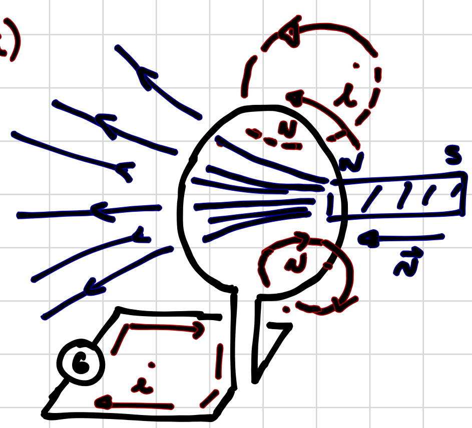
Ley de Faraday - Ley de Lentz.

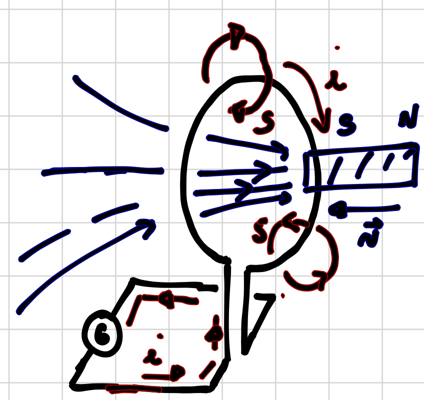
El estudio realizado por Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry (por separado) en EE.UU, en 1831, llevaron a una comprensión de los fenómenos electromagnéticos, y para la conversión práctica de energía mecánica en energía eléctrica y viceversa (corrientes alternas, dinámos, motores, ondas electromagnéticas etc...).

Diversos experimentos por los que se ponen de manifiesto las corrientes inducidas:

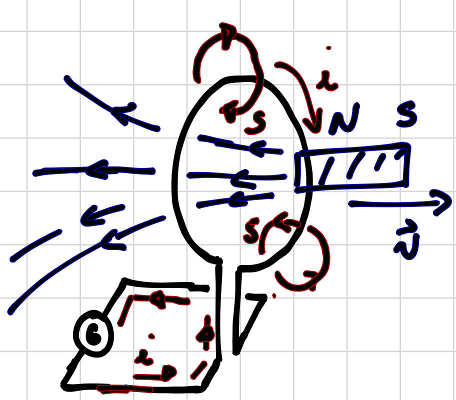
a)



b)



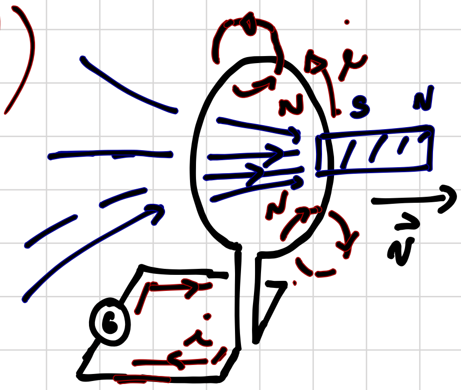
c)



Ejemplo 1: Si a un circuito cerrado que posee un galvanómetro (G) intercalado se le acerca o se le aleja un imán se observa un paso de corriente. En el circuito ha aparecido una FEM inducida capaz de hacer circular la intensidad. Además, observando que si se aleja o se acerca el imán y según se aleje o se acerque un polo se observa que: La corriente circula en los sentidos indicados en la figura, es decir

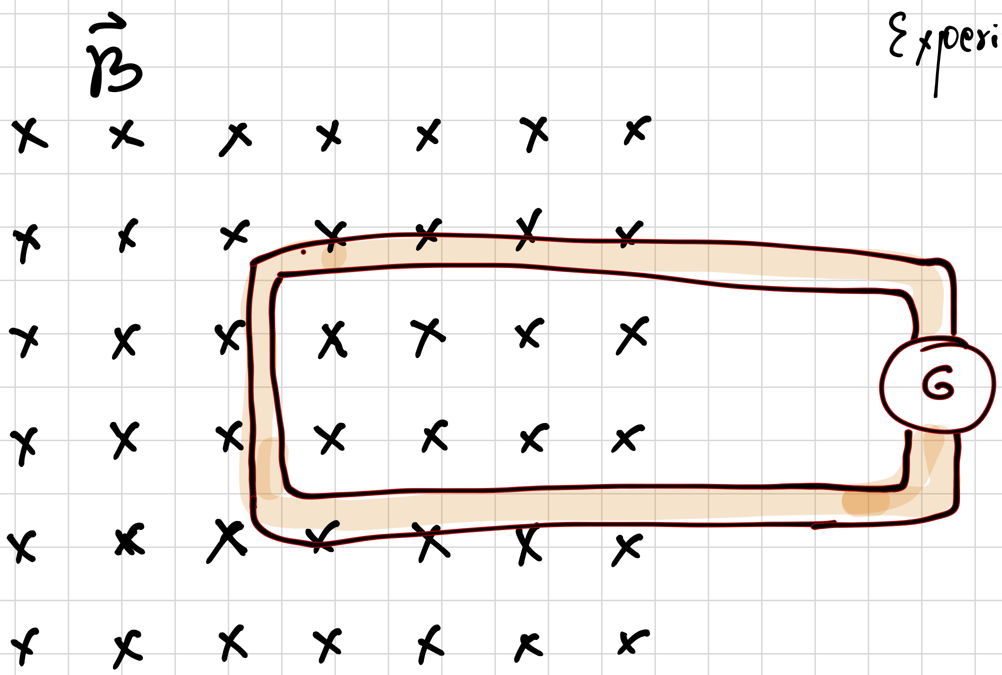
Al acercar un polo N se origina en el circuito una cara N que lo repele.

Al acercar un polo S, se origina una cara S que lo repele.

d) 

Al alejar un polo N se origina en el circuito una cara S que lo atrae.

Al alejar un polo S se origina en el circuito una cara N que lo atrae.



Experimento 2: Consideremos un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la figura y confinado en una cierta región (línea de puntos). Una espira conductora se introduce dentro del campo magnético observándose paso de corriente en el galvanómetro siempre que la espira se mueva. Si se para cesa la corriente y según se "meta" o se "saque" del campo, la corriente circula en un sentido u en otro. Nuevamente ha aparecido una F.E.M inducida que es la que hace que circule corriente por la espira.

Observamos que:

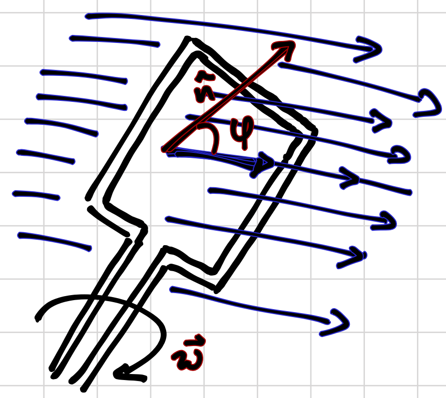
Si el campo va hacia adentro de la página y se "mete" la espira, la corriente circula en el sentido de las agujas del reloj.

Si el campo va hacia "adentro" y se "saca" la espira, la corriente circula en el sentido de las agujas del reloj.

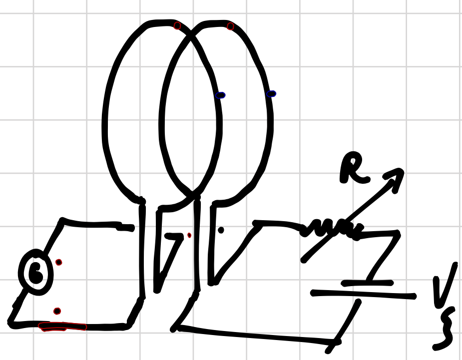
Si el campo va hacia "afuera" y se "mete" la espira, la corriente circula en el sentido de las agujas del reloj

Si el campo va hacia afuera y se "saca" la espira, la corriente circula en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Ejemplo 3: Si hacemos girar un circuito dentro de un campo magnético, se origina en él una corriente inducida que durante media vuelta va en un sentido y en la siguiente media vuelta va en sentido contrario.



Ejemplo 4: Supongamos que tenemos una espira con un galvanómetro y paralela a ella hay otra espira conectada a una pila y a una resistencia variable, de tal manera que si modificamos el valor de la resistencia, la intensidad que circula en ese segundo circuito varía, y por tanto, también el campo magnético que produce, apareciendo un paso de corriente por el primer circuito que es registrado por el galvanómetro.



El galvanómetro no es afectado (no existe paso de corriente) si no variamos la intensidad. El sentido de la corriente inducida depende de que aumentemos o disminuyamos la intensidad que circula en el segundo circuito.

En todos estos ejemplos observamos que siempre que tenemos una variación el flujo magnético que atraviesa el circuito aparece una corriente inducida y su sentido depende de que el flujo aumente o disminuya.

El flujo elemental que atraviesa un elemento de área ds, en un campo magnético $\vec{B}$ está dado por:

$$d\phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\,ds\cos\varphi \Rightarrow \phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_S B\,ds\cos\varphi,$$

en la que S es una superficie finita. La variación del flujo magnético puede ser debido a la variación del campo (ejemplos 1 y 4), a la variación del área (ejemplo 2) y a la variación del ángulo que forma el campo magnético con el vector de área del circuito. (ejemplo 3).

Analizando cualesquiera de los ejemplos vistos podemos sacar una consecuencia "común" a todos ellos, pudiendo decirse que la corriente inducida es tal que crea un campo magnético inducido) que se opone a la variación del flujo. En el ejemplo 2, si la espira se introduce dentro del campo magnético (suponemos éste perpendicular y hacia dentro del papel), el flujo magnético que atraviesa la espira "aumenta" pues aumenta el área "cortada" por el campo. Se observa que el sentido de la corriente inducida es el contrario a las agujas de un reloj; ésta corriente inducida crea a su vez un campo magnético inducido de inducción $\vec{B}_{in}$ de sentido opuesto al que ya existía, de tal forma que tiende a contrarestar el aumento de flujo. Exactamente al revés ocurre cuando se "saca" la espira.

Estos estudios experimentales llevaron a Frederic Emile Lentz (1804-1864) a enunciar la ley de LENTZ:

> ✱ La corriente inducida se opone a la variación del flujo magnético que la produce

La explicación cuantitativa de éstos fenómenos puede hacerse por la "LEY DE FARADAY", quien la enunció casi simultáneamente con la de LENTZ. La Ley de FARADAY dice:

Ley de Faraday - Ley de Lentz — (4) (8)

"Siempre que varía el flujo magnético que atraviesa un circuito, se origina en él una corriente inducida; la fuerza electromotriz de inducción tiene el valor de la rata de variación del flujo". La corriente existe mientras existe variación de flujo.

Matemáticamente La FEM INDUCIDA viene expresada por

$$\xi = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

Obedeciendo la ley de Ohm:

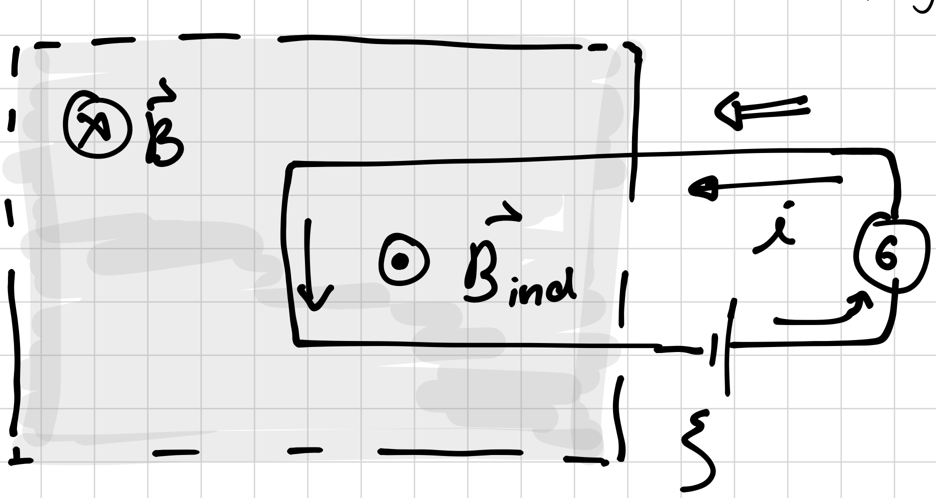
"La intensidad de corriente inducida que circula por un circuito de resistencia R, es proporcional a la rata de la variación de flujo

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt},$$

si las corrientes inducidas se producen en un circuito de varias espiras, las FEM originadas en cada una de ellas se superponen y en consecuencia "La FEM inducida es proporcional al número de espiras del circuito"

$$\xi = -n\frac{d\Phi_B}{dt},$$

donde $d\Phi_B$ es la variación del flujo correspondiente a cada espira.



La ley de Lenz, que interpreta el signo − de las fórmulas anteriores, sirve para determinar el signo de las corrientes inducidas.

"La corriente inducida es tal que produce un campo magnético de inducción $\vec{B}_{in}$ que se opone a la variación del flujo del circuito".

La ley de Faraday es una Ley empírica, no puede justificarse matemáticamente, y explica perfectamente todos los resultados experimentales.

Sabemos por definición de FEM, $\xi = \oint_c \vec{\varepsilon} \cdot d\vec{\ell}$, luego tenemos

recuerde que el campo es un vector

El producto escalar, nos dice la parte de $\vec{\varepsilon}$ paralelo a $d\vec{\ell}$ (a lo largo de C).

Una parte infinitesimal de la trayectoria.

Nos dice que hay que tener en cuenta las contribuciones de cada porción de la trayectoria cerrada en una dirección dada por la regla de la mano derecha

$$\oint_c \vec{\varepsilon} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

El flujo magnético a través de cualquier superficie limitada por C.

recuerde que es una integral de línea (no de superficie o volumétrica)

Campo eléctrico en V/m

la rata de cambio con el tiempo

Cambiando el flujo magnético a través de una superficie induce una FEM en cualquier trayectoria la cual es la frontera de la superficie, y cambiando el campo magnético induce un campo eléctrico circulante.

De lo anterior podemos concluir:

1) Los campos eléctricos y magnéticos están relacionados entre sí y todo campo magnético variable con el tiempo genera un campo eléctrico.

2) El campo eléctrico generado no es conservativo, puesto que la FEM que estudiamos viene dada por

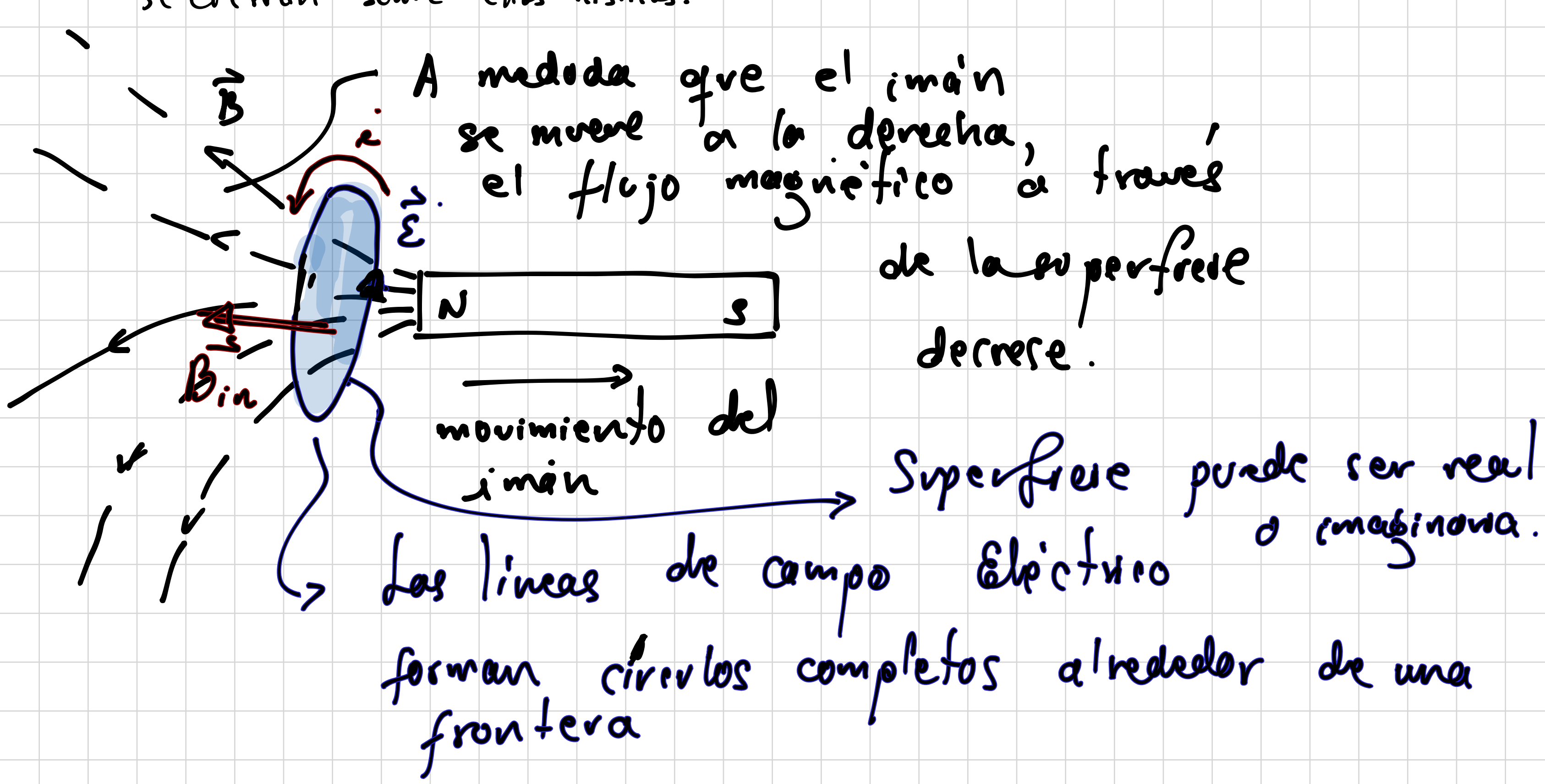
$$\xi = \oint_c \vec{\varepsilon} \cdot d\vec{\ell},$$

y por tanto la circulación a lo largo de una línea cerrada no es nula.
Esta conclusión es lógica puesto que el campo no tiene su origen en una distribución de carga, sino que la causa es la variación del flujo magnético.

3) Existen otras fuentes de campos eléctricos distintas a las de naturaleza escalar y debidas a las cargas eléctricas, éstas fuentes son de naturaleza vectorial (Potencial vectorial magnético).

. Note que $\vec{E}$ es el campo eléctrico inducido en cada segmento de la trayectoria C y $\vec{B}$ es el campo magnético que atraviesa la superficie encerrada por C ambos medidos en un sistema de referencia en el cual ambos campos están en reposo respecto a C.

Con iguales unidades N/C ó V/m, los campos eléctricos inducidos poseen una estructura muy diferente a los que se forman debido a cargas puntuales. Los campos eléctricos inducidos producidos por campos magnéticos variables $\vec{B}(x,y,z,t)$ poseen líneas de campo que son circuitos que se cierran sobre ellos mismos.



Ley de Faraday – Ley de Lentz – (7)

Algunas propiedades de campos eléctricos inducidos creados por campos magnéticos variables con el tiempo:

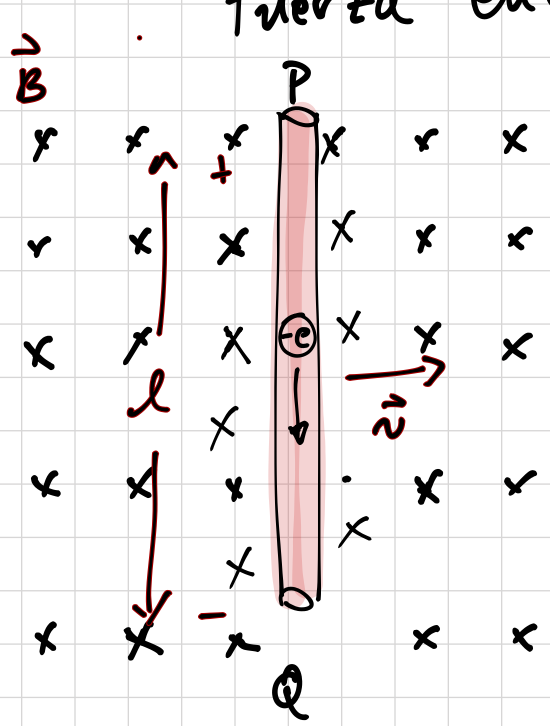
1) Las líneas de campos eléctricos inducidos producidos por campos magnéticos cambiantes forman circuitos completos

(2) El campo eléctrico neto en un punto es un vector el cual es la suma de todos los campos eléctricos presentes en el punto.

(3). Las Líneas de campo eléctrico no se deben cruzar, pues esto indicaría que el campo posee dos direcciones diferentes en el mismo punto.

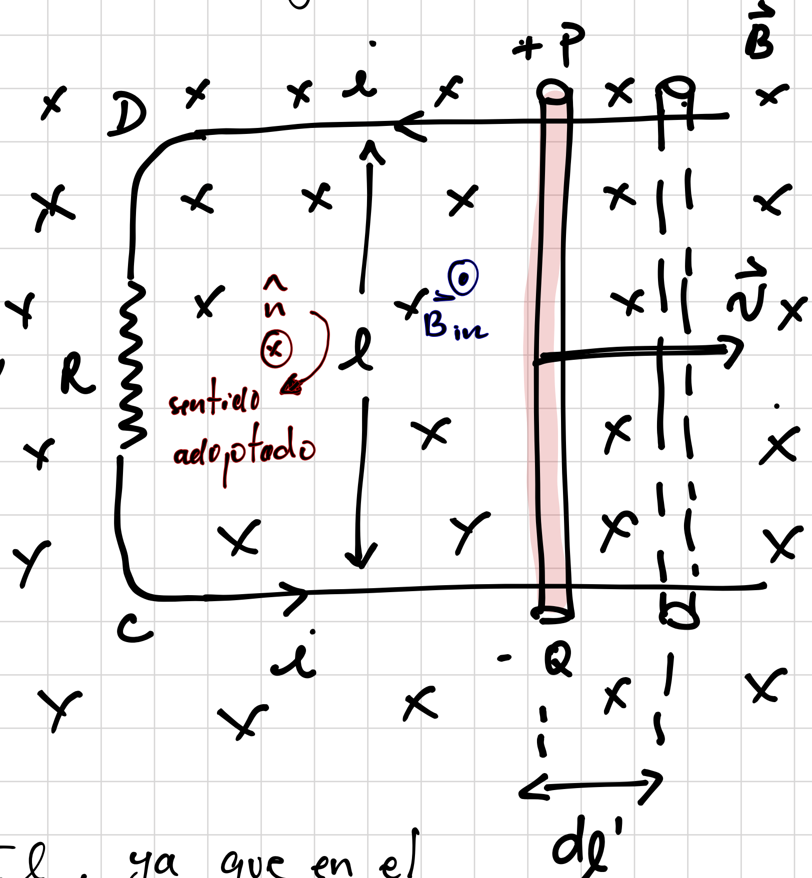
En resumen, $\vec{E}$ en la ley de Faraday representa el campo eléctrico inducido en cada punto a lo largo de la trayectoria C, una frontera de la superficie a través del cual el flujo magnético está cambiando con el tiempo. La trayectoria puede ser en el vacío o a través de un medio material, en cualquier caso el campo eléctrico existe.

Fuerza electromotriz de movimiento.



Supongamos un hilo conductor PQ al que desplazamos en un campo magnético perpendicularmente a las líneas de campo, con una velocidad $\vec{v}$. Cada uno de los electrones "libres" del conductor estará sometido a una fuerza: $F = Bqv$, siendo q la carga del electrón. La fuerza será de sentido hacia abajo, por ser negativa la carga de la partícula. Habrá un verdadero transporte de electrones que cargará negativamente al extremo Q y positivamente al P, Se ha originado así en circuito abierto una diferencia de potencial que en este caso se identifica con una FEM, funcionando en en realidad el extremo P como positivo de un generador y el Q como negativo.

Si la experiencia se hubiese realizado estableciendo contacto entre los extremos de un riel conductor, con otro formando con él un circuito cerrado, hubiese circulado, en realidad una corriente en el sentido que determina la polaridad de P (+) y de Q (-). La fuerza de Lorentz nos indica que sobre la longitud l del conductor PQ actúa una fuerza $F = BIl$, ya que en el



caso que estamos estudiando la dirección de la corriente y el campo magnético son perpendiculares entre sí; esta fuerza F actúa sobre PQ y hacia la izquierda. Al desplazar el conductor PQ contra esta fuerza, realizamos un trabajo que introduce energía al sistema; esta energía, suministrada solamente mientras movemos el conductor, se disipa por efecto Joule en la resistencia R, entre cuyos extremos se produce una diferencia de potencial igual a la potencia desarrollada por la intensidad de corriente $\left(V = \frac{P}{i}\right)$ y que debe ser igual a la FEM ξ, originada en el circuito.

A tal tipo de FEM inducida, producida al mover un conductor a través de un campo magnético, se le llama "FEM DE MOVIMIENTO". Su valor en nuestro caso es

$$\xi = \frac{P}{I} = \frac{dw}{i\,dt},$$

el trabajo realizado en un desplazamiento dl' de la varilla PQ es

$$dW = F\,dl' = Bil\,dl' \Rightarrow \xi = \frac{Bil}{i}\frac{dl'}{dt} = Blv,$$

por otra parte, la variación de flujo producida en el desplazamiento dl' es $d\Phi_B = B\,ds = Bl\,dl'$, y su derivada respecto al tiempo es de

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl\frac{dl'}{dt} = Blv,$$

Lo cual coincide con el valor absoluto de ξ.

Además, en la figura se observa que el aumento de flujo entrante hacia el papel va asociado con una FEM inducida que produce una intensidad en sentido contrario al de las agujas del reloj, la cual, a su vez, produce un campo de inducción contraria a la establecida y que se opone a la variación del flujo. En resumen, la FEM inducida y la variación del flujo son de igual valor absoluto y de signo contrario: $\xi = -d\Phi_B/dt$.

En el caso general en que un conductor de longitud l, se mueva con la velocidad $\vec{v}$ en el interior de un campo magnético de inducción $\vec{B}$ (sin condiciones de perpendicularidad) la fuerza que se ejerce sobre el conductor por estar "sumergido" en el campo es: $\vec{F} = i(\vec{l}\times\vec{B})$ y el trabajo al desplazarse el conductor móvil en un espacio $d\vec{r} = \vec{v}dt$ será

$$dW = (\vec{l}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,I\,dt. \quad \left(P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \Rightarrow dW = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt\right)$$

De la definición de intensidad tenemos: $I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I\,dt$, siendo dq la carga de los portadores existentes en el interior del conductor y sobre los cuales actúa la fuerza de Lorentz. Nos quedará, por tanto

$dW = dq\,\vec{v}\cdot(\vec{l}\times\vec{B})$, obteniéndose por aplicación del concepto físico de FEM

$$\xi = \frac{dU}{dq} = -\frac{dW}{dq} = \vec{v}\cdot(\vec{B}\times\vec{l})$$

pudiéndose escribir como

$$\xi = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}.$$

Como en la definición de FEM la hemos asociado a un campo eléctrico, para éste caso podremos escribir

$$\xi = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \implies \vec{\mathcal{E}} = \vec{v} \times \vec{B},$$

expresiones que nos indican que:

"Siempre que un conductor se mueve en el interior de un campo magnético se induce en sus extremos una FEM"

"Siempre que un conductor se mueve en el interior de un campo magnético, se produce un campo eléctrico equivalente dado por

$$\vec{\mathcal{E}}_{eq} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

Ahora si la resistencia del circuito es R, entonces podemos expresar la corriente inducida como

$$i = \frac{\xi}{R} = -\frac{B\ell v}{R},$$

donde el signo menos indica una ξ de magnitud $B\ell v$ y dirección contraria a $\frac{d\Phi_B}{dt}$ ($\circlearrowright$). El campo magnético ejerce una fuerza sobre esta corriente; como el alambre en $\sqcup$ está fijo, entonces concentrándonos únicamente en la varilla móvil, ésta fuerza magnética en magnitud esta dada por

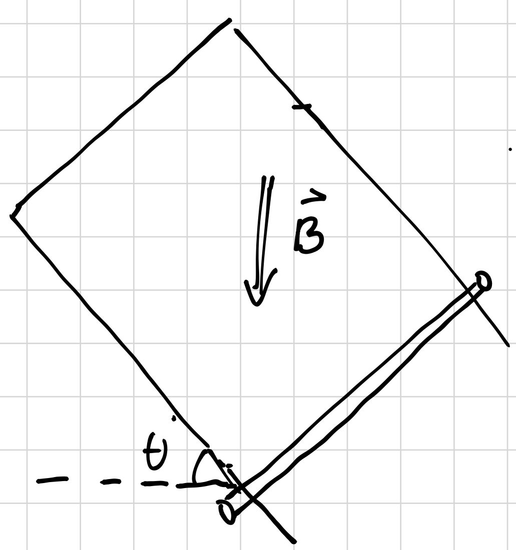
$$f = i\ell B = (\ell B)^2 v / R;$$

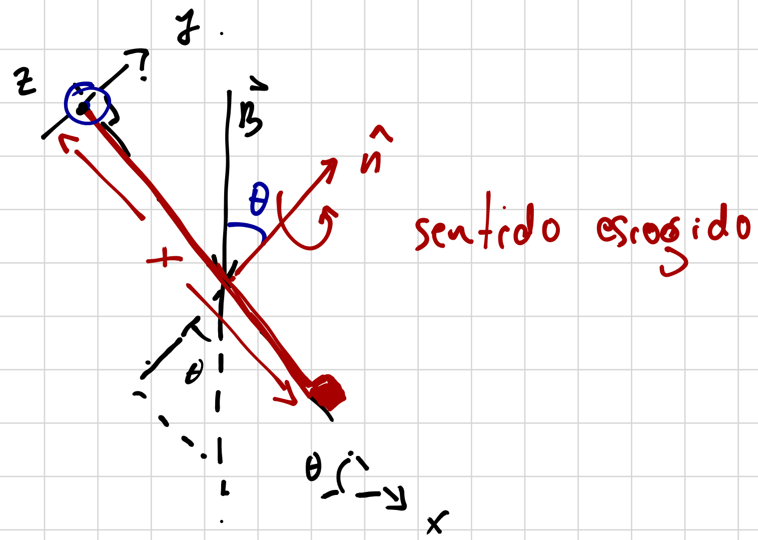
y vectorialmente podemos escribir: $\vec{f} = -(\ell B)^2 \vec{v} / R.$

Si la varilla viaja hacia la derecha, entonces la corriente inducida tiene sentido $\boxed{\uparrow}$ y la fuerza magnética apunta $\leftarrow$; así mismo, podemos chequear que si la varilla viaja hacia la izquierda, entonces la corriente inducida tiene sentido $\boxed{\downarrow}$ y la fuerza magnética apunta así $\rightarrow$. En ambos casos $\vec{f}$ resulta opuesta a $\vec{v}$.

Ejemplo

Un alambre en forma de ⊔ se encuentra fijo y está inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. Suponiendo que una varilla la cual posee masa m, desciende a lo largo del alambre en ⊔, halle la evolución de su velocidad en función del tiempo.





En el dibujo de la derecha se muestra una vista transversal: los ejes coordenados en trazo punteado, el alambre ⊔ en trazo continuo, y la varilla en forma cuadrada para visualizarla mejor. El eje x tiene una inclinación θ y que el eje y es normal al alambre que posee la forma de ⊔. Para hallar la fuerza magnética sobre la varilla, primero calculamos la f.e.m inducida y su respectiva corriente.

a) Por medio del flujo: De acuerdo a la escogencia del vector $\hat{n}$,

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds = \int B\cos(\pi-\theta)\, ds = -B\cos\theta \int ds = -B\cos\theta\, x\, \ell$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\,\ell\cos\theta\,\frac{dx}{dt} = -B\ell v\cos\theta \;;\quad \text{con} \quad v = \frac{dx}{dt}.$$

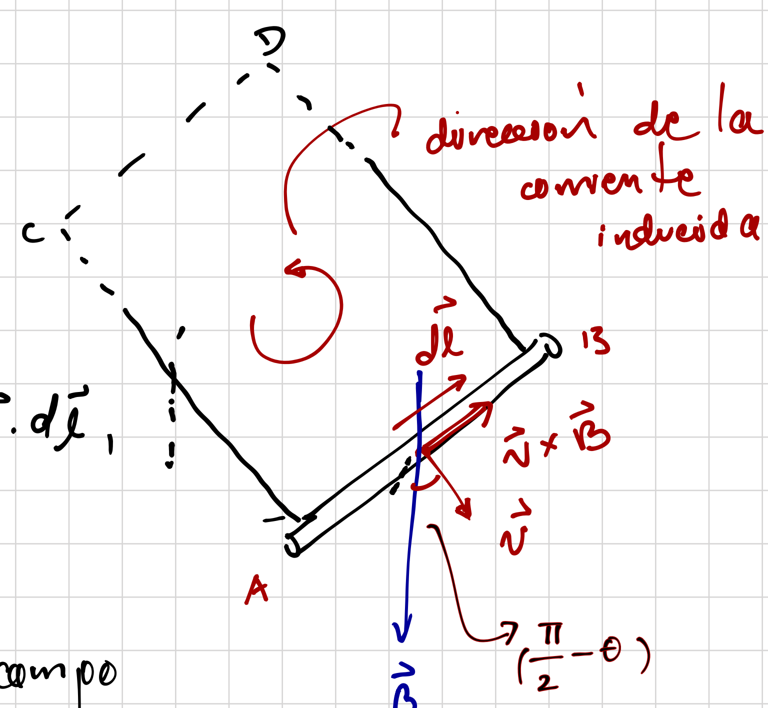
Note que $\frac{d\Phi_B}{dt} < 0$, o sea en dirección contraria a la escogida, ahora tenemos: $V_\xi = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\ell v\cos\theta > 0$.

Otra forma de verlo es: A medida que la varilla se desliza hacia abajo la magnitud del flujo aumenta, es decir $\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| > 0$, pero la ξ se opone a dicho aumento y por lo tanto genera un campo inducido en dirección contraria al aplicado $\uparrow B_{ind}$, para contrarestar el aumento de flujo y aplicandole a éste la regla de la mano derecha vemos que la corriente y la f.em inducida van en la dirección en contra de las manecillas del reloj $\vec{B}_{ind}$, nótese que si la varilla estuviera subiendo el sentido de la corriente inducida sería al contrario.

b) Por medio de campo eléctrico equivalente:

$$V_\xi = \oint \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{\ell} = \oint (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}$$

$$V_\xi = \int_A^B \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{\ell} + \int_B^D \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{\ell} + \int_D^C \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{\ell} + \int_C^A \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{\ell},$$



debido a que solo se mueve la varilla, los otros extremos están fijos, el campo eléctrico equivalente es diferente de cero sólo en AB.

$$V_g = \int_A^B vB \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) dl = vB\cos\theta\, l.$$

Calculamos ahora la fuerza magnética:

$$\vec{F}_m = i\,\vec{l}\times\vec{B} = \frac{l v B\cos\theta}{R}\, l B\left(\hat{j}\times\left(-\cos\theta\,\hat{k}+\operatorname{sen}\theta\,\hat{i}\right)\right)$$

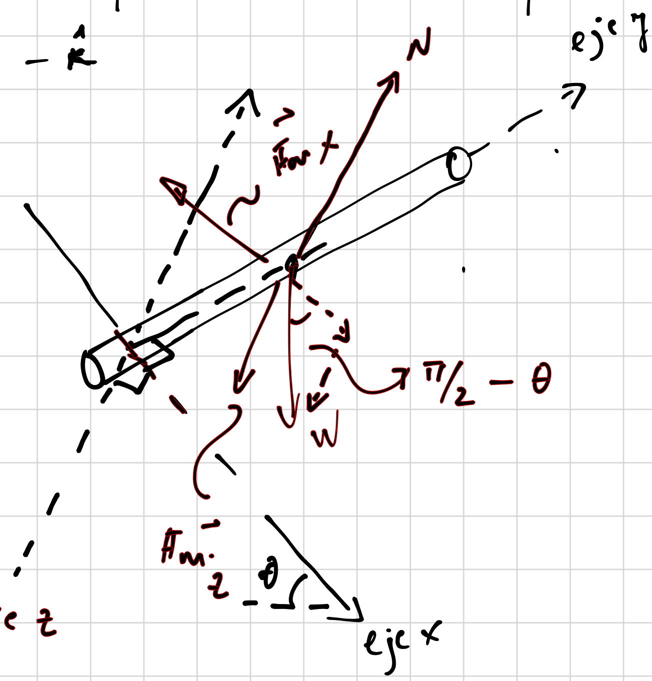
$$= \frac{vB^2l^2\cos\theta}{R}\left(-\cos\theta\,\hat{i} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{k}\right)$$

Para hallar la evolución de la velocidad, Aplicamos la segunda Ley de Newton: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, a lo largo de los ejes, teniendo en cuenta las fuerzas que actuan sobre la varilla.

$\vec{N}$: Actua debido a la reacción del alambre sobre la varilla, en la dirección $\hat{k}$

$\vec{W}$: Actua debido al peso de la varilla y posee componentes en $-\hat{k}$ y $\hat{i}$

$\vec{F}_m$: Actua debido a la corriente inducida en presencia del campo magnético, con componentes en $-\hat{i}$ y $-\hat{k}$



$$\Sigma\vec{F}_z = 0 \Rightarrow N - \frac{vB^2l^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{R} - mg\cos\theta = 0$$

$$\Sigma\vec{F}_y = ma_y \Rightarrow -\frac{vB^2l^2\cos^2\theta}{R} + mg\operatorname{sen}\theta = m\frac{dv}{dt}$$

organizando tenemos:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(lB\cos\theta)^2}{mR}v = g\operatorname{sen}\theta$$

Solucionamos ésta ecuación diferencial, suponiendo que en $t=t_0$ $v=v_0$, luego

$$\frac{dv}{dt} = g\,\text{sen}\theta - \frac{(lB\cos\theta)^2}{mR}v \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mgR\,\text{sen}\theta - (lB\cos\theta)^2 v} = \int_0^t \frac{dt}{mR}$$

$$u = mRg\,\text{sen}\theta - (lB\cos\theta)^2 v$$
$$du = -(lB\cos\theta)^2\,dv \qquad \int \frac{du}{u} = -\frac{(lB\cos\theta)^2}{mR}\int_0^t dt$$

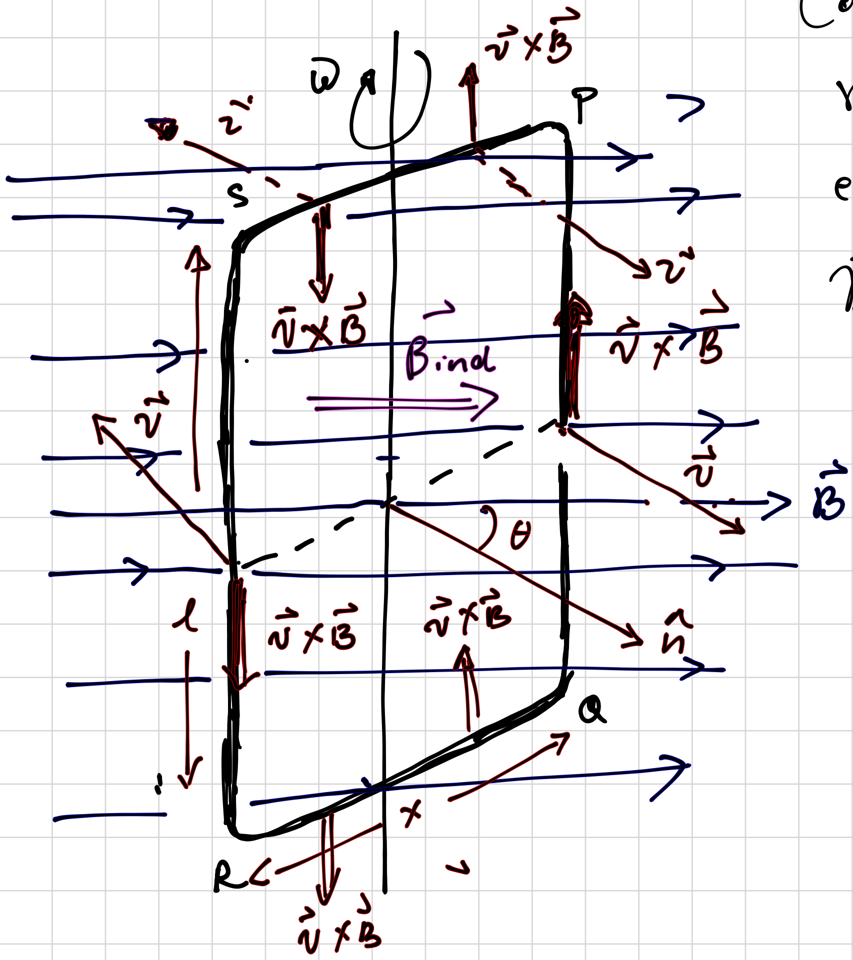
$$\ln\left(\frac{mgR\,\text{sen}\theta - (lB\cos\theta)^2 v}{mgR\,\text{sen}\theta - (lB\cos\theta)^2 v_0}\right) = -\frac{(lB\cos\theta)^2}{mR}t \Rightarrow$$

$$v(t) = \frac{mgR\,\text{sen}\theta}{(lB\cos\theta)^2} - \left(\frac{mgR\,\text{sen}\theta}{(lB\cos\theta)^2} - v_0\right)e^{-\frac{(lB\cos\theta)^2}{mR}t}$$

A medida que transcurre el tiempo, se hace más y más pequeño el exponencial y $v(t)$ tiende a su valor límite

$$v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mgR\,\text{sen}\theta}{(lB\cos\theta)^2}.$$

Ejemplo: Circuito rectangular rotante



Consideremos un circuito rectangular rotando con velocidad angular ω en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Cuando la normal $\hat{n}$ al circuito forma un ángulo $\theta = \omega t$ con el campo magnético, todos los puntos de PQ se están moviendo con una velocidad $\vec{v}$ tal que el campo eléctrico "equivalente" $\vec{E}_{eq} = \vec{v}\times\vec{B}$ está dirigido de Q a

P y su módulo es $\mathcal{E}_{eq} = vB \operatorname{sen}\theta$. Para los puntos que están sobre RS, el sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$ es de S a R y el módulo es el mismo. En cuanto a los lados RQ y PS vemos que $\vec{v}\times\vec{B}$ es perpendicular a ellos, luego $\int \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l} = 0$ en esa parte, no habiendo diferencia de potencial entre S y P y entre R y Q. Si $PQ = RS = l$, la circulación es

$$V_{\xi} = \oint_{L} \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_{eq}\,(PQ + SR) = 2 l v B \operatorname{sen}\theta.$$

Los lados PS y RQ no contribuyen a V_{ξ}, porque en ellos $\vec{\mathcal{E}}_{eq}$ es perpendicular a $d\vec{l}$. Si $x = SP$, el radio de la circunferencia descrita por las cargas que están sobre PQ y SR es $\frac{1}{2}x$, por lo que $v = \omega\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\omega x$. Luego con $S = lx$, el área del circuito tenemos

$$V_{\xi} = 2l\left(\frac{1}{2}\omega x\right) B \operatorname{sen}(\omega t) = \omega B\,(lx)\operatorname{sen}(\omega t) = \omega B S \operatorname{sen}(\omega t),$$

La cual es la f.e.m inducida en el circuito como resultado de su rotación en el campo magnético.

Aplicando método de flujo:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot \hat{u}_n\, ds = \int B\, ds \cos\theta\,,$$

donde θ es constante para un tiempo dado en toda la área y siendo el campo magnético uniforme en toda la superficie

$$\Phi_B = B\, S \cos\theta.$$

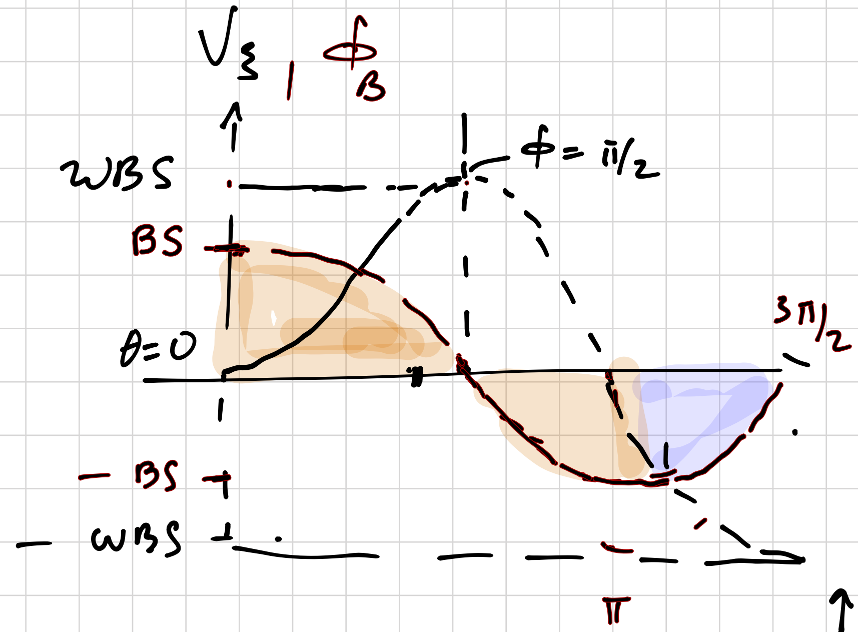
Ley de Faraday – Ley de Lentz

Luego

$$V_\xi = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\left(-BS\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right);\ \text{con } \theta = \omega t,\ \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

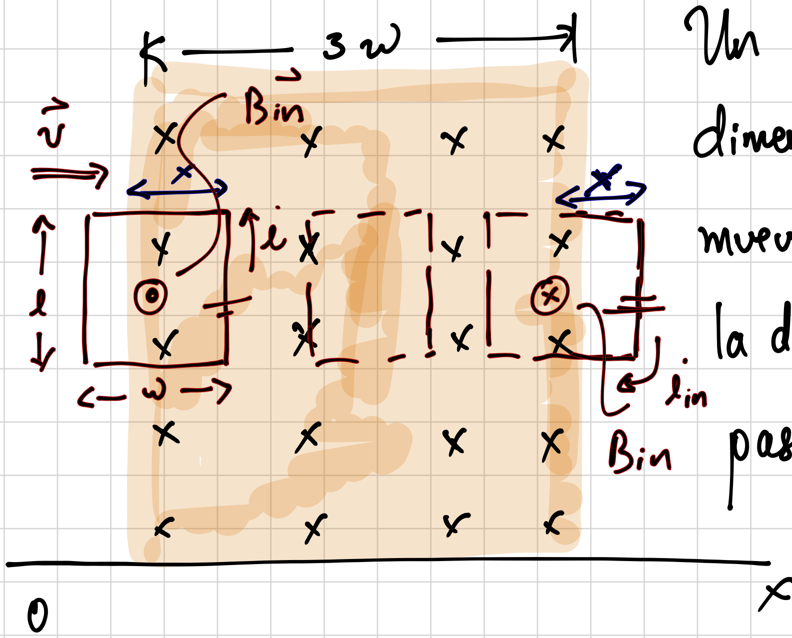
Luego

$$V_\xi = \omega BS\,\mathrm{sen}(\omega t).$$



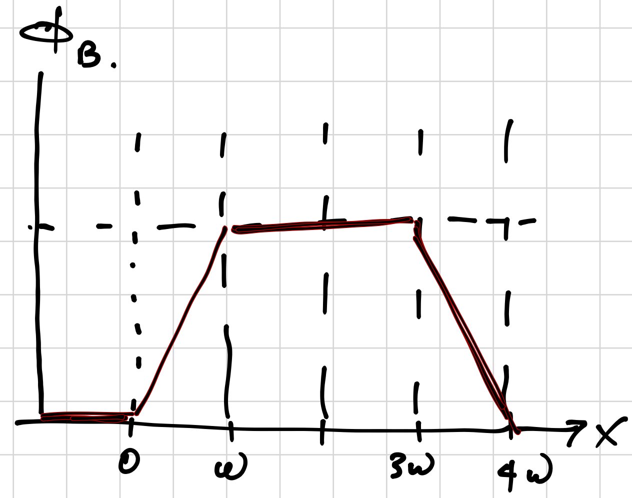
Note que de $(0,\pi)$ el $\frac{d\phi_B}{dt} < 0$ y V_ξ es positiva, mientras que de $(0, 2\pi)$ $\frac{d\phi_B}{dt} > 0$ y $V_\xi < 0$.

Ejemplo: Espira en un campo magnético uniforme

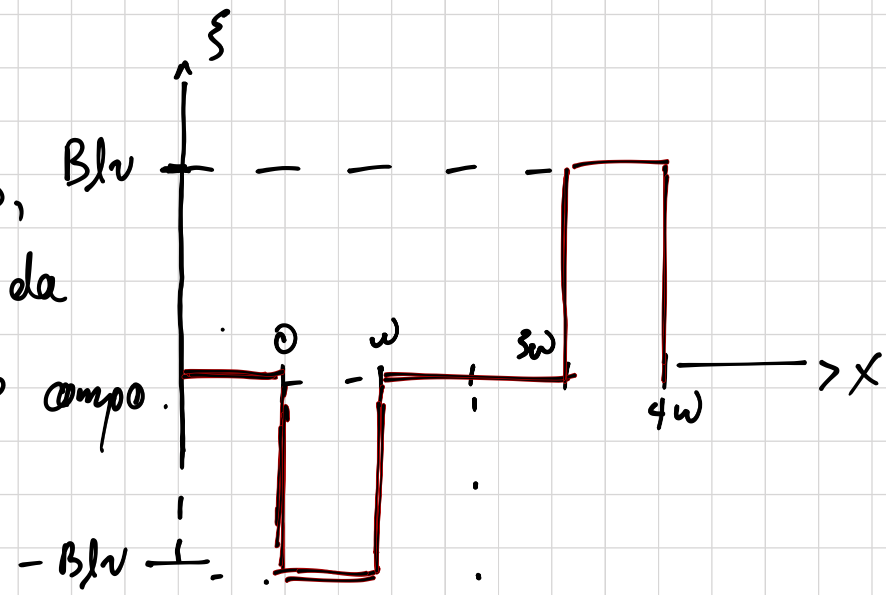


Un circuito rectangular metálico de dimensiones l y w y resistencia R se mueve con una velocidad constante v a la derecha, como se ve en la figura, pasando a través de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia la página y extendiendose una distancia $3w$ a lo largo del eje x. Definiendo el eje x como la posición del lado derecho del loop a lo largo del eje x, grafique como una función de x a) el flujo magnético a través del área encerrada a través del área encerrada por el circuito, b) la fuerza electromotriz inducida, y c) La fuerza externa aplicada necesaria para contrarestar la fuerza magnética y guardar la velocidad

La velocidad constante.

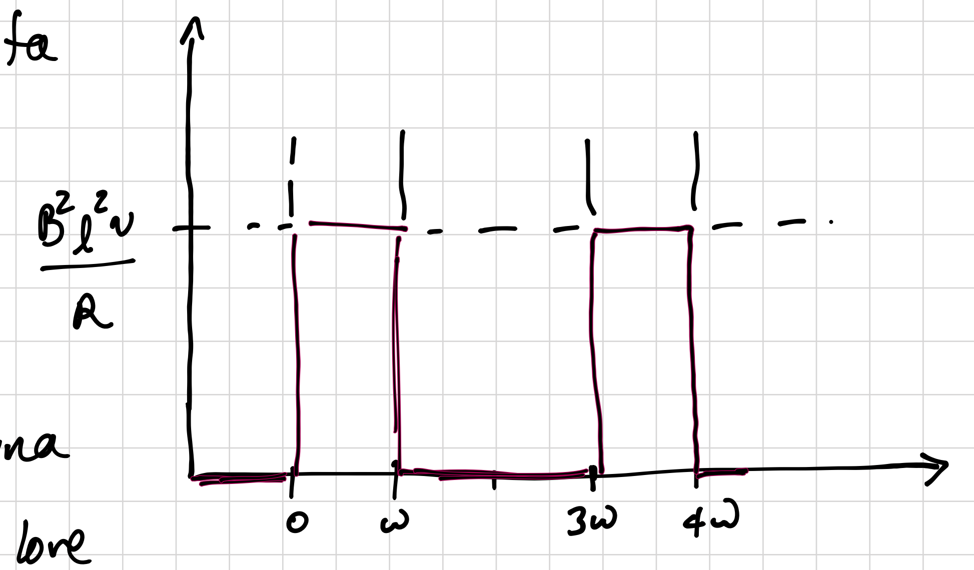


a) La figura muestra el flujo a través del área encerrada por el circuito como una función de x. Antes de que el circuito entre al campo, el flujo es cero. A medida que el circuito entra al campo el flujo aumenta linealmente con x $\Phi_B = Bl x$, hasta que el lado del circuito está justamente dentro del campo. Finalmente, el flujo a través del circuito decrece linealmente a cero cuando el circuito deja la región del campo. $\Phi_B = Bl(\omega - x)$.



b) Antes de que el circuito entre al campo, ninguna f.e.m es inducida en esta ya que no existe campo. A medida de que el circuito entra por la derecha, el flujo magnético dirigido hacia la página aumenta. Aplicando La Ley de Lentz, la corriente inducida esta en dirección contraria a las manecillas del reloj ya que el campo inducido posee dirección hacia afuera de la página. La f.e.m posee el valor $\xi = -Blv$. Cuando el circuito está totalmente adentro, el cambio en el flujo magnético es cero, luego $\xi = 0$. Esto pasa debido a que, una vez el lado izquierdo del circuito entra a la región donde existe un campo magnético, la f.e.m inducida en ésta cancela la f.e.m presente del lado derecho del circuito. A medida que el lado derecho del loop deja el campo, el flujo comienza a decrecer, una corriente inducida en el sentido de las manecillas del reloj es inducida y la f.e.m es Blv. Tan pronto como el circuito deja la región del campo, la f.e.m decrece a cero.

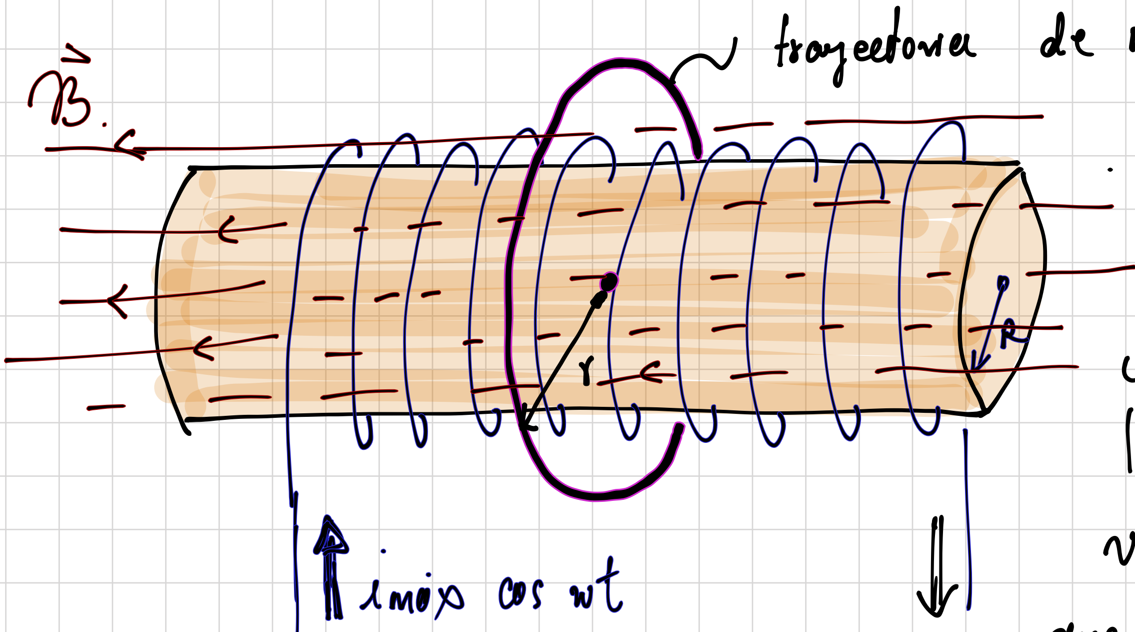
c) La fuerza externa necesita ser aplicada al circuito para mantener el movimiento a velocidad constante. Antes que el circuito entre, ninguna fuerza magnética actúa sobre este, luego la fuerza aplicada puede ser cero si v es constante.



Cuando el lado derecho del circuito entra al campo, la fuerza aplicada necesaria para mantener la velocidad constante debe ser de igual magnitud y de dirección opuesta a la ejercida sobre el lado: $F_B = -i l B = -B^2 l^2 v/R$. Cuando el circuito está totalmente dentro del campo, el flujo a través del loop no está cambiando con el tiempo. Luego la f.e.m neta inducida en el loop es cero, y la corriente es cero. Luego para éste caso no es necesaria aplicar una fuerza externa para mantener el movimiento. Finalmente, cuando en el circuito sale la parte derecha, la fuerza aplicada debe ser de magnitud igual y opuesta a la dirección en que actúa la fuerza magnética actuando sobre el lado izquierdo del circuito.

De éste ejemplo podemos concluir que la potencia es suministrada únicamente cuando el circuito está entrando o dejando el campo. Además, éste ejemplo muestra como la f.e.m inducida en el loop puede ser cero aún cuando el circuito se mueva dentro del campo. La f.e.m es inducida únicamente cuando el flujo a través del circuito cambia con el tiempo.

Ejemplo: Campo inducido debido a un campo magnético en un solenoide



Un solenoide de radio R tiene n vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente variable con el tiempo que varía sinusoidalmente

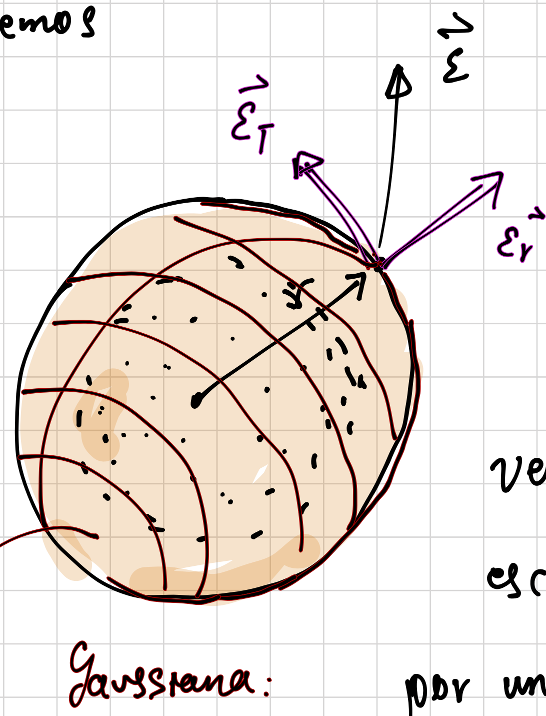
$I = I_{máx} \cos(\omega t)$, donde $I_{máx}$ es la corriente máxima y ω es su frecuencia angular de la corriente alternante.

a) Determine la magnitud del campo eléctrico inducido afuera del solenoide, a una distancia $r > R$ medido desde el eje central. b) Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide, a una distancia r de su eje?

La relación integral entre el campo eléctrico inducido y el campo magnético variable con el tiempo está dado por

$$\xi = \oint_L \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds,$$

a) Consideremos un punto externo y tomemos como trayectoria de integración un círculo de radio r centrado sobre el solenoide como se ve en la figura. En efecto debido a la simetría de las líneas de campo del solenoide, vemos que $\vec{\varepsilon}$ es constante sobre esta trayectoria y $\vec{\varepsilon}$ es tangente a este. En efecto si consideramos una dirección arbitraria para $\vec{\varepsilon}$ tenemos



$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_t$$ y calculando

$$\oint_L \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{l} = \oint(\vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_t)\cdot d\vec{l},$$

vemos que aplicando ley de Gauss, escogiendo una superficie Gaussiana formada por una esfera de radio r, tenemos:

$$\phi_\varepsilon = \oint_S (\vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_t)\cdot\hat{n}\, ds = 0 \Rightarrow \vec{\varepsilon}_t\cdot\hat{n} = 0$$

$\varepsilon_r(r)\left(\oint_S ds\right) = 0$, con lo que llegamos a que $\varepsilon_r = 0$. Luego

Tenemos que el flujo magnético a través del área encerrada es $BA = B\pi R^2$, luego tenemos:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2\left(\frac{dB}{dt}\right), \quad \text{donde}$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E(2\pi r) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \; ; \text{ si asumimos que } B = \mu_0 N I$$

y sustituyendo $i = i_{máx}\cos(\omega t)$, obtenemos

$$E(2\pi r) = -\pi R^2 \mu_0 N I_{máx} \frac{d}{dt}(\cos(\omega t)) = \pi R^2 \mu_0 N i_{máx}\, \omega \operatorname{sen}(\omega t),$$

$$E = \frac{\mu_0 N I_{máx}\, \omega R^2}{2r} \operatorname{sen}(\omega t), \quad \underline{r > R}.$$

b) Para el interior $(r < R)$, el flujo en la integración es dado por $\Phi_B = B\pi r^2$ y usando un procedimiento análogo tenemos:

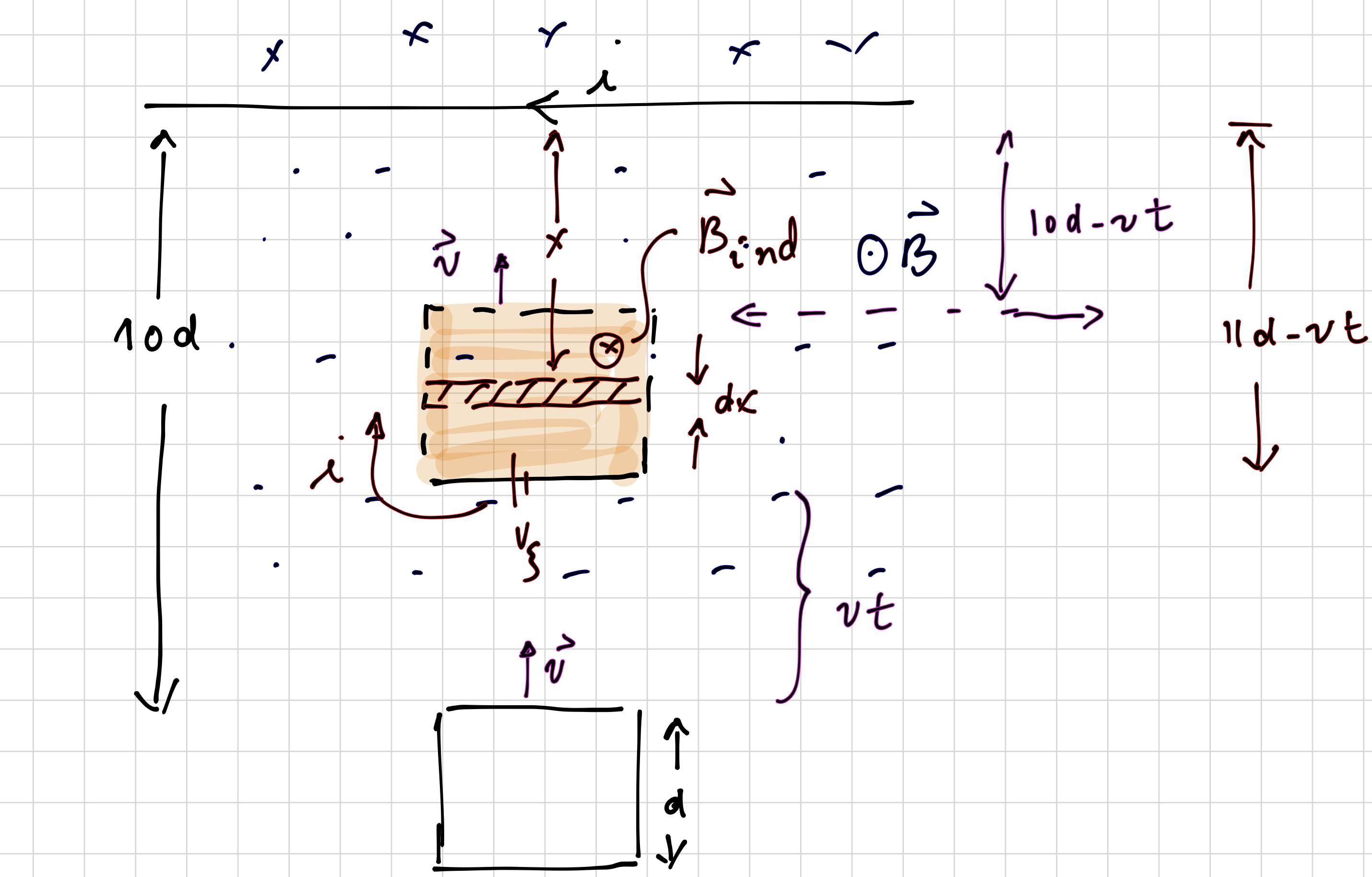
$$E(2\pi r) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 N\, i_{máx}\, \omega \operatorname{sen}(\omega t), \quad \text{obteniendo}$$

$$E = \frac{\mu_0 N\, i_{máx}\, \omega}{2}\, r \operatorname{sen}(\omega t) \quad (\text{para } r < R).$$

lo que muestra que la amplitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide varía linealmente con r a medida que varía el flujo y varía sinusoidalmente con el tiempo.

Ejercicio

Un circuito cuadrado de longitud d se mueve con una velocidad constante acercándose a una corriente rectilínea. Inicialmente la espira se encontraba a una distancia $10d$ del alambre. Halle una expresión de la f.em inducida.



a) Método de flujo magnético:

$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,ds$. Variación del flujo magnético aumenta (campo magnético cada vez más intenso) a medida que se acerca al alambre. $\vec{B}$ inducido = ⊗ B inducido, luego la f.e.m es en la dirección de las manecillas del reloj.

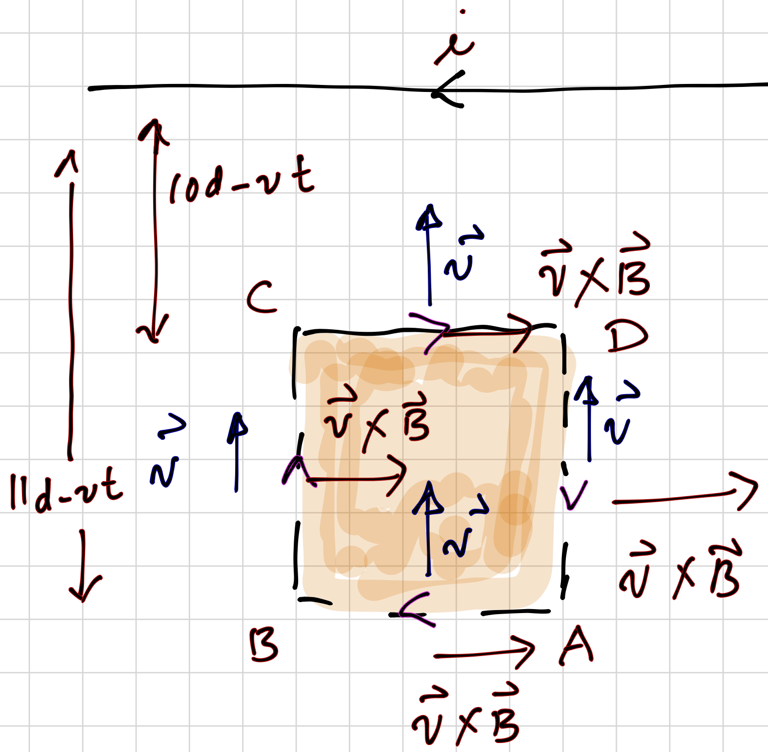
$$\Phi_B = \int B\,ds = \int \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\, d\,(dx) = \frac{\mu_0 i d}{2\pi}\int_{10d-vt}^{11d-vt}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i d}{2\pi}\ln\left(\frac{11d-vt}{10d-vt}\right)$$

$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \frac{\mu_0 i d}{2\pi}\,\frac{(10d-vt)}{(11d-vt)}\,\frac{d}{dt}\left(1+d\,(10d-vt)^{-1}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 i d}{2\pi}\,\frac{(10d-vt)}{(11d-vt)}\,\frac{dv}{(10d-vt)^2} = \frac{\mu_0 i d^2 v}{2\pi\,(10d-vt)\,(11d-vt)}$$

b) Por medio de campo eléctrico equivalente:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$\int_{BC} \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{l} + \int_{AD} \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \left(\vec{\varepsilon} \perp d\vec{l}\right)$$

$$\xi = \int_{DC} \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{l} = \left(\varepsilon_{\overline{DC}} - \varepsilon_{\overline{AB}}\right) d$$

$$= \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi(10d-vt)} - \frac{\mu_0 i}{2\pi(11d-vt)}\right) d$$

$$= \frac{\mu_0 i d}{2\pi}\left[\frac{11d-vt-10d-10d+vt}{(10d-vt)(11d-vt)}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 i d^2 v}{2\pi}\left[\frac{1}{(10d-vt)(11d-vt)}\right]$$