Notas para un curso de Analisis Funcional

Autores:

Kevin Cárdenas

Asesor:

Aleksei Rodinov

2023

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia

Índice

1. Espacios Métricos

1.1. Espacio Métrico y Métrica.

Un espacio métrico es una estructura matemática que combina un conjunto con una función métrica, que es una función que asigna una medida de distancia entre dos elementos del conjunto. Tienen ciertas propiedades, como la posibilidad de calcular la distancia entre dos elementos, la no negatividad de la distancia y la igualdad de la distancia si y solo si los elementos son iguales. Se utilizan en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo la topología, la teoría de grafos, la geometría y la inteligencia artificial.

Definición 1.1. Espacio metrico y metrica
Un espacio métrico es un par $(\mathbf{X}, d)$ donde $\mathbf{X}$ es un conjunto, no vacío y $d : \mathbf{X}^2 \to \mathbb{R}^+$ es una métrica. Es decir que, $\forall x, y, z \in \mathbf{X}$, d es tal que

- `(M1)` `(Definida Positiva:)` $d(x, y) \geq 0$
- `(M2)` $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$
- `(M3)` `(Simétrica:)` $d(x, y) = d(y, x)$
- `(M4)` `(Desigualdad triangular:)` $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$

De (M4) obtenemos de manera inductiva que:

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$$

También tiene sentido la definición de **Subespacio**: $(\mathbf{Y}, \overline{d})$ es subespacio de $(\mathbf{X}, d)$ si tenemos que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ y $d = d|_{\mathbf{Y}^2}$, $\overline{d}$ es llamada métrica inducida en $\mathbf{Y}$ por d.

Definición 1.2. Isometría
una biyección $F : (V, d_V) \to (W, d_W)$ es llamada isometría si:

$$\forall x, y \in V (d_v(x, y) = d_W(F(x), F(y))$$

Vemos que esta definición induce una relación de equivalencia,

$$(V, d_v) \equiv (W, d_w) \leftrightarrow \exists F : (V, d_V) \to (W, d_W) \text{ isometría}$$

A la cual llamaremos relación de isometría, y en este caso diremos que (V, d_V) y (W, d_W) son espacios isometricos.

Para ilustrar el concepto de un espacio métrico y el proceso de verificar los axiomas de una métrica, en particular la desigualdad triangular (M4), presentamos tres ejemplos más. El último ejemplo (espacio L^p) es el más importante de ellos en aplicaciones.

Veremos que esta puede ser una base de una topología inducida en el espacio métrico $(\mathbf{X}, d)$, por esto introducimos esta noción.

Podemos presentar un par de ejemplos de espacios metricos y metricas a continuación:

1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.3. Defina d sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $d(x, y) = |x - y|$. d Es una métrica sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4. **Metrica discreta** Sea V cualquier conjunto, defina la función d como sigue:

$$d(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = g \\ 1 & \text{si } f \neq g3 \end{cases} \tag{1}$$

Claramente d satisface los axiomas de distancia por lo tanto es un métrica.

Ejemplo 1.5. **Metrica uniforme en** $\mathbb{R}^n$ Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, defina sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y$
$max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$. d es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$.

Demostración. 1. Sea $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $|x_i - x_i| = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, así que $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$.

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $d(x, y) = 0$, entonces el valor máximo entre los $|x_i - y_i| = 0$ por lo tanto para todo i, $|x_i - y_i| = 0$, lo cual quiere decir que $x = y$.

3. Como $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para todo $i = 1, \ldots, n$ entonces $d(x, y) = d(y, x)$.

4. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $d(x, y) = |x_i - y_i|, d(x, z) = |x_k - z_k|, d(z, y) = |z_j - y_j|$. Por la desigualdad triangular se tiene que $|x_i - y_i| = |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego como $|x_i - z_i| \leq d(x, z)$ y $|z_i - y_i| \leq d(z, y)$, entonces $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

□

Ejemplo 1.6. **Metrica uniforme en** $C[0, 1]$ Defina d sobre $C[0, 1] \times C[0, 1]$ por $d(f, g) = sup\{|f(t) - g(t)| \; t \in [0, 1]\}$ **Espacio de sucesiones** $\mathbf{Ł}^\infty$ Sea $\mathbf{X}$ el conjunto de sucesiones de números complejos acotadas.

Definimos $d : \mathbf{X}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, como, $d(x,y) = sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j - y_j|$, donde $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$

Ejemplo 1.7. Espacio de funciones continuas sobre un intervalo cerrado $\mathcal{C}[a,b]$ Sea $\mathbf{X}$ el conjunto de continuas sobre el intervalo $[a,b]$, $\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ Definimos $d : \mathbf{X}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, como, $d(x,y) = max_{t\in\mathbb{R}}|x(t) - y(t)|$, donde $x, y \in \mathcal{C}[a,b]$

Ejemplo 1.8. El espacio de sucesiones s Este espacio consiste en el conjunto de todas las sucesiones (acotadas o no acotadas) de números complejos y la métrica d definida por

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

donde $x = (x_i)$ y $y = (y_i)$.

Demostración. Los axiomas (M1) a (M3) se cumplen, como se puede ver fácilmente.

Verifiquemos (M4). Para ello, utilizamos la función auxiliar f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(t) = \frac{t}{1+t}$$

Derivando la función obtenemos $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, que es positiva. Por lo tanto, f es monótona creciente.

En consecuencia, $|a+b| \leq |a| + |b|$ implica que $f(|a+b|) \leq f(|a| + |b|)$

Al escribir esto y aplicar la desigualdad triangular para números, tenemos.

$$\begin{aligned}
\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\
&= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\
&\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}
\end{aligned}$$

En esta desigualdad tome a $a = x_i - y_i$ y $b = y_i - z_i$ donde $z = (z_i)$. Entonces $a + b = x_i - z_i$ y tenemos

$$\frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} \leq \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1 + |y_i - z_i|}$$

Si multiplicamos por $\frac{1}{2^j}$ y sumamos, como las series convergen, obtenemos que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ Y todo perfecto, tenemos una métrica para s

□

Ejemplo 1.9. El espacio $\mathcal{B}(A)$ de funciones acotadas Por definición, cada elemento x en B(A) es una función definida y acotada en un conjunto dado A que llega a $\mathbb{R}$, y la métrica se define mediante

$$d(x,y) = sup_{t\in A}|x(t) - y(t)|$$

donde sup denota el supremo

Demostración. $\mathcal{B}(A)$ es un espacio métrico. Claramente, (M1) y (M3) se cumplen. Además, $d(x,x) = 0$ es obvio. Recíprocamente, $d(x,y) = 0$ implica que $x(t) - y(t) = 0$ para todo $t \in A$, por lo que $x = y$. Esto nos da (M2). Además, para cada $t \in A$ tenemos que

$$\begin{aligned}|x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq sup_{t\in A}|x(t) - z(t)| + sup_{t\in A}|z(t) - y(t)|\end{aligned}$$

Esto muestra que $|x - y|$ está acotado en A. Como la cota dada por la expresión en la segunda línea no depende de t, podemos tomar el supremo a la izquierda y obtener (M4). $\square$

Ejemplo 1.10. El espacio l^p, el espacio de secuencias de Hilbert l^2, las desigualdades de Holder y Minkowski para sumas

Lema 1.11. ***La desigualdad de Young***

para cualesquiera números reales no negativos a, b y para cualesquiera números reales $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 1.12. ***La desigualdad de Holder para sumas***

Sean $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales o complejos y sean p y q números reales tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

donde $|a_k|$ y $|b_k|$ denotan los valores absolutos de los términos a_k y b_k, respectivamente.

Demostración. Consideremos dos secuencias de números reales (a_n) y (b_n) y supongamos que p y q son dos exponentes tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (es decir, p y q son conjugados). Entonces, por la desigualdad de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

para cualquier par de números $a, b \geq 0$. Si tomamos $a = |a_n|/|a|_p$ y $b = |b_n|/|b|_q$, obtenemos:

$$\frac{|a_n b_n|}{|a|_p |b|_q} \leq \frac{|a_n|^p}{p|a|_p^p} + \frac{|b_n|^q}{q|b|_q^q}$$

Sumando esta desigualdad sobre n y utilizando la linealidad de la suma, obtenemos:

$$\frac{\sum_n |a_n b_n|}{|a|_p |b| q} \leq \frac{1}{p}\left(\sum n \frac{|a_n|^p}{|a|p^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q}\left(\sum n \frac{|b_n|^q}{|b|_q^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Lo cual es precisamente la desigualdad de Holder para sumas. $\square$

Teorema 1.13. ***desigualdad de minkowski***

Sea $p \geq 1$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Demostración. Para demostrar esta desigualdad, primero notamos que podemos suponer que $x_i \geq 0$ y $y_i \geq 0$, de lo contrario podemos considerar $|x_i|$ y $|y_i|$. Luego, elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p/2}|y_i|^{p/2}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)$$

donde hemos usado la identidad algebraica $2ab \leq a^p + b^p$ para todo $a, b \geq 0$, y $p \geq 1$. Luego, usando la desigualdad de Hölder para la suma en el medio, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p/2}|y_i|^{p/2}\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p/2}|y_i|^{p/2}\right)^{1/2}$$

Finalmente, elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad y simplificando términos, llegamos a la desigualdad de Minkowski deseada. □

Sea $p \geq 1$ un número real fijo. Por definición, cada elemento en el espacio L^p es una sucesión $x = (x_i)$ de numeros tales que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ converge. Definimos la metrica como

$$d(x,y) = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

donde $x = (x_i), y = (y_i) \in L^p$

Demostración. Para demostrar que l^p es un espacio métrico, necesitamos verificar que se satisfacen los axiomas de una métrica, es decir, (M1), (M2), (M3) y (M4).

Sea $x, y \in L^p$, y sea $d(x,y) = (\sum |x_i - y_i|^p dx)^{1/p}$ la métrica definida en l^p.

(M1),(M2) La métrica es no negativa: $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$. Es claro que $d(x,y) \geq 0$ ya que estamos tomando la raíz p-ésima de una suma de valores no negativos. Además, $d(x,y) = 0$ si y solo si $\sum |x_i - y_i|^p dx = 0$, lo cual implica que $x = y$, ya que $|x_i - y_i|^p = 0$ implica que $|x_i - y_i| = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

(M3) La métrica es simétrica: $d(x,y) = d(y,x)$. Esto es evidente de la definición de la métrica

(M4) la desigualdad triangular en el espacio ℓ^p se puede demostrar utilizando la desigualdad de Minkowski para sumas finitas. Sea $x, y \in \ell^p$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}$$

tomando $a_i = x_i - z_i$ y $b_i = z_i - y_i$

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i - y_i|^p\right)^{1/p} = d(x,z) + d(y,z)$$

$\square$

1.3. La topología de un espacio métrico

En un espacio métrico (X, d), las bolas abiertas, bolas cerradas y esferas son importantes herramientas para definir conjuntos y estudiar la topología de X.

Definición 1.14. Sean $(\mathbf{X}, d)$ un espacio métrico, $a \in \mathbf{X}$, $r \in \mathbb{R}^+$, definimos:

- $\mathcal{B}(a,r) = \{x \in \mathbf{X} : d(x,a) < r\}$, como la bola abierta centrada en a de radio r.
- $\mathcal{B}[a,r] = \{x \in \mathbf{X} : d(x,a) \leq r\}$, como la bola cerrada centrada en a de radio r.
- $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in \mathbf{X} : d(x,a) = r\}$, como la esfera centrada en a de radio r.

En general, las bolas abiertas, bolas cerradas y esferas se utilizan para definir conjuntos en X, y para estudiar la topología de X. Por ejemplo, una base de la topología de un espacio métrico (X, d) está formada por las bolas abiertas de radio $\epsilon > 0$ centradas en cada punto de X. De manera similar, las bolas cerradas se utilizan para definir conjuntos cerrados, y las esferas para estudiar la conectividad de X.

La métrica define una noción de distancia entre los puntos de X, y esta distancia a su vez induce una topología sobre X. La topología de un espacio métrico se define mediante los conjuntos abiertos, que son aquellos que satisfacen la siguiente propiedad: un conjunto $U \subseteq X$ es abierto si para todo $x \in U$, existe un número $\epsilon > 0$ tal que el conjunto $B_\epsilon(x) := y \in X : d(x,y) < \epsilon$ (es decir, la bola abierta de radio ϵ centrada en x) está contenido en U.

Definición 1.15. Topología de un espacio métrico:
$A \subset \mathbf{X}$ es:

- **Abierto**, si $\forall x \in A \exists \epsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(x,\epsilon) \subset A$.
- **Cerrado**, se $A^c = \mathbf{X}/A$ es abierto.
- $\epsilon-$**entorno**. $\mathcal{B}(x,\epsilon)$ es llamado $\epsilon-$entorno de x. Si $A \in \mathbf{X}$ si $\exists \epsilon$ tal que $\mathcal{B}(x,\epsilon) \subseteq A$ entonces A es llamado entorno de x.

Proposición 1.16. *Toda bola abierta $\mathcal{B}(a,r)$ en un espacio metrico $\mathbf{X}$ es un abierto.*

Demostración. Sean $\mathbf{X}$ un espacio métrico, con metrica d, y $\mathcal{B}(a,r) \subseteq \mathbf{X}$ una bola abierta. sea $x \in \mathcal{B}(a,r)$, luego $d(a,x) < r$ entonces existe $c > 0$ tal que $d(a,x) = r - c$, tome $\epsilon = \frac{c}{2}$ entonces $\mathcal{B}(x,\epsilon) \subseteq \mathcal{B}(a,r)$, pues, dado $y \in \mathcal{B}(x,\epsilon)$, $d(x,y) < \epsilon = \frac{c}{2}$. Por lo tanto

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) \leq r - c + \frac{c}{2} < r$$

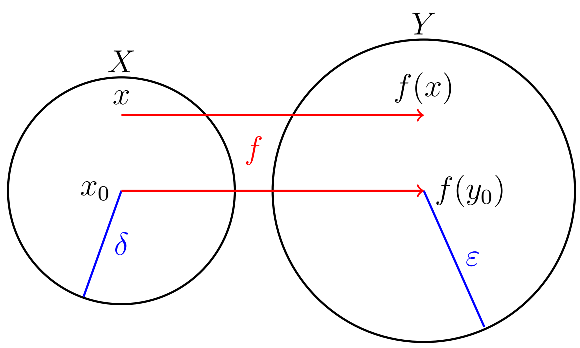
Lo que demuestra que $\mathcal{B}(a,r)$ es un abierto. $\square$

Definición 1.17. Continuidad

Sean (X,d_1), (Y,d_2) espacios métricos, $A \subseteq \mathbf{X}$.

$f : A \longrightarrow Y$ es continua en $x_0 \in A$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $f(\mathcal{B}(x_0,\delta)) \subseteq \mathcal{B}(f(x_0),\epsilon)$

La continuidad también se puede entender en términos de sucesiones. Si f es continua y (x_n) es una sucesión convergente en X con límite x, entonces la sucesión $(f(x_n))$ en Y converge a $f(x)$. En otras palabras, si x_n se acerca a x en X, entonces $f(x_n)$ se acerca a $f(x)$ en Y.



Teorema 1.18. ***Función continua***

Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios métricos (X,d_1), (Y,d_2) es continua si y sólo si la imagen inversa de un abierto en Y es una abierto en X

Demostración. Primero, supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es continua y sea $U \subseteq Y$ un conjunto abierto. Queremos mostrar que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Tomemos un punto $x \in f^{-1}(U)$. Como $f(x) \in U$ y U es un conjunto abierto, existe una bola abierta $B(f(x),\epsilon)$ de radio $\epsilon > 0$ contenida en U. Como f es continua en x, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$ con $d_1(x,y) < \delta$ se tiene que $d_2(f(x),f(y)) < \epsilon$.

Entonces, para todo $y \in B(x,\delta)$ se cumple que $f(y) \in B(f(x),\epsilon) \subseteq U$, es decir, $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$. Por lo tanto, $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X.

Por otro lado, supongamos que para todo conjunto abierto $U \subseteq Y$, se tiene que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X. Queremos demostrar que f es continua en todo punto $x \in X$.
Tomemos un punto $x \in X$ y un número $\epsilon > 0$. Sea $B(f(x), \epsilon)$ la bola abierta de radio ϵ en Y centrada en $f(x)$. Entonces $B(f(x), \epsilon)$ es un conjunto abierto en Y, y por hipótesis, $f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ es un conjunto abierto en X. Como $x \in f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$, existe un $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$.
Entonces, para todo $y \in X$ con $d_1(x, y) < \delta$ se tiene que $f(y) \in B(f(x), \epsilon)$, es decir, $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$. Por lo tanto, f es continua en x.

□

Definición 1.19. Conjunto denso, y espacio separable
Un conjunto A se dice denso en un espacio métrico X si para todo punto $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un punto $a \in A$ tal que $d(x, a) < \epsilon$. Esto es equivalente a decir que $\overline{A} = X$

Un espacio métrico X se dice separable si contiene un conjunto denso numerable, es decir, existe un conjunto $D \subseteq X$ tal que D es numerable y $\overline{D} = X$, donde $\overline{D}$ denota el cierre de D en X.

Ejemplo 1.20. $\mathbb{R}$ **es separable**

Demostración. El conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable y mostremos que es denso.
Sea $x \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera. Entonces, podemos construir una sucesión de números racionales (q_n) tal que $q_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Para hacer esto, construimos la sucesión (q_n) de la siguiente manera. Primero, tomamos q_1 como el número racional más cercano a x por debajo (es decir, $q_1 = \lfloor x \rfloor$ si x es positivo, o $q_1 = \lceil x \rceil$ si x es negativo). Luego, para cada $n > 1$, tomamos q_n como el número racional más cercano a x en el intervalo (q_{n-1}, x) si x es positivo, o en el intervalo (x, q_{n-1}) si x es negativo.

Es fácil ver que (q_n) es una sucesión de números racionales que converge a x. Por lo tanto, todo número real x es el límite de una sucesión de números racionales, lo que demuestra que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, esto demuestra que $\mathbb{R}$ es separable. □

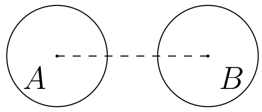
Mostremos un ejemplo de un espacio que no es separable.

Ejemplo 1.21. l^∞ **es no separable**
l^∞ el espacio de las sucesiones acotadas es un espacio no separable.

Demostración. tomemos el conjunto $\ell \subset \ell^{\infty}$ definido por:

$$\ell = \{(c_i) : c_i \in \{0, 1\}\}$$

(c_i) es la representación binaria de x, $\forall x \in [0, 1]$ cada sucesión en ℓ es acotada, y la distancia entre sucesiones de ℓ es 1 o 0



si $D \subset \ell^{\infty}$ es denso en ℓ^{∞}, par cada punto $x \in \ell$ debe haber al menos un punto en $\mathcal{B}(x, 1/3) \cap D$, y $\mathcal{B}(x, 1/3) \cap \mathcal{B}(x, 1/3)$ $\forall x \neq y \in \ell$, por lo tanto no es numerable, y esto implica que l^{∞} es no separable.

□

Ejemplo 1.22. ℓ^p es separable

Demostración. Para probar que el espacio ℓ^p es separable, necesitamos encontrar un subconjunto denso y numerable de ℓ^p. Una posible elección es el conjunto de todas las sucesiones racionales con componentes finitas, es decir,

$$M = \{(q_1, q_2, ...) \in \ell^p :\}$$

Donde solo hay $q_i \in Q$ finitos en cada sucesión, es el conjunto de todas las sucesiones racionales que tienen un número finito de componentes no nulas. M es contable.
Veamos que M es denso:
Sea $x = (x_i) \in l^p$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Para todo x_i existe $q_i \in Q$, por tanto $y = (q_i) \in M$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_i - q_i| < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Vemos que:

$$(d(x, y))^p = \sum_{j=1}^{n} |x_j - q_j| + \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j| < \varepsilon$$

Vemos que $d(x, y) < \varepsilon$ y así M es denso en ℓ^p.

□

1.4. Convergencia, sucesiones de Cauchy, y completitud

Definición 1.23. Limite de una sucesión

Sea (X, d) un espacio métricos y x_i una sucesión en X.

$\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$ si $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0$ tal que si $n > \delta$, entonces $d(x_n, x_0) < \epsilon$.
Si l limite existe, es decir existe $x_o \in X$ tal que $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$, diremos que X_i es una sucesión convergente.

Lema 1.24. ***Acotamiento, limite*** *Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico, entonces:*

- *una sucesión convergente en X es acotada y su limite es unico.*
- *si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$*

Demostración. Para demostrar la primera afirmación, notemos que si x_n es una sucesión convergente, entonces por definición existe un $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. De esta manera, se tiene que $x_{n n\in\mathbb{N}} \cup x$ es un conjunto acotado.

Para demostrar la unicidad del límite, supongamos que $x_n \to x$ y $x_n \to y$ con $x \neq y$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon/2$, y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $d(x_n, y) < \epsilon/2$. Sea $N = \max N_1, N_2$, entonces para $n \geq N$ se tiene que $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \epsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el límite de una sucesión en X es único.

Para demostrar la segunda afirmación, notemos que $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon/3$ y $d(y_n, y) < \epsilon/3$. Además, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $d(x_n, y_n) < \epsilon/3$. Sea $N = \max N_1, N_2$, entonces para $n \geq N$ se tiene que $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) < \epsilon$, lo cual demuestra la afirmación. $\square$

Definición 1.25. Sucesión fundamental (o de Cauchy) y espacios completos

Diremos que X_i es una sucesión fundamental si $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0$ tal que si $n, m > \delta$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.
Un espacio métrico es llamado **completo** si toda sucesión fundamental, en este espacio, es convergente

Como ejemplos de espacios completos, entre muchos otros, tenemos $(\mathbb{R}, d)$ donde d es la métrica euclidiana, $(\mathcal{C}[a, b], d)$, donde d es la métrica uniforme, etc.

Teorema 1.26. $\mathbb{R}$ ***y*** $\mathcal{C}$ ***son completos***

Ejemplo 1.27. $\mathcal{C}[a,b]$ con la métrica uniforme es completo.

Demostración. Para demostrar que $\mathcal{C}[a,b]$ con la métrica uniforme es completo, consideremos una sucesión f_n de Cauchy en $\mathcal{C}[a,b]$. Esto significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que para $m, n > N$ se tiene que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

En particular, esto implica que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ para cada $x \in [a,b]$. Como sabemos que $\mathbb{R}$ es completo, esta sucesión converge a un límite $f(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Es decir, para cada $x \in [a,b]$, existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ahora nuestra tarea es demostrar que $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y que f_n converge a f en la métrica uniforme.

Primero, demostraremos que f es continua en $[a,b]$. Tomemos un punto $x_0 \in [a,b]$ y sea $\epsilon > 0$. Como f_n es de Cauchy en la métrica uniforme, existe un entero N tal que para $m, n > N$ se tiene que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

En particular, esto implica que

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para $m, n > N$. Como $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, existe un entero M tal que

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para $n > M$. Entonces, para $m, n > \max N, M$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f_m(x_0) - f(x_0)| &\le |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \frac{2\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todeo $\epsilon > 0$, concluimos que $f_m(x_0)$ converge a f

Concluimos que $\mathcal{C}[a,b]$ con la métrica uniforme es completo.

$\square$

Ahora podemos mostrar un ejemplo de un espacio que no es completo.

Ejemplo 1.28. $\mathcal{C}[a,b]$ con la métrica integral no es completo.

Demostración. tomemos la sucesión de funciones en $\mathcal{C}[-1,1]$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > \frac{1}{n} \\ \\ nx & si \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \\ -1 & si \quad x < -\frac{1}{n} \end{cases}$$

nos damos cuenta que esta sucesión es fundamental, pues dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta > \frac{1}{6\epsilon}$, entonces si $n > m > \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)| \mathrm{d}t \\ &= 2\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt| \mathrm{d}t + 2\int_{0}^{\frac{1}{n}} |nt - mt| \mathrm{d}t \\ &= 2(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} - m(\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2n^2}) + 2(\frac{1}{2n} - \frac{m}{2n^2}) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Pero también vemos que la sucesión no converge en este espacio, pues si vemos este espacio como subespacio de $\mathcal{C}[a,b] \cup \{sgn\}$ donde

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & si \quad x = 0 \\ \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Vemos que $\{f_n\}$ converge a sgn, pero sgn claramente no es una función continua. Por lo tanto $\mathcal{C}[a,b]$ con la métrica integral no es completo.

□

También podemos "completar" el espacio $\mathcal{C}[a,b]$, considerando el espacio de la partición de $\overbrace{\mathcal{C}[a,b]} = \{f : f : \text{integrable}\}$ con la relación de equivalencea $f \ g \equiv \int_a^b |f(t) - g(t)| = 0$, si $f \ g$ diremos que f y g son funciones casi iguales. Y podemos ver a

$$\mathcal{C}[a,b] \equiv \{[f] : f \in \overbrace{\mathcal{C}[a,b]}, f \in \mathcal{C}[a,b]\}$$

donde $\equiv$ representa la relación de isometría

Teorema 1.29. ***Completación de un espacio incompleto***
Sea (V, d) un espacio metrico incompleto, consideremos el siguiente conjunto:

$$X = \{(v_i) : (v_i) \in V, Fundamental\}$$

sea $\sim$ la relación dada por $(x_i) \sim (y_j)$ si y solo si $d(x_i, y_i) \to 0$. Entonces el espacio $(\overline{X}, \overline{d})$ definido por $\overline{X} = X/\sim$ y

$$\overline{d}([(x)], [(y)]) = lim_{i\to\infty} d(x_i, y_i)$$

es un espacio metrico completo. Y el subespacio dado por $\overline{V} = \{[(x)] : \exists v \in V, [(y_i = v)] = [(x_i)]\}$ es isometrico a (V, d)

Demostración. Primero, notemos que $\overline{d}$ está bien definida: si $[(x_i)] = [(x'_i)]$ y $[(y_i)] = [(y'_i)]$, entonces $d(x_i, x'_i) \to 0$ y $d(y_i, y'_i) \to 0$ cuando $i \to \infty$, y por lo tanto $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x'_i) + d(x'_i, y'_i) + d(y'_i, y_i)$ tiende a cero cuando $i \to \infty$, lo que muestra que $\overline{d}$ no depende de la elección de representantes.

Para ver que $\overline{d}$ es una métrica en $\overline{X}$, notemos que $\overline{d}([(x_i)], [(x_i)]) = \lim_{i\to\infty} d(x_i, x_i) = 0$, y que $\overline{d}$ es simétrica y satisface la desigualdad triangular. Por lo tanto, es una métrica.

Ahora, para ver que $(\overline{X}, \overline{d})$ es completo, sea $([(x_n)])$ una sucesión de Cauchy en $\overline{X}$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $(x_n^{(i)})$ dada por $x_n^{(i)} = x_{n,i}$ es una sucesión de Cauchy en V. Como V es incompleto, existe $v_i \in V$ tal que $x_n^{(i)} \to v_i$ cuando $n \to \infty$. Sea $v = (v_1, v_2, \dots) \in X$, y veamos que $[(x_n)] \to [(v)]$ en $(\overline{X}, \overline{d})$.

Para ello, fijemos $\epsilon > 0$. Como $[(x_n)]$ es Cauchy, existe N tal que $\overline{d}([(x_n)], [(x_m)]) < \epsilon/2$ para todo $n, m \geq N$. Entonces, para todo $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $(x_n^{(i)})$ es Cauchy en V, y por lo tanto existe $M_i \geq N$ tal que $d(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) < \epsilon/2^i$ para todo $n, m \geq M_i$. Definamos $M = \max_{i\in\mathbb{N}} M_i$. Entonces, si $n \geq M$, se tiene que

$$d(x_n^{(i)}, v_i) \leq d(x_n^{(i)}, x_M^{(i)}) + d(x_M^{(i)}, v_i) < \frac{\varepsilon}{2^i} + \frac{\varepsilon}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y por lo tanto $\overline{d}([(x_n)], [(v)]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} d(x_n^{(i)}, v_i) < \epsilon$. Esto muestra que $[(x_n)] \to [(v)]$

□

Teorema 1.30. ***Clausura, conjunto cerrado***
Sea M un subconjunto no vacío de un espacio metrico $X = (X, d)$ y $\overline{X}$ su clausura, entonces:

- *$x \in \overline{X}$ si y solo si existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \to x$.*
- *M es cerrado si y solo si, dado $\{x_n\} \subseteq M$ con $x_n \to x$ entonces $x \in M$*

Demostración. Para la primera afirmación, supongamos que $x \in \overline{M}$. Entonces, por definición de clausura, todo entorno de x tiene intersección no vacía con M. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir $x_n \in B(x, 1/n) \cap M$. Entonces, la sucesión (x_n) es una sucesión en M que converge a x.

Por otro lado, si (x_n) es una sucesión en M que converge a x, entonces para cualquier entorno U de x, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. En particular, $B(x, 1/n) \subseteq U$ para todo $n \geq N$, y por lo tanto $B(x, 1/n) \cap M \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Entonces $x \in \overline{M}$.

Para la segunda afirmación, supongamos que M es un conjunto cerrado y que (x_n) es una sucesión en M que converge a x. Si $x \notin M$, entonces x es un punto de acumulación de M^c y, en particular, existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap M = \emptyset$. Pero entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin B(x, r)$, ya que de lo contrario $x_n \in B(x, r) \cap M$. Entonces, $d(x_n, x) \geq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la convergencia de (x_n) a x. Por lo tanto, debe ser $x \in M$.

Por otro lado, si M es un conjunto no cerrado, entonces existe un punto $x \in \overline{M} \backslash M$. Entonces, existe una sucesión (x_n) en M que converge a x. Pero entonces, para cualquier entorno U de x, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. En particular, $x_N \in U \cap M$ y $U \cap M \neq \emptyset$. Entonces, x es un punto de acumulación de M y por lo tanto no es un conjunto cerrado.

□

Teorema 1.31. ***Subespacio completo***

Un subespacio M de un espacio métrico completo X es en si mismo completo si y solo si M es cerrado en X

Demostración. Supongamos que M es completo. Entonces, para demostrar que M es cerrado en X, es suficiente demostrar que $\overline{M} \subseteq M$, donde $\overline{M}$ es la clausura de M en X. Para ello, supongamos que $x \in \overline{M}$. Entonces, existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \to x$. Como M es completo, esta sucesión tiene un límite $y \in M$. Por lo tanto, x es un punto de acumulación de M, y como M es cerrado si y solo si contiene todos sus puntos de acumulación, se sigue que $x \in M$. Por lo tanto, $\overline{M} \subseteq M$ y M es cerrado en X.

Por otro lado, supongamos que M es cerrado en X. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en M. Como X es completo, esta sucesión tiene un límite $x \in X$. Como M es cerrado, se sigue que $x \in M$. Por lo tanto, toda sucesión de Cauchy en M converge a un punto en M, y por lo tanto

M es completo. Esto completa la demostración. □

Teorema 1.32. ***Continuidad Por sucesiones***
Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios métricos. Entonces, f es continua si y solo si para cualquier sucesión x_n en X que converge a $x \in X$, la sucesión $f(x_n)$ en Y converge a $f(x)$.

Demostración.

- $\leftarrow$ Supongamos que f es continua en x_0. Sea (x_n) una sucesión en X que converge a x_0. Queremos demostrar que $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

  Dado $\epsilon > 0$, como f es continua en x_0, existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $\rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Como (x_n) converge a x_0, existe un N tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x_0) < \delta$. Entonces, para $n \geq N$, tenemos que $\rho(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$. Esto demuestra que $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

- $\to$ Supongamos que para cada sucesión (x_n) en X que converge a x_0, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$. Queremos demostrar que f es continua en x_0.

  Supongamos por contradicción que f no es continua en x_0. Entonces, existe un $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$, existe un $x \in X$ tal que $d(x, x_0) < \delta$ y $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in X$ tal que $d(x_n, x_0) < 1/n$ y $\rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$. Entonces, (x_n) es una sucesión en X que converge a x_0, pero la sucesión $(f(x_n))$ no converge a $f(x_0)$.

Esto completa la demostración del teorema de continuidad por sucesiones. □

Ejemplo 1.33. $(\frac{1}{ln(n)}) \notin \ell^p$ **para cualquier** p **a pesar de que** $\frac{1}{ln(n)} \to 0$

Demostración. A pesar de que $\frac{1}{ln(n)} \to 0$ $ln(n)) \notin \ell^p$ para cualquier p
basta ver que para cualquier p $\sum |\frac{1}{ln(n)}|^p$. Para esto acotemos con $\sum \frac{1}{n}$, dado que:

$$\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{ln^p(n)}} &= lim_{n\to\infty} \frac{ln^p(n)}{n} \\
&= lim_{x\to\infty} \frac{ln^p(x)}{x} \\
&= lim_{x\to\infty} \frac{int(p)! ln^{p-int(p)}(x)}{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde $int(p)$ es la función menor entero, y en el tercer paso, aplicamos L'hopital $int(p)$-veces, y el último paso se ve de que $0 \leq p - int(p) < 1$ □

2. Espacios normados y Espacios de Banach

2.1. Espacios Vectoriales Normados

Definición 2.1. Espacio vectorial

Un espacio vectorial sobre un campo F es un conjunto V equipado con dos operaciones binarias, la suma $+$ y la multiplicación por escalar $\cdot$, que satisfacen los siguientes axiomas:

1. $u + v = v + u$ (ley conmutativa de la suma)

2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (ley asociativa de la suma)

3. Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que $u + \mathbf{0} = u$ para todo $u \in V$ (existencia del elemento neutro para la suma)

4. Para cada $u \in V$, existe un vector $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$ (existencia del elemento opuesto para la suma)

5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributividad de la multiplicación por escalar sobre la suma)

6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (distributividad de la suma de escalares sobre la multiplicación por escalar)

7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ (asociatividad de la multiplicación por escalar)

8. $1u = u$ (existencia del elemento neutro para la multiplicación por escalar)

Definición 2.2. Transformación lineal

Una transformación lineal (también llamada operador lineal o aplicación lineal) es una función $T : V \to W$ entre dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo campo F que satisface las siguientes propiedades:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in V$ (preservación de la suma)

2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ para todo $u \in V$ y todo $\alpha \in F$ (preservación de la multiplicación por escalar)

Definición 2.3. Algunos Conjuntos importantes

Conjunto linealmente independiente

Un conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n \ldots\}$ en un espacio vectorial V sobre un campo F

es linealmente independiente si la única combinación lineal de estos vectores que produce el vector cero $\mathbf{0}$ es la combinación trivial, es decir:

$$\sum_{v_i \in \mathcal{B}}^{finita} \alpha_i v_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \forall_{\alpha_i} \alpha_i = 0$$

Conjunto generador

Un conjunto S de vectores en un espacio vectorial V sobre un campo F es un conjunto generador de V si cualquier vector en V puede ser expresado como una combinación lineal finita de vectores en S.

Base

Una base de un espacio vectorial V sobre un campo F es un conjunto linealmente independiente y generador de V. Es decir, una base es un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en V tal que:

1. Los vectores en la base son linealmente independientes, lo que significa que no se puede expresar ninguno de ellos como combinación lineal de los demás vectores en la base.

2. Los vectores en la base generan V, lo que significa que cualquier vector $v \in V$ puede ser expresado de manera única como una combinación lineal de los vectores en la base.

Definición 2.4. Dimensión

La dimensión de un espacio vectorial V sobre un campo F es el número de vectores en cualquier base de V. La dimensión se denota por $\dim(V)$.

Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal, Esto se puede demostrar, por lo que la dimensión es una propiedad intrínseca del espacio vectorial. Además, se puede demostrar que cualquier conjunto linealmente independiente de vectores en V no puede tener más elementos que una base, y cualquier conjunto generador de V no puede tener menos elementos que una base.

Por ejemplo, la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es 2, ya que cualquier base de $\mathbb{R}^2$ tiene dos vectores, como por ejemplo la base estándar $\{(1,0),(0,1)\}$.

Otro ejemplo es el espacio vectorial de polinomios $\mathbb{R}[x]$. La dimensión de este espacio es infinita. Una base de $\mathbb{R}[x]$ está dada por los polinomios $1, x, x^2, x^3, \ldots$, es decir, todos los polinomios con coeficientes reales de grado no negativo.

Definición 2.5. Norma en un espacio vectorial

Una norma es una función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ que asigna a cada vector v de un espacio vectorial V una magnitud no negativa $||v||$, que satisface las siguientes propiedades:

1. $||v|| \geq 0$ para todo $v \in V$, y $||v|| = 0$ si y solo si $v = \mathbf{0}$ (positividad y no degeneración)

2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $v \in V$ (homogeneidad)

3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ para todo $v, w \in V$ (desigualdad triangular)

Dada una norma $|| \cdot ||$ en un espacio vectorial V, podemos definir una métrica en V como $d(u, v) = ||u - v||$, para cualesquiera dos vectores u y v en V. Esta métrica es llamada **la métrica inducida por la norma** $|| \cdot ||$.

La métrica inducida por una norma satisface todas las propiedades de una métrica, es decir, es no negativa, simétrica, y satisface la desigualdad triangular. Además, la métrica inducida por una norma también tiene la propiedad adicional de que satisface la desigualdad del triángulo invertida, es decir, $|d(u, z) - d(v, z)| \leq d(u, v)$ para cualesquiera tres vectores u, v, y z en V.

Un ejemplo de una métrica que no es inducida por una norma es la métrica de Manhattan (también conocida como métrica del taxista o métrica ℓ_1) en el espacio $\mathbb{R}^2$. Esta métrica se define como $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Esta métrica no es inducida por ninguna norma en $\mathbb{R}^2$, ya que no satisface la propiedad de homogeneidad de la norma.

Definición 2.6. Normas equivalentes

Dos normas $| \cdot |_1$ y $| \cdot |_2$ en un espacio vectorial V se dicen equivalentes si existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que para todo $v \in V$ se tiene:

$$c_1 |v|_1 \leq |v|_2 \leq c_2 |v|_1.$$

Si dos normas son equivalentes, entonces generan la "misma" topología en V, lo que significa que las mismas secuencias convergen con respecto a ambas normas.

Ejemplos

Ejemplo 2.7. ℓ^p

El espacio ℓ^p es el espacio vectorial de todas las sucesiones reales o complejas $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

Para una sucesión $x \in \ell^p$, la norma $|x|_p$ se define como:

$$|x|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

En efecto esta norma induce a la metrica del espacio, pues:

$$d(x,y) = |x-y|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}.$$

Ejemplo 2.8. ℓ^∞

El espacio ℓ^∞ es el espacio vectorial de todas las sucesiones reales o complejas $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ tales que:

$$\sup_{n\geq 1} |x_n| < \infty.$$

Es decir, las sucesiones en ℓ^∞ están acotadas en norma uniforme.

Para una sucesión $x \in \ell^\infty$, la norma $|x|_\infty$ se define como:

$$|x|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|.$$

Ejemplo 2.9. El espacio $\mathcal{C}[a,b]$

El espacio $C[a,b]$ es el espacio vectorial de todas las funciones continuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (o $f : [a,b] \to \mathbb{C}$)

Se define la norma $|\cdot|$ en $C[a,b]$ como:

$$|f| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

Ejemplo 2.10. Espacio normado incompleto

Ya habiamos hablado del espacio $\mathcal{C}[-1,1]$, con la metrica integral. podemos definir la norma como:

$$|f| = \int_{-1}^{1} |f(x)| dx.$$

Este es un espacio vectorial, y la norma está bien definida. Pero, como ya habíamos probado, no es completo.

Ejemplo 2.11. Un espacio normado incompleto y su completitación

Definimos el espacio $L^2[a,b]$ como el espacio de todas las funciones medibles $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ forma un espacio normado con la norma definida por

$$|f|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Este espacio vectorial no es completo, con el ejemplo que dimos para $[a,b] = [-1,1]$, la secuencia definida en el ejemplo 1.28 obrenemos que, para $n > m > \delta > \frac{1}{6\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
|f_n - f_m| &= \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&= 2\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt|^2 \mathrm{d}t + 2\int_{0}^{\frac{1}{n}} |nt - mt|^* 2 \mathrm{d}t \\
&= 2(\frac{1}{3m} + \frac{m^2}{3n^3} + \frac{m}{n^2} + \frac{1}{n}) + 2(\frac{1}{3n} - \frac{2m}{3n^2} + \frac{m^2}{3n3}) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Esta es una sucesión de Cauchy que no converge en el espacio. Del teorema 1.29, sobre la completación de un espacio metrico incompleto, a este espacio lo podemos completar, como espacio metrico, basta ver que la completación sea un espacio vectorial.

No todo espacio vectorial metrico es normado:

Ejemplo 2.12. Espacio S

S donota el espacio de sucesiones acotadas e un espacio vectorial normado, $\mathbb{R}$. Podemos dotarlo de la distancia:

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

no puede tener una norma, pues no se cumple que:

$||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $v \in$

Pues:

$$|\alpha v|| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_i|}{1 + |x_i|}$$

tome la sucesión $v = (1, 0, 0, 0, ...)$ y $\alpha = 2$ entonces:

$$2 = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

lo que es absurdo.

Lema 2.13. ***Translación invariante***

Una metrica d es inducida por una norma para un espacio X, si se stisface que:

- $d(x + a, y + a) = d(x, y)$
- $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$

para todo $x, y \in X$ y todo escalar α.

Demostración. Tenemos que:

$$d(x+a, y+a) = ||x+a-(y+a)|| = ||x-y||$$

y

$$d(\alpha x, \alpha y) = ||\alpha x - \alpha y|| = |\alpha|||x-y||$$

□

2.2. Espacio de Banach

Definición 2.14. Espacio de Banach
Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo. En otras palabras, es un espacio vectorial equipado con una norma, de tal manera que todas las sucesiones de Cauchy en ese espacio convergen a un punto en ese mismo espacio.

El nombre "Banach" se debe al matemático polaco Stefan Banach, quien fue uno de los pioneros en el estudio de estos espacios. Los espacios de Banach son una generalización importante de los espacios euclidianos y de los espacios de Hilbert, y tienen aplicaciones en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo análisis funcional, teoría de la medida y ecuaciones diferenciales parciales.

Teorema 2.15. ***Completación de un espacio normado*** *La completación de un espacio vectorial normado es de Banach.*

Demostración. Supongamos que V es un espacio vectorial normado y sea $\widetilde{V}$ su completación. Es decir, $\widetilde{V}$ es el espacio vectorial normado completo que contiene a V como un subespacio denso.

$\widetilde{V}$ Es el conjunto de sucesiones de Caucy en V partido por la relación de equivalencia $(x_i) \sim (y_j)$ si y solo si $d(x_i, y_i) \to 0$. La suma y el producto se define componente a componente, es decir:

- $[(x_i)] + [(y_j)] = [(x_i + y_i)]$
- $\alpha[(x_i)] = [(\alpha x_i)]$

Y la norma es:

$$||[(x_i)]|| = lim_{i\to\infty}|x_i|$$

En adelante la demostración es simliar a la demostración del teorema de completación para espacios metricos.

□

2.3. Algunas propiedades de un espacio normado

Teorema 2.16. ***Subespacio de un espacio de Banach***

Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y solo si Y es cerrado en X

Teorema 2.17. *Sea V un espacio vectorial normado. Entonces la siguiente afirmación es equivalente a que V es un espacio de Banach:*
$\forall \{x_i\} \subseteq V$ *si* $\sum ||x_i||$ *converge, entonces* $\sum x_i$ *converge*

Demostración.

- ($\rightarrow$) Sea V un espacio de Banach si $\sum ||x_i||$ converge, entonces $||\sum_{i=0}^n x_i|| \leq \sum_{i=0}^n ||x_i|| \leq \sum ||x_i||$, $S_n = ||\sum x_i||$ es creciente y acotada, por lo que converge. Entonces $\sum x_i$ converge, pues V es de Banach y $\sum_{i=0}^n x_i = S_n$ es de Cauchy.

- ($\leftarrow$) supongamos que $\forall \{x_i\} \subseteq V$ si $\sum ||x_i||$ converge, entonces $\sum x_i$ converge.
  Sea $\{x_i\}$ una sucesión de Cauchy, es decir

  $$\forall \varepsilon > 0 \exists N (n, m > N \implies ||x_n - x_m|| < \varepsilon)$$

  entonces tomemos una sucesion $y_i = x_{j(i)} - x_{j(i-1)}$ donde $||x_{j(i)} - x_{j(i-1)}|| < \frac{1}{i^2}$, se garantiza la existencia de esta sucesión del hecho de que $\{x_i\}$ es de Cauchy, hay que aclarar que $\{x_j\}$ es una subsucesión de $\{x_i\}$, asumimos que $x_0 = 0_V$, es tal que $y_i + y_{i+1} = x_{j(i+1)} - x_{j(i-1)}$ de ahí $\sum ||y_i||$ converge, por el criterio de comparación con la serie $\sum \frac{1}{i^2}$, por lo que, dada la hipotesis $\sum y_i$ converge.
  Notese que $\sum_{i=0}^n y_i = \sum_{i=0}^n (x_{j(i)} - x_{j(i-1)}) = x_{j(n)}$, es decir que $\{x_{j(i)}\}$ converge, y como $\{x_i\}$ es de cauchy $(x_i - x_{j(i)}) \rightarrow 0$, es decir ambas convergen y al mismo limite.

□

2.4. Espacios y subespacios normados finito dimensionales

Lema 2.18. ***Acotamiento de las coordenadas*** *Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio normado X, Entonces hay un número $C > 0$ tal quepara todo conjunto de escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tenemos*

$$||\sum \alpha_i x_i|| \geq C|\alpha_i|$$

para cualquier i

Demostración. Demostremos por inducción sobre n

- $n = 1$ si $y = \alpha x$ es obvio.
- supongamos como hipotesis inductiva que si $z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, entonces existe $C > 0$ tal que $||z|| \geq C|\alpha_i|$ para todo $m < n$ para cualquier i donde cada $\alpha_i \neq 0$
  y veamos que si $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ entonces existe $C > 0$ tal que $||z|| \geq C|\alpha_i|$ para cualquier i Asumamos que $\alpha_i \neq 0$ y $z = \sum_{j \neq i} \alpha_j x_j$ Por lo que $y - z = \alpha_i x_i$ con $z \neq 0$ y cada $\alpha_i \neq 0$
  Por lo tanto
  $$||y|| + ||z|| \geq ||\alpha_n x_n||$$
  Además
  $$\frac{||y|| + ||z||}{1 + \frac{||z||}{||y||}} = ||y||$$
  Por lo tanrto
  $$1 + \frac{||z||}{||y||}||y|| = ||y|| + ||z|| \geq ||y - z|| = ||\alpha_n x_n||$$
  Así
  $$\frac{1 + \frac{||z||}{||y||}}{||x_n||}||y|| = ||y|| + ||z|| \geq ||\alpha_n x_n||$$

Por lo tanto
$$||\sum \alpha_i x_i|| \geq C|\alpha_i|$$
para cualquier i □

Lema 2.19. ***Combinación lineal***

Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio normado X, Entonces hay un número $C > 0$ tal quepara todo conjunto de escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tenemos
$$||\sum \alpha_i x_i|| \geq C \sum |\alpha_i|$$

Demostración. del lema anterior, tomemos $C = C_i$ siendo C_i tal que
$$||\sum \alpha_i x_i|| \geq C_i|\alpha_i|$$
para algun $\alpha_i \neq 0$ por lo tanto por lo tanto:
$$||\sum \alpha_i x_i|| \geq C \sum |\alpha_i|$$
□

Teorema 2.20. *Todo espacio normado de dimensión finita V es completo.*

Demostración. sea $\{x_1, ..., x_n\}$ una base para V y tomemos $y^m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^m e_i$, entonces, si $\{y^m\}$ es de Cauchy tenemos que

$$\varepsilon > ||y^{(r)} - y^{(m)}|| \geq C||\alpha_i^{(r)} - \alpha_i^{(m)}||$$

Entonces $(\alpha_i^{(r)})$ es de Cauchy, por lo que existe α_i tal que $\alpha_i^{(r)} \to \alpha_i$
Tomando $y = \sum \alpha_i x_i$ vemos que $y^{(m)} \to y$
Pues

$$||y^{(m)} - y|| = ||\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^m - \alpha_i)e_i|| \geq C\sum |(\alpha_i^m - \alpha_i)| \geq \sum \frac{\varepsilon}{Cn} < \varepsilon$$

donde $C = max||x_i||$ y $N = max\{N_i\}$ tal que para $\varepsilon > 0$ $\exists N_i$ $n > N_i \to |\alpha_i - \alpha| < \varepsilon$ □

Teorema 2.21. *En un espacio de dimensión finita V todas las normas son equivalentes*

Demostración. Supongamos que X es un espacio normado de dimensión finita. Entonces, para cualquier par de normas $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ en X, queremos demostrar que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene

$$C_1|x|_1 \leq |x|_2 \leq C_2|x|_1.$$

Sea $L = \{e_1, ..., e_n\}$ base en V. Tome $x = \sum \alpha_i x_i$ por el lema 2.19 tenemos que:

$$||x||_1 \geq C_1 \sum |\alpha_i| \qquad ||x||_2 \geq C_2 \sum |\alpha_i|$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{C_2}|x|_2 \geq \sum |\alpha_i| \geq |x|_1 \geq C_1 \sum |\alpha_i| \geq \frac{C_1}{C_2}|x|_2$$

Lo que prueba que las metricas son equivalentes □

Corolario 2.22. *Todo subespacio U de dimensión finita de un espacio normado V es cerrado en U*

Demostración. Como $(U, ||\cdot||)$ es de dimensión finita es completo, luego $\overline{U} = U$ pues todo punto de adherencia está en U

$$\forall_{x \in \overline{U}} \exists_{\{x_n\} \subset U}(x_n \to x)$$

como U es completo $x \in U$ Por lo tanto $\overline{U} = U$, luego U es cerrado □

2.5. Compacidad y dimension finita

Definición 2.23. Compacidad

Un espacio metrico es llamado compacto si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Un subconjunto M de X es llamado compacto si M es compacto como un subespacio de X

Lema 2.24. ***Compacidad***

U subconjunto compacto M de un espacio metrico es cerrado y acotado.

Demostración. Para todo $x \in \overline{M}$ hay una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \to x$, como M es compacto, $x \in M$ Luego M es cerrado por que $\overline{M} = M$
Si M es no acotado, contiene una sucesión (y_n) tal que $d(y_n, b) > n$, para $b \in M$ un elemento fijo, esta sucesión no podría tener una subsecuencia convergente pues esta sería acotada. □

El inverso de este lema no es verdad en general.

Demostración. Consideremos la sucesión (e_n) en ℓ^2, donde $e_n = (\delta_{nj})$ tiene n terminos 1 y los demas son 0. Esta secuencia es acotada y cerrada pero no contiene puntos de acumulación por lo que no contiene uns subsequencia convergente. □

Teorema 2.25. ***Compacidad***

En un espacio normado finito dimensional X, cualquier subconjunto $M \subseteq X$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Demostración.
- $\to$ del lema 2.24
- $\leftarrow$ Sea M cerrado y acotado. Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base para X consideremos una sucesión (X_m) de la forma:
$$x_m = \sum_{i=0}^{n} \xi_i^{(m)} e_i$$
Como M es acotado, $||(x_m)|| \leq k$ para todo m. Por lema anterior:
$$k \geq ||x_m|| = ||\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(m)} e_i|| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}|$$
donde $c > 0$, Por lo tanto la sucesión de numeros $(\xi_j^{(m)})$, para j fijo, es acotada y, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión convergente a ξ_j, para $1 \leq j \leq n$, concluimos que (x_m) converge a $x = \sum_{i=0}^{n} \xi_i e_i$, como M es cerrado, $x \in M$, esta subsucesión se puede crear de la siguiente forma:
$(\xi_1^{(n)})$ es acotada por lo que contiene una subsucesión convergente $(\xi_1^{(j_1(n))})$,

$(\xi_2^{(j_1(n))})$ es acotada por lo que contiene una subsucesión convergente $(\xi_2^{(j_2(j_1(n)))})$, etc. Por lo tanto $x_i^{j_n(j_{n-1(\ldots(j_1(n))\ldots))}}$ es una subsucesión convergente para $(\xi_i^{(n)})$ Así, toda sucesión posee una subsucesión convergente, M es compacto.

□

En espacios de dimensión infinita hay ejemplos de subconjuntos cerrados y acotados que no son compactos:

Ejemplo 2.26. en ℓ^2 la sucesión $\{(\delta_{i,n})_{n=1}^{\infty}\}$, es cerrada y acotada, pero no contiene una subsucesión convergente

Lema 2.27. ***Lemma de F. Riesz***
Sean Y y Z subespacios de un espacio normado X, suponga que Y es cerrado y es un subespacio propio de Z. Entoncespara todo $\theta \in (0,1)$ existe $z \in Z$ tal que:

$$||z|| = 1 \quad y \quad ||z - y|| \geq \theta \ \ \forall y \in Y$$

Demostración. Sea $z_0 \in Z - Y$ sea $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $a = dist(z_0, Y)$,
entonces existe $y_o \in Y$ tal que $a \geq ||z_o - y_0|| \geq \frac{a}{\theta}$ pues $\theta \in (0,1)$,
sea $z = c(z_0 - y_0)$, con $c = \frac{1}{||z_0 - y_0||}$. Luego

$$\forall y \in Y \quad ||z - y|| = ||z_0 - y_0 - \frac{1}{c}y|| \geq ca = \frac{a}{||z_0 - y_0||} \leq \frac{a}{a/\theta} = \theta$$

□

Teorema 2.28. *Si en un espacio normado X, la bola $\mathcal{B}[0_X, 1]$ es compacta, entonces X es de dimensión finita.*

Demostración. Supongamos que X es de dimensión infinita Sea:

$$x_1 \in X \ \ tq \ \ ||x_1|| = 1, \ \ Y_1 = span(x_1)$$

Y_1 es subespacio cerrado de X

$$x_2 \in X - Y_1 \ \ tq \ \ ||x_2|| = 1 \ \ y||x_1 - x_2|| > \frac{1}{2} \ \ Y_2 = span(x_1, x_2)$$

Y sea

$$x_3 \in X - Y_2 \ \ tq \ \ ||x_3|| = 1 \ \ y \ |||x_1 - x_3|| > \frac{1}{2} \ y \ |||x_2 - x_3|| > \frac{1}{2} \ \ Y_3 = span(x_1, x_2, x_3)$$

Y continuamos generando $\{x_n\}$ que no contiene subsucesión convergente, por lo que $\mathcal{B}[0_X, 1]$ no es compacta □

Ejercicios

1. **Sea (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Consideremos la bola abierta $B(x, r)$ de centro x y radio $r > 0$. La clausura de $B(x, r)$, denotada por $\overline{B(x, r)}$, está definida como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $B(x, r)$. Enornces $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$**

   Demostración. Primero, demostraremos que $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r)$, donde $\overline{B}(x, r)$ denota la bola cerrada de centro x y radio r.

   Sea $y \in \overline{B(x, r)}$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $z \in B(x, r)$ tal que $d(y, z) < \epsilon$. Como $z \in B(x, r)$, entonces $d(x, z) < r$. Entonces, por la desigualdad triangular, se tiene que:

   $$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + \epsilon.$$

   Como esto es cierto para cualquier $\epsilon > 0$, entonces $d(x, y) \leq r$. Es decir, $y \in \overline{B}(x, r)$, y por lo tanto $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r)$.

   Ahora, demostraremos que $\overline{B}(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}$.

   Sea $y \in \overline{B}(x, r)$. Consideremos una sucesión (y_n) en $B(x, r)$ tal que $y_n \to y$. Si demostramos que $y \in \overline{B(x, r)}$, entonces habremos demostrado que $\overline{B}(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}$.

   Sea $\epsilon > 0$. Como $y \in \overline{B}(x, r)$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, existe $z \in B(x, r)$ tal que $d(y, z) < \epsilon/2$. Además, como $y_n \to y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y, y_n) < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Por la desigualdad triangular, se tiene que:

   $$d(x, y_n) \leq d(x, z) + d(z, y_n) < r + \epsilon/2.$$

   Entonces, para cualquier $n \geq n_0$, se tiene que $y_n \in B(x, r + \epsilon/2)$. Como ϵ es arbitrario, se tiene que $y \in \overline{B(x, r)}$, y por lo tanto $\overline{B}(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}$. □

2. **Si además se desea que exista un elemento $y \in Y$ tal que $||z - y|| = \theta$, se puede agregar la hipótesis adicional de que Y es un subespacio complementado de Z, es decir, que existe un subespacio cerrado W de X tal que $X = Y \oplus W$. En este caso, el lema de Riesz de aproximación se puede fortalecer para establecer que existe un elemento $z \in Z$ tal que $||z|| = 1$ y $||z - y|| = \theta$ para algún $y \in Y$.**

   La demostración de esta versión del lema de Riesz de aproximación utiliza el teorema de proyección de Banach, que establece que todo espacio de Banach X admite una proyección continua y lineal sobre cualquier subespacio cerrado Y complementado de X. Usando esta proyección, se puede definir un funcional lineal y acotado en Y que se extiende a un funcional lineal y acotado en X, y se puede demostrar que el elemento z buscado es la imagen de un vector unitario bajo la extensión del funcional.

En resumen, si Y es un subespacio cerrado y complementado de un espacio normado X, entonces para cualquier $\theta \in (0, 1)$ existe un elemento $z \in Z$ tal que $||z|| = 1$ y $||z-y|| = \theta$ para algún $y \in Y$.

Demostración. Primero, se observa que si $Y = Z$, entonces el lema de Riesz original implica que existe $z \in Z$ tal que $|z| = 1$ y $|z - y| \geq \theta$ para todo $y \in Y$ tal que $y \neq z$. Por lo tanto, se puede suponer sin pérdida de generalidad que Y es un subespacio propio de Z.

Sea $d = \inf_{y \in Y} |z_n - y|$, donde z_n es una sucesión en la esfera unitaria de Z tal que $z_n \to d$. Se observa que $d > 0$, de lo contrario se tendría que $z_n \to 0$, lo que implicaría que 0 está en la clausura de la esfera unitaria de Z, lo cual contradice la hipótesis de que Y es un subespacio propio de Z.

Por lo tanto, se puede elegir $\theta \in (0, 1)$ tal que $\theta < \frac{1}{2}$ y $\theta d < \frac{1}{2}$. Se define $P : Z \to Y$ como el operador de proyección ortogonal sobre Y, es decir, $P(z)$ es el único elemento de Y tal que $z - P(z)$ es ortogonal a Y. Se observa que P es una aplicación lineal y acotada, y que $P(z) = z$ para todo $z \in Y$.

A continuación, se define una sucesión (z_n) en la esfera unitaria de Z de la siguiente manera:

$$z_n = \frac{z_{n-1}P(z_{n1})}{||z_{n-1}P(z_{n1})||}$$

donde z_0 es cualquier elemento de la esfera unitaria de Z tal que $|z_0 - d| < \theta d$. Se observa que $z_n \to d$ y que $|z_n - \theta P(z_n)| < \theta d$ para todo $n \geq 1$.

A continuación, se prueba que $|z_n - y| \geq \theta$ para todo $y \in Y$ tal que $|y| = 1$ y todo $n \geq 0$. Se procede por inducción en n.

Para el caso base $n = 0$, se tiene que $|z_0 - y| \geq |z_0 - d| - |d - y| \geq \theta d$, donde la última desigualdad sigue de la definición de d y el hecho de que $|d-y| \leq |z_0-d|+|z_0-y| < 2\theta d$.

Se observa que $|z_n - y| \geq |z_n - \theta P(z_n) - y| - |\theta P(z_n) - y|$. Como $P(z_n)$ pertenece a Y y y es un elemento de norma 1 en Y, se tiene que $|\theta P(z_n) - y| \leq \theta$. Por lo tanto, para probar que $|z_n - y| \geq \theta$, basta con probar que $|z_n - \theta P(z_n) - y| \geq \theta$. Se observa que

$$|z_n - \theta P(z_n) - y|^2 = |z_n - y|^2 - 2\theta\langle z_n - P(z_n), y\rangle + \theta^2|P(z_n)|^2 \quad \geq |z_n - y|^2 - 2\theta|z_n - P(z_n)| - \theta^2$$

donde la primera desigualdad sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que $|P(z_n)| = 1$ para todo $n \geq 0$. La última desigualdad sigue de la definición de z_n y el hecho de que $|z_{n-1} - \theta P(z_{n-1})| \geq \theta d$.

Por lo tanto, se tiene que $|z_n - y| \geq \theta$ para todo $y \in Y$ tal que $|y| = 1$ y todo $n \geq 0$. En particular, se tiene que $|z_n - P(z_n)| \geq \theta$ para todo $n \geq 0$, lo que implica que $|z_n| \geq 1 - \theta$. Por lo tanto, se puede definir $z = \text{lím}_{n\to\infty} z_n$. Se observa que $|z| = 1$ y que $|z - y| \geq \theta$ para todo $y \in Y$. Además, como Y es cerrado, se tiene que $P(z) \in Y$. Por lo tanto, se tiene que $|z - P(z)| \geq \theta$, lo que implica que $|z - y| > \theta$ para todo $y \in Y$ tal que $y \neq P(z)$. Por lo tanto, se tiene que $|z - y| = \theta$ para algún $y \in Y$ tal que $y = P(z)$, lo que completa la demostración. $\square$

3. **Un homeomorfismo entre un espacio completo y uno incompleto.**

   El intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ no es completo ya que no contiene a su punto de acumulación $\pi/2$. Por lo tanto, la función tangente $f(t) = \tan(t)$ con $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ es un ejemplo de un homeomorfismo entre un espacio incompleto y uno completo, ya que el codominio $(\mathbb{R}, |\cdot|_{\text{euclid}})$ es completo. La función tangente es biyectiva, continua y tiene una inversa continua, lo que la convierte en un homeomorfismo.

4. **Tomemos** $x = sen(t)$ **y** $y = cos(t)$ **encuentre el menor** $r \in \mathbb{R}$ **tal que** $y \in \mathcal{B}[x, r]$

$$r = \sqrt{2}$$

   Demostración. $d(x, y) = max|sen(t) - cos(t)|$ tomemos $f(t) = sen(t) - cos(t)$si derivamos vemos que $f'(t) = cos(t) + sen(t)$, de donde $f'(t) = 9$, cuando $t \in \{\frac{3pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, por lo que $d(x, y) = \sqrt{2} = r$, que es el minimo r tal que $y \in \mathcal{B}[x, r]$ $\square$

5. **De un ejemplo de una transformación lineal entre espacios normados que no sea continua**.

   Teorema 2.29. *Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal entre espacios normados X e Y. Supongamos que T no es acotada, es decir, no existe una constante M tal que $||Tx||_Y \leq M||x||_X$ para todo $x \in X$, entonces $T : X \to Y$ no es continua.*

   Demostración. supongamos que $T : X \to Y$ es una transformación lineal no acotada. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $||x_n||_X = 1$ y $||Tx_n||_Y > n$, pues si así no fuera existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\forall x \in \mathcal{S}[0_x, 1]$, $||Tx_n||_Y \geq N$, y eso obligaría a que fuera acotado, pues para $z \in X - \{0_X\}$, $T(z) = ||z||T(\frac{z}{||z||}$.

Ahora, considere la sucesión (z_n) en la esfera unitaria $\mathcal{S}_X(0,1)$. tal que $||Tx_n||_Y > 2^n$ en el espacio normado X, y tambien la sucesión $x_n = \frac{z_n}{n}$. luego $x_n \to 0$, pues $||x_n|| \to 0$, y $||Tx_n||_Y > \frac{2^n}{n} \to \infty$, por lo que no es continua pos sucesiones, lo que implica que no es continua. $\square$

Sea $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ el operador derivada definido por $T(f) = f'$, donde $C([0,1])$ es el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ con la norma del supremo. Vemos que T no es continuo

Consideremos la sucesión $f_n(x) = x^n$ para $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $f_n \in C([0,1])$ para todo n, y $|f_n|_\infty = 1$ para todo n. Sin embargo,

$$|T(f_n)|_\infty = |\frac{d}{dx}x^n|_\infty = |nx^{n-1}|_\infty = n,$$

lo que implica que T no es acotado. Por lo tanto, T no puede ser continuo en $C([0,1])$ con la norma del supremo.

2.6. Operadores lineales

Un operador lineal es una función que preserva la estructura lineal entre dos espacios vectoriales. Es decir, si X y Y son dos espacios vectoriales sobre un mismo campo escalar (por ejemplo, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $T : X \to Y$ es un operador lineal.

Definición 2.30. Operador lineal
Un operador lineal entre dos espacios vectoriales X y Y es una función $T : X \to Y$ que satisface las siguientes dos propiedades:

1. $D(T)$ es un espacio vectorial y $R(T)$ es un espacio vectorial, ambos sore el mismo campo.

2. Para cualquier $x_1, x_2 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ (donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo de escalares de los espacios X e Y), se tiene que $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ y $T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$.

A partir de la definicón anterior se cumple que $T(0_X) = 0_Y$, donde 0_X y 0_Y son los elementos neutros de las operaciones de suma en X e Y, respectivamente.

Ejemplos

1. **Operador identidad**. El operador identidad en un espacio vectorial X está definido por: $I : X \to X$, donde $I(x) = x$

2. **Operador nulo**. El operador nulo en un espacio vectorial X, sobre un espacio vectorial Y está definido por: $0 : X \to Y$, donde $0(x) = 0_Y$

3. **Operador derivada**. El operador derivada en el espacio vectorial de todos los polinomios sobre una variable $t \in [a, b]$, sobre si mismo está definido por: $D : \mathcal{P}_{[a,b]} \to \mathcal{P}_{[a,b]}$, donde $D(f) = \frac{df}{dt}$

4. **Operador integral**. El operador integral en el espacio vectorial de todos los polinomios sobre una variable $t \in [a, b]$, sobre si mismo está definido por: $T : \mathcal{P}_{[a,b]} \to \mathcal{P}_{[a,b]}$, donde $T(f) = \int_a^t f(\tau)d\tau$

Teorema 2.31. ***Operador inverso***
Dados dos espacios vectoriales X y Y, ambos sobre los reales o los complejos, Sea $T : D(T) \to R(t)$ un operador lineal, donde $D(T) \subset X$ y $R(T) \subset Y$ entonces:

1. *La inversa $T^{-1} : R(T) \to D(t)$ existe y solo si:*

$$T(x) = 0 \ \ \to \ \ x = 0$$

2. *Si T^{-1} existe, esta es lineal.*

3. *Si $dimD(T) = n < \infty$ y T^{-1} existe, entonces $dimD(T) = dimR(T)$*

2.7. Acotabilidad y Operadores lineales acotados

Definición 2.32. Operador lineal acotado

Dados dos espacios vectoriales X y Y, ambos sobre los reales o los complejos, Sea $T : D(T) \to R(t)$ un operador lineal, donde $D(T) \subset X$ y $R(T) \subset Y$ diremos que T es acotado i existe un número real $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x\imath D(T)$.

$$||Tx|| \leq c||x||$$

Definimos la norma del operador T como:

$$||T|| = sup_{x\neq 0}\frac{||Tx||}{||x||} =_{Lema} sup_{||x||=1}\frac{||Tx||}{||x||}$$

Ejemplos

1. El operador identidad es acotado pues $Tx = x$, así $||Tx|| \leq ||x||$, para todo x.

2. **Operador diferencial no es acotado**. Tome X el espacio normado de todos los polinomios en $J = [0, 1]$ con la norma $||x|| = max\{|x(t)|\}$, $t \in J$. Recordamos la definición del operador.

$$T(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) = na_n t^{n+1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + \cdots 2a_2 t + a_1$$

   Tomando la sucesión $x_n = t^n$ tenemos que $||x_n|| = 1$ para todo n y $Tx_n(t) = nx^{n-1}$ donde $n \in \mathbb{N}$ Así $||Tx_n|| = n$, ay por lo tando no es acotado.

3. **Operador integral**. Podemos definir el operador integral en el espacio vectorial $C[0, 1]$ sobre una variable $t \in [0, 1]$, sobre si mismo está definido por: $T : C[0, 1] \to \mathcal{C}[0, 1]$ donde

$$y = Tx \qquad donde \qquad y(t) = \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau$$

   Aqui, k es una función dada, que se llama el kernel de T y se supone continua en el cuadrado cerrado $G = J \times J$. Este es un operador lineal.

   Es acotado.

Para probar esto, primero notemos que la función k es continua en el cuadrado cerrado, implica que k es acotado, tomamos $k_0 \in \mathbb{R}$, $||k(t,\tau)|| \leq k_0$ para todo $(t,\tau) \in G$ Por lo tanto

$$|x(t)| \leq max_{t\in J}|x(t)| = ||x||$$

Además

$$||y|| = ||Tx|| = max_{t\in J}|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \leq \int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \leq k_0||x||$$

Resulta que $||Tx|| \leq k_0||x||$

Teorema 2.33. ***Dimensión finita***

Si un espacio normado X es finito dimensional, entonces todo operador lineal em X es acotado

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para X. Tomamos $x = \sum \varepsilon_i e_i$ y consideramos un operador lineal T en X Como es lineal.

$$||Tx|| = ||\sum \varepsilon_i Te_i|| \leq \sum |\varepsilon_i|||Te_i|| \leq max_k||Te_k|| \sum |\varepsilon_i|$$

En la ultima suma aplicamos el lema de acotación con $\alpha_i = \varepsilon_i$ y $x_i = e_i$, entonces opbtenemos

$$\sum |\varepsilon_i| \leq \frac{1}{c}||\sum \varepsilon_i Te_i|| = \frac{1}{c}||x||$$

Por lo tando

$$||Tx|| \leq \lambda||x|| \qquad donde \qquad \lambda = \frac{1}{c}max_k||Te_k||$$

□

Referencias

[1] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*. McGraw-Hill.

[2] Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Wiley.

[3] Abbott, S. (2012). *Understanding analysis*. Springer.

[4] Apostol, T. M. (1974). *Mathematical analysis*. Addison-Wesley.

[5] Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1975). *Introductory real analysis*. Dover Publications.