Jairo Eloy- 20 de febrero de 2022

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Capítulo 4

La ecuación de Laplace

4.1. Descripción intuitiva del laplaciano

Sea $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ un campo vectorial con primeras derivadas continuas el cual representa la densidad de flujo por unidad de volúmen de cierta sustancia. Sea $\boldsymbol{P}_o = (x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)})$ un punto en la sustancia y B_ϵ una bola con centro en $\boldsymbol{P}_o$ y radio ϵ. Dada la continuidad de $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}$, al aplicar el teorema de la divergencia de Gauss y el teorema del valor medio para las integrales de volumen se tiene que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}_o) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{Vol(B_\epsilon)} \int_{\partial B_\epsilon} \boldsymbol{\phi} \cdot dS$$

donde $Vol(B_\epsilon)$ es el volumen de la bola con centro en $\boldsymbol{P}_o$ y radio ϵ. Supongamos que $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}_o) > 0$ entonces existe una bola B_ϵ para ϵ suficientemente pequeño con $\int_{\partial B_\epsilon} \boldsymbol{\phi} \cdot dS > 0$.

Por lo tanto, dado que la integral de superficie representa el flujo de $\boldsymbol{\phi}$ a través de ∂B_ϵ, el flujo neto promedio cerca de $\boldsymbol{P}_o$ es hacia afuera de la frontera de B_ϵ en tal caso al punto $\boldsymbol{P}_o$ se le conoce como *fuente*, y si $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}_o) < 0$, el flujo neto es hacia adentro de la frontera de B_ϵ y en tal caso a $\boldsymbol{P}_o$ se le conoce como *sumidero*.

Considérese el caso en el que $\boldsymbol{\phi} = -\nabla u$ entonces $\operatorname{div}(-\nabla u) = -\Delta u$. Si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o) > 0$, entonces $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}_o) < 0$, de esta forma, $\boldsymbol{P}_o$ es un punto sumidero. De esta manera, la temperatura en $\boldsymbol{P}_o$ (el cual es el centro de la bola) debe ser menor que el promedio de sus vecinos. Si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o) < 0$, entonces $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}_o) > 0$, y el punto $\boldsymbol{P}_o$ es una fuente y por lo tanto $u(\boldsymbol{P}_o)$ es mayor que el promedio de sus vecinos. Finalmente, si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o) = 0$, no hay flujo y u es igual al promedio de sus vecinos en una vecindad de $\boldsymbol{P}_o$: Resumiendo:

- Si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o) > 0$, $u(\boldsymbol{P}_o)$ es menor que el promedio de sus vecinos en una bola B_ϵ con centro en $\boldsymbol{P}_o$ y radio suficientemente pequeño ϵ.

- Si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o) < 0$, $u(\boldsymbol{P}_o)$ es mayor que el promedio de sus vecinos en una bola B_ϵ con centro en $\boldsymbol{P}_o$ y radio suficientemente pequeño ϵ.

- Si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o) = 0$, $u(\boldsymbol{P}_o)$ es igual al promedio de sus vecinos en una bola B_ϵ con centro en $\boldsymbol{P}_o$ y radio suficientemente pequeño ϵ.

Una buena ilustración de las consideraciones anteriores resulta al tomar el caso de $u = u(x, y)$ veáse la figura 4.1.

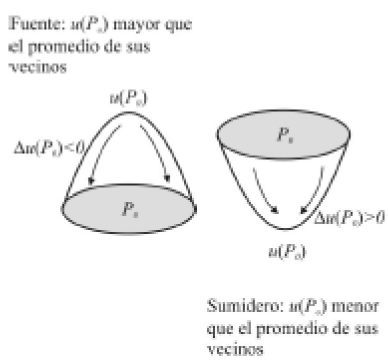

Figura 4.1: Interpretación de Δu.

La descripción de esta sección ilustra la importancia del laplaciano en la modelación matemática ya que esta asociado con los procesos en los que ocurre una difusión, es decir el paso de una mayor concentración a una menor concentración de una sustancia dada, pero eso no es todo, el laplaciano tiene una gran cantidad de aplicaciones en la matemática teórica, por ejemplo, en el estudio de funciones armónicas en la variable compleja (ver por ejemplo Ahlfors, L. V., Complex Analysis, Third Edition, Mc Graw Hill 1979. pag. 162).

Podemos ahora dar una descripción de la ecuación de calor o de difusión en $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, la cual generaliza la interpretación para una sola variable espacial. Sea $u : \overline{\Omega} \times [0, T] \to \mathbb{R}$, donde $\Omega \to \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado. Supongamos que u tiene segundas derivadas continuas en $\Omega \times [0, T]$ y que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u. \tag{4.1}$$

Entonces si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o, t_o) > 0$, tenemos $\frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{P}_o, t_o) > 0$ es decir u tiende a crecer en una vecindad de P_o para $t > t_o$. Por otro lado, si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o, t_o) < 0$, entonces u tiende a decrecer en una vecindad de P_o para $t > t_o$. Si u representa la concentración de una sustancia en el punto P_o al tiempo t entonces la ecuación (4.1) representa la tendencia de la sustancia a pasar de una concentración mayor a una menor.

Para la ecuación de onda, en $\mathbb{R}^2$, si U representa la altura de una membrana definida en Ω, se tiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u, \tag{4.2}$$

si $\Delta u(\boldsymbol{P}_o, t_o) > 0$, tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} > 0$, es decir, la fuerza de tensión en la membrana tiene componente en el eje $z = u(x, t)$ que apunta en la dirección positiva y su magnitud es menor en cuanto menor es la curvatura del perfil u en promedio, en una vecindad de $\boldsymbol{P}_o$. Si $\Delta(\boldsymbol{P}_o, t_o) < 0$, tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} < 0$, y en este caso, la componente en el eje z de la tensión tiene dirección negativa en una vecindad de $\boldsymbol{P}_o$.

4.2. Principio del máximo para la ecuación de Laplace

Finalmente, para la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, la cual puede interpretarse como una ecuación de calor estacionaria, la interpretación intuitiva del laplaciano invita a formular el criterio del máximo para soluciones de la ecuación de Laplace, principio que indica que el perfil de temperatura estacionario u alcanza sus valores máximo y mínimo en $\partial\Omega$.

4.2.1. Las Identidades de Green

4.2.2. Preliminares

Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es *conexo* si S no puede ser escrito como unión disjunta de dos subconjuntos no vacíos abiertos en S. En particular, si S es conexo y $A \subseteq S$ es al mismo tiempo abierto y cerrado en S, entonces $A = S$ o $A = \emptyset$. Un *dominio* es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es abierto y conexo.

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y $u \in C^2(\Omega)$, decimos que u es *armónica* en Ω si $\Delta u = 0$ en Ω.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Un *campo vectorial* en Ω es un función $F : \Omega \to \mathcal{C}^m$ con $m > 1$; el campo vectorial F es de clase C^k si y solamente si cada una de sus componentes $F_j : \Omega \to \mathcal{C}$ es de clase C^k, $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, $x \in \Omega$. Si $f : \Omega \to \mathcal{C}^1$, el campo vectorial continuo

$$\nabla f = \mathrm{grad} f = (D_1 f, \ldots, D_n f) \tag{4.3}$$

es el *gradiente de* f. Un campo vectorial $F : \Omega \to \mathcal{C}^n$ *proviene de un potenial* si existe una función $\varphi : \Omega \to \mathcal{C}$ diferenciable en Ω tal que $F = \nabla\varphi$. Si

$F : \Omega \to \mathcal{C}^n$ es un campo vectorial de clase C^1, la función

$$\nabla \cdot F = \mathrm{div} F = \sum_{j=1}^{n} D_j F_j \tag{4.4}$$

es el *divergente de* F, $F = (F_1, \ldots, F_)$. Observe que, si Δf es el laplaciano de $f : \Omega \to \mathcal{C}$, entonces

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f \tag{4.5}$$

y por esa razón se escribe $\Delta = \nabla^2$.

Muchas veces es conveniente extender las definiciones anteriores para conjuntos cerrados $\overline{\Omega}$. Por ejemplo, $f : \overline{\Omega} \to \mathcal{C}$ de clase C^1 en $\overline{\Omega}$ si y solamente si $f \in C^{(}\Omega)$ y existen $g_1, \ldots, g_n \in C^{(}\overline{\Omega}$ tales que $g_j = D_j f$ en Ω, $j = 1, \ldots, n$. Las definiciones anteriores pueden ser extendidas de manera análoga.

Un teorema fundamental para el estudio de las EDP es el teorema de la divergencia en $\mathbb{R}^2$. Como el teorema de la divergencia en $\mathbb{R}^2$ es un corolario del teorema de Green, vamos a recordar, del curso de cálculo, el enunciado de este teorema.

Teorema 4.1 (Teorema de Green): *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *un dominio acotado y sean* $P, Q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *funciones continuas. Suponga que:*

- $\partial\Omega$ *es una curva cerrada simple (esto es, sin auto-intersección) rectificable;*

- *las derivadas parciales* Q_x *y* P_y *existen y son acotadas en* Ω*;*

- *las integrales duplas*

$$\int_{\Omega} Q_x \, dx \, dy, \qquad \int_{\Omega} P_y \, dx \, dy$$

  existen.

Entonces la integral de línea

$$\int_{\partial\Omega^+} (P\,dx + Q\,dy)$$

existe y

$$\int_{\overline{\Omega}} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega^+} (P\,dx + Q\,dy). \tag{4.6}$$

El teorema de Green es también valido para funciones complejas: si $P, Q : \overline{\Omega} \to \mathcal{C}$, $P = P_1 + iP_2$, $Q = Q_1 + iQ_2$ y los pares P_1, Q_1 y P_2, Q_2 satisfacen las condiciones del teorema (4.1), entonces

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Omega}} (\partial_x Q - \partial_y P)\,dx\,dy &= \int_{\overline{\Omega}} (\partial_x Q_1 - \partial_y P_1)\,dx\,dy + i\int_{\overline{\Omega}} (\partial_x Q_2 - \partial_y P_2)\,dx\,dy \\ &= \int_{\partial\Omega^+} (P_1\,dx + Q_1\,dy) + i\int_{\partial\Omega^+} (P_2\,dx + Q_2\,dy) \\ &= \int_{\partial\Omega^+} (P\,dx + Q\,dy).\end{aligned}$$

Teorema 4.2 (Teorema de la Divergencia). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una unión finita de curvas suaves. Sea $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de Clase C^1 en $\overline{\Omega}$. Entonce*

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla \cdot F\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} F \cdot \widehat{n}\,ds, \tag{4.7}$$

donde $\widehat{n}$ es la normal externa unitaria.

Teorema 4.3 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio donde vale el teorema de la divergencia y sean $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces valen las siguientes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds, \tag{4.8}$$

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds \tag{4.9}$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada direccional en la dirección de la normal unitaria externa $\widehat{n}$.

Corolario 4.3.1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio donde vale el teorema de la divergencia y sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Entonces valen las siguientes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}} |\nabla u|^2 \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds, \tag{4.10}$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0. \tag{4.11}$$

Corolario 4.3.2 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio donde vale el teorema de la divergencia, $f \in C(\partial\Omega)$ y $g \in C^2(\partial\Omega)$. Entonces el problema*

$$\begin{aligned} &u \in C^2(\overline{\Omega}), \\ &\Delta u = f \quad en \quad \Omega, \\ &u = g \quad en \quad \Omega \end{aligned} \tag{4.12}$$

tiene a lo máximo una solución.

Definición 4.1 *La solución fundamental de $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^2$ es la función $F : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln |\xi|, \; \xi \neq 0. \tag{4.13}$$

Si $n \geq 3$, la solución fundamenta de $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n$ es la función $F : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\xi) = \frac{1}{(2-n)w_n} |\xi|^{2-n}, \; \xi \neq 0, \tag{4.14}$$

donde w_n es el área de la esfera $S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \; : \; |\xi| = 1\}$.

El área de la esfera S^{n-1} es dada por

$$w_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \tag{4.15}$$

donde Γ es la *función gama*, esto es,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1}\, dy.$$

En general el área de la esfera de radio R en $\mathbb{R}^n$ está dada por $w_n R^{n-1}$.

Calculando directamente, es fácil ver que si F es la solución fundamental de $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n$, entonces $\Delta F = 0$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Sea F la solución fundamental de $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^2$. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$, vamos a denotar por F_ξ la función $F_\xi(\eta) = F(\xi - \eta)$ definida para $\eta \neq \xi$.

Teorema 4.4 (Tercera identidad de Green). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado donde vale el teorema de la divergencia y sea $uC^2(\overline{\Omega})$. Entonces, cualquiera que se $\xi \in \Omega$,*

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} F_\xi)\, ds + \int_{\overline{\Omega}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta)\, d\eta. \tag{4.16}$$

Lema 4.1 *Sean $\xi \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ y $g : \overline{B(\xi; R)} \to \mathbb{R}$ Si g es acotada y $F_\xi g$ es integrable con respecto a la longitud del arco a lo largo de cualquier círculo centrado en ξ de radio $r \in (0, R)$, entonces*

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g\, ds = 0. \tag{4.17}$$

Lema 4.2 *Sean $\xi \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ y $g \in C(\overline{B(\xi; R)})$. Entonces*

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial n} g\, ds = g(\xi), \tag{4.18}$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada direccional en la dirección de la normal unitaria externa $\widehat{n}$.

Lema 4.3 *Sean $\xi \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ y $B(\xi; R) \subseteq \Omega$. Para cada $r \in (0, R)$, sea $\Omega_r = \Omega - \overline{B(\xi; R)}$. Entonces, cualquiera que sea $g \in C(\overline{\Omega})$, existe el límite*

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\overline{\Omega}_r} F_\xi(\eta) g(\eta)\, d\eta. \tag{4.19}$$

4.2.3. Principio del Máximo y Teoremas de Unicidad

Teorema 4.5 Teorema del valor medio. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y sea u una función armónica en Ω. Entonces, cualquiera que sean $\xi \in \Omega$ y $R > 0$ con $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$,*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi;R)} u \, ds. \tag{4.20}$$

Demostración: Aplicando la tercera identidad de Green a $B(\xi; R)$, obtenemos

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_{B(\xi;R)} (u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} F_\xi) \, ds + \int_{\overline{B(\xi;R)}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) \, d\eta \\ &= \int_{B(\xi;R)} u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} \, ds - \int_{B(\xi;R)} F_\xi \frac{\partial u}{\partial n} \, ds, \end{aligned}$$

pues $\Delta u = 0$. Como yá calculamos anteriormente, si $\eta \in \partial B(\xi; R)$,

$$\begin{aligned} F_\xi(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \ln |\xi - \eta| = \frac{1}{2\pi} \ln R \\ \frac{\partial F_\xi}{\partial n}(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\xi - \eta|} = \frac{1}{2\pi R} \end{aligned}$$

y por tanto

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi;R)} u \, ds - \frac{1}{2\pi} \ln R \int_{\partial B(\xi;R)} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Como u es armónica en $B(\xi; R)$, por corolario

$$\int_{\partial B(\xi;R)} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0,$$

lo que prueba el teorema. □

Teorema 4.6 (Principio del máximo para funciones armónicas) *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio y sea $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{\Omega}$ y armónica en Ω. Suponga que u alcanza su máximo en Ω, esto es, existe $\xi_0 \in \Omega$ tal que $u(\xi) \leq u(\xi_0)$ cualquiera que sea $\xi \in \overline{\Omega}$. Entonces u es constante en $\overline{\Omega}$.*

Demostración: Por hipótesis, u es acotada superiormente y alcanza su máximo en Ω, esto es, existe $\xi_o \in \Omega$ tal que

$$u(\xi_o) = M = \max\{u(\xi) \ : \ \xi \in \overline{\Omega}\}. \tag{4.21}$$

Sea $S = \{\xi \in \Omega \ : \ u(\xi) = M\}$. Entonces $S \neq \emptyset$ y S es cerrado en Ω (pues es la imagen inversa del cerrado en $\{M\}$ por la función continua $u|_\Omega$) Vamos a mostrar que S es abierto en Ω. Sea $\xi \in S$ arbitrario y sea $R > 0$ tal que $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$. Como u es armónica en Ω, por el teorema del valor medio

$$M = u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi;r)} u\, ds, \qquad \forall r \in (0, R). \tag{4.22}$$

Vamos a mostrar que $B(\xi; R) \subseteq S$: suponga por el absurdo que $B(\xi; R) \nsubseteq S$; entonces existe $\eta \in B(\xi; R)$ tal que $\eta \notin S$, luego $u(\eta) < M = u(\xi)$; por la continuidad de u, existe una vecindad V de η en $B(\xi; R)$ tal que $u < M$ en V; tomando $r = |\xi - \eta|$, $N = V \cap \partial B(\xi; r)$ y usando las ecuaciones (4.4), (4.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi;r)-N} u\, ds + \frac{1}{2\pi R} \int_N u\, ds \\
&\leq \frac{M}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi;r)-N} u\, ds + \frac{1}{2\pi r} \int_N u\, ds \\
&< \frac{M}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi;r)-N} u\, ds + \frac{M}{2\pi r} \int_N ds = M,
\end{aligned}$$

una contradicción. Por tanto $B(\xi; R) \subseteq S$ y S es abierto. Como Ω es conexo, $S \neq \emptyset$ y S es abierto y cerrado en Ω, $S = \Omega$ y por tanto u es constante en Ω luego, por continuidad, en $\overline{\Omega}$. □

Es claro que vale también *el principio del mínimo*: basta aplicar el principio del máximo para $-u$: Note que eso principios dicen de hecho que el máximo y el mínimo de una función real harmónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$ son alcanzados en $\partial\Omega$, desde que Ω sea un dominio acotado. Observe que en el teorema no pedimos que el dominio Ω fuera acotado: en el caso de dominio no acotado, la función puede no tener un máximo, lo que dicde el teorema es que, si la función alcanza un máximo, ese máximo es alcanzado en algún punto de la frontera $\partial\Omega$.

Corolario 4.6.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y sea $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. Entonces existe a lo máximo una solución del problema*

$$\begin{aligned} &u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ &\Delta u = f \quad en \quad \Omega, \\ &u|_{\partial\Omega} = g, \quad en \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Demostración: Sean u, v soluciones de (4.6) y $w = u - v$: entonces $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es armónica en Ω, luego alcanza su máximo y su mínimo en $\partial\Omega$; como $w|_{\partial\Omega} \equiv 0$, $w \equiv 0$ y $u \equiv v$. □

Teorema 4.7 - Principio del Máximo para la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^3$. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, conexo y acotado. Sea $u = u(x, y, z)$ una función armónica en Ω, es decir, una función que satisface $\Delta u = 0$ en Ω, la cual suponemos que es continua en $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces los valores máximos y mínimos de u se alcanzan en la frontera*

Demostración: Sea $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ y defínase $\nu(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) + \epsilon(x^2 + y^2 + z^2)$, donde $\epsilon > 0$ es un número cualquiera. Se tiene

$$\Delta\nu(\boldsymbol{x}) = \Delta u(\boldsymbol{x}) + \Delta(\epsilon(x^2 + y^2 + z^2)) = 0 + 6\epsilon \tag{4.24}$$

en Ω. Como ν es continua en el compacto $\overline{\Omega}$ alcanza su valor máximo. Si ν alcanzara el máximo en Ω se tendría en dicho punto $\Delta\nu = \nu_{xx} + \nu_{yy} + \nu_{zz} \leq 0$, lo cual contradice la desigualdad (4.24). Así el máximo de ν debe alcanzarse en la frontera. Sea $\boldsymbol{x}_o \in \partial\Omega$ un punto donde ν alcanza el máximo.

La demostración de que u alcanza su máximo en $\partial\Omega$, es una consecuencia de las siguientes desigualdades que se cumplen para todo punto de $\overline{\Omega}$

$$u(\boldsymbol{x}) \leq \nu(\boldsymbol{x}) \leq \nu(x_o) = u(\boldsymbol{x}_o) + e||\boldsymbol{x}_o||^2 \leq \max_{\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega} u(\boldsymbol{x}') + \epsilon||\boldsymbol{x}_o||^2.$$

Aplicando el límite cuando ϵ tiende a cero en la última desigualdad se tiene

$$u(\boldsymbol{x}) \leq \max_{x' \in \partial\Omega} u(\boldsymbol{x}'), \qquad \forall x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Para el mínimo se toma $-u$ y dado que $\max_{\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega}(-u(\boldsymbol{x}')) = -\min_{\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega}(u(\boldsymbol{x}'))$, al sustituir en la desigualdad anterior, la demostración queda terminada. □

Una vez que queda establecido el principio del máximo la unicidad de soluciones para el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Poisson se sigue fácilmente.

Teorema 4.8 -Unicidad para la ecuación de Poisson. *Sean u, v soluciones respectivas en Ω de*

$$\begin{cases} \Delta u & = f \quad en\ \Omega \\ u & = h \quad en\ \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v & = f \quad en\ \Omega \\ v & = h \quad en\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.25}$$

entonces $u = v$ en $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Demostración: Sea $w = u - v$ entonces $\Delta w = 0$ en Ω y $w = 0$ en $\partial\Omega$. El Teorema 4.7 implica que $w \equiv 0$ en $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, de donde se sigue la unicidad. □

Ejercicio Una sencilla modificación de las demostraciones de los teoremas 4.7, 4.8 anteriores las hace válidas para $\mathbb{R}^2$. ¿Son válidas en $\mathbb{R}^N$?

Ejercicio Verifique que el principio del máximo no se cumple para la ecuación de Poisson, por ejemplo la solución del problema

$$-u''(x) = 1$$

para $x \in (0; 1)$, $u(0) = u(1) = 0$.