

# Definiciones Inductivas y Coinductivas

*Autor:*

Kevin Cárdenas.

*Asesor:* Juan Carlos Agudelo.

Trabajo de grado en modalidad de monografía para el título como matemático.

2023

# Índice

<b>1. Definiciones inductivas</b>	<b>2</b>
1.1. ¿Qué es una definición inductiva? . . . . .	3
1.2. Puntos fijos en un lattice completo . . . . .	7
<b>2. Referencias</b>	<b>13</b>

## 1. Definiciones inductivas

Informalmente usualmente se da la definición inductiva a partir de un conjunto de reglas para generar los elementos de dicho conjunto, te muestro algunos ejemplos.

### Ejemplo 1.1 *El conjunto de los números Naturales*

*El conjunto de los números naturales es el menor conjunto tal que:*

1.  $0 \in \mathbf{N}$
2. se  $n \in \mathbf{N}$ , entonces  $s(n) \in \mathbf{N}$

*O el conjunto de los números naturales es el conjunto definido por las siguientes reglas:*

1.  $0 \in \mathbf{N}$
2. si  $n \in \mathbf{N}$ , entonces  $s(n) \in \mathbf{N}$

*Los elementos en  $\mathbf{N}$  son solo los producidos por las reglas 1) y 2).*

*Es importante destacar que la definición inductiva de los números naturales no especifica cómo se representan los números, sino que se enfoca en cómo se construyen. Por lo tanto, la representación de los números naturales puede variar dependiendo del contexto. Además, la definición inductiva establece que el conjunto de los números naturales es único, y que cualquier otro conjunto que cumpla las mismas dos reglas también será igual al conjunto de los números naturales. Esta definición es fundamental en matemáticas y es utilizada como base para muchas otras construcciones y teoremas.*

### Ejemplo 1.2 *El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica*

*Dado un conjunto  $V = \{p_1, p_2, \dots\}$  de variables proposicionales, el conjunto **Form** de formulas de la lógica es el menor conjunto tal que:*

1.  $V \subseteq \mathbf{Form}$
2. si  $A, B \in \mathbf{Form}$ , entonces  $\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B \in \mathbf{Form}$

*En ese sentido tenemos una forma de hacer “inducción estructural” sobre este conjunto, pues en cada paso podemos mirar de donde proviene una formula.*

### Ejemplo 1.3 *El conjunto de listas finitas de un conjunto A*

Dado un conjunto  $A$ , el conjunto  $\mathbf{Finlist}(A)$

1.  $nil \in \mathbf{Finlist}(A)$
2. si  $S \in \mathbf{Finlist}(A)$  y  $a \in A$ , entonces  $\langle a \rangle \cdot S \in \mathbf{Finlist}(A)$

El operador  $\cdot$  funciona como un metodo para concatenar un elemento en una lista ya existente, entonces todos los terminos en  $\mathbf{Finlist}(A)$  son de la forma  $\langle a_n \rangle \cdot \langle a_{n-1} \rangle \cdot \langle a_{n-2} \rangle \cdot \dots \cdot \langle a_0 \rangle \cdot nil$ .

### 1.1. ¿Qué es una definición inductiva?

**Definición 1.4** *Regla,  $\phi$ -cerrado, Conjunto inductivamente definido*

1. Una regla es un par  $(A, x)$ , donde  $A$  es un conjunto, llamado **el conjunto de premisas**, y  $x$  es la conclusión.
2. Si  $\phi$  es un conjunto de reglas, entonces un conjunto  $A$  es  $\phi$ -**cerrado** si el hecho de que cada regla de  $\phi$  tiene sus premisas en  $A$ , implica que su conclusión está en  $A$ .
3. Dado  $\phi$  un conjunto de reglas, definimos  $I(\phi)$  como el conjunto inductivamente definido por  $\phi$ , que se define como:

$$L(\phi) = \bigcap \{A : A \text{ } \phi\text{-cerrado}\}$$

Volvamos a los ejemplos anteriores.

### Ejemplo 1.5 $\mathbb{N}$ Como conjunto inductivamente definido

Volviendo al ejemplo 1.1, desde la definición que hemos dado, podemos ver los números naturales  $\mathbb{N}$  como el conjunto inductivamente definido del siguiente conjunto de reglas, definimos  $\phi$  como un conjunto de reglas que contienen las siguientes dos reglas:

1.  $(\emptyset, 0)$
2.  $(n, s(n))$ , donde  $n$  es un número natural y  $s(n)$  es el sucesor de  $n$ .

**Ejemplo 1.6** *El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica como conjunto inductivamente definido*

Volviendo al ejemplo 1.2, dado un conjunto  $V = \{p_1, p_2, \dots\}$  de variables proposicionales, el conjunto **Form** de formulas de la lógica puede ser definido inductivamente a partir del siguiente conjunto de reglas.

1.  $(\emptyset, p_i)$  para  $p_i \in V$
2.  $(\{A\}, \neg A)$
3.  $(\{A, B\}, A \vee B)$
4.  $(\{A, B\}, A \wedge B)$
5.  $(\{A, B\}, A \rightarrow B)$
6.  $(\{A, B\}, A \leftrightarrow B)$

**Ejemplo 1.7** *El conjunto de listas finitas de un conjunto  $A$  como conjunto inductivamente definido*

Volviendo al ejemplo 1.3, dado un conjunto  $A$ , el conjunto **Finlist**( $A$ ) de listas finitas en  $A$

1.  $(\emptyset, \text{nil})$
2.  $(\{S\}, < a > \cdot S)$

**Definición 1.8**  $\phi$ -prueba

$a_1, a_2, \dots, a_n$  es una  $\phi$ -prueba de  $b$  si

1.  $a_n = b$
2. si  $m \leq n$ , entonces existe  $X \subseteq \{a_i\}_{i < m}$  tal que  $\phi : X \rightarrow a_m$

Si  $x$  tiene una  $\phi$ -prueba, entonces decimos que  $x$  es  $\phi$ -demostrable.

**Proposición 1.9** .

Para  $\phi$  un conjunto de reglas finito:

$$I(\phi) = \{b \mid b \text{ tiene una } \phi\text{-prueba}\}$$

De la definición es claro que, primero  $\{b : b \text{ tiene una } \phi - \text{prueba}\}$  es  $\phi$ -cerrado, y además para cada  $x \in I(\phi)$   $x$  es  $\phi$ -demostrable. (La demostración se encuentra en la pagina 743 del libro de Aczel *Introduction to Inductive Definitions*.)

## La parte bien fundamentada de una relación

Sea  $A$  un conjunto,  $<$  una relación de orden parcial en  $A$ , definimos **la parte bien fundamentada de  $<$**  como

$$W(<) = \{a \in A : \forall \{a_i\} \subseteq A (a_0 = a, a_{i+1} < a_i \rightarrow |\{a_i\}| < \infty)\}$$

Es decir el conjunto de los elementos sin secuencias infinitas de descendientes.

Decimos que  $<$  es bien fundamentada, si  $w(<) = A$

### Proposición 1.10 $w(<)$ definido inductivamente

$w(<)$  puede ser definido inductivamente del conjunto de reglas definido por:

- $((< a), a) \in \phi_{<}$  para  $a \in A$ , donde  $(< a) = \{x \in A : x < a\}$

### Proposición 1.11 Otra interpretación de un conjunto definido inductivamente

$$W(<) = I(\phi_{<}) = \{b : b \text{ tiene una } \phi - \text{prueba}\}$$

Es decir El conjunto inductivamente definido por el conjunto de reglas definido por una relación de orden parcial es la parte bien fundamentada de  $<$  y a su vez el conjunto de los elementos  $\phi_{<}$ -demostrables.

### Definición 1.12 Conjuntos de reglas deterministas

El conjunto de reglas  $\phi$  es llamado **determinista** si  $\phi : X_1 \rightarrow x$  y  $\phi : X_2 \rightarrow x$  implica que  $X_1 = X_2$

### Ejemplo 1.13 Veamos un par de ejemplos interesantes:

- $\phi_{<}$  Siempre es determinista.  
 $\phi_{<}$  es determinista porque para dos subconjuntos  $X_1$  y  $X_2$  tales que  $\phi_{<} : X_1 \rightarrow x$  y  $\phi_{<} : X_2 \rightarrow x$ ,

si  $X_1 \neq X_2$  entonces existe un elemento  $a \in X_1 \Delta X_2$  que es el mínimo elemento en  $X_1 \Delta X_2$ , donde  $\Delta$  denota la diferencia simétrica entre conjuntos. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $a \in X_1$  y  $a \notin X_2$ , lo que significa que para cualquier  $b \in X_2$  se tiene  $a < b$ , y por lo tanto  $\phi_{<}(X_2) \subseteq (< a)$ , lo que contradice el hecho de que  $\phi_{<}(X_2) = x$ . Por lo tanto,  $X_1 = X_2$  y  $\phi_{<}$  es determinista.

- El conjunto de reglas que define los terminos y formulas de la lógica de primer orden no es determinista.

El conjunto de reglas para la lógica de primer orden consiste en:

1. El conjunto  $\mathcal{V}$  de variables.
2. Un conjunto  $\mathcal{C}$  de constantes.
3. Para cada  $n$  un conjunto  $\mathcal{F}_n$  de símbolos de función de aridad  $n$ .
4. Para cada  $n$  un conjunto  $\mathcal{R}_n$  de símbolos de relación de aridad  $n$ .
5. Un conjunto  $\mathcal{L}$  de símbolos lógicos, que incluye al menos a  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \text{ y } \exists$ .

A partir de estos conjuntos, podemos construir los términos y fórmulas de la lógica de primer orden mediante las siguientes reglas:

- Todo elemento de  $\mathcal{V} \cup \mathcal{C}$  es un término.
- Si  $f \in \mathcal{F}_n$  y  $t_1, \dots, t_n$  son términos, entonces  $f(t_1, \dots, t_n)$  es un término.
- Si  $R \in \mathcal{R}_n$  y  $t_1, \dots, t_n$  son términos, entonces  $R(t_1, \dots, t_n)$  es una fórmula atómica.
- Si  $A$  y  $B$  son fórmulas, entonces  $\neg A, (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B)$ , y  $(A \leftrightarrow B)$  son fórmulas.
- Si  $A$  es una fórmula y  $x \in \mathcal{V}$ , entonces  $\forall x, A$  y  $\exists x, A$  son fórmulas.

Este conjunto de reglas no es determinista, ya que, por ejemplo, podemos tener dos símbolos de función distintos que tengan el mismo nombre pero aridades diferentes, lo que llevaría a una ambigüedad en la interpretación de las fórmulas que los usan.

Ahora bien, sea  $\phi$  determinista y  $A$  un conjunto de conclusiones de reglas en  $\phi$ . para  $x, y \in A$  sea  $x < y$  si  $\phi : X \rightarrow y$  para algun conjunto  $X$  tal que  $x \in X$  y  $X \subseteq A$ . Entonces  $\phi_{<}$  es el conjunto de reglas  $X \rightarrow x$  en  $\phi$  tal que  $X \subseteq A$ . Además tenemos:

**Proposición 1.14** *Si  $\phi$  es determinista:*

$$I(\phi) = I(\phi_{<})$$

La proposición establece que si  $\phi$  es determinista, entonces el conjunto de fórmulas demostrables mediante  $\phi$  es igual al conjunto de fórmulas demostrables mediante  $\phi_{<}$ , es decir,  $I(\phi) = I(\phi_{<})$ .

**Ejemplo 1.15**  $N$ ,  $Form$  y  $Finlist(A)$  *tienen una relación de orden bien fundamentada*

*Mostramos que si  $\phi$  es un conjunto de reglas deterministas entonces  $\phi_{<}$  es una relación bien fundamentada sobre  $I(\phi)$ , revisando los ejemplos de los naturales, el conjunto de formulas proposicionales de la lógica clásica y el conjunto de listas finitas sobre un conjunto  $A$  son deterministas y por tanto tienen una relación de orden bien fundamentada sobre si mismo.*

## 1.2. Puntos fijos en un lattice completo

**Definición 1.16** *Poset*

*Un conjunto parcialmente ordenado o poset, es un conjunto no vacío equipado con una relación de orden parcial, es decir **reflexiva, antisimétrica y transitiva**, usualmente lo denotamos como  $(A, <)$ , donde  $A$  es el conjunto y  $<$  es la relación de orden parcial*

A continuación algunos ejemplos:

**Ejemplo 1.17** *Conjuntos ordenados*

1. *El conjunto de los números enteros  $\mathbf{Z}$ , junto con la relación de orden parcial  $<$ . Es decir, para  $a, b \in \mathbf{Z}$ ,  $a < b$  si y solo si  $a$  es menor o igual que  $b$ .*
2. *El conjunto de los subconjuntos de un conjunto dado  $X$ , junto con la relación de orden parcial " $\subset$ ". Es decir, para  $A, B \subset X$ ,  $A \subset B$  si y solo si todos los elementos de  $A$  también están en  $B$ .*
3. *El conjunto de los productos cartesianos  $A \times B$  de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , junto con la relación de orden parcial  $<_{\times}$  llamado **orden lexicográfico**. Es decir, para  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ ,  $(a_1, b_1) <_{\times} (a_2, b_2)$  si y solo si  $a_1 < a_2$  o  $(a_1 = a_2$  y  $b_1 < b_2)$ .*



### Ejemplo 1.18 Preorden

Un conjunto preordenado es un conjunto no vacío equipado con una relación **reflexiva y transitiva**. Si  $L$  es este preorden definimos la siguiente relación de equivalencia como.

$$x \sim y \quad \text{si y solo si} \quad x \geq y \wedge y \geq x$$

definimos  $A = L / \sim$ , con el orden inducido por esta relación de equivalencia.

### Definición 1.19 Infimo y supremo

Sea  $\mathbf{R}$  un poset, definimos:

- **infimo (meet):** Dado un conjunto  $A \subseteq \mathbf{R}$ ,  $m \in \mathbf{R}$  se llama infimo de  $A$  si se cumple que:

1.  $m$  es cota inferior de  $A$ , es decir,  $m \leq a$  para todo  $a \in A$ .
2. Cualquier otra cota inferior de  $A$  es mayor o igual que  $m$ , es decir, si  $m' \leq a$  para todo  $a \in A$ , entonces  $m' \geq m$ .

El infimo de  $A$  se denota como  $\inf(A) = \text{met}(A)$ .

- **supremo (join):** Dado un conjunto  $A \subseteq \mathbf{R}$ ,  $M \in \mathbf{R}$  se llama supremo de  $A$  si se cumple que:

1.  $M$  es cota superior de  $A$ , es decir,  $M \geq a$  para todo  $a \in A$ .
2. Cualquier otra cota superior de  $A$  es menor o igual que  $M$ , es decir, si  $M' \geq a$  para todo  $a \in A$ , entonces  $M' \leq M$ .

El supremo de  $A$  se denota como  $\sup(A) = \text{join}(A)$ .

### Ejemplo 1.20 Dual de un poset

Dado un poset  $(A, <)$ , su dual o inverso  $(A^{op}, >)$  es el poset que se obtiene al invertir la relación de orden, es decir,  $a > b$  en el dual si y solo si  $b > a$  en el poset original. Formalmente,  $(A^{op}, >)$  es un poset con  $A$  como conjunto y la relación de orden  $>$  definida como:

$$a > b \text{ en } A^{op} \quad \text{si y solo si} \quad b < a \text{ en } A \quad \text{para todo} \quad a, b \in A$$

El dual de un poset conserva las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

si  $(A, <)$  es un poset y  $B \subseteq A$  tiene un ínfimo  $m$  en  $(A, <)$ , entonces  $m$  es el supremo de  $B$  en  $(A^{op}, >)$ . Por otro lado, si  $B$  tiene un supremo  $M$  en  $(A, <)$ , entonces  $M$  es el ínfimo de  $B$  en  $(A^{op}, >)$ .

**Definición 1.21** Dado un poset  $(L, \leq)$  y una endofunción  $F : L \rightarrow L$ , definimos:

- $F$  es **monótono** si preserva el orden parcial, es decir, para todo  $x, y \in L$ , si  $x \leq y$ , entonces  $f(x) \leq f(y)$ .
- Los **puntos pre-fijos** de una endofunción  $f : L \rightarrow L$  son los elementos  $x \in L$  tales que  $f(x) \leq x$ . De manera similar, los **puntos post-fijos** son los elementos  $x \in L$  tales que  $x \leq f(x)$ . Es decir, un punto pre-fijo es un elemento que el endofunción no puede llevar más allá de sí mismo, mientras que un punto post-fijo es un elemento que el endofunción no puede llevar por debajo de sí mismo.
- Los **puntos fijos** de una endofunción  $f : L \rightarrow L$  son los elementos  $x \in L$  tales que  $f(x) = x$ . Es decir, son los elementos que el endofunción deja inalterados.

**Ejemplo 1.22 El algoritmo de la división como una endofunción**

Consideremos el conjunto  $A = \mathbf{N}^2$  con el orden lexicográfico definido como  $(a, b) < (c, d)$  si  $a < c$  o si  $a = c$  y  $b < d$ . Sea  $f : A \rightarrow A$  el endofunción definido por el algoritmo de la división, es decir,  $f(x, y) = (m, r)$  si  $0 < y$ ,  $x = ym + r$ , donde  $0 \leq r < y$ , y si  $y = 0$ ,  $f(x, 0) = (0, x)$

- Un punto prefijo de  $f$  es un elemento  $(x, y) \in A$  tal que  $f(x, y) \leq (x, y)$  en el orden lexicográfico. En este caso, podemos ver que si  $(x, y) \leq (m, r)$  si  $x < m$  o si  $x = m$  y  $y \leq r$ , vemos que en todo momento  $x \geq m$ , por lo que  $x = m$  y  $y \leq r$ , por lo tanto  $y = 0$ , y por tanto  $x = 0$ , y vemos que es también el único punto fijo
- Un punto postfijo de  $f$  es un elemento  $(x, y) \in A$  tal que  $(x, y) \leq f(x, y)$  en el orden lexicográfico. En este caso, podemos observar que  $(x, y) \geq (m, r)$  es un punto postfijo si  $m < x$  o si  $x = m$  y  $r \leq y$ , entonces, si  $x \geq y$  o  $y = 0$
- Un punto fijo de  $f$  es un elemento  $(x, y) \in A$  tal que  $f(x, y) = (x, y)$  en el orden lexicográfico. En este caso, podemos observar que  $(0, 0)$  es el único punto fijo de  $f$ , ya que  $f(0, 0) = (0, 0)$  y no hay otro elemento  $(x, y)$  que sea igual a  $(0, 0)$  en el orden lexicográfico.

*Es facil ver que no es un monomorfismo.*

### **Definición 1.23 *Reticulo (lattice) completo***

*Un lattice completo es un conjunto parcialmente ordenado  $(L, \leq)$  en el que todos los subconjunto no vacío tiene supremo.*

Note que basta con exigir la existencia del supremo en todo conjunto para tener la existencia del infimo en todo conjunto. Esto por la definición. Es decir en un lattice completo todo subconjunto no vacío posee infimo. También tenemos que los lattices completos son acotados, es decir poseen maximo y minimo.

### **Teorema 1.24 *Teorema del punto fijo***

*En un lattice completo  $L$ , una endofunción monotona  $F : L \rightarrow L$  tiene un lattice completo de puntos fijos. En particular el punto fijo más pequeño de la función es el infimo de los puntos pre-fijos, el más grande es el supremo de los puntos postfijos. Más aún por la condición de sobreyectividad estos son el minimo y el máximo del lattice.*

La demostración de este teorema se encuentra en el libro Introduction to bisimulation and coinducccion.

## **Conjuntos definidos inductiva y coinductivamente**

### **Definición 1.25 *Conjuntos definidos inductiva y coinductivamente como puntos fijos de operadores***

*Sea  $L$  un lattice completo cuyos puntos son conjuntos, (Podriamos decir  $L \subseteq \text{Pow}(A)$ , para algún conjunto  $A$ ), ordenado bajo la relación de orden de inclusión, y  $F : L \rightarrow L$  una enfofunción en  $L$ , Los conjuntos:*

$$F_{ind} = \bigcap \{x | F(x) \subseteq x\}$$

$$F_{coind} = \bigcup \{x | x \subseteq F(x)\}$$

*(El meet de de los puntos pre-fijos, y el join de los puntos post-fijos) son, respectivamente el conjunto definido inductiva por  $F$  y definido coinductivamente por  $F$ .*

En el libro *An Introduction to Inductive Definitions* de Aczel, está la demostración de que tomando el conjunto de reglas, para  $\mathcal{A} \subseteq L$ ,  $(A, y) \in \phi$  para  $y \in F(A)$ , tenemos que  $I(\phi) = F_{ind}$ , por lo que este es otro punto de vista para los conjuntos definidos inductivamente.

**Proposición 1.26 *Principio de inducción y coinducción***

para una endofunción monotonía  $F : L \rightarrow L$  sobre un lattices tenemos

$$\begin{aligned} F(x) \leq x &\rightarrow F_{ind} \leq x \text{ (Principio de inducción)} \\ F(x) \geq x &\rightarrow F_{coind} \geq x \text{ (Principio de coinducción)} \end{aligned}$$

Podemos volver a los ejemplos que estamos tratando.

**Ejemplo 1.27 *El conjunto de los números Naturales, Como conjunto definidos inductivamente***

Sea  $\varphi : Pow(\mathbf{X}) \rightarrow Pow(\mathbf{X})$ , con  $\mathbf{X}$  un conjunto donde  $0 \in \mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}$  es cerrado para la operación sucesor, definimos:

$$\varphi(X) = \{0\} \cup \{s(x) \mid x \in X\}$$

Luego los naturales se ven definidos como  $\mathbf{N} = \bigcap \{X \mid X \subseteq \varphi(X)\}$ , el conjunto inductivamente definido. Por otra parte el conjunto coinductivamente definido es  $\mathbf{X}$ .

**Ejemplo 1.28 *El conjunto de listas finitas de un conjunto A, Como conjunto definidos inductivamente***

Tomemos:

$X$  como el conjunto de todos los strings finitos o infinitos con elementos del alfabeto  $A \cup \{null, \cdot, <, >\}$ , el funcional correspondiente  $\varphi_{\mathbf{L}_A}$  es:

$$\varphi_{\mathbf{L}_A}(T) = \{null\} \cup \{< a > \cdot s \mid a \in A \wedge s \in T\}$$

Tenemos que el conjunto de listas finitas con elementos en  $A$  es el conjunto inductivamente definido por el operador  $\varphi_{\mathbf{L}_A}$  y el conjunto de listas infinitas es el coinductivamente definido por este operador.

En el siguiente ejemplo podemos ver un patrón de cómo entender la equivalencia entre conjuntos inductivamente definidos a partir de reglas y a partir de puntos fijos en un retículo completo.

**Ejemplo 1.29** *El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica, Como conjunto definidos inductivamente*

Dado un conjunto  $V = \{p_1, p_2, \dots\}$  de variables proposicionales,  $X$  como el conjunto de todos los strings finitos o infinitos con elementos del alfabeto  $V \cup \{\vee, \neg, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (, )\}$ , el funcional correspondiente  $\varphi$  es:

$$\varphi(T) = V \cup \{(A) \times (B) \mid A, B \in T \wedge \times \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\} \cup T \cup \{\neg A \mid A \in T\}$$

Que es un operador monotono sobre un latice completo.

Tenemos finalmente que **Form** =  $\varphi_{ind}$ , es el conjunto inductivamente definido por este operador, y los elementos aquí son justamente formulas.

Además, El conjunto coinductivamente definido  $\mathbf{C} = \bigcup \{T \mid T \subseteq \varphi(T)\}$ , coincide con el conjunto de las formulas finitas, y las generadas infinitamente a partir de estas reglas.

## 2. Referencias

### Referencias

- [1] Aczel, P. (1997). An Introduction to Inductive Definitions
- [2] Davide, S. (2011) Introduction to bisimulation and coinduction