Definiciones Inductivas

Kevin Mateo Cárdenas Gallego

Asesor: Juan Carlos Agudelo

Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia

Tabla de contenido

Contexto Histórico

- La teoría de tipos surge como una respuesta a las paradojas encontradas en las matemáticas y la lógica a finales del siglo XIX y principios del XX, en particular, la paradoja de Russell. Esta paradoja demostraba que la teoría de conjuntos, como se conocía, podía conducir a contradicciones.

Contexto Histórico

- La teoría de tipos surge como una respuesta a las paradojas encontradas en las matemáticas y la lógica a finales del siglo XIX y principios del XX, en particular, la paradoja de Russell. Esta paradoja demostraba que la teoría de conjuntos, como se conocía, podía conducir a contradicciones.
- Bertrand Russell introdujo la teoría de tipos en 1908 para superar estas paradojas. En su obra, *Principia Mathematica*, coescrita con Alfred North Whitehead, Russell propuso que los elementos de cualquier conjunto deberían ser de un tipo diferente al conjunto mismo, evitando así la formación de conjuntos autorreferenciales.

- La teoría de tipos surge como una respuesta a las paradojas encontradas en las matemáticas y la lógica a finales del siglo XIX y principios del XX, en particular, la paradoja de Russell. Esta paradoja demostraba que la teoría de conjuntos, como se conocía, podía conducir a contradicciones.
- Bertrand Russell introdujo la teoría de tipos en 1908 para superar estas paradojas. En su obra, *Principia Mathematica*, coescrita con Alfred North Whitehead, Russell propuso que los elementos de cualquier conjunto deberían ser de un tipo diferente al conjunto mismo, evitando así la formación de conjuntos autorreferenciales.
- La teoría de tipos experimentó una evolución significativa a lo largo del siglo XX. En la década de 1970, Per Martin-Löf introdujo la teoría de tipos intuicionista, que incorporaba principios de la lógica constructivista y tenía implicaciones profundas tanto para las matemáticas como para la informática, especialmente en el diseño de lenguajes de programación y sistemas de prueba formal.

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (El conjunto de listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado un conjunto A, el conjunto $Finlist(A)$ es el menor conjunto tal que:

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (El conjunto de listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado un conjunto A, el conjunto $Finlist(A)$ es el menor conjunto tal que:

1. $nill \in Finlist(A)$.

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (El conjunto de listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado un conjunto A, el conjunto $Finlist(A)$ es el menor conjunto tal que:

1. $nill \in Finlist(A)$.
2. Si $S \in Finlist(A)$ y $a \in A$, entonces $\langle a \rangle \cdot S \in Finlist(A)$.

Tabla de contenido

Definición (Reglas, conjunto $\phi-$cerrado)

1. Una *regla* es un par (X, x), donde X es un conjunto, llamado *conjunto de premisas*, y x es la *conclusión*.

Definición (Reglas, conjunto $\phi-$cerrado)

1. Una *regla* es un par (X, x), donde X es un conjunto, llamado *conjunto de premisas*, y x es la *conclusión*.
2. Si ϕ es un conjunto de reglas, entonces un conjunto A es $\phi - cerrado$ si para toda regla $(X, x) \in \phi$ si se tiene que $X \subseteq A$ implica $x \in A$.

Definición (Reglas, conjunto $\phi-$cerrado)

1. Una *regla* es un par (X, x), donde X es un conjunto, llamado *conjunto de premisas*, y x es la *conclusión*.
2. Si ϕ es un conjunto de reglas, entonces un conjunto A es $\phi - cerrado$ si para toda regla $(X, x) \in \phi$ si se tiene que $X \subseteq A$ implica $x \in A$.
3. Dado ϕ un conjunto de reglas, se define $I(\phi)$ *como el conjunto inductivamente definido por* ϕ, dado por:

$$I(\phi) = \bigcap \{A : A \ \ \phi{-}cerrado\}.$$

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un conjunto de reglas)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se puede definir como un conjunto inductivamente definido a partir de un conjunto de reglas ϕ dado por:

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un conjunto de reglas)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se puede definir como un conjunto inductivamente definido a partir de un conjunto de reglas ϕ dado por:

1. $(\emptyset, 0) \in \phi$.

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un conjunto de reglas)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se puede definir como un conjunto inductivamente definido a partir de un conjunto de reglas ϕ dado por:

1. $(\emptyset, 0) \in \phi$.
2. $(\{n\}, s(n)) \in \phi$.

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado V un conjunto de variables proposicionales, sea ϕ el conjunto con las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, p_i)$ para cada $p_i \in V$.

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado V un conjunto de variables proposicionales, sea ϕ el conjunto con las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, p_i)$ para cada $p_i \in V$.
2. $(\{A\}, \neg A)$.
3. $(\{A, B\}, (A \vee B))$.
4. $(\{A, B\}, (A \wedge B))$.
5. $(\{A, B\}, (A \rightarrow B))$.
6. $(\{A, B\}, (A \leftrightarrow B))$.

Ejemplo ($Finlist(A)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado un conjunto A, y ϕ el conjunto que contiene las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, nill)$.

Ejemplo ($Finlist(A)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado un conjunto A, y ϕ el conjunto que contiene las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, nill)$.
2. $(\{S\}, \langle a \rangle \cdot S)$, donde $a \in A$.

Ejemplo ($Finlist(A)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado un conjunto A, y ϕ el conjunto que contiene las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, nill)$.
2. $(\{S\}, \langle a\rangle \cdot S)$, donde $a \in A$.

Teorema (Demostraciones por inducción)

Sea A un conjunto inductivamente definido a partir de un conjunto de reglas ϕ, y una propiedad sobre este

$$\varphi : A \to \{true, false\}.$$

Demostrar que $\varphi^{-1}(\{true\}) = A$, se reduce a demostrar que

$$\varphi^{-1}(\{true\}) \text{ es } \phi\text{-cerrado.}$$

Tabla de contenido

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.
- Los *puntos pre-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) \leq x$. De manera similar, los *puntos post-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $x \leq f(x)$.

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.
- Los *puntos pre-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) \leq x$. De manera similar, los *puntos post-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $x \leq f(x)$.
- Los *puntos fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) = x$.

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.
- Los *puntos pre-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) \leq x$. De manera similar, los *puntos post-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $x \leq f(x)$.
- Los *puntos fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) = x$.

Definición (Retículo completo)

Un retículo completo es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ en el que todos los subconjuntos tienen supremo.

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.
- Los *puntos pre-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) \leq x$. De manera similar, los *puntos post-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $x \leq f(x)$.
- Los *puntos fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) = x$.

Definición (Retículo completo)

Un retículo completo es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ en el que todos los subconjuntos tienen supremo.

Definición (Conjuntos definidos inductivamente)

- Sea L un retículo completo cuyos puntos son conjuntos, ordenado bajo la relación de inclusión, y $F : L \to L$ un operador monótono sobre L.

Definición (Conjuntos definidos inductivamente)

- Sea L un retículo completo cuyos puntos son conjuntos, ordenado bajo la relación de inclusión, y $F : L \to L$ un operador monótono sobre L.

  El conjunto definido inductivamente por F es el conjunto:

$$F_{ind} = \bigcap \{x \quad : F(x) \subseteq x\}.$$

Definición (Conjuntos definidos inductivamente)

- Sea L un retículo completo cuyos puntos son conjuntos, ordenado bajo la relación de inclusión, y $F : L \to L$ un operador monótono sobre L.

  El conjunto definido inductivamente por F es el conjunto:

$$F_{ind} = \bigcap \{x \quad : F(x) \subseteq x\}.$$

Teorema (De operadores monótonos a conjuntos de reglas)

Sean A un conjunto, $(L, \subseteq)$ un retículo completo, con $L \subseteq P(A)$, $F : L \to L$ un operador monótono sobre L, entonces existe un conjunto de reglas ϕ tal que $F_{ind} = I(\phi)$.

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un operador monótono)

Sea X el conjunto de cadenas finitas o infinitas de elementos en el alfabeto $\{0, s, (,)\}$, sea $\varphi : P(X) \longrightarrow P(X)$ definido por:

$$\varphi(T) = \{0\} \cup \{s(x) \quad : \quad x \in T\}.$$

Se tiene que los naturales se pueden definir como $\mathbb{N} = \bigcap\{x \quad : \varphi(x) \subseteq x\}$.

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un operador monótono)

Sea X el conjunto de cadenas finitas o infinitas de elementos en el alfabeto $\{0, s, (,)\}$, sea $\varphi : P(X) \longrightarrow P(X)$ definido por:

$$\varphi(T) = \{0\} \cup \{s(x) \quad : \quad x \in T\}.$$

Se tiene que los naturales se pueden definir como $\mathbb{N} = \bigcap\{x \quad : \varphi(x) \subseteq x\}$.

Ejemplo ($FinList_A$ a partir de un operador monótono)

Sea X el conjunto de todas las cadenas finitas o infinitas con elementos del alfabeto $A \cup \{nill, \cdot, \rangle, \langle\}$, $(P(X), \subseteq)$ el retículo, y el operador correspondiente φ_{L_A} es:

$$\varphi_{L_A}(T) = \{nill\} \cup \{\langle a\rangle \cdot s \quad : a \in A \wedge s \in T\}.$$

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un operador monótono)

Dado un conjunto de variables proposicionales

$$V = \{p_1, p_2, ...\}.$$

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un operador monótono)

Dado un conjunto de variables proposicionales

$$V = \{p_1, p_2, ...\}.$$

X el conjunto de todas las cadenas finitas o infinitas con elementos del alfabeto $V \cup \{\vee, \neg, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$, el retículo:

$$(P(X), \subseteq).$$

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un operador monótono)

Dado un conjunto de variables proposicionales

$$V = \{p_1, p_2, ...\}.$$

X el conjunto de todas las cadenas finitas o infinitas con elementos del alfabeto $V \cup \{\vee, \neg, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$, el retículo:

$$(P(X), \subseteq).$$

Y el operador correspondiente φ es:

$$\begin{aligned}\varphi(T) = V \cup \{(A\#B) \quad &: (A, B \in T) \wedge (\# \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\})\} \\ \cup \{\neg A \quad &: A \in T\}\end{aligned}$$

Tabla de contenido

Definición (Expresiones)

Se usa notación ordinaria, pero se omite mencionar restricciones de variables.

- Expresiones de conjuntos $A ::= \Pi x : A_0 . A_1[x]$.

Definición (Expresiones)

Se usa notación ordinaria, pero se omite mencionar restricciones de variables.

- Expresiones de conjuntos $A ::= \Pi x : A_0.A_1[x]$.
- Expresiones de elementos $a ::= x \mid \lambda x : A.a[x] \mid a_1(a_0)$.

Definición (Expresiones)

Se usa notación ordinaria, pero se omite mencionar restricciones de variables.

- Expresiones de conjuntos $A ::= \Pi x : A_0.A_1[x]$.
- Expresiones de elementos $a ::= x \;\mid\; \lambda x : A.a[x] \;\mid\; a_1(a_0)$.
- Expresiones de contextos $\Gamma ::= \epsilon \;\mid\; \Gamma, x : A$.

Definición (Expresiones)

Se usa notación ordinaria, pero se omite mencionar restricciones de variables.

- Expresiones de conjuntos $A ::= \Pi x : A_0.A_1[x]$.
- Expresiones de elementos $a ::= x \mid \lambda x : A.a[x] \mid a_1(a_0)$.
- Expresiones de contextos $\Gamma ::= \epsilon \mid \Gamma, x : A$.
- Expresiones de juicios

  $$J ::= \Gamma \mid \Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash a : A \mid \Gamma \vdash A = A' \mid \Gamma \vdash a = a' : A.$$

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- Las reglas de inferencia para el sistema de tipos de Martín-Löf son las siguientes:

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- Las reglas de inferencia para el sistema de tipos de Martín-Löf son las siguientes:

$$\epsilon \quad contexto \qquad \frac{\Gamma \quad contexto \qquad \Gamma \vdash A \quad set}{\Gamma, x : A \quad contexto}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad set}{\Gamma \vdash A = A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a = a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A = A'}{\Gamma \vdash A' = A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a = a' : A}{\Gamma \vdash a' = a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A = A' \qquad \Gamma \vdash A' = A''}{\Gamma \vdash A = A''} \qquad \frac{\Gamma \vdash a = a' : A \qquad \Gamma \vdash a' = a'' : A}{\Gamma \vdash a = a'' : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A = A' \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a : A'} \qquad \frac{\Gamma \vdash A = A' \qquad \Gamma \vdash a = a' : A}{\Gamma \vdash a = a'' : A'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad set}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- Reglas de formación de tipos para el producto cartesiano de una familia de conjuntos:

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- Reglas de formación de tipos para el producto cartesiano de una familia de conjuntos:

$$\frac{\Gamma \vdash A_0 \quad set \qquad \Gamma, x : A_0 \vdash A_1[x] \quad set}{\Gamma \vdash \Pi x : A_0.A_1[x] \quad set}.$$

$$\frac{\Gamma, x : A_0 \vdash a[x] : A_1}{\Gamma \vdash \lambda x : A_0.a[x] : \Pi x : A_0.A_1[x]}.$$

$$\frac{\Gamma \vdash a_1 : \Pi x : A_0.A_1[x] \qquad \Gamma \vdash a_0 : A_0}{\Gamma \vdash a_1(a_0) : A_1[a_0]}.$$

- Reglas de igualdad de tipos para el producto cartesiano de una familia de conjuntos:

- Reglas de igualdad de tipos para el producto cartesiano de una familia de conjuntos:

$$\frac{\Gamma \vdash A_0 = A_0' \qquad \Gamma, x : A_0 \vdash A_1[x] = A_1'[x]}{\Gamma \vdash \Pi x : A_0.A_1[x] = \Pi x : A_0'.A_1'[x]}.$$

$$\frac{\Gamma, x : A_0 \vdash a[x] = a'[x] : A_1}{\Gamma \vdash \lambda x : A_0.a[x] = \lambda x : A_0.a'[x] : \Pi x : A_0.A_1[x]}.$$

$$\frac{\Gamma \vdash a_1 = a_1' : \Pi x : A_0.A_1[x] \quad \Gamma \vdash a_0 = a_0' : A_0}{\Gamma \vdash a_1(a_0) = a_1'(a_0') : A_1[a_0]}.$$

$$\frac{\Gamma.x : A_0 \vdash a_1[x] : A_1[x] \quad \Gamma \vdash a_0 : A_0}{\Gamma \vdash (\lambda x : A_0.a_1[x])(a_0) = a_1(a_0) : A_1[a_0]}.$$

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \ldots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \ldots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$.

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \dots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \dots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$.

- Se tiene la sintaxis y las reglas del λ-cálculo con tipos dependientes. Llamamos a esta teoría T_0.

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \ldots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \ldots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$.

- Se tiene la sintaxis y las reglas del λ-cálculo con tipos dependientes. Llamamos a esta teoría T_0.
- T_0 puede ser extendida sucesivamente obteniendo las teorías $T_1, T_2, \ldots$ de la siguiente manera:

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \ldots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \ldots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$.

- Se tiene la sintaxis y las reglas del λ-cálculo con tipos dependientes. Llamamos a esta teoría T_0.
- T_0 puede ser extendida sucesivamente obteniendo las teorías $T_1, T_2, \ldots$ de la siguiente manera:
- T_0 es la teoría de tipos dependientes que se acaba de definir. T_{i+1} es la teoría T_i extendida con un nuevo tipo de datos I_i.

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \ldots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \ldots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$.

- Se tiene la sintaxis y las reglas del λ-cálculo con tipos dependientes. Llamamos a esta teoría T_0.
- T_0 puede ser extendida sucesivamente obteniendo las teorías $T_1, T_2, \ldots$ de la siguiente manera:
- T_0 es la teoría de tipos dependientes que se acaba de definir. T_{i+1} es la teoría T_i extendida con un nuevo tipo de datos I_i.
- Se tiene que J abrevia $\Gamma \vdash J$, en una teoría T, para no llevar una notación tan cargada.

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de introducción i-ésima:

$$\frac{as :: Gs_i \qquad (b_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) : P}.$$

$$\frac{as = as' :: Gs_i \qquad (b_k = b'_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) = intro_i(as, (b'_k)_k) : P}.$$

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de introducción i-ésima:

$$\frac{as :: Gs_i \qquad (b_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) : P}.$$

$$\frac{as = as' :: Gs_i \qquad (b_k = b'_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) = intro_i(as, (b'_k)_k) : P}.$$

Donde

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de introducción i-ésima:

$$\frac{as :: Gs_i \qquad\qquad (b_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) : P}.$$

$$\frac{as = as' :: Gs_i \qquad\qquad (b_k = b'_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) = intro_i(as, (b\mathrm{t}'_k)_k) : P}.$$

Donde

1. Gs_i es un telescopio relativo a T;

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de introducción i-ésima:

$$\frac{as :: Gs_i \qquad (b_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) : P}.$$

$$\frac{as = as' :: Gs_i \qquad (b_k = b'_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) = intro_i(as, (b'_k)_k) : P}.$$

Donde

1. Gs_i es un telescopio relativo a T;
2. $Hs_{ik}[xs]$ es un telescopio relativo a T en el contexto $xs :: Gs_i$ para cada k.

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- En ese sentido, se tiene la siguiente espresión de conjunto:

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- En ese sentido, se tiene la siguiente espresión de conjunto:

$$A ::= P.$$

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- En ese sentido, se tiene la siguiente espresión de conjunto:

$$A ::= P.$$

- y las siguientes expresiones de elementos:

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- En ese sentido, se tiene la siguiente espresión de conjunto:

$$A ::= P.$$

- y las siguientes expresiones de elementos:

$$a ::= intro_i(as, (b_k)_k).$$

Ejemplo (Naturales)

Definimos:

Ejemplo (Naturales)

Definimos:

- Regla de formación:

$$\mathbb{N}\ \textsf{set}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

Ejemplo (Naturales)

Definimos:

- Regla de formación:

$$\mathbb{N} \ \mathsf{set}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

- Reglas de introducción:

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

Ejemplo (Naturales)

Definimos:

- Regla de formación:

$$\mathbb{N}\ \textsf{set}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

- Reglas de introducción:

$$\frac{}{0 : \mathbb{N}} \qquad \frac{}{0 = 0 : \mathbb{N}}.$$

$$\frac{n : \mathbb{N}}{s(n) : \mathbb{N}} \qquad \frac{n = n' : \mathbb{N}}{s(n) = s(n') : \mathbb{N}}.$$

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

- Regla de formación:

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

- Regla de formación:

$$FinList_A \text{ set}$$

$$FinList_A = FinList_A.$$

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

- Regla de formación:

$$FinList_A \text{ set}$$

$$FinList_A = FinList_A.$$

- Reglas de introducción:

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

- Regla de formación:

$$FinList_A \text{ set}$$

$$FinList_A = FinList_A.$$

- Reglas de introducción:

$$\frac{}{nill : FinList_A} \qquad \frac{}{nill = nill : FinList_A}.$$

$$\frac{a : A \qquad l : FinList_A}{\langle a \rangle \cdot l : FinList_A} \qquad \frac{a = a' : A \qquad l = l' : FinList_A}{\langle a \rangle \cdot l = \langle a' \rangle \cdot l' : FinList_A}.$$

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

Dado $V : set$ el conjunto de variables proposicionales, definimos

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

Dado $V : set$ el conjunto de variables proposicionales, definimos

- Regla de formación:

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

Dado $V : set$ el conjunto de variables proposicionales, definimos

- Regla de formación:

$$F(CPL) \text{ set.}$$

$$F(CPL) = F(CPL).$$

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

Dado $V : set$ el conjunto de variables proposicionales, definimos

- Regla de formación:

$$F(CPL) \text{ set.}$$

$$F(CPL) = F(CPL).$$

- Reglas de introducción:

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

$$\frac{a : V}{a : F(CPL)} \qquad \frac{a = a' : V}{a = a' : F(CPL)}$$

$$\frac{g : F(CPL)}{(\neg g) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL)}{(\neg g) = (\neg g') : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL) \quad f : F(CPL)}{(g \vee f) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL) \quad f = f' : F(CPL)}{(g \vee f) = (g' \vee f') : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL) \quad f : F(CPL)}{(g \wedge f) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL) \quad f = f' : F(CPL)}{(g \wedge f) = (g' \wedge f') : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL) \quad f : F(CPL)}{(g \to f) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL) \quad f = f' : F(CPL)}{(g \to f) = (g' \to f') : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL) \quad f : F(CPL)}{(g \leftrightarrow f) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL) \quad f = f' : F(CPL)}{(g \leftrightarrow f) = (g' \leftrightarrow f') : F(CPL)}.$$

Tabla de contenido

Interpretación de MLTT en Teoría de Conjuntos

- Sea $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.

Interpretación de MLTT en Teoría de Conjuntos

- Sea $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.
- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

- Sea $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.

- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

$$\Phi = \bigcup \{ (\bigcup_k ran(v_k), \langle |intro_i|, us, (v_k)_k \rangle) \quad : \quad us \in [\![Gs_i]\!], \quad (v_k \in [\![Hs_{ik}[xs]]\!]^{us}_{xs} \to U)_k \}.$$

- Sea $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.
- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

$$\Phi = \bigcup \{ (\bigcup_k ran(v_k), \langle |intro_i|, us, (v_k)_k \rangle) \quad : \\ us \in [\![Gs_i]\!], \\ (v_k \in [\![Hs_{ik}[xs]]\!]^{us}_{xs} \to U)_k \}.$$

Donde.

Interpretación de MLTT en Teoría de Conjuntos

- Sea $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.
- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

$$\Phi = \bigcup \{ (\bigcup_k ran(v_k), \langle |intro_i|, us, (v_k)_k \rangle) \quad :$$

$$us \in [\![Gs_i]\!],$$

$$(v_k \in [\![Hs_{ik}[xs]]\!]_{xs}^{us} \to U)_k \}.$$

Donde.

1. $[\![\cdot]\!]$ es la interpretación de tipos y $[\![\cdot]\!]_{xs}^{us}$ es la interpretación de telescopios.

- Sea $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.
- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

$$\Phi = \bigcup \{ (\bigcup_k ran(v_k), \langle |intro_i|, us, (v_k)_k \rangle) \quad : \quad us \in [\![Gs_i]\!], \quad (v_k \in [\![Hs_{ik}[xs]]\!]^{us}_{xs} \to U)_k \}.$$

Donde.

1. $[\![\cdot]\!]$ es la interpretación de tipos y $[\![\cdot]\!]^{us}_{xs}$ es la interpretación de telescopios.
2. $\langle |intro_i|, us, (v_k)_k \rangle$ representa una codificación de $intro_i(us, (v_k)_k)$. Donde $|intro_i|$ es el código de $intro_i$.

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

Ejemplo

- (Reglas de introducción)

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

Ejemplo

- (Reglas de introducción)

$$0 : \mathbb{N}.$$

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

Ejemplo

- (Reglas de introducción)

$$0 : \mathbb{N}.$$

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Entonces el conjunto de reglas bajo la interpretación es:

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

Ejemplo

- (Reglas de introducción)

$$0 : \mathbb{N}.$$

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Entonces el conjunto de reglas bajo la interpretación es:

$$\begin{aligned}\Phi =& \{(\emptyset, 0)\}\\ & \cup \{(\{n\}, \langle s\rangle \cdot n) \quad : n \in U\}.\end{aligned}$$

Conclusiones

- Se ha mostrado como formalizar definiciones inductivas a partir de conjuntos de reglas y operadores monótonos.

Conclusiones

- Se ha mostrado como formalizar definiciones inductivas a partir de conjuntos de reglas y operadores monótonos.
- Se ha mostrado como formalizar tipos inductivos en teoría de tipos de Martín-Löf.

Conclusiones

- Se ha mostrado como formalizar definiciones inductivas a partir de conjuntos de reglas y operadores monótonos.
- Se ha mostrado como formalizar tipos inductivos en teoría de tipos de Martín-Löf.
- Por último, se ha mostrado como interpretar tipos inductivos en teoría de conjuntos.

Referencias

- Sangiorgi, D. (2011) Introduction to Bisimulation and Coinduction. Cambridge University Press.
- Dybjer, P (1991) Inductive Sets and Families in Martín-Lof's Types Theory and theis Set-Theoretic Semantics. In G. Huet and G. Plotkin, editors, Logical Frameworks, pages 280-306. Cambridge University Press.
- Dybjer, P. Chalmer, T. H. (2005) Lectures on Inductive and Recursive Definitions in Constructive Type Theory. TYPES Summer School, Göteborg, August 2005.
- Aczel, P. (1997) An Introduction to Inductive Definitions. In Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, volume 90, pages 739-782.

¡Gracias!