Notas para un curso de Ecuaciones en derivadas ordinarias

Kevin Cárdenas

28 de septiembre de 2023

Índice

1. Coeficientes constantes

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) con coeficientes constantes son ecuaciones diferenciales en las que los coeficientes de las derivadas no dependen de la variable independiente.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \tag{1}$$

Donde a_i son constantes conocidas, y es la función desconocida de t, y $f(t)$ es una función conocida. Por el momento, nos enfocaremos en resolver este tipo específico de EDO.

1.1. Resolución de la Ecuación Homogénea

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria (EDO) homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0 \tag{2}$$

Donde a, b, y c son constantes conocidas.

Para resolver esta EDO, proponemos una solución de la forma $y(t) = e^{rt}$, donde r es un número complejo o real que debemos encontrar. Sustituyendo esta solución en la EDO homogénea, obtenemos:

$$a \frac{d^2 (e^{rt})}{dt^2} + b \frac{d(e^{rt})}{dt} + ce^{rt} = 0 \tag{3}$$

Ahora, calculemos las derivadas necesarias:

$$\begin{aligned} a \frac{d^2 (e^{rt})}{dt^2} &= ar^2 e^{rt} \\ b \frac{d(e^{rt})}{dt} &= bre^{rt} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en la EDO, obtenemos:

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \tag{4}$$

Factorizando e^{rt} (que no puede ser cero ya que e^{rt} es siempre positivo), obtenemos:

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \tag{5}$$

Ahora, la ecuación $e^{rt} = 0$ no tiene soluciones no triviales, ya que e^{rt} nunca es cero. Por lo tanto, la única manera en que esta ecuación puede ser cero es si la parte dentro del paréntesis es cero:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{6}$$

Esta es una ecuación cuadrática en r, y podemos resolverla utilizando la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7}$$

Dependiendo de los valores de a, b, y c, pueden surgir tres casos diferentes:

1. Dos raíces reales distintas: Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas r_1 y r_2, y la solución general de la EDO homogénea será:

$$y_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \tag{8}$$

   Donde A y B son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

2. Una raíz real doble: Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene una única raíz real $r_1 = r_2$, y la solución general será:

$$y_h(t) = (A + Bt)e^{r_1 t} \tag{9}$$

   Donde A y B son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

3. Dos raíces complejas conjugadas: Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene dos raíces complejas conjugadas $r_1 = \alpha + \beta i$ y $r_2 = \alpha - \beta i$, donde α y β son números reales, y la solución general será:

$$y_h(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) \tag{10}$$

   Donde A y B son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

Para resolver la ecuación homogénea:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \tag{1}$$

el poliomio característico será:

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 \tag{2}$$

Y si una raíz r tiene multiplicidad n, entonces la succión asociada esta será:

$$y_r(x) = (\sum_{i=0}^{n-1} A_1 x^i) e^{rx} \tag{3}$$

con A_i constantes aleatorias.

Entonces la solución general de la ecuación homogenea será:

$$y_h(x) = \sum_{r:P(r)=0} y_r(x) \tag{4}$$

1.2. Método de la Variación de Parámetros

El método de la variación de parámetros es un enfoque utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales de segundo orden no homogéneas con coeficientes constantes. La idea principal es suponer que la solución particular $y_p(t)$ puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea correspondiente y luego encontrar las funciones que multiplican a estas soluciones.

Supongamos que tienes una EDO no homogénea de segundo orden en la forma estándar:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$

Donde a, b, c y $f(t)$ son conocidos y $y(t)$ es la función desconocida que deseas encontrar. Primero, encuentra las soluciones linealmente independientes $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de la EDO homogénea correspondiente:

$$a\frac{d^2y_h}{dt^2} + b\frac{dy_h}{dt} + cy_h = 0$$

Estas soluciones dependen de los valores de a, b y c, y generalmente se encuentran resolviendo la ecuación característica asociada.

Una vez que tengas las soluciones homogéneas $y_1(t)$ y $y_2(t)$, asumimos que la solución particular $y_p(t)$ puede escribirse como:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

Donde $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son funciones desconocidas que debemos determinar. La elección de estas funciones es lo que hace que el método sea la "variación de parámetros".

A continuación, procedemos a encontrar $u_1(t)$ y $u_2(t)$ mediante las siguientes fórmulas:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt$$

Donde $W[y_1, y_2](t)$ es el determinante del Wronskiano de $y_1(t)$ y $y_2(t)$, dado por:

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$$

Una vez que encuentres $u_1(t)$ y $u_2(t)$, puedes sustituirlos en la expresión para $y_p(t)$:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

Esta es tu solución particular $y_p(t)$ de la EDO no homogénea. La solución general de la EDO completa es la suma de la solución homogénea $y_h(t)$ y la solución particular $y_p(t)$:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Ejemplo 1.1. Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO) no homogénea de segundo orden:

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

Nuestro objetivo es encontrar la solución particular $y_p(t)$ para esta EDO utilizando el Método de la Variación de Parámetros. Primero, encontramos las soluciones homogéneas de la EDO homogénea correspondiente:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

Que tiene una raíz doble en $r = 1$, por lo que las soluciones homogéneas son:

$$y_1(t) = e^t \quad \text{y} \quad y_2(t) = te^t$$

Ahora, para aplicar el Método de la Variación de Parámetros, asumimos que la solución particular tiene la forma:

$$y_p(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)te^t$$

Donde $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son funciones desconocidas que debemos determinar. Calculamos las derivadas necesarias:

$$y_p'(t) = (u_1' + u_2)e^t + (u_1 + u_2)te^t$$

$$y_p''(t) = (u_1'' + 2u_1' + u_2' + 2u_2)e^t + (u_1' + 2u_1 + u_2' + u_2)te^t$$

Sustituyendo estas derivadas en la EDO original, obtenemos:

$$[(u_1'' + 2u_1' + u_2' + 2u_2)e^t + (u_1' + 2u_1 + u_2' + u_2)te^t] - 2[(u_1' + u_2)e^t + (u_1 + u_2)te^t] + (u_1e^t + u_2te^t) = e^t$$

Simplificando la ecuación, agrupamos términos semejantes:

$$(u_1'' + 2u_1' + u_2' + 2u_2 - 2u_1' - 2u_2)e^t = e^t$$

Agrupamos términos semejantes:

$$(u_1'' + u_2')e^t = e^t$$

La ecuación simplificada es:

$$u_1'' + u_2' = 1$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden para las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Suponemos que la solución general es:

$$u_1(t) = At + B \quad \text{y} \quad u_2(t) = Ct + D$$

Donde A, B, C, y D son constantes a determinar. Sustituimos estas soluciones en la ecuación:

$$(A + C)t + (B + D) = 1$$

Igualamos coeficientes:

$$A + C = 0 \quad \text{y} \quad B + D = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$A + C = 0 \implies A = -C$$

$$B + D = 1$$

Finalmente, la solución particular completa es:

$$y_p(t) = (-Ct + 1 - D)e^t + Cte^t$$

Donde C y D son constantes. Esta es la solución particular $y_p(t)$ de la EDO no homogénea dada.

Para obtener la solución general completa, debes sumar esta solución particular a la solución homogénea de la EDO.

1.3. Método de Coeficientes Indeterminados

El Método de Coeficientes Indeterminados es un enfoque utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales no homogéneas, particularmente cuando el término no homogéneo $f(t)$ tiene una forma específica, como un polinomio, una exponencial, un seno o un coseno.

Supongamos que tienes una EDO no homogénea en la forma estándar:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

Donde a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0, y $f(t)$ son conocidos, $y(t)$ es la función desconocida que deseas encontrar, y n es el orden de la EDO.

El Método de Coeficientes Indeterminados implica adivinar una solución particular $y_p(t)$ de la forma:

$$y_p(t) = \sum_i^n P_i(t)$$

Donde $P_i(t)$ es una función que adivinamos y n es el número de términos que necesitamos para abarcar la forma general de $f(t)$. La elección de las funciones $P_i(t)$ depende de la forma de $f(t)$ y puede variar.

A continuación, te presento algunos ejemplos comunes de cómo elegir $P_i(t)$ para diferentes formas de $f(t)$:

- Si $f(t)$ es un polinomio de grado n, elige $P_i(t)$ como un polinomio de grado n con coeficientes indeterminados.
- Si $f(t)$ es una exponencial de la forma e^{at}, elige $P_i(t)$ como Ae^{at}, donde A es un coeficiente indeterminado.
- Si $f(t)$ es un seno o coseno de la forma $\sin(at)$ o $\cos(at)$, elige $P_i(t)$ como $A\sin(at) + B\cos(at)$, donde A y B son coeficientes indeterminados.
- Para funciones más complicadas, como productos de polinomios, exponenciales, senos y cosenos, elige $P_i(t)$ de manera adecuada para cubrir cada término en $f(t)$.

Una vez que hayas adivinado $y_p(t)$ y sus funciones $P_i(t)$, calcula las derivadas necesarias y sustitúyelas en la EDO original. Luego, iguala los coeficientes de cada término en ambos lados de la ecuación para determinar los valores de los coeficientes indeterminados.

Finalmente, suma la solución particular $y_p(t)$ a la solución homogénea $y_h(t)$ de la EDO correspondiente para obtener la solución general completa $y(t)$:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Este es el Método de Coeficientes Indeterminados en acción, que te permite encontrar la solución de una EDO no homogénea cuando el término no homogéneo tiene una forma específica. La elección de las funciones $P_i(t)$ y la determinación de los coeficientes indeterminados son las claves para resolver eficazmente estas EDO de cualquier orden.

Ejemplo 1.2. Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO) no homogénea de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{2t}$$

Nuestro objetivo es encontrar la solución particular $y_p(t)$ utilizando el Método de Coeficientes Indeterminados.

Primero, suponemos una forma para $y_p(t)$ basada en el término no homogéneo $2e^{2t}$:

$$y_p(t) = Ae^{2t}$$

Donde A es un coeficiente indeterminado que debemos determinar. Calculamos las derivadas necesarias:

$$\frac{dy_p}{dt} = 2Ae^{2t}$$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} = 4Ae^{2t}$$

Sustituyendo estas derivadas en la EDO original, obtenemos:

$$4Ae^{2t} - 3(2Ae^{2t}) + 2(Ae^{2t}) = 2e^{2t}$$

Simplificando la ecuación, agrupamos términos semejantes:

$$(4A - 6A + 2A)e^{2t} = 2e^{2t}$$

Simplificamos los coeficientes:

$$0 = 2e^{2t}$$

Dado que la ecuación es una contradicción, nuestra suposición inicial de $y_p(t)$ no es adecuada.

En este caso, dado que $2e^{2t}$ es una solución de la ecuación homogénea, debemos hacer una suposición modificada para $y_p(t)$. Multiplicamos $y_p(t)$ por t y adivinamos de nuevo:

$$y_p(t) = tAe^{2t}$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dy_p}{dt} = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} = 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t}$$

Sustituyendo estas derivadas en la EDO original:

$$(2Ae^{2t} + 4Ate^{2t}) - 3(Ae^{2t} + 2Ate^{2t}) + 2(tAe^{2t}) = 2e^{2t}$$

Simplificando:

$$(2Ae^{2t} + 4Ate^{2t}) - 3(Ae^{2t} + 2Ate^{2t}) + 2(tAe^{2t}) = 2e^{2t}$$

$$(2A - 3A + 2tA)e^{2t} = 2e^{2t}$$

$$(2tA - A)e^{2t} = 2e^{2t}$$

Igualamos los coeficientes:

$$2tA - A = 2$$

Resolvemos para A:

$$2tA - A = 2 \implies A(2t-1) = 2 \implies A = \frac{2}{2t-1}$$

Finalmente, la solución particular completa es:

$$y_p(t) = t \cdot \frac{2}{2t-1} \cdot e^{2t}$$

Esta es la solución particular $y_p(t)$ de la EDO no homogénea. La solución general completa se obtiene al sumar esta solución particular a la solución homogénea de la EDO.