Teoría de Tipos Simples

Juan Carlos Agudelo-Agudelo

Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

Motivación

"Type theory enables one to provide a 'coded' version – i.e. a full formalisation – of many mathematical topics. The formal system underlying type theory forces the user to work in a very precise manner. The real power of type theory is that well-formedness of the formalised expressions implies logical and mathematical correctness of the original content." [Nederpelt and Geuvers, 2014, pág. XV]

Índice

Índice

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Breve reseña histórica

- (1908) Bertran Russel propone la teoría de tipos ramificada (como solución a las paradojas).

Breve reseña histórica

- (1908) Bertran Russel propone la teoría de tipos ramificada (como solución a las paradojas).
- (1920s) Leon Chwistek y Frank P. Ramsey propusieron una teoría de tipos sin ramificación, ahora conocida como teoría de tipos simples.

Breve reseña histórica

- (1908) Bertran Russel propone la teoría de tipos ramificada (como solución a las paradojas).
- (1920s) Leon Chwistek y Frank P. Ramsey propusieron una teoría de tipos sin ramificación, ahora conocida como teoría de tipos simples.
- (1940) Alonso Church introdujo el cálculo lambda simplemente tipificado.

Breve reseña histórica

- (1908) Bertran Russel propone la teoría de tipos ramificada (como solución a las paradojas).
- (1920s) Leon Chwistek y Frank P. Ramsey propusieron una teoría de tipos sin ramificación, ahora conocida como teoría de tipos simples.
- (1940) Alonso Church introdujo el cálculo lambda simplemente tipificado.
- (1958) Haskell Curry estableció la correspondencia entre al cálculo lambda simplemente tipificado y el fragmento implicativo de la lógica intuicionista.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Breve reseña histórica

- (1908) Bertran Russel propone la teoría de tipos ramificada (como solución a las paradojas).
- (1920s) Leon Chwistek y Frank P. Ramsey propusieron una teoría de tipos sin ramificación, ahora conocida como teoría de tipos simples.
- (1940) Alonso Church introdujo el cálculo lambda simplemente tipificado.
- (1958) Haskell Curry estableció la correspondencia entre al cálculo lambda simplemente tipificado y el fragmento implicativo de la lógica intuicionista.
- (1969) William A. Howard y Nicolaas G. de Bruijn extendieron la correspondencia a la lógica de predicados de primer orden, lo que ahora es conocido como correspondencia de Curry-Howard.

Breve reseña histórica

- (1908) Bertran Russel propone la teoría de tipos ramificada (como solución a las paradojas).
- (1920s) Leon Chwistek y Frank P. Ramsey propusieron una teoría de tipos sin ramificación, ahora conocida como teoría de tipos simples.
- (1940) Alonso Church introdujo el cálculo lambda simplemente tipificado.
- (1958) Haskell Curry estableció la correspondencia entre al cálculo lambda simplemente tipificado y el fragmento implicativo de la lógica intuicionista.
- (1969) William A. Howard y Nicolaas G. de Bruijn extendieron la correspondencia a la lógica de predicados de primer orden, lo que ahora es conocido como correspondencia de Curry-Howard.
- (1970s) Per Martin-Löf propuso varias versiones diferentes de teorías de tipos intuicionistas.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Breve reseña histórica

- (1908) Bertran Russel propone la teoría de tipos ramificada (como solución a las paradojas).
- (1920s) Leon Chwistek y Frank P. Ramsey propusieron una teoría de tipos sin ramificación, ahora conocida como teoría de tipos simples.
- (1940) Alonso Church introdujo el cálculo lambda simplemente tipificado.
- (1958) Haskell Curry estableció la correspondencia entre al cálculo lambda simplemente tipificado y el fragmento implicativo de la lógica intuicionista.
- (1969) William A. Howard y Nicolaas G. de Bruijn extendieron la correspondencia a la lógica de predicados de primer orden, lo que ahora es conocido como correspondencia de Curry-Howard.
- (1970s) Per Martin-Löf propuso varias versiones diferentes de teorías de tipos intuicionistas.
- Hoy día existen varios asistentes de pruebas basados en teorías de tipos: Agda, Coq, Lean, etc.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda sin tipos

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 1], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 1], [Barendregt and Barendsen, 2000].

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda sin tipos

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 1], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 1], [Barendregt and Barendsen, 2000].

- El cálculo lambda fue propuesto por Alonso Church en la década de 1930, inicialmente como un sistema para formalizar la matemática.

Cálculo lambda sin tipos

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 1], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 1], [Barendregt and Barendsen, 2000].

- El cálculo lambda fue propuesto por Alonso Church en la década de 1930, inicialmente como un sistema para formalizar la matemática.
- En 1935, Stephen Kleene y J. Barkley Rosser probaron que el sistema original propuesto por Church era lógicamente inconsistente.

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 1], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 1], [Barendregt and Barendsen, 2000].

- El cálculo lambda fue propuesto por Alonso Church en la década de 1930, inicialmente como un sistema para formalizar la matemática.
- En 1935, Stephen Kleene y J. Barkley Rosser probaron que el sistema original propuesto por Church era lógicamente inconsistente.
- En 1936, Church redujo el sistema y dejó solo lo que tenía que ver con la formalización de la noción de computación, el sistema obtenido es conocido hoy como cálculo lambda sin tipos.

Cálculo lambda sin tipos

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 1], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 1], [Barendregt and Barendsen, 2000].

- El cálculo lambda fue propuesto por Alonso Church en la década de 1930, inicialmente como un sistema para formalizar la matemática.
- En 1935, Stephen Kleene y J. Barkley Rosser probaron que el sistema original propuesto por Church era lógicamente inconsistente.
- En 1936, Church redujo el sistema y dejó solo lo que tenía que ver con la formalización de la noción de computación, el sistema obtenido es conocido hoy como cálculo lambda sin tipos.

El cálculo lambda es un formalismo que permite expresar funciones y calcular funciones por medio de reglas de "reducción" de términos, simulando la manera como se hacen cálculos en diversas áreas de las matemáticas.

Ejemplo 1

$$
\begin{aligned}
(2+1)*(4+2) &\to 3*(4+2) \\
&\to (3*4)+(3*2) \\
&\to 12+(3*2) \\
&\to 12+6 \\
&\to 18
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda sin tipos

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}(2+1)*(4+2) &\to 3*(4+2)\\ &\to (3*4)+(3*2)\\ &\to 12+(3*2)\\ &\to 12+6\\ &\to 18\end{aligned}$$

En el cálculo lambda, dado un término $t(x)$ (que puede depender de la variable x), se usa $\lambda x.t(x)$ para enfatizar el "rol abstracto" de la variable x en $t(x)$. Por ejemplo, $\lambda x.x+5$ expresa la función que se obtiene al substituir la variable x por un valor específico en $x+5$. De esta manera, $(\lambda x.x+5)(2)$ expresa el resultado de aplicar dicha función al valor 2.

Se fija el conjunto de variables $V = \{x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$.

Se fija el conjunto de variables $V = \{x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$.

Definición 1

El conjunto Λ de λ-términos se define inductivamente por:

1. (Variable) Si $v \in V$, entonces $v \in \Lambda$.
2. (Abstracción) Si $v \in V$ y $M \in \Lambda$, entonces $(\lambda v.M) \in \Lambda$ (a v se le llama variable vinculante).
3. (Aplicación) Si $M, N \in \Lambda$, entonces $(MN) \in \Lambda$.

Términos del cálculo lambda

Se fija el conjunto de variables $V = \{x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$.

Definición 1

El conjunto Λ de λ-términos se define inductivamente por:

1. (Variable) Si $v \in V$, entonces $v \in \Lambda$.
2. (Abstracción) Si $v \in V$ y $M \in \Lambda$, entonces $(\lambda v.M) \in \Lambda$ (a v se le llama variable vinculante).
3. (Aplicación) Si $M, N \in \Lambda$, entonces $(MN) \in \Lambda$.

Observación: por medio de una "sintaxis abstracta"
$\Lambda = V \mid (\lambda V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Términos del cálculo lambda

Se fija el conjunto de variables $V = \{x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$.

Definición 1

El conjunto Λ de λ-términos se define inductivamente por:

1. (Variable) Si $v \in V$, entonces $v \in \Lambda$.
2. (Abstracción) Si $v \in V$ y $M \in \Lambda$, entonces $(\lambda v.M) \in \Lambda$ (a v se le llama variable vinculante).
3. (Aplicación) Si $M, N \in \Lambda$, entonces $(MN) \in \Lambda$.

Observación: por medio de una "sintaxis abstracta"
$\Lambda = V \mid (\lambda V.\Lambda) \mid (\Lambda\Lambda)$.

Ejemplo 2

Las siguientes expresiones son λ-términos: x, y, z, (xx), (xy), $(z(xy))$, $(\lambda x.(xx))$, $((\lambda x.(xx))y)$, $(y(\lambda x.(xx)))$, $(\lambda x.(\lambda y.(y(xy))))$.

Notación:

- Se usará $\equiv$ para denotar la identidad sintáctica.

Términos del cálculo lambda

Notación:

- Se usará $\equiv$ para denotar la identidad sintáctica.
- Se usarán variantes de los elementos de V con $'$ para denotar variables.

Términos del cálculo lambda

Notación:

- Se usará $\equiv$ para denotar la identidad sintáctica.
- Se usarán variantes de los elementos de V con $'$ para denotar variables.
- Se usarán letras mayúsculas $L, M, N, \ldots$ para denotar elementos de Λ.

Términos del cálculo lambda

Notación:

- Se usará $\equiv$ para denotar la identidad sintáctica.
- Se usarán variantes de los elementos de V con $'$ para denotar variables.
- Se usarán letras mayúsculas $L, M, N, \ldots$ para denotar elementos de Λ.

Definición 2

El conjunto de subtérminos de un λ-término se define inductivamente por:

1. $\mathsf{Sub}(v) = \{v\}$, si $v \in V$.
2. $\mathsf{Sub}((\lambda v.M)) = \{(\lambda v.M)\} \cup \mathsf{Sub}(M)$.
3. $\mathsf{Sub}((MN)) = \{(MN)\} \cup \mathsf{Sub}(M) \cup \mathsf{Sub}(N)$.

Un subtérmino propio de M es un subtérmino de M que es diferente a M.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Términos del cálculo lambda

Notación: para disminuir el uso de paréntesis:

- Paréntesis externos en λ-términos serán omitidos.

Términos del cálculo lambda

Notación: para disminuir el uso de paréntesis:

- Paréntesis externos en λ-términos serán omitidos.
- Se asume que las aplicaciones son asociativas a izquierda: MNL abrevia $(MN)L$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Términos del cálculo lambda

Notación: para disminuir el uso de paréntesis:

- Paréntesis externos en λ-términos serán omitidos.
- Se asume que las aplicaciones son asociativas a izquierda: MNL abrevia $(MN)L$.
- Las aplicaciones tienen precedencia sobre las abstracciones: $\lambda x.MN$ abrevia $\lambda x.(MN)$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Notación: para disminuir el uso de paréntesis:

- Paréntesis externos en λ-términos serán omitidos.
- Se asume que las aplicaciones son asociativas a izquierda: MNL abrevia $(MN)L$.
- Las aplicaciones tienen precedencia sobre las abstracciones: $\lambda x.MN$ abrevia $\lambda x.(MN)$.
- Abstracciones pueden ser combinadas usando un solo λ y son asociativas a derecha: $\lambda x_1 x_2 \dots x_n.M$ abrevia $\lambda x_1.(\lambda x_2.(\dots(\lambda x_n.M)))$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Términos del cálculo lambda

Definición 3

El conjunto de variables libres de un λ-término se define inductivamente por:

1. $\mathsf{FV}(v) = \{v\}$, si $v \in V$.
2. $\mathsf{FV}(\lambda v.M) = \mathsf{FV}(M) \setminus \{v\}$.
3. $\mathsf{FV}(MN) = \mathsf{FV}(M) \cup \mathsf{FV}(N)$.

Los λ-términos sin variables libres son llamados combinadores.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Términos del cálculo lambda

Definición 3

El conjunto de variables libres de un λ-término se define inductivamente por:

1. $\mathsf{FV}(v) = \{v\}$, si $v \in V$.
2. $\mathsf{FV}(\lambda v.M) = \mathsf{FV}(M) \setminus \{v\}$.
3. $\mathsf{FV}(MN) = \mathsf{FV}(M) \cup \mathsf{FV}(N)$.

Los λ-términos sin variables libres son llamados combinadores.

Definición 4

El renombramiento de la variable x por y en el λ-término M, denotado $M^{x \to y}$, es el resultado de sustituir toda ocurrencia libre de x por y en M.

α-conversión

Definición 5

La relación $=_\alpha$ de α-conversión (o α-equivalencia) se define así:

- (Renombramiento) $\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M^{x \to y}$ si $y \notin \mathsf{FV}(M)$ y y no es una variable vinculante en M.
- (Compatibilidad) Si $M =_\alpha N$, entonces $ML =_\alpha NL$, $LM =_\alpha LN$ y $\lambda z.M =_\alpha \lambda z.N$ (para cualquier variable z).
- (Reflexividad) $M =_\alpha M$.
- (Simetría) Si $M =_\alpha N$, entonces $N =_\alpha M$.
- (Transitividad) Si $M =_\alpha N$ y $N =_\alpha L$, entonces $M =_\alpha L$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

α-conversión

Definición 5

La relación $=_\alpha$ de α-conversión (o α-equivalencia) se define así:

- (Renombramiento) $\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M^{x \to y}$ si $y \notin \mathsf{FV}(M)$ y y no es una variable vinculante en M.
- (Compatibilidad) Si $M =_\alpha N$, entonces $ML =_\alpha NL$, $LM =_\alpha LN$ y $\lambda z.M =_\alpha \lambda z.N$ (para cualquier variable z).
- (Reflexividad) $M =_\alpha M$.
- (Simetría) Si $M =_\alpha N$, entonces $N =_\alpha M$.
- (Transitividad) Si $M =_\alpha N$ y $N =_\alpha L$, entonces $M =_\alpha L$.

Ejemplo 3

$$\lambda x.x(\lambda y.xyz) =_\alpha \lambda u.u(\lambda y.uyz), \qquad \lambda x.x(\lambda y.xyz) =_\alpha \lambda u.u(\lambda v.uvz),$$
$$\lambda x.x(\lambda y.xyz) \neq_\alpha \lambda z.z(\lambda y.zyz), \qquad \lambda x.x(\lambda y.xyz) \neq_\alpha \lambda y.y(\lambda y.yyz).$$

Definición 6

La sustitución de la variable v por el término N en λ-términos se define inductivamente por:

- $v[v := N] \equiv N$.
- $w[v := N] \equiv w$, si $w \not\equiv v$.
- $(PQ)[v := N] \equiv (P[v := N]Q[v := N])$.
- $(\lambda u.P)[v := N] \equiv \lambda w.(P^{u \to w}[v := N])$, si $\lambda w.P^{u \to w} =_\alpha \lambda u.P$ y $w \notin \mathsf{FV}(N)$ (si $u \notin \mathsf{FV}(N)$ o $v \notin \mathsf{FV}(P)$ se puede tomar $w \equiv u$).

Definición 6

La sustitución de la variable v por el término N en λ-términos se define inductivamente por:

- $v[v := N] \equiv N$.
- $w[v := N] \equiv w$, si $w \not\equiv v$.
- $(PQ)[v := N] \equiv (P[v := N]Q[v := N])$.
- $(\lambda u.P)[v := N] \equiv \lambda w.(P^{u \to w}[v := N])$, si $\lambda w.P^{u \to w} =_\alpha \lambda u.P$ y $w \notin \mathsf{FV}(N)$ (si $u \notin \mathsf{FV}(N)$ o $v \notin \mathsf{FV}(P)$ se puede tomar $w \equiv u$).

Ejemplo 4

$$(\lambda y.yx)[x := xy] \equiv \lambda z.z(xy), \qquad (\lambda xy.zzx)[z := y] \equiv \lambda xu.yyx,$$
$$(\lambda x.yx)[x := xy] \equiv \lambda z.yz, \qquad (\lambda x.yx)[x := xy] \equiv \lambda x.yx.$$

α-conversión

Lema 1

Si $M =_\alpha N$, *entonces* $\mathsf{FV}(M) = \mathsf{FV}(N)$.

α-conversión

Lema 1

Si $M =_\alpha N$*, entonces* $\mathsf{FV}(M) = \mathsf{FV}(N)$*.*

Lema 2

Si $M_1 =_\alpha M_2$ *y* $N_1 =_\alpha N_2$*, entonces:*

1. $M_1 N_1 =_\alpha M_2 N_2$.
2. $\lambda x.M_1 =_\alpha \lambda x.M_2$.
3. $M_1[x := N_1] =_\alpha M_2[x := N_2]$.

α-conversión

Lema 1

Si $M =_\alpha N$*, entonces* $\mathsf{FV}(M) = \mathsf{FV}(N)$.

Lema 2

Si $M_1 =_\alpha M_2$ *y* $N_1 =_\alpha N_2$*, entonces:*

1. $M_1 N_1 =_\alpha M_2 N_2$.
2. $\lambda x.M_1 =_\alpha \lambda x.M_2$.
3. $M_1[x := N_1] =_\alpha M_2[x := N_2]$.

Observación: de aquí en adelante, términos α-equivalentes serán considerados como iguales, y abusando un poco de la notación se usará también $\equiv$ para términos α-equivalentes.

α-conversión

Lema 1

Si $M =_\alpha N$*, entonces* $\mathsf{FV}(M) = \mathsf{FV}(N)$*.*

Lema 2

Si $M_1 =_\alpha M_2$ *y* $N_1 =_\alpha N_2$*, entonces:*

1. $M_1 N_1 =_\alpha M_2 N_2$.
2. $\lambda x.M_1 =_\alpha \lambda x.M_2$.
3. $M_1[x := N_1] =_\alpha M_2[x := N_2]$.

Observación: de aquí en adelante, términos α-equivalentes serán considerados como iguales, y abusando un poco de la notación se usará también $\equiv$ para términos α-equivalentes.

Convención de Barendregt: se usarán variables diferentes para cada una de las lambda abstracciones en un λ-término, y dichas variables serán diferentes a las variables libres.

Definición 7

La relación $\rightarrow_\beta$ de β-reducción (en un paso) se define así:

1. (Base) $(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[x := N]$.
2. (Compatibilidad) Si $M \rightarrow_\beta N$, entonces $ML \rightarrow_\beta NL$, $LM \rightarrow_\beta LN$ y $\lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.N$.

Una expresión de la forma $(\lambda x.M)N$ es llamada redex (o β-redex), y se dice que la expresión $M[x := N]$ es su contracción.

β-reducción y β-conversión

Definición 7

La relación $\rightarrow_\beta$ de β-reducción (en un paso) se define así:

1. (Base) $(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[x := N]$.
2. (Compatibilidad) Si $M \rightarrow_\beta N$, entonces $ML \rightarrow_\beta NL$, $LM \rightarrow_\beta LN$ y $\lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.N$.

Una expresión de la forma $(\lambda x.M)N$ es llamada redex (o β-redex), y se dice que la expresión $M[x := N]$ es su contracción.

Ejemplo 5

$$(\lambda x.x(yx))z \rightarrow_\beta z(yz) \qquad (\lambda y.(\lambda x.xy)z)v \rightarrow_\beta (\lambda x.xv)z$$

$$(\lambda y.(\lambda x.xy)z)v \rightarrow_\beta (\lambda y.zy)v \qquad (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$$

Definición 8

La relación $\twoheadrightarrow_\beta$ de β-reducción (en zero o más pasos) se define así: $M \twoheadrightarrow_\beta N$ si existen términos $M_0, M_1, \ldots M_n$, para algún $n \geq 0$, tales que $M_0 \equiv M$, $M_n \equiv N$ y $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ para todo i tal que $0 \leq i < n$.

Definición 8

La relación $\twoheadrightarrow_\beta$ de β-reducción (en zero o más pasos) se define así: $M \twoheadrightarrow_\beta N$ si existen términos $M_0, M_1, \ldots M_n$, para algún $n \geq 0$, tales que $M_0 \equiv M$, $M_n \equiv N$ y $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ para todo i tal que $0 \leq i < n$.

Ejemplo 6

$(\lambda y.(\lambda x.xy)z)v \twoheadrightarrow_\beta zv$, pues $(\lambda y.(\lambda x.xy)z)v \rightarrow_\beta (\lambda x.xv)z \rightarrow_\beta zv$.

Definición 9

Dos λ-términos M y N son β-convertibles (o β-iguales), denotado $M =_\beta N$, si existen términos $M_0, M_1, \ldots, M_n$, para algún $n \geq 0$, tales que $M_0 \equiv M$, $M_n \equiv N$ y para todo i tal que $0 \leq i < n$ se tiene que $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ o $M_i \leftarrow_\beta M_{i+1}$ (donde $\leftarrow_\beta$ es la relación inversa de $\rightarrow_\beta$).

β-reducción y β-conversión

Definición 9

Dos λ-términos M y N son β-convertibles (o β-iguales), denotado $M =_\beta N$, si existen términos $M_0, M_1, \ldots, M_n$, para algún $n \geq 0$, tales que $M_0 \equiv M$, $M_n \equiv N$ y para todo i tal que $0 \leq i < n$ se tiene que $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ o $M_i \leftarrow_\beta M_{i+1}$ (donde $\leftarrow_\beta$ es la relación inversa de $\rightarrow_\beta$).

Ejemplo 7

$(\lambda x.xv)z =_\beta (\lambda y.zy)v$, pues $(\lambda x.xv)z \rightarrow_\beta zv \leftarrow_\beta (\lambda y.zy)v$ (también se tiene que $(\lambda x.xv)z \leftarrow_\beta (\lambda y.(\lambda x.xy)z)v \rightarrow_\beta (\lambda y.zy)v$).

Definición 9

Dos λ-términos M y N son β-convertibles (o β-iguales), denotado $M =_\beta N$, si existen términos $M_0, M_1, \ldots, M_n$, para algún $n \geq 0$, tales que $M_0 \equiv M$, $M_n \equiv N$ y para todo i tal que $0 \leq i < n$ se tiene que $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ o $M_i \leftarrow_\beta M_{i+1}$ (donde $\leftarrow_\beta$ es la relación inversa de $\rightarrow_\beta$).

Ejemplo 7

$(\lambda x.xv)z =_\beta (\lambda y.zy)v$, pues $(\lambda x.xv)z \rightarrow_\beta zv \leftarrow_\beta (\lambda y.zy)v$ (también se tiene que $(\lambda x.xv)z \leftarrow_\beta (\lambda y.(\lambda x.xy)z)v \rightarrow_\beta (\lambda y.zy)v$).

Lema 3

1. *Si $M \twoheadrightarrow_\beta N$ o $N \twoheadrightarrow_\beta M$, entonces $M =_\beta N$.*
2. *$=_\beta$ es una relación de equivalencia.*

Definición 10

1. M está en forma β-normal (o es una β-nf) si no contiene ningún redex.
2. M tiene una una forma β-normal (o es β-normalizable) si existe N tal que N es una β-nf y $M =_\beta N$.

Definición 10

1. M está en forma β-normal (o es una β-nf) si no contiene ningún redex.
2. M tiene una una forma β-normal (o es β-normalizable) si existe N tal que N es una β-nf y $M =_\beta N$.

Ejemplo 8

1. $(\lambda y.(\lambda x.xy)z)v$ no es una β-nf, pero es β-normalizable.
2. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ no es una β-nf ni es β-normalizable.
3. $(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$ no es una β-nf ni es β-normalizable.
4. $(\lambda u.v)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$ no es una β-nf, pero es β-normalizable.

β-reducción y β-conversión

Definición 10

1. M está en forma β-normal (o es una β-nf) si no contiene ningún redex.
2. M tiene una una forma β-normal (o es β-normalizable) si existe N tal que N es una β-nf y $M =_\beta N$.

Ejemplo 8

1. $(\lambda y.(\lambda x.xy)z)v$ no es una β-nf, pero es β-normalizable.
2. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ no es una β-nf ni es β-normalizable.
3. $(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$ no es una β-nf ni es β-normalizable.
4. $(\lambda u.v)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$ no es una β-nf, pero es β-normalizable.

Lema 4

Si M es una β-nf, entonces $M \twoheadrightarrow_\beta N$ implica $M \equiv N$.

Definición 11

1. Un camino de reducción finito desde M es una secuencia de términos $N_0, N_1, \ldots, N_n$ tales que $N_0 \equiv M$ y $N_i \rightarrow_\beta N_{i+1}$ para todo i tal que $0 \leq i < n$.
2. Un camino de reducción infinito desde M es una secuencia de términos $N_0, N_1, \ldots$ tales que $N_0 \equiv M$ y $N_i \rightarrow_\beta N_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Definición 11

1. Un camino de reducción finito desde M es una secuencia de términos $N_0, N_1, \ldots, N_n$ tales que $N_0 \equiv M$ y $N_i \to_\beta N_{i+1}$ para todo i tal que $0 \leq i < n$.
2. Un camino de reducción infinito desde M es una secuencia de términos $N_0, N_1, \ldots$ tales que $N_0 \equiv M$ y $N_i \to_\beta N_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definición 12

1. M es débilmente normalizable si existe N en β-nf tal que $M \twoheadrightarrow_\beta N$.
2. M es fuertemente normalizable si no existe un camino de reducción infinito desde M.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ejemplo 9

1. $(\lambda y.(\lambda x.xy)z)v$ es fuertemente normalizable.
2. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ no es (débil ni fuertemente) normalizable.
3. $(\lambda u.v)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$ es débilmente normalizable, pero no es fuertemente normalizable.

Ejemplo 9

1. $(\lambda y.(\lambda x.xy)z)v$ es fuertemente normalizable.
2. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ no es (débil ni fuertemente) normalizable.
3. $(\lambda u.v)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$ es débilmente normalizable, pero no es fuertemente normalizable.

Teorema 1 (Propiedad de Church-Rosser o de confluencia)

Si $M \twoheadrightarrow_\beta N_1$ *y* $M \twoheadrightarrow_\beta N_2$*, entonces existe* N_3 *tal que* $N_1 \twoheadrightarrow_\beta N_3$ *y* $N_2 \twoheadrightarrow_\beta N_3$.

Demostración.

Ver en [Barendregt and Barendsen, 2000, págs. 25-29]. □

β-reducción y β-conversión

Corolario 1

Si $M =_\beta N$*, entonces existe* L *tal que* $M \twoheadrightarrow_\beta L$ *y* $N \twoheadrightarrow_\beta L$.

β-reducción y β-conversión

Corolario 1

Si $M =_\beta N$, *entonces existe* L *tal que* $M \twoheadrightarrow_\beta L$ *y* $N \twoheadrightarrow_\beta L$.

Lema 5

1. *Si* N *es una forma* β*-normal de* M, *entonces* $M \twoheadrightarrow_\beta N$.
2. *Todo* λ*-término tiene máximo una forma* β*-normal.*

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Combinador de punto fijo

Teorema 2 (de punto fijo)

Para todo $L \in \Lambda$ *existe* $M \in \Lambda$ *tal que* $LM =_\beta M$.

Demostración.

Tome $M := (\lambda x.L(xx))(\lambda x.L(xx))$. $\square$

Combinador de punto fijo

Teorema 2 (de punto fijo)

Para todo $L \in \Lambda$ existe $M \in \Lambda$ tal que $LM =_\beta M$.

Demostración.

Tome $M := (\lambda x.L(xx))(\lambda x.L(xx))$. $\square$

Observación: abstrayendo sobre M, se obtiene el combinador de punto fijo de Curry $\mathbf{Y} := \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$ (se tiene que $L(\mathbf{Y}L) =_\beta \mathbf{Y}L$). Existen otros combinadores de punto fijo.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Definición 13

Combinadores usuales:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &\equiv \lambda x.x \ (\mathbf{I}M \twoheadrightarrow_\beta M),\\
\mathbf{K} &\equiv \lambda xy.x \ (\mathbf{K}MN \twoheadrightarrow_\beta M),\\
\mathbf{K}_* &\equiv \lambda xy.y \ (\mathbf{K}_*MN \twoheadrightarrow_\beta N),\\
\mathbf{S} &\equiv \lambda xyz.xz(yz) \ (\mathbf{S}MNL \twoheadrightarrow_\beta ML(NL)).
\end{aligned}$$

Definición 13

Combinadores usuales:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &\equiv \lambda x.x \ (\mathbf{I}M \twoheadrightarrow_\beta M),\\
\mathbf{K} &\equiv \lambda xy.x \ (\mathbf{K}MN \twoheadrightarrow_\beta M),\\
\mathbf{K}_* &\equiv \lambda xy.y \ (\mathbf{K}_*MN \twoheadrightarrow_\beta N),\\
\mathbf{S} &\equiv \lambda xyz.xz(yz) \ (\mathbf{S}MNL \twoheadrightarrow_\beta ML(NL)).
\end{aligned}$$

Definición 14

Representación de valores booleanos:

$$\begin{aligned}
\textbf{True} &\equiv \mathbf{K},\\
\textbf{False} &\equiv \mathbf{K}_*,\\
\text{If } B \text{ then } P \text{ else } Q &\equiv BPQ.
\end{aligned}$$

Expresividad del cálculo lambda

Definición 15

Representación de pares ordenados:

$$\langle M, N\rangle \equiv \lambda z.zMN \ (\lambda z.\text{if } z \text{ then } M \text{ else } N),$$
$$\pi_1 \equiv \lambda p.p(\textbf{True}) \ (\pi_1(\langle M, N\rangle) \twoheadrightarrow_\beta M),$$
$$\pi_2 \equiv \lambda p.p(\textbf{False}) \ (\pi_2(\langle M, N\rangle) \twoheadrightarrow_\beta N).$$

Definición 15

Representación de pares ordenados:

$$
\begin{aligned}
\langle M, N\rangle &\equiv \lambda z.zMN \; (\lambda z.\text{if } z \text{ then } M \text{ else } N),\\
\pi_1 &\equiv \lambda p.p(\textbf{True}) \; (\pi_1(\langle M, N\rangle) \twoheadrightarrow_\beta M),\\
\pi_2 &\equiv \lambda p.p(\textbf{False}) \; (\pi_2(\langle M, N\rangle) \twoheadrightarrow_\beta N).
\end{aligned}
$$

Definición 16

Representación de números naturales (codificación de Barendregt):

$$
\begin{aligned}
\ulcorner 0 \urcorner &\equiv \textbf{I},\\
\ulcorner n+1 \urcorner &\equiv \langle \textbf{False}, \ulcorner n \urcorner \rangle.
\end{aligned}
$$

Lema 6

Existen combinadores $\mathbf{S}^+$, $\mathbf{P}^-$ *y* **Zero** *tales que:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^+ \ulcorner n \urcorner &=_\beta \ulcorner n+1 \urcorner, \\
\mathbf{P}^- \ulcorner n+1 \urcorner &=_\beta \ulcorner n \urcorner, \\
\mathbf{Zero} \ulcorner 0 \urcorner &=_\beta \mathbf{True}, \\
\mathbf{Zero} \ulcorner n+1 \urcorner &=_\beta \mathbf{False}.
\end{aligned}$$

Lema 6

Existen combinadores $\mathbf{S}^{+}$, $\mathbf{P}^{-}$ *y* **Zero** *tales que:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{+}\ulcorner n\urcorner &=_{\beta} \ulcorner n+1\urcorner,\\
\mathbf{P}^{-}\ulcorner n+1\urcorner &=_{\beta} \ulcorner n\urcorner,\\
\mathbf{Zero}\ulcorner 0\urcorner &=_{\beta} \mathbf{True},\\
\mathbf{Zero}\ulcorner n+1\urcorner &=_{\beta} \mathbf{False}.
\end{aligned}$$

Demostración.

Tome:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{+} &\equiv \lambda x.\langle \mathbf{False}, x\rangle,\\
\mathbf{P}^{-} &\equiv \lambda x.x\mathbf{False},\\
\mathbf{Zero} &\equiv \lambda x.x\mathbf{True}.
\end{aligned}$$

Definición 17

Una función numérico teórica $f{:}\mathbb{N}^k{\to}\mathbb{N}$ es λ-definible si existe un combinador $F \in \Lambda$ tal que:

$$F\ulcorner n_1\urcorner \ldots \ulcorner n_k\urcorner{=_\beta}\ulcorner f(n_1, \ldots, n_k)\urcorner,$$

para todo $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$. En tal caso, se dice que f es λ-definida por F.

Definición 17

Una función numérico teórica $f{:}\mathbb{N}^k{\to}\mathbb{N}$ es λ-definible si existe un combinador $F \in \Lambda$ tal que:

$$F\ulcorner n_1\urcorner \ldots \ulcorner n_k\urcorner {=_\beta} \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k)\urcorner,$$

para todo $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$. En tal caso, se dice que f es λ-definida por F.

Teorema 3

Una función $f{:}\mathbb{N}^k{\to}\mathbb{N}$ es λ-definible si y solo si es una función recursiva.

Demostración.

Ver en [Barendregt and Barendsen, 2000, págs. 19–20]. □

Expresividad del cálculo lambda

Observación: Una codificación diferente de los números naturales propuesta por Alonso Church, y la demostración del Teorema 3 bajo dicha codificación (y para funciones recursivas parciales en general), se encuentra en [Sørensen and Urzyczyn, 2006, págs. 20–21].

Observación: Una codificación diferente de los números naturales propuesta por Alonso Church, y la demostración del Teorema 3 bajo dicha codificación (y para funciones recursivas parciales en general), se encuentra en [Sørensen and Urzyczyn, 2006, págs. 20–21].

Corolario 2

Los siguientes problemas son "indecidibles" (o "no computables"):

1. *Dado $M \in \Lambda$, ¿M es (débilmente) normalizable?*
2. *Dado $M \in \Lambda$, ¿M es fuertemente normalizable?*

Demostración.

Ver en [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Corolario 1.7.7] $\square$

Expresividad del cálculo lambda

Algunas propiedades contraintuitivas o "no deseables" del λ-cálculo son:

1. Permite la auto-aplicación de términos (MM).

Algunas propiedades contraintuitivas o "no deseables" del λ-cálculo son:

1. Permite la auto-aplicación de términos (MM).
2. No garantiza la existencia de formas normales (posibilidad de "cálculos infinitos").

Expresividad del cálculo lambda

Algunas propiedades contraintuitivas o "no deseables" del λ-cálculo son:

1. Permite la auto-aplicación de términos (MM).
2. No garantiza la existencia de formas normales (posibilidad de "cálculos infinitos").
3. Todo λ-término tiene un punto fijo.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Expresividad del cálculo lambda

Algunas propiedades contraintuitivas o "no deseables" del λ-cálculo son:

1. Permite la auto-aplicación de términos (MM).
2. No garantiza la existencia de formas normales (posibilidad de "cálculos infinitos").
3. Todo λ-término tiene un punto fijo.

Observación: Como la operación de sucesor es λ-definible, el λ-término que la define tiene un punto fijo, pero dicho punto fijo no es un numeral. Lo mismo pasa con muchas otras operaciones sobre números naturales.

Índice

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda simplemente tipificado

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 2], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 3], [Barendregt and Barendsen, 2000].

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda simplemente tipificado

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 2], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 3], [Barendregt and Barendsen, 2000].

El cálculo lambda simplemente tipificado fue propuesto por Alonso Church en:

> *Church, A., 1940: A formulation of the simple theory of types, Journal of Symbolic Logic, 5, pp. 56–68.*

Cálculo lambda simplemente tipificado

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 2], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 3], [Barendregt and Barendsen, 2000].

El cálculo lambda simplemente tipificado fue propuesto por Alonso Church en:

> *Church, A., 1940: A formulation of the simple theory of types, Journal of Symbolic Logic, 5, pp. 56–68.*

Aunque Haskell Curry ya había propuesto la inclusión de tipos en su sistema de lógica combinatoria (una variante del cálculo lambda) en:

> *Curry, H.B. (1934). Functionality in combinatory logic, Proceedings of the National Academy of Science USA 20, pp. 584–590.*

Cálculo lambda simplemente tipificado

Referencias usadas en esta sección: [Nederpelt and Geuvers, 2014, Cap. 2], [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Cap. 3], [Barendregt and Barendsen, 2000].

El cálculo lambda simplemente tipificado fue propuesto por Alonso Church en:

> *Church, A., 1940: A formulation of the simple theory of types, Journal of Symbolic Logic, 5, pp. 56–68.*

Aunque Haskell Curry ya había propuesto la inclusión de tipos en su sistema de lógica combinatoria (una variante del cálculo lambda) en:

> *Curry, H.B. (1934). Functionality in combinatory logic, Proceedings of the National Academy of Science USA 20, pp. 584–590.*

Estos dos trabajos dan origen a dos variantes deferentes de tipificado: a la Church y a la Curry.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda simplemente tipificado

Las funciones se aplican a cierto tipo de objetos y producen cierto tipo de objetos. Esta idea se formaliza mediante la adición de tipos al cálculo lambda, lo que evita algunas propiedades contraintuitivas de dicho formalismo.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda simplemente tipificado

Las funciones se aplican a cierto tipo de objetos y producen cierto tipo de objetos. Esta idea se formaliza mediante la adición de tipos al cálculo lambda, lo que evita algunas propiedades contraintuitivas de dicho formalismo.

Se fija el conjunto de variables de tipos $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots\}$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda simplemente tipificado

Las funciones se aplican a cierto tipo de objetos y producen cierto tipo de objetos. Esta idea se formaliza mediante la adición de tipos al cálculo lambda, lo que evita algunas propiedades contraintuitivas de dicho formalismo.

Se fija el conjunto de variables de tipos $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots\}$.

Definición 18

El conjunto de tipos simples $\mathbb{T}$ se define inductivamente por:

1. (Variable de tipo) Si $\sigma \in \mathbb{V}$, entonces $\sigma \in \mathbb{T}$.
2. (Tipo flecha o tipo función) Si $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, entonces $(\sigma \to \tau) \in \mathbb{T}$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda simplemente tipificado

Las funciones se aplican a cierto tipo de objetos y producen cierto tipo de objetos. Esta idea se formaliza mediante la adición de tipos al cálculo lambda, lo que evita algunas propiedades contraintuitivas de dicho formalismo.

Se fija el conjunto de variables de tipos $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots\}$.

Definición 18

El conjunto de tipos simples $\mathbb{T}$ se define inductivamente por:

1. (Variable de tipo) Si $\sigma \in \mathbb{V}$, entonces $\sigma \in \mathbb{T}$.
2. (Tipo flecha o tipo función) Si $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, entonces $(\sigma \to \tau) \in \mathbb{T}$.

Observación: por medio de una "sintaxis abstracta": $\mathbb{T} = \mathbb{V} \mid (\mathbb{T} \to \mathbb{T})$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Cálculo lambda simplemente tipificado

Las funciones se aplican a cierto tipo de objetos y producen cierto tipo de objetos. Esta idea se formaliza mediante la adición de tipos al cálculo lambda, lo que evita algunas propiedades contraintuitivas de dicho formalismo.

Se fija el conjunto de variables de tipos $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots\}$.

Definición 18

El conjunto de tipos simples $\mathbb{T}$ se define inductivamente por:

1. (Variable de tipo) Si $\sigma \in \mathbb{V}$, entonces $\sigma \in \mathbb{T}$.
2. (Tipo flecha o tipo función) Si $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, entonces $(\sigma \to \tau) \in \mathbb{T}$.

Observación: por medio de una "sintaxis abstracta": $\mathbb{T} = \mathbb{V} \mid (\mathbb{T} \to \mathbb{T})$.

Ejemplo 10

Las siguientes expresiones son tipos simples: α, $(\alpha \to \beta)$, $((\alpha \to \beta) \to (\beta \to (\alpha \to \beta)))$.

Cálculo lambda simplemente tipificado

Notación:

- Se pueden omitir los paréntesis externos.

Cálculo lambda simplemente tipificado

Notación:

- Se pueden omitir los paréntesis externos.
- El tipo flecha es asociativo a derecha.

Cálculo lambda simplemente tipificado

Notación:

- Se pueden omitir los paréntesis externos.
- El tipo flecha es asociativo a derecha.
- Se usarán variantes de los elementos de $\mathbb{V}$ con $'$ para denotar variables de tipos.

Notación:

- Se pueden omitir los paréntesis externos.
- El tipo flecha es asociativo a derecha.
- Se usarán variantes de los elementos de $\mathbb{V}$ con $'$ para denotar variables de tipos.

La interpretación de los tipos simples es:

- Las variables de tipos representan tipos básicos (por ejemplo nat: el conjunto de los números naturales).

Cálculo lambda simplemente tipificado

Notación:

- Se pueden omitir los paréntesis externos.
- El tipo flecha es asociativo a derecha.
- Se usarán variantes de los elementos de $\mathbb{V}$ con $'$ para denotar variables de tipos.

La interpretación de los tipos simples es:

- Las variables de tipos representan tipos básicos (por ejemplo nat: el conjunto de los números naturales).
- Un tipo flecha $\alpha \to \beta$ representa un tipo de función (o el conjunto de todas las funciones) con entrada de tipo α y salida de tipo β (por ejemplo $nat \to real$: el conjunto de funciones de nat en $real$).

Tipificado a la Curry

El tipificado a la Curry es también conocido como tipificado implícito.

Tipificado a la Curry

El tipificado a la Curry es también conocido como tipificado implícito.

Definición 19

1. Una sentencia es de la forma $M : \sigma$, donde $M \in \Lambda$ y $\sigma \in \mathbb{T}$. En dicha sentencia, M es llamado el sujeto y σ el tipo.
2. Una declaración es una sentencia donde el sujeto es una variable.
3. Un contexto (o una base) es un conjunto (finito) de declaraciones con diferentes sujetos.
4. Un juicio tiene la forma $\Gamma \vdash M : \sigma$, donde Γ es un contexto y $M : \sigma$ es una sentencia.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Curry

El tipificado a la Curry es también conocido como tipificado implícito.

Definición 19

1. Una sentencia es de la forma $M : \sigma$, donde $M \in \Lambda$ y $\sigma \in \mathbb{T}$. En dicha sentencia, M es llamado el sujeto y σ el tipo.
2. Una declaración es una sentencia donde el sujeto es una variable.
3. Un contexto (o una base) es un conjunto (finito) de declaraciones con diferentes sujetos.
4. Un juicio tiene la forma $\Gamma \vdash M : \sigma$, donde Γ es un contexto y $M : \sigma$ es una sentencia.

Observación: En algunos textos, los contextos se definen como listas en lugar de conjuntos. En sistemas de tipos más complejos, es necesario usar listas en lugar de conjuntos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Curry

Definición 20

El sistema de asignación de tipos a la Curry, denotado $\lambda\!\rightarrow$, consiste en las siguientes reglas:

Si $x : \sigma \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash x : \sigma$ (Var)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}\ (\text{Apl}) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}\ (\text{Abst})$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Curry

Definición 20

El sistema de asignación de tipos a la Curry, denotado $\lambda\!\to$, consiste en las siguientes reglas:

Si $x : \sigma \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash x : \sigma$ (Var)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \text{ (Apl)} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau} \text{ (Abst)}$$

Definición 21

Una derivación de $\Gamma \vdash N : \varphi$ es un árbol construido mediante aplicación de las reglas en la definición anterior, cuyas hojas son aplicación de la regla (Var) y cuya raíz es $\Gamma \vdash N : \varphi$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Curry

Ejemplo 11

Los siguientes juicios pueden ser derivados en $\lambda\!\rightarrow$:

1. $\vdash \mathbf{I} : \alpha \to \alpha$.
2. $\vdash \mathbf{K} : \alpha \to \beta \to \alpha$.
3. $x : \alpha \to \beta, y : \beta \to \delta \vdash \lambda z.y(xz) : \alpha \to \delta$.

Tipificado a la Curry

Ejemplo 11

Los siguientes juicios pueden ser derivados en $\lambda\!\to$:

1. $\vdash \mathbf{I} : \alpha \to \alpha$.
2. $\vdash \mathbf{K} : \alpha \to \beta \to \alpha$.
3. $x : \alpha \to \beta, y : \beta \to \delta \vdash \lambda z.y(xz) : \alpha \to \delta$.

Observación: Para derivaciones más complicadas, el formato de árbol se vuelve inmanejable. En [Nederpelt and Geuvers, 2014, p. 45-46], se propone un formato simplificado para presentar derivaciones, al cual llaman formato bandera. En dicho formato, cada declaración que se toma como hipótesis se despliega en forma de bandera (encerrada en un rectángulo y con una línea vertical que indica dónde la hipótesis es descargada). En el formato bandera reducido se elimina además el uso de la regla (Var).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Curry

Definición 22

Dado un contexto $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n\}$:

1. El dominio de Γ es $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
2. El rango de Γ es $\mathrm{ran}(\Gamma) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$.
3. $\Gamma(x_i) = \sigma_i$ (para $1 \leq i \leq n$).
4. Si $A \subseteq V$, entonces $\Gamma \upharpoonright A = \{x : \sigma \mid x \in A \text{ y } \Gamma(x) = \sigma\}$.

Tipificado a la Curry

Definición 22

Dado un contexto $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n\}$:

1. El dominio de Γ es $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
2. El rango de Γ es $\mathrm{ran}(\Gamma) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$.
3. $\Gamma(x_i) = \sigma_i$ (para $1 \leq i \leq n$).
4. Si $A \subseteq V$, entonces $\Gamma \upharpoonright A = \{x : \sigma \mid x \in A \text{ y } \Gamma(x) = \sigma\}$.

Observación: Un contexto puede ser visto como una función parcial de V en $\mathbb{T}$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Definición 22

Dado un contexto $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n\}$:

1. El dominio de Γ es $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
2. El rango de Γ es $\mathrm{ran}(\Gamma) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$.
3. $\Gamma(x_i) = \sigma_i$ (para $1 \leq i \leq n$).
4. Si $A \subseteq V$, entonces $\Gamma \restriction A = \{x : \sigma \mid x \in A \text{ y } \Gamma(x) = \sigma\}$.

Observación: Un contexto puede ser visto como una función parcial de V en $\mathbb{T}$.

Lema 7 (de Debilitamiento)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* Δ *es un contexto tal que* $\Gamma \subseteq \Delta$, *entonces* $\Delta \vdash M : \sigma$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Lema 8 (de Variables Libres)

1. *Si* $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* Γ' *es un contexto tal que* $\Gamma(x) = \Gamma'(x)$ *para todo* $x \in \mathsf{FV}(M)$, *entonces* $\Gamma' \vdash M : \sigma$.
2. *Si* $\Gamma \vdash M : \sigma$, *entonces* $\mathsf{FV}(M) \subseteq \mathit{dom}(\Gamma)$.
3. *Si* $\Gamma \vdash M : \sigma$, *entonces* $\Gamma \restriction \mathsf{FV}(M) \vdash M : \sigma$.

Tipificado a la Curry

Lema 8 (de Variables Libres)

1. *Si* $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* Γ' *es un contexto tal que* $\Gamma(x) = \Gamma'(x)$ *para todo* $x \in \mathsf{FV}(M)$, *entonces* $\Gamma' \vdash M : \sigma$.
2. *Si* $\Gamma \vdash M : \sigma$, *entonces* $\mathsf{FV}(M) \subseteq$ *dom*(Γ).
3. *Si* $\Gamma \vdash M : \sigma$, *entonces* $\Gamma \restriction \mathsf{FV}(M) \vdash M : \sigma$.

Lema 9 (de Generación)

1. *Si* $\Gamma \vdash x : \sigma$, *entonces* $(x : \sigma) \in \Gamma$.
2. *Si* $\Gamma \vdash MN : \tau$, *entonces* $\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau$ *y* $\Gamma \vdash N : \sigma$, *para algún* $\sigma \in \mathbb{T}$.
3. *Si* $\Gamma \vdash \lambda x.M : \rho$, *entonces existen* $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ *tales que* $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ *y* $\rho \equiv \sigma \to \tau$.

Tipificado a la Curry

Lema 10 (de Subtérminos)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* M' *es un subtérmino de* M*, entonces* $\Gamma' \vdash M' : \sigma'$ *para algún* Γ' *y* σ'*.*

Tipificado a la Curry

Lema 10 (de Subtérminos)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* M' *es un subtérmino de* M, *entonces* $\Gamma' \vdash M' : \sigma'$ *para algún* Γ' *y* σ'.

Notación:

- La sustitución de una variable de tipo α por un tipo τ en un tipo σ se denotará por $\sigma[\alpha := \tau]$.

Lema 10 (de Subtérminos)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* M' *es un subtérmino de* M*, entonces* $\Gamma' \vdash M' : \sigma'$ *para algún* Γ' *y* σ'*.*

Notación:

- La sustitución de una variable de tipo α por un tipo τ en un tipo σ se denotará por $\sigma[\alpha := \tau]$.
- La sustitución de una variable de tipo α por un tipo τ en cada uno de los tipos de un contexto Γ se denotará por $\Gamma[\alpha : \tau]$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Lema 10 (de Subtérminos)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* M' *es un subtérmino de* M*, entonces* $\Gamma' \vdash M' : \sigma'$ *para algún* Γ' *y* σ'*.*

Notación:

- La sustitución de una variable de tipo α por un tipo τ en un tipo σ se denotará por $\sigma[\alpha := \tau]$.
- La sustitución de una variable de tipo α por un tipo τ en cada uno de los tipos de un contexto Γ se denotará por $\Gamma[\alpha : \tau]$.

Lema 11 (de Sustitución)

1. *Si* $\Gamma \vdash M : \sigma$*, entonces* $\Gamma[\alpha := \tau] \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]$*.*
2. *Si* $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ *y* $\Gamma \vdash N : \sigma$*, entonces* $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$*.*

Lema 12 (de Reducción del Sujeto)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* $M \twoheadrightarrow_\beta M'$, *entonces* $\Gamma \vdash M' : \sigma$.

Lema 12 (de Reducción del Sujeto)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* $M \twoheadrightarrow_\beta M'$, *entonces* $\Gamma \vdash M' : \sigma$.

Definición 23

Un término $M \in \Lambda$ es tipificable (o lícito) si existe un contexto Γ y un tipo σ tales que $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Tipificado a la Curry

Lema 12 (de Reducción del Sujeto)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* $M \twoheadrightarrow_\beta M'$, *entonces* $\Gamma \vdash M' : \sigma$*.*

Definición 23

Un término $M \in \Lambda$ es tipificable (o lícito) si existe un contexto Γ y un tipo σ tales que $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Se tiene los siguientes problemas asociados a la asignación de tipos:

- Tipificabilidad: determinar si un término M es tipificable (una variante consiste en determinar la tipificabilidad en un contexto determinado).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Curry

Lema 12 (de Reducción del Sujeto)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* $M \twoheadrightarrow_\beta M'$*, entonces* $\Gamma \vdash M' : \sigma$*.*

Definición 23

Un término $M \in \Lambda$ es tipificable (o lícito) si existe un contexto Γ y un tipo σ tales que $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Se tiene los siguientes problemas asociados a la asignación de tipos:

- Tipificabilidad: determinar si un término M es tipificable (una variante consiste en determinar la tipificabilidad en un contexto determinado).
- Chequeo de tipos: dado un contexto Γ, un término M y un tipo σ, determinar si $\Gamma \vdash M : \sigma$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Curry

Lema 12 (de Reducción del Sujeto)

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ *y* $M \twoheadrightarrow_\beta M'$, *entonces* $\Gamma \vdash M' : \sigma$.

Definición 23

Un término $M \in \Lambda$ es tipificable (o lícito) si existe un contexto Γ y un tipo σ tales que $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Se tiene los siguientes problemas asociados a la asignación de tipos:

- Tipificabilidad: determinar si un término M es tipificable (una variante consiste en determinar la tipificabilidad en un contexto determinado).
- Chequeo de tipos: dado un contexto Γ, un término M y un tipo σ, determinar si $\Gamma \vdash M : \sigma$.
- Habitabilidad de un tipo: dado un contexto Γ y un tipo σ, determinar si existe un término M tal que $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Tipificado a la Curry

Observación: Los problemas de tipificabilidad, chequeo de tipos y habitabilidad en $\lambda\!\!\rightarrow$ son decidibles (ver [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Sección 3.2] o [Barendregt, 1992, Sección 4.4]). En sistemas de tipos más expresivos algunos de estos problemas no son decidibles.

Observación: En el tipificado a la Curry no hay unicidad de tipos.

Tipificado a la Church

El tipificado a la Church es también conocido como tipificado explícito. En este tipificado, se debe especificar el tipo de las variables en las λ-abstracciones.

Tipificado a la Church

El tipificado a la Church es también conocido como tipificado explícito. En este tipificado, se debe especificar el tipo de las variables en las λ-abstracciones.

Definición 24

El conjunto de λ-términos pre-tipificados (o λ-términos a la Church) es:

$$\Lambda_{\mathbb{T}} = V \mid (\lambda V : \mathbb{T}.\Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\Lambda_{\mathbb{T}}).$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Church

El tipificado a la Church es también conocido como tipificado explícito. En este tipificado, se debe especificar el tipo de las variables en las λ-abstracciones.

Definición 24

El conjunto de λ-términos pre-tipificados (o λ-términos a la Church) es:

$$\Lambda_{\mathbb{T}} = V \mid (\lambda V : \mathbb{T}.\Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\Lambda_{\mathbb{T}}).$$

Observaciones:

- Las definiciones para λ-términos se adecuan para λ-términos pre-tipificados de manera natural (es solo agregar los tipos de las variables en las abstracciones).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

El tipificado a la Church es también conocido como tipificado explícito. En este tipificado, se debe especificar el tipo de las variables en las λ-abstracciones.

Definición 24

El conjunto de λ-términos pre-tipificados (o λ-términos a la Church) es:

$$\Lambda_{\mathbb{T}} = V \mid (\lambda V : \mathbb{T}.\Lambda_{\mathbb{T}}) \mid (\Lambda_{\mathbb{T}}\Lambda_{\mathbb{T}}).$$

Observaciones:

- Las definiciones para λ-términos se adecuan para λ-términos pre-tipificados de manera natural (es solo agregar los tipos de las variables en las abstracciones).
- Originalmente, Church adicionaba toda la información de los tipos a los términos y definía inductivamente el conjunto de los términos tipificables.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Church

Definición 25

El sistema de asignación de tipos a la Church, denotado también como $\lambda\!\!\to$, consiste en las siguientes reglas:

Si $x : \sigma \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash x : \sigma$ (Var)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \text{ (Apl)} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma . M : \sigma \to \tau} \text{ (Abst)}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Church

Definición 25

El sistema de asignación de tipos a la Church, denotado también como $\lambda\!\!\to$, consiste en las siguientes reglas:

Si $x : \sigma \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash x : \sigma$ (Var)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}\ (\text{Apl}) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau}\ (\text{Abst})$$

Observación: Se usará el mismo símbolo para denotar los sistemas de asignación de tipos simples a la Curry y a la Church y se especificará en cuál sistema se está trabajando cuando sea necesario.

Tipificado a la Church

Ejemplo 12

Los siguientes juicios pueden ser derivados en $\lambda\!\rightarrow$ (a la Church):

1. $\vdash \lambda x : \alpha . x : \alpha \to \alpha$.
2. $\vdash \lambda x : \alpha . \lambda y : \beta . x : \alpha \to \beta \to \alpha$.
3. $x : \alpha \to \beta, y : \beta \to \delta \vdash \lambda z : \alpha . y(xz) : \alpha \to \delta$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Church

Ejemplo 12

Los siguientes juicios pueden ser derivados en $\lambda\!\!\rightarrow$ (a la Church):

1. $\vdash \lambda x : \alpha . x : \alpha \rightarrow \alpha$.
2. $\vdash \lambda x : \alpha . \lambda y : \beta . x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$.
3. $x : \alpha \rightarrow \beta, y : \beta \rightarrow \delta \vdash \lambda z : \alpha . y(xz) : \alpha \rightarrow \delta$.

Observación: Cambiando λ-términos por λ-términos pre-tipificados, las definiciones y propiedades que se presentaron para $\lambda\!\!\rightarrow$ a la Curry también aplican para $\lambda\!\!\rightarrow$ a la Church.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Church

Ejemplo 12

Los siguientes juicios pueden ser derivados en $\lambda\!\rightarrow$ (a la Church):

1. $\vdash \lambda x : \alpha . x : \alpha \to \alpha$.
2. $\vdash \lambda x : \alpha . \lambda y : \beta . x : \alpha \to \beta \to \alpha$.
3. $x : \alpha \to \beta, y : \beta \to \delta \vdash \lambda z : \alpha . y(xz) : \alpha \to \delta$.

Observación: Cambiando λ-términos por λ-términos pre-tipificados, las definiciones y propiedades que se presentaron para $\lambda\!\rightarrow$ a la Curry también aplican para $\lambda\!\rightarrow$ a la Church.

Lema 13 (Unicidad de Tipos)

Si $\Gamma \vdash M : \alpha$ *y* $\Gamma \vdash M : \beta$ *en* $\lambda\!\rightarrow$ *a la Church, entonces* $\alpha \equiv \beta$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Church

Definición 26

La función de borrado de λ-términos a la Church a λ-términos a la Curry, denotada $|\cdot|$, se define inductivamente por:

$$
\begin{aligned}
|x| &= x, \\
|MN| &= MN, \\
|\lambda x : \alpha.M| &= \lambda x.M.
\end{aligned}
$$

Tipificado a la Church

Definición 26

La función de borrado de λ-términos a la Church a λ-términos a la Curry, denotada $|\cdot|$, se define inductivamente por:

$$
\begin{aligned}
|x| &= x, \\
|MN| &= MN, \\
|\lambda x : \alpha . M| &= \lambda x . M.
\end{aligned}
$$

Lema 14

1. *Si* $\Gamma \vdash M : \alpha$ *a la Church, entonces* $\Gamma \vdash |M| : \alpha$ *a la Curry.*
2. *Si* $\Gamma \vdash M : \alpha$ *a la Curry, entonces existe un término a la Church* M' *tal que* $|M'| = M$ *y* $\Gamma \vdash M' : \alpha$ *a la Church.*

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Church

Teorema 4 (de Normalización Fuerte)

Si $\Gamma \vdash M : \alpha$, *entonces* M *es fuertemente normalizable.*

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Tipificado a la Church

Teorema 4 (de Normalización Fuerte)

Si $\Gamma \vdash M : \alpha$, *entonces* M *es fuertemente normalizable.*

Demostración.

Una demostración para $\lambda\!\!\to$ *a la Church (en su versión ortodoxa) está en [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Sección 3.5] (siguiendo el método de Turing para probar la normalización débil y siguiendo ideas de Klop y de Gandy para mostrar la normalización fuerte a partir de la débil) y una de demostración para* $\lambda\!\!\to$ *a la Curry está en [Barendregt, 1992, Sección 4.3] (siguiendo el método de Tait)* $\square$

Teorema 4 (de Normalización Fuerte)

Si $\Gamma \vdash M : \alpha$, *entonces* M *es fuertemente normalizable.*

Demostración.

Una demostración para $\lambda\!\!\rightarrow$ *a la Church (en su versión ortodoxa) está en [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Sección 3.5] (siguiendo el método de Turing para probar la normalización débil y siguiendo ideas de Klop y de Gandy para mostrar la normalización fuerte a partir de la débil) y una de demostración para* $\lambda\!\!\rightarrow$ *a la Curry está en [Barendregt, 1992, Sección 4.3] (siguiendo el método de Tait)* □

Observación: Se dice que un sistema de tipos es fuertemente normalizable si todo término en dicho sistema es fuertemente normalizable. El teorema anterior muestra que $\lambda\!\!\rightarrow$ (a la Curry y a la Church) es fuertemente normalizable.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Índice

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Lógica intuicionista

Referencia usada en esta sección: [Sørensen and Urzyczyn, 2006] (con algunos cambios de notación).

Lógica intuicionista

Referencia usada en esta sección: [Sørensen and Urzyczyn, 2006] (con algunos cambios de notación).

> *"Classical logic is based on the fundamental notion of truth. The truth of a statement is an "absolute" property of this statement, in that it is independent of any reasoning, understanding, or action. A well-formed and unambiguous declarative statement is either true or false, whether or not we (or anybody else) know it, prove it, or verify it in any possible way." [Sørensen and Urzyczyn, 2006, pág. 27]*

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Referencia usada en esta sección: [Sørensen and Urzyczyn, 2006] (con algunos cambios de notación).

> *"Classical logic is based on the fundamental notion of truth. The truth of a statement is an "absolute" property of this statement, in that it is independent of any reasoning, understanding, or action. A well-formed and unambiguous declarative statement is either true or false, whether or not we (or anybody else) know it, prove it, or verify it in any possible way." [Sørensen and Urzyczyn, 2006, pág. 27]*

> *En la Lógica Intuicionista (IL) "There is no absolute truth, there is only the knowledge and intuitive construction of the idealized mathematician, the creative subject. A logical judgement is only considered "true" if the creative subject can verify its correctness." [Sørensen and Urzyczyn, 2006, pág. 28]*

Lógica intuicionista

En la lógica clásica es válido el principio del tercer excluido (o tertium non datur): $P \vee \neg P$ es válido para cualquier proposición P. Mientras que en la lógica intuicionista dicho principio no es válido.

Lógica intuicionista

En la lógica clásica es válido el principio del tercer excluido (o tertium non datur): $P \vee \neg P$ es válido para cualquier proposición P. Mientras que en la lógica intuicionista dicho principio no es válido.

Considere la siguiente sentencia: *Existen números irracionales* x *y* y *tales que* x^y *es racional*.

Lógica intuicionista

En la lógica clásica es válido el principio del tercer excluido (o tertium non datur): $P \vee \neg P$ es válido para cualquier proposición P. Mientras que en la lógica intuicionista dicho principio no es válido.

Considere la siguiente sentencia: *Existen números irracionales x y y tales que x^y es racional*.

Demostración usando tercer exclusivo: Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, tome $x = y = \sqrt{2}$; en caso contrario tome $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $y = \sqrt{2}$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Lógica intuicionista

En la lógica clásica es válido el principio del tercer excluido (o tertium non datur): $P \vee \neg P$ es válido para cualquier proposición P. Mientras que en la lógica intuicionista dicho principio no es válido.

Considere la siguiente sentencia: *Existen números irracionales* x *y* y *tales que* x^y *es racional*.

Demostración usando tercer exclusivo: Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, tome $x = y = \sqrt{2}$; en caso contrario tome $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $y = \sqrt{2}$.

Demostración constructiva: Para $x = \sqrt{2}$ y $y = 2\log_2 3$ se tiene que x y y son irracionales y $x^y = 3 \in \mathbb{Q}$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Lógica intuicionista

En la lógica clásica es válido el principio del tercer excluido (o tertium non datur): $P \vee \neg P$ es válido para cualquier proposición P. Mientras que en la lógica intuicionista dicho principio no es válido.

Considere la siguiente sentencia: *Existen números irracionales x y y tales que x^y es racional*.

Demostración usando tercer exclusivo: Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, tome $x = y = \sqrt{2}$; en caso contrario tome $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $y = \sqrt{2}$.

Demostración constructiva: Para $x = \sqrt{2}$ y $y = 2\log_2 3$ se tiene que x y y son irracionales y $x^y = 3 \in \mathbb{Q}$.

En la lógica intuicionista se acepta solo razonamiento "constructivo".

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Interpretación BHK

Los conectivos de la lógica proposicional intuicionista son $\wedge, \vee, \supset$ y la constante $\perp$.

Interpretación BHK

Los conectivos de la lógica proposicional intuicionista son $\wedge, \vee, \supset$ y la constante $\perp$.

Bajo la interpretación de Brouwer-Heyting-Kolmokorov (BHK):

- Una construcción de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ consiste en una construcción de φ_1 y una construcción de φ_2.
- Una construcción de $\varphi_1 \vee \varphi_2$ consiste en un indicador $i \in \{1, 2\}$ y una construcción de φ_i.
- Una construcción de $\varphi_1 \supset \varphi_2$ consiste en un método (función) que transforma cada construcción de φ_1 en una construcción de φ_2.
- No existe construcción de $\perp$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Los conectivos de la lógica proposicional intuicionista son $\wedge, \vee, \supset$ y la constante $\perp$.

Bajo la interpretación de Brouwer-Heyting-Kolmokorov (BHK):

- Una construcción de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ consiste en una construcción de φ_1 y una construcción de φ_2.
- Una construcción de $\varphi_1 \vee \varphi_2$ consiste en un indicador $i \in \{1, 2\}$ y una construcción de φ_i.
- Una construcción de $\varphi_1 \supset \varphi_2$ consiste en un método (función) que transforma cada construcción de φ_1 en una construcción de φ_2.
- No existe construcción de $\perp$.

La negación intuicionista está definida por $\neg\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \supset \perp$.

- Una construcción de $\neg\varphi$ consiste en un método (función) que transforma cualquier construcción de φ en una construcción inexistente.

Interpretación BHK

Para la interpretación de cuantificadores se supone que variables individuales y términos algebraicos son interpretados sobre un dominio de "objetos" D.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Interpretación BHK

Para la interpretación de cuantificadores se supone que variables individuales y términos algebraicos son interpretados sobre un dominio de "objetos" D.

- Una construcción de $\forall x\varphi(x)$ es un método (función) que transforma todo objeto $a \in D$ en una construcción de $\varphi(a)$.
- Una construcción de $\exists x\varphi(x)$ consiste en un objeto $a \in D$ y una construcción de $\varphi(a)$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Un juicio es una expresión de la forma $\Gamma \vdash \varphi$, donde $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto finito de fórmulas, y se lee "Γ prueba a φ".

Sistema de deducción natural

Un juicio es una expresión de la forma $\Gamma \vdash \varphi$, donde $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto finito de fórmulas, y se lee "Γ prueba a φ".

Notación: en la parte izquierda de los juicios, se escribe:

- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ en lugar de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.
- Γ, φ en lugar de $\Gamma \cup \varphi$.
- Γ, Δ en lugar de $\Gamma \cup \Delta$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, se omite Γ.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Sistema de deducción natural

Un juicio es una expresión de la forma $\Gamma \vdash \varphi$, donde $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto finito de fórmulas, y se lee "Γ prueba a φ".

Notación: en la parte izquierda de los juicios, se escribe:

- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ en lugar de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.
- Γ, φ en lugar de $\Gamma \cup \varphi$.
- Γ, Δ en lugar de $\Gamma \cup \Delta$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, se omite Γ.

En un sistema de deducción natural (con hipótesis, o con "estilo de cálculo de secuentes"), los axiomas son juicios y las reglas permiten derivar juicios a partir de otros juicios.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Axiomas y reglas para la lógica proposicional intuicionista (sistema NJ($\supset$, $\perp$, $\wedge$, $\vee$) o simplemente NJ):

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi \text{ (Ax)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \supset \psi} (\supset\mathsf{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \supset \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\supset\mathsf{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} (\wedge\mathsf{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} (\wedge\mathsf{E}_1) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\wedge\mathsf{E}_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} (\vee\mathsf{I}_1) \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} (\vee\mathsf{I}_2) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} (\vee\mathsf{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} (\perp\mathsf{E})$$

Reglas para cuantificadores (la extensión de NJ con estas reglas será denotada NJQ):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}\ (\forall\mathsf{I}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[x := t]}\ (\forall\mathsf{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}\ (\exists\mathsf{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\exists\mathsf{E})$$

Condiciones:

- En (∀I): $x \notin FV(\Gamma)$.
- En (∀E) y (∃I): t es libre para x en φ.
- En (∃E): $x \notin FV(\Gamma \cup \{\psi\})$.

Donde $FV(\star)$ denota el conjunto de las variables libres en $\star$:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Definición 27

Una prueba (o derivación) formal de un juicio $\Gamma \vdash \varphi$, en un sistema de deducción natural N, es un árbol finito de juicios que satisface las siguientes condiciones:

- La raiz del árbol es $\Gamma \vdash \varphi$.
- Todas las ramas del árbol son axiomas de N.
- La etiqueta de cada nodo madre se obtiene de las etiquetas de los nodos hijos usando una de las reglas de N.

Si existe una prueba de $\Gamma \vdash \varphi$ en el sistema N se escribe $\Gamma \vdash_N \varphi$. Para un conjunto infinito Γ, se escribe $\Gamma \vdash_N \varphi$ para expresar que existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \vdash_N \varphi$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Definición 27

Una prueba (o derivación) formal de un juicio $\Gamma \vdash \varphi$, en un sistema de deducción natural N, es un árbol finito de juicios que satisface las siguientes condiciones:

- La raiz del árbol es $\Gamma \vdash \varphi$.
- Todas las ramas del árbol son axiomas de N.
- La etiqueta de cada nodo madre se obtiene de las etiquetas de los nodos hijos usando una de las reglas de N.

Si existe una prueba de $\Gamma \vdash \varphi$ en el sistema N se escribe $\Gamma \vdash_N \varphi$. Para un conjunto infinito Γ, se escribe $\Gamma \vdash_N \varphi$ para expresar que existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \vdash_N \varphi$.

Observación: Es usual omitir el subíndice en $\vdash_N$, para no sobrecargar la notación.

Sistema de deducción natural

Proposición 1

1. $\vdash (\alpha \supset (\beta \supset \delta)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \delta))$.
2. $\alpha \supset \beta, \beta \supset \delta \vdash \alpha \supset \delta$.
3. $\alpha \wedge (\beta \vee \delta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \delta)$.
4. $\vdash \forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\exists x(\alpha) \supset \beta)$, *si* x *no aparece libre en* β.

Semántica de Kripke

Se presenta primero la semántica de Kripke para la lógica proposicional intuicionista, donde se supone que V es el conjunto de variables proposicionales.

Semántica de Kripke

Se presenta primero la semántica de Kripke para la lógica proposicional intuicionista, donde se supone que V es el conjunto de variables proposicionales.

Definición 28

Un modelo de Kripke es una estructura $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$, donde:

- C es un conjunto no vacío, cuyos elementos son llamados estados o mundos posibles.
- $\leq$ es un orden parcial en C y es llamada relación de accesibilidad.
- $\Vdash$ es una relación binaria de C en V que satisface la siguiente condición de monotonicidad:

$$\text{Si } c \leq c' \text{ y } c \Vdash p \text{ entonces } c' \Vdash p.$$

$\Vdash$ es llamada relación de forzamiento, y si $c \Vdash p$ se dice que c fuerza a p.

La relación de forzamiento se extiende a todas las fórmulas así:

Definición 29

Si $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$ es un modelo de Kripke, entonces:

- $c \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y solo si $c \Vdash \varphi$ y $c \Vdash \psi$.
- $c \Vdash \varphi \vee \psi$ si y solo si $c \Vdash \varphi$ o $c \Vdash \psi$.
- $c \Vdash \varphi \supset \psi$ si y solo si $c' \Vdash \psi$ para todo $c' \geq c$ tal que $c \Vdash \varphi$.
- $c \nVdash \bot$.

Semántica de Kripke

La relación de forzamiento se extiende a todas las fórmulas así:

Definición 29

Si $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$ es un modelo de Kripke, entonces:

- $c \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y solo si $c \Vdash \varphi$ y $c \Vdash \psi$.
- $c \Vdash \varphi \vee \psi$ si y solo si $c \Vdash \varphi$ o $c \Vdash \psi$.
- $c \Vdash \varphi \supset \psi$ si y solo si $c' \Vdash \psi$ para todo $c' \geq c$ tal que $c \Vdash \varphi$.
- $c \nVdash \perp$.

Observación: Por la definición de la negación intuicionista, $c \Vdash \neg\varphi$ si y solo si $c' \nVdash \varphi$ para todo $c' \geq c$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Semántica de Kripke

La relación de forzamiento se extiende a todas las fórmulas así:

Definición 29

Si $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$ es un modelo de Kripke, entonces:

- $c \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y solo si $c \Vdash \varphi$ y $c \Vdash \psi$.
- $c \Vdash \varphi \vee \psi$ si y solo si $c \Vdash \varphi$ o $c \Vdash \psi$.
- $c \Vdash \varphi \supset \psi$ si y solo si $c' \Vdash \psi$ para todo $c' \geq c$ tal que $c \Vdash \varphi$.
- $c \nVdash \perp$.

Observación: Por la definición de la negación intuicionista, $c \Vdash \neg\varphi$ si y solo si $c' \nVdash \varphi$ para todo $c' \geq c$.

Lema 15

Si $c \leq c'$ *y* $c \Vdash \varphi$ *entonces* $c' \Vdash \varphi$.

Semántica de Kripke

Las ideas intuitivas en la semántica de Kripke para IL son:

- Los estados representan estados de conocimiento.

Semántica de Kripke

Las ideas intuitivas en la semántica de Kripke para IL son:

- Los estados representan estados de conocimiento.
- Las proposiciones forzadas en un estado son las proposiciones cuya verdad es conocida en dicho estado de conocimiento.

Semántica de Kripke

Las ideas intuitivas en la semántica de Kripke para IL son:

- Los estados representan estados de conocimiento.
- Las proposiciones forzadas en un estado son las proposiciones cuya verdad es conocida en dicho estado de conocimiento.
- La relación de accesibilidad establece las posibles variaciones (o progreso) en los estados de conocimiento.

Semántica de Kripke

Las ideas intuitivas en la semántica de Kripke para IL son:

- Los estados representan estados de conocimiento.
- Las proposiciones forzadas en un estado son las proposiciones cuya verdad es conocida en dicho estado de conocimiento.
- La relación de accesibilidad establece las posibles variaciones (o progreso) en los estados de conocimiento.
- La condición de monotonicidad establece que las verdades conocidas nunca se olvidan.

Notación:

- Se escribe $\mathcal{C}, c \Vdash \varphi$ para indicar que $c \Vdash \varphi$ en el modelo $\mathcal{C}$.
- Se escribe $\mathcal{C}, c \Vdash \Gamma$ para indicar que $\mathcal{C}, c \Vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Notación:

- Se escribe $\mathcal{C}, c \Vdash \varphi$ para indicar que $c \Vdash \varphi$ en el modelo $\mathcal{C}$.
- Se escribe $\mathcal{C}, c \Vdash \Gamma$ para indicar que $\mathcal{C}, c \Vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Definición 30 (Relación de consecuencia semántica)

Una fórmula φ se sigue semántica de un conjunto de fórmulas Γ, lo que se denota $\Gamma \Vdash \varphi$, si para todo modelo de Kripke $\mathcal{C}$ y todo $c \in C$ se tiene que si $\mathcal{C}, c \Vdash \Gamma$ entonces $\mathcal{C}, c \Vdash \varphi$.

Notación:

- Se escribe $\mathcal{C}, c \Vdash \varphi$ para indicar que $c \Vdash \varphi$ en el modelo $\mathcal{C}$.
- Se escribe $\mathcal{C}, c \Vdash \Gamma$ para indicar que $\mathcal{C}, c \Vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Definición 30 (Relación de consecuencia semántica)

Una fórmula φ se sigue semántica de un conjunto de fórmulas Γ, lo que se denota $\Gamma \Vdash \varphi$, si para todo modelo de Kripke $\mathcal{C}$ y todo $c \in C$ se tiene que si $\mathcal{C}, c \Vdash \Gamma$ entonces $\mathcal{C}, c \Vdash \varphi$.

Teorema 5

$\Gamma \vdash \varphi$ *si y solo si* $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demostración.

Ver [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Teorema 2.5.9]. □

Proposición 2

- $\nvdash p \vee \neg p$.
- $\nvdash \neg\neg p \supset p$.
- $\vdash p \supset \neg\neg p$.
- $\nvdash ((p \supset q) \supset p) \supset p$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Proposición 2

- $\nvdash p \vee \neg p$.
- $\nvdash \neg\neg p \supset p$.
- $\vdash p \supset \neg\neg p$.
- $\nvdash ((p \supset q) \supset p) \supset p$.

Teorema 6 (Propiedad de la disyunción)

Si $\vdash \varphi \vee \psi$, *entonces* $\vdash \varphi$ *o* $\vdash \psi$.

Definición 31

Tomando fórmulas que contienen solo el conectivo $\supset$, el fragmento implicativo de NJ, denotado NJ($\supset$), es el sistema de deducción natural solo con (Ax), ($\supset$I) y ($\supset$E).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Definición 31

Tomando fórmulas que contienen solo el conectivo $\supset$, el fragmento implicativo de NJ, denotado NJ($\supset$), es el sistema de deducción natural solo con (Ax), ($\supset$I) y ($\supset$E).

Teorema 7

Para el fragmento implicativo de NJ, se tiene que $\Gamma \vdash \varphi$ *si y solo si* $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demostración.

Ver [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Teorema 2.6.1]. $\square$

Semántica de Kripke

En la semántica de Kripke para la lógica intuicionista de primer orden, en cada estado las fórmulas se interpretan bajo la noción clásica de modelo. Los modelos pueden cambiar de un estado a otro, adicionando nuevos elementos al dominio o aceptando nuevas proposiciones atómicas, lo que refleja el progreso en el conocimiento.

En la semántica de Kripke para la lógica intuicionista de primer orden, en cada estado las fórmulas se interpretan bajo la noción clásica de modelo. Los modelos pueden cambiar de un estado a otro, adicionando nuevos elementos al dominio o aceptando nuevas proposiciones atómicas, lo que refleja el progreso en el conocimiento.

Definición 32

Una estructura $\mathcal{B} = \langle B, f_1^{\mathcal{B}}, \ldots, f_n^{\mathcal{B}}, r_1^{\mathcal{B}}, \ldots, r_m^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, \ldots, c_l^{\mathcal{B}} \rangle$ es una extensión de $\mathcal{A} = \langle A, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_n^{\mathcal{A}}, r_1^{\mathcal{A}}, \ldots, r_m^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_l^{\mathcal{A}} \rangle$, lo que se denota $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, si:

- $A \subseteq B$.
- $f_i^{\mathcal{A}} \subseteq f_i^{\mathcal{B}}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $r_i^{\mathcal{A}} \subseteq r_i^{\mathcal{B}}$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.
- $c_i^{\mathcal{A}} = c_i^{\mathcal{B}}$, para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Semántica de Kripke

Definición 33

Un modelo de Kripke (para un lenguaje de primer orden) es una estructura $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \{\mathcal{A}_c : c \in C\}\rangle$, donde:

- C es un conjunto no vacío de estados.
- $\leq$ es un orden parcial en C y es llamada relación de accesibilidad.
- Los $\mathcal{A}_c$ son modelos clásicos que satisfacen la siguiente condición de monotonicidad:

  si $c \leq c'$ entonces $\mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}_{c'}$.

Semántica de Kripke

Definición 34

Dado un modelo de Kripke $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \{\mathcal{A}_c : c \in C\}\rangle$, la relación de forzamiento en un estado $c \in \mathcal{C}$ y bajo una evaluación e (que asigna objetos del dominio de $\mathcal{A}_c$ a variables) se define así:

- $c, e \Vdash rt_1 \ldots t_n$ si y solo $\mathcal{A}_c, e \Vdash rt_1 \ldots t_n$ (clásicamente).
- $c, e \nVdash \bot$.
- $c, e \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y solo si $c, e \Vdash \varphi$ y $c, e \Vdash \psi$.
- $c, e \Vdash \varphi \vee \psi$ si y solo si $c, e \Vdash \varphi$ o $c, e \Vdash \psi$.
- $c, e \Vdash \varphi \supset \psi$ si y solo si $c', e \Vdash \psi$ para todo $c' \geq c$ tal que $c', e \Vdash \varphi$.
- $c, e \Vdash \exists x \varphi$ si y solo si $c, e(x \mapsto a) \Vdash \varphi$ para algún a en el dominio de $\mathcal{A}_c$.
- $c, e \Vdash \forall x \varphi$ si y solo si $c', e(x \mapsto a) \Vdash \varphi$ para todo $c' \geq c$ y todo a en el dominio de $\mathcal{A}_{c'}$.

Definición 35 (Relación de consecuencia semántica)

Una fórmula φ se sigue semántica de un conjunto de fórmulas Γ, lo que se denota $\Gamma \Vdash \varphi$, si para todo modelo de Kripke $\mathcal{C}$, todo $c \in C$ y toda evaluación e se tiene que si $\mathcal{C}, c, e \Vdash \Gamma$ entonces $\mathcal{C}, c, e \Vdash \varphi$.

Definición 35 (Relación de consecuencia semántica)

Una fórmula φ se sigue semántica de un conjunto de fórmulas Γ, lo que se denota $\Gamma \Vdash \varphi$, si para todo modelo de Kripke $\mathcal{C}$, todo $c \in C$ y toda evaluación e se tiene que si $\mathcal{C}, c, e \Vdash \Gamma$ entonces $\mathcal{C}, c, e \Vdash \varphi$.

Teorema 8

$\Gamma \vdash \varphi$ *si y solo si* $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demostración.

Ver [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Teorema 8.6.7]. □

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Semántica de Kripke

Definición 35 (Relación de consecuencia semántica)

Una fórmula φ se sigue semántica de un conjunto de fórmulas Γ, lo que se denota $\Gamma \Vdash \varphi$, si para todo modelo de Kripke $\mathcal{C}$, todo $c \in C$ y toda evaluación e se tiene que si $\mathcal{C}, c, e \Vdash \Gamma$ entonces $\mathcal{C}, c, e \Vdash \varphi$.

Teorema 8

$\Gamma \vdash \varphi$ *si y solo si* $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demostración.

Ver [Sørensen and Urzyczyn, 2006, Teorema 8.6.7]. □

Proposición 3

$\nvdash (\neg\forall x \neg\varphi) \supset (\exists x \varphi)$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Índice

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Correspondencia de Curry-Howard

Referencia usada en esta sección: [Sørensen and Urzyczyn, 2006] (con algunos cambios de notación).

Correspondencia de Curry-Howard

Referencia usada en esta sección: [Sørensen and Urzyczyn, 2006] (con algunos cambios de notación).

Se usan las expresiones isomorfismo de Curry-Howard, correspondencia Curry-Howard, correspondencia de proposiciones como tipos, entre otras, para hacer referencia a teoremas que muestran equivalencias entre derivaciones en un sistema de tipos y derivaciones en un sistema lógico, bajo una cierta interpretación de fórmulas lógicas como siendo tipos.

Correspondencia de Curry-Howard

Referencia usada en esta sección: [Sørensen and Urzyczyn, 2006] (con algunos cambios de notación).

Se usan las expresiones isomorfismo de Curry-Howard, correspondencia Curry-Howard, correspondencia de proposiciones como tipos, entre otras, para hacer referencia a teoremas que muestran equivalencias entre derivaciones en un sistema de tipos y derivaciones en un sistema lógico, bajo una cierta interpretación de fórmulas lógicas como siendo tipos.

En 1958, Haskell Curry estableció la correspondencia entre al cálculo lambda simplemente tipificado y el fragmento implicativo de la lógica intuicionista. William A. Howard y Nicolaas G. de Bruijn extendieron dicha correspondencia a la lógica de predicados de primer orden.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

En las siguientes definiciones, se supone que el conjunto de variables y el conjunto de variables de tipos es el mismo conjunto V.

En las siguientes definiciones, se supone que el conjunto de variables y el conjunto de variables de tipos es el mismo conjunto V.

Definición 36

La función de interpretación $|\cdot|$, de fórmulas del fragmento implicativo de IL en tipos de $\lambda{\to}$, se define inductivamente por:

$$|p| = p, \text{ para } p \in V;$$
$$|(\alpha \supset \beta)| = (|\alpha| \to |\beta|).$$

Correspondencia de Curry-Howard

En las siguientes definiciones, se supone que el conjunto de variables y el conjunto de variables de tipos es el mismo conjunto V.

Definición 36

La función de interpretación $|\cdot|$, de fórmulas del fragmento implicativo de IL en tipos de $\lambda{\rightarrow}$, se define inductivamente por:

$$|p| = p, \text{ para } p \in V;$$
$$|(\alpha \supset \beta)| = (|\alpha| \to |\beta|).$$

Definición 37

La función inversa a $|\cdot|$, denotada $|\cdot|^{-1}$, se define inductivamente por:

$$|p|^{-1} = p, \text{ para } p \in V;$$
$$|(\alpha \to \beta)|^{-1} = (|\alpha|^{-1} \supset |\beta|^{-1}).$$

Correspondencia de Curry-Howard

Notación:

- Para un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, se usará $|\Gamma|$ para denotar el contexto $\{x_1 : |\varphi_1|, \ldots, x_n : |\varphi_n|\}$.
- Para un contexto $\Gamma = \{x_1 : \varphi_1, \ldots, x_n : \varphi_n\}$, se usará $|\Gamma|^{-1}$ para denotar el conjunto de fórmulas $\{|\varphi_1|^{-1}, \ldots, |\varphi_n|^{-1}\}$.

Correspondencia de Curry-Howard

Notación:

- Para un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, se usará $|\Gamma|$ para denotar el contexto $\{x_1 : |\varphi_1|, \ldots, x_n : |\varphi_n|\}$.
- Para un contexto $\Gamma = \{x_1 : \varphi_1, \ldots, x_n : \varphi_n\}$, se usará $|\Gamma|^{-1}$ para denotar el conjunto de fórmulas $\{|\varphi_1|^{-1}, \ldots, |\varphi_n|^{-1}\}$.

Teorema 9 (Correspondencia Curry-Howard para el fragmento implicativo de IL)

1. *Si* $\Gamma \vdash \varphi$ *en NJ($\supset$), entonces* $|\Gamma| \vdash M : |\varphi|$ *en* $\lambda\!\rightarrow$, *para algún término* M.
2. *Si* $\Gamma \vdash M : \varphi$ *en* $\lambda\!\rightarrow$, *entonces* $|\Gamma|^{-1} \vdash |\varphi|^{-1}$ *en NJ($\supset$).*

Correspondencia de Curry-Howard

Notación:

- Para un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, se usará $|\Gamma|$ para denotar el contexto $\{x_1 : |\varphi_1|, \ldots, x_n : |\varphi_n|\}$.
- Para un contexto $\Gamma = \{x_1 : \varphi_1, \ldots, x_n : \varphi_n\}$, se usará $|\Gamma|^{-1}$ para denotar el conjunto de fórmulas $\{|\varphi_1|^{-1}, \ldots, |\varphi_n|^{-1}\}$.

Teorema 9 (Correspondencia Curry-Howard para el fragmento implicativo de IL)

1. *Si* $\Gamma \vdash \varphi$ *en NJ(*$\supset$*), entonces* $|\Gamma| \vdash M : |\varphi|$ *en* $\lambda\!\to$*, para algún término* M*.*
2. *Si* $\Gamma \vdash M : \varphi$ *en* $\lambda\!\to$*, entonces* $|\Gamma|^{-1} \vdash |\varphi|^{-1}$ *en NJ(*$\supset$*).*

Observación: Bajo la correspondencia Curry-Howard los términos del cálculo lambda codifican demostraciones.

Correspondencia de Curry-Howard

En teoría de la demostración, un rodeo consiste en una regla de introducción seguida de una regla de eliminación aplicada a la misma fórmula introducida. La normalización de una demostración consiste en eliminar los rodeos.

En teoría de la demostración, un rodeo consiste en una regla de introducción seguida de una regla de eliminación aplicada a la misma fórmula introducida. La normalización de una demostración consiste en eliminar los rodeos.

El formato general de un rodeo en NJ($\supset$) es:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \supset \psi}\supset\mathsf{I}}{\Gamma \vdash \psi}\supset\mathsf{E}$$

En formato estándar de deducción natural:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}(*)\\ \vdots \\ \varphi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \supset \psi}\,\supset\mathsf{I}}{\psi}\,\supset\mathsf{E}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c}(*)\\ \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ \psi\end{array}
$$

Correspondencia de Curry-Howard

En formato estándar de deducción natural:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(*)\\ \vdots\\ \varphi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi\supset\psi}\supset\mathsf{I}}{\psi}\supset\mathsf{E} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{array}{c}(*)\\ \vdots\\ \varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

En el sistema de tipos simples (β-reducción corresponde a eliminación de rodeos):

$$\dfrac{\begin{array}{c}(*)\\ \vdots\\ M:\varphi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[x:\varphi]\\ \vdots \\ N:\psi\end{array}}{\lambda x:\varphi.N:\varphi\to\psi}\supset\mathsf{I}}{(\lambda x:\varphi.N)M:\psi}\supset\mathsf{E} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{array}{c}(*)\\ \vdots\\ M:\varphi\\ \vdots\\ N[x:=M]:\psi\end{array}$$

Para ampliar la correspondencia de Curry-Howard a la lógica de proposicional intuicionista, se extiende el cálculo lambda simplemente tipificado con productos, sumas (o uniones disyuntas) y el tipo vacío:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi \qquad \Gamma \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \varphi \times \psi}\ (\mathsf{Prod})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi \times \psi}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \varphi}\ (\mathsf{Proj}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \varphi \times \psi}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \psi}\ (\mathsf{Proj}_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi}{\Gamma \vdash \mathsf{in}_1^{\varphi+\psi}(M) : \varphi + \psi}\ (\mathsf{Inj}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \psi}{\Gamma \vdash \mathsf{in}_2^{\varphi+\psi}(M) : \varphi + \psi}\ (\mathsf{Inj}_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash L : \varphi + \psi \qquad \Gamma, x : \varphi \vdash M : \theta \qquad \Gamma, y : \psi \vdash N : \theta}{\Gamma \vdash (\mathsf{case}\ L\ \mathsf{of}\ [x]M\ \mathsf{or}\ [y]N) : \theta}\ (\mathsf{Case})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \emptyset}{\Gamma \vdash \epsilon_{\varphi}(M) : \varphi}\ (\text{Emp})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \emptyset}{\Gamma \vdash \epsilon_\varphi(M) : \varphi} \text{ (Emp)}$$

Para los nuevos λ-términos, se adicionan las siguientes β-reducciones:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\langle M, N\rangle) &\to_\beta M, \\
\pi_2(\langle M, N\rangle) &\to_\beta N, \\
\text{case in}_1^{\varphi+\psi}(M) \text{ of } [x]P \text{ or } [y]Q &\to_\beta P[x := M], \\
\text{case in}_2^{\varphi+\psi}(M) \text{ of } [x]P \text{ or } [y]Q &\to_\beta Q[y := M].
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

$$\frac{\Gamma \vdash M : \emptyset}{\Gamma \vdash \epsilon_\varphi(M) : \varphi} \text{ (Emp)}$$

Para los nuevos λ-términos, se adicionan las siguientes β-reducciones:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\langle M, N\rangle) &\to_\beta M,\\
\pi_2(\langle M, N\rangle) &\to_\beta N,\\
\text{case in}_1^{\varphi+\psi}(M) \text{ of } [x]P \text{ or } [y]Q &\to_\beta P[x := M],\\
\text{case in}_2^{\varphi+\psi}(M) \text{ of } [x]P \text{ or } [y]Q &\to_\beta Q[y := M].
\end{aligned}$$

Observación: Los superíndices en los términos $\text{in}_i^{\varphi+\psi}$ son usualmente omitidos, aunque son necesarios para asegurar la unicidad de tipos.

Las funciones para interpretar fórmulas como tipos y viceversa se extienden así:

Definición 38

La función de interpretación $|\cdot|$, de fórmulas de la lógica proposicional intuicionista en el sistema de tipos simples extendido, se define inductivamente por:

$$
\begin{aligned}
|p| &= p, \text{ para } p \in V;\\
|(\alpha \supset \beta)| &= (|\alpha| \to |\beta|);\\
|(\alpha \wedge \beta)| &= (|\alpha| \times |\beta|);\\
|(\alpha \vee \beta)| &= (|\alpha| + |\beta|);\\
|\bot| &= \emptyset.
\end{aligned}
$$

Definición 39

La función inversa a $|\cdot|$, denotada $|\cdot|^{-1}$, se define inductivamente por:

$$
\begin{aligned}
|p|^{-1} &= p, \text{ para } p \in V; \\
|(\alpha \to \beta)|^{-1} &= (|\alpha|^{-1} \supset |\beta|^{-1}); \\
|(\alpha \times \beta)|^{-1} &= (|\alpha|^{-1} \wedge |\beta|^{-1}); \\
|(\alpha + \beta)|^{-1} &= (|\alpha|^{-1} \vee |\beta|^{-1}); \\
|\emptyset|^{-1} &= \bot.
\end{aligned}
$$

Correspondencia de Curry-Howard

Definición 39

La función inversa a $|\cdot|$, denotada $|\cdot|^{-1}$, se define inductivamente por:

$$
\begin{aligned}
|p|^{-1} &= p, \text{ para } p \in V; \\
|(\alpha \to \beta)|^{-1} &= (|\alpha|^{-1} \supset |\beta|^{-1}); \\
|(\alpha \times \beta)|^{-1} &= (|\alpha|^{-1} \wedge |\beta|^{-1}); \\
|(\alpha + \beta)|^{-1} &= (|\alpha|^{-1} \vee |\beta|^{-1}); \\
|\emptyset|^{-1} &= \perp.
\end{aligned}
$$

Teorema 10 (Correspondencia Curry-Howard para la lógica proposicional intuicionista)

1. *Si* $\Gamma \vdash \varphi$ *en NJ, entonces* $|\Gamma| \vdash M : |\varphi|$ *en* $\lambda\!\to$ *extendido, para algún término* M.
2. *Si* $\Gamma \vdash M : \varphi$ *en* $\lambda\!\to$ *extendido, entonces* $|\Gamma|^{-1} \vdash |\varphi|^{-1}$ *en NJ.*

Índice

Referencias bibliográficas

Barendregt, H. (1992).
Lambda calculi with types.
In Abramsky, S., Gabbay, D. M., and Maibaum, T. S. E., editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 2, pages 117–309. Clarendon Press.

Barendregt, H. and Barendsen, E. (Revised edition, march 2000).
Introduction to lambda calculus.

Nederpelt, R. and Geuvers, H. (2014).
Type Theory and Formal Proof. An Introduction.
Cambridge University Press.

Sørensen, M. H. and Urzyczyn, P. (2006).
Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, volume 149 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*.
Elsevier.