \, , |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$$

et on conclut, comme dans le cas précédent, que $\sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.

Conclusion : il existe $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier sur le segment $[a, b]$ telle que $\sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.

⋆ ⋆ ⋆

Remarque : vocabulaire et notation

Dans ce résultat, la fonction φ dépend du réel $\varepsilon > 0$ fixé.

Si on applique ce résultat avec $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit l'existence d'une suite de fonctions (φ_n) en escalier sur le segment $[a, b]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Ainsi

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi_n(t)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce que l'on note plus simplement, en anticipant sur ce qui sera vu en MPI,

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et on dit que la suite de fonctions (φ_n) en escalier sur $[a, b]$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$ ou encore que f est limite uniforme de la suite de fonctions (φ_n) en escalier sur $[a, b]$.

Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux

---

Théorème

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une **fonction continue par morceaux** sur $[a,b]$.

Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\|f - \varphi_n\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

autrement dit qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Alors, la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ converge et sa limite est indépendante du choix de la suite (φ_n). Cette limite est appelée intégrale de f sur $[a,b]$.

Preuve

$\square$ **Convergence de la suite** $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$

Par hypothèse $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f - \varphi_n\|_\infty \leqslant 1$.

Par inégalité triangulaire sur la norme $\| \,.\, \|_\infty$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \|\varphi_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f - \varphi_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + 1$$

puis, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale sur un segment d'une fonction en escalier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \left|\int_{[a,b]} \varphi_n\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi_n| \leqslant \int_{[a,b]} (\|f\|_\infty + 1)$$

Ainsi, la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet donc une suite extraite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_{\alpha(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. On note $l \in \mathbb{K}$ la limite de cette suite.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant la linéarité, l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale sur un segment d'une fonction en escalier, on trouve successivement

$$\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \varphi_{\alpha(n)} = \int_{[a,b]} (\varphi_n - \varphi_{\alpha(n)})$$

$$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \varphi_{\alpha(n)}\right| \leqslant \int_{[a,b]} \left|\varphi_n - \varphi_{\alpha(n)}\right| \leq \int_{[a,b]} \left\|\varphi_n - \varphi_{\alpha(n)}\right\|_\infty \leq (b-a) \left\|\varphi_n - \varphi_{\alpha(n)}\right\|_\infty$$

avec, par inégalité triangulaire sur la norme,

$$\left\|\varphi_n - \varphi_{\alpha(n)}\right\|_\infty \leq \|\varphi_n - f\|_\infty + \left\|f - \varphi_{\alpha(n)}\right\|_\infty$$

donc
$$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \varphi_{\alpha(n)}\right| \leq (b-a)\left(\|f-\varphi_n\|_\infty + \left\|f-\varphi_{\alpha(n)}\right\|_\infty\right)$$
Comme $(b-a)\left(\|f-\varphi_n\|_\infty + \left\|f-\varphi_{\alpha(n)}\right\|_\infty\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par hypothèse, on obtient par théorème d'encadrement que
$$\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \varphi_{\alpha(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
puis, comme $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_{\alpha(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, que
$$\int_{[a,b]} \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l.$$

Conclusion : la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ converge.

□ **Limite de la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ indépendante du choix de la suite (φ_n).**

On considère ici une autre suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que $\|f-\psi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Avec des arguments du même type que ci-dessus, on a :
$$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \psi_n\right| = \left|\int_{[a,b]} (\varphi_n - \psi_n)\right| \leqslant (b-a)\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \leqslant (b-a)\left(\|f-\varphi_n\|_\infty + \|f-\psi_n\|_\infty\right)$$
puis
$$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \psi_n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
et enfin, puisque les deux suites d'intégrales convergent,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n.$$

Conclusion : la limite de $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ ne dépend pas de la suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui approche uniformément f sur $[a,b]$.