Ejercicios Finales- Jose Miguel Quintero Mejia

7.6 Veamos que la función

$$u(x,y) = \sin \pi x \cdot \frac{\sinh(\pi - y)}{\sinh \pi} + (1+y)$$

Es de clase C^2 sobre el cuadrado unitario D.

Proof. Como

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \pi \operatorname{csch}(\pi) \sinh(\pi - y) \cos(\pi x)$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 1 - \operatorname{csch}(\pi) \sin(\pi x) \cosh(\pi - y)$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x \partial y} = -\pi \operatorname{csch}(\pi) \cos(\pi x) \cosh(\pi - y)$$

y cada una de ellas es claramente continua en D entonces $u \in C^2$, es decir, u es solución clasica.

7.11 Resuelve la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en el dominio $x^2 + y^2 > 4$, sujeto a la condición de contorno $u(x,y) = y$ en $x^2 + y^2 = 4$, y la condición de decaimiento $\lim_{|x|+|y| \to \infty} u(x,y) = 0$.

Proof. Utilizando coordenadas polares, definimos $w(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta))$, entonces el problema se transforma en

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && r > 2, 0 \le \theta \le 2\pi \\ w(2,\theta) &= 2\sin(\theta) && 0 \le \theta \le 2\pi \\ \lim_{r\to\infty} w(r,\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando separación de variables $w(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, obtenemos el par de ecuaciones

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \quad r > 2, \tag{1}$$
$$\Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0 \quad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{2}$$

Para que la solución $w(r,\theta)$ sea de clase C^2, necesitamos imponer dos condiciones de periodicidad:

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \quad (3)$$

La solución general al problema de Sturm-Liouville (2)-(3) se da por la secuencia

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad \lambda_n = n^2, 0, 1, 2, \dots$$

Sustituyendo los autovalores λ_n en (1) se obtiene una EDO de Euler (equidimensional) de segundo orden para R:

$$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones se dan (excepto para $n = 0$) por potencias apropiadas de la variable independiente r :

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

En el caso especial $n = 0$ obtenemos

$$R_0(r) = D_0 + C_0 \ln r.$$

Como las funciones r^n para $n = 1, 2, ...$ son no acotadas cuando $r \to \infty$, y solo buscamos soluciones acotadas, imponemos la condición $C_n = 0$ para $n \ge 0$. Luego por superposición

$$w(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \left(\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)\right)$$

Usando ahora la condición de frontera obtenemos

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\alpha_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\beta_n \sin(n\theta) = 2sin(\theta)$$

Por la unicidad de la expansión de la serie de Fourier, podemos ver que $\alpha_n = 0$ para todo $n = 0, 1, ...$, $\beta_1 = 4$ y $\beta_n = 0$ para $n \geq 2$. Por lo tanto nuestra solución formal en cordenadas polares es,

$$w(r,\theta) = \frac{4}{r} sin(\theta)$$

o, en coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= w(r,\theta) \\ &= \frac{4}{r} sin(\theta) \\ &= \frac{4}{r^2} r sin(\theta) \\ &= \frac{4y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

□

7.20 Encuentre una función armonica $u(r,\theta)$ en $D = \{(r,\theta) : 2 < r < 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, satisfaciendo las condiciones de frontera

$$u(2,\theta) = 0, \quad u(4,\theta) = \sin\theta$$

Proof. Razonando de igual manera que en el ejercicio anterior, se observa que la solución general en D es dada por

$$w(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2}\ln(r) + \frac{\beta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n r^n + \gamma_n r^{-n})\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n r^n + \delta_n r^{-n})\sin(n\theta)$$

Ahora, para calcular los coeficientes de Fourier, utilizamos las condiciones de frontera dadas

$$\frac{\alpha_0}{2}\ln(2) + \frac{\beta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n 2^n + \gamma_n 2^{-n}\right)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta_n 2^n + \delta_n 2^{-n}\right)\sin(n\theta) = 0$$
$$\frac{\alpha_0}{2}\ln(4) + \frac{\beta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n 4^n + \gamma_n 4^{-n}\right)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta_n 4^n + \delta_n 4^{-n}\right)\sin(n\theta) = \sin(\theta)$$

Y por la unicidad de la expansión de la serie de Fourier, podemos igualar los términos de ambos lados de cada una las ecuaciones anteriores para encontrar

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \beta_0 &= 0, \\ \alpha_n 2^n + \gamma_n 2^{-n} &= 0, \qquad (1) \\ \beta_n 2^n + \delta_n 2^{-n} &= 0, \qquad (2) \\ \alpha_n 4^n + \gamma_n 4^{-n} &= 0, \qquad (3) \\ \beta_n 4^n + \delta_n 4^{-n} &= \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ 0 & \text{if } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases} \qquad (4) \end{aligned}$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones lineales $(1) - (3)$ y $(2) - (4)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 0, \\ \gamma_n &= 0, \\ \beta_n &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{if } n = 1, \\ 0 & \text{if } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases} \\ \delta_n &= \begin{cases} -\frac{4}{3} & \text{if } n = 1, \\ 0 & \text{if } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, 3, ...$, por lo tanto nuestra solución formal es

$$\begin{aligned} w(r,\theta) &= (\frac{1}{3}r - \frac{4}{3}r^{-1})\sin(\theta) \\ &= \frac{r^2-4}{3r}\sin(\theta) \end{aligned}$$

□

7.22 Sea $u(x, y)$ una función armonica en $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 36\}$, la cual satisface sobre ∂D la condición de frontera de dirichlet

$$u(x,y) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Proof. a. Sea u una función armonica sobre D, definiendo $v(x, y) := u(x, y) - x$ se sigue que v es armonica y que

$$v(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ -x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (x,y) \in \partial D$$

Por otro lado, note además que para todo $(x, y) \in D$

$$\begin{aligned} u(x,y) &< \max_D u(x,y) \\ v(x,y) &< \max_D v(x,y) \end{aligned}$$

Pues si existe $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\begin{aligned} u(x_0,y_0) &= \max_D u(x,y) \\ v(x_0,y_0) &= \max_D v(x,y) \end{aligned}$$

Entonces u y v serian constantes en D, y por la continuidad de ambas tendriamos que son constantes sobre ∂D, lo cual es imposible por la definición de u y v. Luego por el principio del maximo se tiene que para todo $(x, y) \in D$

$$\begin{aligned} u(x,y) &< \max_D u(x,y) = \max_{\partial D} u(x,y) = 0 \\ v(x,y) &< \max_D v(x,y) = \max_{\partial D} v(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a que $u(x, y) < 0$ y $u(x, y) < x$.

b. Por el principio del valor medio (Teorema 7.7 del texto guia), aplicado a D tenemos que

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(0 + 6\cos(\theta), 0 + 6\sin(\theta))d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(6\cos(\theta), 6\sin(\theta))d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\theta)d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 0d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\theta)d\theta \\ &= -\frac{6}{\pi} \end{aligned}$$

c. Note que la condición de frontera en coordenadas porlares es

$$h(\theta) = w(6,\theta) = \begin{cases} 6\cos(\theta) & \text{if } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \text{if } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Por la formula de Poisson aplicado a D, tenemos que

$$\begin{aligned} w(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{36-r^2}{36-12r\cos(\theta-\varphi)+r^2} h(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12r\cos(\theta-\varphi)+r^2} 6\cos(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12r(\cos(\theta)\cos(\varphi)+\sin(\theta)\sin(\varphi))+r^2}\cos(\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

Y en coordenadas cartesianas es,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= w(r,\theta) \\ &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12r(\cos(\theta)\cos(\varphi)+\sin(\theta)\sin(\varphi))+r^2}\cos(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-(x^2+y^2)}{36-12(x\cos(\varphi)+y\sin(\varphi))+x^2+y^2}\cos(\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

Asi obtenemos que

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{3}{\pi}\cdot -2 \\ &= \frac{-6}{\pi} \end{aligned}$$

Y, para $0 < y < 6$ hacemos la sustitución $u = 36 - 12y\sin(\varphi) + y^2$, lo cual implica que $du = -12y\cos(\varphi)d\varphi$, de donde se sigue que

$$\begin{aligned} u(0,y) &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-y^2}{36-12y\sin(\varphi)+y^2}\cos(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{3}{\pi}(36-y^2)\int_{36-12y+y^2}^{36+12y+y^2} \frac{1}{u}\left(-\frac{du}{12y}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\frac{36-y^2}{y}\int_{(6-y)^2}^{(6+y)^2}\frac{1}{u}du \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{36-y^2}{y}\text{ln}\left(\frac{6+y}{6-y}\right) \end{aligned}$$

d. Definiendo $w(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta))$ el problema es transformado a

$$\begin{aligned} &\Delta w = 0 \qquad\qquad 0 < r < 6, 0 \le \theta \le 2\pi \\ &h(\theta) = w(6,\theta) = \begin{cases} 6\cos(\theta) & \text{if } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \text{if } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Como resultado del metodo de seperación de variables, sabemos que la solución suave general de la ecuación de la Laplace sobre un disco es dada por

$$w(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(\alpha_n\cos(n\theta) + \beta_n\sin(n\theta)\right)$$

Donde los coeficientes de Fourier son dados por

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= -\frac{12}{\pi}.\end{aligned}$$

Y para $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{\pi 6^n}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{6^{1-n}}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\varphi)\cos(n\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= \begin{cases}\frac{1}{2} & \text{if } n = 1,\\ -\frac{2}{\pi}\frac{6^{1-n}}{n^2-1} & \text{if } n = 2, 6, 10, \ldots,\\ 0 & \text{if } n = 3, 5, 7, \ldots,\\ \frac{2}{\pi}\frac{6^{1-n}}{n^2-1} & \text{if } n = 4, 8, 12, \ldots.\end{cases}\end{aligned}$$

En el caso de los β_n tenemos que para $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{1}{\pi 6^n}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{6^{1-n}}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\varphi)\sin(n\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= 0.\end{aligned}$$

e. Como $h(\theta)$ es una función periódica diferenciable por partes y continua, entonces su expansión de Fourier converge uniformemente, luego por la Proposición 7.20 del libro guia se sigue que u es una solución clasica.

□

8.5 a). Dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, el punto inverso de (x, y) con respecto a la linea real es

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) := (x, -y)$$

Así, notamos que la función

$$\begin{aligned}G(x, y; \xi, \eta) &:= \Gamma(x-\xi, y-\eta) - \Gamma(x-\tilde{\xi}, y-\tilde{\eta})\\ &= \Gamma(x-\xi, y-\eta) - \Gamma(x-\xi, y+\eta)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right) + \frac{1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}}\right)\end{aligned}$$

Cumple que

$$\begin{aligned}\Delta G(x, y; \xi, \eta) &= \Delta(\Gamma(x-\xi, y-\eta) - \Gamma(x-\xi, y+\eta))\\ &= \Delta\Gamma(x-\xi, y-\eta) - \Delta\Gamma(x-\xi, y+\eta)\\ &= -\delta(x-\xi, y-\eta) - 0\\ &= -\delta(x-\xi, y-\eta)\end{aligned}$$

Y

$$
\begin{aligned}
G(x,0;\xi,\eta) &= -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(0-\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(0+\eta)^2}}\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}}\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi}\ln(1)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Lo que significa que G es de hecho la función de Green.Y la derivada de G en la dirección de y es

$$
\begin{aligned}
G_y(x,y;\xi,\eta) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2\pi}\left(\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\right)\right)\right.\right.\\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\right)\right.\right.\\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{y+\eta}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}.
\end{aligned}
$$

En $y=0$, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
G_y(x,0;\xi,\eta) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{0-\eta}{(x-\xi)^2+(0-\eta)^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{0+\eta}{(x-\xi)^2+(0+\eta)^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\eta}{\pi\left((x-\xi)^2+\eta^2\right)}+\frac{1}{2}\frac{\eta}{\pi\left((x-\xi)^2+\eta^2\right)}\\
&= \frac{\eta}{\pi\left((x-\xi)^2+\eta^2\right)}\\
&= K(x,0;\xi,\eta)
\end{aligned}
$$

Para todo $(x,0)\in\partial\mathbb{R}^2_+$ y $(\xi,\eta)\in\partial\mathbb{R}^2_+$.

b. Dado un punto $(x,y)\in D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\right\}$, los puntos inversos de (x,y) con respecto a la ∂D son

$$
\begin{aligned}
(x_1,y_1) &:= (x,-y),\\
(x_2,y_2) &:= (-x,y),\\
(x_3,y_3) &:= (-x,-y).
\end{aligned}
$$

Utilizando el principio de reflexión, tenemos la función

$$
\begin{aligned}
G(x,y;\xi,\eta) =& \Gamma(x-\xi,y-\eta)-\Gamma\left(x-\xi_1,y-\eta_1\right)-\Gamma\left(x-\xi_2,y-\eta_2\right)+\Gamma\left(x-\xi_3,y-\eta_3\right)\\
=& \Gamma(x-\xi,y-\eta)-\Gamma(x-\xi,y+\eta)-\Gamma(x+\xi,y-\eta)+\Gamma(x+\xi,y+\eta)\\
=& -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)+\frac{1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\right)\\
&+\frac{1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)-\frac{1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}\right)\\
=& -\frac{1}{4\pi}\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)+\frac{1}{4\pi}\ln\left((x-\xi)^2+(y+\eta)^2\right)\\
&+\frac{1}{4\pi}\ln\left((x+\xi)^2+(y-\eta)^2\right)-\frac{1}{4\pi}\ln\left((x+\xi)^2+(y+\eta)^2\right)\\
=& -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\left((x+\xi)^2+(y+\eta)^2\right)}{\left((x-\xi)^2+(y+\eta)^2\right)\left((x+\xi)^2+(y-\eta)^2\right)}\right).
\end{aligned}
$$

Ahora solo resta mostrar que esta función es de hecho la función de Green. En efecto, note que

$$
\begin{aligned}
\Delta G(x,y;\xi,\eta) &= \Delta\Gamma(x-\xi,y-\eta)-\Delta\Gamma\left(x-\xi_1,y-\eta_1\right)-\Delta\Gamma\left(x-\xi_2,y-\eta_2\right)+\Delta\Gamma\left(x-\xi_3,y-\eta_3\right)\\
&= -\delta(x-\xi,y-\eta)-0-0+0\\
&= -\delta(x-\xi,y-\eta)
\end{aligned}
$$

Además que para todo $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
G(x,0;\xi,\eta) &= -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\left((x-\xi)^2+(0-\eta)^2\right)\left((x+\xi)^2+(0+\eta)^2\right)}{\left((x-\xi)^2+(0+\eta)^2\right)\left((x+\xi)^2+(0-\eta)^2\right)}\right)\\
&= -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\left((x-\xi)^2+\eta^2\right)\left((x+\xi)^2+\eta^2\right)}{\left((x-\xi)^2+\eta^2\right)\left((x+\xi)^2+\eta^2\right)}\right)\\
&= -\frac{1}{4\pi}\ln(1)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Y, para todo $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
G(0,y;\xi,\eta) &= -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\left((0-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\left((0+\xi)^2+(y+\eta)^2\right)}{\left((0-\xi)^2+(y+\eta)^2\right)\left((0+\xi)^2+(y-\eta)^2\right)}\right)\\
&= -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\left(\xi^2+(y-\eta^2)\right)\left(\xi^2+(y+\eta^2)\right)}{\left(\xi^2+(y+\eta^2)\right)\left(\xi^2+(y-\eta^2)\right)}\right)\\
&= -\frac{1}{4\pi}\ln(1)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Lo que significa que G es de hecho la función de Green.

$\square$