Examen 2

Ecuaciones en derivadas parciales

por: **Kevin Mateo Cárdenas**

profesor: **Jairo Eloy Castellanos**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Antioquia

2023

Teorema 1. *Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ siendo la solución de la ecuación $u_t = a^2 u_{xx} + bu_x + cu + f(x,t)$ donde a, b, c son constantes reales y f es una función dada. Defina la función v por $v(x,t) = e^{-ct}u(x - bt, t)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$. Entonces v satisface la ecuación no homogénea $v_t = a^2 v_{xx} + e^{-ct} f(x - bt, t)$.*

Demostración. Note que si tomamos $u(\xi, \eta)$, una solución de la ecuación

$$u_\eta = a^2 u_{\xi\xi} + bu_\xi + cu + f(\xi, \eta), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta > 0$$

Entonces, si definimos $v(x,t) = e^{-ct}u(x - bt, t)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
v_t &= -ce^{-ct}u(x - bt, t) + e^{-ct}(u_\eta(x - bt, t) - bu_\xi(x - bt, t)) \\
&= e^{-ct}(u_\eta(x - bt, t) - bu_\xi(x - bt, t) - cu(x - bt, t)) \\
v_x &= e^{-ct}u_\xi(x - bt, t) \\
v_{xx} &= e^{-ct}u_{\xi\xi}(x - bt, t)
\end{aligned}$$

Y reemplazando en la ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned}
v_t - a^2 v_{xx} &= e^{-ct}(u_\eta(x - bt, t) - bu_\xi(x - bt, t) - cu(x - bt, t)) - a^2 e^{-ct}u_{\xi\xi}(x - bt, t) \\
&= e^{-ct}(u_\eta(x - bt, t) - bu_\xi(x - bt, t) - cu(x - bt, t) - a^2 u_{\xi\xi}(x - bt, t)) \\
&= e^{-ct} f(x - bt, t)
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2. Resuelve el PVI

$$\begin{aligned}
u_t &= a^2 u_{xx} + bu_x + cu + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

con los siguientes datos:

1. $f(x,t) = t \sin x, \quad u_0 = 1, \quad a = c > 0, \quad b = 0.$

2. $f(x,t) = h(t) \in C^1([0,\infty))$ y u_0 es una función continua acotada.

`Solución:`

1. $f(x,t) = t\sin x, \quad u_0 = 1, \quad a = c > 0, \quad b = 0.$

   Para este caso, tenemos que $f(x,t) = t\sin x$, $u_0 = 1$, $a = c > 0$ y $b = 0$. Entonces, por el teorema anterior, tenemos que $v(x,t) = e^{-ct}u(x,t)$ satisface la ecuación no homogénea $v_t = a^2 v_{xx} + e^{-ct}f(x,t)$. Entonces, tenemos que u es solución del problema inicial.

   Por lo que basta resolver el PVI

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} + e^{-ct}f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ v(x,0) &= e^{-c0}u_0(x) = u_0(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Este problema se resuelve a partir del principio de Duhamel, es decir, dividimos el problema en dos problemas, (1) y otro (2). Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > s \\ v(x,s) &= f(x - bt, s), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ v(x,0) &= u_0(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Entonces, la solución del problema homogéneo (2) es

$$v_h(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} u_0(\xi) d\xi$$

   y la solución del problema homogéneo (1) es

$$v_p(x,t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tau \sin\xi d\xi$$

Por lo que la solución del problema es

$$v(x,t) = v_h(x,t) + \int_0^t v_p(x,t,\tau)d\tau$$

queda

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \\
&\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tau \sin(\xi - b\tau) d\xi d\tau \\
&= 1 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tau \sin(\xi - b\tau) d\xi d\tau
\end{aligned}$$

entonces la solución del problema inicial es

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= e^{ct} v(x+bt,t) \\
&= e^{ct} \left(1 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x+bt-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tau \sin(\xi - b\tau) d\xi d\tau \right)
\end{aligned}$$

2. $f(x,t) = h(t) \in C^1([0,\infty))$ y u_0 es una función continua acotada.

   Para este caso, tenemos que $f(x,t) = h(t) \in C^1([0,\infty))$ y u_0 es una función continua acotada. Entonces, por el teorema anterior, tenemos que $v(x,t) = e^{-ct}u(x,t)$ satisface la ecuación no homogénea $v_t = a^2 v_{xx} + e^{-ct} f(x,t)$. Entonces, tenemos que

   Por lo que basta resolver el PVI

$$\begin{aligned}
v_t &= a^2 v_{xx} + e^{-ct} h(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\
v(x,0) &= e^{-c0} u_0(x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Este problema se resuelve a partir del principio de Duhamel, es decir, dividimos el problema en dos problemas, (1) y (2). Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
v_t &= a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > s \\
v(x,s) &= h(s), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

y

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$
$$v(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Entonces, la solución del problema (2) es

$$v_h(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} u_0(\xi) d\xi$$

y la solución del problema (1)

$$v_p(x,t.\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} h(\tau) d\xi$$

Por lo que la solución del problema es

$$v(x,t) = v_h(x,t) + \int_0^t v_p(x,t,\tau) d\tau$$

queda

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} h(\tau) d\xi d\tau$$

Y la solución del problema inicial es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{ct} v(x+bt,t) \\ &= e^{ct} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x+bt-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x+bt-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} h(\tau) d\xi d\tau \Big) \end{aligned}$$

Habría que demostrar que la solución al aplicar el principio de Duhamel es en efecto una solución.

Si $v_h(x,t,s)$ es solución del problema

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > s \\ v(x,s) &= f(x,s), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y v_p es solución del problema

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ v(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

entonces $v = v_p + \int_0^t v_h(x,t,\tau)d\tau$ es solución del problema, pues

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\partial}{\partial t}\left(v_p + \int_0^t v_h(x,t,\tau)d\tau\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}v_p + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t v_h(x,t,\tau)d\tau\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}v_p + \int_0^t \frac{\partial v_p(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau + v_h(x,t,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}v_p + \int_0^t \frac{\partial v_p(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau + f(x,t) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(v_p + \int_0^t v_h(x,t,\tau)d\tau)) \\ &= \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t v_h(x,t,\tau)d\tau \\ &= \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 v_h(x,t,\tau)}{\partial x^2}d\tau \end{aligned}$$

y al reemplazar en la ecuación, tenemos que

$$
\begin{aligned}
v_t - a^2 v_{xx} &= \frac{\partial}{\partial t} v_p + \int_0^t \frac{\partial v_h(x,t,\tau)}{\partial t} d\tau + f(x,t) - a^2 \left(\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 v_h(x,t,\tau)}{\partial x^2} d\tau \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} v_p - a^2 \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} + \int_0^t \frac{\partial v_h(x,t,\tau)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v_h(x,t,\tau)}{\partial x^2} d\tau + f(x,t) \\
&= f(x,t)
\end{aligned}
$$

y la condición inicial se cumple, pues

$$
\begin{aligned}
v(x,0) &= v_p(x,0) + \int_0^0 v_h(x,0,\tau) d\tau \\
&= u_0(x)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3. Supongamos que $u_0 \in C(\mathbb{R})$ satisface la condición de que $|u_0(x)| \leq Me^{-\delta|x|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para algunas constantes $M > 0, \delta > 0$. Demuestre que la solución u de la ecuación de calor $u_t = a^2 u_{xx}$ con dato inicial u_0 satisface la estimativa

$$|u(x,t)| \leq M(1 + 4a^2\delta t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\delta|x|^2}{1 + 4a^2\delta t}\right)$$

`Solución:`

Tenemos el problema

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donde $u_0 \in C(\mathbb{R})$ satisface la condición de que $|u_0(x)| \leq Me^{-\delta|x|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para algunas constantes $M > 0, \delta > 0$.

Sabemos que la solución viene dada por

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi$$

y si $|u_0(x)| \leq Me^{-\delta|x|^2}$, entonces

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |u_0(\xi)| d\xi \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} Me^{-\delta|\xi|^2} d\xi \\ &= \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} - \delta|\xi|^2} d\xi \end{aligned}$$

Hagamos por aparte la integral

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}-\delta|\xi|^2}d\xi &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}e^{-\delta|\xi|}d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}e^{-\delta|\xi|^2}d\xi \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}e^{-\delta|\xi|^2}d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}e^{-\delta|\xi|^2}d\xi \\
&= 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}-\delta\xi^2}d\xi
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}+\delta\xi^2 &= \frac{x^2-2x\xi+\xi^2}{4a^2t}+\delta\xi^2 \\
&= \frac{x^2-2x\xi+\xi^2+4a^2t\delta\xi^2}{4a^2t} \\
&= \frac{x^2-2x\xi+(4a^2\delta t+1)\xi^2}{4a^2t}
\end{aligned}$$

Completando cuadrados tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}+\delta\xi^2 &= \frac{x^2-2x\xi+(4a^2\delta t+1)\xi^2}{4a^2t} \\
&= \frac{x^2-2x\xi+(4a^2\delta t+1)\xi^2+x^2(1+4a^2\delta t)^{-1}-x^2(1+4a^2\delta t)^{-1}}{4a^2t} \\
&= \frac{(x(1+4a^2\delta t)^{-1/2}-\xi(1+4a^2\delta t)^{1/2})^2}{4a^2t}-\frac{x^2(1+4a^2\delta t)^{-1}-x^2}{4a^2t}
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\frac{x^2(1+a^2\delta t)^{-1}-x^2}{4a^2t} &= \frac{\frac{x^2}{1+4a^2\delta t}-x^2}{4a^2t} \\
&= \frac{x^2-x^2(1+4a^2\delta t)}{4a^2t(1+4a^2\delta t)} \\
&= \frac{x^2(4a^2\delta t)}{4a^2t(1+4a^2\delta t)} \\
&= \frac{x^2\delta}{1+4a^2\delta t}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} - \delta|\xi|^2} d\xi \\
&= \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x(1+4a^2\delta t)^{-1/2} - \xi(1+4a^2\delta t)^{1/2})^2}{4a^2t} + \frac{x^2(1+4a^2\delta t)^{-1} + x^2}{4a^2t}} d\xi \\
&= \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x(1+4a^2\delta t)^{-1/2} - \xi(1+4a^2\delta t)^{1/2})^2}{4a^2t}} e^{-\frac{x^2\delta}{1+4a^2\delta t}} d\xi \\
&= \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2\delta}{1+4a^2\delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x(1+4a^2\delta t)^{-1/2} - \xi(1+4a^2\delta t)^{1/2})^2}{4a^2t}} d\xi
\end{aligned}
$$

Consideremos el siguiente cambio de variable

$$
\eta = \frac{x(1+4a^2\delta t)^{1/2} - \xi(1+4a^2\delta t)^{1/2}}{2a\sqrt{t}}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
d\eta &= \frac{(1+4a^2\delta t)^{1/2}}{2a\sqrt{t}} d\xi \\
|u(x,t)| &\leq \frac{M}{(1+4a^2\delta t)^{1/2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2\delta}{1+4a^2\delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \\
&= \frac{M}{(1+4a^2\delta t)^{1/2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2\delta}{1+4a^2\delta t}} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{M}{(1+4a^2\delta t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2\delta}{1+4a^2\delta t}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4. Considere la ecuación de onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $x > 0$, $t > 0$ en el primer cuadrante e imponga la siguiente condición de frontera en la frontera $x = 0$:

$$u_t + \alpha u_x = 0, \quad x = 0, \quad t > 0,$$

y las condiciones iniciales en $t = 0$, $x > 0$.

1. Si $\alpha \neq c$, derive una fórmula para la solución.
2. Si $\alpha = c$, demuestre que no existe una solución en general, pero existe si las condiciones iniciales satisfacen algunas condiciones adicionales. Interprete la condición de frontera en este caso geométricamente.

`Solución:` Tenemos el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, &\quad x > 0, \quad t > 0 \\ u_t(0,t) + \alpha u_x(0,t) = 0, &\quad x = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), &\quad x \geq 0, \\ u_t(x,0) = g(x), &\quad x > 0 \end{aligned}$$

Si $x_0 \geq ct_0$, de la formula de d'Alembert pues $x_0 - ct_0 \geq 0$ y $x_0 + ct_0 \geq 0$, tenemos que

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - ct_0) + f(x_0 + ct_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(\xi)d\xi$$

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{f(\tau)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^{\tau} g(\xi)d\xi \quad \tau \geq 0 \\ G(\tau) &= \frac{f(\tau)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{\tau} g(\xi)d\xi \quad \tau \geq 0 \end{aligned}$$

Por otra parte si $-ct_0 < x_0 < ct_0$, tenemos que $x_0 - ct_0 < 0$ y $x_0 + ct_0 > 0$, por lo que

$$u(x_0,t_0) = F(x_0 - ct_0) + G(x_0 + ct_0)$$

Derivando respecto a t y a x, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -cF'(x-ct) + cG'(x+ct) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct) + G'(x+ct)
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
u_t(0,t) + \alpha u_x(0,t) &= cG'(ct) - cF'(-ct) + \alpha F'(-ct) + \alpha G'(ct) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Equivalentemente

$$(c+\alpha)G'(ct) + (\alpha - c)F'(-ct) = 0$$

Es decir

$$G'(ct) = \frac{c-\alpha}{c+\alpha}F'(-ct)$$

Integrando

$$-(G(ct) - G(0)) = \frac{c-\alpha}{c+\alpha}(F(-ct) - F(0))$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
F(-ct) &= \frac{c+\alpha}{c-\alpha}(G(0) - G(ct)) + F(0) \\
&= \frac{c+\alpha}{c-\alpha}\left(\frac{f(0)}{2} - \frac{f(ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^{ct} g(\xi)d\xi\right) + \frac{f(0)}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $\tau > 0$

$$F(-\tau) = \frac{c+\alpha}{c-\alpha}\left(\frac{f(0)}{2} - \frac{f(\tau)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^{\tau} g(\xi)d\xi\right) + \frac{f(0)}{2}$$

Entonces si $-ct_0 < x_0 < ct_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} u(x_0,t_0) &= F(x_0-ct_0)+G(x_0+ct_0) \\ &= \frac{c+\alpha}{c-\alpha}\left(\frac{f(0)}{2}-\frac{f(-x_0+ct_0)}{2}-\frac{1}{2c}\int_0^{x_0-ct_0} g(\xi)d\xi\right)+\frac{f(0)}{2} \\ &+\frac{f(x_0+ct_0)}{2}+\frac{1}{2c}\int_0^{x_0+ct_0} g(\xi)d\xi \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\alpha \neq c$, u se define por partes de la siguiente manera

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \qquad x \geq ct$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{c+\alpha}{c-\alpha}\left(\frac{f(0)}{2}-\frac{f(-x+ct)}{2}-\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\xi)d\xi\right) \\ &+\frac{f(0)}{2}+\frac{f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\xi)d\xi \qquad 0 \leq x < ct \end{aligned}$$

Por otra parte, fisicamente hablando, la condición inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$$

Es equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = -\alpha\frac{\partial u}{\partial x}$$

Es decir, que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\alpha$$

Lo que podemos interpretar como que la frontera se mueve con velocidad $-\alpha$.

Notemos que $c=\alpha$, implica G constante, dado que

$$\begin{aligned} G'(ct) &= \frac{c-\alpha}{c+\alpha}F'(-ct) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pero recordemos que

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \frac{f(\tau)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^\tau g(\xi)d\xi \quad \tau \geq 0 \\ F(\tau) &= \frac{f(\tau)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^\tau g(\xi)d\xi \quad \tau \geq 0 \end{aligned}$$

Y G constante implica que

$$\begin{aligned} \frac{f(\tau)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^\tau g(\xi)d\xi &= \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^0 g(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2c}\int_0^\tau g(\xi)d\xi &= \frac{f(0)}{2} - \frac{f(\tau)}{2} \end{aligned}$$

reemplazando en F tenemos que

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{f(\tau)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^\tau g(\xi)d\xi \\ &= \frac{f(\tau)}{2} - \frac{f(0)}{2} + \frac{f(\tau)}{2} \\ &= f(\tau) - \frac{f(0)}{2} \end{aligned}$$

y reemplazando en u

$$\begin{aligned} u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) &= f(x-ct) - \frac{f(0)}{2} + \frac{f(0)}{2} \\ &= f(x-ct) \end{aligned}$$

En particular, derivando respecto a t tenemos que

$$u_t(x,t) = -cf'(x-ct)$$
$$u_t(x,0) = g(x) = -cf'(x)$$

Lo cual genera una condición adicional sobre f y g, es decir, que $g(x) = -cf'(x)$, es decir, que f es de la forma $f(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x g(\xi)d\xi + f(0)$. Por otra parte, geometricamente hablando, esto signufica que u solo depende de $x-ct$, es decir, que la solución se propaga con rapidez c en sentido contrario.