Notas para un Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Kevin Cárdenas

28 de septiembre de 2023

Índice

1. Primeros Pasos

En el estudio de fenómenos físicos y matemáticos, las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) desempeñan un papel fundamental. Son ecuaciones que involucran derivadas parciales de una o más variables independientes y, como resultado, modelan una amplia variedad de procesos en ciencias naturales, ingeniería y matemáticas.

1.1. Definiciones

Definición de una Ecuación en Derivadas Parciales

Una Ecuación en Derivadas Parciales es una ecuación que relaciona una función desconocida de varias variables con sus derivadas parciales. Generalmente, se representa de la siguiente manera:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots) = 0. \tag{1}$$

Donde u es la función desconocida y las x_i son las variables independientes.

Órdenes de las EDP

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) se clasifican en función del orden de las derivadas parciales presentes en la ecuación. A continuación, se proporcionan ejemplos que ilustran los órdenes más comunes:

- **Primer orden:** Las EDP de primer orden involucran únicamente derivadas de primer orden con respecto a las variables independientes. Un ejemplo de una EDP de primer orden es la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

  Donde u es la función desconocida y c es una constante que representa la velocidad de transporte.

- **Segundo orden:** Las EDP de segundo orden involucran derivadas de segundo orden con respecto a las variables independientes. Un ejemplo clásico de una EDP de segundo orden es la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

  Donde u representa la temperatura en una barra, t es el tiempo, x es la posición, y α es la difusividad térmica.

- **Orden superior:** Las EDP de orden superior incluyen derivadas de orden superior (mayor que dos) con respecto a las variables independientes. Un ejemplo es la ecuación de Laplace, una EDP de orden superior que describe el potencial eléctrico en un campo electrostático:

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{4}$$

Donde ϕ representa el potencial eléctrico y ∇^2 es el operador laplaciano.

Tipos de EDP

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) se clasifican en tres categorías principales según su forma general:

1. **EDP Lineales:** Una EDP se considera lineal si se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}} + b(x)u = f(x). \tag{5}$$

Donde u es la función desconocida, $a_i(x)$, $b(x)$ y $f(x)$ son funciones dadas, y m_i son enteros no negativos, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. En las EDP lineales, todas las derivadas parciales están elevadas a la primera potencia y no se multiplican entre sí.

2. **EDP Cuasilineales:** Las EDP cuasilineales permiten derivadas de orden superior y productos de derivadas, pero el término lineal prevalece. Se expresan de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u) \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{m_{i,j}}}{\partial x_{i,j}^{m_{i,j}}}(u) = b(x,u). \tag{6}$$

Donde u es la función desconocida, $a_i(x,u)$, $b(x,u)$ y son funciones dadas, y $m_{i,j}$ son enteros no negativos.

3. **EDP Completamente No Lineales:** En las EDP completamente no lineales, los términos no lineales predominan y las derivadas pueden aparecer elevadas a potencias diferentes. Estas EDP se expresan de la siguiente manera:

$$F(x, u, \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{m_{i,j}}}{\partial x_{i,j}^{m_{i,j}}}(u)) = 0. \tag{7}$$

Donde u es la función desconocida y $F(x, u, \frac{\partial^{m_{i,j}} u}{\partial x_{i,j}^{m_{i,j}}})$ es una función no lineal de las variables u, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{m_{i,j}}}{\partial x_{i,j}^{m_{i,j}}}(u)$.

Solución Particular y Solución General

En el contexto de las EDP, es importante distinguir entre la solución particular y la solución general:

- **Solución Particular:** Es una solución específica que satisface la EDP junto con las condiciones de contorno y condiciones iniciales especificadas para un problema particular.

- **Solución General:** Es una solución que satisface la EDP sin considerar condiciones específicas. La solución general incluye todas las posibles soluciones particulares y puede contener constantes arbitrarias.

El estudio de EDP implica encontrar soluciones particulares que se adapten a problemas específicos y, en algunos casos, encontrar la solución general que describe todas las posibles soluciones del problema.

1.2. Método de Resolución para EDP Lineales de Primer Orden

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial lineal de primer orden en dos variables:

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y)u + d(x,y). \tag{1}$$

Para resolver esta ecuación, podemos usar el método de cambio de variable.

Paso 1: Cambio de Variable

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)}. \tag{2}$$

De esta EDO, encontramos la curva solución $\eta(x,y)$, que relaciona x y y.

$$\frac{d}{dx}\left(b(x,y)u\right) = c(x,y)u + d(x,y). \tag{3}$$

Paso 2: Definición de Nueva Variable

Definimos una nueva variable $\xi(x,y)$ como $\xi(x,y) = y$. Suponiendo que $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$, para que el jacobiano de la transformación no sea nulo.

Paso 3: Reemplazo en la EDP Original

Reemplazamos $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ en la EDP original con las derivadas de η y ψ respecto a x y y, respectivamente (suponiendo $W(\eta(x,y), \psi(x,y)) = u(x,y)$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\eta}{dx}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial W}{\partial \psi} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\eta}{dy}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{d\psi}{dy}\frac{\partial W}{\partial \psi}. \tag{5}$$

Paso 4: Sustitución en la EDP

Sustituimos estas expresiones en la EDP original:

$$a(x,y)\left(\frac{d\eta}{dx}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial W}{\partial \psi}\right) + b(x,y)\left(\frac{d\eta}{dy}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{d\psi}{dy}\frac{\partial W}{\partial \psi}\right) = c(x,y)W + d(x,y). \tag{6}$$

Simplificamos la ecuación y agrupamos términos que contengan $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ y $\frac{\partial W}{\partial \psi}$:

$$\left[a(x,y)\frac{d\eta}{dx}+b(x,y)\frac{d\eta}{dy}\right]\frac{\partial W}{\partial \eta}+\left[a(x,y)\frac{d\xi}{dx}+b(x,y)\frac{d\xi}{dy}\right]\frac{\partial W}{\partial \xi}=c(x,y)W+d(x,y). \tag{7}$$

Donde $\left[a(x,y)\frac{d\eta}{dx}+b(x,y)\frac{d\eta}{dy}\right]\frac{\partial W}{\partial \eta}=0$, pues $a(x,y)\frac{d\eta}{dx}+b(x,y)\frac{d\eta}{dy}=0$, por (2).
Luego la EDP, queda como una EDO lineal:

$$\left[a(x,y)\frac{d\xi}{dx}+b(x,y)\frac{d\xi}{dy}\right]\frac{\partial W}{\partial \xi}=c(x,y)W+d(x,y). \tag{8}$$

Paso 5: solución de la EDO lineal

la solución general será:

$$W(\xi,\eta)=\frac{1}{e^{\int -c(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))d\xi}}\left(\int d(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))e^{\int -c(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))d\xi}\,d\xi+G(\eta)\right). \tag{9}$$

donde $W(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$

Paso 6: Reemplazar de vuelta

Como la sustitución tenia jacobiano no nulo, se puede reemplazar de vuelta, por lo que existe una transformación $\xi(x,y),\eta(x,y)$ inversa de la transformación inicial, y así queda la solución general dada por:

$$u(x,y)=W(\xi(x,y),\eta(x,y)). \tag{10}$$

1.3. Metodo de Lagrange

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial cuasilineal de primer orden en dos variables:

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u). \tag{1}$$

considere el siguiente sistema, llamado el sistema subsidiario:

$$\frac{dx}{a(x,y,u)}=\frac{dy}{b(x,y,u)}=\frac{du}{c(x,y,u)}. \tag{2}$$

Si $a\neq 0$, entonces las ecuaciones subsidiarias son equivalentes al sistema:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y,u)}{a(x,y,u)},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{c(x,y,u)}{a(x,y,u)} \tag{3}$$

La ventaja del sistema subsidiario es que evita la distinción entre variables dependientes y variables independientes.

Resolviendo el sistema subsidiario (en (3) por ejemplo) obtenemos dos curvas características. Que serán curvas integrales de las ecuaciones subsidiarias.

Por ejemplo:

$$\phi(x,y,u)\quad de\quad \frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y,u)}{a(x,y,u)}. \tag{4}$$

y

$$\psi(x,y,u)\quad de\quad \frac{du}{dx}=\frac{c(x,y,u)}{a(x,y,u)}. \tag{5}$$

$\phi(x,y,u)$ y $\psi(x,y,u)$ son las constantes arbitrarias que surgen de la solución de la EDO, si estas son funcionalmente independientes en alguna región en el espacio xyz, entonces la solución general de la ecuación cuasi lineal viene dada por:

$$F(\phi,\psi)=0 \tag{6}$$

donde F es una función arbitraria. O manera equivalente, a partir del teorema de la función implícita:

$$\phi=g(\psi)\quad o\quad \psi=f(\phi) \tag{7}$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

1.3.1. El método de los multiplicadores

Una técnica útil en la solución de ecuaciones es el método de los multiplicadores.

proposición 1.1. *Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *entonces*

$$\frac{\lambda a + \beta c}{\lambda b + \beta d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Para λ, β *arbitrarios*

Observación 1.2. *Aplicando la proposición anterior al sistema subsidiario*

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)}.$$

obtenemos

$$\frac{\lambda dx + \mu dy + \beta du}{\lambda a(x,y,u) + \mu b(x,y,u) + \beta c(x,y,u)} = \frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)}.$$

De esta forma podemos obtener algunas ecuaciones diferenciales relacionadas mas fáciles de integrar. En particular, si λ, μ, β *se eligen de tal manera que:*

$$\lambda a(x,y,u) + \mu b(x,y,u) + \beta c(x,y,u) = 0,$$

entonces, si existe una función v *tal que:*

$$dv = \lambda dx + \mu dy + \beta du$$

$v(x,y,u)$ *es una curva integral de las ecuaciones subsidiarias.*

1.4. Método de las Características para EDP Cuasilineales con Condición Inicial

Supongamos que tenemos la siguiente Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) cuasilineal de primer orden, junto con una condición inicial, sobre una curva

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \tag{1}$$

$$u|_\gamma = u_0(s) \tag{2}$$

$$\gamma = \{(x_0(s), y_0(s))\} \tag{3}$$

Basta resolver el siguiente sistema simultaneamente:

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u) \qquad x(0) = x_o(s) \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = b(x,y,u) \qquad y(0) = y_o(s) \tag{5}$$

$$\frac{du}{dt} = a(x,y,u) \qquad u(0) = u_o(s) \tag{6}$$

Luego, debemos dejar a u en términos de x e y.

Perdida de unicidad de la solución

Note que (1) se puede ver como el siguiente producto punto:

$$(a,b,c)\cdot(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1) \tag{7}$$

Y si tenemos una solución $u(x,y)$, esta ecuación expresa que el campo

$$(x,y) \to (a(x,y,u(x,y)), b(x,y,u(x,y)), c(x,y,u(x,y))).$$

es tangente a la superficie dada por u. Donde $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1)$ es justamente normal.

Ahora bien, si

$$det\begin{pmatrix} a(x,y,u)|_\gamma & a(x,y,u)|_\gamma \\ \frac{dx_0(s)}{ds} & \frac{dy_0(s)}{ds} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{8}$$

Que es la *condición de transversabilidad*, entonces *el sistema tiene una única solución*

Por otra parte

$$\begin{pmatrix} a(x,y,u)|_\gamma \\ a(x,y,u)|_\gamma \\ c(x,y,u)|_\gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{dx_0(s)}{ds} \\ \frac{dy_0(s)}{ds} \\ \frac{du_0(s)}{ds} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Para algún s_0 que es la *condición de colinealidad*, entonces *el sistema tiene una infinitas soluciones.* Ciertamente porque si cambiamos la curva inicial por una curva $\beta = \{(\overline{x_0(\theta)}, \overline{y_0(\theta)})\}$ tal que la curva pase por $\gamma(s_0)$ para un θ_0 y $u_0(s_0) = \overline{u_0(\theta_0)}$, entonces la solución del sistema

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \tag{10}$$

$$u|_\beta = \overline{u_0(\theta)} \tag{11}$$

$$\beta = \{(\overline{x_0(\theta)}, \overline{y_0(\theta)})\} \tag{12}$$

También cumple que:

$$u|_\gamma = u_0(s) \tag{13}$$

$$\gamma = \{(x_0(s), y_0(s))\} \tag{14}$$

Ahora bien, si no se cumple la *condición de transversabilidad* y tampoco hay *colinealidad* entonces *no existe solución* al problema de Cauchy.

1.5. Ecuación Eikonal

La ecuación Eikonal es de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 = \nu^2 \tag{1}$$

Al escribir las ecuaciones características queda:

$$(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \nu^2) \cdot (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1) = 0 \tag{2}$$

Este vector $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial}, \nu^2)$ describe una dirección tangente a la superficie solución.

Tenemos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{du}{dt} = \nu^2 \tag{3}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial \nu^2(x,y)}{\partial x}\end{aligned}$$

Y similar:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu(x,y)}{\partial y}$$

Por lo tanto.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 = \nu^2(x,y)$$

Integrando la ultima ecuación tenemos que:

$$u(x(t), y(t)) = u(x(0), y(0)) + \int_0^t \nu^2(x(\tau), y(\tau))d\tau, \tag{4}$$

1.6. Resolución de EDP Completamente No Lineal de Primer Orden con Condiciones Iniciales

Dada la EDP completamente no lineal, junto con una condición inicial:

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \tag{1}$$

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s) \tag{2}$$

donde $u(x_0(s), y_0(s))$ es una curva en el dominio y $u_0(s)$ es el valor inicial de u en esa curva.

Vamos a considerar las siguientes variables auxiliares:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

Resolvemos las siguentes ecuaciones, llamadas *condición de transversabilidad generalizada*

$$F(x, y, u, p_0, q_0) = 0 \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx_0(s)}{ds} \\ \frac{dy_0(s)}{ds} \\ \frac{du_0(s)}{ds} \end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{dx_0}{ds}\frac{dF}{dq} - \frac{dy_0}{ds}\frac{dF}{dp} \neq 0 \tag{6}$$

hallando $p_0(s)$ y $q_0(s)$ que seran las condiciones iniciales del siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{p} \qquad x(0) = x_o(s) \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dF}{q} \qquad y(0) = y_o(s) \tag{8}$$

$$\frac{dp}{dt} = -p(\frac{dF}{u} + \frac{dF}{x}) \qquad p(0) = p_o(s) \tag{9}$$

$$\frac{dq}{dt} = -q(\frac{dF}{q} + \frac{dF}{y}) \qquad q(0) = q_o(s) \tag{10}$$

$$\frac{du}{dt} = p\frac{dF}{dp} + q\frac{dF}{dq} \qquad u(0) = u_o(s) \tag{11}$$

Si el sistema de la condición de transversabilidad generalizado podría arrojar más de una solución $p_0(s), q_0(s)$, con cada una se puede resolver el problema de Cauchy y serán soluciones validas.

Lo otro es que la condición de transversabilidad (6) aquí viene dada por los vectores (F_p, F_q) y $(\frac{dx_0}{ds}, \frac{dy_0(s)}{ds})$.

Observación 1.3. *Note que el caso no lineal analiza el caso general, lineal, cuasilineal, y completamente no lineal. Y el analisis de perdida de unicidad en función de las condición de transversabilidad es equivalente.*

1.7. Ecuaciones de Segundo Orden Cuasilineales y su Clasificación

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de segundo orden cuasilineales son una clase importante de EDPs que involucran derivadas de segundo orden (segundas derivadas) de una función desconocida $u(x, y)$. La forma general de una EDP cuasilineal de segundo orden es:

$$a(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \tag{12}$$

Donde $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$, $c(x, y, u)$ y $d(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ son funciones conocidas que dependen de x, y, u, y posiblemente de las derivadas parciales de u.

Para simplificar esta ecuación, realizamos un cambio de variable introduciendo dos nuevas variables, ξ y η, de la siguiente manera:

$$u(x,y) = W(\xi,\eta)$$

Donde:

$$\xi = \xi(x,y)$$

$$\eta = \eta(x,y)$$

Ahora, calculemos las derivadas parciales de u con respecto a x y y en términos de ξ y η:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Ahora, calculemos las segundas derivadas de u con respecto a x y y utilizando las expresiones anteriores:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

Luego, sustituimos estas expresiones en la ecuación original:

$$A(x,y,W)\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2B(x,y,W)\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + C(x,y,W)\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = D(x,y,W,P,Q)$$

donde:

$$\begin{aligned}
A(x,y,W) &= a(x,y,W)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y,W)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c(x,y,W)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\
B(x,y,W) &= a(x,y,W)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x,y,W)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c(x,y,W)\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} \\
C(x,y,W) &= a(x,y,W)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y,W)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c(x,y,W)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

Estas EDPs cuasilineales pueden clasificarse en tres categorías principales según su comportamiento característico:

1.7.1. Ecuaciones Elipticas

$$a(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1}$$

Una ecuación de segundo orden se considera **elíptica** en un punto (x_0, y_0) si la matriz:

$$\begin{pmatrix} a(x_0,y_0,u) & b(x_0,y_0,u) \\ b(x_0,y_0,u) & c(x_0,y_0,u) \end{pmatrix}$$

es definida positiva en ese punto. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\det \begin{vmatrix} a(x_0,y_0,u) & b(x_0,y_0,u) \\ b(x_0,y_0,u) & c(x_0,y_0,u) \end{vmatrix} = a(x_0,y_0,u)\cdot c(x_0,y_0,u) - b^2(x_0,y_0,u) > 0$$

Para que la ecuación sea elíptica, el determinante de la matriz debe ser positivo en cada punto (x_0, y_0) de interés.

Una ecuación elíptica en forma canónica es de la forma:

$$\Delta W = f(x,y,W)$$

donde Δ es el operador laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Para llevar la ecuación original a esta forma, podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\xi \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b}{a} \tag{2}$$

$$\eta \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \tag{3}$$

1.7.2. Ecuaciones Parabólicas

$$a(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1}$$

Una EDP de segundo orden se considera **parabólica** en un punto (x_0, y_0) si la matriz:

$$\begin{pmatrix} a(x_0,y_0,u) & b(x_0,y_0,u) \\ b(x_0,y_0,u) & c(x_0,y_0,u) \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\det \begin{vmatrix} a(x_0,y_0,u) & b(x_0,y_0,u) \\ b(x_0,y_0,u) & c(x_0,y_0,u) \end{vmatrix} = a(x_0,y_0,u)\cdot c(x_0,y_0,u) - b^2(x_0,y_0,u) = 0$$

es singular en ese punto. Estas ecuaciones a menudo están asociadas con problemas de propagación de ondas y difusión en el tiempo, como la ecuación del calor o la ecuación de onda.

La forma canónica de una EDP parabólica es:

$$Au_{xx} + d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

Para llevar la ecuación original a su forma canónica, podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\eta \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b}{a} \tag{2}$$

$$\xi \qquad tq \qquad \frac{\partial(\eta,\xi)}{\partial(x,y)} \neq 0 \tag{3}$$

1.7.3. Ecuaciones Hiperbólicas

$$a(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1}$$

Una EDP de segundo orden se considera **hiperbólica** en un punto (x_0, y_0) si

$$\det \begin{vmatrix} a(x_0,y_0,u) & b(x_0,y_0,u) \\ b(x_0,y_0,u) & c(x_0,y_0,u) \end{vmatrix} = a(x_0,y_0,u)\cdot c(x_0,y_0,u) - b^2(x_0,y_0,u) < 0$$

La forma canonica de una EDP Hierbolica es:

$$Au_{xy} + d(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

Para llevar la ecuación original a su forma canónica, podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\xi \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b - \sqrt{ac - b^2}}{a} \tag{2}$$

$$\eta \qquad de \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b + \sqrt{ac - b^2}}{a} \tag{3}$$

2. Ecuación de onda

La ecuación de onda describe la propagación de ondas a través de un medio. Es fundamental en física y se utiliza para describir fenómenos como las ondas sonoras, las ondas de luz y las ondas en cuerdas o membranas.

La forma unidimensional de la ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{1}$$

Donde:

- u es el desplazamiento de la onda en función del tiempo t y de la posición x.
- c es la velocidad de propagación de la onda en el medio.

2.1. Solución General de la ecuación homogénea

Note que la ecuación de onda homogénea es:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})u = 0 \tag{2}$$

De donde sabemos que las curvas características de la ecuación son:

$$\xi = x - ct \qquad \eta = x + ct$$

A partir de la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \\
&= -c\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial u^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= -c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) + c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) \\
&= c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\
4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} &= 0 \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} &= 0
\end{aligned}$$

Integrando tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= w(\eta) \\
u(\xi, \eta) &= \int w(\eta) d\eta + F(\xi)
\end{aligned}$$

Y así

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \tag{3}$$

Es la solución general a la ecuación de onda homogénea. Donde F y G son de clase C^1.

2.2. Fórmula de D'Alambert para el Problema de Cauchy

Dado el problema de Cauchy para la ecuación de onda:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
u(x,0) &= \varphi(x) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x)
\end{aligned}
$$

Vimos que la solución general de la ecuación tiene la forma:

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

La idea es tomar F y G que generen una solución que satisfaga las condiciones iniciales. Luego

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -cF'(x) + cG'(x) = \psi(x) \tag{2}$$

Integrando en la última igualdad obtenemos

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)ds - F(0) + G(0)$$

Sumando con (4) obtenemos

$$
\begin{aligned}
2G(x) &= \varphi(x) + \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)ds - F(0) + G(0) \\
G(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds - \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}G(0)
\end{aligned}
$$

y de nuevo en la ecuación (4) obtenemos

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \varphi(x) - G(x) \\
&= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}G(0)
\end{aligned}
$$

Finalmente obtenemos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds \tag{3}$$

Esta la fórmula de d'Alambert para el problema de Cauchy para la ecuación de onda en la linea real.

Teorema 2.1 (Dependencia continua del dato inicial)**.** *Dado el problema de Cauchy.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) &= \varphi_i(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi_i(x) \end{aligned}$$

en $-\infty < x < \infty$ *y* $t > 0$

Sea u_1 *solución para* $i = 1$ *y* u_2 *solución para* $i = 2$.

Dado $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si*

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta \quad y \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$$

para $-\infty < x < \infty$ *y* $t > 0$*, entonces*

$$|u_1(x) - u_2(x)| < \epsilon$$

para $-\infty < x < \infty$ *y* $t > 0$.

2.3. El triangulo característico y la influencia de un intervalo espacial

Dada la formula de d'Alambert para la solución del problema de Cauchy para la ecuación de onda como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} \psi(s)ds\right) && (1) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} \psi(s)ds\right) && (2) \\ &= F(x-ct) + B(x+ct) && (3) \end{aligned}$$

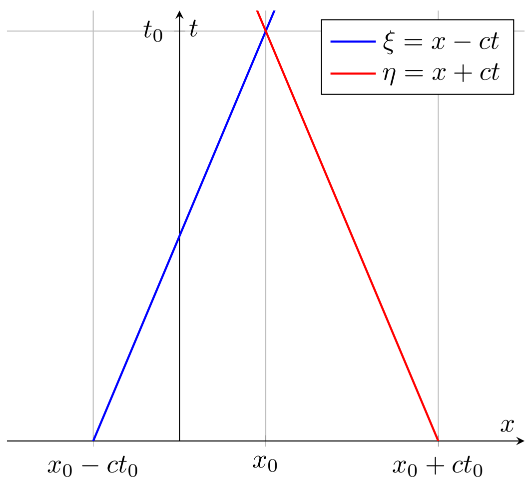
Donde

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds \tag{4}$$
$$B(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds \tag{5}$$

Note que las curvas características son

$$\xi = x - ct \qquad \eta = x + ct$$

que para ξ y η fijos tenemos



Este es llamado el triangulo característico para $x = x_0$ y $t = t_0$. Donde se interceptan las curvas características en (x_0, t_0) y notamos una influencia del intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ sobre el punto (x_0, t_0).

En la formula de d'Alambert vemos

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 - ct_0) + \varphi(x_0 + ct_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(s)ds \tag{6}$$
$$= F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0) \tag{7}$$

Los términos $\varphi(x_0 - ct_0)$ y $\varphi(x_0 + ct_0)$ son la posición inicial de la función evaluada en dos números $x_0 - ct_0$ y $x_0 + ct_0$, y depende solamente de esos dos puntos. La integral en la fórmula depende de ψ en el intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ Considerando la igualdad (7) con F y B dados por (4) y (5) respectivamente. A lo largo de la característica $x - ct = x_0 - ct_0$, $F(x - ct)$ tiene un valor constante $F(x_0 - ct_0)$. Además A lo largo de la característica $x + ct = x_0 + ct_0$, $B(x - ct)$ tiene un valor constante $B(x_0 + ct_0)$. *Una solución de la ecuación de onda propaga disturbios con velocidad constante c a lo largo de sus características.*

2.4. La ecuación de onda en media recta

Vamos a resolver el problema de Cauchy para la ecuación de onda sobre la media recta $x > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && x > 0, t > 0 \\
u(x,0) &= \varphi(x) && x \geq 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) && x \geq 0 \\
u(0,t) &= 0 && t \geq 0
\end{aligned}$$

Tomemos

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\psi(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, para $x \geq 0$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ y $\Psi(-x) = -\Psi(x)$.

Ahora considere el siguiente problema de Cauchy sobre toda la recta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
u(x,0) &= \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x) && -\infty < x < \infty
\end{aligned}$$

La solución de este problema es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x-ct) + \Phi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)ds$$

Podemos verificar que u satisface las condiciones iniciales del problema sobre recta, pues para $x > 0$

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= \frac{1}{2}\left(\Phi(x) + \Phi(x)\right) \\
&= \Phi(x) = \varphi(x) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \frac{1}{2}\left(-c\Phi'(x) + c\Phi(x)\right) + \frac{1}{2c}\left(c\Psi(x) + c\Psi(x)\right) \\
&= \Psi(x) = \psi(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto u staisface la condición inicila del problema sobre la media recta. Finalmente necesitamos que

$u(0,t)=0$ Y

$$u(0,t)=\frac{1}{2}\left(\Phi(-ct)+\Phi(ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct}\Psi(s)ds$$

Pero dado que Ψ y Φ son impares se tiene que

$$\Phi(-ct)+\Phi(ct)=\Phi(ct)-\Phi(ct)=0$$
$$\int_{-ct}^{ct}\Psi(s)ds=0$$

2.5. Problema de Dirichlet

Vamos a resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x>0, t>0 \tag{1}$$
$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad x\geq 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \qquad x\geq 0 \tag{3}$$
$$u(0,t)=f(t) \qquad t\geq 0 \tag{4}$$

Usando la fórmula de d'Alambert para el problema de Cauchy obtenemos

Supongamos primero $x_0\geq ct_0$

$$\begin{aligned} u(x_0,t_0)&=\frac{1}{2}\left(\varphi(x_0-ct_0)+\varphi(x_0+ct_0)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}\psi(s)ds \\ &=F(x_0-ct_0)+B(x_0+ct_0)\end{aligned}$$

de la condición $u(0,t_0)=f(t_0)$, Tenemos

$$\begin{aligned} f(t_0)&=F(-ct_0)+B(ct_0) \\ F(-ct_0)&=f(t_0)-B(ct_0) \\ F(-\tau)&=f(\frac{\tau}{c})-B(\tau)\end{aligned}$$

para $u>0$, Esto extiende a F a valores negativos. Usamos la misma F, para denotar esta extensión, por simplicidad.

Ahorra bien, tomando $x_0 - ct_0 < 0$

$$\begin{aligned} F(x_o - ct_0) &= F(-(ct_0 - x_0)) \\ &= f(\frac{ct_0 - x_0}{c}) - B(ct_0 - x_0) \\ &= f(t_0 - \frac{x_0}{c}) - B(ct_0 - x_0) \end{aligned}$$

Substituyendo en la formula de d'Alambert obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0) \\ &= f(t_0 - \frac{x_0}{c}) - B(ct_0 - x_0) + B(x_0 + ct_0) \qquad x_0 - ct_0 < 0 \end{aligned}$$

Volviendo a la definición para la onda B

$$u(x_0, t_0) = f(t_0 - \frac{x_0}{c}) + \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 + ct_0) - \varphi(ct_0 - x_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct_0 - x_0}^{x_0 + ct_0} \psi(s)ds, \qquad x_0 < ct_0$$

De aquí también podemos calcular $u(x_0, t_0)$ para $x_0 - ct_0 \geq 0$ y para $x_0 - ct_0 < 0$

Por lo tanto

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds & \text{si } x \geq ct \\ f(t - \frac{x}{c}) + \frac{1}{2}\left(\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s)ds & \text{si } x < ct \end{cases} \tag{1}$$

De aquí se puede analizar la continuidad, a esta se le llama condición de compatibilidad de la solución.

2.6. Problema de Neuman

Vamos a resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x > 0, t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \geq 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad x \geq 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h(t) \qquad t \geq 0 \tag{4}$$

Supongamos primero $x_0 \geq ct_0$, y de la formula de d'Alambert

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 - ct_0) + \varphi(x_0 + ct_0)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(s)ds$$

Ahoara bien, si $x_0 < ct_0$, tomando la solución general

$$u(x_0,t_0) = F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0)$$

Derivando respecto a x

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F'(x - ct) + B'(x + ct)$$

Pero de (4)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= h(t) \\
&= F'(-ct) + B'(ct) \\
B'(ct) &= h(t) - F'(-ct) \\
B'(\tau) &= h(\frac{\tau}{c}) - F'(-\tau)
\end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned}
B(t) &= \int_0^t h(\frac{\tau}{c})d\tau + F(-t) \\
&= \int_0^t h(\frac{\tau}{c})d\tau + \frac{1}{2}\left(\varphi(t)\frac{1}{c}\int_0^t \psi(\xi)d\xi\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0-ct_0)+\varphi(x_0+ct_0)\right) - \int_0^t h(\frac{\tau}{c})d\tau + \frac{1}{2c}\int_0^{x_0+ct_0}\psi(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^{ct0-x_0}\psi(s)ds$$

Entonces la solución es

$$u(x_0,t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds & \text{si } x \geq ct \\ \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right) - \int_0^t h(\frac{\tau}{c})d\tau + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct}\psi(s)ds + \int_0^{ct0-x}\psi(s)ds\right) & \text{si } x < ct \end{cases} \tag{5}$$

Similar que en el problema de Dirichlet aquí se puede analizar la continuidad, a esta se le llama condición de compatibilidad de la solución.

2.7. Problema de Robin

Vamos a resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x > 0, t > 0 \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \geq 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad x \geq 0 \qquad (3)$$

$$\alpha u(0,t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t) \qquad t \geq 0 \qquad (4)$$

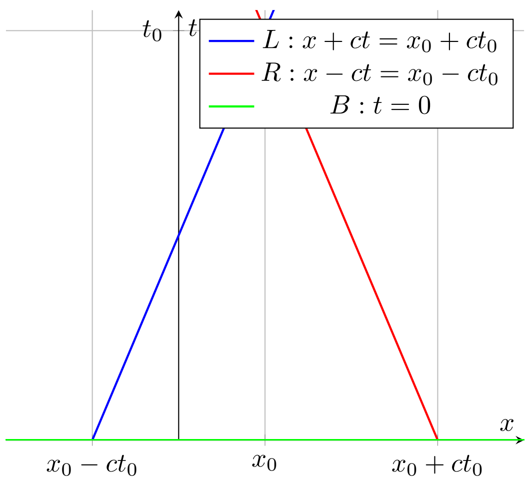
2.8. Problema no homogéneo en la recta real

Resolveremos el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t) \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad x \geq 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad x \geq 0 \tag{3}$$



Usaremos la formula de Green,

Teorema 2.2 (Formula de Green)**.** *Sea C una curva cerrada simple, positivamente orientada, y D la región encerrada por C. Si P y Q son funciones de dos variables con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene D, entonces*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_C (P\,dx + Q\,dy). \tag{4}$$

Sea $u(x,t)$ una solución del problema no homogéneo. Integrando ambos lados de la ecuación inicial sobre el triangulo característico tenemos

$$-\int\int_\triangle F(x,t)dxdt = \int\int_\triangle [c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}]dxdt$$

Usando la formula de Green tenemos, llamando Γ a la frontera del triangulo

$$\begin{aligned}-\int\int_\triangle F(x,t)dxdt &= \oint_\Gamma [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt]\\ &= \int_B + \int_R + \int_L [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt]\end{aligned}$$

En la base B tenemos que $dt = 0$, por lo tanto usando la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned}\int_B [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt] &= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \frac{\partial u}{\partial t}dx \\ &= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx\end{aligned}$$

Para el lado derecho R, $x + ct = x_0 + ct_0$, por lo que $dx = -cdt$, y asi

$$\begin{aligned}\int_R [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt] &= -c\int_R [\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx] \\ &= -c\int_R du \\ &= -c[u(x_0, t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)] \\ &= -c[u(x_0, t_0) - f(x_0 + ct_0)]\end{aligned}$$

Y para el lado izquierdo L, $x - ct = x_0 - ct_0$, por lo que $dx = cdt$, y asi

$$\begin{aligned}\int_L [\frac{\partial u}{\partial t}dx + c^2\frac{\partial u}{\partial x}dt] &= c\int_R [\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx] \\ &= c\int_L du \\ &= c[u(x_0 + ct_0, 0) - u(x_0, t_0)] \\ &= c[f(x_0 - ct_0) - u(x_0, t_0)]\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\int\int_\triangle F(x,t)dxdt = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx + c[f(x_0 - ct_0) + f(x_0 + ct_0) - 2u(x_0, t_0)]$$

Resolviendo para u

$$\begin{aligned}u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2}[f(x_0 - ct_0) + f(x_0 + ct_0)] + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int\int_\triangle F(\xi, \tau)d\xi d\tau \\ u(x,t) &= \frac{1}{2}[f(x_0 - ct_0) + f(x_0 + ct_0)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau)d\xi d\tau\end{aligned}$$

Esta es llamada la formula de d'Alambert para la ecuación de onda no homogénea.

2.9. Problema sobre un intervalo cerrado

Analicemos el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, t > 0 \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad 0 < x < L \tag{6}$$

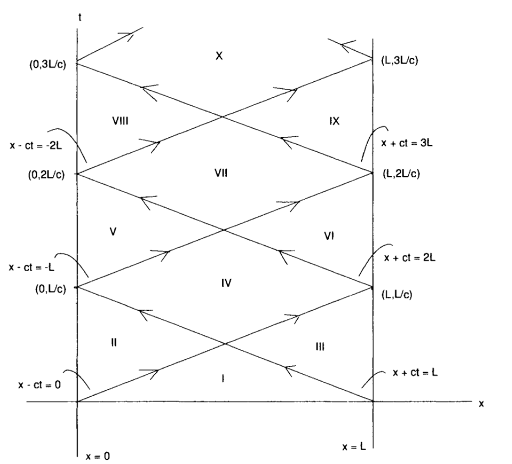
$$u(0,t) = a(t) \quad u(L,t) = b(t) \qquad 0 < x < L \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Recordemos que las características de esta ecuación son:

$$\xi = x - ct \qquad \eta = x + ct$$

La solución se basa en segmentos de características y partir el intervalo $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ en triángulos y cuadriláteros, de la siguiente forma:



Sabemos que

$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u(0,t) = a(t)$$
$$u(L,t) = b(t)$$

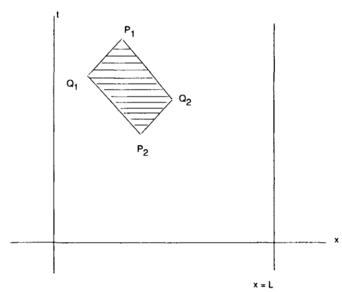
Y queremos saber $u(x,t)$ para los puntos interiores.

Para esto nos basaremos en el cuadrilátero característico formado por los segmentos de cuatro caracteristicas. P_1 y P_2 son vertices opuestos, como lo son Q_1 y Q_2. Recurrimos a que si U es una solución, de la ecuación de onda , entonces

$$u(P_1) + u(P_2) = u(Q_1) + u(Q_2)$$

Es to es del hecho de que

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

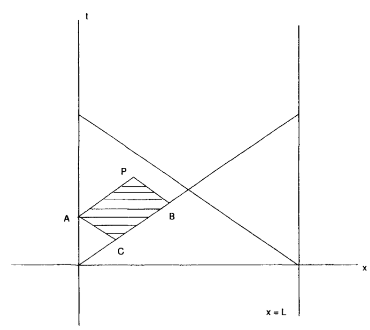


Ahora bien, analicemos cada región en la partición del intervalo.

Si $P = (x,t)$ está en la región I, entonces $u(x,t)$ viene dada por la formula de d'Alambert, es decir

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds$$

Si $P = (x,t)$ está en la región II



Del cuadrilátero característico teniendo un vértice en el eje $x = 0$

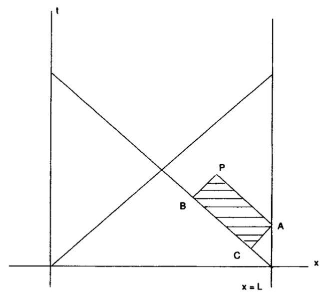
Obtenemos

$$u(P) = u(A) + u(B) - u(C)$$

De donde $u(A)$, se conoce de $u(0, t_A) = a(t_A)$. También $u(B)$ y $u(C)$, se conocen están en la región I desde la formula de d'Alambert.

$$u(B) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_B - ct_B) + \varphi(x_B + ct_B)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_B-ct_B}^{x_B+ct_B} \psi(s)ds$$
$$u(C) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_C - ct_C) + \varphi(x_C + ct_C)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_C-ct_C}^{x_C+ct_C} \psi(s)ds$$

Si $P = (x, t)$ está en la región III



Del cuadrilátero característico teniendo un vértice en el eje $x = L$

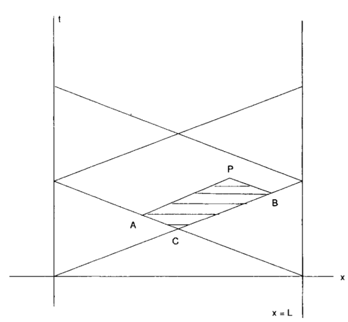
Obtenemos

$$u(P) = u(A) + u(B) - u(C)$$

De donde $u(A)$, se conoce de $u(L, t_A) = b(t_A)$. También $u(B)$ y $u(C)$, se conocen están en la región I desde la formula de d'Alambert.

$$u(B) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_B - ct_B) + \varphi(x_B + ct_B)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_B - ct_B}^{x_B + ct_B} \psi(s)ds$$
$$u(C) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_C - ct_C) + \varphi(x_C + ct_C)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x_C - ct_C}^{x_C + ct_C} \psi(s)ds$$

Si $P = (x, t)$ está en la región IV



Del cuadrilátero característico teniendo un vértice en el eje $x = L$

Obtenemos

$$u(P) = u(A) + u(B) - u(C)$$

De donde $u(C)$, se conoce de pues está en la región I. También $u(A)$ y $u(B)$, se conocen están en la región II y III.

Y con este mismo proceso se puede seguir para el resto de regiones de manera recursiva se tiene que una región depende de las anteriores, que se tienen definidas.