Instituto de Matemáticas

Pregrado - 2023-01

Parcial final Ecuaciones Diferenciales Parciales

Docente:
Jairo Eloy Castellanos Ramos

Estudiante:
Paola Andrea Velásquez Barrientos

Tarea Ecuaciones diferenciales parciales

Capítulo 7: Ecuaciones Elípticas e Identidades de Green

Problemas asignados: 7.8, 7.9, 7.16 y 7.22

7.8) a) Resuelva el problema

$$\begin{aligned} &\triangle u = 0 && 0 < x < \pi \\ &u(x,0) = u(x,\pi) = 0 && 0 \leq x \leq \pi \\ &u(0,y) = 0 && 0 \leq y \leq \pi \end{aligned}$$

Solución: Usando el método de separación de variables, sea

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando dos veces con respecto a x y dos veces con respecto a y, y sustituyendo en $\triangle u = 0$, tenemos que

$$\triangle u = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

De lo cual se sigue que

$$\frac{-X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

Por ende, obtenemos un sistema de EDO's:

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

La solución general para X se obtiene tomando casos sobre λ. De la siguiente manera:

$$X(x) = \begin{cases} C_1 x + C_2 = 0 & si \quad \lambda = 0 \\ C_1 \cos(wx) + C_2 \sin(wx) = 0 & si \quad \lambda < 0,\ \lambda = -w^2 \\ C_1 \exp(wx) + C_2 \exp(-wx) & si \quad \lambda > 0,\ \lambda = w^2 \end{cases}$$

De igual manera, La solución general para X se obtiene tomando casos sobre λ. De la siguiente manera:

$$Y(y) = \begin{cases} D_1 y + D_2 = 0 & si \quad \lambda = 0 \\ D_1 \cos(wy) + D_2 \sin(wy) = 0 & si \quad \lambda > 0,\ \lambda = w^2 \\ C_1 \exp(wy) + C_2 \exp(-wy) & si \quad \lambda < 0,\ \lambda = -w^2 \end{cases}$$

Donde C_1, C_2, D_1 y D_2 son constantes.

Por otro lado, por las condiciones de frontera tenemos

$$u(0,y) = u(x,0) = u(x,\pi) = 0$$

Es equivalente a

$$X(0)Y(y) = X(x)Y(0) = X(x)Y(\pi) = 0$$

Lo cual implica que

$$X(x) = Y(y) = 0$$

ó

$$X(\pi) = Y(0) = Y(\pi) = 0$$

Si asumimos $X(x) = 0$ o $Y(y) = 0$, en ambos casos tendríamos una solución trivial. Dado que la solución trivial no satisface el problema, descartamos este caso, por ende, debemos asumir que

$$X(0) = Y(0) = Y(\pi) = 0$$

Procedamos por casos sobre λ:

Caso 1: Suponga que $\lambda = 0$. Entonces

$$Y(y) = D_1 y + D_2$$
$$Y(0) = 0$$

Implica que $D_2 = 0$, por lo tanto, tenemos

$$Y(y) = D_1 y$$

y como

$$Y(\pi) = 0$$

tenemos que $D_1 = 0$.

De esta manera, obtenemos la solución trivial, luego $\lambda = 0$ no es un valor propio.

Caso 2: Suponga que $\lambda < 0$. Entonces

$$Y(y) = D_1 \exp(wx) + D_2 \exp(-wx)$$

$$Y(0) = 0$$

Esto implica qe $D_2 = -D_1$, y por lo tanto, tenemos

$$Y(y) = D_1(\exp(wx) - \exp(-wx))$$

Ahora usando la condición

$$Y(\pi) = D_1(\exp(w\pi) - \exp(-w\pi)) = 0$$

Como $(\exp(w\pi) - \exp(-w\pi)) \neq 0$ entonces $D_1 = 0$. Por lo tanto, $u(x,y)$ es la solución trivial. Asi $\lambda > 0$ no es un valor propio.

Caso 3: Suponga que $\lambda > 0$. Entonces

$$Y(y) = D_1 \cos(wx) + D_2 \sin(wx)$$

$$Y(0) = 0$$

implica que $D_1 = 0$, y por lo tanto,

$$Y(y) = D_2 \sin(wx)$$

Como

$$y(\pi) = 0$$

Implica que $\sin(wy) = 0$, luego $w\pi = n\pi$, es decir, $\lambda_n = \lambda = n^2$.
Además, la solución de X es dada por:

$$X(x) = C_1 e^{wx} + C_2 e^{-wx}$$
$$X(0) = 0$$

implica $C_2 = -C_1$, por ende,

$$X(x) = C_1 e^{wx} - C_1 e^{wx}$$

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 e^{wx} - C_1 e^{wx} \\ &= 2C_1 \left(\frac{e^{wx} - e^{-wx}}{2} \right) \\ &= 2C_1 \sinh wx \end{aligned} \tag{1}$$

Por lo tanto, tenemos

$$X_n(x) = 2C_{1.n} \sinh nx$$

y

$$Y_n(y) = D_{2,n} \sin ny$$

Para $n = 1, 2, \ldots$ Por lo tanto, si $A_n = C_{1,n} D_{1,n}$, entonces tenemos $u_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) = A_n \sinh nx \sin ny$
Por el principio de superposición, tenemos que

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh nx sinny$$

Es solución no trivial del problema.

Ahora, calculemos los coeficientes de Fourier A_n.

Tenemos

$$\sin(y) = u(\pi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh nx sinny$$

Dado que

$$\int_0^{\pi} \sin y \sin ny dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si \quad n = m \\ \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin y \sin ny dy &= \int_0^\pi \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sinh mx sin my \sin ny dy \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^\pi \sin my \sin ny \\
&= A_n \sinh n\pi \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Lo cual implica

$$
A_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^\pi \sin y \sin ny
$$

$$
\begin{cases}
\frac{1}{\sinh n\pi} & si \quad n = 1 \\
0 & si \quad n \geq 2
\end{cases}
$$

b) ¿Existe un punto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, \ , 0 < y < \pi\}$ tal que $u(x, y) = 0$?

Solution

No existe un punto en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ tal que $u(x, y) = 0$

porque tenemos

$(\sinh x)' = \cosh x > 0$ para todo $0 < x < \pi$.

De esto se sigue que $\sinh x$ es una función creciente, lo cual implica en particular, $\sinh x > \sinh 0 = 0$. Para todo $0 < x < \pi$. También $\sin y > 0$ para todo $0 < y < \pi$. Así concluímos que $u(x, y) = \frac{1}{\sinh \pi} \sinh(x) \sin(y) > 0$

Lo cual implica que $u(x, y) \neq 0$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$

7.9) Una función armónica de la forma

$$P_n(x,y) = \sum_{i+j=n} a_{i,j} x^i y^j$$

es llamado un polinomio homogeneo armónico de grado n. Denote el espacio de los polinomios homogéneos armónicos de grado n por V_n. Ayuda: use la forma polar de la ecuación de Laplace.

Solución: Escribamos el polinomio homogeneo armónico en la forma polar

$$u(r,\theta) = P_n(r,\theta) = \sum_{i+j=n} a_{i,j} (r\cos\theta)^i (r\sin\theta)^j$$

Si n=0, entonces $i = j = 0$. Por lo tanto,

$$P_0(r,\theta) = a_{0,0}$$

y por ende, la dimensión de P_0 es 1.

Para $n \geq 1$. Un polinomio armónico homogeneo tiene la forma en coordenadas polares

$$u(r,\theta) = P_n(r,\theta) = \sum_{i+j=n} a_{i,j} (r\cos\theta)^i (r\sin\theta)^j$$

Por lo tanto,

$$u(r,\theta) = r^n \sum_{i+j=n} a_{i,j} (\cos\theta)^i (\sin\theta)^j$$

Reemplazando $u(r,\theta)$ en la ecuación de Laplace, obtenemos

$$f(\theta) = f_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

Implica que

$$P_n(r,\theta) = r^n f(\theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

De esto se sigue que los polinomios armónicos de orden $n \geq 1$ son generados por dos funciones

$$V_1(r,\theta) = r^n \cos n\theta$$

$$V_2(r,\theta) = r^n \sin\theta$$

y la dimensión de V_n para $n \geq 1$ es 2.

7.16 Sea $u(x,y)$ una solución suave para el problema de Dirichlet:

$$\triangle u + \vec{V}\cdot\nabla u = F \qquad (x,y)\in D$$

$$u(x,y) = g(x,y) \qquad (x,y)\in \partial D$$

donde $F>0$ en D, $g<0$, y $V(x,y)$ es un campo vectorial suave en D.

Pruebe que $u(x,y)<0$ en D.

Prueba: Para demostrar que $u(x,y)<0$ en D. Utilizaremos el método de la energía. Primero definamos la energía funcional como:

$$E(u) = \int\int [|\nabla u|^2 + \vec{V}\cdot\nabla u - F(x,y)u]dA$$

donde $|\nabla u|^2$ es el cuadrado de la norma gradiente de u, $\vec{V}\cdot\nabla u$ es el producto escalar V y el gradiente de u, $F(x,y)$ es una función positiva en D.

Supongamos por contradicción que existe un punto (x_0,y_0) en D tal que $u(x_0,y_0)\geq 0$. Tomemos una bola $B(x_0,y_0)$ centrada en (x_0,y_0) y de radio r, donde r es suficientemente pequeño para que la bola este completamente contenida en D. Dado que u es una solución suave podemos usar el teorema de la divergencia a la energía funcional $E(u)$ sobre la bola $B(x_0,y_0)$.

$$\begin{aligned} E(u) &= \int\int [|\nabla u|^2 + \vec{V}\cdot\nabla u - F(x,y)u]dA \\ &= \int\int [\nabla\cdot\nabla u + \vec{V}\cdot\nabla u - F(x,y)u]dA \\ &= \int\int [\nabla\cdot(\nabla u + \nabla u) - \nabla u - F(x,y)u]dA \\ &= \int\int [\nabla\cdot(\nabla u + \nabla u)dA] - \int\int [\vec{V}\cdot u + F(x,y)u]dA \end{aligned} \tag{3}$$

El primer término de la última igualdad se puede reescribir usando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \int\int [\nabla\cdot(\nabla u + \vec{V}u)dA] &= \int\int [|\nabla^2 u + \nabla(\vec{V}u)dA \\ &= \int\int [\nabla^2 u + \vec{V}\cdot\nabla u]dA \\ &= \int\int [\nabla^2 u]dA + \int\int [\vec{V}\cdot\nabla u]dA \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora consideramos el segundo término de la última igualdad

$$\int\int [\vec{V}\cdot u + F(x,y)u]dA$$

Dado que $\vec{V}$ uniforme en D, podemos sacar V de la integral

$$\int\int [\vec{V}\cdot u + F(x,y)u]dA = \int\int [\vec{V}\cdot u]dA + \int\int [F(x,y)u]dA$$

Dado que $\vec{V}$ es constante, $\vec{V} \cdot u$ también es constante, podemos escribirlo como $\vec{V} \cdot u = C_1$, donde C_1 es constante. Entonces la energía funcional se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
E(u) &= \int\int [\nabla^2 u dA + \int\int \vec{V} \cdot \nabla u dA - \int\int [\vec{V} u + F(x,y)u] dA \\
&= \int\int [\nabla^2 u] dA + \int\int C_1 dA - \int\int [F(x,y)u] dA \\
&= \int\int [\nabla^2 u] dA + C_1 A - \int\int [F(x,y)u] dA
\end{aligned} \tag{5}$$

donde A es el área de la bola $B(x_0, y_0)$

Como $F(x,y)$ es una función positiva en D y $u(x_0, y_0) \geq 0$ en la bola $B(x_0, y_0)$ el término $\int\int F(x,y) u dA$ es no negativo. Por lo tanto la energia funcional es mayor o igual que

$$e(u) \geq \int\int \nabla^2 u dA + C_1 1$$

Ahora usaremos el teorema del valor medio para funciones armónicas. Dado que u es suave en la $B(x_0, y_0)$ en D y $\nabla^2 u = 0$ en D. (Débido a la ecuación de Dirichlet), podemos aplicar el teorema del valor medio para funciones armónicas y obtener:

$$\nabla^2 u(x_0, y_0) = 0$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int\int u(x,y) dA$$

Sin embargo, esto implica que $\int\int \nabla^2 u dA = 0$ ya que $\nabla^2 u = 0$. Por lo tanto la energía se reduce a:

$$E(u) > C_1 A$$

Dado que C_1 es una constante y A es el área de la bola $B(x_0, y_0)$, la energía funcional es positiva, sin embargo esto contradice el hecho $u(x,y) = g(x,y) > 0$ en ∂D, lo cual implica que la energía funcional debería ser negativa, por ende la suposición inicial de que existe un punto (x_0, y_0) en D tal que $u(x_0, y_0) \geq 0$ debe ser incorrecta. En consecuencia, podemos concluir que $u(x,y) < 0$ para todo (x,y) en D.

7.22 Sea $u(x,y)$ una función armónica en $D=\{(x,y): x^2+y^2<36\}$ la cual satisface sobre ∂D la condición de frontera de Dirichlet

$$u(x,y)=\begin{cases} x & si \quad x<0\ ,\ (x,y)\in D \\ \\ 0 & si \quad x\geq 0\ ,\ (x,y)\in \partial D \end{cases}$$

a) Probar que $u(x,y)<\text{mín}\,\{x,0\}$ en D.
Ayuda: Probar que $u(x,y)<x$ y $u(x,y)<0$ en D.
Solución: Considere $v(x,y):=u(x,y)-x$. Es claro que v es una función armónica en D, la cual satisface sobre ∂D la condición de frontera de Dirichlet

$$v(x,y)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0\ ,\ (x,y)\in D \\ \\ -x & si \quad x\geq 0\ ,\ (x,y)\in \partial D \end{cases}$$

De la definición de u y v tenemos que

$$u(x,y)\leq 0$$
$$v(x,y)\leq 0$$

Sobre ∂D. Por el principio del máximo débil, tenemos

$$\max_D u(x,y)=\max_{\partial D} u(x,y)$$
$$\max_D v(x,y)=\max_{\partial D} v(x,y)$$

Además, se tiene que

$$u(x,y)\leq \max_D u(x,y)$$
$$v(x,y)\leq \max_D v(x,y)$$

para todo $(x,y)\in D$. Sin embargo, si tenemos

$$u(x_0,y_0)=\max_D u(x,y)$$
$$v(x_0,y_0)=\max_D v(x,y)$$

Para algún $(x_0,y_0)\in D$, entonces por el principio del máximo fuerte afirmaría que u y v son constantes en D. Ahora, por la continuidad de u y v, concluiríamos que u y v son constantes en ∂D, lo cual es un absurdo pues u y v no son constantes sobre la frontera. Luego, la igualdad no se puede dar; en otras palabras, debemos concluir que

$$u(x,y)<\max_D u(x,y)=\max_{\partial D} u(x,y)$$
$$v(x,y)<\max_D v(x,y)=\max_{\partial D} v(x,y)$$

Esto es equivalente a decir que

$$u(x,y)<0$$

Como $u(x,y)=v(x,y)-x$ entonces

$$u(x,y)<x$$

En D, lo cual es equivalente a que

$$u(x,y)<\text{mín}\,\{x,0\}$$

en D.

b) Evaluar $u(0,0)$ usando el principio del valor medio.

Solución.Por el principio del valor medio (Teorema 7.7 del Pinchover, página 179) aplicado a D, tenemos

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(0+6\cos(\theta), 0+6\sin(\theta))d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(6\cos(\theta), 6\sin(\theta))d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\theta)d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 0d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\theta)d\theta \\
&= -\frac{6}{\pi}
\end{aligned}$$

c) Usando la formula de Poisson, evaluar $u(0,y)$ para $0 \leq y < 6$.

Solución. Note que la función forntera en coordenadas polares es:

$$h(\theta) = w(6,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 6\cos(\theta) & \text{if } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Por la formula Poisson formula página 202 de Pinchover applicado a D, tenemos

$$\begin{aligned}
w(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{36-r^2}{36-12r\cos(\theta-\varphi)+r^2} h(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12r\cos(\theta-\varphi)+r^2} 6\cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12r(\cos(\theta)\cos(\varphi)+\sin(\theta)\sin(\varphi))+r^2} \cos(\varphi)d\varphi
\end{aligned}$$

En coordenadas cartesianas, esto es

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= u(x(r,\theta), y(r,\theta)) \\
&= w(r,\theta) \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12r(\cos(\theta)\cos(\varphi)+\sin(\theta)\sin(\varphi))+r^2} \cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12(r\cos(\theta)\cos(\varphi)+r\sin(\theta)\sin(\varphi))+r^2} \cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-\left(x^2+y^2\right)}{36-12(x\cos(\varphi)+y\sin(\varphi))+x^2+y^2} \cos(\varphi)d\varphi
\end{aligned}$$

Sobre la recta $x = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-\left(0^2+0^2\right)}{36-12(0\cos(\varphi)+0\sin(\varphi))+0^2+0^2}\cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\cdot -2 \\
&= -\frac{6}{\pi}
\end{aligned}$$

y, empleando la sustitución $u = 36 - 12y\sin(\varphi) + y^2$, lo cual implica $du = -12y\cos(\varphi)d\varphi$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
u(0,y) &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-\left(0^2+y^2\right)}{36-12(0\cos(\varphi)+y\sin(\varphi))+0^2+y^2}\cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-y^2}{36-12y\sin(\varphi)+y^2}\cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\left(36-y^2\right)\int_{36-12y+y^2}^{36+12y+y^2} \frac{1}{u}\left(-\frac{du}{12y}\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{36-y^2}{y}\int_{(6-y)^2}^{(6+y)^2} \frac{1}{u}du \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{36-y^2}{y}\ln\left(\frac{6+y}{6-y}\right)
\end{aligned}$$

para todo $0 < y < 6$. Por lo tanto, tenemos

$$u(0,y) = \begin{cases} -\frac{6}{\pi} & \text{if } y = 0, \\ -\frac{1}{2\pi}\frac{36-y^2}{y}\ln\left(\frac{6+y}{6-y}\right) & \text{if } 0 < y < 6 \end{cases}$$

Usando la regla de l'Hôpital's, tenemos que $u(0,y)$ satisface

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^+} u(0,y) &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to 0^+}\frac{36-y^2}{y}\ln\left(\frac{6+y}{6-y}\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{6+y}{6-y}\right)}{\frac{y}{36-y^2}}\\
&= -\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{d}{dy}\left(\ln\left(\frac{6+y}{6-y}\right)\right)}{\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{36-y^2}\right)}\\
&= -\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{12}{36-y^2}}{\frac{36+y^2}{(36-y^2)^2}}\\
&= -\frac{6}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\frac{36-y^2}{36+y^2}\\
&= -\frac{6}{\pi}\cdot 1\\
&= -\frac{6}{\pi}\\
&= u(0,0),
\end{aligned}$$

lo cual prueba que $u(0,y)$ es continua para todo $0 \leq y < 6$.

d) Usando el método de separación de variable, encontrar la solución u en D.

Solution Defina $w(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta))$. Entonces el problema es equivalente a

$$\begin{aligned}
&\Delta w = 0 \quad 0 < r < 6, 0 \leq \theta \leq 2\pi\\
&w(6,\theta) = \begin{cases} 6\cos(\theta) & \text{if } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\\ 0 & \text{if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Para la ecuación de Laplace sobre el disco, ya hemos realizado el método de separación de variables en nuestra solución del Ejercicio 7.7(b). Como resultado del método, la solución suave general de la ecuación de Laplace en un disco viene dada por

$$w(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(\alpha_n\cos(n\theta) + \beta_n\sin(n\theta)\right).$$

Ahora, calcularemos los coeficientes de Fourier $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$. Se tiene

$$\begin{aligned}
w(6,\theta) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n\left(\alpha_n\cos(n\theta) + \beta_n\sin(n\theta)\right)\\
&= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n\alpha_n\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} 6^n\beta_n\sin(n\theta)
\end{aligned}$$

y las condiciones de frontera

$$w(6,\theta) = \begin{cases} 6\cos(\theta) & \text{if } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\\ 0 & \text{if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Dado que los coeficientes no son constantes para todos los $0 \leq \theta \leq 2\pi$, no podemos igualar los términos. En su lugar, tenemos que multiplicar por 1 $\cos(\theta), \sin(\theta)$ en cada caso e integrar sobre $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ahora si procedamos a calcular los coeficientes de Fourier.

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi} w(6,\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m \sin(m\theta)d\theta \\
&= \frac{\alpha_0}{2}\int_0^{2\pi} 1d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m \int_0^{2\pi} \sin(m\theta)d\theta \\
&= \frac{\alpha_0}{2} 2\pi + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m 0 + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m 0 \\
&= \pi\alpha_0,
\end{aligned}
$$

Por ende

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\theta)d\theta \\
&= -\frac{12}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\theta)\cos(n\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} w(6,\theta)\cos(n\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m \sin(m\theta)\right)\cos(n\theta)d\theta \\
&= \frac{\alpha_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m \int_0^{2\pi} \sin(m\theta)\cos(n\theta)d\theta \\
&= \frac{\alpha_0}{2} 0 + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m \begin{cases} \pi & \text{if } n = m, \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases} + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m 0 \\
&= 6^n \alpha_n \pi,
\end{aligned}
$$

lo cual implica

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}6^{1-n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\theta)\cos(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}6^{1-n}\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{if } n=1, \\ -\frac{2}{n^2-1} & \text{if } n=2,6,10,\dots, \\ \frac{2}{n^2-1} & \text{if } n=3,5,7,\dots,8,12,\dots \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } n=1, \\ -\frac{2}{\pi}\frac{6^{1-n}}{n^2-1} & \text{if } n=2,6,10,\dots, \\ 0 & \text{if } n=3,5,7,\dots, \\ \frac{2}{\pi}\frac{6^{1-n}}{n^2-1} & \text{if } n=4,8,12,\dots \end{cases}
\end{aligned}
$$

De otro lado,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos(\theta)\sin(n\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} w(6,\theta)\sin(n\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m\alpha_m\cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m\beta_m\sin(m\theta)\right)\sin(n\theta)d\theta \\
&= \frac{\alpha_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin(n\theta)d\theta + \sum_{m=1}^{\infty}6^m\alpha_m\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)\sin(n\theta)d\theta \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty}6^m\beta_m\int_0^{2\pi}\sin(m\theta)\sin(n\theta)d\theta \\
&= \frac{\alpha_0}{2}0 + \sum_{m=1}^{\infty}6^m\alpha_m 0 + \sum_{m=1}^{\infty}6^m\beta_m\begin{cases} \pi & \text{if } n=m, \\ 0 & \text{if } n\neq m \end{cases} \\
&= 6^n\beta_n\pi,
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{\pi}6^{1-n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\theta)\sin(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}6^{1-n}0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, la solución en coordenadas polares es:

$$
\begin{aligned}
w(r,\theta) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)\right) \\
&= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n r^n \sin(n\theta) \\
&= -\frac{\alpha_0}{\pi} + \alpha_1 r^1 \cos(1\theta) + \sum_{n=2,6,10,\ldots} \alpha_n r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=3,5,7,\ldots} \alpha_n r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=4,8,12,\ldots} \alpha_n r^n \cos(n\theta) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n r^n \sin(n\theta) \\
&= -\frac{6}{\pi} + \frac{1}{2} r^1 \cos(1\theta) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,6,10,\ldots} \frac{6^{1-n}}{n^2-1} r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=3,5,7,\ldots} 0 r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=4,8,12,\ldots} \frac{2}{\pi}\frac{6^{1-n}}{n^2-1} r^n \cos(n\theta) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} 0 r^n \sin(n\theta) \\
&= -\frac{6}{\pi} + \frac{1}{2} r \cos(\theta) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,6,10,\ldots} \frac{6^{1-n}}{n^2-1} r^n \cos(n\theta) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=4,8,12,\ldots} \frac{6^{1-n}}{n^2-1} r^n \cos(n\theta) \\
&= -\frac{6}{\pi} + \frac{1}{2} r \cos(\theta) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{1-(4n-2)}}{(4n-2)^2-1} r^{4n-2} \cos((4n-2)\theta) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{1-4n}}{(4n)^2-1} r^{4n} \cos(4n\theta),
\end{aligned}
$$

(e) ¿La solución es clásica?

Observación. Se dice que una solución es clásica si es diferenciable hasta el término de mayor orden de la ecuación diferencial parcial. En este caso, la ecuación de Laplace es una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Por tanto, para que sea clásica, la solución $u(x,y)$ debe ser al menos dos veces diferenciable para todo $(x,y) en D$.

Respuesta. La solución es clásica ya que es dos veces diferenciable.

Capítulo 8

Problema asignado 8.8

8.8) Sea $k \neq 0$. Pruebe que la función $G_k(x;\xi) = \frac{1}{2k} e^{-k|x-\xi|}$ es una solución fundamental de la ecuación

$$-u'' + k^2 u = 0$$

for all $-\infty < x < \infty$. Ayuda: Use una de las identidades de Green.

Demostración Dada la función

$$
\begin{aligned}
G_k(x;\xi) &:= \frac{1}{2k} e^{-k|x-\xi|} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2k} e^{-k(x-\xi)} & \text{if } x \geq \xi, \\ \frac{1}{2k} e^{k(x-\xi)} & \text{if } x < \xi, \end{cases}
\end{aligned}
$$

obtenemos sus primera y segundas derivadas

$$G_k'(x;\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-k(x-\xi)} & \text{if } x > \xi, \\ \frac{1}{2}e^{k(x-\xi)} & \text{if } x < \xi, \end{cases}$$

$$G_k''(x;\xi) = \begin{cases} \frac{k}{2}e^{-k(x-\xi)} & \text{if } x > \xi, \\ \frac{k}{2}e^{k(x-\xi)} & \text{if } x < \xi. \end{cases}$$

Para todo $x \neq \xi$, se tiene

$$\begin{aligned}
-G_k''(x;\xi) + k^2 G_k(x;\xi) &= -\left\{ \begin{array}{ll} \frac{k}{2}e^{-k(x-\xi)} & \text{if } x > \xi, \\ \frac{k}{2}e^{k(x-\xi)} & \text{if } x < \xi \end{array} \right. + k^2 \begin{cases} \frac{1}{2k}e^{-k(x-\xi)} & \text{if } x > \xi, \\ \frac{1}{2k}e^{k(x-\xi)} & \text{if } x < \xi, \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{k}{2}e^{-k(x-\xi)} + \frac{k}{2}e^{-k(x-\xi)} & \text{if } x > \xi, \\ -\frac{k}{2}e^{k(x-\xi)} + \frac{k}{2}e^{k(x-\xi)} & \text{if } x < \xi, \end{cases} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if } x > \xi, \\ 0 & \text{if } x < \xi, \end{array} \right. \\
&= 0,
\end{aligned}$$

lo cual en particular implica que $-G_k''(x;\xi)+k^2G_k(x;\xi) = 0$ para todo $x \in (-\infty, x-\epsilon)\cup(x+\epsilon,\infty)$, donde $\epsilon > 0$ es arbitrario.

Usando la tercera identidad de Green e (integración por partes), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\left(-G_k''(x;\xi) + k^2 G_k(x;\xi)\right) dx &= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} u(x)\left(-G_k''(x;\xi) + k^2 G_k(x;\xi)\right) dx \\
&\quad + \int_{(-\infty,x-\epsilon)\cup(x+\epsilon,\infty)} u(x)\left(-G_k''(x;\xi) + k^2 G_k(x;\xi)\right) dx \\
&= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} u(x)\left(-G_k''(x;\xi) + k^2 G_k(x;\xi)\right) dx + \int_{(-\infty,x-\epsilon)\cup(x+\epsilon,\infty)} u(x)\cdot 0 dx \\
&= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} u(x)\left(-G_k''(x;\xi) + k^2 G_k(x;\xi)\right) dx \\
&= -\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} u(x)G_k''(x;\xi)dx + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} k^2 u(x)G_k(x;\xi)dx \\
&= -\left(u(x)G_k''(x;\xi)\big|_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} u'(x)G_k'(x;\xi)dx \right) \\
&\quad + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} k^2 u(x)G_k(x;\xi)dx \\
&= -\left(u(\xi+\epsilon)G_k'(\xi+\epsilon;\xi) - u(\xi-\epsilon)G_k'(\xi-\epsilon;\xi)\right) \\
&\quad + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} -u'(x)G_k'(x;\xi) + k^2 u(x)G_k(x;\xi)dx \\
&=: A_\epsilon + B_\epsilon.
\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
A_\epsilon &= -\left(u(\xi+\epsilon)G_k'(\xi+\epsilon;\xi) - u(\xi-\epsilon)G_k'(\xi-\epsilon;\xi)\right)\\
&= -u(\xi+\epsilon)G_k'(\xi+\epsilon;\xi) + u(\xi-\epsilon)G_k'(\xi-\epsilon;\xi)\\
&= -u(\xi+\epsilon)\left(-\frac{1}{2}e^{-k((\xi+\epsilon)-\xi)}\right) + u(\xi-\epsilon)\left(\frac{1}{2}e^{k((\xi-\epsilon)-\xi)}\right)\\
&= \frac{1}{2}u(\xi+\epsilon)e^{-k\epsilon} + \frac{1}{2}u(\xi-\epsilon)e^{-k\epsilon}\\
&\to \frac{1}{2}u(\xi) + \frac{1}{2}u(\xi)\\
&= u(\xi)
\end{aligned}$$

as $\epsilon \to 0^+$. Dado que $u(x)$ y $G_k(x;\xi)$ y sus primeras derivadas son acotadas, tenemos

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq C_1,\\
|u'(x)| &\leq C_2,\\
|G_k(x;\xi)| &\leq D_1,\\
|G_k'(x;\xi)| &\leq D_2,
\end{aligned}$$

donde C_1, C_2, D_1, D_2 son constantes, y por ende, por la desigualdad triangular y la desigualdad triangular para integrales, tenemos

$$|B_\epsilon| = \left|\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} -u'(x)G_k'(x;\xi) + k^2u(x)G_k(x;\xi)dx\right|$$

$$\begin{aligned}
|B_\epsilon| = \left|\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} -u'(x)G_k'(x;\xi) + k^2u(x)G_k(x;\xi)dx\right| &\leq \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \left|-u'(x)G_k'(x;\xi) + k^2u(x)G_k(x;\xi)\right| dx\\
&\leq \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \left|-u'(x)G_k'(x;\xi)\right| + \left|k^2u(x)G_k(x;\xi)\right| dx\\
&= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} |u'(x)|\,|G_k'(x;\xi)| + k^2\,|u(x)G_k(x;\xi)|\, dx\\
&\leq \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} C_2D_2 + k^2C_1D_1dx\\
&= 2\left(C_2D_2 + k^2C_1D_1\right)\epsilon\\
&\to 0
\end{aligned}$$

Así $B_\epsilon \to 0$, cuando $\epsilon \to 0^+$. En consecuencia, concluímos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\left(-G_k''(x;\xi) + k^2G_k(x;\xi)\right)dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\left(-G_k''(x;\xi) + k^2G_k(x;\xi)\right)dx\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(A_\epsilon + B_\epsilon\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} A_\epsilon + \lim_{\epsilon\to 0^+} B_\epsilon\\
&= u(\xi) + 0\\
&= u(\xi),
\end{aligned}$$

y por lo tanto, de acuerdo a la definición 8.3(b) en las páginas 212-213 del Pinchover, $G_k(x;\xi)$ satisface

$$-G_k''(x;\xi) + k^2G_k(x;\xi) = \delta(x-\xi)$$

pata todo $-\infty < x < \infty$, lo que significa que $G_k(x;\xi)$ es una solución fundamental de la ecuación $-u'' + k^2 u = 0$.