Definiciones Inductivas

Kevin Mateo Cárdenas Gallego

Asesor: Juan Carlos Agudelo

Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia

Tabla de contenido

Contexto Histórico

- La teoría de tipos surge como una respuesta a las paradojas encontradas en las matemáticas y la lógica a finales del siglo XIX y principios del XX, en particular, la paradoja de Russell. Esta paradoja demostraba que la teoría de conjuntos, como se conocía, podía conducir a contradicciones.

Contexto Histórico

- La teoría de tipos surge como una respuesta a las paradojas encontradas en las matemáticas y la lógica a finales del siglo XIX y principios del XX, en particular, la paradoja de Russell. Esta paradoja demostraba que la teoría de conjuntos, como se conocía, podía conducir a contradicciones.
- Bertrand Russell introdujo la teoría de tipos en 1908 para superar estas paradojas. En su obra, *Principia Mathematica*, coescrita con Alfred North Whitehead, Russell propuso que los elementos de cualquier conjunto deberían ser de un tipo diferente al conjunto mismo, evitando así la formación de conjuntos autorreferenciales.

Contexto Histórico

- La teoría de tipos surge como una respuesta a las paradojas encontradas en las matemáticas y la lógica a finales del siglo XIX y principios del XX, en particular, la paradoja de Russell. Esta paradoja demostraba que la teoría de conjuntos, como se conocía, podía conducir a contradicciones.
- Bertrand Russell introdujo la teoría de tipos en 1908 para superar estas paradojas. En su obra, *Principia Mathematica*, coescrita con Alfred North Whitehead, Russell propuso que los elementos de cualquier conjunto deberían ser de un tipo diferente al conjunto mismo, evitando así la formación de conjuntos autorreferenciales.
- La teoría de tipos experimentó una evolución significativa a lo largo del siglo XX. En la década de 1970, Per Martin-Löf introdujo la teoría de tipos intuicionista, que incorporaba principios de la lógica constructivista y tenía implicaciones profundas tanto para las matemáticas como para la informática, especialmente en el diseño de lenguajes de programación y sistemas de prueba formal.

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (El conjunto de listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado un conjunto A, el conjunto $Finlist(A)$ es el menor conjunto tal que:

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (El conjunto de listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado un conjunto A, el conjunto $Finlist(A)$ es el menor conjunto tal que:

1. $nill \in Finlist(A)$.

Ejemplo (El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$)

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es el *menor conjunto* tal que:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$.

Ejemplo (El conjunto de listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado un conjunto A, el conjunto $Finlist(A)$ es el menor conjunto tal que:

1. $nill \in Finlist(A)$.
2. Si $S \in Finlist(A)$ y $a \in A$, entonces $\langle a \rangle \cdot S \in Finlist(A)$.

Tabla de contenido

Definición (Reglas, conjunto $\phi-$cerrado)

1. Una *regla* es un par (X, x), donde X es un conjunto, llamado *conjunto de premisas*, y x es la *conclusión*.

Definición (Reglas, conjunto $\phi-$cerrado)

1. Una *regla* es un par (X, x), donde X es un conjunto, llamado *conjunto de premisas*, y x es la *conclusión*.
2. Si ϕ es un conjunto de reglas, entonces un conjunto A es $\phi - cerrado$ si para toda regla $(X, x) \in \phi$ si se tiene que $X \subseteq A$ implica $x \in A$.

Definición (Reglas, conjunto $\phi-$cerrado)

1. Una *regla* es un par (X, x), donde X es un conjunto, llamado *conjunto de premisas*, y x es la *conclusión*.
2. Si ϕ es un conjunto de reglas, entonces un conjunto A es $\phi - cerrado$ si para toda regla $(X, x) \in \phi$ si se tiene que $X \subseteq A$ implica $x \in A$.
3. Dado ϕ un conjunto de reglas, se define $I(\phi)$ *como el conjunto inductivamente definido por* ϕ, dado por:

$$I(\phi) = \bigcap \{A : A \ \ \phi{-}cerrado\}.$$

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un conjunto de reglas)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se puede definir como un conjunto inductivamente definido a partir de un conjunto de reglas ϕ dado por:

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un conjunto de reglas)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se puede definir como un conjunto inductivamente definido a partir de un conjunto de reglas ϕ dado por:

1. $(\emptyset, 0) \in \phi$.

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un conjunto de reglas)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se puede definir como un conjunto inductivamente definido a partir de un conjunto de reglas ϕ dado por:

1. $(\emptyset, 0) \in \phi$.
2. $(\{n\}, s(n)) \in \phi$.

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado V un conjunto de variables proposicionales, sea ϕ el conjunto con las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, p_i)$ para cada $p_i \in V$.

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado V un conjunto de variables proposicionales, sea ϕ el conjunto con las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, p_i)$ para cada $p_i \in V$.
2. $(\{A\}, \neg A)$.
3. $(\{A, B\}, (A \vee B))$.
4. $(\{A, B\}, (A \wedge B))$.
5. $(\{A, B\}, (A \rightarrow B))$.
6. $(\{A, B\}, (A \leftrightarrow B))$.

Ejemplo ($Finlist(A)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado un conjunto A, y ϕ el conjunto que contiene las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, nill)$.

Ejemplo ($Finlist(A)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado un conjunto A, y ϕ el conjunto que contiene las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, nill)$.
2. $(\{S\}, \langle a \rangle \cdot S)$, donde $a \in A$.

Formalización a partir de conjuntos de reglas

Ejemplo ($Finlist(A)$ a partir de un conjunto de reglas)

Dado un conjunto A, y ϕ el conjunto que contiene las siguientes reglas:

1. $(\emptyset, nill)$.
2. $(\{S\}, \langle a \rangle \cdot S)$, donde $a \in A$.

Teorema (Demostraciones por inducción)

Sea A un conjunto inductivamente definido a partir de un conjunto de reglas ϕ, y una propiedad sobre este

$$\varphi : A \to \{true, false\}.$$

Demostrar que $\varphi^{-1}(\{true\}) = A$, se reduce a demostrar que

$$\varphi^{-1}(\{true\}) \text{ es } \phi\text{-cerrado}.$$

Tabla de contenido

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.
- Los *puntos pre-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) \leq x$. De manera similar, los *puntos post-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $x \leq F(x)$.

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.
- Los *puntos pre-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) \leq x$. De manera similar, los *puntos post-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $x \leq F(x)$.
- Los *puntos fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) = x$.

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.
- Los *puntos pre-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) \leq x$. De manera similar, los *puntos post-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $x \leq F(x)$.
- Los *puntos fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) = x$.

Definición (Retículo completo)

Un retículo completo es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ en el que todos los subconjuntos tienen supremo.

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (CPO)

Un *conjunto parcialmente ordenado o CPO* $(A, \leq)$, es un conjunto equipado A con una relación de orden parcial $\leq$, es decir, *reflexiva, antisemítica y transitiva*.

Definición

Dado un CPO $(L, \leq)$ y un operador $F : L \to L$, definimos:

- F es *monótono* si preserva el orden parcial.
- Los *puntos pre-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) \leq x$. De manera similar, los *puntos post-fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $x \leq F(x)$.
- Los *puntos fijos* de F son los elementos $x \in L$ tales que $F(x) = x$.

Definición (Retículo completo)

Un retículo completo es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ en el que todos los subconjuntos tienen supremo.

Definición (Conjuntos definidos inductivamente)

- Sea L un retículo completo cuyos puntos son conjuntos, ordenado bajo la relación de inclusión, y $F : L \to L$ un operador monótono sobre L.

Definición (Conjuntos definidos inductivamente)

- Sea L un retículo completo cuyos puntos son conjuntos, ordenado bajo la relación de inclusión, y $F : L \to L$ un operador monótono sobre L.

  El conjunto definido inductivamente por F es el conjunto:

$$F_{ind} = \bigcap \{x \quad : F(x) \subseteq x\}.$$

Formalización a partir de operadores monótonos

Definición (Conjuntos definidos inductivamente)

- Sea L un retículo completo cuyos puntos son conjuntos, ordenado bajo la relación de inclusión, y $F : L \to L$ un operador monótono sobre L.

  El conjunto definido inductivamente por F es el conjunto:

$$F_{ind} = \bigcap \{x \quad : F(x) \subseteq x\}.$$

Teorema (De operadores monótonos a conjuntos de reglas)

Sean A un conjunto, $(L, \subseteq)$ un retículo completo, con $L \subseteq P(A)$, $F : L \to L$ un operador monótono sobre L, entonces existe un conjunto de reglas ϕ tal que $F_{ind} = I(\phi)$.

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un operador monótono)

Sea X el conjunto de cadenas finitas o infinitas de elementos en el alfabeto $\{0, s, (,)\}$, sea $\varphi : P(X) \longrightarrow P(X)$ definido por:

$$\varphi(T) = \{0\} \cup \{s(x) \quad : \quad x \in T\}.$$

Se tiene que los naturales se pueden definir como $\mathbb{N} = \bigcap\{x \quad : \varphi(x) \subseteq x\}$.

Ejemplo ($\mathbb{N}$ a partir de un operador monótono)

Sea X el conjunto de cadenas finitas o infinitas de elementos en el alfabeto $\{0, s, (,)\}$, sea $\varphi : P(X) \longrightarrow P(X)$ definido por:

$$\varphi(T) = \{0\} \cup \{s(x) \quad : \quad x \in T\}.$$

Se tiene que los naturales se pueden definir como $\mathbb{N} = \bigcap\{x \quad : \varphi(x) \subseteq x\}$.

Ejemplo ($FinList_A$ a partir de un operador monótono)

Sea X el conjunto de todas las cadenas finitas o infinitas con elementos del alfabeto $A \cup \{nill, \cdot, \rangle, \langle\}$, $(P(X), \subseteq)$ el retículo, y el operador correspondiente φ_{L_A} es:

$$\varphi_{L_A}(T) = \{nill\} \cup \{\langle a\rangle \cdot s \quad : a \in A \wedge s \in T\}.$$

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un operador monótono)

Dado un conjunto de variables proposicionales

$$V = \{p_1, p_2, ...\}.$$

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un operador monótono)

Dado un conjunto de variables proposicionales

$$V = \{p_1, p_2, ...\}.$$

X el conjunto de todas las cadenas finitas o infinitas con elementos del alfabeto $V \cup \{\vee, \neg, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$, el retículo:

$$(P(X), \subseteq).$$

Ejemplo ($F(CPL)$ a partir de un operador monótono)

Dado un conjunto de variables proposicionales

$$V = \{p_1, p_2, ...\}.$$

X el conjunto de todas las cadenas finitas o infinitas con elementos del alfabeto $V \cup \{\vee, \neg, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$, el retículo:

$$(P(X), \subseteq).$$

Y el operador correspondiente φ es:

$$\begin{aligned}\varphi(T) = V &\cup \{(A\#B) \quad : (A, B \in T) \wedge (\# \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\})\} \\ &\cup \{\neg A \quad : A \in T\}\end{aligned}$$

Tabla de contenido

Definición (Expresiones)

Se usa notación ordinaria, pero se omite mencionar restricciones de variables.

- Expresiones de conjuntos $A ::= \Pi x : A_0 . A_1[x]$.

Definición (Expresiones)

Se usa notación ordinaria, pero se omite mencionar restricciones de variables.

- Expresiones de conjuntos $A ::= \Pi x : A_0.A_1[x]$.
- Expresiones de elementos $a ::= x \mid \lambda x : A.a[x] \mid a_1(a_0)$.

Definición (Expresiones)

Se usa notación ordinaria, pero se omite mencionar restricciones de variables.

- Expresiones de conjuntos $A ::= \Pi x : A_0.A_1[x]$.
- Expresiones de elementos $a ::= x \mid \lambda x : A.a[x] \mid a_1(a_0)$.
- Expresiones de contextos $\Gamma ::= \epsilon \mid \Gamma, x : A$.

Definición (Expresiones)

Se usa notación ordinaria, pero se omite mencionar restricciones de variables.

- Expresiones de conjuntos $A ::= \Pi x : A_0 . A_1[x]$.
- Expresiones de elementos $a ::= x \mid \lambda x : A.a[x] \mid a_1(a_0)$.
- Expresiones de contextos $\Gamma ::= \epsilon \mid \Gamma, x : A$.
- Expresiones de juicios

  $J ::= \Gamma \mid \Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash a : A \mid \Gamma \vdash A = A' \mid \Gamma \vdash a = a' : A.$

- Las reglas de inferencia para el sistema de tipos de Martín-Löf son las siguientes:

- Las reglas de inferencia para el sistema de tipos de Martín-Löf son las siguientes:

$$\epsilon \quad contexto \qquad \frac{\Gamma \quad contexto \qquad \Gamma \vdash A \quad set}{\Gamma, x : A \quad contexto}.$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad set}{\Gamma \vdash A = A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a = a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A = A'}{\Gamma \vdash A' = A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a = a' : A}{\Gamma \vdash a' = a : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A = A' \qquad \Gamma \vdash A' = A''}{\Gamma \vdash A = A''} \qquad \frac{\Gamma \vdash a = a' : A \qquad \Gamma \vdash a' = a'' : A}{\Gamma \vdash a = a'' : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A = A' \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a : A'} \qquad \frac{\Gamma \vdash A = A' \qquad \Gamma \vdash a = a' : A}{\Gamma \vdash a = a'' : A'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad set}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

- Reglas de formación de tipos para el producto cartesiano de una familia de conjuntos:

- Reglas de formación de tipos para el producto cartesiano de una familia de conjuntos:

$$\frac{\Gamma \vdash A_0 \quad set \qquad \Gamma, x : A_0 \vdash A_1[x] \quad set}{\Gamma \vdash \Pi x : A_0.A_1[x] \quad set}.$$

$$\frac{\Gamma, x : A_0 \vdash a[x] : A_1}{\Gamma \vdash \lambda x : A_0.a[x] : \Pi x : A_0.A_1[x]}.$$

$$\frac{\Gamma \vdash a_1 : \Pi x : A_0.A_1[x] \qquad \Gamma \vdash a_0 : A_0}{\Gamma \vdash a_1(a_0) : A_1[a_0]}.$$

- Reglas de igualdad de tipos para el producto cartesiano de una familia de conjuntos:

- Reglas de igualdad de tipos para el producto cartesiano de una familia de conjuntos:

$$\frac{\Gamma \vdash A_0 = A_0' \quad \Gamma, x : A_0 \vdash A_1[x] = A_1'[x]}{\Gamma \vdash \Pi x : A_0.A_1[x] = \Pi x : A_0'.A_1'[x]}.$$

$$\frac{\Gamma, x : A_0 \vdash a[x] = a'[x] : A_1}{\Gamma \vdash \lambda x : A_0.a[x] = \lambda x : A_0.a'[x] : \Pi x : A_0.A_1[x]}.$$

$$\frac{\Gamma \vdash a_1 = a_1' : \Pi x : A_0.A_1[x] \quad \Gamma \vdash a_0 = a_0' : A_0}{\Gamma \vdash a_1(a_0) = a_1'(a_0') : A_1[a_0]}.$$

$$\frac{\Gamma.x : A_0 \vdash a_1[x] : A_1[x] \quad \Gamma \vdash a_0 : A_0}{\Gamma \vdash (\lambda x : A_0.a_1[x])(a_0) = a_1(a_0) : A_1[a_0]}.$$

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \ldots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \ldots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$.

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \ldots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \ldots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$.

- Se tiene la sintaxis y las reglas del λ-cálculo con tipos dependientes. Llamamos a esta teoría T_0.

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \dots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \dots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$.

- Se tiene la sintaxis y las reglas del λ-cálculo con tipos dependientes. Llamamos a esta teoría T_0.
- T_0 puede ser extendida sucesivamente obteniendo las teorías $T_1, T_2, \dots$ de la siguiente manera:

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \ldots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \ldots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$.

- Se tiene la sintaxis y las reglas del λ-cálculo con tipos dependientes. Llamamos a esta teoría T_0.
- T_0 puede ser extendida sucesivamente obteniendo las teorías $T_1, T_2, \ldots$ de la siguiente manera:
- T_0 es la teoría de tipos dependientes que se acaba de definir. T_{i+1} es la teoría T_i extendida con un nuevo tipo de datos I_i.

Definición (Telescopios)

Un *telescopio* es una secuencia de tipos dependientes $T_1, \ldots, T_n$, donde cada T_i es un tipo dependiente de los parámetros $x_1 : T_1, \ldots, x_{i-1} : T_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$.

- Se tiene la sintaxis y las reglas del λ-cálculo con tipos dependientes. Llamamos a esta teoría T_0.
- T_0 puede ser extendida sucesivamente obteniendo las teorías $T_1, T_2, \ldots$ de la siguiente manera:
- T_0 es la teoría de tipos dependientes que se acaba de definir. T_{i+1} es la teoría T_i extendida con un nuevo tipo de datos I_i.
- Se tiene que J abrevia $\Gamma \vdash J$, en una teoría T.

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de introducción i-ésima:

$$\frac{as :: Gs_i \qquad\qquad (b_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) : P}.$$

$$\frac{as = as' :: Gs_i \qquad\qquad (b_k = b'_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) = intro_i(as, (b\mathrm{t}'_k)_k) : P}.$$

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de introducción i-ésima:

$$\frac{as :: Gs_i \qquad (b_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) : P}.$$

$$\frac{as = as' :: Gs_i \qquad (b_k = b'_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) = intro_i(as, (bt'_k)_k) : P}.$$

Donde

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de introducción i-ésima:

$$\frac{as :: Gs_i \qquad (b_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) : P}.$$

$$\frac{as = as' :: Gs_i \qquad (b_k = b'_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) = intro_i(as, (b\text{t}'_k)_k) : P}.$$

Donde

1. Gs_i es un telescopio relativo a T;

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

- Reglas de formación:

$$P \quad set, \qquad P = P$$

- Reglas de introducción i-ésima:

$$\frac{as :: Gs_i \qquad (b_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) : P}.$$

$$\frac{as = as' :: Gs_i \qquad (b_k = b'_k : Hs_{ik}[as] \to P)_k}{intro_i(as, (b_k)_k) = intro_i(as, (b\text{t}'_k)_k) : P}.$$

Donde

1. Gs_i es un telescopio relativo a T;
2. $Hs_{ik}[xs]$ es un telescopio relativo a T en el contexto $xs :: Gs_i$ para cada k.

- En ese sentido, se tiene la siguiente espresión de conjunto:

- En ese sentido, se tiene la siguiente espresión de conjunto:

$$A ::= P.$$

- En ese sentido, se tiene la siguiente espresión de conjunto:

$$A ::= P.$$

- y las siguientes expresiones de elementos:

- En ese sentido, se tiene la siguiente espresión de conjunto:

$$A ::= P.$$

- y las siguientes expresiones de elementos:

$$a ::= intro_i(as, (b_k)_k).$$

Ejemplo (Naturales)

Definimos:

Ejemplo (Naturales)

Definimos:

- Regla de formación:

$$\mathbb{N} \ \mathsf{set}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

Ejemplo (Naturales)

Definimos:

- Regla de formación:

$$\mathbb{N}\ \textsf{set}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

- Reglas de introducción:

Ejemplo (Naturales)

Definimos:

- Regla de formación:

$$\mathbb{N} \text{ set}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}.$$

- Reglas de introducción:

$$\frac{}{0 : \mathbb{N}} \qquad \frac{}{0 = 0 : \mathbb{N}}.$$

$$\frac{n : \mathbb{N}}{s(n) : \mathbb{N}} \qquad \frac{n = n' : \mathbb{N}}{s(n) = s(n') : \mathbb{N}}.$$

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

- Regla de formación:

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

- Regla de formación:

$$FinList_A \text{ set}$$

$$FinList_A = FinList_A.$$

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

- Regla de formación:

$$FinList_A \text{ set}$$

$$FinList_A = FinList_A.$$

- Reglas de introducción:

Ejemplo (Listas finitas sobre un conjunto dado)

Dado $A : set$ definimos

- Regla de formación:

$$FinList_A \text{ set}$$

$$FinList_A = FinList_A.$$

- Reglas de introducción:

$$\frac{}{nill : FinList_A} \qquad \frac{}{nill = nill : FinList_A}.$$

$$\frac{a : A \qquad l : FinList_A}{\langle a \rangle \cdot l : FinList_A} \qquad \frac{a = a' : A \qquad l = l' : FinList_A}{\langle a \rangle \cdot l = \langle a' \rangle \cdot l' : FinList_A}.$$

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

Dado $V : set$ el conjunto de variables proposicionales, definimos

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

Dado $V : set$ el conjunto de variables proposicionales, definimos

- Regla de formación:

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

Dado $V : set$ el conjunto de variables proposicionales, definimos

- Regla de formación:

$$F(CPL) \text{ set.}$$

$$F(CPL) = F(CPL).$$

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

Dado $V : set$ el conjunto de variables proposicionales, definimos

- Regla de formación:

$$F(CPL) \text{ set.}$$

$$F(CPL) = F(CPL).$$

- Reglas de introducción:

Esquema de tipos inductivos en teoría de tipos

Ejemplo (El conjunto de formulas de la lógica proposicional clásica)

$$\frac{a : V}{a : F(CPL)} \qquad \frac{a = a' : V}{a = a' : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL)}{(\neg g) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL)}{(\neg g) = (\neg g') : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL) \quad f : F(CPL)}{(g \vee f) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL) \quad f = f' : F(CPL)}{(g \vee f) = (g' \vee f') : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL) \quad f : F(CPL)}{(g \wedge f) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL) \quad f = f' : F(CPL)}{(g \wedge f) = (g' \wedge f') : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL) \quad f : F(CPL)}{(g \to f) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL) \quad f = f' : F(CPL)}{(g \to f) = (g' \to f') : F(CPL)}.$$

$$\frac{g : F(CPL) \quad f : F(CPL)}{(g \leftrightarrow f) : F(CPL)} \qquad \frac{g = g' : F(CPL) \quad f = f' : F(CPL)}{(g \leftrightarrow f) = (g' \leftrightarrow f') : F(CPL)}.$$

Tabla de contenido

- $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.

- $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.
- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

- $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.
- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

$$\Phi = \bigcup \{(X, x) \quad : us \in [\![Gs_i]\!], (v_k \in [\![Hs_{ik}[xs]]\!]^{us}_{xs} \to U)_k\}\,.$$

Donde.

1. $X = \bigcup_k ran(v_k)$, $x = \langle |intro_i|, us, (v_k)_k \rangle$.

- $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.
- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

$$\Phi = \bigcup \{(X, x) \quad : us \in [\![Gs_i]\!], (v_k \in [\![Hs_{ik}[xs]]\!]^{us}_{xs} \to U)_k\} .$$

Donde.

1. $X = \bigcup_k ran(v_k)$, $x = \langle |intro_i|, us, (v_k)_k \rangle$.
2. $[\![\cdot]\!]$ es la interpretación de tipos y $[\![\cdot]\!]^{us}_{xs}$ es la interpretación de telescopios.

- $[\![a]\!]\rho$ denota la interpretación de la expresión a bajo la asignación ρ. Esta asignación es una función que asigna un conjunto a cada variable x en una lista finita de variables que contenga todas las variables libres de a.
- Para un tipo inductivo P, tome el siguiente conjunto de reglas:

$$\Phi = \bigcup \{(X, x) \quad : us \in [\![Gs_i]\!], (v_k \in [\![Hs_{ik}[xs]]\!]^{us}_{xs} \to U)_k\} \,.$$

Donde.

1. $X = \bigcup_k ran(v_k)$, $x = \langle |intro_i|, us, (v_k)_k)\rangle$.
2. $[\![\cdot]\!]$ es la interpretación de tipos y $[\![\cdot]\!]^{us}_{xs}$ es la interpretación de telescopios.
3. $\langle |intro_i|, us, (v_k)_k)\rangle$ representa una codificación de $intro_i(us, (v_k)_k)$. Donde $|intro_i|$ es el código de $intro_i$.

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

Ejemplo

- (Reglas de introducción)

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

Ejemplo

- (Reglas de introducción)

$$0 : \mathbb{N}.$$

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

Ejemplo

- (Reglas de introducción)

$$0 : \mathbb{N}.$$

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Entonces el conjunto de reglas bajo la interpretación es:

El conjunto $\mathbb{N}$

- Formalmente hablando $U = V_\alpha$, donde V_α es el conjunto generado en la llamada jerarquía acumulativa de conjuntos antes del estado α, para un ordinal α suficientemente grande.
- Por simplicidad se tomará a U como el conjunto de cadenas finitas o infinitas sobre un alfabeto que contenga la sintaxis necesaria para representar los términos en el conjunto de reglas.

Ejemplo

- (Reglas de introducción)

$$0 : \mathbb{N}.$$

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Entonces el conjunto de reglas bajo la interpretación es:

$$\begin{aligned}\Phi = &\{(\emptyset, 0)\}\\ &\cup \{(\{n\}, \langle s\rangle \cdot n) \quad : n \in U\}.\end{aligned}$$

Conclusiones

- Se ha mostrado como formalizar definiciones inductivas a partir de conjuntos de reglas y operadores monótonos.

Conclusiones

- Se ha mostrado como formalizar definiciones inductivas a partir de conjuntos de reglas y operadores monótonos.
- Se ha mostrado como formalizar tipos inductivos en teoría de tipos de Martín-Löf.

Conclusiones

- Se ha mostrado como formalizar definiciones inductivas a partir de conjuntos de reglas y operadores monótonos.
- Se ha mostrado como formalizar tipos inductivos en teoría de tipos de Martín-Löf.
- Por último, se ha mostrado como interpretar tipos inductivos en teoría de conjuntos.

Referencias

- Sangiorgi, D. (2011)Introduction to Bisimulation and Coinduction. Cambridge University Press.
- Dybjer, P (1991) Inductive Sets and Families in Martín-Lof's Types Theory and theis Set-Theoretic Semantics. In G. Huet and G. Plotkin, editors, Logical Frameworks, pages 280-306. Cambridge University Press.
- Dybjer, P. Chalmer, T. H. (2005) Lectures on Inductive and Recursive Definitions in Constructive Type Theory. TYPES Summer School, Göteborg, August 2005.
- Aczel, P. (1997) An Introduction to Inductive Definitions. In Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, volume 90. pages 739-782.

¡Gracias!