Ecuaciones de Maxwell

Ley de Ampere - Maxwell.

Con la ley que lleva su nombre, Ampere fue el primero que estableció una relación entre corrientes eléctricas y campos magnéticos.
La "Ley de Ampere" relaciona una corriente neta encerrada y estacionaria a la circulación del campo magnético. Una de las limitaciones de la ley de Ampere es que ésta sólo se aplica al caso de corrientes estacionarias. Maxwell extendió la aplicabilidad de esta ley a condiciones dependientes del tiempo, mediante la adición de un término adicional (Un flujo eléctrico cambiante) en la ley que se conoce como La ley de Ampere - Maxwell, ésta ley permitió a Maxwell discernir la naturaleza electromagnética de la luz y desarrollar una teoría comprensiva del electromagnetismo.

La forma integral de la ley de Ampere - Maxwell

La forma integral de la ley de Ampere - Maxwell es escrita como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{enc} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds \right) - \text{La ley de Ampere - Maxwell.}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es una descripción de la circulación del campo magnético alrededor de una trayectoria cerrada C. El lado derecho incluye dos fuentes para el campo magnético; una corriente de conducción estacionaria y un flujo eléctrico cambiando a través de cualquier superficie S encerrada por la trayectoria C.

La principal idea de la ley de Ampere - Maxwell es:

> Una corriente eléctrica o un flujo eléctrico cambiante a través de una superficie produce un campo magnético alrededor de cualquier trayectoria que encierra la superficie.

Recuerde que el campo magnético es un vector

Producto punto, el cual nos dice la parte de $\vec{B}$ paralelo a $d\vec{\ell}$ (a lo largo de C)

Un incremento de C

Corriente eléctrica en Amperes.

la permeabilidad eléctrica en el vacío

la rata de cambio con el tiempo.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left(I_{enc} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds \right)$$

campo magnético en Teslas

recuerde que únicamente las corrientes encerradas contribuyen.

el flujo eléctrico a través de una superficie encerrada por C

Nos cuenta que hay que sumar las contribuciones de cada porción de la trayectoria cerrada C en la dirección dada por la regla de la mano derecha.

la permeabilidad magnética en el vacío

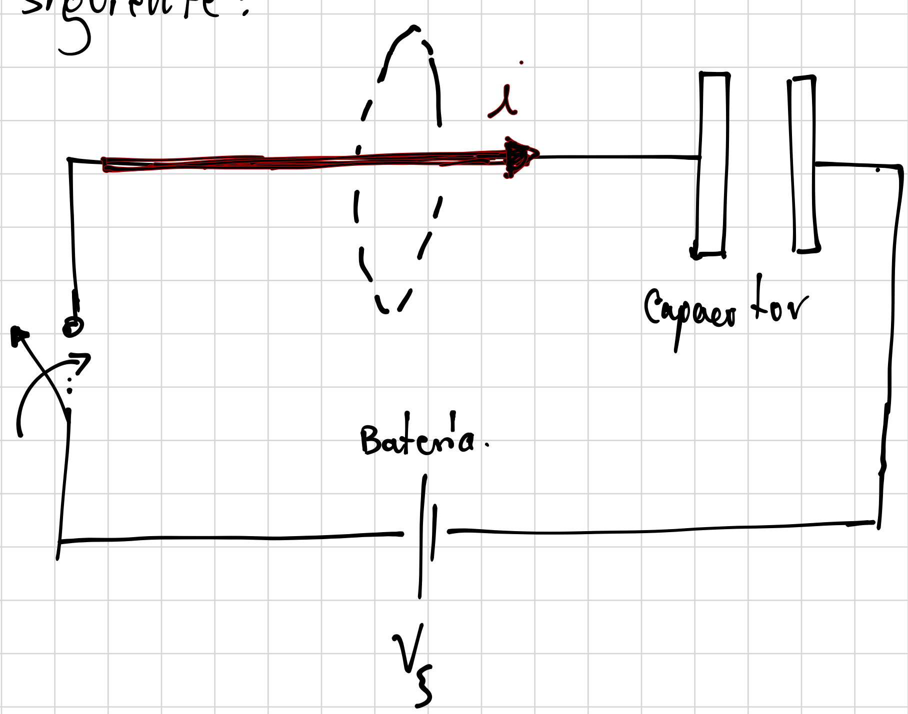
Cuando es útil la ley de Ampere - Maxwell?
Podemos usarla para hallar la circulación del campo magnético si poseemos información acerca de la corriente encerrada o el cambio en el flujo eléctrico. Adicionalmente, en situaciones con un grado de simetría alta, podemos extraer $\vec{B}$ del producto escalar y la integral y hallar la magnitud del campo magnético.

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds \quad : \text{La rata del cambio de flujo.}$$

Este término es análogo al papel del flujo magnético cambiante en la Ley de Faraday. En el caso de la Ley de Faraday, el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie induce un campo eléctrico circulante a lo largo de la trayectoria que contiene la superficie.
Puramente por simetría, podemos esperar que un flujo de campo eléctrico cambiante con el tiempo a través de una superficie inducirá un campo magnético circulando alrededor de la frontera a esta superficie, después de todo los líneas de campo magnético son trayectorias cerradas.
Una de las propiedades de éstos campos magnéticos inducidos por el flujo eléctrico cambiante es que son extremadamente débiles y ésto hace que sean muy difíciles de medir, en el siglo 90 aún no había una evidencia experimental sobre la

que fuera base para ésta Ley. Aunque los conceptos de simetría son una base para las predicciones, éstas no son siempre validas en la naturaleza, por ejemplo, las cargas eléctricas pueden existir individuales, mientras que los polos magnéticos no. Maxwell y sus contemporaneos pensaban que la ley de Ampere como fue concebida originalmente, se aplica únicamente a corrientes eléctricas estacionarias, puesto que ésta es consistente con el principio de conservación de la carga únicamente bajo condiciones estáticas.

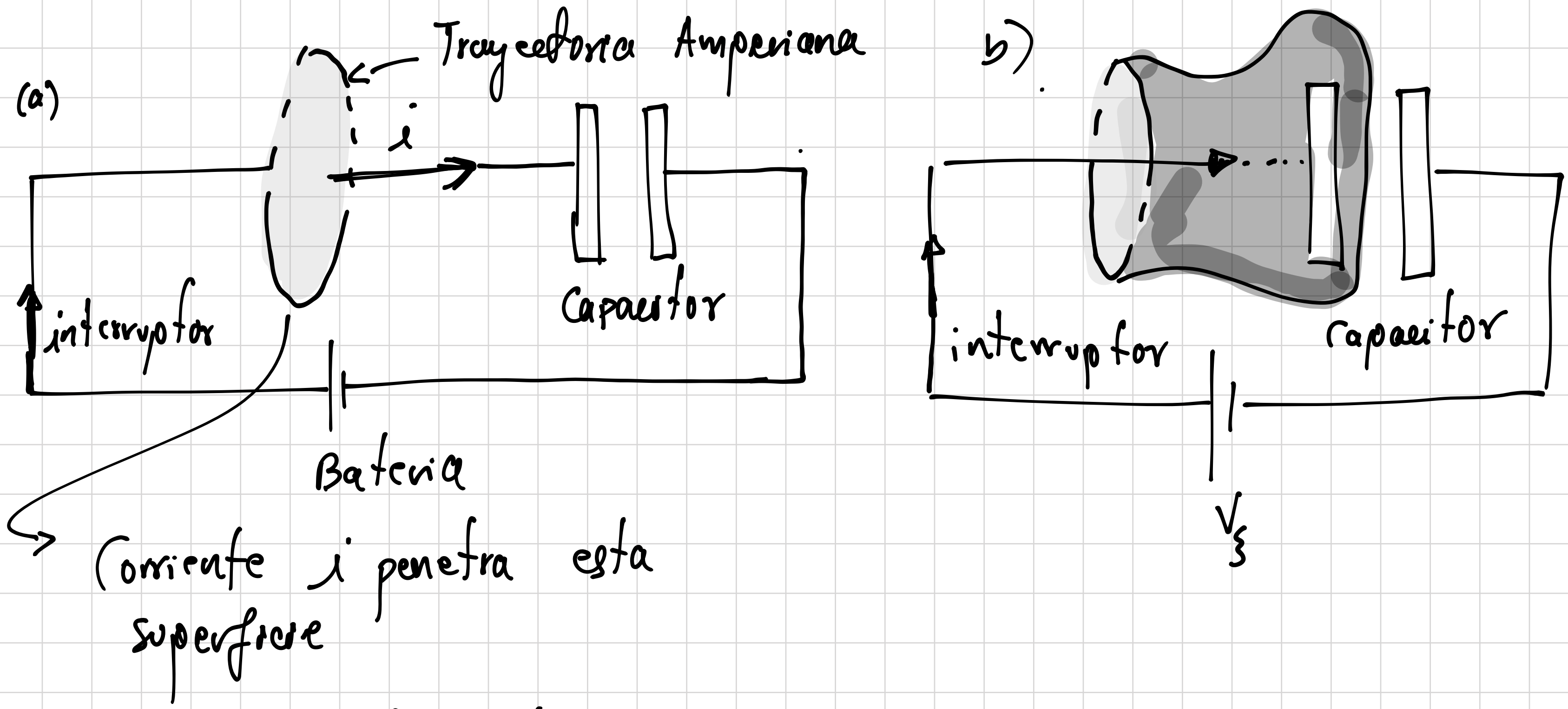
Un ejemplo que muestra la necesidad de incluir el término adicional (El flujo eléctrico cambiante con el tiempo) es el siguiente:



Consideremos el circuito mostrado en la figura. Cuando el interruptor es cerrado, una corriente i fluye a medida que la batería carga el capacitor. Esta corriente produce un campo magnético alrededor de los alambres, y la circulación de este campo es dado por la ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{enc} \right).$$

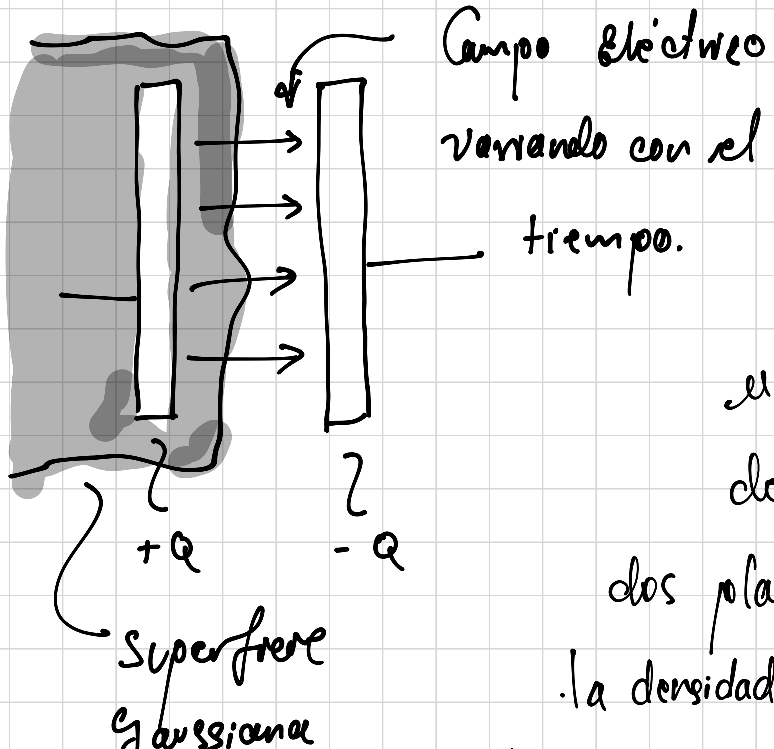
Un problema muy serio viene con el cálculo de la corriente neta encerrada. De acuerdo con la ley de Ampere, la corriente encerrada incluye todas las corrientes que penetran cualquier superficie para la cual C es la frontera. Sin embargo, podemos obtener diferentes resultados para la corriente encerrada si escogemos una membrana como superficie (a), o un "gorro" como superficie (b).



Una corriente i penetra la membrana plana a medida que el capacitor se carga, sin embargo, ninguna corriente penetra el la superficie del "gorro" (puesto que la carga se acumula en la placa del capacitor), a pesar, de que ambas superficies tienen la misma frontera amperiana, luego la integral del campo magnético alrededor de la trayectoria amperiana debe ser la misma sin importar cual superficie usted escoja.

Notamos que esta inconsistencia ocurre únicamente mientras el capacitor se esta cargando. Ninguna corriente fluye antes de que el interruptor sea cerrado, y despues de que el capacitor esta completamente cargado la corriente vuelve a ser cero. En ambos de estas circunstancias, la corriente encerrada es cero a través de cualquier superficie que usted pueda imaginar. Luego, cualquier revisión de la ley de Ampere debe retener su correcto comportamiento en situaciones estáticas mientras su extensión debe ser para capacitores cargándose y otras situaciones dependientes del tiempo.

Debido a que la carga se está acumulando sobre las placas del capacitor en el proceso de carga, luego el campo eléctrico entre las placas debe estar cambiando con el tiempo. Luego el flujo eléctrico a través de la porción del "gorro" entre las placas debe estar cambiando, y podemos usar la ley de Gauss para los campos eléctricos para determinar el cambio del flujo.



Escogiendo una superficie Gaussiana especial, la cual es en cada lugar perpendicular al campo eléctrico y sobre el cuál el campo eléctrico es uniforme o cero. Despreciando los efectos de borde, el campo eléctrico entre las dos placas conductoras es $\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)\hat{n}$, σ es la densidad de cargas sobre las placas (Q/A), luego el flujo eléctrico a través de la superficie

es $\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \int_S \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,ds = \frac{Q}{A\epsilon_0}\int_S ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

El cambio del flujo eléctrico con el tiempo es

$$\frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\epsilon_0}\right)=\frac{1}{\epsilon_0}\frac{dQ}{dt},$$

multiplicando por la permitividad del vacío, tenemos

$$\epsilon_0\frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds\right)=\frac{dQ}{dt},$$

Luego, el cambio del flujo electrico con el tiempo multiplicado por la permitividad tiene unidades de carga dividida por el tiempo (Coulombs por segundo o Ampere en unidades SI), las cuales son las unidades de corriente. Además la cantidad de corriente es exactamente la que podemos esperar de la fuente adicional del campo magnético alrededor de la superficie contenida en la frontera. Por históricas razones, al producto de la permitividad y el cambio del flujo eléctrico a través de la superficie es llamado "corriente de desplazamiento" aunque no existe un flujo de corriente a través de la superficie. Luego definimos la corriente de desplazamiento, definido por la relación

$$I_d=\epsilon_0\frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds\right).$$

De la forma como llamemos éste, la adición de Maxwell por medio de este término a la Ley de Ampere muestra su profundo conocimiento hacia la naturaleza electromagnética de la luz.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I_{enc} + \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds \right)$$ Usando la ley de Ampere-Maxwell (forma integral).

En la ley de Ampere-Maxwell, el campo magnético $\vec{B}$ esta dentro de una integral y éste esta acoplado a otra cantidad vectorial mediante un producto escalar. Como podemos esperar, en situaciones de alta simetría podemos determinar el campo magnético usando ésta ley. Afortunadamente, varios casos y algunas geometrías poseen éste requisito de simetría, incluyendo corrientes en alambres muy largos y placas de capacitores muy grandes. Para éstos problemas, la tarea es hallar una trayectoria Amperiana sobre el cuál el campo magnético sea uniforme y haciendo un ángulo constante en o en partes de la trayectoria amperiana.

↓ Ejemplo: Dada una carga dependiente del tiempo sobre un capacitor encontrar la rata del cambio de flujo eléctrico entre las placas y la magnitud del campo magnético resultante en un lugar específico ↓

Una bateria con una diferencia de potencial ΔV carga un capacitor de placas paralelas de capacitancia C y placas de radio r_0 a través de un alambre con resistencia R. Encontrar la rata del cambio del flujo eléctrico entre las placas como una función del tiempo y la magnitud del campo magnético resultante en un punto específico

La rata de cambio del flujo del campo eléctrico entre las placas es

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{dQ}{dt},$$

donde Q es la carga total sobre cada placa. Luego debemos de hallar como cambia la carga en el capacitor con el tiempo a medida que el capacitor se está cargando. De nuestro estudio de circuitos RC, tenemos que la variación de la carga respecto al tiempo está dada por

$$Q(t) = C\Delta V\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

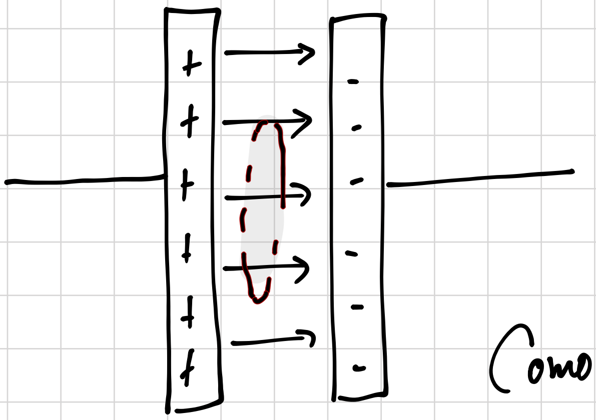
donde ΔV, R y C representa la diferencia de potencial, la resistencia y la capacitancia respectivamente.

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{d}{dt}\left[C\Delta V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right] = \frac{1}{\epsilon_0}\left(C\Delta V \frac{1}{RC} e^{-t/RC}\right) = \frac{\Delta V}{\epsilon_0 R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Esta rata de cambio del flujo total eléctrico entre las placas. Para encontrar el campo magnético a una distancia r desde el centro de las placas, construimos una trayectoria Amperiana especial que nos ayude a extraer el campo magnético desde la integral en la Ley de Ampere-Maxwell:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i_{enc} + \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds\right).$$

Puesto que no existe flujo entre las placas del capacitor, tenemos:



$i_{encerr} = 0$, y

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_s \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds \right).$$

Como vemos la mejor trayectoria amperiana que podemos escoger es un circulo en el cual el campo magnético es constante y guarda un sentido constante respecto a la trayectoria. Obviamente, no todo el flujo pasa a través del circuito, luego tenemos

$$\phi_E' = \frac{Q}{A\epsilon_0}\int_s ds = \frac{QS}{A\epsilon_0} = \frac{Q\,\pi r^2}{\pi r_0^2\,\epsilon_0}$$; note que para este caso $r \neq r_0$.

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\phi_E'\right)}_{\text{amperiana}} = \frac{r^2}{r_0^2}\frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta V}{R} e^{-t/RC} \frac{r^2}{r_0^2}\left(\frac{1}{\epsilon_0}\right),$$

insertando esto en la ecuación de Ampere - Maxwell tenemos

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[\epsilon_0 \frac{\Delta V}{\epsilon_0 R} e^{-t/RC}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)\right] = \frac{\mu_0 \Delta V}{R} e^{-t/RC}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Luego debido a la amperiana escogida tenemos

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(2\pi r) = \frac{\mu_0 \Delta V}{R} e^{-t/RC}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

$$B(r,t) = \frac{\mu_0 \Delta V}{2\pi r R} e^{-t/RC}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right) = \frac{\mu_0 \Delta V}{2\pi R} e^{-t/RC}\left(\frac{r}{r_0^2}\right),$$

Como vemos el campo magnético varía linealmente con la distancia al centro del capacitor de las placas y decrece exponencialmente con el tiempo, buscando $\frac{1}{e}$ de su valor original en el tiempo $t = RC$.

Repaso de algunos operadores diferenciales

a) $\vec{\nabla}(\ )$: El gradiente.

Para comprender las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial es necesario comprender operadores diferenciales y sus operaciones básicas usadas en cálculo vectorial.

El gradiente involucra derivadas parciales tomadas en tres direcciones las cuales son ortogonales. El gradiente se aplica a campos escalares ($\vec{\nabla}(u)$), u = energía potencial eléctrica. Un campo escalar es especificado por su magnitud en varios puntos. Por ejemplo un campo escalar es la altura de un lugar en la tierra respecto al nivel del mar.

¿Qué nos cuenta el gradiente respecto al campo escalar?

Dos cosas importantes: La magnitud del gradiente nos indica que tan rápido está cambiando el campo sobre el espacio, y la dirección del gradiente indica la dirección en la que el campo está cambiando más rápidamente con la distancia.

El gradiente opera sobre un campo escalar, el resultado del gradiente operando sobre el campo escalar es un vector, con ambos: magnitud y dirección. En efecto, si el campo escalar representa la altura del terreno, la magnitud del gradiente en cualquier punto nos cuenta que tan rápido cambia la inclinación de ese lugar respecto al nivel, y la dirección del gradiente apunta hacia los puntos en los cuales está más inclinada.

Matemáticamente la definición del gradiente de un campo escalar ψ es

$$\text{grad}(\psi) = \vec{\nabla}\psi = \hat{\imath}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{(Coord. Cartesianas).}$$

La componente x del gradiente de ψ indica la pendiente del campo escalar alrededor del eje x, la componente en y indica la pendiente en la dirección del eje - y y la componente en z indica la pendiente en la dirección del eje z. La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de éstas componentes nos dan la pendiente total de la cadera en el punto del lugar en el cual el gradiente es tomado.

En coordenadas cilíndricas y esféricas, el gradiente es:

$$\vec{\nabla}\psi \equiv \hat{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + z\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{(Coord. Cilíndricas),}$$

y

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad \text{(Coord. Esféricas).}$$

Algunas identidades útiles: $\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}\cdot$, $\vec{\nabla}\times$

Un repaso de los operadores diferenciales de $\vec{\nabla}$ y sus tres usos en las ecuaciones de Maxwell

Del: (nabla)

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Del (nabla) representa un operador diferencial cuyo propósito es operar sobre campos escalares o vectoriales y producir escalares o vectores

Gradiente:

$$\vec{\nabla}\psi \equiv \hat{i}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

El gradiente opera sobre un campo escalar y produce un vector resultante que indica el cambio en la rata espacial del campo en un punto y la dirección en que está rata aumenta más desde éste punto.

Divergencia:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

La divergencia opera sobre un campo vectorial y produce un resultado escalar que indica la tendencia del campo a alejarse de un punto.

Circulación:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} \equiv \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}.$$

La circulación opera sobre un campo vectorial y produce un vector resultante que indica la tendencia del campo a circular alrededor de un punto y la dirección del eje de mayor circulación.

Existen varias relaciones útiles entre ellos (note que las siguientes relaciones aplican para campos que son continuos y que poseen derivadas continuas).

- La circulación del gradiente de cualquier campo escalar es cero.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi = 0,$$

el cual puede verificarse tomando las derivadas apropiadas.

- La divergencia del gradiente de un campo escalar produce una cantidad que es llamada el Laplaciano del campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla}^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad \text{(Coord. Cartesianas)}$$

Teorema de La divergencia.

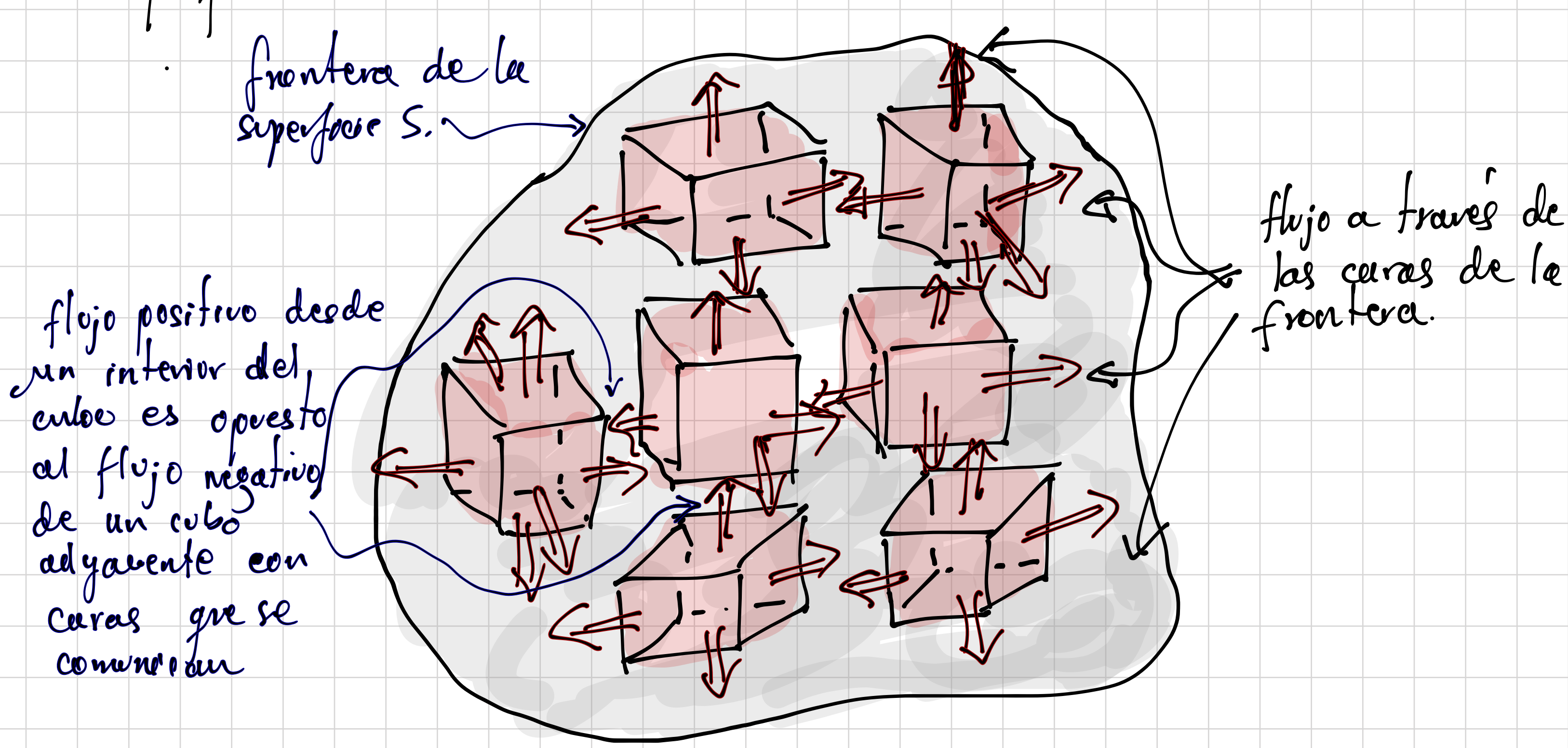
$$\oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} \, ds \equiv \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \, dV$$

El teorema de la divergencia en cálculo vectorial iguala el flujo de un campo vectorial a la integral de volumen de La divergencia del campo. Las relaciones entre integrales de Línea, superficie y volumen fueron explotadas por varios matemáticos de los 80's y 90's incluyendo J. L. Lagrange en Italia, M.V. Ostrogradsky en Russia, G. Green en Inglaterra, y C.F. Gauss en Alemania.

El teorema de la divergencia establece que:

> El flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada S es igual a la integral de la divergencia de éste campo sobre un volumen V para el cual S es una frontera.

Este teorema se aplica a campos vectoriales que son "suaves" en el sentido de ser continuos y tener derivadas continuas. Para entender la base física del teorema de divergencia, notemos que la divergencia en un punto es definido como el flujo a través de una pequeña superficie rodeando éste punto dividido por el volumen encerrado por ésta superficie cuando este se aproxima a cero. Consideremos ahora el flujo de pequeños cubos dentro del volumen V.



En el interior de los cubos (estos que no estan tocando la superficie de V), las caras que se comunican son las seis con seis de cubos adyacentes. Para cada cara que se comunica, el flujo positivo (afuera) desde una cara del cubo es identico en amplitud y opuesto al flujo negativo (entrando) del cubo adyacente sobre la misma cara. Puesto que todos los cubos inferiores comunican sus caras con las caras de los adyacentes, únicamente las caras que están sobre la frontera de la superficie S del volumen V contribuyen al flujo a través de S.
Luego adicionando el flujo a través de todas las caras del cubo dentro del volumen V, queda únicamente el flujo a través de la superficie S que no se cancela.
En el límite de pequeños e infinitesimales cubos, la definición de divergencia nos cuenta que la divergencia del vector de campo en un punto es el flujo hacia afuera de ese punto. Luego, adicionando el flujo de cada cubo es lo mismo que integrando la divergencia sobre todo el volumen. En efecto

$$\oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,ds = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dv .$$

La integral de la divergencia de un vector de campo sobre un volumen V es igual al flujo a través de S.
Este teorema es útil para dada una forma integral de una ecuación de Maxwell obtener su forma diferencial.

Teorema de Stokes

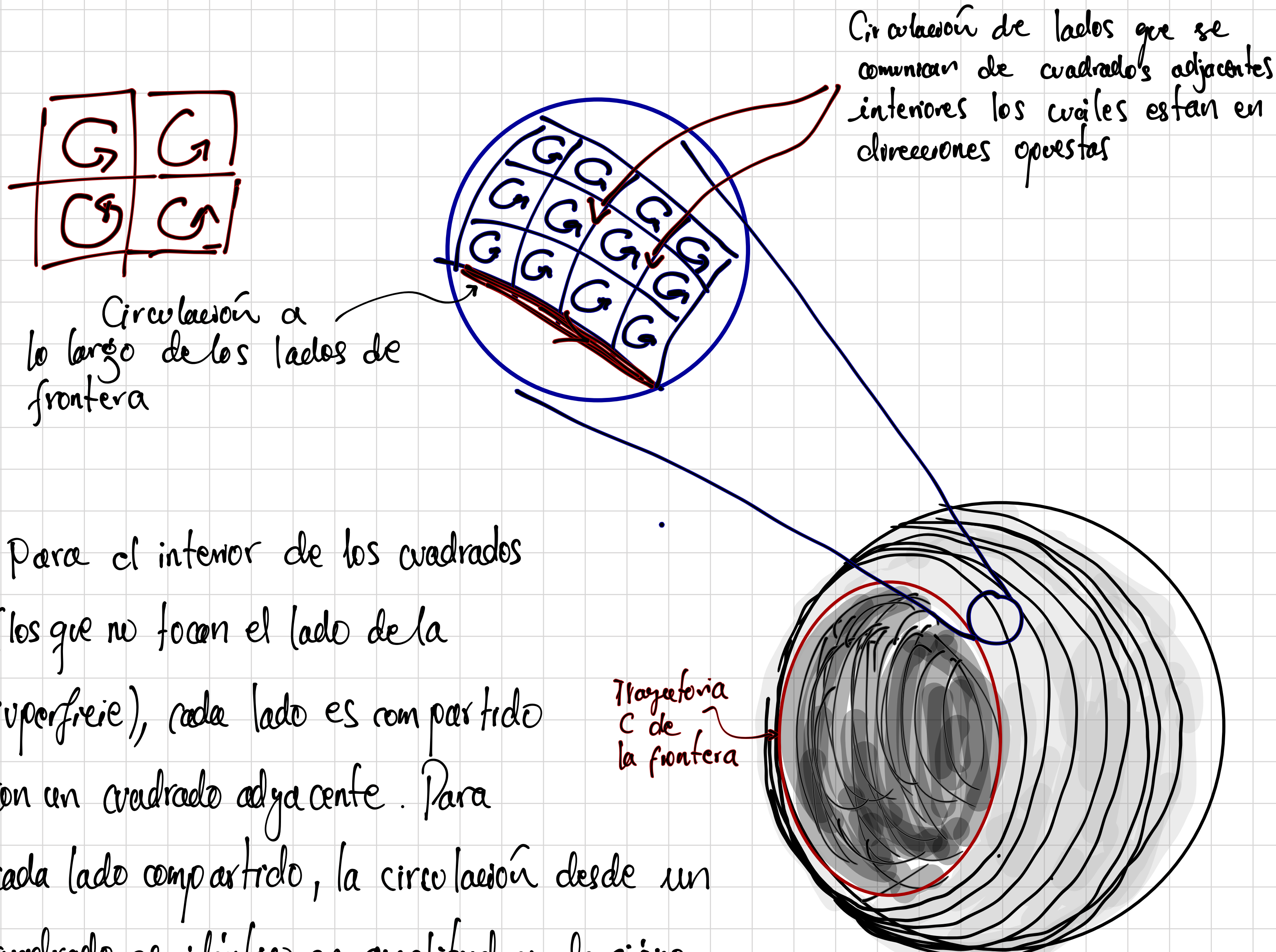
$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,ds.$$

El teorema de Stokes relaciona una integral de Línea a una integral de superficie. William Thompson (Lord Kelvin) le contó ésta relación en una carta en 1850 a G.G. Stokes quien se hizo famoso por colocarle ésta prueba como un exámen a un estudiante de Cambridge.

* La circulación de un vector de campo sobre una trayectoria cerrada es igual a la integral de la componente normal de la circulación sobre éste campo sobre una superficie S para la cuál C es una frontera.

Este teorema es válido para campos vectoriales los cuales son "suaves" en el sentido de que son continuos y poseen derivadas continuas. El fundamento físico del teorema de Stockes puede ser comprendido definiendo la circulación en un punto el cuál es definido como la circulación alrededor de una trayectoria pequeña rodeando el punto dividido por la superficie encerrada por la trayectoria cuando ésta tiende a cero.

Consideremos la circulación alrededor de cuadrados pequeños sobre la superficie S mostrada en la figura:



Para el interior de los cuadrados (los que no tocan el lado de la superficie), cada lado es compartido con un cuadrado adyacente. Para cada lado compartido, la circulación desde un cuadrado es idéntico en amplitud y de signo opuesto a la circulación del cuadrado adyacente sobre el mismo lado. Luego únicamente los lados que estan a lo largo de la frontera de la trayectoria C de la superficie que no están en comunicación con un cuadrado adyacente, y que contribuyen a la circulación de C.

En efecto, sumando la circulación alrededor de todos los lados de los cuadrados sobre la superficie S, sobrevive únicamente la circulación alrededor de la trayectoria. Adicionalmente, en el límite de cuadrados infinitesimales pequeños, la definición de circulación nos dice que adicionando la circulación de cada cuadrado es lo mismo que integrando la componente normal de la circulación del vector de campo sobre la superficie.

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\hat{n}\, ds .$$

Como vemos la integral de la componente normal de la de la circulación sobre S es igual a la circulación alrededor de C.

- 1ra Ecuación de Maxwell: Ley de Gauss para campos eléctricos:

forma integral

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

forma diferencial.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Considerando que la carga es la integral sobre el volumen de la densidad de carga ρ tenemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dv \,,$$

Aplicando el teorema de la divergencia a el lado izquierdo de la Ley de Gauss en forma integral tenemos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dv = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\, dv \,,$$

puesto que la igualdad se cumple para todos los volúmenes, el integrando debe ser igual, luego

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$ (Ley de Gauss en forma diferencial)

El lado izquierdo de esta ecuación es una descripción matemática de la divergencia del campo eléctrico (la tendencia que posee el campo a "alejarse" de un punto específico) y a la derecha tenemos la densidad de carga eléctrica dividida por la permitividad del vacío.

El contenido físico de la Ley de Gauss en forma diferencial:

> El campo eléctrico producido por cargas eléctricas diverge de las cargas positivas y converge hacia las cargas negativas.

Luego los únicos lugares en los cuales la divergencia del campo eléctrico no es cero en éstos puntos en los cuáles existe carga. Si la carga es positiva, la divergencia es positiva, lo cual nos dice que el campo eléctrico tiende a alejarse desde un punto. Si la carga es negativa, la divergencia es negativa, y las líneas de campo tienden a acercarse al punto.

Note que existe una diferencia fundamental entre la Ley de Gauss en forma diferencial y en forma integral; la forma diferencial trata con la divergencia del campo eléctrico y la densidad de carga en puntos individuales en el espacio, la forma integral relaciona la integral de la componente normal del campo eléctrico sobre una superficie. Familiarizarse con ambas formas puede permitir usar una o otra forma para el problema que se desea solucionar.

Recuerde que "del" es un operador vectorial

recordar que el campo eléctrico es un vector

la densidad de carga en C/m³

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

la permitividad eléctrica del vacío

El campo eléctrico en N/C.

El operador diferencial llamado "del" o "nabla"

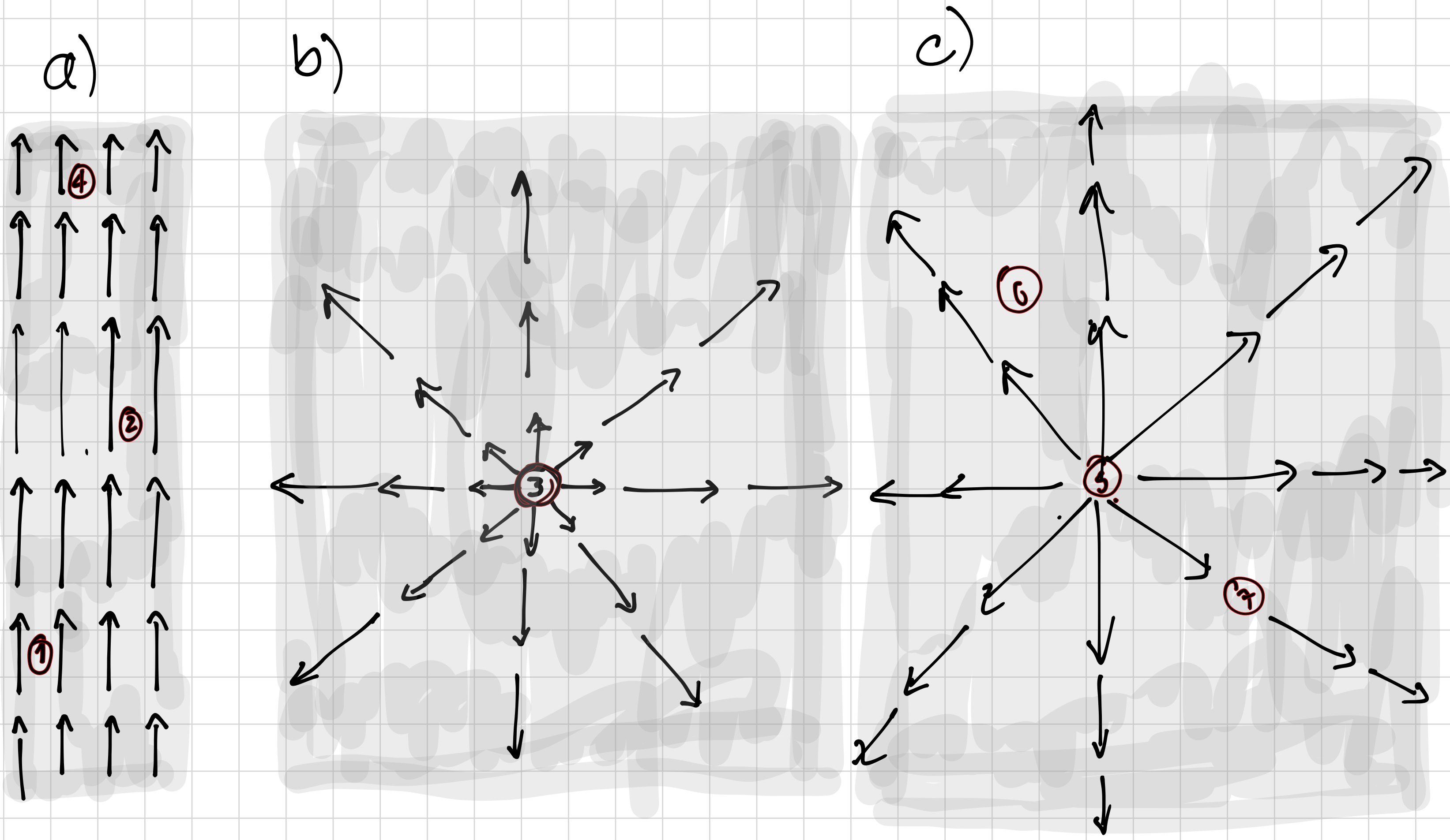
El producto escalar convierte el "del" en un operador de divergencia.

Ambos flujo y divergencia tienen que ver con el flujo de un vector de campo, pero con diferencias importantes; El flujo es definido sobre un área, mientras que la divergencia se aplica a puntos individuales. En el caso del "flujo" de un fluido, la divergencia en cualquier punto es una medida de la tendencia del flujo de vectores a alejarse de un punto (o sea, a llevar más material hacia afuera de éste que el que puede entrar hacia éste). En efecto, los puntos de divergencia positiva son fuentes), mientras que puntos de divergencia negativa son "pieles"

Matemáticamente la divergencia es definida como

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n}\, ds,$$

mientras esta expresión establece una relación entre flujo y divergencia, esta no es particularmente útil para encontrar la divergencia de un vector del campo



Para encontrar lugares de divergencia positiva en cada de los campos de la figura, miramos los puntos en el cual el flujo de vectores se mueven hacia afuera o que son largos apuntando hacia afuera y cortos apuntando hacia adentro. Usando este criterio, puntos en 1, 2 y 3 son puntos de divergencia positiva, mientras que la divergencia es negativa en el punto 4. La divergencia en puntos de la figura c) no es clara, mientras que en el punto 5 la divergencia es positiva, en los puntos 6 y 7, las líneas se esparcen hacia afuera, pero cada vez se hacen más cortas (dos efectos contrarios). Para resolver como es la divergencia en los puntos 6 y 7 necesitamos la expresión matemática de la divergencia y como varia el campo vectorial punto a punto en el espacio.

La forma diferencial de la operación matemática de la divergencia o $(\vec{\nabla}\cdot)$ sobre un vector $\vec{A}$ en coordenadas cartesianas es

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z\right),$$

y puesto que $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$, esto es

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right).$$

La divergencia del vector de campo $\vec{A}$ es simplemente el cambio en su componente x a lo largo del eje x más el cambio en la componente y a lo largo del eje y más el cambio en la componente en z a lo largo del eje z. La divergencia del vector de campo es una cantidad escalar; ésta tiene magnitud pero no posee dirección.

Para la figura (a), asumamos que el campo vectorial varía de forma senosoidal a lo largo del eje x (el cual es vertical en este caso) como $\vec{A} = \text{sen}(\pi x)\hat{i}$, mientras que se mantiene constante en las direcciones y, z.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = \pi\cos(\pi x),$$

Puesto que A_y y A_z son cero. Luego la expresión es positiva para $0 < x < \frac{1}{2}$, 0 en $x = \frac{1}{2}$ y negativa para $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.

La figura (b), la cuál representa un vector de campo esféricamente simétrico con amplitud que aumenta con el cuadrado de la distancia

$$\vec{A} = r^2\hat{r}$$

Puesto que $r^2 = (x^2+y^2+z^2)$ y $\hat{r} = \dfrac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, luego

$$\vec{A} = r^2\hat{r} = (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad y$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = (x^2+y^2+z^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)} + x\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(2x)$$

haciendo lo mismo con las componentes y y z y adicionandolas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 3(x^2+y^2+z^2)^{(1/2)} + \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 4(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = 4r,$$

en efecto, la divergencia del vector de campo en la figura b) está creciendo linealmente con la distancia al origen.

Finalmente, consideremos el campo vectorial en la figura c), la cual es similar al caso previo pero la amplitud del campo vectorial decrece como el cuadrado de la distancia desde el origen. El flujo de líneas de campo se esparcen hacia afuera, pero debido a que la amplitud de campo decrece, ésto puede afectar el valor de la divergencia

$$\vec{A} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad , \quad y$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} - x\left(\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-(5/2)}(2x),$$

realizando algo similar para las componentes y y z tenemos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{(5/2)}} = 0.$$

Esto confirma nuestra sospecha de que la reducción en la amplitud del vector de campo con respecto al origen puede compensar el esparcimiento hacia afuera de las líneas de campo. Note que ésto es cierto únicamente en el caso en el cuál la amplitud de campo es de la forma $\frac{1}{r^2}$.

La divergencia también puede ser calculada en coordenadas cilíndricas y esféricas usando

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \left(\text{Coord. Cilíndricas}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta\,\text{sen}\,\theta\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad \left(\text{Coord. Esféricas}\right).$$

La divergencia del Campo Eléctrico $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$.

En electrostática, todas las líneas de campo eléctrico comienzan en puntos de carga positiva y terminan en puntos de carga negativa, luego es pensable que esta expresión sea proporcional a la densidad de carga eléctrica en el punto o región a considerar.

Consideremos el campo eléctrico de una carga puntual (figura c)), para la cuál la divergencia es cero. En efecto el esparcimiento hacia afuera de las líneas de campo eléctrico son exactamente compensadas por el factor $1/r^2$ de la reducción de la amplitud del campo.

y la divergencia del campo eléctrico es cero en todos los puntos excepto en el origen. La razón del origen ($r=0$) no es incluido en previos análisis es que la expresión para la divergencia incluye términos que contienen r en el denominador, y éstos términos se vuelven problemáticos cuando r se aproxima a cero. Para evaluar la divergencia en el origen, usamos la definición formal de divergencia:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S} \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds.$$

Consideremos una superficie Gaussiana especial rodeando la carga puntual q, luego

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\oint_s ds\right) = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(4\pi r^2)\right) = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\frac{q}{\epsilon_0}\right),$$

pero $q/\Delta V$ es el promedio de la densidad de carga sobre el volumen ΔV, cuando ΔV se aproxima a cero, esto es ρ, la densidad de carga en el origen, luego la divergencia es

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

En concordancia con la ley de Gauss.

En éste ejemplo, una inspección preliminar de las líneas de campo en la vecindad de la carga puntual sugieren que ellas "divergen" en todo punto del espacio (en el sentido de que ellas cada vez están alejadas más unas de otras). Pero éste campo radial decrece en amplitud como $1/r^2$ teniendo una divergencia cero en cualquier lugar excepto en la fuente. El factor clave para determinar

la divergencia en un punto, sino examinando el flujo que sale y el que entra en un volumen pequeño alrededor del punto de interés, si el flujo que sale excede al que entra, la divergencia es positiva en éste punto. Si ambos son iguales la divergencia es cero en esé punto y si el que entra excede al que sale la divergencia es negativa.
En éste caso de la carga puntual en el origen, el flujo a través de una superficie infinitesimal es diferente de cero solo si ésta superficie contiene la carga puntual. En otro lugar el flujo entrando y saliendo en una superficie pequeña será igual (puesto que no existe carga), y la divergencia del campo eléctrico será cero.

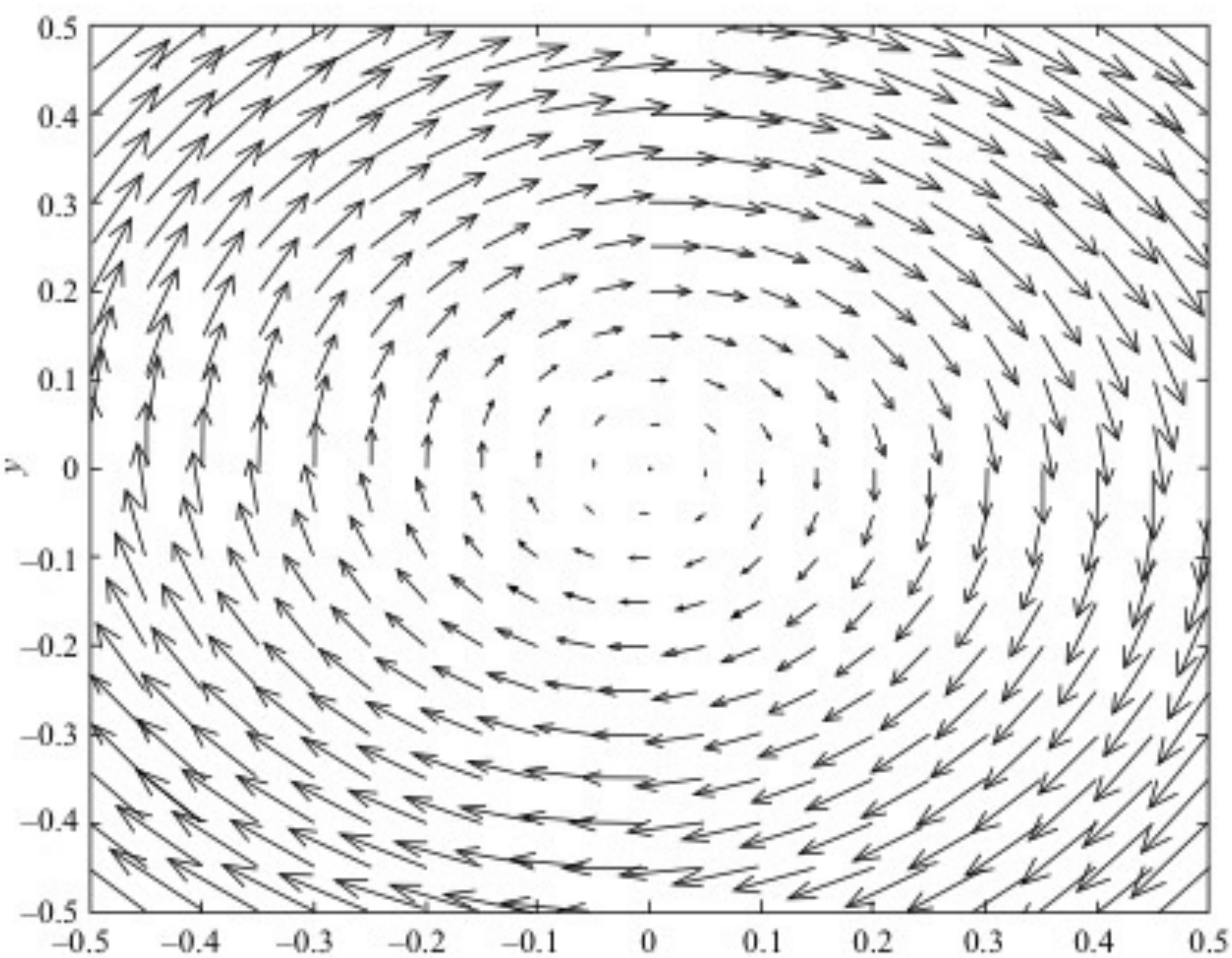
Aplicando la Ley de Gauss en forma diferencial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Los problemas más comunes que pueden usar la ley de Gauss en forma diferencial son: a) Calcular la divergencia del campo eléctrico, b) Usando el valor de la divergencia determinar la densidad de carga en un punto específico.

Ejemplo: Dada una expresión para el vector de campo eléctrico, encontrar la divergencia del campo en un punto específico

Supongamos que el campo de la figura a) se cambia a $\vec{A} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\hat{i} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\hat{j}$, hallar la divergencia.

Antes de aplicar las derivadas, debemos de tratar de visualizar las líneas de campo, donde la componente del campo en el eje x depende de la coordenada y (luego los puntos apuntan a la derecha alrededor sobre el eje x y a izquierda hacia abajo en el eje x ($\rightleftarrows$)), mientras que la componente y del campo depende sobre la coordenada negativa de x (luego los campos apuntan hacia arriba a la izquierda del eje y y hacia abajo a la derecha del eje y). Combinando estas propiedades llegamos a la siguiente distribución de campos en el espacio:



Examinando las líneas de campo nos revela que el flujo de líneas ni convergen ni divergen, simplemente circulan sobre ellas mismas. Calculando la divergencia, confirma nuestro análisis

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]=0.$$

Esta clase de campos no son producidos por cargas eléctricas, pero si por campos magnéticos cambiantes. tales como campos de un solenoide.

Ejemplo: Dado un vector de campo eléctrico en una región específica, encontrar la densidad de la carga eléctrica en un punto dentro de una región del espacio

Encontrar la densidad de carga en $x = 2m$ y $x = 5m$ si el campo eléctrico en la región esta dado por

$$\vec{E} = a x^2 \hat{i} \frac{V}{m} \quad \text{para } x = 0 \text{ a } x = 3m$$

$$\vec{E} = b \hat{i} \frac{V}{m} \quad \text{para } x > 3m$$

Aplicando Ley de Gauss en forma diferencial tenemos para $x = 0$ a $x = 3m$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot (a x^2 \hat{i}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\partial (a x^2)}{\partial x} = 2xa \Rightarrow \boxed{\rho = 2xa\epsilon_0}$$

En efecto en $x = 2m$, $\rho = 4a\epsilon_0$.

En la región $x > 3m$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial k} \right) \cdot (b \hat{i}) = 0,$$

Luego $\rho = 0$ en $x = 5m$

La forma diferencial de Ley de Gauss para campos magnéticos.

La naturaleza continua de las líneas de campo magnético hacen que la forma diferencial para campos magnéticos de la Ley de Gauss sea simple:

$$\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds = 0 \Rightarrow \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\, dv = \int_V (0)\, dv$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$ (Ley diferencial de Gauss para campos magnéticos)

El lado derecho de la ecuación es una descripción matemática de la divergencia del campo magnético (la tendencia del campo a "fluir" alejándose de un punto que de acercándose. El lado derecho de la ecuación es simplemente cero.

★ La divergencia del campo magnético en cualquier punto es cero.

Otra forma de analizar este resultado es que no es posible aislar un polo magnético, luego no es posible tener un polo norte sin un polo sur, y la "densidad de carga magnética" debe de ser cero en cualquier parte.

Recuerde que "del" es un vector

Recuerde que el campo magnético es un vector

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

El operador diferencial llamado "del" o "nabla"

Campo magnético en Tesla

El producto escalar convierte el operador "del" en la divergencia

La divergencia del campo magnético $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$

Debido que la divergencia mide la tendencia de un campo a "alejarse" de un punto más fuertemente que de acercarse a él, y debido a que no existen fuentes o sumideros de campos magnéticos, la cantidad de campo "proveniente" es exactamente la misma que está "saliendo" de un punto, luego el valor de la divergencia siempre es cero.

Consideremos por ejemplo el campo magnético producido por una corriente infinita:

$$div(\vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\varphi} \right) \therefore \hat{\varphi} : \circlearrowright ,$$

luego es más fácil evaluarlo en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

Puesto que $\vec{B}$ tiene sólo componente en φ, tenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right) = 0.$$

Campos vectoriales con divergencia cero son llamados "campos solenoidales" y todos los campos magnéticos son "solenoidales"

Podemos comprender este resultado como sigue: Puesto que las líneas de campo magnético hacen circuitos circulares alrededor del alambre, este no posee componente radial o en dirección z y puesto que la componente en $\hat{\varphi}$ no posee dependencia de $\hat{\varphi}$ (esta centrada sobre el alambre), el flujo que se aleja desde un punto puede ser el mismo que avanza hacia el punto. Esto trata que la divergencia del campo magnético es cero en cualquier lugar.

Aplicando La ley de Gauss en forma diferencial ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$).

Conociendo que la divergencia del campo magnético es cero, este dato nos permite atacar problemas que involucran cambios en las componentes del campo magnético y determinar donde un vector de campo específico puede ser un campo magnético.

Ejemplo:

Dada una completa información acerca de las componentes de un campo magnético, usar Ley de Gauss para establecer las relaciones entre las componentes

Un campo magnético está dado por la expresión

$\vec{B} = axz\,\hat{i} + byz\,\hat{j} + c\,\hat{k}$, cuál es la relación entre a y b?

Como conocemos de la Ley de Gauss para campos magnéticos que la divergencia del campo magnético será cero.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(axz)+\frac{\partial}{\partial y}(byz)+\frac{\partial c}{\partial z}=0 \Rightarrow az+bz+0=0.$$

encontramos que $a=-b$.

Ejemplo: Dada una expresión para un campo vectorial, determinar donde el campo magnético puede ser un campo magnético

Un vector de campo está dado por

$$\vec{A}(x,y)=a\cos(bx)\,\hat{\imath}+aby\,\mathrm{sen}(bx)\,\hat{\jmath},$$ puede éste campo ser un campo magnético.

La ley de Gauss diferencial nos dice que la Divergencia de todos los campos magnéticos debe ser cero y chequeando la divergencia:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}[a\cos(bx)]+\frac{\partial}{\partial y}[aby\,\mathrm{sen}(bx)]=-ab\,\mathrm{sen}(bx)+ab\,\mathrm{sen}(bx)=0,$$

lo cuál indica que $\vec{A}$ puede representar un campo magnético.

La forma diferencial de La ley de Ampere.

$$\oint_c \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot\hat{n}\,ds,$$ aplicando el theorema de Stoke's tenemos

$$\oint_c \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l}=\int_s(\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}})\cdot\hat{n}\,ds,$$ Luego tenemos

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}})\cdot\hat{n}\,ds = \int_S -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,ds,$$

Como la superficie de integración es arbitraria, tenemos

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ (Ec. diferencial de la Ley de Faraday).

El lado derecho de la ecuación es la definición matemática de la circulación del campo eléctrico (la tendencia de las líneas de campo a circular alrededor de un punto). El lado derecho representa la rata de cambio del campo magnético con el tiempo

Un campo eléctrico circulante es producido por un campo magnético que cambia con el tiempo.

Recuerde que el campo eléctrico es un vector

Recuerde que "nabla" es un operador vectorial

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

la rata de cambio del campo magnético con el tiempo.

Operador diferencial llamado "del" o "nabla"

El producto vectorial convierte el operador "nabla" en una circulación

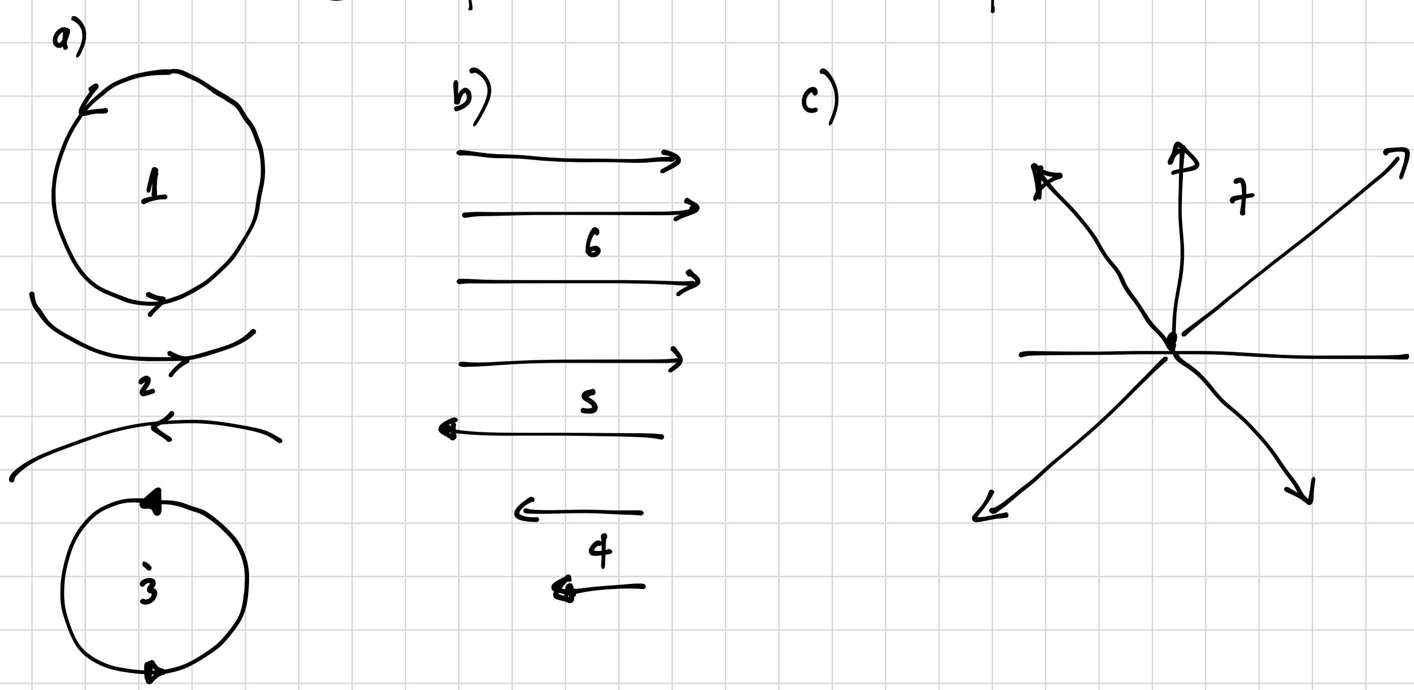
La circulación ($\vec{\nabla}\times$)

La circulación de un campo vectorial es la medida de la tendencia del campo a circular alrededor de un punto. La circulación de un punto específico de interés puede ser encontrado considerando la circulación por unidad de área sobre una trayectoria infinitesimal alrededor de este punto. La definición matemática de la circulación de un vector $\vec{A}$ es

$$\text{circulación}(\vec{A}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell},$$

donde C es una trayectoria alrededor del punto de interés y Δs es la área encerrada por la trayectoria. Con esta definición, la dirección de la circulación es la dirección normal a la superficie para la cual la circulación es un máximo. Para encontrar lugares de una circulación grande, imagine que las líneas de campo representan las líneas de flujo de un fluido. Luego miramos por puntos en los cuales el flujo de vectores en un lado del punto son significantemente diferente (en magnitud, dirección, o ambos) de el flujo de vectores sobre el lado del punto opuesto.

Suponga una rueda pequeña con remos en cada punto dentro del flujo. Si el flujo ocasiona que la rueda rote, el centro de la rueda marca un punto con una circulación diferente de cero. La dirección de la circulación es alrededor de la rueda (como un vector, la circulación tiene magnitud y dirección). Por convención, la circulación positiva está determinada por la regla de la mano derecha. Si usted orienta sus dedos en la dirección de la circulación, el dedo pulgar apunta en la dirección positiva de la circulación.



Usando la prueba de la rueda, los puntos 1, 2, y 3 en a) y los puntos 4 y 5 en b) son puntos de altas circulaciones. un flujo uniforme alrededor del punto 6 en b) y el flujo divergente alrededor del punto 7 no causará que la rueda gire, luego estos puntos son puntos de circulación baja o cero.

Para calcular la circulación, usamos la forma diferencial de la circulación ($\vec{\nabla}\times$) en coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z\right).$$

El producto vectorial puede ser escrito como un determinante

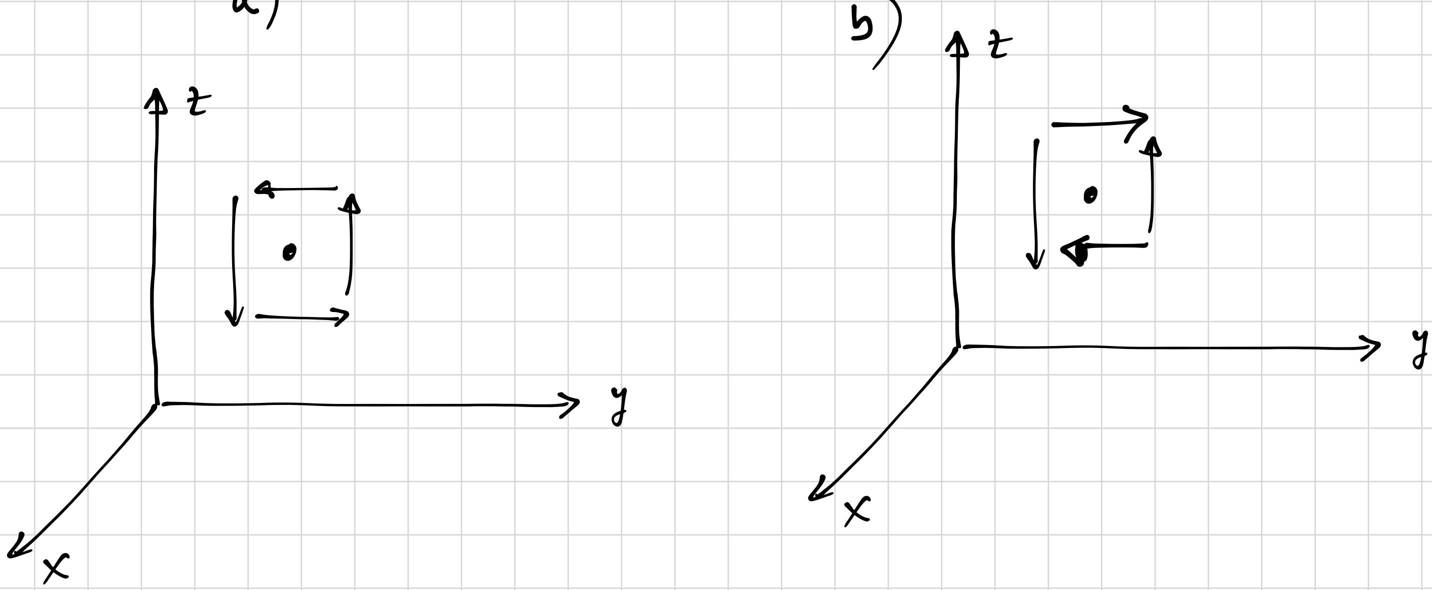
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

el cuál se expande a

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}.$$

Note que cada componente de la circulación de $\vec{A}$ indica la tendencia del campo a rotar en una de las coordenadas del plano. Si la circulación del campo en un punto tiene una componente en x grande, la circulación del campo alrededor del plano yz es grande. La rotación total de la circulación alrededor de un eje, representa el eje respecto al cuál la rotación es más grande, siendo el sentido determinado por la regla de la mano derecha.

a) b)



Consideremos los campos mostrados en la figura a), b).
Observamos en la figura a) la componente en x de la circulación:
Este término incluye el cambio en A_z con y y el cambio en A_y con z.
Si procedemos a lo largo del eje-y desde el lado izquierdo del punto de interés a el lado derecho, A_z está claramente aumentando (éste es negativo sobre el lado izquierdo del punto de interés y positivo sobre

sobre el lado derecho), luego el término $\partial A_z/\partial y$ puede ser positivo. mirando ahora en A_y, podemos ver que este es positivo abajo del punto de interés y negativo arriba, luego este está decreciendo alrededor del eje z. En efecto, $\partial A_y/\partial z$ es negativo, como consecuencia este aumenta el valor de la circulación cuando este es restado de $\partial A_z/\partial y$. Luego la circulación posee un valor alto en este punto de interés. La situación en la figura b) es diferente. En este caso ambos $\partial A_y/\partial z$ y $\partial A_z/\partial y$ son positivos, y substrayendo $\partial A_y/\partial z$ de $\partial A_z/\partial y$ da un resultado el cual es pequeño. En efecto, los valores de la circulación en x_0 son pequeños en este caso. Campos vectoriales con circulación cero en todos los puntos son llamados "irrotacionales".

La expresión de la circulación en componentes esféricas y cartesianas:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\hat{k}$$

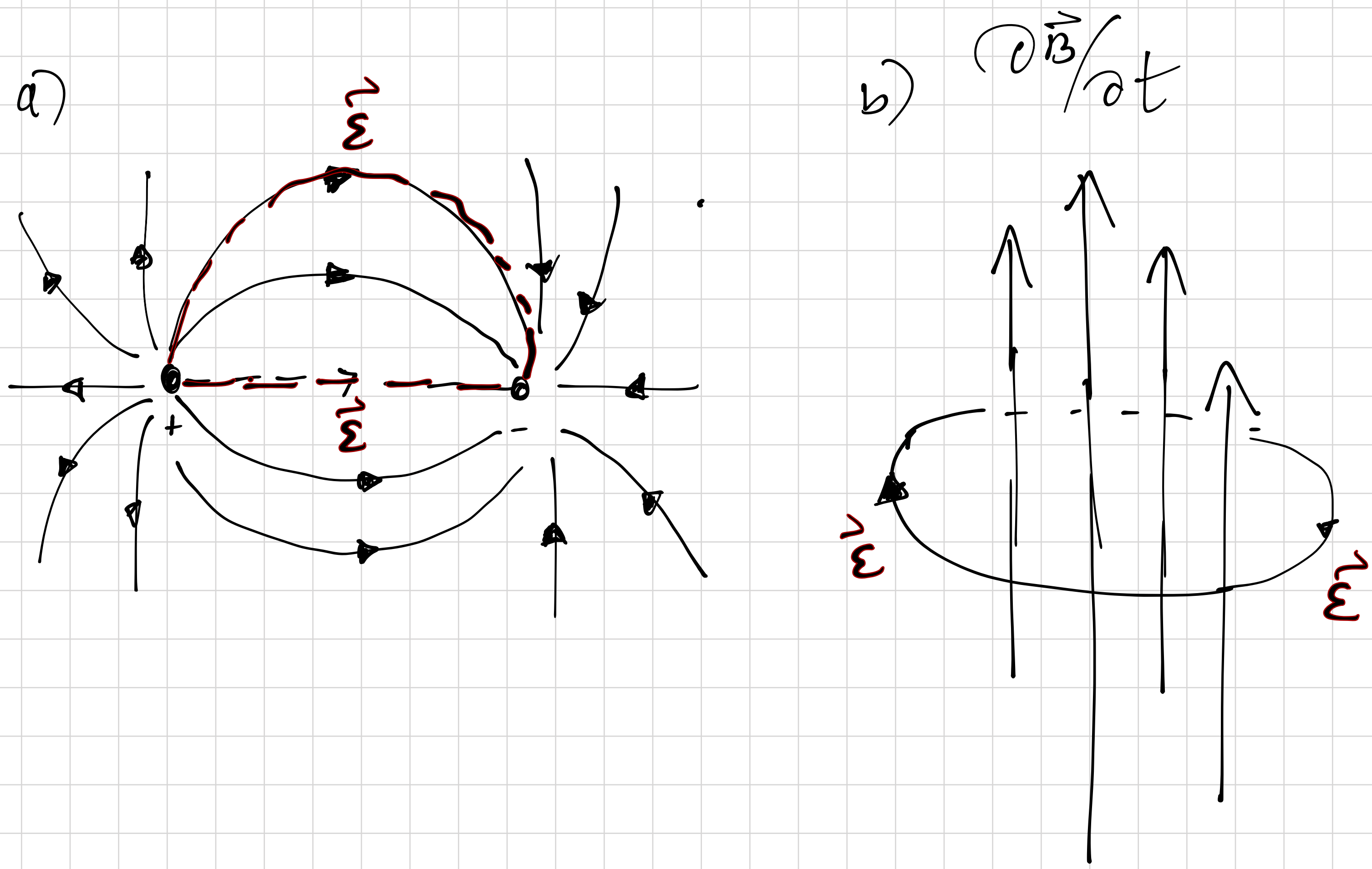
(Coord. Cilíndricas).

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} \equiv \left(\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial (A_\varphi \text{sen}\,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\varphi} \quad \text{(Coord. Esféricas)}$$

La circulación del campo eléctrico ($\vec{\nabla}\times\vec{E}$).

Debido a que los campos eléctricos producidos por cargas puntuales divergen de las cargas positivas y convergen hacia las cargas negativas, tales campos no se mueven o circulan sobre ellos mismos



Si miramos las líneas de campo mostradas en la figura a) de un dipolo. Si nos imaginamos moviéndonos a lo largo de una trayectoria cerrada que sigue una de las líneas divergentes desde la carga eléctrica positiva, como la línea punteada mostrada en la figura. Si la recorremos en una parte de la trayectoria en la dirección de $\vec{\mathcal{E}}$, para este segmento, $\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l}$ es positiva, mientras que en la otra parte $\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l}$ es negativa. Una vez sumemos toda la contribución alrededor del circuito, la integración de $\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l}$ da cero. En efecto, el campo eléctrico del dipolo, igual que todos los campos electrostáticos, no poseen circulación.
Los campos eléctricos inducidos, cambiantes con el tiempo son muy diferentes, como podemos ver en la figura b). Donde haya un campo magnético cambiante, un campo eléctrico circulante es inducido. A diferencia

de los campos eléctricos formados por cargas puntuales, los campos eléctricos inducidos no poseen origen o puntos donde terminan (Ellos son continuos y circulan regresando sobre ellos mismos). Integrando $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada que sirva como frontera para la superficie a través de la cual $\vec{B}$ esta cambiando produce un resultado diferente de cero, lo que nos dice que el campo eléctrico inducido posee circulación. Mientras más rápido cambie $\vec{B}$, será mayor la magnitud de la circulación del campo eléctrico inducido.

Aplicando la ley de Faraday $\left(\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ (forma diferencial).

- Dada una expresión del campo magnético como una función del tiempo, encontrar la circulación del campo eléctrico.

ejemplo

El campo magnético en cierta región es dado por la expresión

$\vec{B}(t) = B_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{j}$

a) Encontrar la circulación del campo eléctrico inducido en esta región

b) Si el E_z es cero, encontrar E_x.

a) De la ley de Faraday, la circulación del campo eléctrico es la derivada negativa del vector del campo magnético respecto al tiempo

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\left[B_0 \cos(kz-\omega t)\right]\hat{j}}{\partial t}, \quad \text{ó}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\omega B_0 \operatorname{sen}(kz - \omega t)\,\hat{j}$$

b) Escribiendo las componentes de la circulación, obtenemos:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}\right)\hat{k}=-\omega B_0 \operatorname{sen}(kz-\omega t)\hat{j},$$

igualando las componentes en $\hat{j}$ y colocando $\mathcal{E}_z=0$, obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}=-\omega B_0 \operatorname{sen}(kz-\omega t).$$

Integrando sobre z obtenemos

$$\mathcal{E}_x=\int -\omega B_0 \operatorname{sen}(kz-\omega t)\,dz=\frac{\omega}{k}B_0\cos(kz-\omega t)+\mathbb{C},$$

con $\mathbb{C}$ siendo una constante de integración la cuál puede hallarse de las condiciones iniciales.

- Dada una expresión para el campo eléctrico inducido, encontrar la rata de cambio con el tiempo del campo magnético.

Ejemplo

Encontrar la rata de cambio con el tiempo del campo magnético en una región en la cuál el campo eléctrico inducido es dado por:

$$\vec{\mathcal{E}}(x,y,z)=\mathcal{E}_0\left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\hat{i}+\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\hat{j}+\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\hat{k}\right].$$

Usando la ley de Faraday: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}}$.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=-\left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z}\right)\hat{i}-\left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}\right)\hat{j}-\left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}\right)\hat{k},$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=-\mathcal{E}_0\left[\left(\frac{2y}{y_0^2}\right)\hat{i}+\left(\frac{2z}{z_0^2}\right)\hat{j}+\left(\frac{2x}{x_0^2}\right)\hat{k}\right].$$

Ecuación de Ampere-Maxwell en forma diferencial.

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{enc} + \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds \right) \xRightarrow{\text{Teorema de Stoke's}}$$

$$= \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\, ds = \int_S (\mu_0\, \vec{j}\cdot\hat{n}\, ds) + \int_S \left(\epsilon_0 \frac{d}{dt}\vec{E}\cdot\hat{n}\, ds\right),$$

como la superficie es arbitraria, esta relación también se cumple para el integrando, es decir,

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

El lado derecho de ésta ecuación es una descripción matemática de la circulación del campo magnético (la tendencia de las líneas del campo a circular alrededor de un punto). Los dos términos sobre la derecha representan la densidad de la corriente eléctrica y la rata de cambio respecto al tiempo del campo eléctrico.

Un campo magnético circulante es producido por una corriente eléctrica y por un campo eléctrico que cambia con el tiempo.

la rata de cambio del campo eléctrico con el tiempo.

recuerde que "nabla" es un vector

El campo magnético es un vector

Recuerde que la densidad de corriente es un vector

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = u_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

el operador diferencial llamado "nabla"

Campo magnético en Tesla

El producto cruz convierte el operador "nabla" en la circulación

la densidad de la corriente eléctrica en A/m^2.

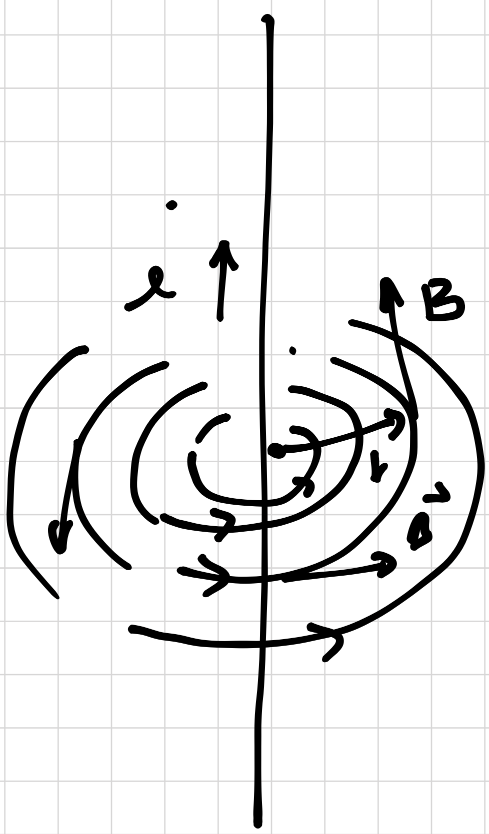
la permeabilidad magnética en el vacío.

la permeabilidad eléctrica del vacío.

La circulación del campo magnético ($\vec{\nabla} \times \vec{B}$)

El lado derecho de la ecuación de la ley de Ampere - Maxwell en forma diferencial representa la circulación del campo magnético. Todos los campos magnéticos, producidos por corrientes eléctricas o por campos eléctricos circulando alrededor de ellos mismos formando un circuito completo. Adicionalmente todos los campos que circulan pueden incluir un punto alrededor del cuál la integral del campo no es cero. Para los campos magnéticos, lugares con circulaciones diferentes de cero son lugares en los cuales la corriente está fluyendo o existe un campo eléctrico el cuál está cambiando.

Es importante notar que debido a que los campos magnéticos son campos circulantes, no podemos concluir que la circulación es diferente de cero en cualquier lugar en el campo. Una equivocación común es pensar que la circulación de un campo vectorial es diferente de cero en cualquier lugar donde el campo aparece a curvarse.



Como un ejemplo consideremos un alambre infinito. Las líneas de campo magnético circulan alrededor de la corriente, el campo magnético está dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\varphi}.$$

Encontramos la circulación de este campo en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rB_r)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

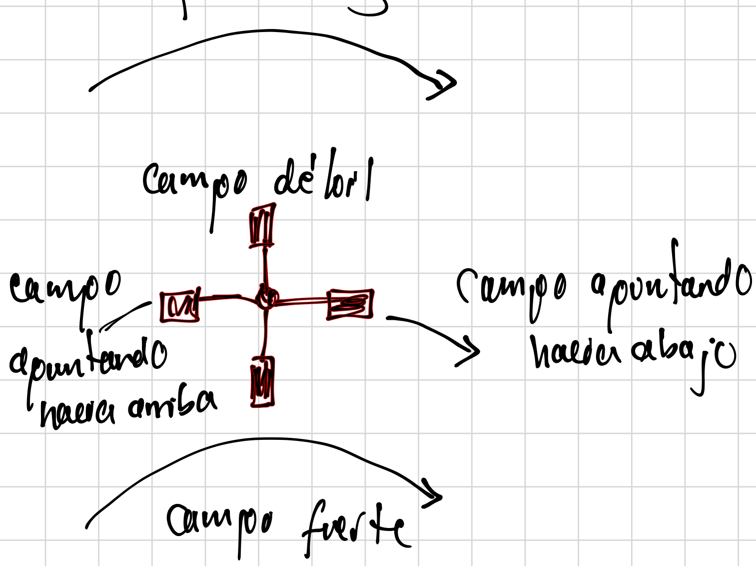
puesto que B_r y B_z son ambos cero, tenemos

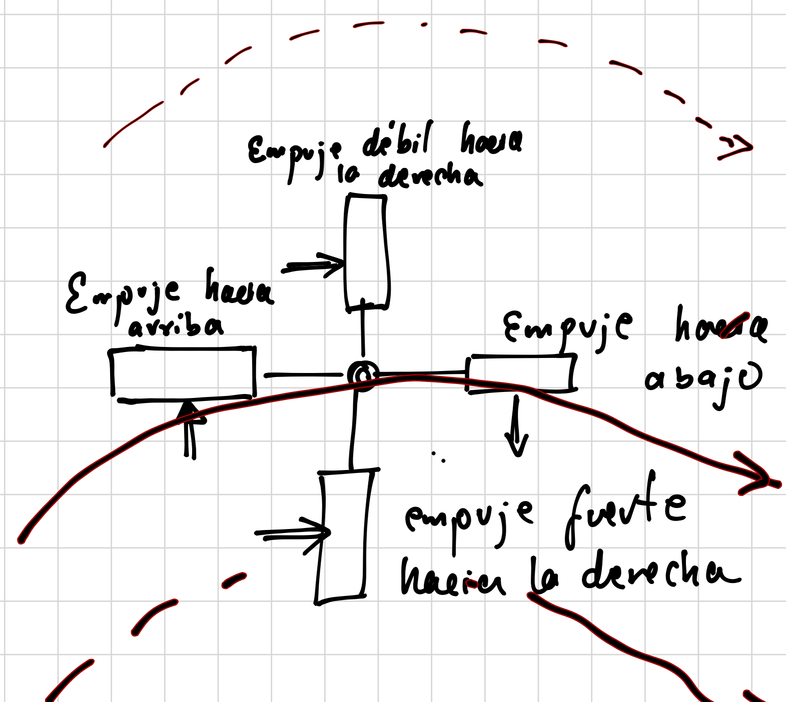
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left(-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rB_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{k} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_0 i/2\pi r\right)\hat{r} +$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\mu_0\, i/2\pi r\right)}{\partial r}\hat{k} = 0.$$

En efecto, lo que nos cuenta exactamente la circulación del

del campo magnético $\vec{B}$ es que esta no es cero exactamente en un "punto" o región a través del cual una corriente eléctrica está fluyendo, o en el cual un campo eléctrico está cambiando. Lejos de este punto o región, el campo no se curva y la circulación en cualquier punto es precisamente cero, como encontramos para el campo magnético producido por una corriente rectilínea muy larga. A pesar de que el campo en un punto posee una curvatura diferente de cero, el campo posee circulación cero. La justificación se encuentra en la amplitud de campo como en la dirección del campo magnético.





Usando la analogía del flujo de fluido y la rueda circulante como prueba, imaginemos las fuerzas sobre la rueda debido al campo de la figura a). Las líneas de campo poseen una curvatura definida, y el espaciamiento de las líneas muestra esta siendo más débil a medida que se aleja del centro. En una primera impresión pensaríamos que la rueda rotaría en el sentido de las agujas del reloj debido a la curvatura de las líneas, campo, Puesto que las líneas de campo apuntan hacia arriba en la izquierda de las palas y hacia abajo a la derecha. Sin embargo, considerando el efecto de la disminución del campo con la distancia alrededor del eje de la rueda: Las palas de arriba reciben un empujón más débil que el del campo en la parte de abajo, figura b). La fuerza más fuerte en la parte de abajo puede causar que la rueda rote en dirección en contra de las manecillas del reloj. Pero para este caso, la curvatura hacia abajo (↷) del campo compensa la debilidad del campo con la distancia y si el campo disminuye como $1/r$ en el empujón arriba-abajo, sobre la derecha y izquierda es exactamente compensado por el campo débil-fuerte del empujón sobre la parte superior e inferior de las palas. Los giros en dirección y en contra de las manecillas del reloj se balancean, y la rueda no gira. La circulación en este punto o región es cero, aunque el campo posea una curvatura.

Luego el campo magnético puede poseer una curvatura en diferentes puntos, pero únicamente puntos donde la corriente esté fluyendo (o el flujo de campo eléctrico esté cambiando) posee una circulación de $\vec{B}$ diferente de cero.

En el anterior análisis, no incluimos el punto con $r=0$, en el origen. La razón es que la expresión de la circulación incluye términos que contienen a r como denominador, y estos términos dan infinitos en el origen. Para evaluar la circulación en el origen, usamos la definición formal:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell},$$

considerando un circuito especial amperiano rodeando la corriente, tenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \lim_{\Delta S_1 \to 0} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \lim_{\Delta S_1 \to 0} \left(\frac{1}{\Delta S} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} (2\pi r) \right) = \lim_{\Delta S_1 \to 0} \left(\frac{1}{\Delta S} \mu_0 i \right)$$

$$= \lim_{\Delta S_1 \to 0} \left(\frac{1}{\Delta S} \mu_0 \vec{J} \Delta S \right) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

En este caso, la reducción de la magnitud del campo magnético a medida que se aleja del alambre es exactamente compensado por la curvatura de las líneas de campo. En efecto, la circulación del campo magnético es cero en cualquier parte excepto en el punto donde está el alambre, el lugar donde la corriente esta fluyendo.

La densidad de la corriente de desplazamiento $\left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$.

El segundo término para el campo magnético en la Ley de Ampere-Maxwell involucra la rata de cambio del campo eléctrico con el tiempo. Cuando esta es multiplicada por la permitividad eléctrica del vacío, éste término tiene unidades en el SI de A/m². Unidades idénticas a $\vec{J}$. Sin embargo el concepto clave aquí es que el campo eléctrico cambiante produce un campo magnético cambiante, aún cuando no existan cargas presentes en éste punto y no hayan corrientes físicas. Por medio de este mecanismo, las ondas electromagnéticas pueden propagarse a través del vacío, como campos magnéticos cambiantes los cuáles inducen campos eléctricos y campos eléctricos inducidos cambiantes inducen campos magnéticos.

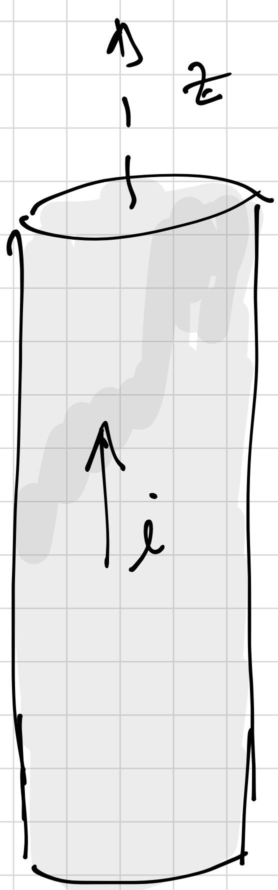
Aplicando la ley diferencial de la Ecuación de Ampere - Maxwell

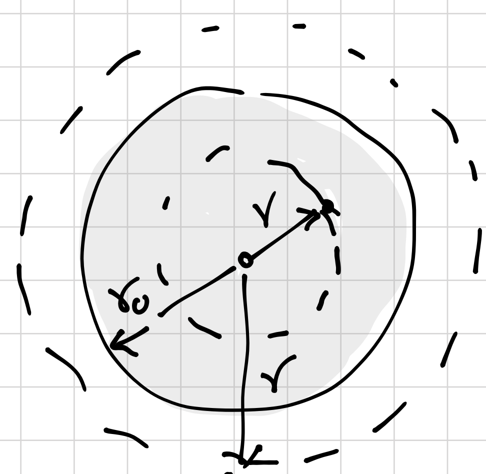
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J}+\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right).$$

- Dado un campo magnético, encontrar la densidad de corriente en un punto específico.

Ejemplo

Halle la densidad de corriente adentro y afuera de un alambre largo y de radio r_0 llevando una corriente uniforme i distribuida en su volumen en la dirección positiva.





Usando ley de Ampere en forma integral hallamos que

$$B(r) = \frac{\mu_0 \, i_{neta}}{2\pi r}; \quad \text{para}$$

$r < r_0$ $\quad i_{neta} = j_0 A' = \frac{i}{A} A' = \frac{i \pi r^2}{\pi r_0^2}$

$$i_{neta} = \frac{i r^2}{r_0} \implies \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2}\hat{\varphi}; \quad r < r_0.$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\varphi} \quad r > r_0.$$

Para hallar la densidad de corriente de la ecuación diferencial aplicamos

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial\varphi}\right)\hat{k}.$$

y puesto que $\vec{B}$ tiene sólo componentes en $\hat{\varphi}$, tenemos:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \equiv \left(-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{k} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\left(\mu_0\frac{Ir}{2\pi r_0^2}\right)\right)}{\partial r}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{1}{r}\left(2r\frac{\mu_0 i}{2\pi r_0^2}\right)\hat{k} = \frac{\mu_0 i}{\pi r_0^2}\hat{k},$$

Usando la versión estática de la Ley de Ampere-Maxwell (puesto que la corriente es estacionaria), tenemos

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 (\vec{J}) \text{ , y en efecto , hallamos}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi r_0^2}\right)\hat{k} = \frac{I}{\pi r_0^2}\hat{k}$$

Lo cuál es la densidad de corriente dentro del alambre. Tomando la circulación de la expresión de $\vec{B}$ afuera del alambre, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0 \Rightarrow$, $\vec{J} = 0$

- Dado el campo magnético, encontrar la corriente de desplazamiento.

ejemplo

La expresión del campo magnético de un capacitor circular de placas paralelas es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \Delta V}{2\pi R} e^{-t/RC}\left(\frac{r}{r_0^2}\right)\varphi,$$

use éste resultado para encontrar la corriente de desplazamiento entre las placas.

Usamos el desplazamiento de $\vec{B}$ en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\right)\hat{k}$$

como sólo hay componentes de $\hat{\varphi}$ de $\vec{B}$, tenemos:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left(-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{k} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left((r\mu_0 \Delta V/2\pi R)\, e^{-t/RC}\left(\frac{r}{r_0^2}\right)\right)}{\partial r}\right]\hat{k}$$

$$= \frac{1}{r}\left[2r\frac{\mu_0 \Delta V}{2\pi R} e^{-t/RC}\left(\frac{1}{r_0^2}\right)\right]\hat{k} = \left[\frac{\mu_0 \Delta V}{\pi R} e^{-t/RC}\left(\frac{1}{r_0^2}\right)\right]\hat{k}$$

Debido a que no existe corriente de conducción estacionaria entre las placas, $\vec{J}=0$, en este caso y la Ley de Ampere - Maxwell es

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$, encontrando que la corriente de desplazamiento es:

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\mu_0 \Delta V}{\pi R}\, e^{-\frac{t}{RC}}\left(\frac{1}{r_0^2}\right)\right]\hat{k} = \left[\frac{\Delta V}{R}\, e^{-t/RC}\left(\frac{1}{\pi r_0^2}\right)\right]\hat{k}$$