Sommabilité des familles de réels ou complexes indexées par $\mathbb{N}$

Caractérisation de la sommabilité des familles de $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$

Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge absolument.

Dans ce cas,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

1ère étape

□ **On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.**

Alors, par définition, la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Ainsi, par définition de la sommabilité pour les familles **de réels positifs**,

— il existe un réel M tel que, pour toute partie finie F incluse dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n\in F} |u_n| \leq M.$$

— on peut définir la somme de la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \sup_{\substack{F\subset\mathbb{N} \\ F \text{ fini}}} \left(\sum_{n\in F} |u_n| \right)$$

— on a, pour toute partie finie F de $\mathbb{N}$,

$$\sum_{n\in F} |u_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

On peut appliquer ce dernier résultat avec $F = [\![0, N]\!]$ où $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n\in[\![0,N]\!]} |u_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} |u_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad (\alpha)$$

On constate donc que la suite des sommes partielles de la séries à termes positifs $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est majorée par $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ donc, par caractérisation, la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge ce qui donne la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

□ **On suppose la convergence absolue de la série** $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Soit F une partie finie de $\mathbb{N}$.

Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F \subset [\![0, N]\!]$.

Ainsi, par positivité des termes des sommes finies suivantes, on trouve :

$$\sum_{n\in F} |u_n| \leq \sum_{n\in[\![0,N]\!]} |u_n|$$

puis, par convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$:

$$\sum_{n\in F} |u_n| \leq \sum_{n\in[\![0,N]\!]} |u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad (\beta)$$

Ainsi, l'ensemble $\left\{\sum_{n\in F} |u_n| \mid F \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\}$ est majoré donc, par définition, la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable donc, par définition, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument.

<u>2ème étape</u>

Dans ce cas,

— par passage à la limite (licite !) quand N tend vers $+\infty$ dans (α), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

— par caractérisation de la borne supérieure comme plus petit des majorants, on obtient avec (β) :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Conclusion : en cas de sommabilité de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

3ème étape

Il reste à démontrer qu'en cas de sommabilité, on a aussi :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

On remarque d'abord que ceci a du sens, vu la définition de la sommabilité d'une famille et le fait que la convergence absolue d'une série numérique implique la convergence.

— Si les u_n sont positifs, c'est immédiat avec ce qui précède.

— Si les u_n sont réels, on conclut avec les définitions de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ utilisant les réels positifs u_n^+ et u_n^-.

— Si les u_n sont complexes, on conclut avec les définitions de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ utilisant les réels $\mathrm{Re}\, u_n$ et $\mathrm{Im}\, u_n$.

Conclusion : en cas de sommabilité de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Sommabilité des familles de réels ou complexes indexées par $\mathbb{N}^2$

□ Cas des familles de réels positifs indexées par $\mathbb{N}^2$

Une famille **de réels positifs** $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réunies :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{m\geq 0} a_{m,n}$ converge.

— La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge.

Dans ce cas,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

Preuve

On rappelle d'abord le **théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs** indexées par un ensemble dénombrable I :

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réunies :

— (α) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

— (β) la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \qquad (\gamma)$$

Et on se place dans le cas particulier qui nous intéresse ici :

— $I = \mathbb{N}^2$
— $\forall i \in I, u_i = a_i$.
— $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partition de $I = \mathbb{N}^2$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \{i = (m,n) \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Alors,

— (α) : La famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est en fait la famille $(a_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$.

Comme c'est une famille **indexée par** $\mathbb{N}$, sa sommabilité est équivalente à la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{m\geq 0} a_{m,n}$ donc, ici à la convergence de la série $\displaystyle\sum_{m\geq 0} a_{m,n}$ (par positivité) avec, en cas de sommabilité, $\sum_{i \in I_n} u_i = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}$.

— (β) : La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ est donc la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$.

— (γ) : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ devient alors $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$.

Résumé

La famille **de réels positifs** $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m \geq 0} a_{m,n}$ converge et la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$ converge avec, dans ce cas,

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

En cas de sommabilité de cette famille, on a même :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

en utilisant $(J_m)_{m \in \mathbb{N}}$ partition de $I = \mathbb{N}^2$ définie par :

$$\forall m \in \mathbb{N}, J_m = \{ i = (m,n) \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Remarque

Ce théorème, qui permet l'interversion des sommes, s'appelle aussi **théorème de Fubini (version termes positifs).**

☐ Cas des familles de réels ou complexes indexées par $\mathbb{N}^2$

Si la famille de réels ou complexes $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable alors

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$$

Preuve

Si la famille de réels ou complexes $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable alors, par théorème de sommation par paquets,

— utilisé avec la partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ déjà utilisée dans la preuve précédente, on obtient :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

— utilisé avec la partition $(J_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ déjà utilisée dans la preuve précédente, on obtient :

—

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j\in J_m} a_j\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

Ce qui donne les résultats attendus.

Remarque

Ce théorème, qui permet l'interversion des sommes, s'appelle aussi **théorème de Fubini (version termes non positifs).**

Produit de Cauchy

Si les séries numériques $\sum u_m$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors leur série produit de Cauchy $\sum w_k$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, w_k = \sum_{m+n=k} u_m v_n$$

converge absolument et, de plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Preuve avec les familles sommables

Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$ telles que les séries $\sum u_m$ et $\sum v_n$ convergent absolument.

On pose $a_{m,n} = u_m v_n$ ce qui donne une famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}^2$.

□ **Montrons la sommabilité de la famille** $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Par définition, la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si la famille $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ l'est.

On va montrer que cette dernière l'est en utilisant le théorème de caractérisation de sommabilité des familles de réels positifs indexées par $\mathbb{N}^2$ (<u>théorème de Fubini, version termes positifs</u>).

— Pour n fixé dans $\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{m\geq 0} |a_{m,n}| = \sum_{m\geq 0} |u_m|\,|v_n| = |v_n| \left(\sum_{m\geq 0} |u_m|\right)$ avec $|v_n|$ constante (indépendante de m) et $\displaystyle\sum_{m\geq 0} |u_m|$ convergente par hypothèse.

Ainsi, par opérations algébriques sur les séries convergentes, la série $\displaystyle\sum_{m\geq 0} |a_{m,n}|$ converge avec :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}| = |v_n| \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_m|\right) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_m|\right) |v_n|\,.$$

— La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ est alors convergente car $\displaystyle\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_m|\right)$ est une constante (indépendante de n) et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |v_n|$ converge par hypothèse.

Le théorème cité ci-dessus permet donc de conclure que la famille $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

On en déduit la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

□ **1er calcul de la somme de la famille** $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$**.**

Comme $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable indexée par $\mathbb{N}^2$, on peut lui appliquer le <u>théorème de Fubini</u>

(version termes non positifs) et en déduire que :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$$

ce qui donne ici, en utilisant les propriétés des séries numériques absolument convergentes donc convergentes que :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(v_n\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\right) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

☐ **2ème calcul de la somme de la famille** $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$**.**

Comme $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable indexée par un ensemble dénombrable, on peut lui appliquer plus généralement le théorème de sommation par paquets (version termes non positifs) avec la partition de l'ensemble dénombrable des indices suivante :

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \text{ avec } I_k = \left\{(m,n)\in\mathbb{N}^2, m+n=k\right\}.$$

On en déduit que :

- pour tout $k\in\mathbb{N}$, la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in I_k}$ est sommable.
- la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{(m,n)\in I_k} |a_{m,n}|\right)$ converge.
- la somme de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ vérifie :
$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in I_k} a_{m,n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m+n=k} u_m v_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k.$$

En comparant les résultats des deux dernières étapes de la preuve, on a donc :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

De plus, on a :

$$\forall k\in\mathbb{N}, |w_k| \leq \sum_{m+n=k} |u_m v_n| \leq \sum_{(m,n)\in I_k} |a_{m,n}| \text{ (ce sont des sommes finies)}$$

la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{(m,n)\in I_k} |a_{m,n}|\right)$ implique donc la convergence de $\sum |w_k|$ donc la convergence absolue de $\sum w_k$.

Conclusion

Si les séries numériques $\sum u_m$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy $\sum w_k$ défini par

$$\forall k \in \mathbb{N}, w_k = \sum_{m+n=k} u_m v_n$$

converge absolument et, de plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$