El método de Lagrange

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\frac{dx}{P(x,y,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,u)} = \frac{du}{R(x,y,u)}. \tag{1}$$

Este sistema se llama ecuaciones subsidiarias. Si $P \neq 0$, entonces las ecuaciones subsidiarias son equivalente al sistema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y,u)}{P(x,y,u)}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{R(x,y,u)}{P(x,y,u)}. \tag{2}$$

De manera similar, si $Q \neq 0$ o $R \neq 0$, entonces las ecuaciones subsidiarias pueden ser escritas en forma equivalente a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y,u)}{Q(x,y,u)}, \qquad \frac{du}{dy} = \frac{R(x,y,u)}{Q(x,y,u)} \tag{3}$$

o

$$\frac{dx}{du} = \frac{P(x,y,u)}{R(x,y,u)}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{Q(x,y,u)}{R(x,y,u)}, \tag{4}$$

respectivamente. La ventaja del sistema subsidiario es que evita la distinción entre variable dependiente y variable independiente.

La solución general del sistema 2 tiene la forma

$$y = y(x, c_1, c_2), \qquad u = u(x, c_1, c_2)$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Si estas ecuaciones se resuelven para c_1 y c_2, entonces la solución general de las ecuaciones subsidiarias 1 se puede escribir en la forma

$$v(x,y,u) = c_1, \qquad w(x,y,u) = c_2.$$

Cada relación $v = c_1$, $w = c_2$ se llama una integral de las ecuaciones subsidiarias.

Si v y w son funcionalmente independientes es alguna región G en el espacio xyu; es decir, los jacobianos

$$\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}, \qquad \frac{\partial(v,w)}{\partial(x,u)}, \qquad \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,u)}$$

no son todos cero en ningún punto de G, entonces la solución general de la ecuación cuasilineal viene dada por

$$F(v, w) = 0,$$

donde F es una función arbitraria. La solución $F(v, w) = 0$ se puede escribir en las formas alternativas

$$w = f(v) \quad \text{o} \quad v = g(w),$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

Teorema 0.0.1 *(Solución de la ecuación cuasilineal)*
Sean v y w dos soluciones funcionalmente independientes de la ecuación subsidiaria 1 en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea $F(v, w)$ una función arbitraria con derivadas continuas de primer orden. Entonces la ecuación

$$F(v(x, y, u), w(x, y, u)) = 0$$

define u implícitamente como una función de x e y y esta función es una solución de la ecuación

$$P(x, y, u)u_x + Q(x, y, u)u_y = R(x, y, u).$$

Ejemplo 0.1 *Encuentra la solución general de la ecuación*

$$xuu_x + yuu_y + x^2 + y^2 = 0.$$

SOLUCIÓN: La solución general es

$$F(\frac{y}{x}, u^2 + x^2 + y^2) = 0,$$

donde F es una función arbitraria.

Alternativamente, la solución se puede escribir como

$$y = xf(u^2 + x^2 + y^2) \quad \text{o} \quad u^2 + x^2 + y^2 = g(\frac{y}{x}),$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

Ejercicio: Demuestra que $F(\frac{y}{x}, u^2 + x^2 + y^2) = 0$ es una solución de $xuu_x + yuu_y + x^2 + y^2 = 0$.

Ejemplo 0.2 *Resuelve la ecuación*

$$xu_x + yu_y + u = 0.$$

SOLUCIÓN:

La solución general es

$$F(\frac{y}{x}, xu) = 0,$$

donde F es una función arbitraria.

Alternativamente, la solución se puede escribir como

$$u = \frac{1}{x}f(y/x) \quad \text{o} \quad y = g(xu),$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

El método de los multiplicadores

Una técnica útil para integrar un sistema de ecuaciones de primer orden es el método de los multiplicadores.

Proposición 0.1 *Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, entonces*

$$\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

para valores arbitrarios de multiplicadores λ, μ.

PRUEBA. Asuma que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Entonces tenemos $ad = bc$. Multiplicando ambos lados por λ obtenemos

$$\lambda ad = \lambda bc. \tag{5}$$

Del mismo modo, multiplicando ambos lados por μ obtenemos

$$\mu ad = \mu bc. \tag{6}$$

Sumando $cd\mu$ en la ecuación 5 y $ab\lambda$ en la ecuación 6 obtenemos

$$c(\lambda b + \mu d) = d(\lambda a + \mu c)$$
$$a(\lambda b + \mu d) = b(\lambda a + \mu c)$$

y de ahí obtenemos el resultado. $\square$

Corolario 0.0.1.1 *Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ *, entonces*

$$\frac{\lambda a + \mu c + \nu e}{\lambda b + \mu d + \nu f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f},$$

para valores arbitrarios de multiplicadores λ, μ, ν*.*

PRUEBA. Ejercicio. $\square$

Observación 0.1 *Aplicación del Corolario 0.0.1.1 al sistema subsidiario*

$$\frac{dx}{P(x,y,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,u)} = \frac{du}{R(x,y,u)}$$

obtenemos

$$\frac{\lambda dx + \mu dy + \nu du}{\lambda P + \mu Q + \nu R} = \frac{dx}{P(x,y,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,u)} = \frac{du}{R(x,y,u)}.$$

De esta forma se pueden formar ecuaciones diferenciales relacionadas, algunas de las cuales pueden ser fáciles de integrar. En particular si λ, μ, ν *se eligen de tal manera que*

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = 0,$$

entonces

$$\lambda dx + \mu dy + \nu du = 0.$$

Ahora bien, si existe una función v *tal que*

$$dv = \lambda dx + \mu dy + \nu du,$$

entonces $v(x,y,u) = c_1$ *es una integral de las ecuaciones subsidiarias.*

Ejemplo 0.3 *Encuentra la solución general de la ecuación*

$$uu_x + yu_y = x.$$

SOLUCIÓN: La solución general está dada por

$$F\left(x^2 - u^2, \frac{x+y}{y}\right) = 0.$$

Ejemplo 0.4 *Encuentra la solución general de la ecuación*

$$(y-x)u_x + (y+x)u_y = \frac{x^2+y^2}{u}.$$

SOLUCIÓN: La solución general está dada por

$$F\left(x^2 + 2xy - y^2, x^2 - y^2 + u^2\right) = 0.$$

Ejercicios

Encuentre la solución general de cada una de las siguientes EDPs:

(a) $u_x + xu_y = u$

(b) $xu_x + yu_y = nu$, donde n es una constante.

(c) $(x+u)u_x + (y+u)u_y = 0$

(d) $xu_x + yu_y = y$

(e) $(x+y)(u_x - u_y) = u$

(f) $yu_x - xu_y = x^3y + xy^3$

(g) $u_x - 2u_y = 3x^2 \sin(y+2x)$

(h) $\cos(y)u_x + cos(x)u_y = \cos x \cos y$

(i) $yu_x - xu_y + u + x^2 + y^2 - 1 = 0$

(j) $(x^2 - y^2 - u^2)u_x + 2xyu_y = 2xu$

(k) $(xy^3 - 2x^4)u_x + (2y^4 - x^3y)u_y = 9u(x^3 - y^3)$

(l) $(x + y)u_x + (y + u)u_y = u$