Notas para un Curso Introductorio a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

Kevin Mateo Cárdenas Gallego
Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia
2023

Índice general

Capítulo 1

Primeros Pasos

Contents

En el estudio de fenómenos físicos y matemáticos, las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) desempeñan un papel fundamental. Son ecuaciones que involucran derivadas parciales de una o más variables independientes y, como resultado, modelan una amplia variedad de procesos en ciencias naturales, ingeniería y matemáticas.

1.1. Definiciones

Definición de una Ecuación en Derivadas Parciales

Una Ecuación en Derivadas Parciales es una ecuación que relaciona una función desconocida de varias variables con sus derivadas parciales. Generalmente, se representa de la siguiente manera:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots) = 0. \tag{1.1}$$

Donde u es la función desconocida y las x_i son las variables independientes.

Órdenes de las EDP

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) se clasifican en función del orden de las derivadas parciales presentes en la ecuación. A continuación, se proporcionan ejemplos que ilustran los órdenes más comunes:

- **Primer orden:** Las EDP de primer orden involucran únicamente derivadas de primer orden con respecto a las variables independientes. Un ejemplo de una EDP de primer orden es la ecuación de transporte:

  $$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1.2}$$

  Donde u es la función desconocida y c es una constante que representa la velocidad de transporte.

- **Segundo orden:** Las EDP de segundo orden involucran derivadas de segundo orden con respecto a las variables independientes. Un ejemplo clásico de una EDP de segundo orden es la ecuación del calor:

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.3}$$

  Donde u representa la temperatura en una barra, t es el tiempo, x es la posición, y α es la difusividad térmica.

- **Orden superior:** Las EDP de orden superior incluyen derivadas de orden superior (mayor que dos) con respecto a las variables independientes. Un ejemplo es la ecuación de Laplace, una EDP de orden superior que describe el potencial eléctrico en un campo electrostático:

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{1.4}$$

Donde ϕ representa el potencial eléctrico y ∇^2 es el operador laplaciano.

Tipos de EDP

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) se clasifican en tres categorías principales según su forma general:

1. **EDP Lineales:** Una EDP se considera lineal si se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}} + b(x)u = f(x). \tag{1.5}$$

Donde u es la función desconocida, $a_i(x)$, $b(x)$ y $f(x)$ son funciones dadas, y m_i son enteros no negativos, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. En las EDP lineales, todas las derivadas parciales están elevadas a la primera potencia y no se multiplican entre sí.

2. **EDP Cuasilineales:** Las EDP cuasilineales permiten derivadas de orden superior y productos de derivadas, pero el término lineal prevalece. Se expresan de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u) \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{m_{i,j}}}{\partial x_{i,j}^{m_{i,j}}}(u) = b(x,u). \tag{1.6}$$

Donde u es la función desconocida, $a_i(x,u)$, $b(x,u)$ y son funciones dadas, y $m_{i,j}$ son enteros no negativos.

3. **EDP Completamente No Lineales:** En las EDP completamente no lineales, los términos no lineales predominan y las derivadas pueden aparecer elevadas a potencias diferentes. Estas EDP se expresan de la siguiente manera:

$$F(x, u, \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{m_{i,j}}}{\partial x_{i,j}^{m_{i,j}}}(u)) = 0. \tag{1.7}$$

Donde u es la función desconocida y $F(x, u, \frac{\partial^{m_{i,j}} u}{\partial x_{i,j}^{m_{i,j}}})$ es una función no lineal de las variables u, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{m_{i,j}}}{\partial x_{i,j}^{m_{i,j}}}(u)$.

Solución Particular y Solución General

En el contexto de las EDP, es importante distinguir entre la solución particular y la solución general:

- **Solución Particular:** Es una solución específica que satisface la EDP junto con las condiciones de contorno y condiciones iniciales especificadas para un problema particular.

- **Solución General:** Es una solución que satisface la EDP sin considerar condiciones específicas. La solución general incluye todas las posibles soluciones particulares y puede contener constantes arbitrarias.

El estudio de EDP implica encontrar soluciones particulares que se adapten a problemas específicos y, en algunos casos, encontrar la solución general que describe todas las posibles soluciones del problema.

1.2. Método de Resolución para EDP Lineales de Primer Orden

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial lineal de primer orden en dos variables:

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y)u + d(x,y). \tag{1.1}$$

Para resolver esta ecuación, podemos usar el método de cambio de variable.

Paso 1: Cambio de Variable

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)}. \tag{1.2}$$

De esta EDO, encontramos la curva solución $\eta(x,y)$, que relaciona x y y.

$$\frac{d}{dx}\left(b(x,y)u\right) = c(x,y)u + d(x,y). \tag{1.3}$$

Paso 2: Definición de Nueva Variable

Definimos una nueva variable $\xi(x,y)$ como $\xi(x,y) = y$. Suponiendo que $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$, para que el jacobiano de la transformación no sea nulo.

Paso 3: Reemplazo en la EDP Original

Reemplazamos $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ en la EDP original con las derivadas de η y ψ respecto a x y y, respectivamente (suponiendo $W(\eta(x,y),\psi(x,y)) = u(x,y)$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\eta}{dx}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial W}{\partial \psi} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\eta}{dy}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{d\psi}{dy}\frac{\partial W}{\partial \psi}. \tag{1.5}$$

Paso 4: Sustitución en la EDP

Sustituimos estas expresiones en la EDP original:

$$a(x,y)\left(\frac{d\eta}{dx}\frac{\partial W}{\partial \eta}+\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)+b(x,y)\left(\frac{d\eta}{dy}\frac{\partial W}{\partial \eta}+\frac{d\psi}{dy}\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)=c(x,y)W+d(x,y). \tag{1.6}$$

Simplificamos la ecuación y agrupamos términos que contengan $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ y $\frac{\partial W}{\partial \psi}$:

$$\left[a(x,y)\frac{d\eta}{dx}+b(x,y)\frac{d\eta}{dy}\right]\frac{\partial W}{\partial \eta}+\left[a(x,y)\frac{d\xi}{dx}+b(x,y)\frac{d\xi}{dy}\right]\frac{\partial W}{\partial \xi}=c(x,y)W+d(x,y). \tag{1.7}$$

Donde $\left[a(x,y)\frac{d\eta}{dx}+b(x,y)\frac{d\eta}{dy}\right]\frac{\partial W}{\partial \eta}=0$, pues $a(x,y)\frac{d\eta}{dx}+b(x,y)\frac{d\eta}{dy}=0$, por (2).

Luego la EDP, queda como una EDO lineal:

$$\left[a(x,y)\frac{d\xi}{dx}+b(x,y)\frac{d\xi}{dy}\right]\frac{\partial W}{\partial \xi}=c(x,y)W+d(x,y). \tag{1.8}$$

Paso 5: solución de la EDO lineal

la solución general será:

$$W(\xi,\eta)=\frac{1}{e^{\int -c(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))d\xi}}\left(\int d(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))e^{\int -c(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))d\xi}\,d\xi+G(\eta)\right). \tag{1.9}$$

donde $W(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$

Paso 6: Reemplazar de vuelta

Como la sustitución tenia jacobiano no nulo, se puede reemplazar de vuelta, por lo que existe una transformación $\xi(x,y),\eta(x,y)$ inversa de la transformación inicial, y así queda la solución general dada por:

$$u(x,y)=W(\xi(x,y),\eta(x,y)). \tag{1.10}$$

1.3. Metodo de Lagrange

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial cuasilineal de primer orden en dos variables:

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \tag{1.1}$$

considere el siguiente sistema, llamado el sistema subsidiario:

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}. \tag{1.2}$$

Si $a \neq 0$, entonces las ecuaciones subsidiarias son equivalentes al sistema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u)}{a(x, y, u)}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{c(x, y, u)}{a(x, y, u)} \tag{1.3}$$

La ventaja del sistema subsidiario es que evita la distinción entre variables dependientes y variables independientes.

Resolviendo el sistema subsidiario (en (3) por ejemplo) obtenemos dos curvas características. Que serán curvas integrales de las ecuaciones subsidiarias.

Por ejemplo:

$$\phi(x, y, u) \quad de \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u)}{a(x, y, u)}. \tag{1.4}$$

y

$$\psi(x, y, u) \quad de \quad \frac{du}{dx} = \frac{c(x, y, u)}{a(x, y, u)}. \tag{1.5}$$

$\phi(x, y, u)$ y $\psi(x, y, u)$ son las constantes arbitrarias que surgen de la solución de la EDO, si estas son funcionalmente independientes en alguna región en el espacio xyz, entonces la solución general de la ecuación cuasi lineal viene dada por:

$$F(\phi, \psi) = 0 \tag{1.6}$$

donde F es una función arbitraria. O manera equivalente, a partir del teorema de la función implícita:

$$\phi = g(\psi) \quad o \quad \psi = f(\phi) \tag{1.7}$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

1.3.1. El método de los multiplicadores

Una técnica útil en la solución de ecuaciones es el método de los multiplicadores.

proposición 1.3.1. *Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, entonces*

$$\frac{\lambda a + \beta c}{\lambda b + \beta d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Para λ, β *arbitrarios*

Observación 1.3.2. *Aplicando la proposición anterior al sistema subsidiario*

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)}.$$

obtenemos

$$\frac{\lambda dx + \mu dy + \beta du}{\lambda a(x,y,u) + \mu b(x,y,u) + \beta c(x,y,u)} = \frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)}.$$

De esta forma podemos obtener algunas ecuaciones diferenciales relacionadas mas fáciles de integrar.

En particular, si λ, μ, β *se eligen de tal manera que:*

$$\lambda a(x,y,u) + \mu b(x,y,u) + \beta c(x,y,u) = 0,$$

entonces, si existe una función v *tal que:*

$$dv = \lambda dx + \mu dy + \beta du$$

$v(x, y, u)$ *es una curva integral de las ecuaciones subsidiarias.*

1.4. Método de las Características para EDP Cuasilineales con Condición Inicial

Supongamos que tenemos la siguiente Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) cuasilineal de primer orden, junto con una condición inicial, sobre una curva

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \tag{1.1}$$

$$u|_\gamma = u_0(s) \tag{1.2}$$

$$\gamma = \{(x_0(s), y_0(s))\} \tag{1.3}$$

Basta resolver el siguiente sistema simultaneamente:

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u) \qquad x(0) = x_o(s) \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{dt} = b(x,y,u) \qquad y(0) = y_o(s) \tag{1.5}$$

$$\frac{du}{dt} = a(x,y,u) \qquad u(0) = u_o(s) \tag{1.6}$$

Luego, debemos dejar a u en términos de x e y.

Perdida de unicidad de la solución

Note que (1) se puede ver como el siguiente producto punto:

$$(a,b,c)\cdot(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1) \tag{1.7}$$

Y si tenemos una solución $u(x,y)$, esta ecuación expresa que el campo

$$(x,y) \to (a(x,y,u(x,y)), b(x,y,u(x,y)), c(x,y,u(x,y))).$$

es tangente a la superficie dada por u. Donde $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1)$ es justamente normal.

Ahora bien, si

$$det \begin{pmatrix} a(x,y,u)|_\gamma & a(x,y,u)|_\gamma \\ \frac{dx_0(s)}{ds} & \frac{dy_0(s)}{ds} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{1.8}$$

Que es la *condición de transversabilidad*, entonces *el sistema tiene una única solución*

Por otra parte

$$\begin{pmatrix} a(x,y,u)|_\gamma \\ a(x,y,u)|_\gamma \\ c(x,y,u)|_\gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{dx_0(s)}{ds} \\ \frac{dy_0(s)}{ds} \\ \frac{du_0(s)}{ds} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Para algún s_0 que es la *condición de colinealidad*, entonces *el sistema tiene una infinitas soluciones.* Ciertamente porque si cambiamos la curva inicial por una curva $\beta = \{(\overline{x_0(\theta)}, \overline{y_0(\theta)})\}$ tal que la curva pase por $\gamma(s_0)$ para un θ_0 y $u_0(s_0) = \overline{u_0(\theta_0)}$, entonces la solución del sistema

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \tag{1.10}$$

$$u|_\beta = \overline{u_0(\theta)} \tag{1.11}$$

$$\beta = \{(\overline{x_0(\theta)}, \overline{y_0(\theta)})\} \tag{1.12}$$

También cumple que:

$$u|_\gamma = u_0(s) \tag{1.13}$$

$$\gamma = \{(x_0(s), y_0(s))\} \tag{1.14}$$

Ahora bien, si no se cumple la *condición de transversabilidad* y tampoco hay *colinealidad* entonces *no existe solución* al problema de Cauchy.

1.5. Ecuación Eikonal

La ecuación Eikonal es de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 = \nu^2 \tag{1.1}$$

Al escribir las ecuaciones características queda:

$$(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \nu^2) \cdot (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1) = 0 \tag{1.2}$$

Este vector $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial}, \nu^2)$ describe una dirección tangente a la superficie solución.

Tenemos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{du}{dt} = \nu^2 \tag{1.3}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial \nu^2(x,y)}{\partial x} \end{aligned}$$

Y similar:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu(x,y)}{\partial y}$$

Por lo tanto.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 = \nu^2(x,y)$$

Integrando la ultima ecuación tenemos que:

$$u(x(t), y(t)) = u(x(0), y(0)) + \int_0^t \nu^2(x(\tau), y(\tau))d\tau, \tag{1.4}$$

1.6. Resolución de EDP Completamente No Lineal de Primer Orden con Condiciones Iniciales

Dada la EDP completamente no lineal, junto con una condición inicial:

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \tag{1.1}$$

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s) \tag{1.2}$$

donde $u(x_0(s), y_0(s))$ es una curva en el dominio y $u_0(s)$ es el valor inicial de u en esa curva. Vamos a considerar las siguientes variables auxiliares:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.3}$$

Resolvemos las siguentes ecuaciones, llamadas *condición de transversabilidad generalizada*

$$F(x, y, u, p_0, q_0) = 0 \tag{1.4}$$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx_0(s)}{ds} \\ \frac{dy_0(s)}{ds} \\ \frac{du_0(s)}{ds} \end{pmatrix} = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{dx_0}{ds}\frac{dF}{dq} - \frac{dy_0}{ds}\frac{dF}{dp} \neq 0 \tag{1.6}$$

hallando $p_0(s)$ y $q_0(s)$ que seran las condiciones iniciales del siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{p} \qquad x(0) = x_o(s) \tag{1.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dF}{q} \qquad y(0) = y_o(s) \tag{1.8}$$

$$\frac{dp}{dt} = -p(\frac{dF}{u} + \frac{dF}{x}) \qquad p(0) = p_o(s) \tag{1.9}$$

$$\frac{dq}{dt} = -q(\frac{dF}{q} + \frac{dF}{y}) \qquad q(0) = q_o(s) \tag{1.10}$$

$$\frac{du}{dt} = p\frac{dF}{dp} + q\frac{dF}{dq} \qquad u(0) = u_o(s) \tag{1.11}$$

Si el sistema de la condición de transversabilidad generalizado podría arrojar más de una solución $p_0(s), q_0(s)$, con cada una se puede resolver el problema de Cauchy y serán soluciones validas.

Lo otro es que la condición de transversabilidad (6) aquí viene dada por los vectores (F_p, F_q) y $(\frac{dx_0}{ds}, \frac{dy_0(s)}{ds})$.

Observación 1.6.1. *Note que el caso no lineal analiza el caso general, lineal, cuasilineal, y completamente no lineal. Y el analisis de perdida de unicidad en función de las condición de transversabilidad es equivalente.*

1.7. Ecuaciones de Segundo Orden Cuasilineales y su Clasificación

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de segundo orden cuasilineales son una clase importante de EDPs que involucran derivadas de segundo orden (segundas derivadas) de una función desconocida $u(x,y)$. La forma general de una EDP cuasilineal de segundo orden es:

$$a(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1.12}$$

Donde $a(x,y,u)$, $b(x,y,u)$, $c(x,y,u)$ y $d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})$ son funciones conocidas que dependen de x, y, u, y posiblemente de las derivadas parciales de u.

Para simplificar esta ecuación, realizamos un cambio de variable introduciendo dos nuevas variables, ξ y η, de la siguiente manera:

$$u(x,y) = W(\xi,\eta).$$

Donde:

$$\xi = \xi(x,y).$$

$$\eta = \eta(x,y).$$

Ahora, calculemos las derivadas parciales de u con respecto a x y y en términos de ξ y η:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Ahora, calculemos las segundas derivadas de u con respecto a x y y utilizando las expresiones anteriores:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

Luego, sustituimos estas expresiones en la ecuación original:

$$A(x,y,W)\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2B(x,y,W)\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + C(x,y,W)\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = D(x,y,W,P,Q).$$

donde:

$$\begin{aligned}
A(x,y,W) &= a(x,y,W)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y,W)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c(x,y,W)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\
B(x,y,W) &= a(x,y,W)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x,y,W)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c(x,y,W)\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} \\
C(x,y,W) &= a(x,y,W)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y,W)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c(x,y,W)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

Estas EDPs cuasilineales pueden clasificarse en tres categorías principales según su comportamiento característico:

1.7.1. Ecuaciones Elipticas

$$a(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1.1}$$

Una ecuación de segundo orden se considera **elíptica** en un punto (x_0, y_0) si la matriz:

$$\begin{pmatrix} a(x_0,y_0,u) & b(x_0,y_0,u) \\ b(x_0,y_0,u) & c(x_0,y_0,u) \end{pmatrix}.$$

es definida positiva en ese punto. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\det \begin{vmatrix} a(x_0, y_0, u) & b(x_0, y_0, u) \\ b(x_0, y_0, u) & c(x_0, y_0, u) \end{vmatrix} = a(x_0, y_0, u) \cdot c(x_0, y_0, u) - b^2(x_0, y_0, u) > 0.$$

Para que la ecuación sea elíptica, el determinante de la matriz debe ser positivo en cada punto (x_0, y_0) de interés.

Una ecuación elíptica en forma canónica es de la forma:

$$\Delta W = f(x, y, W).$$

donde Δ es el operador laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Para llevar la ecuación original a esta forma, podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\xi \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b}{a} \tag{1.2}$$

$$\eta \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \tag{1.3}$$

1.7.2. Ecuaciones Parabólicas

$$a(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1.1}$$

Una EDP de segundo orden se considera **parabólica** en un punto (x_0, y_0) si la matriz:

$$\begin{pmatrix} a(x_0, y_0, u) & b(x_0, y_0, u) \\ b(x_0, y_0, u) & c(x_0, y_0, u) \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$\det \begin{vmatrix} a(x_0, y_0, u) & b(x_0, y_0, u) \\ b(x_0, y_0, u) & c(x_0, y_0, u) \end{vmatrix} = a(x_0, y_0, u) \cdot c(x_0, y_0, u) - b^2(x_0, y_0, u) = 0.$$

es singular en ese punto. Estas ecuaciones a menudo están asociadas con problemas de propagación de ondas y difusión en el tiempo, como la ecuación del calor o la ecuación de onda.

La forma canónica de una EDP parabólica es:

$$Au_{xx} + d(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

Para llevar la ecuación original a su forma canónica, podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\eta \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b}{a} \tag{1.2}$$

$$\xi \qquad tq \qquad \frac{\partial(\eta, \xi)}{\partial(x, y)} \neq 0 \tag{1.3}$$

1.7.3. Ecuaciones Hiperbólicas

$$a(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1.1}$$

Una EDP de segundo orden se considera **hiperbólica** en un punto (x_0, y_0) si

$$\det \begin{vmatrix} a(x_0, y_0, u) & b(x_0, y_0, u) \\ b(x_0, y_0, u) & c(x_0, y_0, u) \end{vmatrix} = a(x_0, y_0, u) \cdot c(x_0, y_0, u) - b^2(x_0, y_0, u) < 0.$$

La forma canonica de una EDP Hierbolica es:

$$Au_{xy} + d(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

Para llevar la ecuación original a su forma canónica, podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\xi \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b - \sqrt{ac - b^2}}{a} \tag{1.2}$$

$$\eta \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b + \sqrt{ac - b^2}}{a} \tag{1.3}$$

Capítulo 2

Ecuación de onda

Contents

La ecuación de onda describe la propagación de ondas a través de un medio. Es fundamental en física y se utiliza para describir fenómenos como las ondas sonoras, las ondas de luz y las ondas en cuerdas o membranas.

La forma unidimensional de la ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{2.1}$$

Donde:

- u es el desplazamiento de la onda en función del tiempo t y de la posición x.

- c es la velocidad de propagación de la onda en el medio.

2.1. Solución General de la ecuación homogénea

Note que la ecuación de onda homogénea es:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})u = 0 \tag{2.2}$$

De donde sabemos que las curvas características de la ecuación son:

$$\xi = x - ct \qquad \eta = x + ct$$

A partir de la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \\
&= -c\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial u^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= -c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) + c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) \\
&= c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0\\ 4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} &= 0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} &= 0\end{aligned}$$

Integrando tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} &= 0\\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= w(\eta)\\ u(\xi,\eta) &= \int w(\eta)d\eta + F(\xi)\end{aligned}$$

Y así

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \tag{2.3}$$

Es la solución general a la ecuación de onda homogénea. Donde F y G son de clase C^1.

2.2. Fórmula de D'Alambert para el Problema de Cauchy

Dado el problema de Cauchy para la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

Vimos que la solución general de la ecuación tiene la forma:

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct).$$

La idea es tomar F y G que generen una solución que satisfaga las condiciones iniciales. Luego

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = \varphi(x) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -cF'(x) + cG'(x) = \psi(x) \tag{2.2}$$

Integrando en la última igualdad obtenemos

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)ds - F(0) + G(0).$$

Sumando con (4) obtenemos

$$\begin{aligned} 2G(x) &= \varphi(x) + \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)ds - F(0) + G(0) \\ G(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds - \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}G(0) \end{aligned}$$

y de nuevo en la ecuación (4) obtenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \varphi(x) - G(x) \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}G(0) \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds \tag{2.3}$$

Esta la fórmula de d'Alambert para el problema de Cauchy para la ecuación de onda en la linea real.

Teorema 2.2.1 (Dependencia continua del dato inicial)**.** *Dado el problema de Cauchy.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) &= \varphi_i(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi_i(x) \end{aligned}$$

en $-\infty < x < \infty$ *y* $t > 0$

Sea u_1 *solución para* $i = 1$ *y* u_2 *solución para* $i = 2$.

Dado $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si*

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta \quad y \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$$

para $-\infty < x < \infty$ *y* $t > 0$*, entonces*

$$|u_1(x) - u_2(x)| < \epsilon.$$

para $-\infty < x < \infty$ *y* $t > 0$.

2.3. El triangulo característico y la influencia de un intervalo espacial

Dada la formula de d'Alambert para la solución del problema de Cauchy para la ecuación de onda como

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct}\psi(s)ds\right) \tag{2.1}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct}\psi(s)ds\right) \tag{2.2}$$

$$= F(x-ct) + B(x+ct) \tag{2.3}$$

Donde

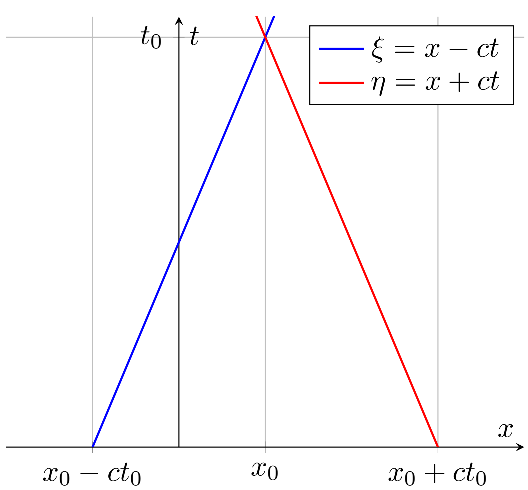
$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^{x}\psi(s)ds \tag{2.4}$$

$$B(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^{x}\psi(s)ds \tag{2.5}$$

Note que las curvas características son

$$\xi = x - ct \qquad \eta = x + ct$$

que para ξ y η fijos tenemos



Este es llamado el triangulo característico para $x = x_0$ y $t = t_0$. Donde se interceptan las curvas características en (x_0, t_0) y notamos una influencia del intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ sobre el punto (x_0, t_0).

En la formula de d'Alambert vemos

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 - ct_0) + \varphi(x_0 + ct_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(s)ds \tag{2.6}$$

$$= F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0) \tag{2.7}$$

Los términos $\varphi(x_0 - ct_0)$ y $\varphi(x_0 + ct_0)$ son la posición inicial de la función evaluada en dos números $x_0 - ct_0$ y $x_0 + ct_0$, y depende solamente de esos dos puntos. La integral en la fórmula depende de ψ en el intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ Considerando la igualdad (7) con F y B dados por (4) y (5) respectivamente. A lo largo de la característica $x - ct = x_0 - ct_0$, $F(x - ct)$ tiene un valor constante $F(x_0 - ct_0)$. Además A lo largo de la característica $x + ct = x_0 + ct_0$, $B(x - ct)$ tiene un valor constante $B(x_0 + ct_0)$. *Una solución de la ecuación de onda propaga disturbios con velocidad constante c a lo largo de sus características.*

2.4. La ecuación de onda en media recta

Vamos a resolver el problema de Cauchy para la ecuación de onda sobre la media recta $x > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && x > 0, t > 0 \\
u(x,0) &= \varphi(x) && x \geq 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) && x \geq 0 \\
u(0,t) &= 0 && t \geq 0
\end{aligned}$$

Tomemos

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

y

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\psi(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Así, para $x \geq 0$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ y $\Psi(-x) = -\Psi(x)$.

Ahora considere el siguiente problema de Cauchy sobre toda la recta:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x) && -\infty < x < \infty
\end{aligned}$$

La solución de este problema es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x-ct) + \Phi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)ds$$

Podemos verificar que u satisface las condiciones iniciales del problema sobre recta, pues para $x > 0$

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= \frac{1}{2}\left(\Phi(x) + \Phi(x)\right) \\
&= \Phi(x) = \varphi(x) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \frac{1}{2}\big(-c\Phi'(x) + c\Phi(x)\big) + \frac{1}{2c}\left(c\Psi(x) + c\Psi(x)\right) \\
&= \Psi(x) = \psi(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto u staisface la condición inicila del problema sobre la media recta. Finalmente necesitamos que $u(0,t) = 0$ Y

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(-ct) + \Phi(ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \Psi(s)ds$$

Pero dado que Ψ y Φ son impares se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(-ct) + \Phi(ct) = \Phi(ct) - \Phi(ct) = 0 \\ \int_{-ct}^{ct} \Psi(s)ds = 0 \end{aligned}$$

2.5. Problema de Dirichlet

Vamos a resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x > 0, t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \geq 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad x \geq 0 \tag{2.3}$$

$$u(0,t) = f(t) \qquad t \geq 0 \tag{2.4}$$

Usando la fórmula de d'Alambert para el problema de Cauchy obtenemos

Supongamos primero $x_0 \geq ct_0$

$$\begin{aligned} u(x_0,t_0) &= \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 - ct_0) + \varphi(x_0 + ct_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(s)ds \\ &= F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0) \end{aligned}$$

de la condición $u(0,t_0) = f(t_0)$, Tenemos

$$\begin{aligned} f(t_0) &= F(-ct_0) + B(ct_0) \\ F(-ct_0) &= f(t_0) - B(ct_0) \\ F(-\tau) &= f(\frac{\tau}{c}) - B(\tau) \end{aligned}$$

para $u > 0$, Esto extiende a F a valores negativos. Usamos la misma F, para denotar esta extensión, por simplicidad.

Ahorra bien, tomando $x_0 - ct_0 < 0$

$$\begin{aligned} F(x_o - ct_0) &= F(-(ct_0 - x_0)) \\ &= f(\frac{ct_0 - x_0}{c}) - B(ct_0 - x_0) \\ &= f(t_0 - \frac{x_0}{c}) - B(ct_0 - x_0) \end{aligned}$$

Substituyendo en la formula de d'Alambert obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0) \\ &= f(t_0 - \frac{x_0}{c}) - B(ct_0 - x_0) + B(x_0 + ct_0) \qquad x_0 - ct_0 < 0 \end{aligned}$$

Volviendo a la definición para la onda B

$$u(x_0, t_0) = f(t_0 - \frac{x_0}{c}) + \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 + ct_0) - \varphi(ct_0 - x_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct_0 - x_0}^{x_0 + ct_0} \psi(s)ds, \qquad x_0 < ct_0$$

De aquí también podemos calcular $u(x_0, t_0)$ para $x_0 - ct_0 \geq 0$ y para $x_0 - ct_0 < 0$

Por lo tanto

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds & \text{si } x \geq ct \\ f(t - \frac{x}{c}) + \frac{1}{2}\left(\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s)ds & \text{si } x < ct \end{cases} \tag{2.1}$$

De aquí se puede analizar la continuidad, a esta se le llama condición de compatibilidad de la solución.

2.6. Problema de Neuman

Vamos a resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x > 0, t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \geq 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad x \geq 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h(t) \qquad t \geq 0 \tag{2.4}$$

Supongamos primero $x_0 \geq ct_0$, y de la formula de d'Alambert

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 - ct_0) + \varphi(x_0 + ct_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(s)ds$$

Ahoara bien, si $x_0 < ct_0$, tomando la solución general

$$u(x_0,t_0) = F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0)$$

Derivando respecto a x

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F'(x - ct) + B'(x + ct)$$

Pero de (4)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= h(t) \\
&= F'(-ct) + B'(ct) \\
B'(ct) &= h(t) - F'(-ct) \\
B'(\tau) &= h(\frac{\tau}{c}) - F'(-\tau)
\end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_0^t h(\frac{\tau}{c})d\tau + F(-t) \\ &= \int_0^t h(\frac{\tau}{c})d\tau + \frac{1}{2}\left(\varphi(t)\frac{1}{c}\int_0^t \psi(\xi)d\xi\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0-ct_0)+\varphi(x_0+ct_0)\right) - \int_0^t h(\frac{\tau}{c})d\tau + \frac{1}{2c}\int_0^{x_0+ct_0}\psi(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^{ct0-x_0}\psi(s)ds$$

Entonces la solución es

$$u(x_0,t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds & \text{si } x \geq ct \\ \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right) - \int_0^t h(\frac{\tau}{c})d\tau + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct}\psi(s)ds + \int_0^{ct0-x}\psi(s)ds\right) & \text{si } x < ct \end{cases} \tag{2.5}$$

Similar que en el problema de Dirichlet aquí se puede analizar la continuidad, a esta se le llama condición de compatibilidad de la solución.

2.7. Problema de Robin

Vamos a resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x > 0, t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \geq 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad x \geq 0 \tag{2.3}$$

$$u(0,t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t) \qquad t \geq 0 \tag{2.4}$$

si $x_0 \geq ct_0$, de la formula de d'Alambert

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 - ct_0) + \varphi(x_0 + ct_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(s)ds$$

si $x_0 < ct_0$, tomando la solución general

$$u(x_0, t_0) = F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0)$$

Derivando respecto a x

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F'(x - ct) + B'(x + ct)$$

Pero de (4)

$$u(0,t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t)$$

$$F(-ct) + B(ct) + \beta(F'(-ct) + B'(ct)) = g(t)$$

Sea $w(t) = F(-ct) + B(ct)$, entonces

Lema 2.7.1. *dada $f \in C^2[a,b]$, entonces*

$$\frac{\partial f(x+ct)}{\partial t} = c\frac{\partial f(x+ct)}{\partial x}$$

En función del lema la condición inicial queda:

$$w(t) + \beta c w'(t) = g(t)$$

con solución

$$w(t) = \frac{\int_0^{ct} g(\frac{s}{c}) e^s ds}{e^{ct}}$$

reemplazando en la formula de d'Alambert

$$F(-ct_0) + B(ct_0) = \frac{\int_0^{ct_0} g(\frac{s}{c}) e^s ds}{e^{ct_0}}$$

por lo tanto la solución es

$$u(x_0,t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds & \text{si } x \geq ct \\ \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} \psi(s)ds + \int_0^{ct0-x} \psi(s)ds\right) + \frac{\int_0^{ct_0} g(\frac{s}{c}) e^s ds}{e^{ct_0}} & \text{si } x < ct \end{cases} \tag{2.5}$$

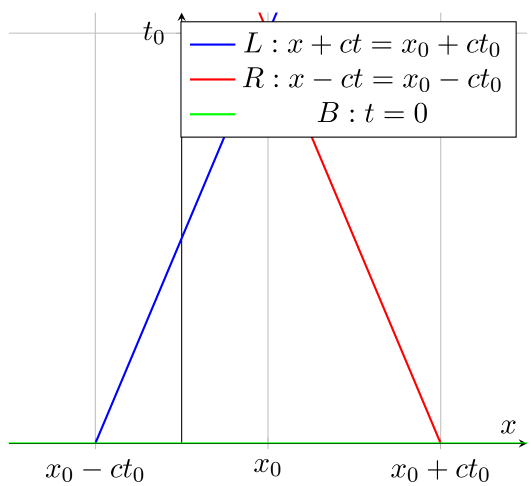
2.8. Problema no homogéneo en la recta real

Resolveremos el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t) \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad x \geq 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad x \geq 0 \tag{2.3}$$



Usaremos la formula de Green,

Teorema 2.8.1 (Formula de Green)**.** *Sea C una curva cerrada simple, positivamente orientada, y D la región encerrada por C. Si P y Q son funciones de dos variables con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene D, entonces*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_C (P\,dx + Q\,dy). \tag{2.4}$$

Sea $u(x,t)$ una solución del problema no homogéneo. Integrando ambos lados de la ecuación inicial sobre el triangulo característico tenemos

$$-\int\int_{\triangle} F(x,t)dxdt = \int\int_{\triangle} [c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}]dxdt.$$

Usando la formula de Green tenemos, llamando Γ a la frontera del triangulo

$$\begin{aligned}
-\int\int_{\triangle} F(x,t)dxdt &= \oint_{\Gamma}[\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt] \\
&= \int_B + \int_R + \int_L [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt]
\end{aligned}$$

En la base B tenemos que $dt = 0$, por lo tanto usando la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt] &= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \frac{\partial u}{\partial t}dx \\
&= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx
\end{aligned}$$

Para el lado derecho R, $x + ct = x_0 + ct_0$, por lo que $dx = -cdt$, y asi

$$\begin{aligned}
\int_R [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt] &= -c\int_R [\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx] \\
&= -c\int_R du \\
&= -c[u(x_0,t_0) - u(x_0+ct_0,0)] \\
&= -c[u(x_0,t_0) - f(x_0+ct_0)]
\end{aligned}$$

Y para el lado izquierdo L, $x - ct = x_0 - ct_0$, por lo que $dx = cdt$, y asi

$$\begin{aligned}
\int_L [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt] &= c\int_R [\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx] \\
&= c\int_L du \\
&= c[u(x_0+ct_0,0) - u(x_0,t_0)] \\
&= c[f(x_0-ct_0) - u(x_0,t_0)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\int\int_{\triangle} F(x,t)dxdt = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx + c[f(x_0-ct_0) + f(x_0+ct_0) - 2u(x_0,t_0)]$$

Resolviendo para u

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}[f(x_0-ct_0)+f(x_0+ct_0)] + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int\int_{\triangle} F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x_0-ct_0)+f(x_0+ct_0)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Esta es llamada la formula de d'Alambert para la ecuación de onda no homogénea.

También podemos hallar la solución a partir del principio de Duhamel. Sea $u(x,t)$ una solución del problema no homogéneo. Entonces

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t)$$

Donde $u_h(x,t)$ es la solución del problema homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} &= 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u_h(x,0) &= f(x) & x \geq 0 \\ \frac{\partial u_h}{\partial t}(x,0) &= g(x) & x \geq 0 \end{aligned}$$

y $u_p(x,t)$ es una del problema homogeneo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} &= 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u_p(x,T) &= 0 & x \geq 0, t \geq T \\ \frac{\partial u_p}{\partial t}(x,T) &= F(x,T) & x \geq 0, t \geq T \end{aligned}$$

La solución de este problema es a partir de la formula de d'Alambert

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} F(s,T)ds$$

y entonces la solución general, la obtenemos en la suma de la homogenea con la integral de la particular.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Verifiquemos que esta solución satisface las condiciones ecuación inicial

Usaremos los siguientes lemas

Lema 2.8.2 (Leibniz para Integral Simple)**.** *Sea $f(x,t)$ una función tal que tanto f como su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}$ son continuas en la región de integración. Entonces, la derivada con respecto a t de la integral simple es:*

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

Lema 2.8.3 (Leibniz para Integral Doble)**.** *Sea $f(x,y,t)$ una función tal que tanto f como su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}$ son continuas en la región de integración. Entonces, la derivada con respecto a t de la integral doble es:*

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}\int_{c(t)}^{d(t)} f(x,y,t)\,dy\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{y=c(t)}^{y=d(t)} dx + \int_{c(t)}^{d(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{x=a(t)}^{x=b(t)} dy + \int_{a(t)}^{b(t)}\int_{c(t)}^{d(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dy\,dx$$

La función $u(x,t)$ está dada por:

$$u(x,t) = u_h + \int_0^t u_p(x,t,\tau)d\tau$$

donde u_h cumple

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} &= 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u_h(x,0) &= f(x) & x \geq 0 \\ \frac{\partial u_h}{\partial t}(x,0) &= g(x) & x \geq 0 \end{aligned}$$

y $u_p(x,t,\tau)$ cumple

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} &= 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u_p(x,\tau) &= 0 & x \geq 0, t \geq \tau \\ \frac{\partial u_p}{\partial t}(x,\tau) &= F(x,\tau) & x \geq 0, t \geq \tau \end{aligned}$$

Las derivadas son:

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial u_h}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial u_p(x,t,\tau)}{\partial t} d\tau + u(x,t,t) \\
&= \frac{\partial u_h}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} d\tau
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 u_p(x,t,\tau)}{\partial t^2} d\tau + \frac{\partial u_p}{\partial t}(x,t,t) \\
&= \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F(x,t)
\end{aligned}$$

Además

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 u_p(x,t,\tau)}{\partial x^2} d\tau$$

Ahora sustituimos u_{tt} y u_{xx} en la ecuación de onda no homogénea:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} \\
&+ \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\tau \ - c^2 \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\tau \\
&+ F(x,t) \\
&= 0 + 0 + F(x,t)
\end{aligned}$$

2.9. Problema sobre un intervalo cerrado

Analicemos el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{2.1}$$

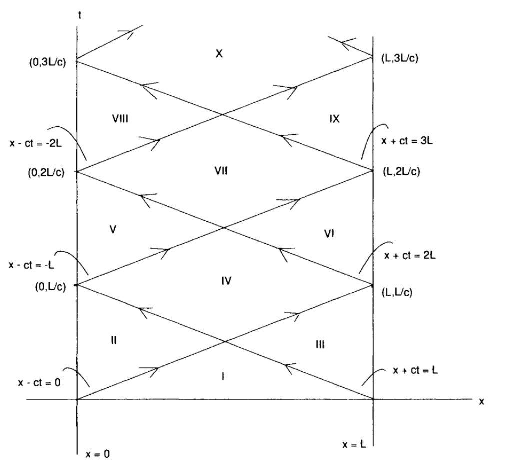
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad 0 < x < L \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = a(t) \quad u(L,t) = b(t) \qquad 0 < x < L \tag{2.3}$$

Recordemos que las características de esta ecuación son:

$$\xi = x - ct \qquad \eta = x + ct$$

La solución se basa en segmentos de características y partir el intervalo $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ en triángulos y cuadriláteros, de la siguiente forma:



Sabemos que

$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u(0,t) = a(t)$$
$$u(L,t) = b(t)$$

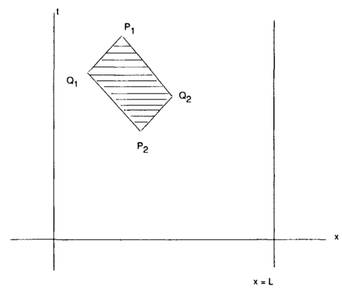
Y queremos saber $u(x,t)$ para los puntos interiores.

Para esto nos basaremos en el cuadrilátero característico formado por los segmentos de cuatro caracteristicas. P_1 y P_2 son vertices opuestos, como lo son Q_1 y Q_2. Recurrimos a que si U es una solución, de la ecuación de onda , entonces

$$u(P_1) + u(P_2) = u(Q_1) + u(Q_2).$$

Es to es del hecho de que

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

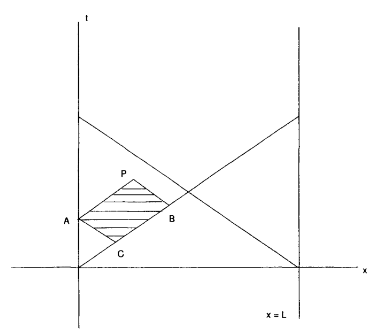


Ahora bien, analicemos cada región en la partición del intervalo.

Si $P = (x, t)$ está en la región I, entonces $u(x, t)$ viene dada por la formula de d'Alambert, es decir

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds.$$

Si $P = (x, t)$ está en la región II



Del cuadrilátero característico teniendo un vértice en el eje $x = 0$

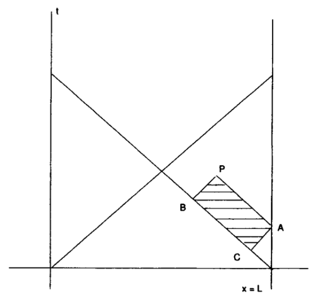
Obtenemos

$$u(P) = u(A) + u(B) - u(C).$$

De donde $u(A)$, se conoce de $u(0, t_A) = a(t_A)$. También $u(B)$ y $u(C)$, se conocen están en la región I desde la formula de d'Alambert.

$$u(B) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_B - ct_B) + \varphi(x_B + ct_B)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_B-ct_B}^{x_B+ct_B} \psi(s)ds$$
$$u(C) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_C - ct_C) + \varphi(x_C + ct_C)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_C-ct_C}^{x_C+ct_C} \psi(s)ds$$

Si $P = (x, t)$ está en la región III



Del cuadrilátero característico teniendo un vértice en el eje $x = L$

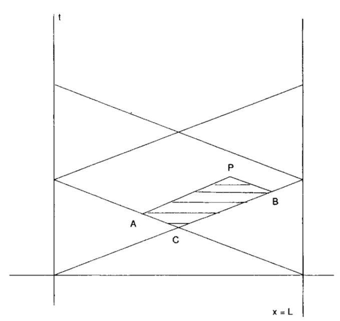
Obtenemos

$$u(P) = u(A) + u(B) - u(C).$$

De donde $u(A)$, se conoce de $u(L, t_A) = b(t_A)$. También $u(B)$ y $u(C)$, se conocen están en la región I desde la formula de d'Alambert.

$$u(B) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_B - ct_B) + \varphi(x_B + ct_B)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_B - ct_B}^{x_B + ct_B} \psi(s)ds$$
$$u(C) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_C - ct_C) + \varphi(x_C + ct_C)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_C - ct_C}^{x_C + ct_C} \psi(s)ds$$

Si $P = (x, t)$ está en la región IV



Del cuadrilátero característico teniendo un vértice en el eje $x = L$

Obtenemos

$$u(P) = u(A) + u(B) - u(C).$$

De donde $u(C)$, se conoce de pues está en la región I. También $u(A)$ y $u(B)$, se conocen están en la región II y III.

Y con este mismo proceso se puede seguir para el resto de regiones de manera recursiva se tiene que una región depende de las anteriores, que se tienen definidas.

2.10. Solución por series de Fourier al problema sobre un intervalo cerrado

Analicemos el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad 0 \leq x \leq L \tag{2.3}$$

Usaremos un método llamado *separación de variables*, consiste en suponer una solución de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, el producto de dos funciones de x y de t respectivamente. Al substituir en la ecuación obtenemos

$$XT'' = c^2 X''T.$$

o equivalente

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

En ambos lados tenemos funciones que solo dependen de una variable t en la izquierda y x en la derecha, y cada ecuación se puede resolver por medio de separación de variables porque x y t son variables independientes. Por lo que podemos resolver

$$\frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \qquad \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Dado que $u(0,t) = X(0)T(0) = 0$ para todo t, podemos inferir que $X(0) = 0$, y similarmente $u(L,t) = X(L)T(L) = 0$ implicaría que $X(L) = 0$. Aunque note que también puede ser que $T(t) = 0$ para t tal que $u(x,t) = 0$.

El problema para X,

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad X(0) = X(L) = 0 \tag{2.4}$$

Buscamos valores de λ, llamados *valores propios*, para los cuales hay soluciones no triviales para X, llamada *función propia*, satisfaciendo la ecuación ordinaria, con los valores de frontera.

Notemos que existen algunas posibilidades para λ.

Si $\lambda = 0$, entonces $X'' = 0$ y $X(x) = ax + b$ para algunas constantes a y b. Pero $X(0) = 0$

implica $b = 0$, y $X(L) = 0$ implica que $a = 0$, pero esta es una solución trivial.

Si $\lambda < 0$ supongamos $\lambda = -k^2$, con $k > 0$, entonces $X'' - k^2 X = 0$, luego

$$X(x) = ae^{kx} + be^{-kx}.$$

Ahora bien $X(0) = a + b = 0$, $a = -b$, así

$$X(x) = a\left(e^{kx} - e^{-kx}\right).$$

Si $a \neq 0$, entonces $X(L) = a\left(e^{kL} - e^{-kL}\right) = 0$, por lo que $kL = 0$ pero esto es imposible si k y L son no nulos. Lo que implica que $a = 0$, y tenemos una solución trivial.

Si $\lambda > 0$ supongamos $\lambda = k^2$, con $k > 0$, entonces $X'' - k^2 X = 0$, luego

$$X(x) = acos(kx) + bsen(kx).$$

Ahora bien $X(0) = a = 0$, así

$$X(x) = bsen(kx).$$

Si $b \neq 0$, entonces $X(L) = bsen(kL) = 0$, por lo que $kL = n\pi$, para $n \in \mathbb{N}$, los negativos no nos sirven porque buscamos un sistema linealmente independientes, y recuerde que $sen(x)$ es una función impar.

$$kL = n\pi \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $k = \frac{n\pi}{L}$, y obtenemos valores propios

$$\lambda_n = k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

y su función propia correspondiente

$$X_n(x) = sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

Multiplicada por cualquier constante no nula.

Ahora que sabemos los valores admitidos para λ y su correspondiente solución para X, el problema para T es

$$T'' + \frac{n^2\pi^2}{L^2}T = 0.$$

Con solución general

$$T_n(t) = a_n cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

para $n \in \mathbb{N}$ Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos una función

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) && (2.5)\\ &= \left(a_n cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right) sen(\frac{n\pi x}{L}) && (2.6)\end{aligned}$$

Satisfaciendo la ecuación de onda con la condición de frontera $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Los que sigue es encontrar una solución que satisfaga la condición inicial.

Notemos que cada $u_n(x)$ es una solución, y podemos pensar en $u(x,t)$ como una superposición de todas las funciones u_n

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x,t)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a_n cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right) sen(\frac{n\pi x}{L})\end{aligned}$$

Necesitamos constantes a_n y b_n tal que u satisfaga la condición inicial. Necesitamos

$$u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n sen(\frac{n\pi x}{L}) = \varphi(x).$$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi) sen(\frac{n\pi\xi}{L})d\xi.$$

Y además como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\pi c}{L}\left(-a_n sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right) sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\pi c}{L} b_n sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

Por lo tanto

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(\xi) sen(\frac{n\pi\xi}{L})d\xi.$$

o también

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \psi(\xi) sen(\frac{n\pi\xi}{L}) d\xi.$$

Observación 2.10.1. *Observemos que*

- *Se puede derivar la serie de Fourier, a partir de la serie de derivadas, por la convergencia uniforme de la serie a partir del criterio de Weierstrass.*

  Teorema 2.10.2 (Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de series)**.** *Si* $\{g_n(x)\}$ *es una sucesión de funciones definidas en un conjunto* E *y si existe una sucesión de números no negativos* $\{M_n\}$ *tal que:*

  1. $|g_n(x)| \leq M_n$ *para todo* n *y para todo* x *en* E*, y*
  2. *La serie* $\sum M_n$ *es convergente,*

  Entonces, la serie $\sum g_n(x)$ *es uniformemente convergente en* E*.*

  Y además en estas condiciones

$$\frac{d}{dx}\left(\sum g_n(t)\right) dt = \sum \frac{dg_n(x)}{dx}$$

$$\int_a^b \left(\sum g_n(x)\right) dx = \sum \int_a^b \frac{dg_n(x)}{dx} dx$$

2.11. Comparación de las soluciones de Fourier y d'Alambert

La solución de Fourier es

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a_n cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right) sen(\frac{n\pi x}{L})$$

donde a_n y b_n son las constantes de Fourier.

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi) sen(\frac{n\pi\xi}{L}) d\xi$$
$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \psi(\xi) sen(\frac{n\pi\xi}{L}) d\xi$$

para el problema con $x \in [0, L]$, $t \geq 0$, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$. Define una extensión par de esta función a $x \in [-L, L]$, $t \geq 0$, $u(-x,t) = u(x,t)$, $u(x+2L,t) =$

$u(x,t)$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, y de esta extensión periodica $\varphi_p(x)$ de $\varphi(x)$ y $\psi_p(x)$ de $\psi(x)$ a la recta real. Ahora podemos escribir la solución de d'Alambert es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds$$

para el problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && -\infty < x < \infty, t > 0 \\
u(x,0) &= \varphi_p(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi_p(x) && -\infty < x < \infty \\
u(0,t) &= u(L,t) = 0 && t \geq 0
\end{aligned}$$

cuando x está restricta a $[0,L]$, esta expresión para $u(x,t)$ también es una solución del problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && 0 < x < L, t > 0 \\
u(x,0) &= \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) && 0 \leq x \leq L \\
u(0,t) &= u(L,t) = 0 && 0 \leq x \leq L
\end{aligned}$$

Observación 2.11.1. *Antes vimos que la solución al problema de onda es única, pero en este caso tenemos dos soluciones, la solución de Fourier y la solución de d'Alambert. Por lo tanto tienen que ser iguales.*

2.12. Problema no homogéneo sobre un intervalo cerrado

Analicemos el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad 0 \leq x \leq L \tag{2.3}$$

Este problema se puede abordar por separación de variables. Supongamos que $u(x,t) = X(x)T(t)$, entonces

$$XT'' = c^2 X''T + F(x,t).$$

supongamos que $u(x,t) = U(x,t) + f(x)$, entonces reemplazando en (1) tenemos

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) + F(x,t)$$

la idea es tomar f tal que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{F(x,t)}{c^2}.$$

Ahora notemos que

$$U(0,t) = u(0,t) - f(0) = -f(0)$$

y

$$U(L,t) = u(L,t) - f(L) = -f(L)$$

para $t \geq 0$, por lo que podemos resolver el problema para U con condiciones de frontera homogéneas, y luego sumarle $f(x)$ para obtener la solución para u.

Por lo tanto, tomemos f tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{F(x,t)}{c^2} \qquad f(0) = f(L) = 0$$

Finalmente, note que para hallar a $U(x,t)$ resolvemos el problema

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{2.1}$$

$$U(x,0) = \varphi(x) - f(x) \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x) - \frac{\partial f}{\partial t}(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{2.2}$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0 \qquad 0 \leq x \leq L \tag{2.3}$$

Que ya sabemos resolver, usemos Fourier

$$U(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(a_n cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n sen \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right) sen(\frac{n\pi x}{L})$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L (\varphi(\xi) - f(\xi))sen(\frac{n\pi\xi}{L})d\xi$$
$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L (\psi(\xi) - \frac{\partial f}{\partial t}(\xi))sen(\frac{n\pi\xi}{L})d\xi$$

Y luego la solución para u es

$$u(x,t) = U(x,t) + f(x).$$

Capítulo 3

Ecuación de calor

Contents

La ecuación de calor describe la distribución de temperatura en un cuerpo, y es de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

donde $u(x,t)$ es la temperatura en el punto x y tiempo t, y a^2 es una constante de proporcionalidad. También describe difusión de párticulas quimicas, y la propagación de ondas en un medio con viscosidad.

`Condiciones iniciales y de contorno`: Para determinar la solución de la ecuación de calor, se requieren condiciones iniciales y de contorno. Las condiciones iniciales especifican la temperatura en el instante inicial

$$u(x,o) = g(x),$$

y las condiciones de contorno especifican la temperatura en los extremos del intervalo

$$u(0,t) = h_1(t) \quad u(L,t) = h_2(t).$$

3.1. Transferencia de calor en una barra infinita

Analicemos el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.2}$$

Aplicamos el metodo de separación de variables, supongamos que $u(x,t) = X(x)T(t)$, entonces

$$XT' = a^2 X'' T.$$

o equivalentemente

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

En ambos lados tenemos funciones que solo dependen de una variable t en la izquierda y x en la derecha, y cada ecuación se puede resolver por medio de separación de variables porque x y t son variables independientes.

Por lo que podemos resolver

$$\frac{T'}{a^2 T} = -\lambda \qquad \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Con k constante, y X y T funciones de x y t respectivamente.

$$T' + \lambda a^2 T = 0$$

Por lo que $T(t) = Ce^{-\lambda a^2 t}$, y X satisface

$$X'' + k^2 X = 0.$$

Con $X(0) = g(x)$, X es una combinación lineal de $cos(kx)$ y $sen(kx)$, es decir

$$X(x) = a_1 cos(\lambda x) + a_2 sen(\lambda x).$$

Sustituyendo en la ecuación inicial

$$u_\lambda = e^{-\lambda a^2 t}(Ca_1 cos(\lambda x) + Ca_2 sen(\lambda x)).$$

Para cada $\lambda > 0$ tenemos una solución, como la ecuación es lineal, la solución general es una combinación lineal de las soluciones para cada λ, es decir

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-\lambda a^2 t}(Ca_1 cos(\lambda x) + Ca_2 sen(\lambda x))d\lambda.$$

siempre que la integral y sus derivadas, segunda respecto a x y primera respecto a t, existan.

Reemplazamos en la condición inicial, y tenemos

$$g(x) = \int_0^\infty Ca_1 cos(\lambda x) + Ca_2 sen(\lambda x))d\lambda.$$

y por la ortogonalidad de las funciones $cos(\lambda x)$ y $sen(\lambda x)$, tenemos que

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(x)cos(\lambda x)dx \qquad a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(x)sen(\lambda x)dx.$$

Por lo que la solución es

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda a^2 t}\left(\int_0^\infty g(\xi)cos(\lambda\xi)d\xi cos(\lambda x) + \int_0^\infty g(\xi)sen(\lambda\xi)d\xi sen(\lambda x)\right)d\lambda.$$

y de la integral de Fourier sabemos que

$$\int_0^\infty g(\xi)cos(\lambda\xi)d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g(\xi)cos(\lambda\xi)d\xi\right)cos(\lambda x)d\lambda.$$

y

$$\int_0^\infty g(\xi)sen(\lambda\xi)d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g(\xi)sen(\lambda\xi)d\xi\right)sen(\lambda x)d\lambda.$$

Por lo que la solución es

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^\infty g(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi.$$

Esta formula es valida para $t > 0$, y x y ξ son reales. Se denomina la fórmula de Fourier-Poisson para la ecuación de calor. Observemos que la integral está bien definida para cualquier función g que sea continua, o incluso por partes, en $(-\infty, \infty)$.

definición 3.1.1 (Núcleo del calor)**.** El núcleo del calor es la función definida por partes

$$K(x,t) = \begin{cases} (4\pi a^2 t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} & \text{si } t > 0,\, x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } t < 0,\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

definición 3.1.2 (Convolución)**.** Sean f y g funciones continuas por partes en $(-\infty, \infty)$, definimos la convolución de f y g como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Con esta definición, la solución de la ecuación de calor se puede escribir como

$$u(x,t) = (g * K(\cdot, t))(x).$$

Teorema 3.1.3. *Si g es continua por partes en $(-\infty, \infty)$, entonces la solución de la ecuación de calor viene dada por*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (g * K(\cdot,t))(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) K(x-\xi, t) d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \end{aligned}$$

para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Basta ver que $u(x,t)$ satisface la ecuación de calor y las condiciones iniciales. Para la ecuación de calor, note que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) K(x-\xi,t) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\partial}{\partial t} K(x-\xi,t) d\xi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) K(x-\xi,t) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x-\xi,t) d\xi$$

Luego

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\partial}{\partial t} K(x-\xi,t) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x-\xi,t) d\xi = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

pues

$$\frac{\partial}{\partial t}K(x-\xi,t) = -\frac{1}{2}(4\pi a^2 t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}\right) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x-\xi,t)$$

Para las condiciones iniciales, note que

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)K(x-\xi,0)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = g(x)$$

$\square$

Observación 3.1.4. *El meter la derivada en la integral se puede hacer por el teorema de Leibniz, que dice que si f es continua por partes y diferenciable en $(-\infty,\infty)$, entonces*

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)y = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy$$

3.2. Ecuación no homogénea de calor en una barra infinita

Analicemos el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.2}$$

Suponiendo que $f \in C^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$, y g es continua y acotada.

La idea es resolver la ecuación de calor homogénea en cada nivel $t = s > 0$, y luego sumar (integrar) todas estas soluciones.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{3.3}$$

$$u(x,s) = f(x,s) \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.4}$$

denotamos la solución por

$$u(x,t;s) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,s)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-s)}}d\xi.$$

para $t > s$, usando el Teorema (3.1.3) y el cambio de variable $t \to t-s$. Ahora podemos escribir la expresión para la solución de (3.1, 3.2) como

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t u(x,t;s)ds && (3.5)\\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t-s)f(\xi,s)d\xi ds && (3.6)\\
&= \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,s)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-s)}}d\xi ds && (3.7)
\end{aligned}
$$

3.3. Principios de Máximos y minimos

Usando notación de operador lineal

$$Lu = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Lema 3.3.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, y $u \in C^2(\Omega)$ tal que $Lu > 0$ en Ω. Entonces u no puede tener un máximo local en Ω.*

Demostración. Supongamos que u tiene un máximo local en $(x_0,t_0) \in \Omega$. Entonces $\nabla u(x_0,t_0) = 0$, y por el teorema de Taylor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$$

Por lo que

$$Lu(x_0,t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$$

Lo que es una contradicción. □

Corolario 3.3.2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado, y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $Lu \geq 0$ en Ω. Entonces u alcanza su máximo en $\partial\Omega$.*

Demostración. Como u es continua en $\overline{\Omega}$, alcanza su máximo en $\overline{\Omega}$, y por el lema anterior, no puede alcanzar su máximo en $\overline{\Omega} \setminus \partial\Omega$, por lo que alcanza su máximo en $\partial\Omega$. □

Corolario 3.3.3. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, y $u \in C^2(\Omega)$ tal que $Lu < 0$ en Ω. Entonces u no puede tener un mínimo local en Ω.*

Demostración. Supongamos que u tiene un mínimo local en $(x_0, t_0) \in \Omega$. Entonces $\nabla u(x_0, t_0) = 0$, y por el teorema de Taylor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \geq 0$$

Por lo que

$$Lu(x_0, t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \geq 0$$

□

Teorema 3.3.4 (Principio del máximo para el operador L)**.** *Sean* $\Omega = (a, b) \times (0, T)$*,*

$$\Gamma_1 = \{(x, t) \in \Omega : x = a\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, t) \in \Omega : t = 0\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, t) \in \Omega : x = b\}$$

$$\Gamma_4 = \{(x, t) \in \Omega : t = T\}$$

Supongamos que $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^2 *en* $\Omega \cup \Gamma_4$*, y* C^1 *en* $\overline{\Omega}$*. Si* $Lu \geq 0$ *en* Ω*, entonces* u *alcanza su máximo en* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$*.*

Demostración. Sea $m = max\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3\}$, y sea $M = max\{u(x, t) : (x, t) \in \overline{\Omega}\}$. Supongamos que $M \in \Gamma_4$, entonces $M = u(x_0, T)$ para algún $x_0 \in (a, b)$. Sea

$$v(x) = \frac{(M - m)(x - x_0)}{2(b - a)^2}$$

y sea

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} L(w(x,t)) &= L(u(x,t) - v(x)) \\ &= Lu(x,t) + Lv(x) \\ &= Lu(x,t) + a^2\frac{(M-m)}{2(b-a)^2} \\ &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{(M-m)}{2(b-a)^2} \end{aligned}$$

por hipotesis $Lu \geq 0$, y $\frac{(M-m)}{2(b-a)^2} > 0$, por lo que $L(w(x,t)) > 0$, y por el lema (3.3.1) $w(x,t)$ tiene máximo local en $\partial\Omega$. Además $max\{v\} < \frac{M-m}{2} < M$.

sea $(x,t) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, entonces $w(x,t) = u(x,t) - v(x) \leq u(x,t) \leq M$ que es el máximo de $w(x,t)$, por lo que $w(x,t) = M$, y por lo tanto $u(x,t) = M$. pero $\frac{\partial w}{\partial t} < 0$ los que es una contradicción, pues w sería decreciente respecto a t. □

Corolario 3.3.5. *Sea Ω, Γ_1, Γ_2, Γ_3 y Γ_4 como en el teorema anterior y $u \in C^2(\Omega \cap \Gamma_4) \cap C(\overline{\Omega})$. Si $Lu \leq 0$ en $\Omega \cup \Gamma_4$. Entonces u alcanza su mínimo en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. En particular, si $Lu = 0$ en $\Omega \cup \Gamma_4$, el máximo y el mínimo de u se alcanzan en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.*

Demostración. Sea $v = -u$, entonces $Lv \geq 0$ en $\Omega \cup \Gamma_4$, por lo que v alcanza su máximo en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, y por lo tanto u alcanza su mínimo en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. □

Teorema 3.3.6. *Sea $f \in C([a,b])$, $A, B \in C([0,\infty))$ y $g \in C^1((a,b) \times (0,\infty))$. Entonces existe a lo sumo una solución para el problema*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) && a < x < b, t > 0 \\ &u(x,0) = A(x) && a < x < b \\ &u(a,t) = B(t) && t > 0 \end{aligned}$$

con $u \in C^2((a,b) \times (0,\infty)) \cap C([a,b] \times [0,\infty])$ acotada.

Demostración. Supongamos que u_1 y u_2 son soluciones del problema, y sea $w = u_1 - u_2$. Entonces

w satisface

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad a < x < b, t > 0$$
$$w(x,0) = 0 \qquad a < x < b$$
$$w(a,t) = 0 \qquad t > 0$$

Por el teorema (3.3.3) w alcanza su máximo en $\partial\Omega$, pero $w(a,t) = 0$ para $t > 0$, por lo que w alcanza su máximo en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, y por lo tanto $w = 0$ en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, luego $w = 0$ en Ω, por lo que $u_1 = u_2$. □

Teorema 3.3.7. *sea $g \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$, $f \in C(\mathbb{R})$ acotada. Entonces existe a lo máximo una solución del problema*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \qquad -\infty < x < \infty, t > 0$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

con $u \in C^2((a,b) \times (0,\infty)) \cap C([a,b] \times [0,\infty])$ acotada.

Demostración. Supongamos que u_1 y u_2 son soluciones del problema, y sea $w = u_1 - u_2$. Entonces w satisface

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty, t > 0$$
$$w(x,0) = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

existe $M > 0$ tal que $|w(x,t)| \leq M$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Sea $\alpha > 04$ tomemos

$$v : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \qquad v(x,t) = w(x,t) - \frac{M}{a^2}x^2 - 2\frac{Ma^2}{\alpha^2}t$$

Por lo tanto

$$Lv = 2\frac{Ma^2}{\alpha^2} - \frac{M}{a^2}2 = 0$$

también tenemos que $w(x,t) \leq \frac{M}{a^2}x^2 + 2\frac{Ma^2}{\alpha^2}t$, si $|x| \leq a$, $w \leq 0$ si $a \to \infty$. Por lo que $w = 0$ en Ω, y por lo tanto $u_1 = u_2$. □

3.4. Ecuación de calor en un intervalo finito

Analicemos el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < L \tag{3.2}$$

bajo diferentes condiciones de contorno. Primero consideremos el caso en que $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para $t > 0$. En este caso, la solución se puede escribir como

Por separación de variables, supongamos que $u(x,t) = X(x)T(t)$, entonces

$$XT' = a^2 X''T.$$

entonces tenemos

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

se toma $\lambda \neq 0$, pues si fuera nulo tenemos soluciones triviales.

Entonces tenemos

$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

X y T funciones de x y t respectivamente. Entonces

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}$$

$$X(x) = a_1 cos(\lambda x) + a_2 sen(\lambda x)$$

Pero X necesita satisfacer la condición de frontera $X(0) = X(L) = 0$, por lo que $a_1 = 0$, y $X(x) = a_2 sen(\lambda x)$, y por lo tanto

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Es decir

$$X_n(x) = sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. En consecuencia

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}}.$$

Para alguna constante C_n. Por lo que la solución general es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

Observación 3.4.1. *La solución general es una combinación lineal de las soluciones para cada λ_n, es decir*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

donde C_n son constantes arbitrarias.

Determinaremos las constantes C_n usando la condición inicial. Asumimos que g es continua en $[0, L]$, y que $g(0) = g(L) = 0$. Entonces, tiene expansión como serie de Fourier

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

con

$$g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) sen(\frac{n\pi x}{L}) dx.$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por lo que tenemos

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sen(\frac{n\pi x}{L}) = g(x).$$

lo que implica que $C_n = g_n$, y por lo tanto u viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

Veamos que la ecuación efectivamente es solución.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{L^2} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

Observación 3.4.2. *Se mete la derivada en la integral por el teorema de Weierstrass, que dice que si una serie funcional es acotada término a término por una serie convergente, entonces la serie funcional converge uniformemente. Y si esta converge uniformemente, entonces se puede derivar término a término.*

3.5. Condiciones de contorno distintas de cero

Ahora analicemos el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < L \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = u_1 \qquad t > 0 \tag{3.3}$$

$$u(L,t) = u_2 \qquad t > 0 \tag{3.4}$$

donde u_1 y u_2 son constantes.

Sea $u(x,t) = w(x) + v(x,t)$, donde

$$w(x) = \frac{u_2 - u_1}{L}x + u_1.$$

Entonces, si $v(x,t)$ satisface el problema con condiciones de frontera homogéneas

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L})$$

entonces $u(x,t) = w(x) + v(x,t)$ satisface el problema original. pues

$$u(0,t) = w(0) + v(0,t) = u_1 + 0 = u_1.$$

$$u(L,t) = w(L) + v(L,t) = u_2 + 0 = u_2.$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ahora bien si u_1, u_2 no son constantes, sino funciones de t, analicemos el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < L \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = u_1(t) \qquad t > 0 \tag{3.3}$$

$$u(L,t) = u_2(t) \qquad t > 0 \tag{3.4}$$

Tenemos la solución general, por separación de variables es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} \left(a_n sen(\frac{n\pi x}{L}) + bncos(\frac{n\pi x}{L}) \right).$$

como $u(x,0) = g(x)$, entonces

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

por lo que

$$a_n = g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) sen(\frac{n\pi x}{L}) dx.$$

por otra parte

$$u_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} .$$

Y

$$u_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} .$$

de donde suponemos que $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se pueden escribir como series de esta forma, y por lo tanto tenemos la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} \left(g_n sen(\frac{n\pi x}{L}) + b_n cos(\frac{n\pi x}{L}) \right).$$

3.6. Intercambio de calor en los extremos de una barra

Ahora discutiremos la situación de condiciones de contorno mixtas y reemplazamos las condiciones por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < L \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \alpha u(0,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + \alpha u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{3.4}$$

para algun $\alpha > 0$. Estas condiciones de frontera se conocen como condiciones de frontera de Robin y representan un intercambio de calor en los extremos de la barra. Cuando $\alpha = 0$ se obtienen condiciones de frontera de Neumann.

Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, entonces

$$XT' = a^2 X'' T.$$

por lo que

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

se toma $\lambda \neq 0$, pues si fuera nulo tenemos soluciones triviales. Y las condiciones de contorno

$$X'(0) - \alpha X(0) = 0.$$

$$X'(L) + \alpha X(L) = 0.$$

La solución entonces viene dada por

$$X(x) = C_1 cos(\lambda x) + C_2 sen(\lambda x).$$

con C_1 y C_2 satisfaciendo

$$\alpha C_1 - \lambda C_2 = 0.$$

$$(\alpha cos(\lambda L) - \lambda sen(\lambda L))\, c_1 + (\alpha sen(\lambda L) + \lambda cos(\lambda L))\, c_2 = 0.$$

Para que existan soluciones no triviales, el determinante de este sistema debe ser cero, es decir

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\left(\alpha sen(\lambda L) + \lambda cos(\lambda L)\right) - \lambda\left(\alpha cos(\lambda L) - \lambda sen(\lambda L)\right) \\ &= \alpha^2 sen(\lambda L) + \alpha\lambda cos(\lambda L) - \alpha\lambda cos(\lambda L) + \lambda^2 sen(\lambda L) \\ &= (\alpha^2 + \lambda^2) sen(\lambda L) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Para $h > 0$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$ definimos $\mu = \lambda L$ y $b = \alpha L$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$2cot(\mu) = \frac{\mu}{b} - \frac{b}{\mu}.$$

que posee soluciones infinitas μ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por lo tanto, $\lambda_n = \frac{\mu_n}{L}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y las soluciones correspondientes para X_n son

$$X_n(x) = C_1 cos(\frac{n\pi x}{L}) + C_2 sen(\frac{n\pi x}{L}).$$

Podemos ver que

$$\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = 0.$$

Entonces, tomando

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n X_n(x).$$

con

$$g_n = \int_0^L g(x) X_n(x) dx \frac{1}{\int_0^L X_n(x) X_n(x) dx}.$$

de donde esta serie converge absoluta y uniformemente en $[0, L]$, y por lo tanto, dado

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}}.$$

con $C_n = g_n$, la solución general es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} = T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}} X_n(x).$$

y para verificar que es solución, basta con verificar que satisface las condiciones de frontera. Tenemos

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} X_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} X_n(L) = u(L,t).$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} \frac{n\pi}{L} X_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} \frac{n\pi}{L} X_n(L) = -\alpha u(0,t).$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} \frac{n\pi}{L} X_n(L) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} \frac{n\pi}{L} X_n(L) = -\alpha u(L,t).$$

Además, satisface la ecuación de calor, pues

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} X_n(x).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{L^2} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} X_n(x).$$

por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} g_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}} X_n(x).$$

3.7. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier se usa para resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, Neumann o Robin. La transformada de Fourier se define como

definición 3.7.1 (Transformada de Fourier)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en $\mathbb{R}$. La transformada de Fourier de f es la función $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.7.2.

- Sea $f(x) = e^{-|x|}$, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\lambda x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x-i\lambda x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x-i\lambda x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\lambda)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\lambda)}dx \\
&= \left[\frac{e^{x(1-i\lambda)}}{1-i\lambda}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-x(1+i\lambda)}}{-1-i\lambda}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-i\lambda} + \frac{1}{1+i\lambda} \\
&= \frac{2}{1+\lambda^2}
\end{aligned}$$

- Sea $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}e^{-i\lambda x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x(\alpha-i\lambda)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(\alpha+i\lambda)}dx \\
&= \left[\frac{e^{x(\alpha-i\lambda)}}{\alpha-i\lambda}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-x(\alpha+i\lambda)}}{-\alpha-i\lambda}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\alpha-i\lambda} + \frac{1}{\alpha+i\lambda} \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

Observación 3.7.3. *Tabla útil de transformadas.*

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega+\epsilon}$
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{j\omega-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{a^2+\omega^2}$
$\cos(at)$	$\frac{j\omega}{a^2+\omega^2}$
e^{jat}	$2\pi\delta(\omega-a)$

Si necesitamos hacer la transformada de Fourier respecto a t de una función en dos variables, entonces se considera la variable x como una constante y se aplica la tabla anterior.

$$\hat{u}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega t}dt$$

Teorema 3.7.4 (Propiedades fundamentales de la transformada de Fourier)**.** *Las siguientes son propiedades de la transformada de Fourier:*

1. *(Continuidad) Si f es integrable en $\mathbb{C}$, entonces $\hat{f}$ es continua en $\mathbb{C}$.*

2. *(Linealidad) Si f y g son integrables en $\mathbb{C}$ y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\widehat{af+bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$$

3. *(Desplazamiento Tempora) Si f es integrable en $\mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\widehat{f(t-a)} = e^{-ia\lambda}\hat{f}(\lambda)$$

4. *(Desplazamiento en frecuencia) Si f es integrable en $\mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\widehat{e^{iat}f(t)} = \hat{f}(\lambda - a)$$

5. *(Derivada) Si f es integrable en $\mathbb{C}$ y f' es integrable en $\mathbb{C}$, entonces*

$$\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\hat{f}(\lambda)$$

6. *(Convolución) Si f y g son integrables en $\mathbb{C}$, entonces*

$$\widehat{f * g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$$

Observación 3.7.5. *Si se tiene una ecuación diferencial parcial con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, Neumann o Robin, se puede aplicar la transformada de Fourier respecto a la variable espacial, y se obtiene una ecuación diferencial ordinaria con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, Neumann o Robin. Luego se resuelve la ecuación diferencial ordinaria y se aplica la transformada inversa de Fourier para obtener la solución de la ecuación diferencial parcial.*

Tenemos el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x, 0) = g(x) \qquad 0 < x < L \tag{3.2}$$

$$u(0, t) = u_1(t) \qquad t > 0 \tag{3.3}$$

$$u(L, t) = u_2(t) \qquad t > 0 \tag{3.4}$$

donde u_1 y u_2 son constantes. Aplicamos la transformada de Fourier respecto a x a la ecuación (1.1), y obtenemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -a^2\lambda^2\hat{u}$$

con $\hat{u}(\lambda, t) = \int_0^L u(x, t)e^{-i\lambda x}dx$. Por lo que

$$\hat{u}(\lambda, t) = C(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

donde $C(\lambda) = \hat{u}(\lambda, 0) = \int_0^L g(x)e^{-i\lambda x}dx$. Por lo que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda$$

entonces

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\lambda, 0)e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda$$

y por lo tanto

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^L g(x)e^{-i\lambda x}dx \right) e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda$$

Que en nuestra notación, con lo que definimos como el nucleo

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi)\hat{K}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi.$$

Y al aplicar la transformada inversa de Fourier, obtenemos

$$u(x,t) = (K * g)(x,t)..$$

Capítulo 4

Problemas de Sturm Liouville

Contents

Los problemas de Sturm Liouville son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma

$$Lu(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = -\lambda\sigma(x)u \qquad a < x < b$$

Se supone que las funciones $p(x)$, $p'(x)$ $q(x)$ y $\sigma(x)$ son continuas en (a,b), y que $p(x) > 0$, $\sigma(x) > 0$ para $x \in [a,b]$. Si el intervalo es finito y se tienen estos supuestos, se dice que el problema es regular. De lo contrario, se dice que el problema es singular.

Introducimos el siguiente producto interno. Para $u, v \in C([a,b])$ definimos

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)v(x)\sigma(x)dx$$

Si son funciones complejas, se define como

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\sigma(x)dx$$

También necesitamos imponer el conjunto de condiciones de contorno hómogeneas.

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, &\qquad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, &\qquad |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \end{aligned}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son constantes reales.

Teorema 4.0.1. *Cualquier operador lineal de segundo ordén se puede escribir en la forma de Sturm-Liouville.*

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + h(x)u = -\lambda\sigma(x)u$$

Demostración. Tomemos un operador lineal de segundo orden

$$Lu = \frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u$$

Multiplicando por una función $\sigma(x)$, tenemos

$$\sigma(x)\frac{d^2u}{dx^2} + \sigma(x)p(x)\frac{du}{dx} + \sigma(x)q(x)u$$

Para que esté en la forma de Sturm-Liouville, necesitamos que

$$\sigma(x)\frac{d^2u}{dx^2} + \sigma(x)p(x)\frac{du}{dx} = f(x)\frac{du^2}{dx^2} + f'(x)\frac{du}{dx}$$

es decir que

$$\sigma(x)p(x) = \frac{d\sigma}{dx}$$

lo que es una ecuación diferencial de primer orden, que se puede resolver para $\sigma(x)$, y por lo tanto

$$\sigma(x) = e^{\int_0^x p(x)dx}$$

y por lo tanto

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(e^{\int_0^x p(x)dx}\frac{du}{dx}\right) + q(x)u$$

□

4.1. Propiedades de los valores propios de Sturm-Liouville

Tenemos que un operador diferencial es una transformación lineal de un espacio de funciones a otro.

$$\begin{aligned} L : C^2((a,b)) &\to C((a,b)) \\ u \mapsto Lu &= \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u \end{aligned}$$

Por lo que podemos definir los valores propios y vectores propios de un operador diferencial. Tenemos las siguientes propiedades.

1. Los valores propios λ son reales, contables, ordenados y hay uno más pequeño. Por lo tanto, se pueden escribir como $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$. Sin embargo, no hay un valor propio más grande.

2. Para cada valor propio λ_n, hay una función propia $\phi_n(x)$, con $n-1$ ceros en (a, b).

3. Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\sigma(x)dx = 0$$

para $n \neq m$. Por lo que podemos escribir la ortogonalidad de las funciones propias como

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \langle \phi_n, \phi_n \rangle \delta_{nm} \qquad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

4. El conjunto de funciones propias $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es completo en el sentido de que cualquier función $f(x) \in L^2((a, b))$ se puede escribir como una serie de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

donde los coeficientes c_n están dados por

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$$

5. Dada una función propia $\phi_n(x)$, entonces

$$L\phi_n(x) = \lambda_n \sigma(x)\phi_n(x)$$

Multiplicando por $\phi_n(x)$ y tomando el producto interno, tenemos

$$\langle L\phi_n, \phi_n \rangle = \lambda_n \langle \phi_n, \phi_n \rangle$$

Es decir

$$\langle L\phi_n, \phi_n \rangle = \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi_n}{dx} \right) + q(x)\phi_n(x) \right) \phi_n(x)\sigma(x)dx = \lambda_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_n(x)\sigma(x)dx$$

Solucionamos

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi_n}{dx}\right)|_a^b - \int_a^b p(x)\left(\frac{d\phi_n}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b q(x)\phi_n^2(x)dx = \lambda_n \int_a^b \phi_n^2(x)\sigma(x)dx$$

Por lo que

$$\lambda_n = \frac{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi_n}{dx}\right)|_a^b - \int_a^b p(x)\left(\frac{d\phi_n}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b q(x)\phi_n^2(x)dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)\sigma(x)dx}$$

Es decir

$$\lambda_n = \frac{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi_n}{dx}\right)|_a^b + \int_a^b \left(p(x)\left(\frac{d\phi_n}{dx}\right)^2 + q(x)\phi_n^2(x)\right)dx}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$$

Que es llamado el cociente de Rayleigh. Es útil para obtener cotas para los valores propios.

Cuando se estudió en álgebra lineal, se vio que para un operador lineal $T : V \to W$ entre dos espacios vectoriales finito-dimensionales, se puede definir el operador adjunto $T^* : W \to V$ como el operador que satisface

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^* w \rangle_V$$

A nivel de $\mathbb{R}^n$, se puede escribir la transformación de la forma

$$T(x) = Ax$$

Y la adjinta viene dada por

$$Adj(A)_{ij} = (-1)^{i+j} det(A^{ij})$$

donde A^{ij} es la matriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.

Pero en el contexto de espacios de Hilbert, la cosa es un poco más complicada.

definición 4.1.1. El dominio de un operador diferencial L es el conjunto de funciones $u(x) \in L^2_\sigma[a, b]$ que satisface las condiciones de contorno homogéneas y que $Lu \in L^2_\sigma[a, b]$. El dominio de L^* es el conjunto de funciones $v(x) \in L^2_\sigma[a, b]$ que satisfacen las condiciones de contorno homogéneas.

definición 4.1.2. Sea L un operador entre dos espacios de Hilbert H_1 y H_2. El operador adjunto L^* de L es el operador definido por

$$\langle Lu, v \rangle_2 = \langle u, L^* v \rangle_1$$

Para todo v en el dominio de L^* y para todo u en el dominio de L.

Ejemplo 4.1.3. Tomemos el siguiente operador

$$L = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

Para hallar el autoadjunto debemos resolver

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^*v\rangle$$

Por un lado

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b \left(a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_0(x)u\right) v(x)dx$$

Resolvemos cada término por separado.

$$\begin{aligned}
\int_a^b a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}v(x)dx &= \left[a_2(x)\frac{du}{dx}v(x)\right]_a^b - \int_a^b a_2(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx \\
&= \left[a_2(x)\frac{du}{dx}v(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{du}{dx}\right)v(x)dx \\
&= \left[a_2(x)\frac{du}{dx}v(x)\right]_a^b - \left[a_2(x)\frac{du}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \frac{du}{dx}\left(a_2(x)\frac{dv}{dx}\right)dx \\
&= \left[a_2(x)\frac{du}{dx}v(x)\right]_a^b - \left[a_2(x)\frac{du}{dx}\right]_a^b + \left[a_2(x)\frac{dv}{dx}u(x)\right]_a^b \\
&- \int_a^b u(x)\frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{dv}{dx}\right)dx
\end{aligned}$$

y

$$\int_a^b a_1(x)\frac{du}{dx}v(x)dx = [a_1(x)u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b a_1(x)u(x)\frac{dv}{dx}dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle u, Lv\rangle &= \int_a^b \left(a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_0(x)u\right) v(x)dx \\
&= \left[a_2(x)\frac{du}{dx}v(x)\right]_a^b - \left[a_2(x)\frac{du}{dx}\right]_a^b + \left[a_2(x)\frac{dv}{dx}u(x)\right]_a^b \\
&- \int_a^b u(x)\frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{dv}{dx}\right)dx \\
&+ [a_1(x)u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b a_1(x)u(x)\frac{dv}{dx}dx + \int_a^b a_0(x)u(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

Aqui queremos que las condiciones iniciales se acomoden para que los terminos que no se están integrando se anulen. Por lo que necesitamos que

$$\left[a_2(x)\frac{du}{dx}v(x)\right]_a^b - \left[a_2(x)\frac{du}{dx}\right]_a^b + \left[a_2(x)\frac{dv}{dx}u(x)\right]_a^b = 0$$

Y

$$\begin{aligned}
\langle u, Lv\rangle &= -\int_a^b u(x)\frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{dv}{dx}\right)dx - \int_a^b a_1(x)u(x)\frac{dv}{dx}dx + \int_a^b a_0(x)u(x)v(x)dx \\
&= \int_a^b \left(-u(x)\frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{dv}{dx}\right) - a_1(x)u(x)\frac{dv}{dx} + a_0(x)u(x)v(x)\right)dx \\
&= \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{dv}{dx}\right) - a_1(x)\frac{dv}{dx} + a_0(x)v(x)\right)u(x)dx \\
&= \langle L^*v, u\rangle
\end{aligned}$$

Por lo que

$$L^*v = -\frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{dv}{dx}\right) - a_1(x)\frac{dv}{dx} + a_0(x)v(x)$$

Antes de pasar a trabajar sobre las pruebas de que los valores propios de un operador de Sturm-Liouville son reales y las funciones propias correspondientes son ortogonales, primero necesitamos introducir dos identidades importantes.

Teorema 4.1.4 (Identidad de Lagrange)**.**

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right)$$

Demostración. Empecemos desarrollando la izquierda de la igualdad.

$$\begin{aligned}
uLv - vLu &= u\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv}{dx}\right) + uq(x)v - v\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - vq(x)u \\
&= up(x)\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{dp}{dx}\frac{dv}{dx} + uq(x)v - vp(x)\frac{d^2u}{dx^2} - v\frac{dp}{dx}\frac{du}{dx} - vq(x)u \\
&= up(x)\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{dp}{dx}\frac{dv}{dx} - vp(x)\frac{d^2u}{dx^2} - v\frac{dp}{dx}\frac{du}{dx} \\
&= \frac{dp}{dx}\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right) + p(x)\left(u\frac{d^2v}{dx^2} - v\frac{d^2u}{dx^2}\right)
\end{aligned}$$

Ahora revisemos la derecha de la igualdad.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right) &= \frac{dp}{dx}\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right) + p(x)\frac{d}{dx}\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right) \\
&= \frac{dp}{dx}\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right) + p(x)\left(u\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{dv}{dx} - v\frac{d^2u}{dx^2} - v\frac{du}{dx}\right) \\
&= \frac{dp}{dx}\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right) + p(x)\left(u\frac{d^2v}{dx^2} - v\frac{d^2u}{dx^2}\right)
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.5 (La identidad de Green)**.**

$$\int_a^b (uLv - vLu)\,dx = \left(p(x)\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right)\Big|_a^b$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_a^b (uLv - vLu)\,dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right)dx \\
&= \left(p(x)\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right)\Big|_a^b
\end{aligned}$$

□

Ahora estamos listos para probar que los valores propios de un operador de Sturm-Liouville son reales y las funciones propias correspondientes son ortogonales. Esto se puede hacer utilizando la identidad de Green.

Teorema 4.1.6. *Los valores propios de un operador de Sturm-Liouville son reales.*

Demostración. Tomemos un valor propio λ y una función propia $\phi(x)$ correspondiente. Entonces

$$L\phi = \lambda\sigma(x)\phi \qquad L\overline{\phi} = \overline{\lambda}\sigma(x)\overline{\phi}$$

hora multiplicamos la primera ecuación por $\overline{\phi}$ y la segunda por ϕ y restamos.

$$\overline{\phi}L\phi - \phi L\overline{\phi} = (\lambda - \overline{\lambda})\sigma(x)\phi\overline{\phi}$$

Integramos ambos lados de la igualdad.

$$\int_a^b \left(\overline{\phi}L\phi - \phi L\overline{\phi}\right) dx = \int_a^b (\lambda - \overline{\lambda})\sigma(x)\phi\overline{\phi}dx$$

Por la identidad de Green, tenemos

$$\left(p(x)\left(\overline{\phi}\frac{d\phi}{dx} - \phi\frac{d\overline{\phi}}{dx}\right)\right)|_a^b = \int_a^b (\lambda - \overline{\lambda})\sigma(x)\phi\overline{\phi}dx$$

usando las condiciones de contorno homogéneas, tenemos

$$\int_a^b (\lambda - \overline{\lambda})\sigma(x)\phi\overline{\phi}dx = 0$$

Por lo que

$$\lambda = \overline{\lambda}$$

y por lo tanto λ es real. □

Teorema 4.1.7. *Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.*

Demostración. Tomemos dos valores propios distintos λ_n y λ_m, y sus funciones propias correspondientes $\phi_n(x)$ y $\phi_m(x)$. Entonces

$$L\phi_n = \lambda_n\sigma(x)\phi_n \qquad L\phi_m = \lambda_m\sigma(x)\phi_m$$

Restamos la primera ecuación multiplicada por ϕ_m de la segunda ecuación multiplicada por ϕ_n.

$$\phi_n L\phi_m - \phi_m L\phi_n = (\lambda_m - \lambda_n)\sigma(x)\phi_n\phi_m$$

De manera similar al teorema anterior, integramos ambos lados de la igualdad.

$$\int_a^b (\phi_n L\phi_m - \phi_m L\phi_n)\, dx = \int_a^b (\lambda_m - \lambda_n)\sigma(x)\phi_n\phi_m dx$$

Por la identidad de Green, tenemos

$$\left(p(x)\left(\phi_n \frac{d\phi_m}{dx} - \phi_m \frac{d\phi_n}{dx}\right)\right)|_a^b = \int_a^b (\lambda_m - \lambda_n)\sigma(x)\phi_n\phi_m dx$$

usando las condiciones de contorno homogéneas, tenemos

$$\int_a^b (\lambda_m - \lambda_n)\sigma(x)\phi_n\phi_m dx = 0$$

Pero los valores propios son distintos, por lo que

$$\int_a^b \sigma(x)\phi_n\phi_m dx = 0$$

y por lo tanto

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$$

y por lo tanto las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales. $\square$

Capítulo 5

Ecuación de Laplace

Contents

La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial parcial de segundo orden que se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En dos dimensiones, o

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

En tres dimensiones. La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial parcial lineal homogénea, y se puede escribir como

$$\Delta u = 0$$

donde $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el operador de Laplace, que se define como

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Debemos tener en cuenta los tipos de condiciones, como ya se ha trabajado antes

- Condiciones de Dirichlet

$$u|_{\partial\Omega} = f$$

- Condiciones de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(x, y)$$

donde n es el vector normal a la frontera $\partial\Omega$.

- Condiciones de Robin

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = f(x, y)$$

5.1. Problema de Dirichlet en un rectángulo

El problema que vamos a resolver es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x < a, 0 < y < b \tag{5.1}$$

$$u(0, y) = g_1(y) \qquad 0 < y < b \tag{5.2}$$

$$u(a, y) = g_2(y) \qquad 0 < y < b \tag{5.3}$$

$$u(x, 0) = g_3(x) \qquad 0 < x < a \tag{5.4}$$

$$u(x, b) = g_4(x) \qquad 0 < x < a \tag{5.5}$$

Vamos a comenzar con el caso en que $g_1(y) = g_3(x) = g_4(x) = 0$. Entonces queda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \qquad 0 < x < a, 0 < y < b \\
u(0, y) &= 0 \qquad 0 < y < b \\
u(a, y) &= f(y) \qquad 0 < y < b \\
u(x, 0) &= 0 \qquad 0 < x < a \\
u(x, b) &= 0 \qquad 0 < x < a
\end{aligned}$$

donde $f \in C^2([0, b])$ satisface $f(0) = f(b) = 0$. Para resolver este problema, vamos a utilizar el método de separación de variables. Suponemos que la solución es de la forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

entonces

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

Dividimos por $X(x)Y(y)$ y obtenemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

Como la primera parte depende solo de x y la segunda solo de y, entonces ambas deben ser constantes. Entonces

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \qquad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

Entonces tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. La primera es

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

y la segunda es

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$$

La primera ecuación tiene soluciones de la forma

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

y la segunda tiene soluciones de la forma

$$Y(y) = c_3 \cos(\sqrt{\lambda}y) + c_4 \sin(\sqrt{\lambda}y)$$

Al aplicar las condiciones de frontera, tenemos

$$X(x) = e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

y

$$Y(y) = \sin(\sqrt{\lambda}y)$$

Entonces

$$u(x,y) = \sin(\sqrt{\lambda}y)(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x})$$

y por lo tanto

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\sqrt{\lambda_n}y)(e^{\sqrt{\lambda_n}x}-e^{-\sqrt{\lambda_n}x})$$

donde $\lambda_n = n^2\pi^2/a^2$ y

$$c_n=\frac{2}{b}\int_0^b f(t)\sin(\sqrt{\lambda_n}t)dt$$

Y asi

$$u(x,y)=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b f(t)\sin(\sqrt{\lambda_n}t)dt\right)\sin(\sqrt{\lambda_n}y)(e^{\sqrt{\lambda_n}x}-e^{-\sqrt{\lambda_n}x})$$

Tomemos

$$K(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$

Entonces

$$u(x,y)=\frac{2}{b}\int_0^b f(t)K(x,y,t)dt$$

definición 5.1.1. La función $K(x,y,t)$ es llamada el núcleo de Poisson.

Lema 5.1.2. *La función $K(x,y,t)$ satisface*

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<a, 0<y<b$$

Demostración. Tomemos

$$S_N(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 S_N}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$

y

$$\frac{\partial^2 S_N}{\partial y^2}=\sum_{n=1}^{N}-\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_N}{\partial y^2}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)\\&-\sum_{n=1}^{N}\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)\\&=0\end{aligned}$$

□

Teorema 5.1.3. *Sea $f \in C([0,b])$ diferenciable en $(0,b)$ a menos de un número finito de puntos con f' continua a tramos en $[0,b]$ y $f(0)=f(b)=0$. Entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$

converge uniformemente en $[0,b]\times[0,b]$. Y la función $u(x,y)$ definida por

$$u(x,y)=\frac{2}{b}\int_0^b f(t)K(x,y,t)dt$$

es solución del problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=0 \qquad 0<x<a, 0<y<b\\u(0,y)&=0 \qquad 0<y<b\\u(a,y)&=f(y) \qquad 0<y<b\\u(x,0)&=0 \qquad 0<x<a\\u(x,b)&=0 \qquad 0<x<a\end{aligned}$$

Demostración. Para ver la convergencia uniforme, tomemos

$$S_N(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$

Entonces

$$|S_N(x,y)|\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$

Luego

$$|S_N(x,y)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

Entonces

$$|S_N(x,y)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\frac{n\pi x}{b}}}{e^{\frac{n\pi a}{b}}}$$

y por lo tanto

$$|S_N(x,y)| \leq \sum_{n=1}^{N} e^{\frac{n\pi(x-a)}{b}}$$

Tomando $s = a - x > 0$, tenemos

$$|S_N(x,y)| \leq \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{n\pi s}{b}}$$

De la sabemos que la serie converge uniformemente para $s > 0$, por lo que tenemos la convergencia uniforme para $x \in [0, a]$ y $y \in [0, b]$.

Ahora, para ver que $u(x, y)$ es solución del problema de Dirichlet, primero tenemos que ver que $u(x, y)$ es solución de la ecuación de Laplace. Para esto, tomemos

$$u_x(x,y) = \frac{2}{b}\int_0^b f(t)\frac{\partial K}{\partial x}(x,y,t)dt$$

y

$$u_{xx}(x,y) = \frac{2}{b}\int_0^b f(t)\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y,t)dt$$

y

$$u_y(x,y) = \frac{2}{b}\int_0^b f(t)\frac{\partial K}{\partial y}(x,y,t)dt$$

y

$$u_{yy}(x,y) = \frac{2}{b}\int_0^b f(t)\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y,t)dt$$

Entonces

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \frac{2}{b}\int_0^b f(t)\left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y,t)\right)dt$$

Pero

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y,t) = 0$$

$\square$

Teorema 5.1.4. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $F \in C([a,b] \times I)$ es tal que $\frac{\partial F}{\partial x}$ esxiste y es* *continua en* $[a,b] \times I$. *Sea*

$$f(y) = \int_a^b F(x,y)dx \qquad y \in I$$

Entonces $f \in C^1(I)$ *y*

$$f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dx \qquad y \in I$$

Para resolver el problema de Dirichlet en un rectángulo con condiciones de frontera no homogéneas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \qquad 0 < x < a, 0 < y < b \\
u(x,0) &= f_1(x) \qquad 0 < x < a \\
u(x,b) &= f_2(x) \qquad 0 < x < a \\
u(0,y) &= g_1(y) \qquad 0 < y < b \\
u(a,y) &= g_2(y) \qquad 0 < y < b
\end{aligned}$$

Vamos a transformarlo al problema que ya sabemos resolver. Para esto, tomemos

$$v(x,y) = u(x,y) - \frac{b-y}{b}g_2(0) - \frac{y}{b}g_2(b)$$

Entonces si u es solución del problema anterior, entonces v es solución del problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \qquad 0 < x < a, 0 < y < b \\
v(x,0) &= F_1(x) - g_2(0) \qquad 0 < x < a \\
v(x,b) &= F_2(x) - g_2(b) \qquad 0 < x < a \\
v(0,y) &= G_1(y) \qquad 0 < y < b \\
v(a,y) &= G_2(y) \qquad 0 < y < b
\end{aligned}$$

donde

$$F_1(x) = f_1(x) - f_1(a) \qquad F_2(x) = f_2(x) - f_2(a)$$

y

$$G_1(y) = g_1(y) - \frac{b-y}{b}g_2(0) - \frac{y}{b}g_2(b) \qquad G_2(y) = g_2(y) - \frac{b-y}{b}g_2(0) - \frac{y}{b}g_2(b)$$

Observe que $F_1(a) = F_2(a) = G_1(0) = G_2(0) = G_1(b) = G_2(b) = 0$. Observe que el problema de Dirichlet anterior se puede dividir en dos

$$\begin{aligned} \Delta U = 0 & \qquad 0 < x < a, 0 < y < b \\ U(x,0) = F_1(x) & \qquad 0 < x < a \\ U(x,b) = F_2(x) & \qquad 0 < x < a \\ U(0,y) = G_1(y) & \qquad 0 < y < b \\ U(a,y) = 0 & \qquad 0 < y < b \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta V = 0 & \qquad 0 < x < a, 0 < y < b \\ V(x,0) = 0 & \qquad 0 < x < a \\ V(x,b) = 0 & \qquad 0 < x < a \\ V(0,y) = 0 & \qquad 0 < y < b \\ V(a,y) = G_2(y) & \qquad 0 < y < b \end{aligned}$$

Entonces $v = U + V$ es solución del problema de Dirichlet para v. Sabemos resolver para U. Para V, podemos transformarlo de nuevo a un problema que sabemos resolver. Para esto, tomemos

$$\begin{aligned} \Delta w_1 = 0 & \qquad 0 < x < a, 0 < y < b \\ w_1(x,0) = F_1(x) & \qquad 0 < x < a \\ w_1(x,b) = 0 & \qquad 0 < x < a \\ w_1(0,y) = 0 & \qquad 0 < y < b \\ w_1(a,y) = 0 & \qquad 0 < y < b \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta w_2 = 0 \qquad & 0 < x < a, 0 < y < b \\ w_2(x,0) = 0 \qquad & 0 < x < a \\ w_2(x,b) = F_2(x) \qquad & 0 < x < a \\ w_2(0,y) = 0 \qquad & 0 < y < b \\ w_2(a,y) = 0 \qquad & 0 < y < b \end{aligned}$$

y por ultimo

$$\begin{aligned} \Delta w_3 = 0 \qquad & 0 < x < a, 0 < y < b \\ w_3(x,0) = 0 \qquad & 0 < x < a \\ w_3(x,b) = 0 \qquad & 0 < x < a \\ w_3(0,y) = G_1(y) \qquad & 0 < y < b \\ w_3(a,y) = 0 \qquad & 0 < y < b \end{aligned}$$

Note que si sumamos estas soluciones se tien que cumplen las condiciones de frontera de V. Entonces $V = w_1 + w_2 + w_3$. Note que w_1 es solución del problema de Dirichlet

$$u(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y) + w_3(x,y) + V(x,y) + \frac{b-y}{b} g_2(0) + \frac{y}{b} g_2(b)$$

5.2. Problema de Dirichlet en un disco unitario

El problema que resolveremos es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad x, y \in \Omega \tag{5.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = f \tag{5.2}$$

donde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $f \in C(\partial\Omega)$. Vamos a reescribir el problema en coordenadas polares. Para esto, tomemos

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta)$$

donde $r \in [0,1)$ y $\theta \in [0,2\pi)$. Entonces

Sea $v(r,\theta) = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \cos(\theta)v_x + \sin(\theta)v_y \\
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos(\theta)v_x + \sin(\theta)v_y\right) + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos(\theta)v_x + \sin(\theta)v_y\right) \\
&= \cos^2(\theta)v_{xx} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)v_{xy} + \sin^2(\theta)v_{yy} + \cos(\theta)v_x + \sin(\theta)v_y \\
\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= -r\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= -r\sin(\theta)v_x + r\cos(\theta)v_y
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= \cos^2(\theta)v_{xx} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)v_{xy} \\
&\quad + \sin^2(\theta)v_{yy} + \cos(\theta)v_x + \sin(\theta)v_y \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(-r\sin(\theta)v_x + r\cos(\theta)v_y\right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}(-r^2\sin^2(\theta)v_{xx} \\
&\quad - 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)v_{xy} - r^2\cos^2(\theta)v_{yy}) \\
&= \cos^2(\theta)v_{xx} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)v_{xy} + \sin^2(\theta)v_{yy} \\
&\quad + \cos(\theta)v_x + \sin(\theta)v_y \\
&\quad - \sin(\theta)v_x + \cos(\theta)v_y - \sin^2(\theta)v_{xx} \\
&\quad - 2\sin(\theta)\cos(\theta)v_{xy} - \cos^2(\theta)v_{yy} \\
&= v_{xx} + v_{yy} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y sustituir en la condición de frontera

$$g(\theta) = f(cos(\theta), sin(\theta)) = v(1,\theta) = u(1\cos(\theta), 1\sin(\theta))$$

Entonces el problema se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0 \qquad 0<r<1, 0<\theta<2\pi$$
$$v(1,\theta)=g(\theta) \qquad 0<\theta<2\pi$$

Vamos a resolver este problema utilizando el método de separación de variables. Supongamos que la solución es de la forma

$$v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

Entonces

$$R''(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)=0$$

o equivalentemente

$$r^2R''(r)\Theta(\theta)+rR'(r)\Theta(\theta)+R(r)\Theta''(\theta)=0$$

Dividimos por $R(r)\Theta(\theta)$ y obtenemos

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda$$

Entonces tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. La primera es

$$\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0$$

y la segunda es

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0$$

Analisemos cada una de estas ecuaciones por separado. La primera ecuación, se debe analizar para cada valor de λ. Si $\lambda=0$, entonces la solución es

$$\Theta(\theta)=c_1+c_2\theta$$

Pero la solución debe ser periódica.

Si $\lambda<0$, tome $\lambda=-\mu^2$, entonces la ecuación se convierte en

$$\Theta''(\theta)-\mu^2\Theta(\theta)=0$$

y la solución es

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{-\mu\theta} + c_2 e^{\mu\theta}$$

Esta solución no es periódica, por lo que no nos sirve.

Si $\lambda > 0$, tome $\lambda = \mu^2$, entonces la ecuación se convierte en

$$\Theta''(\theta) + \mu^2 \Theta(\theta) = 0$$

y la solución es

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\mu\theta) + c_2 \sin(\mu\theta)$$

Esta solución es periódica, por lo que nos sirve. Ahora analicemos la segunda ecuación. Ya sabemos que $\lambda = \mu^2$. Entonces la ecuación se convierte en

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \mu^2 R(r) = 0$$

este es una ecuación de Euler. La solución es de la forma

$$R(r) = r^\alpha$$

Entonces

$$\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + \alpha r^{\alpha-1} - \mu^2 r^\alpha = 0$$

Dividimos por $r^{\alpha-2}$ y obtenemos

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \mu^2 = 0$$

Entonces

$$\alpha^2 - \mu^2 = 0$$

y por lo tanto

$$\alpha = \pm\mu$$

Entonces la solución es

$$R(r) = c_1 r^\mu + c_2 r^{-\mu}$$

Es requisito que la solución sea acotada en $r = 0$, por lo que $c_2 = 0$. Entonces

$$R(r) = c_1 r^{\mu}$$

y por lo tanto

$$v(r, \theta) = c_1 r^{\mu} \cos(\mu\theta) + c_2 r^{\mu} \sin(\mu\theta)$$

Tenga $\mu = n$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$v_n(r, \theta) = c_1 r^n \cos(n\theta) + c_2 r^n \sin(n\theta)$$

Y por lo tanto

$$v(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)\right)$$

Que tiene la forma de una serie de Fourier. Entonces reemplazamos en la condición de frontera

$$g(\theta) = v(1, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$$

entonces

$$r^n A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

y

$$r^n B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Entonces

$$v(r, \theta) = \frac{\int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(\theta) d\theta}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta \cos(n\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(n\theta) d\theta \sin(n\theta) \right)$$

La convergencia es uniforme en $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. pues es acotada con la serie de Fourier de $g(\theta)$. Por último tenemos que sustituir de nuevo en $v(r, \theta) = u(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Haciendo el cambio de variable $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$, tenemos

$$\begin{aligned} u(x,y) = & \frac{\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(\theta)d\theta}{2\pi} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(n\theta)d\theta \cos(n\arctan(y/x))\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(n\theta)d\theta \sin(n\arctan(y/x))\right) \end{aligned}$$

5.3. Las identidades de Green

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Un campo vectorial en Ω es una función $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Decimos que F es de clase C^n si sus componentes son de clase C^n.

definición 5.3.1 (Gradiente de una función)**.** Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Definimos el gradiente de f como el campo vectorial dado por

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, e_i$$

Donde e_i es el vector unitario en la dirección x_i.

definición 5.3.2 (Divergencia de un campo vectorial)**.** Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1. Definimos la divergencia de F como la función dada por

$$\nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Note que si $F = \nabla f$, entonces $\nabla \cdot F = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Es decir, la divergencia de un gradiente es la traza de la matriz Hessiana.

$$\Delta f = div(grad(f)) = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Nos quedaremos con el caso $n = 2$. En este caso, si $F = (F_1, F_2)$.

Teorema 5.3.3 (Teorema de Green)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado, y sea $P, Q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Suponga que:*

1. *$\partial\Omega$ es una curva simple y cerrada y rectificable.*

2. *Las derivadas parciales* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *son continuas en* Ω.

3. *Las integrales*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy \qquad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

existen y son finitas.

Entonces

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Teorema 5.3.4 (Teorema de la Divergencia)**.** *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *un dominio acotado cuya frontera* $\partial\Omega$ *es una curva simple y cerrada y rectificable. Sea* $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial de clase* C^1*. Sea* $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial de clase* C^1*. Entonces*

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot \overrightarrow{n} ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot F dxdy$$

donde $\overrightarrow{n}$ *es el vector normal unitario a* $\partial\Omega$.

Teorema 5.3.5. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *un dominio donde vale el teorema de la divergencia y sean* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$*. Entonces valen las siguentes identidades:*

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$
$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ *es la derivada en la dirección de la normal unitaria externa a* $\partial\Omega$.

Demostración. Demostremos primero la primera identidad.

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v\nabla u) - \nabla \cdot (u\nabla v) dxdy$$

Tomemos la función auxiliar

$$f = v\nabla u$$

Entonces tenemos que

$$\nabla \cdot f = \nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$$

Entonces

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy = \int_{\overline{\Omega}} \nabla \cdot f dxdy$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla \cdot f dxdy = \int_{\partial\Omega} f \cdot \overrightarrow{n} ds$$

Pero

$$f \cdot \overrightarrow{n} = v\frac{\partial u}{\partial n}$$

Entonces

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot \overrightarrow{n} ds = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Por lo tanto

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Ahora demostremos la segunda identidad.

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - u\Delta v)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

Apliquemos la identidad anterior

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - u\Delta v)\, dxdy - \int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy$$

De donde

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - u\Delta v)\, dxdy - \int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

Se tiene la identidad. □

Corolario 5.3.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio donde vale el teorema de la divergencia y sean $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Entonces valen las siguentes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}} |\nabla u|^2 dxdy = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} ds$$
$$\int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial n} dxdy = 0$$

Demostración. La primera identidad se obtiene de la primera identidad del teorema anterior tomando $v = u$. pues

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega}} (u\Delta u - \nabla u \cdot \nabla u)\, dxdy &= \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} ds \\ \int_{\overline{\Omega}} \left(u\Delta u - |\nabla u|^2\right) dxdy &= \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} ds \\ \int_{\overline{\Omega}} |\nabla u|^2 dxdy &= \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} ds \end{aligned}$$

Para la sefunda identidad, tomemos $v = 1$ en la segunda identidad del teorema anterior. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega}} (1\Delta u - u\Delta 1)\, dxdy &= \int_{\partial\Omega} \left(1\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial 1}{\partial n}\right) ds \\ \int_{\overline{\Omega}} (1\Delta u - 0)\, dxdy &= \int_{\partial\Omega} \left(1\frac{\partial u}{\partial n} - 0\right) ds \\ \int_{\overline{\Omega}} \Delta u dxdy &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ \int_{\overline{\Omega}} 0 dxdy &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ 0 &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds \end{aligned}$$

□

Corolario 5.3.7. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio donde vale el teorema de la divergencia, $f \in C(\partial\Omega)$ y $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Entonces el problema*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \textit{en } \Omega \\ u &= f \qquad \textit{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

teien a lo más una solución.

Demostración. Tome dos soluciones u_1 y u_2. Entonces $u = u_1 - u_2$ es solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\overline{\Omega}} |\nabla u|^2 dxdy = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

Por lo que u debe ser constante. Pero $u = 0$ en $\partial\Omega$, por lo que $u = 0$ en $\overline{\Omega}$. □

5.4. Solución Fundamental del Laplaciano

definición 5.4.1 (Solución fundamental del Laplaciano)**.** Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Definimos la solución fundamental del Laplaciano como la función

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

donde $\alpha(n)$ es el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Ela área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ es

$$\alpha(n) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

donde Γ es la función Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

Cáluclemos directamente el Laplaciano de Φ para $n = 2$.

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Entonces

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$

Teorema 5.4.2 (Tercera identidad de Green)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva simple y cerrada y rectificable. Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Entonces*

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

donde Φ es la solución fundamental del Laplaciano.

Lema 5.4.3. *Sean $\xi \in \mathbb{R}^2$ y $g : \overline{B(\xi,R)} \to \mathbb{R}$. Si g es acotada y $\Phi_\xi g$ es integrable con respecto a la* *longitud de arco a lo largo de cualquier circulo cerrado centrado en ξ de radio $0 < r < R$, entonces*

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial B(\xi,r)} \Phi_\xi g ds = 0$$

Demostración. Como g es acotada, existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in \overline{B(\xi,R)}$. Entonces

$$\left|\int_{\partial B(\xi,r)} \Phi_\xi g ds\right| \leq \int_{\partial B(\xi,r)} |\Phi_\xi g| ds \leq M\int_{\partial B(\xi,r)} |\Phi_\xi| ds$$

Pero

$$\int_{\partial B(\xi,r)} |\Phi_\xi| ds = \int_0^{2\pi} |\Phi_\xi(r,\theta)| r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi}\ln(r) d\theta = r\ln(r)$$

Entonces

$$\left|\int_{\partial B(\xi,r)} \Phi_\xi g ds\right| \leq Mr\ln(r)$$

Basta sacar el limite cuando $r \to 0$. □

Lema 5.4.4. *Sea $\xi \in \mathbb{R}^2$ y $g : \overline{B(\xi,R)} \to \mathbb{R}$. Si g es acotada y $\Phi_\xi g$ es integrable con respecto a la longitud de arco a lo largo de cualquier circulo cerrado centrado en ξ de radio $0 < r < R$, entonces*

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial B(\xi,r)} \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n} g ds = g(\xi)$$

donde $\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal unitaria externa a $\partial B(\xi, r)$.

Demostración. Empecemos expresando la derivada parcial como el producto punto entre el gradiente y el vector normal unitario externo a $\partial B(\xi, r)$.

$$\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n} = \nabla\Phi_\xi \cdot \overrightarrow{n}$$

Entonces tenemos que

$$\int_{\partial B(\xi,r)} \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n} g ds = \int_{\partial B(\xi,r)} \nabla\Phi_\xi \cdot \overrightarrow{n} g ds$$

dejemos el soporte como $||\xi - \mu|| = r$ y $||\xi - \mu|| = R$, y Cálculemos la derivada parcial de Φ_ξ.

$$\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2\pi}\ln(||\xi-\mu||)\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln(||\xi-\mu||)\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{||\xi-\mu||}\frac{\partial}{\partial x_i}(||\xi-\mu||)$$

Entonces

$$\Phi_x = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{||\xi-\mu||}\nabla(||\xi-\mu||)$$

también

$$\Phi_y = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{||\xi-\mu||}\nabla(||\xi-\mu||)$$

y el normal a una circunferencia centrada en ξ es

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{||\xi-\mu||}\nabla(||\xi-\mu||)$$

Cálculamos el producto punto

$$\nabla\Phi_\xi\cdot\overrightarrow{n} = \frac{1}{2\pi r}\frac{1}{||\xi-\mu||}\nabla(||\xi-\mu||)\cdot\frac{1}{||\xi-\mu||}\nabla(||\xi-\mu||)$$

queda

$$\nabla\Phi_\xi\cdot\overrightarrow{n} = \frac{1}{2\pi r}$$

Reemplazamos en la integral

$$\int_{\partial B(\xi,r)}\frac{\partial\Phi_\xi}{\partial n}gds = \int_{\partial B(\xi,r)}\nabla\Phi_\xi\cdot\overrightarrow{n}gds = \int_{\partial B(\xi,r)}\frac{1}{2\pi r}gds = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi,r)}gds$$

Por el teorema del valor medio para integrales

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi,r)}gds = \frac{1}{2\pi r}g(\eta)\int_{\partial B(\xi,r)}ds = \frac{1}{2\pi r}g(\eta)2\pi r = g(\eta)$$

donde $\eta\in B(\xi,r)$. Al hacer el limite cuando $r\to 0$, tenemos que $\eta\to\xi$, y por lo tanto

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial B(\xi,r)}\frac{\partial\Phi_\xi}{\partial n}gds = g(\xi)$$

$\square$

Lema 5.4.5. *Sean $\xi\in\mathbb{R}^2$, $R>0$ y $B(\xi,R)\subseteq\Omega$. Para cada $r\in(0,R)$, sea $\Omega_r = \Omega-\overline{B(\xi,r)}$. Entonces, cualquiera que sea $g\in C(\overline{\Omega})$, existe el lílite*

$$\lim_{r\to 0}\int_{\overline{\Omega_r}}\Phi_\xi(\eta)g(\eta)d\eta$$

Demostración. Sea

$$I(r) = \int_{\overline{\Omega_r}} \Phi_\xi(\eta)g(\eta)d\eta$$

claramente la integral existe para todo $r \in (0, R)$.

Sabemos que g es acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $|g(\eta)| \leq M$ para todo $\eta \in \overline{\Omega}$. Entonces dado $0 < s < r < R$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|I(r) - I(s)| &= \left| \int_{\overline{\Omega_r}} \Phi_\xi(\eta)g(\eta)d\eta - \int_{\overline{\Omega_s}} \Phi_\xi(\eta)g(\eta)d\eta \right| \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \left| \int_{s<||\xi-\eta||<r} \ln(||\xi - \eta||)d\eta \right|
\end{aligned}$$

Sustituyendo a coordenadas polares, tenemos que

$$\begin{aligned}
|I(r) - I(s)| &\leq \frac{M}{2\pi} \left| \int_{s<||\xi-\eta||<r} \ln(||\xi - \eta||)d\eta \right| \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \left| \int_s^r \int_0^{2\pi} \ln(\rho)d\theta\rho d\rho \right| \\
&\leq \frac{M2\pi}{2\pi} \left| \int_s^r \ln(\rho)\rho d\rho \right| \\
&\leq M \left| \int_s^r \ln(\rho)\rho d\rho \right|
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que $lim_{\rho\to 0}\rho \ln(\rho) = 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|\rho \ln(\rho)| < 1$ para todo $0 < \rho < \delta$. Entonces dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \frac{\epsilon}{MN}$, y una sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $r_n \to 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \leq n_0 \to |r_n \ln(r_n)| < \delta$$

Entonces

$$|I(r_n) - I(r_m)| \leq MN|r_n - r_m| < \epsilon$$

Por el criterio de Cauchy, existe $\lim_{r\to 0} I(r)$. □

Ya sabemos que la segunda integral en la tercera identidad de Green tiene sentido, entonces podemos probar el teorema

Demostración. Demostración de la tercera identidad de Green Fijemos $\xi \in \Omega$ y sea $R > 0$ tal que $B(\xi, R) \subseteq \Omega$. Por lema anteriro, dado $0 < r < R$, $\Omega_r - \Omega - \overline{B(\xi, r)}$. Observese que $\partial\Omega_r = \partial\Omega \cup \partial B(\xi, r)$ y la orientación positiva de $\partial\Omega_r$ es la misma que la de $\partial\Omega$ con la orientación negativa de $\partial B(\xi, r)$.

Entonces aplicando la segunda identidad de Green con $v = \Phi_\xi$ y $u = u$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Omega_r}} \Phi_\xi \Delta u d\eta &= \int_{\overline{\Omega_r}} (\Phi\Delta u - u\Delta\Phi_\xi)\, d\eta \\ &= \int_{\partial\Omega_r} \left(\Phi_\xi \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n}\right) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi_\xi \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n}\right) ds - \int_{\partial B(\xi,r)} \left(\Phi_\xi \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n}\right) ds\end{aligned}$$

Estamos tomando $\overline{\Omega}$ es acotado y $\nabla u \cdot \overrightarrow{n}$ es continua en $\overline{\Omega}$, entonces $\nabla u \cdot \overrightarrow{n}$ entoncces

$$\lim_{r\to 0} \int_{\partial\partial B(\xi,r)} \Phi_\xi \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

Como u es continua en $\overline{\Omega}$, entonces u es acotada en $\overline{\Omega}$, entonces existe $M > 0$ tal que $|u(\eta)| \leq M$ para todo $\eta \in \overline{\Omega}$. Entonces

$$lim_{r\to 0} \int_{\overline{\Omega_r}} \Phi_\xi \Delta u d\eta = \int_{\overline{\Omega}} \Phi_\xi \Delta u d\eta$$

□

5.5. Principio del Máximo y Teormas de unicidad

Teorema 5.5.1 (Teorema del valor medio)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea u una función armónica en Ω. Entonces, para cualquier $\xi \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{B(\xi, R)} \subseteq \Omega$, se tiene que*

$$u(\xi) = \frac{1}{\alpha(n)R^{n-1}} \int_{\partial B(\xi,R)} u d\sigma$$

Demostración. Aplicando la tercera identidad de Green a $B(\xi, R)$, tenemos que

$$\begin{aligned}u(\xi) &= \int_{B(\xi,R)} \left(u\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n} - \Phi_\xi \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds + \int_{\overline{B(\xi,R)}} \Phi_{xi}(\eta) u(\eta) d\eta \\ &= \int_{B(\xi,R)} u\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n} ds - \int_{B(\xi,R)} \Phi_\xi \frac{\partial u}{\partial n}\end{aligned}$$

Pues $\Delta u = 0$ en $B(\xi, R)$. Y como ya habíamos cálculado, si $\eta \in \partial B(\xi, R)$,

$$\Phi_\xi(\eta) = \frac{1}{2\pi} ln|\xi - \eta| = \frac{1}{2\pi} ln(R) \qquad \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial n} = \frac{1}{2\pi R}$$

Y por tanto

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(\xi,R)} ud\sigma - \frac{1}{2\pi R} ln(R)\int_{\partial B(\xi,R)} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$$

cuando u es armonica en Ω, por Corolario

$$\int_{\partial B(\xi,R)} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0$$

□

Teorema 5.5.2 (Principio del máximo para funciones armonica)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{20}$ un dominio, y sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armonica en Ω. Suponga que u alcanza su máximo en Ω, es decir, existe $\xi_0 \in \Omega$ tal que $u(\xi) \leq u(\xi_0)$ para todo $\xi \in \Omega$. Entonces u es constante en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Por hipótesis u es acotada y alcanza su máximo en Ω, esto es, existe $M > 0$ tal que $u(\xi) \leq M$ y $u(\xi_0) = M$. Sea $S = \{\xi \in \Omega : u(\xi) = M\}$. Entonces S es cerrado y no vacío. Basta mostrar que S es abierto en Ω. Sea $\xi_1 \in S$ y sea $R > 0$ tal que $B(\xi_1, R) \subseteq \Omega$. Por el teorema del valor medio

$$u(\xi_1) = \frac{1}{\alpha(n)R^{n-1}}\int_{\partial B(\xi_1,R)} ud\sigma$$

Ahora bien, $B(\xi_1, R) \subseteq S$, sponga que no es así, entonces existe $\xi_2 \in B(\xi_1, R)$ tal que $u(\xi_2) < M$. Pero entonces

$$u(\xi_1) = \frac{1}{\alpha(n)R^{n-1}}\int_{\partial B(\xi_1,R)} ud\sigma < \frac{1}{\alpha(n)R^{n-1}}\int_{\partial B(\xi_1,R)} Md\sigma = M$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $B(\xi_1, R) \subseteq S$. Entonces S es abierto en Ω y por lo tanto S es cerrado y abierto en Ω. Como Ω es conexo, $S = \Omega$. Por lo tanto u es constante en Ω. □

Es claro que vale el principio del mínimo. Basta aplicar el principio del máximo a $-u$. Note que estos principios sobre una función real armonica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$, el máximo y el minimo se alcanza en $\partial\Omega$, desde que Ω.

Corolario 5.5.3. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ y $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Suponga que*

$$\begin{cases} \Delta u = f & en\ \Omega \\ u = g & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

Demostración. Sean u, v soluciones del problema. Entonces $w = u - v$ es solución del problema

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces por el teorema anterior w es constante en $\overline{\Omega}$. Pero $w = 0$ en $\partial\Omega$, entonces $w = 0$ en $\overline{\Omega}$. Por lo tanto $u = v$ en $\overline{\Omega}$. □

5.6. Teoremas Adicionales

Teorema 5.6.1 (Tercera identidad de Green Generalizado)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva simple y cerrada y rectificable. Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{\Omega} \Phi\Delta u dxdy$$

Teorema 5.6.2 (Desigualdad del valor medio)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea u una función subarmónica ($\Delta u \geq 0$) en Ω. Entonces, para cualquier $\xi \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{B(\xi, R)} \subseteq \Omega$, se tiene que*

$$u(\xi) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi,R)} u d\sigma$$

Demostración. Aplicando la tercera identidad de Green a $B(\xi, R)$, tenemos que

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_{B(\xi,R)} \left(u\frac{\partial\Phi_\xi}{\partial n} - \Phi_\xi\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{\overline{B(\xi,R)}} \Phi_{xi}(\eta)u(\eta)d\eta \\ &= \int_{B(\xi,R)} u\frac{\partial\Phi_\xi}{\partial n} ds - \int_{B(\xi,R)} \Phi_\xi\frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned}$$

Pues $\Delta u \geq 0$ en $B(\xi, R)$. Y como ya habíamos cálculado, si $\eta \in \partial B(\xi, R)$,

$$\Phi_\xi(\eta) = \frac{1}{2\pi} ln|\xi - \eta| = \frac{1}{2\pi} ln(R) \qquad \frac{\partial\Phi_\xi}{\partial n} = \frac{1}{2\pi R}$$

Y por tanto

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi,R)} u d\sigma - \frac{1}{2\pi R} ln(R) \int_{\partial B(\xi,R)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

cuando u es subarmónica en Ω, por Corolario

$$\int_{\partial B(\xi,R)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \geq 0$$

Se tiene la desigualdad. $\square$

Teorema 5.6.3 (Valores propios no triviales del Laplaciano sobre un disco)**.** *Tome* $\Omega = B(0,1)$ *y sea* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *tal que* $\Delta u = -\lambda u$ *en* Ω *y* $u = 0$ *en* $\partial\Omega$*. Entonces sólo hay soución no trivial si* $\lambda > 0$

Demostración. A partir de la primera identidad de Green

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Tomemos $v = u$ y $\Omega = B(0,1)$, entonces

$$\int_{\overline{\Omega}} \left(u\Delta u + |\nabla u|^2\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Como $\Delta u = -\lambda u$ en Ω y $u = 0$ en $\partial\Omega$, entonces

$$\int_{\overline{\Omega}} \left(u(-\lambda u) + |\nabla u|^2\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

o equivalentemente

$$\int_{\overline{\Omega}} \left(-\lambda u^2 + |\nabla u|^2\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Note que $\int_{\overline{\Omega}} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$, pues $u = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces

$$\int_{\overline{\Omega}} \lambda u^2 dxdy = \int_{\overline{\Omega}} |\nabla u|^2 dxdy$$

Lo que implica que si hay solución no trivial, entonces $\lambda > 0$. $\square$