Parcial 4

Randolph Rafael Peralta Monterroza

June 6, 2023

1 Problema 7.5

Sea $U_{(x,y)}$ es una funcion armonica no constante en el disco $x^2 + y^2 < R^2$. Definido para cada $0 < r < R$

$$M(r) \quad = \max_{x^2+y^2=r^2} U_{(x,y)}$$

Probar que $M(r)$ es una funcion monotona creciente en el intervalo $(0.R)$

1.1 Solucion

Debemos mostrar que $\forall\ 0 < r_1 < r_2 < R$

$$M(r_1) < M(r_2)$$

Sea $B_r = \{(x, y)| \quad x^2+y^2 = r^2\}$ es un disco de radio r. Escogemos un arbitrario $r < r_2$ que esta en $0 < r_1 < r_2 < R$
Dado $U_{(x,y)}$ es una funcion armonica no constante en B_R, esto deberia ser no contante en el subdisco. El principio del maximo implica que el maximo valor obtenido en el disco B_{r_2} es obtenido solo del acotamiento del disco. Para todos los puntos B_{r_1} estan en el interior de B_{r2} tenemos que

$$U_{(x,y)} < \max_{(x,y)\in\partial B_{r2}} U_{(x,y)} \quad \forall (x, y) \in B_{r_1}$$

En particular

$$M(r_1) = \max_{(x,y)\in\partial B_{r_1}} U_{(x,y)} < \quad M_{(r_2)}$$

2 Problema 7.12

Resuelva el problema

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad 0 < x < 2\pi \quad -1 < y < 1$$

$$U(x,-1) = 0 \quad U(x,1) = 1 + sin(2x) \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$U_x(0,y) = U_x(0,y) = 0 \quad -1 < y < 1$$

2.1 Solucion

Procedemos con separacion de variables

Sea $U = XY$, asi $U_{xx} = X''Y$ ademas $U_{yy} = XY''$ Reemplazando en la ecuacion diferencial

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$X''Y = -XY'' = -\lambda$$

Asi

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

De donde

$$X'' + \lambda X = 0 \quad X'(0) = X'(2\pi) = 0 \tag{1}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0 \quad Y(-1) = 0 \quad Y(1) = 1 + sin(2x) \tag{2}$$

Resolvemos (1), donde $X'' + \lambda X = 0$
Si $\lambda < 0$:

$X_{(x)} = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X'_{(x)} = \sqrt{-\lambda}Ae^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X'_{(0)} = \sqrt{-\lambda}A - \sqrt{-\lambda}B$

$X'_{(2\pi)} = \sqrt{-\lambda}Ae^{\sqrt{-\lambda}2\pi} - \sqrt{-\lambda}Be^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}$

Asi tenemos el sistema

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ \lambda e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} & -\lambda e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sea la matriz C

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ \lambda e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} & -\lambda e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} \end{bmatrix}$$

Donde el determinante la matriz C es

$$det(C) = -(\sqrt{-\lambda})^2 e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} + (\sqrt{-\lambda})^2 e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} \neq 0$$

Asi esto tiene solucion lo que nos lleva a decir que $A = B = 0$

Si $\lambda = 0$:

$X_{(x)} = Ax + B$

$X'_{(x)} = A$

$X'_{(0)} = A$

$X'_{(2\pi)} = A$

Por lo tanto, para el autovalor $\lambda = 0$, se tiene una funcion constante donde la autofuncion es 1

Si $\lambda < 0$:

$X_{(x)} = Acos(\sqrt{-\lambda}x) + Bsin(\sqrt{-\lambda}x)$

$X'_{(x)} = \sqrt{-\lambda}Asin(\sqrt{-\lambda}x) - \sqrt{-\lambda}Bcos(\sqrt{-\lambda}x)$

$X'_{(0)} = B = 0$

$X'_{(2\pi)} = \sqrt{-\lambda}Asin(\sqrt{-\lambda}2\pi) = 0$

$sin(2\pi\sqrt{-\lambda}) = 0$

$2\pi\sqrt{-\lambda} = n\pi$

$-\lambda = (\frac{n}{2})^2$

$\lambda_n = -(\frac{n}{2})^2$

Asi

$X_n(x) = Acos(\frac{n}{2}x)$

Ahora reemplazando λ en (2)

$$Y'' + (\frac{n}{2})^2 Y = 0$$

Resolviendo esta se obtiene que

$$U_{(x,y)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_n Cos(\frac{n}{2}) Cosh(\frac{n}{2}y)$$

Por la condicion de frontera no homogonea en $y = 1$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_n Cosh(\frac{n}{2}y) = 1 + sin(2x) \quad -1 < y < 1$$

Por lo tanto

$$A_n = \frac{2}{cosh(\frac{n}{2})} \int_0^{2\pi} (1 + sin(2x)) cos(\frac{n}{2}x)\, dx$$

3 Problema 7.19

Sea $U(r, \theta)$ es una funcion armonica en el disco

$$D = \{(r, \theta)| \quad 0 \le r < R, \quad -\pi < \theta < \pi\}$$

talque U es continua en el disco $\overline{D}$ y satisface

$$U(R, \theta) = \begin{cases} sin^2(2\theta) & |\theta| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\theta| \le \pi \end{cases}$$

a. Evaluamos $U(0, 0)$ sin resolver la EDP

b. Muestre que la desigualdad $0 < U(r,\theta) < 1$ se mantiene en cada punto (r,θ) en el disco

3.1 Solucion

a. Por el teorema de valor medio para funciones armonicas, implica que

$$U(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r,\theta)\cdot d\theta$$

Para todo $0 < r < R$, sustituyendo $r = R$ dentro de la ecuacion, obtenemos

$$U(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r,\theta)\cdot d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Sin^2(2\theta)\cdot d\theta = \frac{1}{4}$$

b. Esto es consecuencia inmediata del teorema del maximo. El teorema implica que

$$U(r,\theta) \leq \max_{\psi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} U(R,\psi) = 1$$

Para todo $r < R$, y la igualdad se sostiene si y solo si U es constante. Claramente nuestra solucion no es una constante, y por lo tanto $U < 1$ en D. La desigualdad $U > 0$ es obtenido por el principio de maximo aplicado en $-U$

4 Problema 7.22

Sea $U(x,y)$ es la funcion armonica en $D = \{(x,y)| \quad x^2 + y^2 = 36\}$ la cual satisface en ∂D las condiciones de fronteras Dirichlet

$$U(x,y) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

a. Pruebe que $U(x,y) < \min\{x,0\}$ en D.
Sugerencia: Pruebe que $U(x,y) < x$ y talque $U(x,y) < 0$ en D

b. Evalue $U(0,0)$ usando el principio de valor medio

c. Usando la formula de Poisson, evalue $U(0,y)$ para $0 \leq y < 6$

d. Usando el metodo de separacion de variable, encuentre la solucion U en D

e. Es la solucion U clasica?

4.1 Solucion

a. Definimos $V(x,y) = U(x,y) - x$. Entonces resolvemos v

$$\triangle V = 0 \quad (x,y) \in D$$

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ -x & , \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (x,y) \in \partial D$$

Notemos por construcion que U y V satisface

$$U(x,y) \leq 0$$
$$V(x,y) \leq 0 \quad en \quad \partial D$$

Por el principio del maximo debil, tenemos

$$\max_D U(x,y) = \max_{\partial D} U(x,y)$$

$$\max_D V(x,y) = \max_{\partial D} V(x,y)$$

Tambien, tenemos por supuesto

$$U(x,y) \leq \max_D U(x,y)$$

$$V(x,y) \leq \max_D V(x,y)$$

Para todo $(x,y) \in D$.
Por lo tanto, si tenemos

$$U(x,y) = \max_D U(x,y)$$

$$V(x,y) = \max_D V(x,y)$$

Para algun $(x,y) \in D$, entonces el principio maximo afirmaria que U y V son constantes en D.

Por continuidad de u y v, concluiriamos que u y v tambien son constantes en ∂D, pero esto contradice las conocidas funciones no constantes

$$U(x,y) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ -x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$\in \partial D$

Por lo tanto, la igualdad no es posible; en otras palabras, debemos concluir

$$U(x,y) < \max_{D} U(x,y)$$

$$V(x,y) < \max_{D} V(x,y)$$

Asi, tenemos que

$$U(x,y) < \max_{D} U(x,y) = \max_{\partial D} U(x,y) = 0$$

$$V(x,y) < \max_{D} V(x,y) = \max_{\partial D} V(x,y) = 0$$

Esto es equivalente a decir

$$U(x,y) < 0$$

$$U(x,y) < x$$

en D, lo cual es equivalente a $U(x,y) = \min \{x, 0\}$ en D.

b. Por el teorema principal del valor medio (Teorema 7.7 pinchover) Aplicando a D, tenemos

$$\begin{aligned} U(0,0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(0 + 6cos(\theta), 0 + 6sin(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(6cos(\theta), 6sin(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} U(6cos(\theta))\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 0 d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} U(6cos(\theta)) \\ &= -\frac{6}{\pi} \end{aligned}$$

c. Tengamos en cuenta que la funcion frontera en coordenadas polares es

$$h(\theta) = W(6,\theta) = \begin{cases} 0 & si \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 6cos(\theta) & si \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Por la formula de Poisson aplicamos a D, tenemos

$$
\begin{aligned}
W(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{36-r^2}{36-12rcos(\theta-\varphi)}h(\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12rcos(\theta-\varphi)}6cos(\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12r(cos(\theta)cos(\varphi)+sin(\theta)sin(\varphi))+r^2}cos(\varphi)\,d\varphi
\end{aligned}
$$

En coordenadas cartesianas, esto es

$$
\begin{aligned}
U(x,y) = &\quad U(x(r,\theta),y(r,\theta)) \\
= &\quad W(r,\theta) \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-r^2}{36-12r(cos(\theta)cos(\varphi)+sin(\theta)sin(\varphi))+r^2}cos(\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-(x^2+y^2)}{36-12(xcos(\varphi)+ysin(\varphi))+x^2+y^2}cos(\varphi)\,d\varphi
\end{aligned}
$$

En la linea $x=0$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
U(0,0) &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-(0^2+0^2)}{36-12(0cos(\varphi)+0sin(\varphi))+0^2+0^2}cos(\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}\cdot(-2) \\
&= -\frac{6}{\pi}
\end{aligned}
$$

Si podemos emplear la sustitucion $u = 36-12ysin(\varphi)+y^2$, lo cual implica que $du = -12ycos(\varphi)d\varphi$ tenemos

$$
\begin{aligned}
U(0,y) &= \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{36-(0^2+y^2)}{36-12(0cos(\varphi)+ysin(\varphi))+0^2+y^2}cos(\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{3}{\pi}(36-y^2)\int_{36-12y+y^2}^{36+2y+y^2} \frac{1}{u}(-\frac{dy}{12y}) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{36-y^2}{y}\int_{(6-y)^2}^{(6+y)^2} \frac{1}{u}du \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{36-y^2}{y}ln(\frac{6+y}{6-y}) \quad para \quad todo \quad 0<y<6
\end{aligned}
$$

En resumen, tenemos

$$U(0,y) = \begin{cases} -\frac{6}{\pi} & si \quad y=0 \\ -\frac{1}{4\pi}\frac{36-y^2}{y} ln(\frac{6+y}{6-y}) & si \quad 0<y<6 \end{cases}$$

d. Definimos $W(r.\theta) = U(x(r,\theta), y(r,\theta))$, entonces el problema es transformado a

$$\triangle W = 0 \quad 0<r<6, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$W(6,\theta) = \begin{cases} 6cos(\theta) & si \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & si \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Por la ecuacion laplace en el disco. Como resultado del metodo, la solucion suave general de la ecuacion de la Laplace en un disco viene dada por

$$W(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n cos(n\theta) + \beta_n sin(n\theta))$$

Del cual calcularemos los coeficientes de α_0 , α_n , β_n Bajo las condiciones iniciales

Dicho esto tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6cos(\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi} W(6,\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m sin(m\theta))d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_0}{2} d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m \int_0^{2\pi} cos(m\theta)d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m \int_0^{2\pi} sin(m\theta)d\theta \\ &= \pi \cdot \alpha_0 \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned} \alpha_0 =& \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6cos(\theta)d\theta \\ &= -\frac{12}{\pi} \end{aligned}$$

Ahora tenemos que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6cos(\theta)cos(n\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} cos(n\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m sin(m\theta))cos(n\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_0}{2} cos(n\theta)d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m \int_0^{2\pi} cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m \int_0^{2\pi} sin(m\theta)cos(n\theta)d\theta$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} \cdot 0 + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m 0$$

$$= 6^n \alpha_n \pi$$

Donde

$$W(6, \theta) = \begin{cases} \pi & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$$

Asi tenemos que para α_n, se tiene que

$$\alpha_n = \frac{1}{6^n \pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos(\theta)cos(n\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{6^n \pi} \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si \quad n = 1 \\ -\frac{2}{n^2-1} & si \quad n = 2, 6, 10, .. \\ 0 & si \quad n = 3, 5, 7, .. \\ \frac{2}{n^2-1} & si \quad n = 4, 8, 12 \end{cases}$$

Asi tenemos que para α_n, se tiene que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6cos(\theta)sin(n\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} W(r,\theta)sin(n\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m sin(m\theta))sin(n\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_0}{2} sin(n\theta)d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m \int_0^{2\pi} cos(m\theta)sin(n\theta)d\theta$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m \int_0^{2\pi} sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta$$
$$= \frac{\alpha_0}{2} \cdot 0 + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \alpha_m 0 + \sum_{m=1}^{\infty} 6^m \beta_m$$
$$= 6^n \beta_n \pi$$

Lo cual implica que

$$\beta_n = \frac{1}{6^n \pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos(\theta)sin(n\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{6^n \pi} \cdot 0$$
$$= 0$$

e. Se dice que la solucion es clasica si es diferenciable hasta el termino de mayor orden en la ecuacion diferencial parcial, en este caso la ecuacion diferencial parcial de segundo orden, lo cual lo es, debido a que como α_0, α_n, β_n son constantes en nuestra solucion en coordenadas polares, entonces se cumplen para la ecuacion.

5 Problema 8.4

a. Escriba la funcion de Green de (8.22) en coordenadas Polares

b. Usando el principio de reflexion y parte (a) encuentre la funcion de Green de la mitad de un disco

5.1 Solucion

a. Definimos la solucion de el problema de Dirichlet

$$\triangle U = h \quad en \quad D$$

$$u = f \quad en \quad \partial D$$

Por el metodo de la funcion de Green para $\phi(\xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$ y $\psi(\xi, \eta) = U(\xi, \eta)$ en la ecuacion

$$\iint_D \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) ds = \int_{\partial D} (\phi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) \quad (*)$$

Asi

$$\iint_D G(\xi, \eta; x, y) \nabla^2 u - u(\xi, \eta) \nabla^2 G) d\xi d\eta = \int_{\partial D} G(\xi, \eta; x, y)(\frac{\partial u}{\partial \eta} - u(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \eta}) ds$$

Pero

$$\triangle u = h(\xi, \eta) \quad enD$$

Ademas

$$\triangle G = \delta(\xi - x, \eta - y) \quad en \quad D$$

Entonces, tenemos

$$\iint_D [G(\xi, \eta; x, y) h(\xi, \eta) - u(\xi, \eta)) \delta(\xi - x, \eta - y)] d\xi d\eta = \int_{\partial D} G(\xi, \eta; x, y)(\frac{\partial u}{\partial \eta} - u(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \eta}) ds$$

Dado que $G = 0$ y $u = f$ en ∂D y dado G es simetrica, esto se sgie que

$$U(x, y) \iint_D G(x, y; \xi, \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial \eta} ds$$

La cual es solucion de $(*)$

Ahora para nuestro caso, se considera el problema en el disco, Entonces

$$\nabla^2 g = g_{\xi\xi} + g_{\eta\eta} = 0 \quad en \quad D$$
$$g = -F \quad en \partial D$$

Donde $F = \frac{1}{2\pi} log(r)$

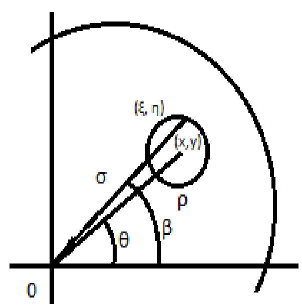
Entonces en coordenas polares, esto seria

$$x = \rho cos(\theta), \quad \xi = \sigma cos(\beta)$$
$$y = \rho sin(\theta), \quad \eta = \sigma sin(\beta)$$

La solucion de esta ecuacion en y seria

$$g(\sigma,\beta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n (a_n cos(n\beta) + b_n sin(n\beta))$$

donde $g = -\frac{1}{4\pi} log[1 + \rho^2 - 2\rho cos(\beta - \theta)] \quad en \quad \partial D$



Pero usando la relacion

$$log[1 + \rho^2 + 2\rho cos(\beta - \theta)] = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n cos(n(\beta - \theta))}{n}$$

Cuyos coeficientes de $sin(n\beta)$ y $cos(n\beta)$ son determinados en a_n y b_n del cual son

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\rho^n}{2} cos(n(\theta)) \\ b_n &= \frac{\rho^n}{2} sin(n(\theta)) \end{aligned}$$

Esto, por lo tanto se tendria que

$$\begin{aligned} g(\rho,\theta;\sigma,\beta) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma\rho)^n}{n} cos(\beta - \theta) \\ =& -\frac{1}{4\pi} ln[1 + (\sigma\rho)^2 - 2(\sigma\rho) cos(\beta - \theta)] \end{aligned}$$

Asi la funcion de Green seria

$$\begin{aligned} G(\rho,\theta;\sigma,\beta) &= \frac{1}{4\pi} ln[\sigma^2 + \rho^2 - 2\sigma\rho cos(\beta - \theta)] \\ &= -\frac{1}{4\pi} ln[1 + (\sigma\rho)^2 - 2\sigma\rho cos(\beta - \theta)] \end{aligned}$$

b. Consideramos para el semiplano infinito $\eta > 0$ el problema a resumir

$$\triangle U = h \quad en \quad \eta > 0$$
$$u = f \quad en \quad \eta > 0$$

Ademas por el principio de reflexion, se tiene que

$$G = \frac{1}{4\pi} ln[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] - \frac{1}{4\pi} ln[(\xi - x)^2 + (\eta + y)^2]$$

La condicion que $G = 0$ en $\eta = 0$ se satisface, ahora pasamos a coordenadas polares para la mitad de un disco con el fin de hallar la mitad de un disco, asi se tiene que

$$x = \rho cos(\theta) \quad \xi = \sigma cos(\beta)$$
$$y = \rho sin(\theta) \quad \eta = \sin(\beta)$$

Por lo tanto

$$G = \frac{1}{4\pi} ln[(\sigma cos(\beta) - \rho cos(\theta))^2 + (\sigma sin(\beta) - \rho sin(\theta))^2] - \frac{1}{4\pi} ln[(\sigma cos(\beta) - \rho cos(\theta))^2) + (\sigma sin(\beta) + \rho sin(\theta))^2)]$$