Ejercicios parcial 4 EDP

Luis Daniel Gonzalez Presiga

Mayo 2023

Ejercicio 0.1. Encontrar las soluciones $u(x, y)$ de la reducción de la ecuación de Helmholtz dada por $\Delta u - ku = 0$ (donde k es un parámetro positivo). Sobre el cuadrado descrito por $0 < x$,$y < \pi$ donde u satisface la condición de frontera dada por:

$$u(x, 0) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$$

Demostración. Vamos a resolver este problema por el método de separación de variables. Supongamos que la solución es de la forma $u(x, y) = X(X)Y(y)$. Recordemos además que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Entonces derivando y reemplazando en la ecuación obtenemos que:

$$X''Y + Y''X = kXY \quad \Rightarrow \quad \frac{-Y''}{Y} = \frac{X''}{X} - k = \lambda$$

De lo anterior obtenemos un problema de Sturm-Liouville para Y:

$$Y'' + \lambda Y = 0, \ \ , Y(0) = Y(\pi) = 0$$

De donde obtenemos el polinomio característico:

$$r^2 + \lambda = 0$$

De donde obtenemos los valores propios y las funciones propias del problema:

$$\lambda_n = n^2, \ \ Y_n y = sin(ny), \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

De donde nos queda la ecuación diferencial ordinaria en la variable X dada por:

$$(X_n)'' - (k + n^2)X_n = 0$$

Luego como $k + n^2 > 0$,entonces la solución está dada por:

$$X_n(x) = A_n e^{\sqrt{k+n^2}x} + B_n e^{-\sqrt{k+n^2}x}$$

Por lo tanto obtenemos que la solución general está dada por:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{\sqrt{k+n^2}x} + B_n e^{-\sqrt{k+n^2}x}] sin(ny)$$

Luego de las condiciones de frontera presentadas en el problema obtenemos que:

$$u(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) sin(ny) = 1$$
$$u(\pi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{\sqrt{k+n^2}\pi} + B_n e^{-\sqrt{k+n^2}\pi}] sin(ny) = 0$$

Luego expandiendo la función constante $g(x) = 1$ en serie des Fourier obtenemos:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(ny), \quad b_n = \int_0^{\pi} sin(ny)dy = \frac{-2}{\pi n}[(-1)^n - 1]$$

Luego haciendo la respectiva comparación de coeficientes obtenemos:

$$A_n = -\frac{b_n e^{-\sqrt{k+n^2}\pi}}{exp\sqrt{k + n^2}\pi - e^{-\sqrt{k+n^2}\pi}}, \quad B_n = \frac{b_n e^{\sqrt{k+n^2}\pi}}{e^{\sqrt{k+n^2}\pi} - e^{-\sqrt{k+n^2}\pi}}$$

de todo lo anterior obtenemos que la solución particular buscada tiene la forma:

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{infty} \frac{sinh[\sqrt{k + (2l - 1)^2}(\pi - x)]}{(2l - 1)sinh[\sqrt{k + (2l - 1)^2}\pi]}$$

□

Ejercicio 0.2. Sea D el dominio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$. Considere el problema de Neuman:

$$\Delta u = 0 \qquad (x, y) \in D$$
$$\partial_n u = \alpha x^2 + \beta y + \gamma \qquad (x, y) \in \partial D$$

Donde α, β, γ son constantes reales. Resolver los dos siguientes ítem:

- Encontrar valores α, β, γ para los cuales el problema no se puede solucionar.
- Resolver el problema para los valores α, β, γ existen.

Demostración. Vamos a solucionar el ítem (a):
Por el Lema [7.4] del libro de Pinchover establece que una condición necesaria para la existencia de una solución del problema de Neuman:

$$\Delta u = f(x, y) \;\; (x, y) \in D$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y) \;\; (x, y) \in \partial D$$

es:

$$\int_{\partial D} g(x(s), y(s))ds = \iint_D f(x, y)dxdy$$

Donde $(x(s), y(s))$ es una parametrización para la curva ∂D. En nuestro caso tenemos que $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = \alpha x^2 \beta y + \gamma$. Así la condición necesaria es:

$$\int_{\partial D} \alpha(x(s))^2 + \beta y(s) + \gamma ds = \iint_D 0dxdy = 0$$

Por otra parte tenemos que nuestro dominio D está dado por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2 + y^2 < 4\}$, por lo tanto la frontera puede ser parametrizada como $(x(s), y(s)) = (2cos(s), 2sin(s))$, por lo tanto obtenemos que la condición necesaria es:

$$\int_0^{2\pi} \alpha(2cos(s))^2 + \beta(2sin(s)) + \gamma ds = 0$$

Esta última integral se puede reescribir como:

$$\int_0^{2\pi} 4\alpha cos^2(s) + 2\beta sin(s) + \gamma ds = 4\alpha^2\pi + 2\beta * 0 + \gamma * 2\pi = 2\pi(2\alpha^2 + \gamma)$$

Por lo tanto obtenemos que $2\alpha^2 + \gamma = 0$. De esta información podemos concluir que el problema no tiene solución si sucede que $\gamma \neq -2\alpha^2$.

□

Ejercicio 0.3. Resolver la ecuación $u_t = 2u_{xx}$ en el dominio $0 < x < \pi$, $t > 0$ bajo las condiciones iniciales:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; u(x,0) = f(x) = x(x^2 - \pi^2)$$

Luego use el principio del máximo para probar que la solución encontrada es clásica.

Demostración. La ecuación diferencial parcial dada es una ecuación del calor, por lo tanto su solución general está dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-2n^2t} sin(nx)$$

Luego de las condiciones obtenemos que:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(nx) = x(x^2 - pi^2)$$

Para conocer B_n integramos como hacemos para calcular los coeficientes en la serie de Fourier, así obtenemos:

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(x^2 - \pi^2) sin(nx) dx = \frac{12(-1)^n}{n^3}$$

Por lo tanto obtenemos que la solución particular del problema está dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-2n^2t} sin(nx)$$

Ahora vamos a comprobar que esta solución es clásica. Consideremos la función dada en la condición de frontera del problema $f(x) = x(x^2 - pi^2)$. Como f y f' son continuas y $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces la serie $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(nx) = f(x)$ converge uniformemente a la función f y por el corolario [7,18] del libro de Pinchover obtenemos que la solución es clásica. $\square$

Ejercicio 0.4. Sea $u(x,y)$ una función armónica en el dominio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 36\}$, la cual satisface sobre ∂D la condición de frontera de Drichlet dada por:

$$u(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Probar que $u(x,y) < min\{x,0\}$ en D.
- Evalúe u(0,0) usando el principio del valor medio.
- Use la fórmula de Poisson para evaluar $u(0,y)$ para $0 \leq y < 6$.
- Use el método de separación de variables para encontrar la solución u en D.
- ¿ La solución hallada es clásica?

Demostración.

- Vamos a probar que $u(x,y) < min\{x,0\}$ en D.

  Definamos $v(x,y) := u(x,y) - x$, entonces tenemos que v resuelve el problema:

$$\begin{aligned} &\Delta v = 0 && (x,y) \in D \\ &v(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ -x, & \text{en otro caso.} \end{cases} && (x,y) \in \partial D \end{aligned}$$

Además por la forma en que están definidas tenemos que $u(x,y) \leq 0$ y $v(x,y) \leq 0$ sobre ∂D. Luego por el principio débil del máximo tenemos que:

$$max_D u(x,y) = max_{\partial D} u(x,y)$$
$$max_D (vx,y) = max_{\partial D} v(x,y)$$

Además por la definición de máximo también tenemos que:

$$u(x,y) \leq max_d u(x,y)$$
$$v(x,y) \leq max_D v(x,y)$$

Si tuviéramos que:

$$u(x,y) = max_D u(x,y)$$
$$v(x,y) = max_D v(x,y)$$

Para algún $(x,y) \in D$, entonces del principio fuerte del máximo implica que las funciones u, v son constantes en ∂D, pero esto contradice que las funciones u, v conocidas no constantes:

$$u(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
$$v(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ -x, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sobre ∂D. Por lo tanto la iualdad no es posible, de donde obtenemos que:

$$u(x,y) < max_D u(x,y)$$
$$v(x,y) < max_D v(x,y)$$

De donde podemos obtener que:

$$u(x,y) < max_D u(x,y) = max_{\partial D} u(x,y) = 0$$

$$v(x,y) < max_D v(x,y) = max_{\partial D} v(x,y) = 0$$

En D, lo cual es equivalente a decir que $u(x,y) < 0$ y $u(x,y) < x$, lo cual prueba que $u(x,y) < max\{x, 0\}$

- Ahora vamos a evaluar $u(0,0)$ usando el principio del máximo. Aplicando el principio obtenemos que:

$$\begin{aligned}
u(0,0) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(0+6cos(\theta), 0+6sin(\theta))d\theta \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(6cos(\theta), 6sin(\theta))d\theta \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} 0d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 6cos(\theta)d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} 0d\theta \\
=& \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 6cos(\theta)d\theta \\
=& -\frac{6}{\pi}
\end{aligned}$$

- Ahora usamos la fórmula de Poisson para evaluar $u(0,y)$ para $0 \leq y < 6$. Primero escribamos la condición de frontera en coordenadas polares, nos queda:

$$g(\theta) = w(6,\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi/2 < \theta < \pi/2, \\ 6cos(\theta), & \text{si } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$$

Luego usando la Fórmula de Poisson obtenemos que:

$$\begin{aligned}
w(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{36-r^2}{36-12rcos(\theta-\varphi)+r^2} g(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{36-r^2}{36-12rcos(\theta-\varphi)+r^2} 6cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{36-r^2}{36-12r(cos(\theta)cos(\varphi)+sin(\theta)sin(\varphi))+r^2} cos(\varphi)d\varphi
\end{aligned}$$

Luego en coordenadas cartesianas $u(x,y) = u(x(r,\theta), y(r,\theta)) = w(r,\theta)$. Obtenemos entonces:

$$= \frac{3}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{36 - r^2}{36 - 12r(cos(\theta)cos(\varphi) + sin(\theta)sin(\varphi)) + r^2} cos(\varphi)d\varphi$$
$$= \frac{3}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{36 - (x^2 + y^2)}{36 - 12(xcos(\varphi) + ysin(\varphi)) + x^2 + y^2} cos(\varphi)d\varphi$$

Luego sobre la recta $x = 0$ obtenemos que:

$$u(0,0) = \frac{3}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} cos(\varphi) = -\frac{6}{\pi}$$

Luego haciendo la sustitución $u = 36 - 12ysin(\varphi) + y^2$, obtenemos que $du = -12ycos(\varphi)d\varphi$, entonces:

$$\begin{aligned} u(0,y) =& \frac{3}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{36 - y^2}{36 - 12ysin(\varphi) + y^2} cos(\varphi)d\varphi \\ =& \frac{3}{\pi}(36 - y^2)\int_{36-12y+y^2}^{36+12y+y^2} \frac{1}{u}(-\frac{du}{12y}) \\ =& -\frac{1}{4\pi}\frac{36 - y^2}{y}\int_{(6-y)^2}^{(6+y)^2} \frac{1}{u}du \\ =& -\frac{1}{2\pi}\frac{36 - y^2}{y} ln(\frac{6+y}{6-y}) \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que:

$$u(0,y) = \begin{cases} -\frac{6}{\pi}, & \text{si } y = 0, \\ -\frac{1}{2\pi}\frac{36-y^2}{y} ln(\frac{6+y}{6-y}), & \text{si} 0 < y < 6 \end{cases}$$

- Ahora vamos a usar separación de variables para hallar una solución u del problema. Primero consideremos el problema usando coordenadas polares:

$$w(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta))$$

Entonces el problema se transforma en:

$$\Delta w = 0$$

$$w(6,\theta) = \begin{cases} 6cos(\theta), & \text{si } \pi/2 < \theta 3\pi/2 \\ 0, & \text{si } 0 \leq \pi/2, \;\; 3\pi/2 \leq \theta 2\pi \end{cases}$$

Luego por el ejercicio [7,7b] tenemos el método para solucionar la ecuación de Laplace sobre un disco por separación de variables, entonces tenemos de ese ejercicio que la solución es de la forma:

$$w(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n cos n\theta + b_n sin n\theta)$$

Por lo tanto en nuestro caso obtenemos que:

$$w(6,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n (a_n cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n + b_n sin n\theta$$

Ahora vamos a hacer el cálculo de los coeficientes de Fourier usando para ello las condiciones de frontera dadas en el problema.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 6cos(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} w(6,\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n a_n cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n + b_n sin n\theta d\theta \\
&= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n a_n \int_0^{2\pi} cos(n\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n b_n \int_0^{2\pi} sen(n\theta) d\theta \\
&= \pi a_0
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que $a_0 = -\frac{12}{\pi}$. Procedemos de la misma forma para calcular los respectivos coeficientes a_n y b_n:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 6cos(\theta)cos(n\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} w(6,\theta) cos(n\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n (a_n cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n + b_n sin n\theta) cos(n\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Luego partiendo la integral para cada suma e integrando obtenemos:

$$= 6^n a_n \pi$$

De donde obtenemos que el coeficiente a_n está dado por:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ -\frac{2}{\pi}\frac{6^{1-n}}{n^2-1}, & \text{si } n = 2, 6, 10, \dots \\ 0, & \text{si } n = 3, 5, 7, \dots \\ \frac{2}{\pi}\frac{6^{1-n}}{n^2-1}, & \text{si } n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

Ahora procedemos de la misma manera para calcular los coeficientes b_n:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 6cos(\theta)sin(n\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} w(6,\theta)sin(n\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n(a_n cosn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n + b_n sinn\theta)sin(n\theta)d\theta$$

Luego partiendo la integral para cada suma e integrando obtenemos $6^n b_n \pi$.

De donde obtenemos que el coeficiente a_n está dado por $b_n = 0$ para todo n.

Recordemos que nuestra solución formal era de la forma:

$$w(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n cosn\theta + b_n sinn\theta)$$

Entonces reemplazando los coeficientes en nuestro problema vamos a obtener que:

$$w(r,\theta) = -\frac{6}{\pi} + \frac{1}{2}r\cos(\theta) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{6^{1-n}}{n^2-1} r^n \cos(n\theta)$$
$$+ \sum_{n=4,8,12,\dots} \frac{2}{\pi}\frac{6^{1-n}}{n^2-1} r^n \cos(n\theta)$$
$$= -\frac{6}{\pi} + \frac{1}{2}r\cos(\theta) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{1-(4n-2)}}{(4n-2)^2-1} r^{4n-2}\cos((4n-2)\theta)$$
$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{1-4n}}{(4n)^2-1} r^{4n}\cos(4n\theta)$$

$\square$

Ejercicio 0.5. Probar que la función de Neumann por la ecuación de Poisson es simétrica, es decir, probar que:

$$N(x, y; \xi, \eta) = N(\xi, \eta; x, y)$$

Para todo $(x, y), (\xi, \eta) \in D$ tal que $(x, y) \neq (\xi, \eta)$.

Demostración. Sean $(x, y), (\xi, \eta) \in D$ tales que $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ y sean:

$$v(\sigma, \tau) := N(\sigma, \tau; x, y), \quad w(\sigma, \tau) := N(\sigma, \tau; \xi, \eta)$$

Las funciones definidas v, w son armónicas en el dominio $D - \{(x, y), (\xi, \eta)\}$ y además son tales que satisface que:

$$\partial_n v(\sigma, \tau) = \partial_n w(\sigma, \tau) = \frac{-1}{L}, \quad (\sigma, \tau) \in \partial D$$

Además tenemos que v, w también satisfacen que:

$$\int_{\partial D} v(\sigma, \tau) ds(\sigma, \tau) = int_{\partial D} w(\sigma, \tau) ds(\sigma, \tau) = 0$$

Por lo tanto obtenemos que:

$$\int_{\partial D} (w \partial_n v - v \partial_n w) ds(\sigma, \tau) = 0$$

Luego por la segunda identidad de Green para un dominio D_ϵ el cual contiene todos los puntos en D tales que sus distancias desde los polos $(x, y), (\xi, \eta)$ son mayores que ϵ, tenemos que:

$$\int_{\partial B((x,y);\epsilon)} (w \partial_n v - v \partial_n w) ds(\sigma, \tau) = \int_{\partial B((\xi,\eta);\epsilon)} (v \partial_n w - w \partial_n v) ds(\sigma, \tau)$$

De lo anterior obtenemos que:

$$lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B((x,y);\epsilon)} |v \partial_n w| ds(\sigma, \tau) = lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B((\xi,\eta);\epsilon)} |w \partial_n v| ds(\sigma, \tau) = 0$$

De la misma forma también obtenemos que:

$$lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B((x,y);\epsilon)} w\partial_n v ds(\sigma,\tau) = w(x,y), \quad lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B((\xi,\eta);\epsilon)} v\partial_n w ds(\sigma,\tau) = v(\xi,\eta)$$

Luego si hacemos $\epsilon \to 0$ vamos a obtener que:

$$N(x,y;\xi,\eta) = w(x,y) = v(\xi,\eta) = N(\xi,\eta;x,y)$$

$\square$