Tema 2. El Problema de Cauchy para la Ecuación de Ondas

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la llamada ecuación de ondas homogénea

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

y la ecuación de ondas no homogénea

$$u_{tt} - \Delta u = f,$$

a las que añadiremos condiciones iniciales y de contorno apropiadas. Si fijamos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo y $0 < T \leq \infty$, la incógnita u es función de (x,t), $u = u(x,t)$, y, como siempre, Δ denota el operador laplaciano calculado respecto de las variables espaciales. Para la ecuación no homogénea, la función $f : \Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}$ está dada. Usualmente, el operador

$$\Box u = u_{tt} - \Delta u$$

es llamado d'Alembertiano y se denota por $\Box$.

Nos planteamos en este tema dar algunos resultados relacionados con la existencia y unicidad de solución clásica del problema de Cauchy y del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de ondas.

Interpretación física: La ecuación de ondas es un modelo simplificado para cuerdas vibrantes ($N = 1$), membranas ($N = 2$) o cuerpos elásticos ($N = 3$). En esta interpretación física, $u(x,t)$ representa el desplazamiento en alguna dirección del punto x en un instante de tiempo t.

Fijemos $\mathcal{O} \subset \Omega$ un abierto arbitrario regular. La ley física que regula estos fenómenos afirma que la aceleración total en $\mathcal{O}$ es igual a la fuerza total normal ejercida en $\mathcal{O}$ a través de la frontera de $\mathcal{O}$ (ley de Newton):

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathcal{O}} u(x,t)\, dx = - \int_{\partial\mathcal{O}} F(x,t) \cdot n(x)\, dS(x), \quad \forall t > 0$$

($n(x)$ es el vector normal unitario exterior a la frontera $\partial\mathcal{O}$ en el punto $x \in \partial\mathcal{O}$). De nuevo, deducimos ($\mathcal{O}$ es un abierto arbitrario)

$$u_{tt}(x,t) + \nabla \cdot F(x,t) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,\infty).$$

Para cuerpos elásticos se tiene que F es una función del gradiente ∇u. Por tanto

$$u_{tt}(x,t) + \nabla \cdot F(\nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,\infty).$$

Una primera aproximación válida cuando ∇u es pequeño es $F(\nabla u) = -a\nabla u$ (linealización) con $a > 0$. Así,

$$u_{tt} - a\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,\infty).$$

Cuando $a \equiv 1$ obtenemos la ecuación de ondas. ■

La anterior interpretación física sugiere que para que el problema esté bien planteado tenemos que añadir dos condiciones iniciales: una sobre el desplazamiento u y otra sobre la velocidad u_t. De este modo, el problema de Cauchy para la ecuación de ondas tiene ahora la forma:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

donde $T \in (0,\infty]$, $f : \mathbb{R}^N \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}$ y $u_0, u_1 : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ son dados.

Definición 2.1. *Se dice que u es solución clásica de (2.1) si $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^1(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ satisface*

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{array}\right.$$

■

En este tema estamos interesados en el análisis de la existencia y unicidad de solución de (2.1) en los casos $N = 1$, $N = 2$ y $N = 3$. Analizaremos en primer lugar el problema de Cauchy homogéneo ($f \equiv 0$, $T = \infty$)

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

para pasar seguidamente al análisis del problema no homogéneo.

2.2. Solución del Problema de Cauchy para $N = 1$. Fórmula de d'Alembert

Nos centramos en este apartado en el análisis del problema de Cauchy (2.1) cuando $N = 1$. En concreto, analizaremos el problema homogéneo (2.2) ($f \equiv 0$ y $T = \infty$) dando una fórmula explícita para la solución clásica de (2.2).

De manera formal, podemos "factorizar" la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$ como la composición de los dos operadores:

$$(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)\, u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

Efectivamente, si u es solución clásica del problema homogéneo (2.2) ($N = 1$), entonces la función $v(x,t) = (\partial_t + \partial_x)\, u(x,t) = u_t(x,t) + u_x(x,t)$ satisface

$$(\partial_t - \partial_x)\, v(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

La anterior factorización formal nos sugiere el cambio de variables

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t, \quad \text{es decir,} \quad x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Si definimos $Q = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi > \eta\}$ y $w(\xi,\eta) = u(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2})$, entonces, u es solución clásica de la ecuación de ondas si y sólo si

$$w_{\xi\eta} = 0 \quad \text{en } Q.$$

Esta última ecuación tiene como solución general

$$w(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

con F y G funciones regulares. Deshaciendo el cambio, deducimos que si u es una solución clásica de la ecuación de ondas, entonces se tiene

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t).$$

Si añadimos ahora las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(x,0) = F(x) + G(x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = F'(x) - G'(x) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

y tenemos en cuenta la regularidad de u, obtenemos

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(u_0'(x) + u_1(x)\right) \quad \text{y} \quad G'(x) = \frac{1}{2}\left(u_0'(x) - u_1(x)\right),$$

es decir,

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2} u_0(x) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x u_1(s)\, ds + C_1 \\ G(x) = \dfrac{1}{2} u_0(x) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x u_1(s)\, ds + C_2 \end{cases}$$

con C_1 y C_2 constantes tales que $C_1 + C_2 = 0$. Finalmente, para $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\, ds, \tag{2.3}$$

que es la conocida como **fórmula de d'Alembert**.

Resumiendo, hemos probado que si u es solución clásica del problema homogéneo (2.2), entonces u es de la forma (2.3). Por otro lado, es evidente que si $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ y $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, entonces, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y u es solución clásica de (2.2). Hemos probado:

Teorema 2.2. Solución clásica del problema de Cauchy homogéneo unidimensional. *Supongamos que $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ y $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, la función u dada por (2.3) satisface $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y es la única solución clásica del problema de Cauchy homogéneo (2.2).* ∎

Observación 2.3. La fórmula (2.3) también proporciona un resultado de dependencia continua de la solución del problema de Cauchy (2.2) respecto de los datos iniciales. En concreto, si consideramos sucesiones $\{u_n^0\}_{n\geq 1}$ y $\{u_n^1\}_{n\geq 1}$ y funciones $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ y $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ tales que

$$u_n^0 \to u_0 \text{ y } u_n^1 \to u_1 \text{ uniformemente sobre compactos de } \mathbb{R},$$

entonces, se tiene

$$u_n \to u \text{ uniformemente sobre compactos de } \mathbb{R}^2,$$

donde u_n y u son, respectivamente, las funciones dadas por (2.3) correspondientes a (u_n^0, u_n^1) y (u_0, u_1). ■

Observación 2.4. Obsérvese que la regularidad de u está determinada por la regularidad de u_0 y u_1. En concreto, supongamos que $u_0 \in C^k(\mathbb{R})$ y $u_1 \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ con $k \geq 2$, entonces, $u \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y, de hecho,

$$u(\cdot, t) \in C^k(\mathbb{R}) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

No hay, por tanto, efecto regularizante para la ecuación de ondas. Esta propiedad establece una diferencia fundamental con la solución clásica del problema de Cauchy para la ecuación del calor dada por la solución fundamental. En efecto, esta solución era analítica en $\mathbb{R}^N$ para $t > 0$, independientemente de la regularidad del dato inicial. ■

Observación 2.5. También es interesante resaltar que el problema de Cauchy para la ecuación de ondas está bien planteado tanto para tiempos t positivos como para tiempos $t < 0$: la ecuación de ondas es reversible en tiempo. Esta es otra de las diferencias fundamentales que hay entre la ecuación de ondas y la ecuación del calor: la reversibilidad en tiempo. ■

Planteamos ahora el problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}_+ \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \{0\} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \mathbb{R}_+\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

donde u_0 y u_1 son dadas.

Queremos de nuevo analizar la existencia y unicidad de solución clásica de (2.4), es decir, la existencia de una función u tal que

$$u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}_+ \times [0,\infty)) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty)),$$

y

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 & \forall t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}_+\,. \end{cases}$$

Igual que en el Teorema 2.2, supondremos,

$$u_0 \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+) \quad \text{y} \quad u_1 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+),$$

y probaremos que, bajo ciertas condiciones, el problema admite una solución clásica en el espacio $C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty))$. Es fácil comprobar que, para que (2.4) admita solución clásica en la clase de funciones $C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty))$, debe ser $u_0(0) = u_1(0) = 0$. Por otro lado, si derivamos respecto de t la condición de contorno, derivamos dos veces respecto de x la condición inicial y utilizamos la ecuación, también deducimos $u_0''(0) = 0$. De esta manera obtenemos las condiciones de compatibilidad:

$$u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = 0. \tag{2.5}$$

Se tiene:

Teorema 2.6. *Supongamos que $u_0 \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$ y $u_1 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ satisfacen (2.5). Entonces, el problema (2.4) posee una única solución clásica $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty))$ dada por:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds & si\ x \geq t \geq 0, \\ \dfrac{1}{2}\left[u_0(x+t) - u_0(t-x)\right] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x+t}^{x+t} u_1(s)\,ds & si\ 0 \leq x \leq t. \end{cases} \tag{2.6}$$

Prueba: Como en ocasiones anteriores, aplicaremos un método de reflexión. Prolongamos de forma impar las fuciones u_0 y u_1 haciendo:

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{si } x \geq 0, \\ -u(-x,t) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

y

$$\widetilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \geq 0, \\ -u_0(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \widetilde{u}_1(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{si } x \geq 0, \\ -u_1(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Bajo la hipótesis (2.5) se tiene que $\widetilde{u}_0 \in C^2(\mathbb{R})$ y $\widetilde{u}_1 \in C^1(\mathbb{R})$.

Supongamos que $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty))$ es solución clásica de (2.4), entonces es fácil comprobar que $\widetilde{u} \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ y que, de hecho, $\widetilde{u}_{tt}(x,t) = \widetilde{u}_{xx}(x,t)$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$. También se puede comprobar que:

1. $\widetilde{u} \in C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ (pues $u_0(0) = 0$),
2. $\widetilde{u}_x \in C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$,
3. $\widetilde{u}_t \in C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ (pues $u_1(0) = 0$),
4. $\widetilde{u}_{xt}, \widetilde{u}_{tt} \in C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ y
5. $\widetilde{u}_{xx} \in C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ (pues $u_0''(0) = 0$).

En definitiva, hemos visto que $\widetilde{u} \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es solución clásica del problema (2.2) con datos iniciales $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1)$.

Recíprocamente, sea $\widetilde{u}$ la solución clásica del problema (2.2) con datos iniciales $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1) \in C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$. Entonces, la función $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$ definida en $\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty)$ satisface:

$$\begin{cases} u \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty), \quad u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \\ \qquad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{y} \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+\,. \end{cases}$$

Por otro lado, la función $\widetilde{u}$ viene dada por (2.3) (para $\widetilde{u}_0$ y $\widetilde{u}_1$) y es fácil comprobar que, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, se tiene $\widetilde{u}(-x,t) = -\widetilde{u}(x,t)$. Por tanto, $\widetilde{u}(0,t) = 0$ y u es solución clásica del problema (2.4). Finalmente, de (2.3), deducimos (2.6). ■

Observación 2.7. De nuevo, es fácil comprobar que la solución clásica u del problema (2.4) está definida para tiempos $t \leq 0$. En efecto, para $t \leq 0$, basta considerar la función $\widetilde{u}$ dada por (2.3) asociada a $\widetilde{u}_0$ y $\widetilde{u}_1$. De este modo,

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\, ds & \text{si } x \geq -t \geq 0, \\ \dfrac{1}{2}\left[u_0(x-t) - u_0(-x-t)\right] - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x-t}^{x-t} u_1(s)\, ds & \text{si } 0 \leq x \leq -t. \end{cases}$$

■

2.3. Método de las medias esféricas. Solución para $N = 3$

Veremos en este apartado que el problema de Cauchy (2.2) puede ser resuelto por el método de las medias esféricas debido a Poisson. A cada $g \in C^0(\mathbb{R}^N)$ asociamos su media $G(x;r)$ sobre la superficie de la bola de centro x y radio r:

$$G(x;r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x;r)} g(y)\, dS(y),$$

donde mediante ω_N estamos denotando la medida superficial de la bola unidad en $\mathbb{R}^N$.

Comenzamos viendo un resultado general válido en dimensión $N \geq 2$.

Lema 2.8. *Supongamos que $g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ con $k \geq 0$ y $N \geq 2$. Entonces, $G \in C^k(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$. Si además $k \geq 2$, entonces,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}(x;r) + \dfrac{N-1}{r}\dfrac{\partial G}{\partial r}(x;r) = \Delta_x G(x;r) \ \text{ en } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), & \textbf{(Ecuación de Darboux)} \\ G(x,0) = g(x), \quad \dfrac{\partial G}{\partial r}(x,0) = 0 \ \text{ en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Prueba: Es fácil comprobar que:

$$G(x;r) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0;1)} g(x + r\xi)\, dS(\xi).$$

Obsérvese que, mediante esta expresión, podemos suponer que G está definida tanto para radios r positivos como para $r \leq 0$ (de hecho, así definida, se tiene que G es una función par respecto de r). Podemos aplicar el teorema de derivación respecto de parámetros a la expresión anterior en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ y deducir $G \in C^k(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. En particular, $G \in C^k(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$.

Por otro lado, si $k \geq 2$,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r}(x;r) &= \frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B(0;1)} \nabla g(x+r\xi)\cdot \xi\, dS(\xi) = \frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B(0;1)} \frac{1}{r}\nabla_\xi\left(g(x+r\xi)\right)\cdot\xi\, dS(\xi) \\ &= \frac{1}{r\omega_N}\int_{B(0;1)} \Delta_\xi\left(g(x+r\xi)\right) d\xi = \frac{r}{\omega_N}\int_{B(0;1)} \Delta g(x+r\xi)\, d\xi \\ &= \frac{r}{\omega_N}\Delta_x\left(\int_{B(0;1)} g(x+r\xi)\, d\xi\right) = \frac{r^{1-N}}{\omega_N}\Delta_x\left(\int_{B(x;r)} g(y)\, dy\right) \\ &= \frac{r^{1-N}}{\omega_N}\Delta_x\left[\int_0^r \left(\int_{\partial B(x;\rho)} g(y)\, dS(y)\right) d\rho\right] = r^{1-N}\Delta_x\left(\int_0^r \rho^{N-1} G(x,\rho)\, d\rho\right). \end{aligned} \right.$$

Multiplicando por r^{N-1} y derivando respecto a r obtenemos la ecuación de Darboux. Esta última cadena de igualdades proporciona, en particular

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial G}{\partial r}(x;r)=\lim_{r\to 0}\left(\frac{r}{\omega_N}\int_{B(0;1)}\Delta g(x+r\xi)\,d\xi\right)=0.$$

Finalmente, puesto que g es una función continua en $x\in\mathbb{R}^N$, es fácil ver que

$$\lim_{r\to 0}G(x;r)=g(x).$$

Obtenemos, de este modo, la prueba del lema. ■

Supongamos ahora que u es solución clásica del problema de Cauchy (2.2) para datos iniciales $u_0\in C^2(\mathbb{R}^N)$ y $u_1\in C^1(\mathbb{R}^N)$, con $N\geq 2$. Igual que antes, definimos para cada $(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,\infty)$ las cantidades

$$(2.7)\qquad \begin{cases} U_0(x;r)=\dfrac{1}{\omega_N r^{N-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x;r)}u_0(y)\,dS(y), \quad U_1(x;r)=\dfrac{1}{\omega_N r^{N-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x;r)}u_1(y)\,dS(y),\\ U(x;r,t)=\dfrac{1}{\omega_N r^{N-1}}\displaystyle\int_{\partial B(x;r)}u(y,t)\,dS(y). \end{cases}$$

Deducimos del Lema 2.8 el siguiente resultado:

Teorema 2.9. Ecuación de Euler-Poisson-Darboux. *Sea u una solución clásica de* (2.2) *con $u\in C^k(\mathbb{R}^N\times[0,\infty))$, $k\geq 2$ y $N\geq 2$. Entonces, fijado $x\in\mathbb{R}^N$, se tiene $U(x;\cdot,\cdot)\in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+\times[0,\infty))$, $U_0(x;\cdot)\in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $U_1(x;\cdot)\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ y*

$$\begin{cases} U_{tt}(x;\cdot,\cdot)-U_{rr}(x;\cdot,\cdot)-\dfrac{N-1}{r}U_r(x;\cdot,\cdot)=0 & en\ \mathbb{R}_+\times(0,\infty),\\ U(x;r,0)=U_0(x;r),\quad U_t(x;r,0)=U_1(x;r) & en\ \mathbb{R}_+\,. \end{cases}$$

Prueba: Se puede obtener la regularidad de U, U_0 y U_1 razonando como en el Lema 2.8. Si aplicamos este último resultado a $U(x;r,t)$ deducimos

$$\begin{cases} U_{rr}(x;r,t)+\dfrac{N-1}{r}U_r(x;r,t)=\Delta_x U(x;r,t)\\ \qquad =\dfrac{1}{\omega_N}\displaystyle\int_{\partial B(0;1)}\Delta_x u(x+r\xi,t)\,dS(\xi)=\dfrac{1}{\omega_N}\displaystyle\int_{\partial B(0;1)}u_{tt}(x+r\xi,t)\,dS(\xi)\\ \qquad =\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{1}{\omega_N}\displaystyle\int_{\partial B(0;1)}u(x+r\xi,t)\,dS(\xi)\right)=U_{tt}(x;r,t), \end{cases}$$

que es la ecuación de Euler-Darboux-Poisson.

Finalmente, de las condiciones iniciales de u y de u_t deducimos:

$$U(x;r,0)=U_0(x;r)\quad \text{y}\quad U_t(x;r,0)=U_1(x;r),\quad \forall r>0.$$

■

El Lema 2.8 y el Teorema 2.9 son válidos cuando $N\geq 2$. Veremos que en el caso particular $N=3$ podemos deducir del Teorema 2.9 una fórmula que proporciona la solución clásica del problema de Cauchy (2.2). Suponemos así que $N=3$ y

$$u\in C^2(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$$

es solución clásica del problema de valores iniciales (2.2) con datos $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^3)$. En este caso ($N = 3$), el primer miembro de la ecuación de Euler-Darboux-Poisson toma la forma:

$$U_{tt}(x;\cdot,\cdot) - U_{rr}(x;\cdot,\cdot) - \frac{2}{r}U_r(x;\cdot,\cdot) = \frac{1}{r}\left[(rU)_{tt} - (rU)_{rr}\right](x;\cdot,\cdot).$$

Definimos, por tanto,

$$\widetilde{U}_0(x;r) = rU_0(x;r), \quad \widetilde{U}_1(x;r) = rU_1(x;r) \quad \text{y} \quad \widetilde{U}(x;r,t) = rU(x;r,t),$$

con U_0, U_1 y U dados por (2.7). Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^3$ fijo, $\widetilde{U}$ es solución clásica de

$$\text{(2.8)} \qquad \begin{cases} \widetilde{U}_{tt} - \widetilde{U}_{rr} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \\ \widetilde{U} = 0 \quad \text{sobre } \{0\} \times (0,\infty), \\ \widetilde{U}(x;r,0) = \widetilde{U}_0(x;r), \quad \widetilde{U}_t(x;r,0) = \widetilde{U}_1(x;r) \quad \text{en } \mathbb{R}_+ . \end{cases}$$

En efecto,

$$\widetilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}\,U_r\right) = (U + rU_r)_r = \widetilde{U}_{rr} \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty),$$

y es fácil comprobar que $\widetilde{U}$ satisface las condiciones iniciales y de contorno. Por otro lado, también es fácil ver que $\widetilde{U}_0$ y $\widetilde{U}_1$ satisfacen las condiciones de compatibilidad dadas en (2.5) (de nuevo, basta tener en cuenta el Lema 2.8). En definitiva, podemos aplicar el Teorema 2.6 al problema (2.8) y deducir que éste admite una única solución $\widetilde{U}$ dada por la fórmula (2.6). En particular, si $0 \le r \le t$ tenemos

$$\widetilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{U}_0(x;r+t) - \widetilde{U}_0(x;t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \widetilde{U}_1(x;s)\,ds.$$

De esta última igualdad podemos recuperar el valor $u(x,t)$. Efectivamente, vimos que se satisfacía la igualdad $u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t)$. Así,

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{\widetilde{U}(x;r,t)}{r} = \lim_{r\to 0}\left(\frac{\widetilde{U}_0(x;t+r) - \widetilde{U}_0(x;t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\widetilde{U}_1(x;s)\,ds\right) \\ \qquad = \displaystyle\frac{\partial\widetilde{U}_0}{\partial t}(x;t) + \widetilde{U}_1(x;t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(tU_0(x;t)\right) + tU_1(x;t) \\ \qquad = \displaystyle t\frac{\partial U_0}{\partial t}(x;t) + U_0(x;t) + tU_1(x;t). \end{cases}$$

De la definición de U_0, deducimos

$$U_0(x;t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x;t)} u_0(y)\,dS(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0;1)} u_0(x+t\xi)\,dS(\xi),$$

y de aquí,

$$\frac{\partial U_0}{\partial t}(x;t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0;1)} \nabla u_0(x+t\xi)\cdot\xi\,dS(\xi) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x;t)} \nabla u_0(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)\,dS(y).$$

Volviendo a la ecuación de u, deducimos que si u es solución clásica del problema de Cauchy homogéneo en dimensión $N = 3$, entonces,

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x;t)} (u_0(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x) + tu_1(y))\, dS(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \geq 0. \tag{2.9}$$

Ésta es la llamada *fórmula de Kirchhoff* que demuestra que la única posible solución clásica del problema de Cauchy (2.2) en dimensión $N = 3$ viene dada por (2.9). Queda comprobar que, bajo ciertas hipótesis de regularidad sobre los datos iniciales, esta función u es solución de (2.2) cuando $N = 3$. Se tiene:

Teorema 2.10. Solución del problema de Cauchy homogéneo tridimensional. *Supongamos que $N = 3$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Entonces, la función u dada por (2.9) satisface $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ y es la única solución clásica del problema de Cauchy (2.2).*

Prueba: Recordemos que la función u viene dada por:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(tU_0(x;t)) + tU_1(x;t),$$

donde U_0 y U_1 son, respectivamente, las medias esféricas de u_0 y u_1 en la esfera de centro x y radio t. De la regularidad de los datos u_0 y u_1 y del Lema 2.8 deducimos

$$U_0 \in C^3(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)) \quad \text{y} \quad U_1 \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)),$$

de donde sigue la regularidad de u.

También del Lema 2.8,

$$\begin{cases} u(x,0) = U_0(x;0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = \left(2\dfrac{\partial U_0}{\partial t} + t\dfrac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + U_1 + t\dfrac{\partial U_1}{\partial t}\right)(x;t)|_{t=0} = u_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Finalmente, utilizando la ecuación de Darboux para $N = 3$ (Lema 2.8),

$$\begin{cases} \Delta u(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}(t\Delta U_0(x;t)) + t\Delta U_1(x;t) \\ \qquad = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(t\,\dfrac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}(x;t) + 2\,\dfrac{\partial U_0}{\partial t}(x;t)\right) + \left(t\,\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}(x;t) + 2\,\dfrac{\partial U_1}{\partial t}(x;t)\right) \\ \qquad = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(t\,U_0(x;t))\right] + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(t\,U_1(x;t)) = u_{tt}(x,t), \end{cases}$$

de donde obtenemos la prueba. ■

Observación 2.11. La fórmula (2.9) indica que hay una pérdida de regularidad de la función u respecto de la regularidad de los datos iniciales: si inicialmente $u_0 \in C^s(\mathbb{R}^3)$ y $u_1 \in C^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ con $s \geq 3$, entonces la función u dada por (2.9) satisface $u(\cdot,t) \in C^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ y $u_t(\cdot,t) \in C^{s-2}(\mathbb{R}^3)$ en un tiempo posterior $t > 0$. ■

Observación 2.12. La fórmula (2.9) también da la solución del problema de Cauchy homogéneo para tiempos $t < 0$: Si definimos $v(x,t) = u(x,-t)$, con $t > 0$, es fácil comprobar que v es la solución clásica de (2.2) asociada a los datos iniciales u_0 y $-u_1$. Utilizando la fórmula (2.9) para v y teniendo en cuenta que $u(x,t) = v(x,-t)$ para $t < 0$, obtenemos

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x;-t)} (u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x) + t u_1(y)) \, dS(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \ \forall t \le 0.$$

■

Observación 2.13. De nuevo, la solución del problema de Cauchy (2.2) dada por (2.9) depende de forma continua respecto de los datos iniciales. En concreto, si $\{u_n^0\}_{n\ge1} \subset C^3(\mathbb{R}^3)$, $\{u_n^1\}_{n\ge1} \subset C^2(\mathbb{R}^3)$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ son tales que

$$\begin{cases} u_n^0 \to u_0 \quad \text{uniformemente en los compactos de } \mathbb{R}^3, \\ \nabla u_n^0 \to \nabla u_0 \quad \text{uniformemente en los compactos de } \mathbb{R}^3 \text{ y} \\ u_n^1 \to u_1 \quad \text{uniformemente en los compactos de } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

entonces, $u_n \to u$ uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, siendo u_n y u, respectivamente, las funciones dadas por (2.9) asociadas a (u_n^0, u_n^1) y (u_0, u_1). ■

2.4. El problema de Cauchy en dimensión $N = 2$. Método de descenso de Hadamard

Cuando $N = 2$, hacer el cambio $\widetilde{U}(x;r,t) = rU(x;r,t)$ no funciona para transformar la ecuación de Euler-Poisson-Darboux en la ecuación de ondas unidimensional. En lugar de esto, miraremos el problema de Cauchy (2.2) para $N = 2$ como si fuera un problema en dimensión $N = 3$ que no depende de la tercera variable espacial. Trabajaremos con datos iniciales $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ resuelve el problema de Cauchy (2.2) para $N = 2$ y definamos

$$\bar{u}(x_1,x_2,x_3,t) = u(x_1,x_2,t), \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \ge 0.$$

Entonces, $\bar{u} \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ y $\bar{u}$ es solución clásica del problema (2.2) para $N = 3$ asociada a los datos iniciales (independientes de la variable x_3)

$$\bar{u}_0(x_1,x_2,x_3) = u_0(x_1,x_2) \quad \text{y} \quad \bar{u}_1(x_1,x_2,x_3) = u_1(x_1,x_2), \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

También se tiene lo contrario: Sea $\bar{u} \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ una solución del problema de Cauchy (2.2) para $N = 3$ asociada a los datos iniciales $\bar{u}_0$ y $\bar{u}_1$ (definidos mediante las igualdades anteriores). Entonces, $\bar{u}$ viene definida mediante la fórmula (2.9) y, debido a que $\bar{u}_0$ y $\bar{u}_1$ son independientes de x_3, $\bar{u}$ no depende de la variable x_3. Deducimos que

$$\bar{u}(x_1,x_2,x_3,t) = \bar{u}(x_1,x_2,0,t) = u(x_1,x_2,t), \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \ge 0,$$

y que $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ es solución del problema (2.2) para $N = 2$ y para datos iniciales u_0 y u_1. Utilizaremos esta equivalencia para dar una fórmula de la solución u del problema (2.2) en dimensión $N = 2$.

Con la notación previa y de lo visto en la sección anterior, tenemos que

$$u(x,t) = \bar{u}(\bar{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\big(t\bar{U}_0(\bar{x};t)\big) + t\bar{U}_1(\bar{x};t),$$

donde mediante x y $\bar{x}$ denotamos los puntos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ y donde $\bar{U}_0$ y $\bar{U}_1$ son, respectivamente, las medias de $\bar{u}_0$ y $\bar{u}_1$ sobre la esfera de centro $\bar{x}$ y radio t. Obsérvese que, por ejemplo,

$$t\,\bar{U}_0(\bar{x};t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(\bar{x};t)} u_0(y_1,y_2)\,dS(y_1,y_2,y_3).$$

Podemos calcular esta integral teniendo en cuenta que sobre la esfera $\partial B(\bar{x};t)$ se tiene

$$y_3 = \pm\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2},$$

(cada uno de los signos corresponde a cada una de las semiesferas) cuyo elemento de área es

$$dS(y_1,y_2,y_3) = \frac{t}{\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}\,dy_1\,dy_2 = \frac{t}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy_1\,dy_2\,.$$

Así,

$$t\,\bar{U}_0(\bar{x};t) = \frac{2}{4\pi t}\int_{B(x;t)} u_0(y)\frac{t}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy_1\,dy_2,$$

y de aquí,

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{B(x;t)}\frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{B(x;t)}\frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy.$$

Usando de nuevo el teorema de derivación respecto de parámetros (haciendo previamente el cambio de variables $y = x + t\xi$) podemos calcular la derivada respecto de t de la primera integral, obteniendo:

$$(2.10)\qquad \left\{\begin{aligned} u(x,t) = {}& \frac{1}{2\pi t}\int_{B(x;t)}\frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{B(x;t)}\frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy \\ & + \frac{1}{2\pi t}\int_{B(x;t)}\frac{\nabla u_0(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy, \quad \forall x\in\mathbb{R}^2, \quad t\geq 0. \end{aligned}\right.$$

Ésta es la llamada *fórmula de Poisson* que da la solución de problema de Cauchy homogéneo (2.2) en el caso bidimensional. El método que permite calcular la solución de (2.2) en el caso bidimensional a partir de la solución en el caso tridimensional se debe a Hadamard y se denomina *método de descenso de Hadamard*. Resumiendo, hemos probado,

Teorema 2.14. Solución del problema de Cauchy homogéneo bidimensional. *Supongamos que $N = 2$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Entonces, la función u dada por (2.10) satisface $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ y es la única solución clásica del problema de Cauchy (2.2).* ■

Observación 2.15. De nuevo, la fórmula (2.10) indica que hay una pérdida de regularidad de la función u respecto de la regularidad de los datos iniciales: como en el caso tridimensional, si inicialmente $u_0 \in C^s(\mathbb{R}^2)$ y $u_1 \in C^{s-1}(\mathbb{R}^2)$ con $s \geq 3$, entonces la función u dada por (2.10) satisface $u(\cdot,t) \in C^{s-1}(\mathbb{R}^2)$ y $u_t(\cdot,t) \in C^{s-2}(\mathbb{R}^2)$ en un tiempo posterior $t > 0$. ■

Observación 2.16. También la fórmula (2.10) da la solución del problema de Cauchy homogéneo para tiempos $t < 0$. Para obtener la fórmula de $u(x,t)$ cuando $t \leq 0$, basta hacer un razonamiento análogo al hecho en la Observación 2.12. ■

Observación 2.17. Otra vez, la solución del problema de Cauchy (2.2) dada por (2.10) depende de forma continua respecto de los datos iniciales. En concreto, si $\{u_n^0\}_{n\geq 1} \subset C^3(\mathbb{R}^2)$, $\{u_n^1\}_{n\geq 1} \subset C^2(\mathbb{R}^2)$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ son tales que

$$\begin{cases} u_n^0 \to u_0 \quad \text{uniformemente en los compactos de } \mathbb{R}^2, \\ \nabla u_n^0 \to \nabla u_0 \quad \text{uniformemente en los compactos de } \mathbb{R}^2 \text{ y} \\ u_n^1 \to u_1 \quad \text{uniformemente en los compactos de } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

entonces, $u_n \to u$ uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$, siendo u_n y u, respectivamente, las funciones dadas por (2.10) asociadas a (u_n^0, u_n^1) y (u_0, u_1). ■

2.5. Dominios de dependencia y de influencia. Principio de Huygens

Consideramos de nuevo el problema de Cauchy homogéneo (2.2) en dimensiones $N = 1$, 2 o 3. Las correspondientes soluciones de este problema vienen dadas por (2.3), (2.10) y (2.9). Analizaremos los conceptos de dominio de dependencia y de influencia en cada una de las dimensiones.

2.5.1. Caso unidimensional

Observando la fórmula (2.3) tenemos que, dado $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ $(N = 1)$, la solución $u(x,t)$ depende de los valores de los datos iniciales u_0 y u_1 en el intervalo $[x-t, x+t]$:

Así, el dominio de dependencia del punto (x,t) es el intervalo $[x-t, x+t]$. Al contrario, si tomamos un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ en $t = 0$, este punto influye, en el cálculo de u, en los puntos que se encuentran en el cono

$$\mathcal{C}(x_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : |x - x_0| \leq t\}.$$

Obsérvese también que si $u_0 \equiv 0$ y $u_1 \equiv 0$ en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, entonces, la función u es nula en el cono

$$\mathcal{A}([a,b]) = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : x \in [a+t, b-t]\}.$$

En efecto, si $(x,t) \in \mathcal{A}([a,b])$, entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds,$$

pero $a \leq x+t \leq b$ y $a \leq x-t \leq b$ y así, u_0 y u_1 son nulos.

Por último, si suponemos que $\operatorname{sop} u_0$, $\operatorname{sop} u_1 \subset [a,b]$, entonces, fijado $t \geq 0$, se tiene que $\operatorname{sop} u(\cdot,t) \subset [a-t, b+t]$. Podemos así definir el dominio de influencia del intervalo $[a,b]$ como el conjunto

$$\mathcal{C}([a,b]) = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : x \in [a-t, b+t]\}.$$

Obsérvese que la velocidad de propagación de la onda unidimensional es 1 pues si, p.e., $x_0 < a$ (con $\operatorname{sop} u_0$, $\operatorname{sop} u_1 \subset [a,b]$) tienen que pasar $a - x_0$ unidades de tiempo para que la onda llegue al punto x_0. Esta propiedad de velocidad finita de propagación es otra de las grandes diferencias existentes entre la ecuación del calor y la ecuación de ondas.

2.5.2. Caso bidimensional

Podemos hacer un análisis muy parecido de la solución del problema de Cauchy en el caso $N = 2$. Observando la fórmula (2.10), deducimos que si $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$, la solución $u(x,t)$ depende de los valores u_0 y u_1 en el círculo $\overline{B}(x,t)$:

Esta bola sería el dominio de dependencia del punto (x,t). Al contrario, si tomamos un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ en $t = 0$, éste influye en el cálculo de u en los puntos del cono

$$\mathcal{C}(x_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) : |x - x_0| \leq t\},$$

que llamaremos *dominio de influencia* del punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

De nuevo se tiene que, si $u_0 \equiv u_1 \equiv 0$ en un círculo $\overline{B}(x_0,r_0)$, entonces, u es nula en el cono

$$\mathcal{A}(\overline{B}(x_0,r_0)) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) : x \in \overline{B}(x_0, r_0 - t)\},$$

(basta tener en cuenta la fórmula (2.10)).

Si suponemos ahora que $\operatorname{sop} u_0$, $\operatorname{sop} u_1 \subset \overline{B}(x_0, r_0)$, entonces, dado $t \geq 0$, se tiene que $\operatorname{sop} u(\cdot, t) \subset \overline{B}(x_0, r_0 + t)$. Se tiene así que el *dominio de influencia* de $\overline{B}(x_0, r_0)$ es el conjunto:

$$\mathcal{C}(\overline{B}(x_0, r_0)) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) : x \in \overline{B}(x_0, r_0 + t)\}.$$

Otra vez, la velocidad de propagación de la onda es 1. Si, p.e., $\operatorname{sop} u_0$, $\operatorname{sop} u_1 \subset \overline{B}(x_0, r_0)$ y x es tal que $|x - x_0| > r_0$, entonces, inicialmente $u(x, t)$ es nula, en concreto, si

$$t \leq T_0 = |x - x_0| - r_0 = \operatorname{dist}(x, \overline{B}(x_0, r_0)),$$

entonces, $\overline{B}(x, t) \cap \overline{B}(x_0, r_0) = \emptyset$ y, en consecuencia, $u(x, t) \equiv 0$. Para tiempos $t > T_0$, se tiene

$$\overline{B}(x, t) \cap \overline{B}(x_0, r_0) \neq \emptyset$$

y $u(x, t)$ es no nula: En otras palabras, cuando generamos una perturbación en $\overline{B}(x_0, r_0)$, se crea un frente de onda que se va propagando circularmente a velocidad 1 y que llega a un punto $x \in \mathbb{R}^2$ en el tiempo $T_0 = \operatorname{dist}(x, \overline{B}(x_0, r_0))$. Una vez pasado el frente de la onda, es decir, para $t > T_0$, el efecto de la perturbación sigue afectando al punto x, aunque, cuando el tiempo avanza, la onda se va disipando.

2.5.3. Caso tridimensional. Principio de Huygens

Haremos un análisis parecido al hecho en los casos $N = 1$ y $N = 2$, cuando $N = 3$. Dado $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T)$, la solución $u(x, t)$ depende de los valores de u_0 y u_1 (los datos iniciales) sobre la superficie esférica $\partial B(x; t)$: $\partial B(x; t)$ es, por tanto, el dominio de dependencia del punto (x, t). Recíprocamente, si $x_0 \in \mathbb{R}^3$ en $t = 0$, este punto influye en el cálculo de la función u en los puntos que están sobre el conjunto

$$\mathcal{C}(x_0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) : |x - x_0| = t\},$$

conjunto que llamaremos *dominio de influencia* del punto x_0 (se trata de un cono de $\mathbb{R}^4$).

De nuevo, si u_0 y u_1 tienen soporte compacto en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, si $\operatorname{sop} u_0$, $\operatorname{sop} u_1 \subset K$, con K un compacto de $\mathbb{R}^3$, entonces, para que $u(x, t) \neq 0$, la esfera $\overline{B}(x; t)$ debe cortar al soporte

K, es decir, $t \geq \text{dist}\,(x, K)$, o de manera equivalente, $x \in K_t$, donde

$$K_t = \{y \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}\,(y, K) \leq t\}.$$

Obtenemos otra vez que, $\forall t \geq 0$, $\text{sop}\, u(\cdot, t) \subset K_t$ y, en consecuencia, $u(\cdot, t) \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$.

En realidad, el soporte de la función $u(\cdot, t)$ es más pequeño que el conjunto K_t. Supongamos por comodidad que

$$\text{sop}\, u_0,\ \text{sop}\, u_1 \subset \overline{B}(x_0; r_0),$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $r_0 > 0$ y tomemos $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $|x - x_0| > r_0$. Inicialmente, la función $u(x, t)$ es nula, en concreto, si $t < T_0(x)$ con

$$T_0(x) = \text{dist}\,(x, \overline{B}(x_0; r_0)) = |x - x_0| - r_0,$$

tenemos que $u(x, t) = 0$ (pues $\partial \overline{B}(x; t) \cap \overline{B}(x_0; r_0) = \emptyset$). Por otro lado, sea

$$T_1(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x_0; r_0)} |x - y| = r_0 + |x - x_0|,$$

y tomemos $t > T_1(x)$, entonces, $u(x, t) = 0$ (de nuevo, $\partial \overline{B}(x; t) \cap \overline{B}(x_0; r_0) = \emptyset$). Deducimos de este análisis que, para que $u(x, t) \neq 0$, se debe tener $t \in [T_0(x), T_1(x)]$, es decir,

$$|x - x_0| - r_0 \leq t \leq |x - x_0| + r_0,$$

lo que equivale a $x \in \overline{B}(x_0; t + r_0) \setminus B(x_0; t - r_0)$. En resumen, dado $t \geq 0$, se tiene que $\text{sop}\, u(\cdot, t) \subset \overline{B}(x_0; t + r_0) \setminus B(x_0; t - r_0)$.

Así, una perturbación que se origina (inicialmente) en $\overline{B}(x_0; r_0)$, está confinada en cada tiempo $t \geq 0$ en una corona centrada en x_0 y de amplitud $2r_0$, corona que se va expandiendo a velocidad 1. Este comportamiento de las ondas tridimensionales está de acuerdo con lo que ocurre con las ondas de sonido: Un sonido que está producido inicialmente en $\overline{B}(x_0; r_0)$, tarda un tiempo en llegar a los oídos de un receptor que esté situado a cierta distancia. Este receptor capta el sonido durante un tiempo (casi inapreciable debido a que la velocidad del sonido es alta) y después deja de percibir la señal. Este es el *principio de Huygens*, principio debido al hecho de que el dominio de dependencia de (x, t) es la **superficie** de la esfera $\overline{B}(x; t)$ y no la propia esfera (como ocurre en el caso bidimensional). En dimensión $N = 2$ este principio no se satisface: las perturbaciones producidas en el tiempo inicial $t = 0$ se propagan con velocidad finita (velocidad 1) y tardan un cierto tiempo en llegar a un punto x_0 pero, una vez que alcanzan el punto, esta perturbación nunca muere (compárese con las ondas producidas por una piedra en un estanque).

2.6. El problema no homogéneo

Pasamos a tratar en esta sección el problema de Cauchy no homogéneo para la ecuación de ondas (2.1). Utilizando el *principio de superposición* constatamos que, para resolver (2.1) basta plantear el problema de Cauchy no homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{2.11}$$

con $T \in (0,\infty]$ y $f : \mathbb{R}^N \times [0,T) \to \mathbb{R}$ dada ($N = 1$, 2 o 3). Otra vez resolveremos (2.11) utilizando el *principio de Duhamel*: Definimos $U(x,t;s)$ a través del problema de Cauchy homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{ll} U_{tt}(\cdot,\cdot;s) - \Delta U(\cdot,\cdot;s) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (s,\infty), \\ U(x,s;s) = 0, \quad U_t(x,s;s) = f(x,s) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Se trata de un problema de Cauchy homogéneo con tiempo inicial $t = s$.

Definamos

$$u(x,t) = \int_0^t U(x,t;s)\,ds, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall t \in [0,T). \tag{2.13}$$

El principio de Duhamel aserta que u es solución del problema de Cauchy no homogéneo (2.11).

Teorema 2.18. Solución de la ecuación de ondas no homogénea. *Supongamos que $T \in (0,\infty]$, $N = 1$, 2 o 3 y $f \in C^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$. Entonces, la función u dada por* (2.13) *satisface $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ y es la única solución clásica de* (2.11).

Prueba: Bajo la hipótesis $f \in C^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$, tenemos $f(\cdot,s) \in C^1(\mathbb{R})$, si $N = 1$, y $f(\cdot,s) \in C^2(\mathbb{R}^N)$, si $N = 2$ o 3. Utilizando el Teorema 2.6 (para $N = 1$), Teorema 2.14 (para $N = 2$) y Teorema 2.10 (para $N = 3$) obtenemos que la solución U del problema (2.12) satisface $U(\cdot,\cdot;s) \in C^2(\mathbb{R}^N \times [s,\infty))$, para cada $s \in [0,T)$. En consecuencia, $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,T))$.

Por otro lado,

$$\left\{\begin{aligned} u_t(x,t) &= U(x,t;t) + \int_0^t U_t(x,t;s)\,ds = \int_0^t U_t(x,t;s)\,ds, \\ u_{tt}(x,t) &= U_t(x,t;t) + \int_0^t U_{tt}(x,t;s)\,ds = f(x,t) + \int_0^t \Delta U(x,t;s)\,ds \\ &= f(x,t) + \Delta u(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T). \end{aligned}\right.$$

También es fácil comprobar que $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Deducimos así que la función u definida mediante (2.13) es solución clásica del problema de Cauchy (2.11).

Finalmente, la unicidad de solución del problema homogéneo (2.2) implica la unicidad de solución clásica para el problema (2.11). ■

Daremos a continuación una fórmula explícita para la solución del problema de Cauchy (2.11). Para ello, sea $V(x,t;s)$ ($s \in [0,T)$) la solución del problema

$$\left\{\begin{array}{ll} V_{tt}(\cdot,\cdot;s) - \Delta V(\cdot,\cdot;s) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ V(x,0;s) = 0, \quad V_t(x,0;s) = f(x,s) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{array}\right.$$

Entonces, es fácil comprobar que la solución U del problema (2.12) viene dada por

$$U(x,t;s) = V(x,t-s;s), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad T > t \geq s \geq 0,$$

(igualdad que, en particular, dice que la ecuación de ondas es invariante respecto de traslaciones en tiempo).

Utilizando las fórmulas (2.3), (2.10) y (2.9), tenemos

$$U(x,t;s) = V(x,t-s;s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)\,dy & \text{si } N = 1, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{B(x;t-s)} \dfrac{f(y,s)}{\sqrt{|t-s|^2 - |x-y|^2}}\,dy & \text{si } N = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi(t-s)}\displaystyle\int_{\partial B(x;t-s)} f(y,s)\,dS(y) & \text{si } N = 3, \end{cases}$$

y así,

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \left(\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)\,dy\right) ds & \text{si } N = 1, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^t \left(\int_{B(x;t-s)} \dfrac{f(y,s)}{\sqrt{|t-s|^2 - |x-y|^2}}\,dy\right) ds & \text{si } N = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{t-s}\left(\int_{\partial B(x;t-s)} f(y,s)\,dS(y)\right) ds & \text{si } N = 3. \end{cases}$$

Corolario 2.19. Existencia y unicidad de solución de (2.1). *Supongamos que $N = 1$, 2 o 3, $u_0 \in C^{[\frac{N}{2}]+2}(\mathbb{R}^N)$, $u_1 \in C^{[\frac{N}{2}]+1}(\mathbb{R}^N)$ y $f \in C^{[\frac{N}{2}]+1}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ con $T \in (0,\infty]$. Entonces, el problema de Cauchy no homogéneo (2.1) posee una única solución clásica $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,T))$.*
■

Observación 2.20. Como siempre, es posible dar un resultado de dependencia continua de la solución clásica de (2.1) respecto de los datos del problema: *Sean $\{u_n^0\}_{n\geq 1}$, $\{u_n^1\}_{n\geq 1}$ y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tres sucesiones y u_0, u_1 y f tres funciones tales que*

$$\begin{cases} u_n^0, u_0 \in C^{[\frac{N}{2}]+2}(\mathbb{R}^N), \quad u_n^1, u_1 \in C^{[\frac{N}{2}]+1}(\mathbb{R}^N), \quad \forall n \geq 1, \\ f_n, f \in C^{[\frac{N}{2}]+1}(\mathbb{R}^N \times [0,T)), \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Supongamos además que

$$\begin{cases} u_n^0 \to u_0 \text{ uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}^N, \\ \nabla u_n^0 \to \nabla u_0 \text{ uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}^N, \\ u_n^1 \to u_1 \text{ uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}^N \text{ y} \\ f_n \to f \text{ uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}^N \times [0,T). \end{cases}$$

Entonces,

$$u_n \to u \text{ uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}^N \times [0,T)$$

donde u_n y u son, respectivamente, las soluciones clásicas del problema de Cauchy (2.1) asociadas a (u_n^0, u_n^1, f_n) y a (u_0, u_1, f) proporcionadas por el Corolario 2.19. ■

2.7. Energía y unicidad

Daremos en esta sección algunos resultados adicionales para la ecuación de ondas utilizando el llamado método de la energía. Comenzamos estudiando el problema de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{en } \Omega \times (0,T), \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0, \quad u_t(x,0) = u_1 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado con frontera de clase C^1, $T \in (0,\infty]$ y las funciones $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$, $u_1 \in C^1(\overline{\Omega})$, $g \in C^0(\partial\Omega \times (0,T))$ y $f \in C^1(\overline{\Omega} \times (0,T))$ están dadas. Como viene siendo habitual, estamos interesados en el estudio de las soluciones clásicas del problema (2.14), es decir, en las funciones $u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0,T))$ que satisfacen la EDP, la condición de contorno y las condiciones iniciales de (2.14) puntualmente.

Supongamos que $u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0,T))$ es solución clásica de (2.14). Introducimos el llamado *funcional de energía* dado por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\,dx, \quad \forall t \in [0,T),$$

que a su vez es suma de la *energía cinética* (primer sumando) y de la *energía potencial* (segundo sumando).

Teorema 2.21. Conservación de la energía. *Sea $T \in (0,\infty]$. Supongamos que $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T))$ es solución clásica de (2.14) para $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$, $u_1 \in C^1(\overline{\Omega})$, $f \equiv 0$ y $g \equiv 0$. Entonces,*

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_1(x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2\,dx, \quad \forall t \in [0,T).$$

Prueba: Es fácil comprobar que $E \in C^1([0,T))$ y que se tiene

$$\begin{cases} E'(t) = \displaystyle\int_\Omega u_t(x,t)u_{tt}(x,t)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla u_t(x,t)\,dx \\ \qquad\;\, = \displaystyle\int_\Omega u_t(x,t)\left[u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t)\right]\,dx = 0, \end{cases}$$

pues $u(x,t) = 0$ para $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,T)$ y en consecuencia, $u_t(x,t) = 0$ sobre $\partial\Omega \times [0,T)$. Obtenemos de este modo el resultado. ■

Una consecuencia inmediata del resultado previo es:

Corolario 2.22. Unicidad de solución del problema (2.14). *Existe a lo sumo una función $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T))$ solución clásica del problema (2.14).* ■

Mediante el método de la energía examinaremos otra vez el dominio de dependencia y la velocidad de propagación de las soluciones de la ecuación de ondas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Para este fin, supongamos que $u \in C^2(\Omega \times [0,T))$, con $T \in (0,\infty)$, resuelve

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,T).$$

Fijemos $x_0 \in \Omega$ y $R_0 \in (0,T)$ tales que $\overline{B}(x_0;R_0) \subset \Omega$ y consideremos el cono

$$\mathcal{C} = \{(x,t) : t \in [0,T],\ |x - x_0| \le R_0 - t\} \subset \Omega \times [0,T).$$

Se tiene:

Teorema 2.23. Velocidad finita de propagación. *En las condiciones anteriores, si* $u(x,0) = u_t(x,0) \equiv 0$ *en* $B(x_0;R_0)$*, entonces* $u \equiv 0$ *en el cono* $\mathcal{C}$*.*

Prueba: Consideramos de nuevo el funcional energía en $B(x_0;R_0-t)$ dado por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{B(x_0;R_0-t)} |u_t(x,t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{B(x_0;R_0-t)} |\nabla u(x,t)|^2\,dx, \quad \forall t \in [0,R_0].$$

Dado que $\overline{B}(x_0;R_0) \subset \Omega$, tenemos que la función $E(t)$ está bien definida y es derivable en el intervalo $[0,R_0]$. Efectivamente, se tiene que $E(t) = F(t,t)$, siendo $F : [0,T) \times [0,R_0] \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$F(s,t) = \frac{1}{2}\int_{B(x_0;R_0-t)} |u_t(x,s)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{B(x_0;R_0-t)} |\nabla u(x,s)|^2\,dx.$$

En consecuencia,

$$\begin{cases} E'(t) = \dfrac{\partial F}{\partial s}(t,t) + \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,t) \\ \quad = \displaystyle\int_{B(x_0;R_0-t)} \left[u_t(x,t)u_{tt}(x,t) + \nabla u(x,t)\cdot\nabla u_t(x,t)\right]\,dx \\ \quad - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial B(x_0;R_0-t)} \left[|u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right]\,dS(x) \\ \quad = \displaystyle\int_{B(x_0;R_0-t)} u_t(x,t)\left[u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t)\right]\,dx + \int_{\partial B(x_0;R_0-t)} \frac{\partial u}{\partial n}(x,t)u_t(x,t)\,dS(x) \\ \quad - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial B(x_0;R_0-t)} \left[|u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right]\,dS(x) \\ \quad = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial B(x_0;R_0-t)} \left[|u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 - 2\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)u_t(x,t)\right]\,dS(x). \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)u_t(x,t)\right| = |u_t(x,t)\nabla u(x,t)\cdot n| \le |u_t(x,t)||\nabla u(x,t)| \le \frac{1}{2}(|u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2).$$

Combinando estas dos últimas desigualdades deducimos que $E'(t) \le 0$ en $[0,R_0]$ y, así,

$$E(t) \le E(0) \equiv 0, \quad \forall t \in [0,R_0].$$

Concluimos que u_t y ∇u son idénticamente nulos en el cono $\mathcal{C}$ y, en consecuencia, $u \equiv 0$ en $\mathcal{C}$. Obtenemos de este modo la prueba del Teorema 2.23. ■

Observación 2.24. En particular el Teorema 2.23 afirma que cualquier perturbación que inicialmente se origine fuera de $\overline{B}(x_0;R_0)$ no tiene efecto en el cono $\mathcal{C}$ y, por tanto, no llega al punto x_0 antes de tanscurridos R_0 unidades de tiempo: *velocidad finita de propagación.* ■

Bibliografía

[1] EVANS, L.C., *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[2] JOHN, F., *Partial Differential Equations,* Fourth edition, Applied Mathematical Sciences 1, Springer-Verlag, New York, 1982.

[3] PERAL, I., *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Editorial Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1995.