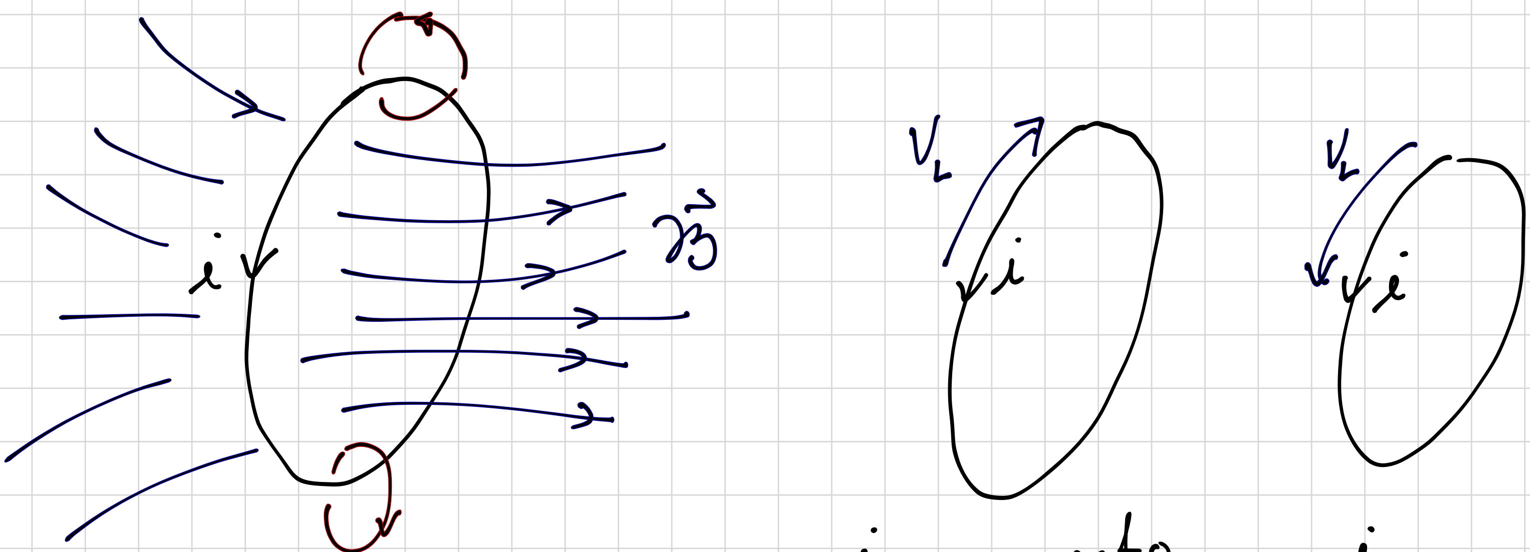
Autoinducción



i en aumento $\qquad$ i en disminución

Consideremos un circuito por el que circula una corriente i. De acuerdo a la Ley de Ampere, la corriente produce un campo magnético el cual es proporcional a I. Podemos calcular el flujo magnético debido a su propio campo magnético y llamarlo flujo propio. Φ_I, es entonces proporcional a la corriente i, por lo que podemos escribir

$$\Phi_I = LI.$$

El coeficiente L depende de la forma geométrica del conductor y se denomina autoinductancia del circuito. Se expresa en $Wb\,A^{-1}$, unidad llamada henry en honor de Joseph Henry que se abrevia $H = Wb\,A^{-1} = m^2\,kg\,C^{-2}$.

Si la corriente i varía con el tiempo, el flujo magnético Φ_I a través del circuito tambien varía y de acuerdo a la ley de inducción de Faraday, se induce una f.e.m en el circuito. Este caso especial de inducción electromagnética se llama autoinducción, luego la f.e.m inducida esta relacionada con el flujo propio Φ_I, como

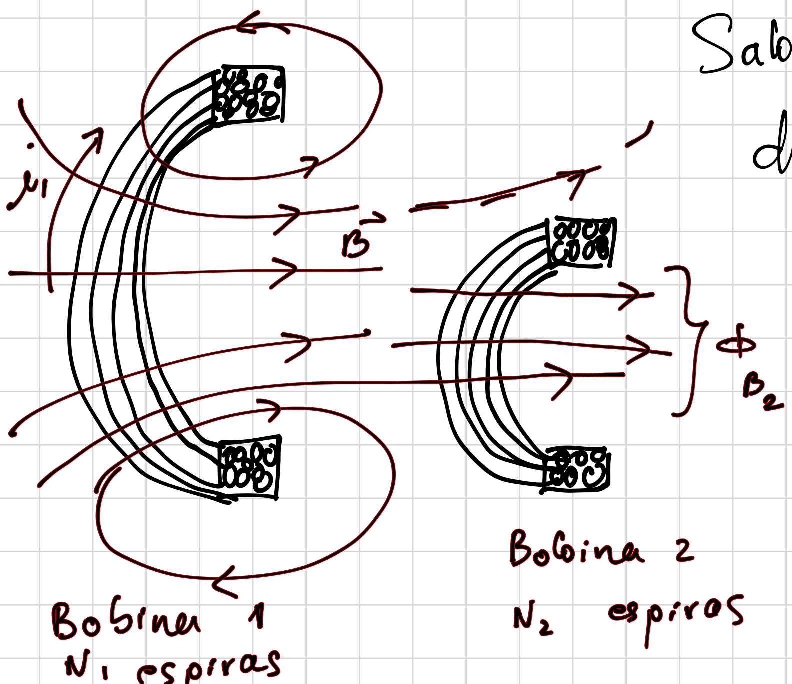
$$V_L = -\frac{d\Phi_I}{dt} = -L\frac{dI}{dt}.$$

El signo menos indica que V_L se opone a la variación de corriente. Luego si la corriente aumenta, $\frac{dI}{dt}$ es positiva y V_L se opone a la corriente. Si la corriente disminuye, dI/dt es negativa y V_L actúa en el mismo sentido que la corriente. Por lo tanto V_L es siempre actúa en un sentido que se opone a la "variación de la corriente". En la ecuación anterior supusimos que el circuito era rígido por lo que se consideró L constante al derivar respecto al tiempo. Si la forma del circuito es variable, L no es constante y debemos escribir en este caso

$$V_L = - \frac{d}{dt}(LI).$$

Para indicar en un diagrama que un conductor tiene una autoinductancia apreciable se usa el símbolo $\overset{I}{—\!\!\!\text{ooooo}\!\!\!—}$. Sin embargo la autoinductancia de un circuito no está concentrada en un punto particular sino que es una propiedad de todo el circuito.

Inductancia Mutua



Sabemos que una corriente en la presencia de un campo magnético creado por otra causa sobre ésta una fuerza magnética. Si adicionalmente tenemos una de las corrientes variables con el tiempo, surge una interacción adicional

Consideremos dos bobinas de alambre la cuál una está cerca a la otra, una corriente circula por la bobina 1 y produce un campo magnético $\vec{B}$ y por tanto, un flujo magnético a través de la bobina 2. Si la corriente en 1 cambia : $i_1 = i_1(t)$, el flujo a través de la bobina 2 también cambia $\Phi_{B_2} = \Phi_{B_2}(t)$; de acuerdo a la ley de Faraday, esto induce una fem en la bobina 2. De éste modo, un cambio en la corriente de un circuito puede inducir otra corriente en un segundo circuito.

En la figura una corriente $i_1(t)$ establece un campo magnético $\vec{B}(t)$, y algunas de éstas líneas de campo pasan a través de la bobina 2. Sea $\Phi_{B_2}(t)$ el flujo magnético a través de cada espira de la bobina 2, causado por la corriente $i_1(t)$ en la bobina 1. (Si el flujo es diferente a través de las espiras diferentes de la bobina, entonces Φ_{B_2} denota el flujo medio). El campo magnético es proporcional a i_1, de manera que $\Phi_{B_2}(t)$ tambien es proporcional a i_1. Cuando i_1 cambia, Φ_{B_2} cambia; éste flujo cambiante induce una f.e.m ξ_2 en la bobina 2, dada por

$$\xi_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B_2}}{dt}.$$

Si tenemos que $\Phi_{B_2} \propto i_1$, luego podemos escribir

$$N_2 \Phi_{B_2} = M_{21} i_1 ,$$

donde M_{21} es llamada la inductancia mutua de las bobinas, donde Φ_{B_2} es el flujo a través de una sola espira.

Luego tenemos

$$N_2 \frac{d\Phi_{B_2}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \boxed{\xi_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}}$$

Un cambio en la corriente i_1 en la bobina 1 induce una f.e.m proporcional en la bobina 2, la cual es directamente proporcional a la tasa de cambio de i_1

Tambien se puede escribir la definición de inductancia mutua como

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{B_2}}{i_1}.$$

Si las bobinas están en el vacío, el flujo Φ_{B_2} a través de cada espira de la bobina 2 es proporcional a la corriente i_1. Luego M_{21} es una constante que sólo depende de la geometría de las bobinas (el tamaño, la forma, el número de espiras y la orientación de cada una, así como la separación entre ellas). Si esta presente un material magnético, M_{21} depende de las propiedades magnéticas de éste. Si el material posee propiedades magnéticas lineales las cuales no son constantes (K_m no es constante y la magnetización no es proporcional al campo magnético, entonces Φ_{B_2} deja de ser proporcional a i_1. En éste caso, la inductancia mutua tambien depende del valor de i_1.

Podría hacerse el análisis para el caso en el cual $i_2 = i_2(t)$ causa un flujo cambiante $\Phi_{B_1}(t)$ y una f.e.m ξ_1 en la bobina 1.

A pesar de que las bobinas no son idénticas y el flujo a través de ellas no es el mismo, se halla que M_{12} siempre es igual a M_{21}, aún cuando las dos bobinas no sean simétricas. A este factor lo llamamos simplemente inductancia mutua, y lo denotamos con M, la cual caracteriza la interacción de la f.e.m inducida de las dos bobinas. Luego

$$\xi_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad y \quad \xi_1 = -M\frac{di_2}{dt},$$

donde M es

$$M = \frac{N_2\,\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\,\Phi_{B1}}{i_2} \quad \text{(inductancia mutua)}$$

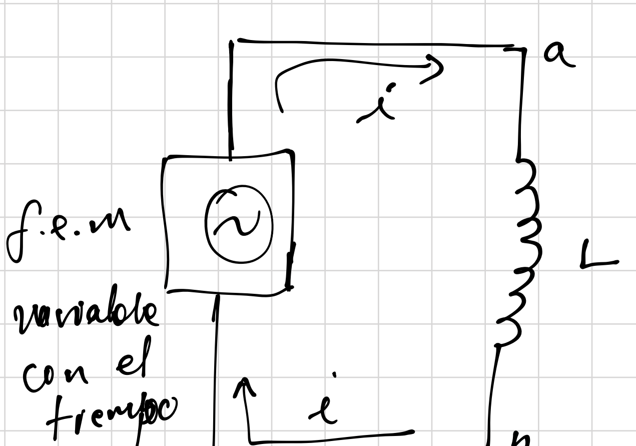
Los signos negativos en la ecuación son un reflejo de la Ley de Lentz. La primera ecuación dice que el cambio en la corriente en la bobina 1 provoca un cambio en el flujo magnético a través de la bobina 2, lo que induce una f.e.m en esta última que se opone al cambio del flujo; en la segunda ecuación las dos bobinas intercambian su papel.

Los inductores como elementos de un circuito.

Un elemento del circuito diseñado para tener una inductancia particular se le llama inductor en un circuito y lo representamos con —mmm—
El objetivo de un inductor es oponerse a cualquier variación de

corriente a través del circuito. Un inductor en un circuito de corriente directa ayuda a mantener la corriente estable a pesar de las fluctuaciones en la f.e.m aplicada; en un circuito de corriente alterna, un inductor tiende a eliminar las variaciones de la corriente que ocurran más rápido de lo deseado. Cuando aplicamos leyes de Kirchoff vimos que en presencia de un campo eléctrico conservativo, la suma algebraica de las diferencias de potencial es igual a cero, éste campo conservativo lo denotamos como $\vec{E}_c$.

Cuando en el circuito hay un inductor, la situación cambia en el sentido de que el campo eléctrico inducido magnéticamente dentro de las bobinas del inductor no es conservativo y lo denotaremos $\vec{E}_n$. Deseamos que el campo eléctrico entre las bobinas del inductor sea cero, o sea $\vec{E}_c + \vec{E}_n$, aun cuando ninguno de ellos individualmente sea cero, es decir que genere una diferencia de potencial entre los terminales del inductor. Como $\vec{E}_c$ es diferente de cero, sabemos que debe de haber acumulaciones de carga en las terminales del inductor y las superficies del conductor para que se produzca éste campo. Consideremos el circuito de la figura



el cual posee una combinación de baterías y resistores variables que nos permiten controlar la corriente i en el circuito. De acuerdo a la ley de Faraday tenemos

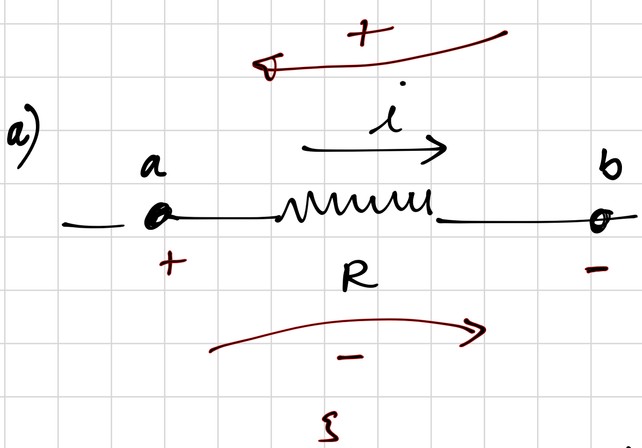
$$\oint \vec{\mathcal{E}}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt} = \int_a^b \vec{\mathcal{E}}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt},$$

y la integración es en el sentido horario alrededor del circuito (el sentido supuesto para la corriente), donde $\vec{\mathcal{E}}_n$ es diferente de cero sólo en el inductor. A continuación como $\vec{\mathcal{E}}_c + \vec{\mathcal{E}}_n = 0$ en cada punto dentro de las bobinas del inductor, esta ecuación se puede escribir como:

$$\int_a^b \vec{\mathcal{E}}_c \cdot d\vec{l} = L\frac{di}{dt} = V_{ab} = V_a - V_b,$$

Hay una diferencia de potencial entre los terminales del inductor, asociada con las fuerzas conservativas electrostáticas a pesar del hecho de que el campo eléctrico asociado con el efecto de inducción magnética es no conservativo. Así esta justificado usar la ley de Kirchoff de las mallas para analizar los circuitos que incluyan inductores.

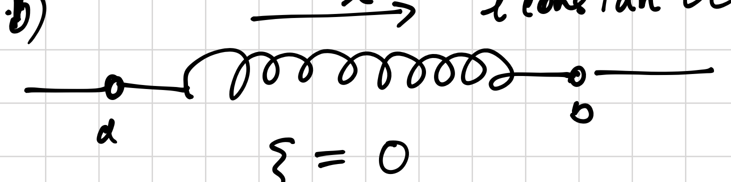
a)



$V_{ab} = iR > 0$

a) Resistor con corriente i que fluye de a a b: el potencial disminuye de $a \to b$.

b)

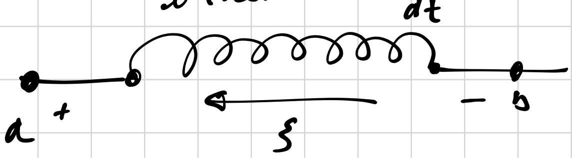


i constante: $\frac{di}{dt} = 0$

$V_{ab} = L\frac{di}{dt} = 0$

Inductor con corriente constante i que fluye de a a b: no hay diferencia de potencial.

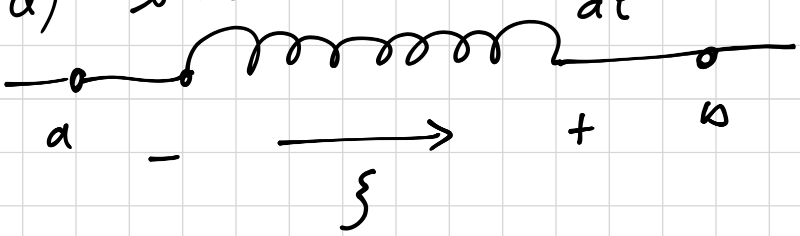
c) — i creciente : $\frac{di}{dt} > 0$



$V_{ab} = L\,\frac{di}{dt} > 0$

Inductor con corriente i creciente que fluye de a a b : el potencial disminuye de a a b.

d) i decreciente : $\frac{di}{dt} < 0$



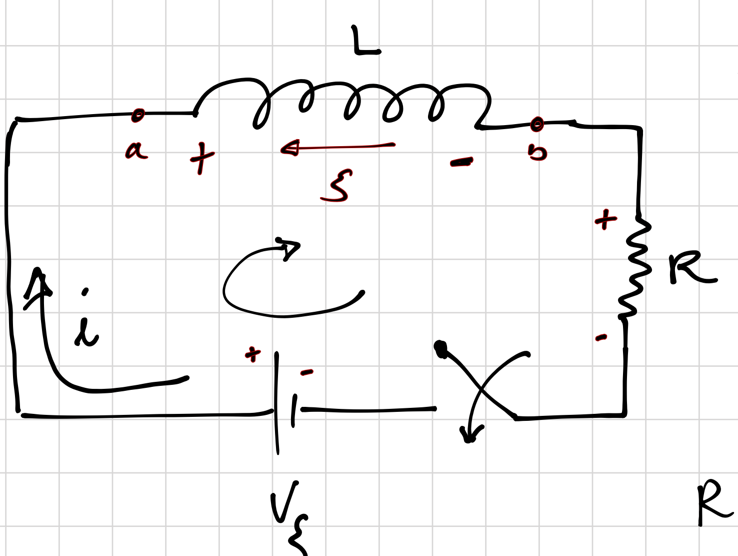
$V_{ab} = L\,\frac{di}{dt} < 0$

inductor con corriente i decreciente que fluye de a a b: el potencial se incrementa de a a b.

Ejemplo

Establecimiento de una corriente en un circuito.

Cuando se aplica una f.e.m V_ξ a un circuito cerrando un interruptor la corriente no alcanza instantáneamente el valor V_ξ/R que corresponde a la Ley de Ohm, sino que aumenta gradualmente aproximándose uniformemente al valor dado por la ley de Ohm. Esto se debe a la f.e.m autoinducida V_L que se opone a la variación de la corriente y está presente mientras la corriente aumenta desde cero hasta su valor final constante. la fem total aplicada al circuito es entonces



$$V_\xi - L\frac{di}{dt} - iR = 0 \Rightarrow Ri = V_\xi - L\frac{di}{dt},$$

$$V_{ab} = L\frac{di}{dt} > 0 = V_\xi - iR, \text{ luego}$$

$$R\left(i - \frac{V_\xi}{R}\right) = -L\left(\frac{di}{dt}\right),$$ y separando las variables i y t, tenemos

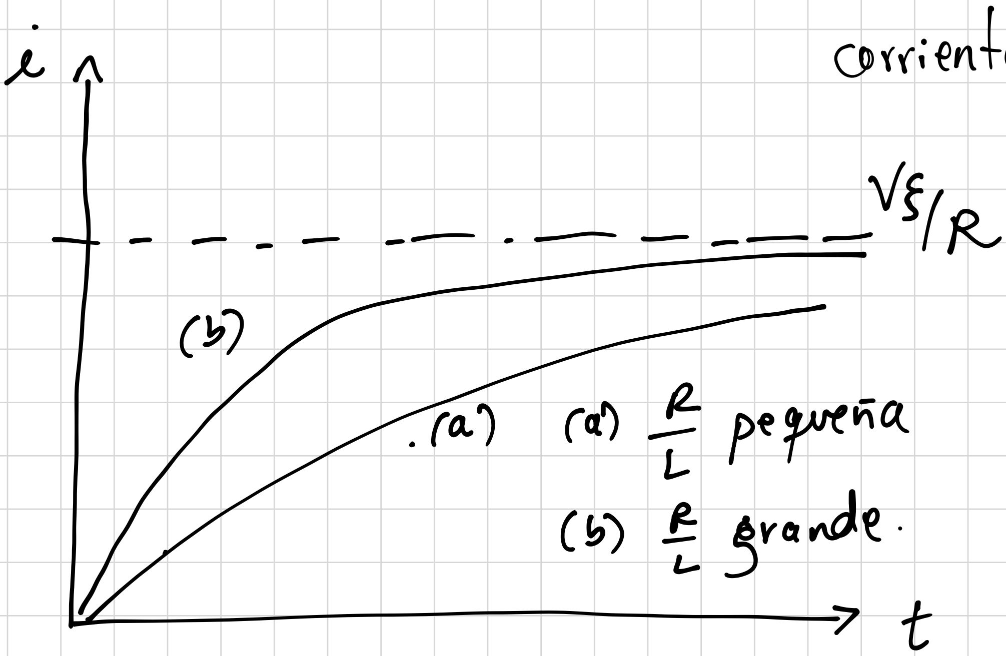
$$\frac{di}{i - V_\xi/R} = -\frac{R}{L}\,dt,$$ al integrar, teniendo en cuenta que para $t=0$, la corriente es nula ($i=0$),

$$\int_0^{i} \frac{di}{i - V_S/R} = -\frac{R}{L}\int_0^{t} dt \quad , \quad \text{o sea}$$

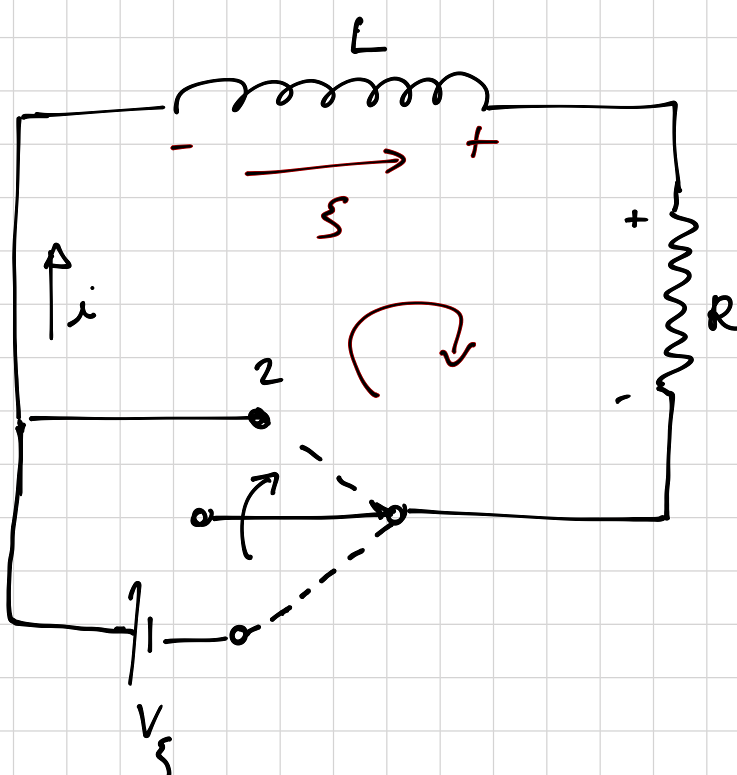
$$\ln(i - V_S/R) - \ln(-V_S/R) = -\left(\frac{R}{L}\right)t \quad , \quad \text{luego}$$

$$i = \frac{V_S}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

El segundo término del paréntesis disminuye con el tiempo y la corriente se aproxima asintóticamente al valor V_S/R dado por la ley de Ohm. Si R/L es grande, la corriente alcanza este valor muy rápidamente, pero si $\frac{R}{L}$ es pequeña puede transcurrir un tiempo largo antes de que la corriente se establezca.



Ejemplo: Estudiar la caída de la corriente en el circuito cuando se mueve el conmutador de 1 a 2



Si el conmutador ha estado en la posición 1 durante mucho tiempo, podemos suponer que la corriente en el circuito ha alcanzado su valor límite (o estacionario) V_S/R. Moviendo el conmutador a la posición 2, desconecetamos la fem aplicada sin abrir realmente el circuito. La única f.e.m es $V_L = -L\frac{di}{dt}$, luego:

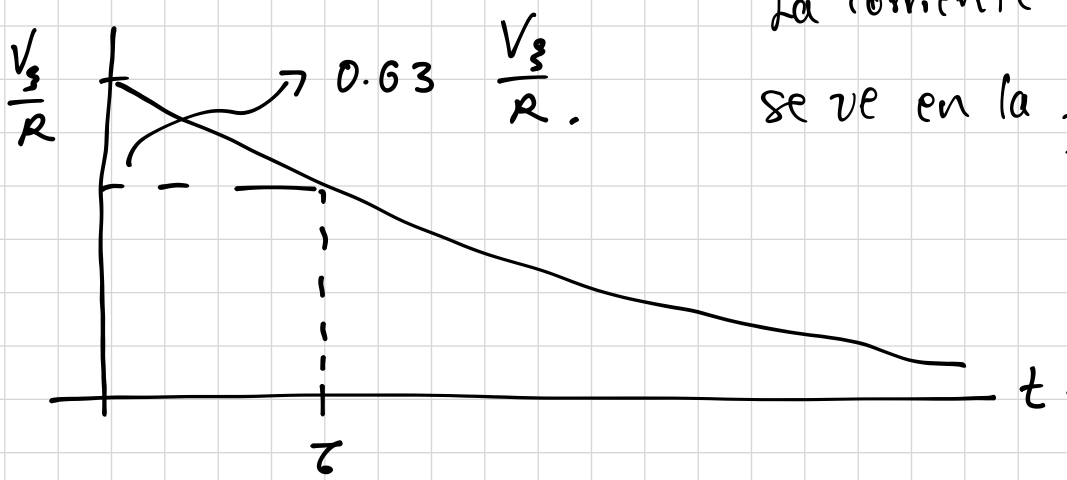
$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow Ri = -L\frac{di}{dt} \quad \text{ó} \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt.$$

Si tenemos en cuenta que en el tiempo $(t=0)$ desde el instante que se desconecta V_s del circuito, la corriente inicial es V_s/R. Integrando

$$\int_{V_s/R}^{i} \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \Rightarrow \ln i - \ln\left(\frac{V_s}{R}\right) = -\left(\frac{R}{L}\right)t,$$

luego tenemos:

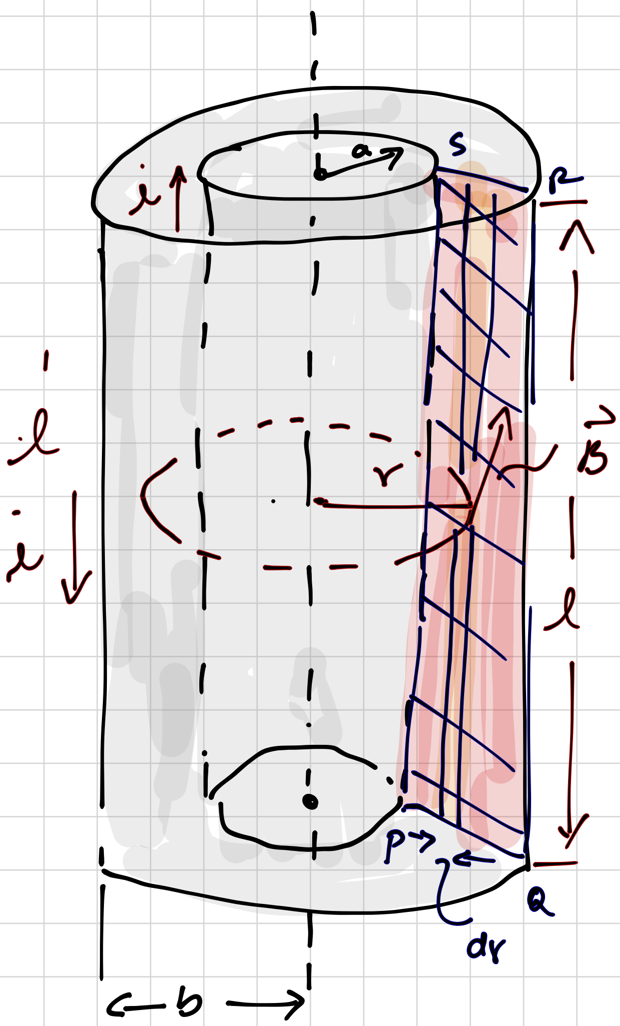
$$i(t) = \left(\frac{V_s}{R}\right)e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}.$$



La corriente decrece exponencialmente como se ve en la figura. Cuando mayor es la resistencia R, o menor la inductancia L, más rápida es la caída de la corriente. El tiempo necesario para que la corriente caiga a $1/e$, o aproximadamente 63%, de su valor inicial, es $\tau = L/R$. Este tiempo se denomina tiempo de relajamiento.

Ejemplo

Un circuito está compuesto por dos láminas metálicas cilíndricas coaxiales de radios a y b; por cada una circula una corriente i pero en sentidos opuestos. Calcular la autoinductancia por unidad de longitud del circuito. El espacio entre los circuitos está ocupado por una sustancia de permeabilidad μ_m.



Aplicando la ley de Ampere

tenemos $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c$ y $\vec{B} = \mu_m \vec{H}$

$\Rightarrow \int H\,dl = i \Rightarrow H(2\pi r) = i \Rightarrow \boxed{B = \dfrac{\mu_m i}{2\pi r}}$

i_{neta} es cero para $r > b$, luego $B = 0$.

Para calcular la autoinductancia, debemos calcular el flujo magnético a través de cualquier sección del conductor, tal como PQRS, que posee longitud l. Si dividimos ésta sección en tiras de ancho dr, el área de cada tira es $l\,dr$. El campo B magnético es perpendicular a PQRS, luego tenemos:

$$\Phi_I = \int_{PQRS} B\,ds = \int_a^b \left(\frac{\mu_m i}{2\pi r}\right)(l\,dr) = \frac{\mu i l}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu i l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Por lo tanto la autoinductancia de una porción de longitud l es

$$L = \frac{\Phi_I}{i} = \frac{\mu_m l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

y la autoinductancia por unidad de longitud será $\frac{\mu_m}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Energía del Campo Magnético.

Para mantener una corriente en un circuito se debe suministrar energía. La energía que se necesita por unidad de tiempo (o sea la potencia) es $V_g i$. Luego tenemos

$V_g = Ri + L\dfrac{di}{dt}$, y multiplicando por i tenemos

$$V_S i = iR^2 + Li\frac{di}{dt},$$

al término Ri^2 es la energía consumida por unidad de tiempo en mover los electrones a través de la red cristalina del conductor y que se transfiere a los iones que forman la red. Interpretamos el último término como la energía que se necesita por unidad de tiempo para establecer la corriente o su campo magnético asociado. Luego la rapidez de aumento de la energía magnética es

$$\frac{dE_B}{dt} = Li\frac{di}{dt},$$

La energía necesaria para aumentar la corriente desde cero hasta el valor i es entonces

$$E_B = \int_0^{E_B} dE_B = \int_0^{i} Li\,di = \frac{1}{2}Li^2;$$

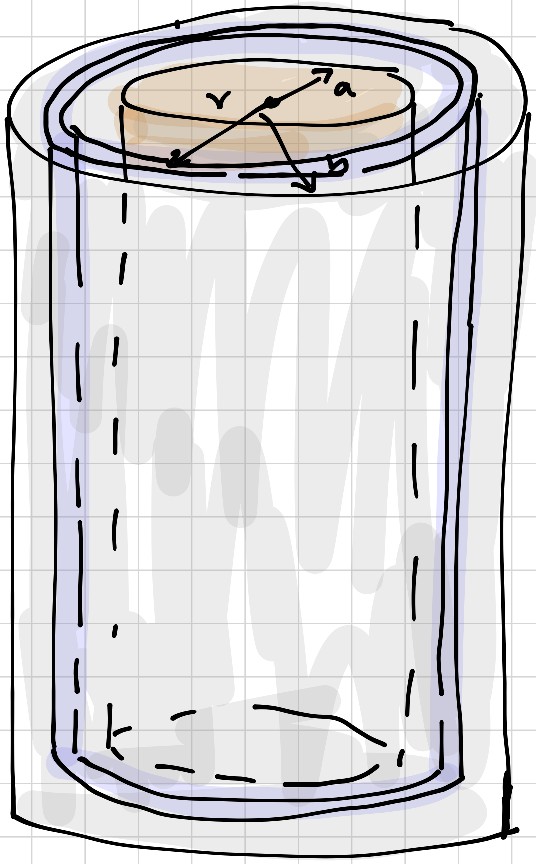
Como en el ejemplo anterior, la energía mecánica de una sección de longitud l es

$$E_B = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_m l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)i^2 = \frac{\mu_m l i^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

La energía magnética E_B se puede calcular empleando la expresión

$$E_B = \frac{1}{2\mu_m}\int B^2\,dv,$$

donde la integral se extiende a todo el volumen en que existe el campo magnético y dv es un elemento de volumen. Como ejemplo, si el campo magnético del ejemplo anterior está dado por $B = \mu_m i/2\pi r$. Si tomamos como elemento de volumen una capa cilíndrica de radio r y espesor dr, encontramos que su volumen es $dv = (2\pi r)\, l\, dr$. Sustituyendo en la ecuación y notando que sólo hay campo magnético entre $r=a$ a $r=b$, tenemos



$$E_B = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left(\frac{u_m i}{2\pi r}\right)^2 (2\pi\, l r\, dr) = \frac{u_m l i^2}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{u_m l i^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Podemos entonces decir que la energía gastada en establecer la corriente se ha almacenado en el espacio circundante, de modo que a un volumen dv corresponde una energía $(B^2/2u_m)\, dv$, y la energía E_B por unidad de volumen almacenada en el campo magnético es

$$E_{\vec{B}} = \frac{1}{2u} B^2.$$

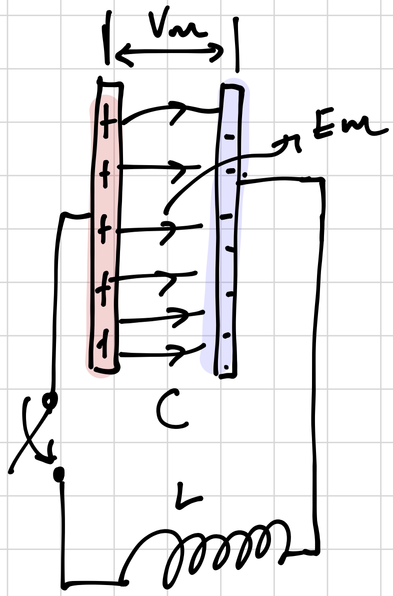
Este análisis se ha hecho para el caso de un caso especial, un análisis más detallado, indicaría que el resultado es completamente general. Cuando además existe un campo eléctrico como magnético presentes, debemos de considerar también la densidad de energía eléctrica, por lo que la energía total por unidad de volumen en el campo electromagnético es

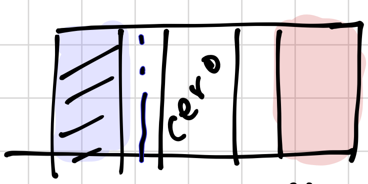
$$E = \frac{1}{2}\epsilon\, \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2u_m} B^2.$$

Circuito LC

Un circuito que contiene un inductor y un capacitor muestra un modo de comportamiento oscilante en cuanto a su carga y a su corriente.

En el circuito de la figura se carga el capacitor con una diferencia de potencial V_m y una carga inicial $Q = C V_m$ en su placa izquierda y luego se cierra el interruptor. El capacitor comienza a descargarse a través del inductor. A causa de f.e.m inducida en el inductor, la corriente no puede cambiar en forma instantánea; comienza en cero y finalmente alcanza su valor máximo I_m. Durante este proceso el capacitor se está descargando. En cada instante el potencial del capacitor es igual a la fem inducida, por lo que a medida que el capacitor se descarga, la tasa de cambio de la corriente disminuye. Cuando el potencial del capacitor se reduce a cero, la fem inducida también es igual a cero, y la corriente alcanzó





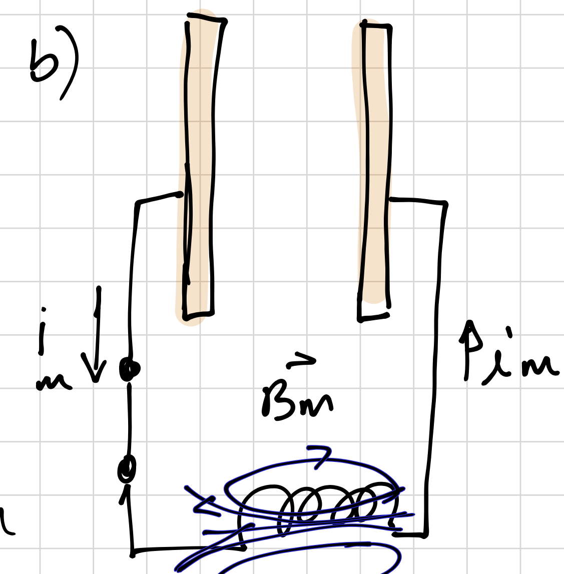
$E = u_B + u_E$

Toda la energía del circuito almacenada en el campo eléctrico

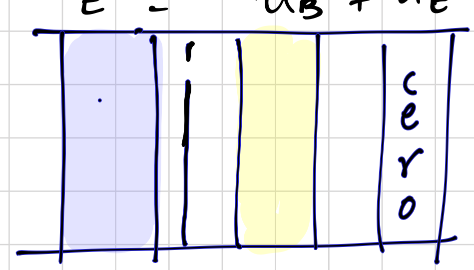
a) $t = 0$ y $t = T$

(el interruptor se cierra en $t=0$)

b)



$E = u_B + u_E$

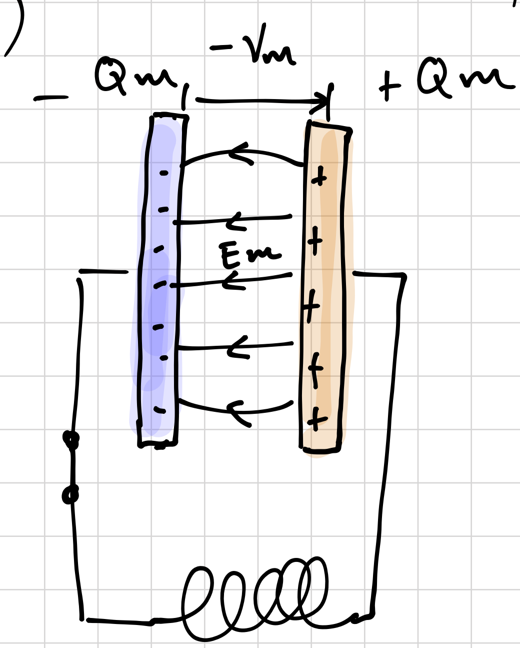


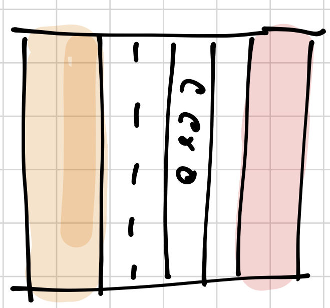
Toda la energía del circuito almacenada en el campo magnético

b) $t = \frac{1}{4}T$

su valor máximo I_m. Durante la descarga del capacitor, la corriente en aumento en el inductor ha establecido un campo magnético en el espacio que lo rodea, y la energía que inicialmente estaba almacenada en el campo eléctrico del capacitor ahora lo está en el campo magnético del inductor. Aunque en la figura b) el capacitor está completamente descargado, la corriente persiste (no puede cambiar instantáneamente), y el capacitor comienza a cargarse con polaridad opuesta a la de su estado inicial. Conforme disminuye la corriente, la magnitud del campo magnético también lo hace, lo que induce una fem en el inductor en el mismo sentido de la corriente; esto retarda la disminución de corriente. Con el tiempo, la corriente y el campo magnético disminuyen a cero y el capacitor queda cargado en el sentido opuesto al de su polaridad inicial, con una diferencia de potencial $-V_m$ y carga $-Q$ en su placa izquierda. El proceso se repite ahora en sentido opuesto; un poco después, el capacitor se ha descargado una vez más y en el inductor hay una corriente en sentido opuesto y todo el proceso se repite. Si no hay pérdidas de energía, las cargas en el capacitor siguen oscilando hacia atrás y hacia adelante indefinidamente. Este proceso se denomina oscilación eléctrica. Desde el punto

c)





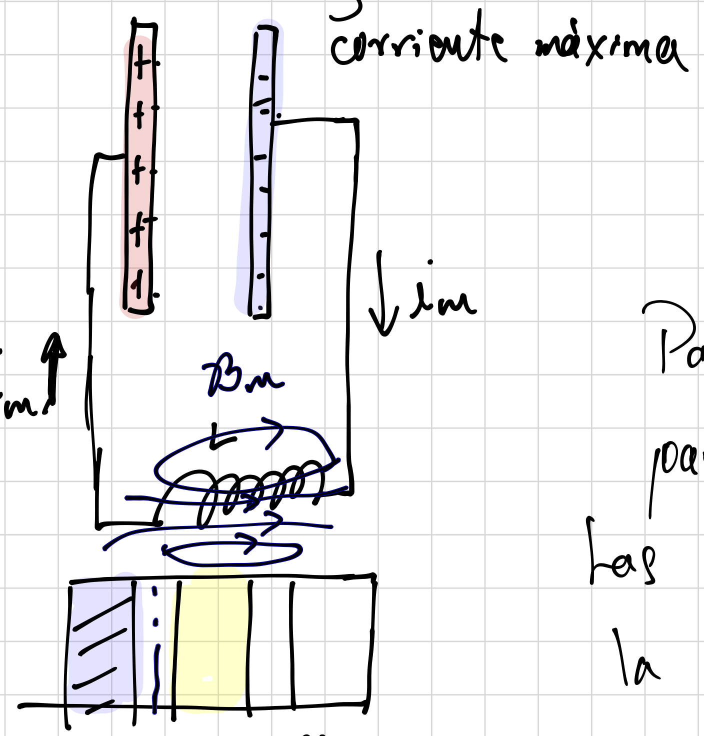
$E = u_B + u_E$

Toda la energía del circuito almacenada en el campo eléctrico.

c) $t = \frac{1}{2}T$

de vista de la energía, las oscilaciones de un circuito eléctrico transfieren energía del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor y viceversa. La energía total asociada con el circuito es constante.

d) capacitor descargado

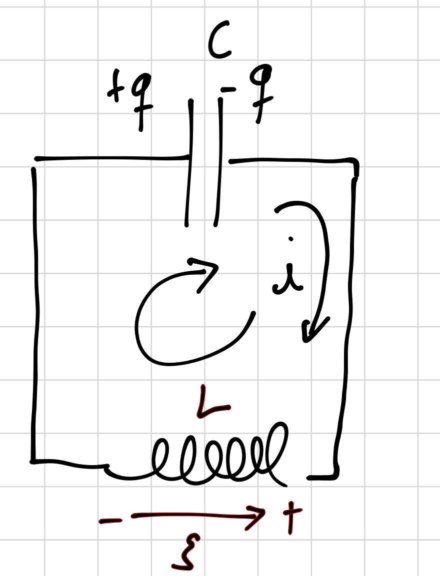


$E = U_B + U_E$

Toda la energía del circuito almacena

$t = \frac{3}{4}T$

Para estudiar con detalle el flujo de carga para el circuito L-C, procedemos aplicando las Leyes de Kirchoff en el circuito de la figura



capacitor en proceso de descarga, i en disminución, $\frac{di}{dt} < 0$

$$-\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0,$$

ahora tenemos que la corriente es $i = +\left|\frac{dq}{dt}\right| = +\frac{dq}{dt}$ en el capacitor, pues éste cada vez pierde más carga, luego

$$-L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) - \frac{q}{C} = 0,$$

y obtenemos la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \text{(circuito LC).}$$

ecuación que posee la misma forma de la de un movimiento armónico simple (MAS), que admite una solución similar a la de un MAS de la forma:

$$q(t) = Q\cos(\omega t + \phi),$$

inductancia y autoinductancia

donde $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (la cual es la frecuencia angular de oscilación en el circuito L-C). La corriente instantánea estará dada por $i = + \frac{dq}{dt}$

$$i = -\omega Q \operatorname{sen}(\omega t + \phi).$$

Así, en un circuito L-C la carga y la corriente oscilan en forma sinusoidal con el tiempo, con una frecuencia angular determinada por los valores de L y C. La frecuencia f, el número de ciclos por segundo, es igual a $\omega/2\pi$.

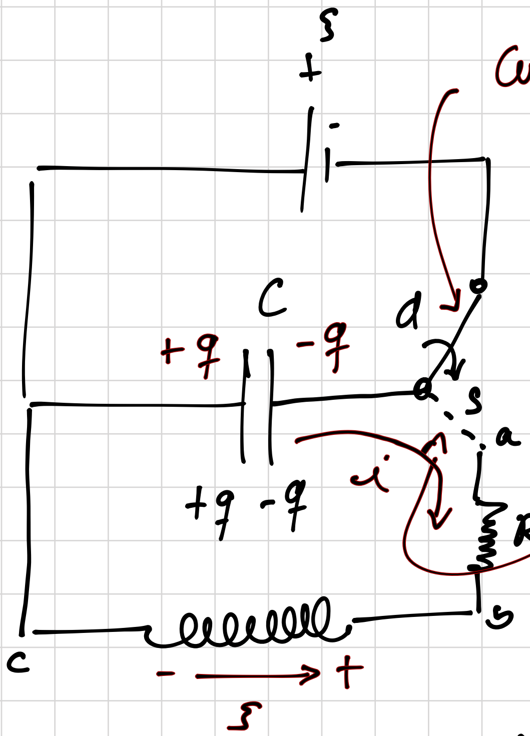
El circuito L-C también es un sistema conservativo. Si Q es la carga máxima en el capacitor. La energía del campo magnético en el inductor, $\frac{1}{2}Li^2$ y la energía del campo eléctrico $q^2/2C$ en el capacitor, se verifica siempre que la suma de éstas energías es igual a la suma total $Q^2/2C$ del sistema:

$$\underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\text{energía magnética}} + \underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{\text{energía eléctrica}} = \frac{Q^2}{2C},$$

La energía total en el circuito LC es constante y oscila entre dos formas magnética y eléctrica. Al despejar i obtenemos que cuando la carga en el capacitor es $q(t)$, la corriente i es

$$i = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}\,\sqrt{Q^2 - q^2}.$$

Circuito RLC en Serie.



Cuando el interruptor S se encuentra en esta posición, la f.e.m carga el capacitor

Cuando el interruptor S pasa a esta posición, el capacitor se descarga a través del resistor e inductor

Consideremos el circuito de la figura. Es un circuito LC al que le agregamos un resistor R en serie. Las indicaciones de q e i son indicadas en la figura. Primero se cierra el interruptor en la posición hacia arriba, para conectar el capacitor con una fuente de fem $\mathcal{E}$ durante un tiempo lo suficientemente largo para asegurar que el capacitor adquiera su carga final $Q = C\mathcal{E}$ y que toda oscilación haya cesado. En $t=0$, se coloca el interruptor en la posición hacia abajo, con lo que se elimina a la fuente del circuito y se pone el capacitor en serie con el resistor y el inductor.

Aplicando leyes de Kirchoff tenemos

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0.$$

Al sustituir $i = dq/dt$ y reordenar obtenemos

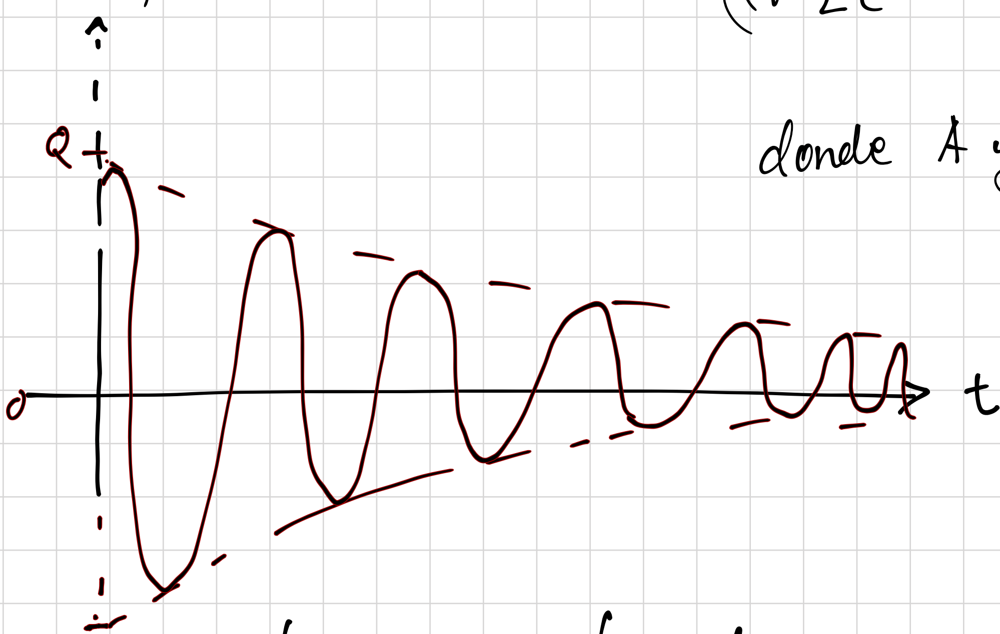
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Obsérvese que cuando $R=0$, esto se reduce al circuito L-C.

Usando teoría de ecuaciones diferenciales hallamos que la solución cuando $R^2 < \frac{4L}{C}$ es de la forma:

autoinductancia — inductancia — (10) - QR

$$q(t) = Ae^{-(R/2L)t} \cos\left(\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)t + \phi\right),$$



a) Circuito subamortiguado
(R pequeña)

donde A y ϕ son constantes. Esta solución corresponde al caso subamortiguado. La función representa una oscilación sinusoidal con una amplitud que decae exponencialmente. Cuando $R=0$, la ecuación se reduce a la solución de oscilaciones del circuito LC.

Si R no es cero, la frecuencia angular de oscilación es menor que $1/(LC)^2$ a causa del término que contiene R. La frecuencia angular ω' de las oscilaciones amortiguadas está dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$ (circuito en serie LRC subamortiguado.)