Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Cuarto Parcial del curso CNM-400 Ecuaciones Diferenciales Parciales

Prof. Jairo Eloy Castellanos
15 de junio de 2021

Nombre: ______________________ Dcto.: ____________

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio. Decimos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es *subarmónica* en Ω si $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u \geq 0$ en Ω. Sean $\xi \in \Omega$ y $R > 0$ con $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$.

   Pruebe que, si u es subarmónica en Ω, entonces
   $$u(\xi) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi;R)} u \, ds.$$

2. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Pruebe que el problema
   $$\begin{aligned} & v \in C^2(D) \cap C(\overline{D}) \\ & \Delta v = -\lambda v \quad \text{en} \quad D, \\ & v\big|_{\partial D} = 0, \end{aligned}$$
   sólo tiene solución no trivial si $\lambda > 0$.

3. Considere el problema de Neumann
   $$\begin{aligned} & \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad (0, a) \times (0, b), \\ & u_x(0, y) = 0, \ u_x(a, y) = f(y), \quad y \in [0, b] \\ & u_y(x, 0) = 0 = u_y(x, b), \quad x \in [0, a]. \end{aligned}$$

   (i) Muestre que la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera homogénea determinan el conjunto de soluciones
   $$u_n(x, y) = c_n \cosh(n\pi x/b) \cos(n\pi y/b), \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

   (ii) Haciendo una superposición de las soluciones en (i), determine formalmente una solución del problema.

4. Halle una solución de la ecuación de Laplace fuera del círculo de radio R, esto es,
   $$\begin{aligned} & u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad u \text{ acotada} \\ & \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ & u\Big|_{\partial\Omega} = f \ \in C(\partial\Omega), \end{aligned}$$

donde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2+y^2 > R^2\}$ y $R > 0$ es constante. Retire la condición “u acotada” y verifique que el nuevo problema tiene una infinidad de soluciones.