Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite numérique bornée admet une suite extraite convergente.

Preuve

Ce théorème a été démontré en cours dans le cas des suites réelles en utilisant le principe de dichotomie et des suites adjacentes. On le montre ici dans le cas des suites complexes. Vous le verrez en MPI dans les cas des suites à valeurs dans des espaces normés de dimension finie.

Montrons le résultat annoncé dans le cas des suites complexes

Soit (u_n) une suite bornée de $\mathbb{C}$.

Alors $(x_n) = (\text{Re } u_n)$ et $(y_n) = (\text{Im } u_n)$ sont deux suites bornées de $\mathbb{R}$.

On peut donc extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\phi_1(n)})$ notée (a_n).

La suite $(y_{\phi_1(n)})$ notée (b_n) est alors une suite bornée de $\mathbb{R}$ car elle est extraite de la suite bornée (y_n) de $\mathbb{R}$. On peut donc extraire de (b_n) une suite convergente $(b_{\phi_2(n)})$ notée (β_n).

La suite $(a_{\phi_2(n)})$ notée (α_n) est alors convergente puisqu'elle est extraite de la suite convergente (a_n).

On pose enfin $z_n = \alpha_n + i\beta_n$.

Alors (z_n) est une suite extraite de (u_n) qui converge.