Solución del examen 3 puntos 1,2,3,5

Teorema 0.1. *Sea* $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ *siendo la solución de la ecuación* $u_t = a^2 u_{xx} + bu_x + cu + f(x,t)$ *donde* a, b, c *son constantes reales y* f *es una función dada. Defina la función* v *por* $v(x,t) = e^{-ct}u(x - bt, t)$ *para* $x \in \mathbb{R}$ *y* $t > 0$. *Entonces* v *satisface la ecuación no homogénea* $v_t = a^2 v_{xx} + e^{-ct} f(x,t)$.

Ejercicio 0.2. Resuelve el PVI

$$u_t = a^2 u_{xx} + bu_x + cu + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

con los siguientes datos:

1. $f(x,t) = t \sin x, \quad u_0 = 1, \quad a = c > 0, \quad b = 0.$
2. $f(x,t) = h(t) \in C^1([0,\infty))$ y u_0 es una función continua acotada.

Ejercicio 0.3. Supongamos que $u_0 \in C(\mathbb{R})$ satisface la condición de que $|u_0(x)| \leq Me^{-\delta|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para algunas constantes $M > 0, \delta > 0$. Demuestre que la solución u de la ecuación de calor $u_t = a^2 u_{xx}$ con dato inicial u_0 satisface la estimativa

$$|u(x,t)| \leq M(1 + 4a^2\delta t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\delta|x|^2}{1 + 4a^2\delta t}\right)$$

Ejercicio 0.4. 5. Considere la ecuación de onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $x > 0$, $t > 0$ en el primer cuadrante e imponga la siguiente condición de frontera en la frontera $x = 0$:

$$u_t + \alpha u_x = 0, \quad x = 0, \quad t > 0,$$

y las condiciones iniciales en $t = 0$, $x > 0$.

1. Si $\alpha \neq c$, derive una fórmula para la solución.
2. Si $\alpha = c$, demuestre que no existe una solución en general, pero existe si las condiciones iniciales satisfacen algunas condiciones adicionales. Interprete la condición de frontera en este caso geométricamente.