

# 4 Elastische Eigenschaften von Festkörpern

## A4.1 Elastische Eigenschaften von Festkörpern



Wir diskutieren zuerst einige grundlegende Größen, die wir zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften von Festkörpern verwenden.

- (a) Wie ist die Spannung  $\sigma$  definiert, welche Einheit besitzt sie? Wie viele unabhängige Komponenten besitzt der Spannungstensor für einen dreidimensionalen Festkörper? Begründen Sie ihre Antwort. Was verstehen wir unter Normalspannung und Schubspannung, wie viele Normal- und Schubspannungskomponenten gibt es?
- (b) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen den Komponenten des Spannungs- und Dehnungstensors in linearer Näherung (Hookescher Bereich)?
- (c) Wie viele Komponenten besitzt der Elastizitätstensor im allgemeinen Fall für einen dreidimensionalen Festkörper? Auf wie viele unabhängige Komponenten kann diese Zahl aufgrund von allgemeinen Symmetrieüberlegungen für eine beliebige Kristallsymmetrie reduziert werden? Wie viele unabhängige Komponenten verbleiben schließlich für einen kubischen Kristall? (2 Punkte)
- (d) In der Technik werden häufig polykristalline Materialien verwendet, die man hinsichtlich ihrer elastischen Eigenschaften in guter Näherung als isotrope Festkörper betrachten kann. Was versteht man unter den technischen Größen Young-Modul  $E$ , Poisson-Zahl  $\nu$ , Kompressionsmodul  $B$  und Gleitmodul  $G$ ? Wie sind diese Größen definiert? Sind diese Größen unabhängig voneinander? (3 Punkte)

### Lösung:

- (a) Die Definition der Spannung lautet

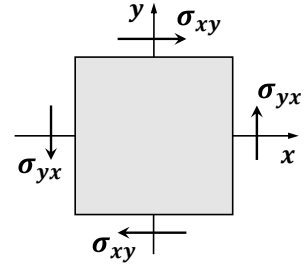
$$\sigma \equiv \frac{F}{A} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} . \quad (\text{A4.1.1})$$

Sie besitzt die Einheit  $\text{N/m}^2$ .

Die Spannung ist ein Tensor 2. Stufe, der 9 Komponenten besitzt. Man fordert allerdings, dass durch die wirkenden Spannungen keine Dreh- oder Translationsbewegungen verursacht werden dürfen (statisches Gleichgewicht). Wie Abb. 4.1 zeigt, müssen deshalb die auf entgegengesetzte Flächen eines Würfels wirkenden Spannungen gleich mit entgegengesetztem Vorzeichen sein. Damit kein Drehmoment auftritt, muss ferner

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A4.1.2})$$

**Abb. 4.1:** Zur Veranschaulichung der Tatsache, dass für einen Festkörper im statischen Gleichgewicht  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  gelten muss. Die Summe der Kräfte in  $x$ -Richtung verschwindet für  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ . Ebenso ist die Summe der Kräfte in  $y$ -Richtung null. Das Gesamtdrehmoment verschwindet ebenfalls für  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ .



gelten. Dadurch verbleiben von den 9 Tensorkomponenten 6 unabhängige Komponenten. Der Spannungstensor ist symmetrisch.

Bei einer Normalspannung steht die Kraft senkrecht auf der betreffenden Fläche, bei einer Schubspannung parallel dazu. Der symmetrische Tensor besitzt 3 Normal- und 3 Schubspannungen.

- (b) Zwischen den Komponenten des Spannungs- und Dehnungstensors besteht in linearer Näherung (Hookescher Bereich) der Zusammenhang

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} e_{kl}, \quad (\text{A4.1.3})$$

wobei  $C_{ijkl}$  die Komponenten des Elastizitätstensors sind.

- (c) Der Elastizitätstensor  $C_{ijkl}$  besitzt als Tensor 4. Stufe im Allgemeinen 81 Komponenten. Aufgrund der Symmetriebeziehungen  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  und  $e_{kl} = e_{lk}$  gilt aber  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ , wodurch sich die Zahl der unabhängigen Komponenten auf 36 reduziert. Aus der quadratischen Abhängigkeit der elastischen Energie von der Verformung folgt ferner  $C_{ijkl} = C_{klij}$  bzw.  $C_{mn} = C_{nm}$  (vergleiche Aufgabe A4.2), wodurch nur noch 21 unabhängige Komponenten verbleiben. Eine weitere Reduktion erfolgt aufgrund der zugrunde liegenden Kristallsymmetrie. Für einen Kristall mit kubischer Symmetrie verbleiben nur noch 3 unabhängige Komponenten.
- (d) Die technischen Größen Young-Modul  $E$ , Poisson-Zahl  $\nu$ , Kompressionsmodul  $B$  und Gleitmodul  $G$  sind wie folgt definiert:
- (i) Die Größe  $E$  gibt den Zusammenhang zwischen einer Spannung  $\sigma$  und der daraus resultierenden relativen Längenänderung  $\frac{\Delta \ell}{\ell}$  in Richtung der Spannung an:

$$\sigma = E \frac{\Delta \ell}{\ell}. \quad (\text{A4.1.4})$$

Der Elastizitätsmodul  $E$  ist für ein isotropes Medium kein Tensor mehr, sondern ein Skalar.

- (ii) Die Poisson-Zahl  $\nu$  gibt das Verhältnis von Querkontraktion zu Dehnung an:

$$\nu = \frac{-\Delta d/d}{\Delta \ell/\ell}. \quad (\text{A4.1.5})$$

Eine Spannung  $\sigma$  resultiert nicht nur in einer Längenänderung  $\Delta \ell$  in Richtung der Spannung, sondern auch in einer Kontraktion  $-\Delta d$  quer zur wirkenden Spannung.

- (iii) Der Kompressionsmodul  $B$  gibt den Zusammenhang zwischen Volumenänderung und einer gleichmäßig auf den Körper wirkenden Spannung, die z. B. durch hydrostatischen Druck realisiert werden kann, an

$$p = -\sigma = -B \frac{\Delta V}{V} . \quad (\text{A4.1.6})$$

- (iv) Der Schub-, Scher- oder Gleitmodul  $G$  gibt den Zusammenhang zwischen einer auf einen Körper wirkenden Schubspannung und dem daraus resultierenden Scherwinkel  $\alpha$  an

$$\sigma = G\alpha . \quad (\text{A4.1.7})$$

Für die Charakterisierung von isotropen Festkörpern reichen zwei unabhängige Größen aus. Die oben definierten vier technischen Größen sind also nicht unabhängig voneinander.

## A4.2 Elastizitätstensor und Poisson-Zahl



Ein kubischer Kristall wird einer Dehnung in  $[100]$ -Richtung unterworfen. Finden Sie Ausdrücke für die Komponenten des Elastizitätstensors (engl. Young's modulus) und der Poisson-Zahl.

### Lösung

Im Hookeschen Bereich sind die Dehnungskoeffizienten  $e_{kl}$  lineare Funktionen der Spannungskomponenten  $\sigma_{ij}$  und es gilt

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{kl} S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{bzw.} \\ \sigma_{ij} &= \sum_{kl} C_{ijkl} e_{kl} . \end{aligned} \quad (\text{A4.2.1})$$

Hierbei sind  $S_{ijkl}$  die elastischen Konstanten (elastic compliance constants) und  $C_{ijkl}$  (elastic stiffness constants) die Komponenten des **Elastizitätstensors**. Sie werden auch als **elastische Moduln** bezeichnet. Die Dimension der Koeffizienten ist  $\text{N/m}^2$  oder äquivalent  $\text{J/m}^3$ . Die Elastizitätsmoduln  $C_{ijkl}$  bilden einen Tensor 4. Stufe, die Spannungskomponenten  $\sigma_{ij}$  und die Dehnungskoeffizienten  $e_{kl}$  einen Tensor 2. Stufe.

Im Allgemeinen besitzt der Elastizitätstensor  $C_{ijkl}$  81 Komponenten. Damit kein Drehmoment auftritt, muss  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  gelten. Der Spannungs- und Dehnungstensor ist somit symmetrisch. Mit  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  und  $e_{kl} = e_{lk}$  gilt aber  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ , wodurch sich die Zahl der unabhängigen Komponenten von  $C_{ijkl}$  auf 36 reduziert. Mit diesen Symmetriebeziehungen können wir eine verkürzte Notation, die **Matrix-Notation (Voigt-Notation)**

$$\begin{aligned} xx \rightarrow 1, \quad yy \rightarrow 2, \quad zz \rightarrow 3, \\ yz = zy \rightarrow 4, \quad xz = zx \rightarrow 5, \quad xy = yx \rightarrow 6, \end{aligned} \quad (\text{A4.2.2})$$

verwenden. Berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (A4.2.1) und den genannten Symmetrieüberlegungen die Komponente  $\sigma_{xx}$  in Tensor-Notation

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_{xxxx}e_{xx} + C_{xxxy}e_{xy} + C_{xxxz}e_{xz} + \\ &+ C_{xxyx}e_{yx} + C_{xxyy}e_{yy} + C_{xxyz}e_{yz} + \\ &+ C_{xxzx}e_{zx} + C_{xxzy}e_{zy} + C_{xxzz}e_{zz} \\ &= C_{xxxx}e_{xx} + C_{xxyy}e_{yy} + C_{xxzz}e_{zz} \\ &+ 2 C_{xxyz}e_{yz} + 2 C_{xxzx}e_{xz} + 2 C_{xxxy}e_{xy}\end{aligned}\quad (\text{A4.2.3})$$

und in obiger verkürzter Notation

$$\sigma_1 = C_{11}e_1 + C_{12}e_2 + C_{13}e_3 + 2 C_{14}e_4 + 2 C_{15}e_5 + 2 C_{16}e_6 \quad (\text{A4.2.4})$$

so erkennen wir, dass durch zusätzliches Einführen von Faktoren beim Übergang der Tensor- in die Matrix-Notation des Dehnungstensors

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & \frac{1}{2}e_6 & \frac{1}{2}e_5 \\ \frac{1}{2}e_6 & e_2 & \frac{1}{2}e_4 \\ \frac{1}{2}e_5 & \frac{1}{2}e_4 & e_3 \end{pmatrix} . \quad (\text{A4.2.5})$$

Gleichung (A4.2.1) in folgender kompakter Form geschrieben werden kann:

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^6 C_{mn}e_n . \quad (\text{A4.2.6})$$

Die Anzahl unabhängigen Komponenten des Elastizitätstensor  $C_{ijkl}$  können durch Betrachtung der elastischen freien Energiedichte  $f_{el}$  weiter reduziert werden. Die elastische Energiedichte  $f_{el}$  ist eine quadratische Funktion der Dehnung  $e_n$ , da in Matrixnotation

$$df_{el} = \sigma_m de_m = \sum_{n=1}^6 \tilde{C}_{mn}e_n de_m \quad (\text{A4.2.7})$$

und somit

$$\sigma_m = \frac{\partial f_{el}}{\partial e_m} , \quad (\text{A4.2.8})$$

bzw.

$$C_{mn} = \frac{1}{\partial e_n} \left( \frac{\partial f_{el}}{\partial e_m} \right) \quad (\text{A4.2.9})$$

gilt. Da die Reihenfolge der Differentiation beliebig ist, ergibt sich

$$C_{mn} = \frac{1}{\partial e_n} \left( \frac{\partial f_{el}}{\partial e_m} \right) = \frac{1}{\partial e_m} \left( \frac{\partial f_{el}}{\partial e_n} \right) = C_{nm} \quad (\text{A4.2.10})$$

und

$$C_{mn} = C_{nm} \text{ bzw. } S_{mn} = S_{nm} . \quad (\text{A4.2.11})$$

Der Elastizitätstensor ist somit symmetrisch:  $C_{ijkl} = C_{klij}$  bzw.  $C_{mn} = C_{nm}$ . Dies reduziert die Anzahl der unabhängigen Komponenten von 36 auf 21.

**Elastizitätstensor eines kubischen Kristalls:** Eine weitere Reduktion der unabhängigen Koeffizienten können wir aufgrund der zugrunde liegenden Kristallsymmetrie vornehmen. Wir zeigen dies im Folgenden für einen kubischen Kristall. Hierzu verwenden wir die Transformationseigenschaften eines Tensors

$$\tilde{C}_{ijkl} = \sum_m \sum_n \sum_o \sum_p a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} C_{mnop} \quad (\text{A4.2.12})$$

mit  $\{i, j, k, l, m, n, o, p\} = \{x, y, z\}$  und einer gegebenen Transformationsmatrix  $\mathbf{a}$ . Da ein kubischer Kristall drei 4-zählige  $\langle 100 \rangle$ -Drehachsen besitzt, kann der Kristall durch eine Rotation um  $90^\circ$  entlang der  $x$ -Achse mit der Rotationsmatrix

$$a^z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A4.2.13})$$

in sich selbst überführt werden. Somit ist bei Anwendung dieser Transformation  $\tilde{C}_{ijkl} = C_{mnop}$ . Mittels Gleichung (A4.2.12) können die einzelnen Komponenten  $\tilde{C}_{ijkl}$  berechnet werden. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{xxxx} &= a_{xy}^z a_{xy}^z a_{xy}^z a_{xy}^z C_{yyyy} = C_{yyyy} \\ \tilde{C}_{xxx y} &= a_{xy}^z a_{xy}^z a_{xy}^z a_{yx}^z C_{yyyx} = -C_{yyyx} \\ \tilde{C}_{xxx z} &= a_{xy}^z a_{xy}^z a_{xy}^z a_{zz}^z C_{yyyz} = -C_{yyyz} \\ \tilde{C}_{xx yx} &= \tilde{C}_{xx xy} \\ \tilde{C}_{xx yy} &= a_{xy}^z a_{xy}^z a_{yx}^z a_{yx}^z C_{yyxx} = C_{yyxx} \\ \tilde{C}_{xx yz} &= a_{xy}^z a_{xy}^z a_{yx}^z a_{zz}^z C_{yyxz} = C_{yyxz} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A4.2.14})$$

bzw. in Matrix-Notation

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_{22} & C_{21} & C_{23} & C_{25} & -C_{24} & -C_{26} \\ C_{21} & C_{11} & C_{13} & C_{15} & -C_{14} & -C_{16} \\ C_{23} & C_{13} & C_{33} & C_{35} & -C_{34} & -C_{36} \\ C_{25} & C_{15} & C_{35} & C_{55} & -C_{54} & -C_{56} \\ -C_{24} & -C_{14} & -C_{34} & -C_{54} & C_{44} & C_{46} \\ -C_{26} & -C_{16} & -C_{36} & -C_{56} & C_{46} & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (\text{A4.2.15})$$

Vergleichen wir nun  $\tilde{\mathbf{C}}$  mit

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad (\text{A4.2.16})$$

so erhalten wir

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{21}, C_{13} = C_{23}, C_{44} = C_{35}, C_{16} = -C_{26} \quad (\text{A4.2.17})$$

und

$$\begin{aligned} C_{14} = C_{25} &= -C_{14} = 0 \\ C_{15} = -C_{24} &= -C_{15} = 0 \\ C_{34} = C_{35} &= -C_{34} = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A4.2.18})$$

Dies ergibt dann

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{46} \\ C_{16} & -C_{16} & 0 & 0 & C_{46} & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (\text{A4.2.19})$$

Um die unabhängigen Komponenten dieser Matrix noch weiter zu reduzieren, können wir eine weitere Rotation des kubischen Kristalls entlang der  $x$ -Achse mit der Rotationsmatrix

$$a^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A4.2.20})$$

betrachten. Mittels Gleichung (A4.2.12) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_{xxxx} &= a_{xx}^x a_{xx}^x a_{xx}^x a_{xx}^x C_{xxxx} = C_{xxxx} \\ \widetilde{C}_{xxx y} &= a_{xx}^x a_{xx}^x a_{xx}^x a_{yz}^x C_{xxxz} = 0 \\ \widetilde{C}_{xxx z} &= 0 \\ \widetilde{C}_{xxyx} &= \widetilde{C}_{xxxy} = 0 \\ \widetilde{C}_{xxyy} &= a_{xx}^x a_{xx}^x a_{yz}^x a_{yz}^x C_{xxzz} = C_{xxzz} \\ \widetilde{C}_{xxyz} &= a_{xx}^x a_{xx}^x a_{yz}^x a_{zy}^x C_{xxzy} = -C_{xxzy} = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A4.2.21})$$

Dies resultiert in der bekannten Form des Elastizitätstensors für kubische Systeme in der Matrix-Notation:

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{A4.2.22})$$

Es kann durch weitere Symmetriebetrachtungen gezeigt werden, dass die Anzahl der resultierenden unabhängigen Komponenten ( $C_{11}, C_{12}, C_{44}$ ) nicht weiter reduziert werden kann und Gleichung (A4.2.22) den Elastizitätstensors für kubische Systeme in Matrix-Notation wiedergibt.

**Poisson-Zahl:** Wir wollen mit dem Elastizitätstensor (A4.2.22) jetzt noch die *Poisson-Zahl* berechnen. Die Poisson-Zahl  $\nu$  ist der Kehrwert der *Querdehnungszahl*  $\mu$ . Sie gibt das Verhältnis von Querkontraktion  $-\Delta d/d$  zu Längsdehnung  $\Delta \ell/\ell$  an:

$$\nu = \frac{1}{\mu} \equiv \frac{-\Delta d/d}{\Delta \ell/\ell} . \quad (\text{A4.2.23})$$

Eine Spannung  $\sigma$  resultiert nicht nur in einer Längenänderung  $\Delta \ell$  in Richtung der wirkenden Spannung, sondern auch in einer Kontraktion  $-\Delta d$  quer zur wirkenden Spannung.

Für Kristalle ist die Poisson-Zahl durch die jeweilige Kristallsymmetrie richtungsabhängig (anisotrop) und allgemein definiert als

$$\nu_{nm} = \frac{-S_{mn}}{S_{nn}} , \quad (\text{A4.2.24})$$

wobei  $x_n$  die Richtung der longitudinalen Längenänderung und  $x_m$  die Richtung der Querdehnung ist.  $S_{mn}$  und  $S_{nn}$  sind die zugehörigen Komponenten des Compliance-Tensors (bezogen auf ein rechtshändiges Koordinatensystem). Nehmen wir z.B.  $x_1$  als Richtung der longitudinalen Längenänderung, dann sind zwei Poisson-Zahlen durch die Querachsen  $x_2$  und  $x_3$  wie folgt definiert:

$$\nu_{12} = \frac{-S_{21}}{S_{11}} \quad \nu_{31} = \frac{-S_{13}}{S_{11}} . \quad (\text{A4.2.25})$$

Die Beziehungen für die Poisson-Zahl können wir am einfachsten mit Hilfe der reziproken Steifigkeit (Compliance)  $S_{mn}$  angeben. Der reziproke Steifigkeitstensor eines kubischen Kristalls hat dieselbe Form wie der Elastizitätstensor. In Matrix-Notation ergibt sich

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix} = \widehat{C}^{-1} . \quad (\text{A4.2.26})$$

$\widehat{S}$  wird durch Inversion der Elastizitätsmatrix berechnet. Es gilt

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{11} + S_{12}}{(S_{11} - S_{12})(S_{11} + 2S_{12})} \\ C_{12} &= \frac{-S_{12}}{(S_{11} - S_{12})(S_{11} + 2S_{12})} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} \end{aligned} \quad (\text{A4.2.27})$$

bzw.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})} \\ S_{12} &= \frac{-C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})} \\ S_{44} &= \frac{1}{C_{44}} . \end{aligned} \quad (\text{A4.2.28})$$

Für ein kubisches System gilt  $S_{21} = S_{31}$  und wir erhalten mit Hilfe von (A4.2.27)

$$v_{21} = v_{31} = \frac{\frac{C_{12}}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})}}{\frac{C_{11}+C_{12}}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})}} = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}} . \quad (\text{A4.2.29})$$



### A4.3 Schwingungen in einem Aluminium-Zylinder

Wir regen einen 50 cm langen polykristallinen Aluminium-Zylinder zu longitudinalen Schwingungen an. Wir bestimmen für die Grundschiwingung eine Resonanzfrequenz  $f_0 = 5.2 \text{ kHz}$ . Aluminium besitzt eine Dichte von  $\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3$ , ein Elastizitätsmodul  $E = 70.2 \text{ GPa}$  und eine Poisson-Zahl  $\nu = 0.33$ .

- Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit von Aluminium aus der gemessenen Resonanzfrequenz.
- Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert, den wir aus der Messung der longitudinalen Schallgeschwindigkeit mit Hilfe von Ultraschall erhalten würden.

### Lösung

- Mit der gemessenen Resonanzfrequenz  $f_0 = 5.2 \text{ kHz}$  der Grundschiwingung und der Beziehung  $\lambda/2 = L = 50 \text{ cm}$  für die Grundmode erhalten wir sofort die Schallgeschwindigkeit zu

$$v_s^{\text{exp}} = f_0 \cdot \lambda = 5.2 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot 1.0 \text{ m} = 5200 \text{ m/s} . \quad (\text{A4.3.1})$$

- Wenn wir die longitudinale Schallgeschwindigkeit mit Hilfe einer Ultraschallmessung bestimmen, erwarten wir eigentlich dasselbe Ergebnis. Wir können nämlich von den gleichen elastischen Eigenschaften ausgehen, da wir uns selbst bei Frequenzen bis in den 100 MHz-Bereich immer noch im langwelligen Grenzfall befinden. Bei einer Frequenz von z.B. 500 MHz beträgt die Wellenlänge der longitudinalen Schallwelle etwa  $10 \mu\text{m}$  und ist somit immer noch groß gegen den Atomabstand. Das bedeutet, dass die Kontinuumsnäherung für Ultraschalluntersuchungen eine sehr gute Näherung darstellt. Mit den angegebenen elastischen Materialparametern  $E = 70.2 \text{ GPa} = 7.02 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$  und  $\nu = 0.33$  können wir die Schallgeschwindigkeit auch anders berechnen. Hierzu bezeichnen wir die Längsachse des Zylinders mit der  $x$ -Achse und die Auslenkung in  $x$ -Richtung mit  $u_1$ . Wir erhalten dann die Kraftgleichung

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) . \quad (\text{A4.3.2})$$



Hierbei stehen auf der linken Seite die Trägheitskraft auf ein infinitesimales Volumenelement mit Massendichte  $\rho$  und auf der rechten Seite die Rückstellkräfte aufgrund der elastischen Eigenschaften des Materials.

Zur Vereinfachung vernachlässigen wir zunächst die Querkontraktion des Stabes. Wir gehen also von einer über den Stabquerschnitt homogenen Deformation aus und nehmen an, dass keine Kräfte auf die Seitenflächen wirken. Dies können wir für einen langen Stab, dessen Durchmesser wesentlich kleiner als die Wellenlänge der durchlaufenden Schallwelle ist und elastisch nicht an die Umgebung angekoppelt ist, in guter Näherung tun. In einem isotropen Festkörper ist  $\sigma_{xx} = E e_{xx} = E \partial u_1 / \partial x$  und wir erhalten

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}. \quad (\text{A4.3.3})$$

Hierbei ist  $E$  der Elastizitätsmodul und  $e_{xx}$  die Dehnung in  $x$ -Richtung aufgrund einer in  $x$ -Richtung wirkenden Kraft. Wir erhalten eine eindimensionale Wellengleichung, deren Lösung eine longitudinale Schallwelle mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_s^{\text{el}, d \ll \lambda} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{7.02 \times 10^{10}}{2700}} \text{ m/s} = 5099 \text{ m/s für } d \ll \lambda \quad (\text{A4.3.4})$$

ist. Dieser Wert liegt etwas unter dem aus der gemessenen Resonanzfrequenz bestimmten Wert  $v_s^{\text{exp}}$ . Die Ursache ist, dass der Zylinder einen relativ großen Durchmesser hat und somit die Vernachlässigung der Querkontraktion einen relativ großen Fehler verursacht.

Unter Berücksichtigung der Querkontraktion im Grenzfall  $d \gg \lambda$  hat die Schallgeschwindigkeit dann eine leicht andere Form und hängt von der Poisson-Zahl  $\nu$  ab (die etwas längliche Herleitung dieses Ausdrucks folgt weiter unten):

$$v_s^{\text{el}, d \gg \lambda} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}. \quad (\text{A4.3.5})$$

Für  $\nu = 0.33$  erhalten wir

$$v_s^{\text{el}, d \gg \lambda} = \sqrt{\frac{7.02 \times 10^{10}}{2700}} \cdot 1.5 \text{ m/s} = 6245 \text{ m/s für } d \gg \lambda, \quad (\text{A4.3.6})$$

also eine höhere Schallgeschwindigkeit als diejenige, die wir im Grenzfall  $d \ll \lambda$  abgeleitet haben. Vergleichen wir die gemessene Schallgeschwindigkeit  $v_s^{\text{mes}}$  mit den mittels den elastischen Konstanten abgeleiteten Geschwindigkeiten  $v_s^{\text{el}, d \ll \lambda}$  und  $v_s^{\text{el}, d \gg \lambda}$  so erkennen wir, dass der untersuchte Aluminium-Zylinder ein Durchmesser zu Wellenlängenverhältnis nahe des eindimensionalen Grenzfalles ( $d \ll \lambda$ ) besitzt und somit die Länge  $L$  größer als der Durchmesser  $d$  ist.

Um das Ergebnis (A4.3.5) herzuleiten, gehen wir von der allgemeinen Bewegungsgleichung für Schallwellen aus:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{A4.3.7})$$

Mit

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} e_{kl} = \sum_k C_{ijkk} e_{kk} + \sum_{k \neq l} C_{ijkl} e_{kl} \quad (\text{A4.3.8})$$

und

$$e_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad \text{für } k = l \quad \text{bzw.} \quad e_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad \text{für } k \neq l \quad (\text{A4.3.9})$$

können wir das umformen in

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{jkl} C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} . \quad (\text{A4.3.10})$$

Parallel zu den Hauptachsen gilt für einen isotropen Festkörper (Voigt-Notation)

$$\sigma_1 = a e_1 + b e_2 + b e_3 \quad (\text{A4.3.11})$$

$$\sigma_2 = b e_1 + a e_2 + b e_3 \quad (\text{A4.3.12})$$

$$\sigma_3 = b e_1 + b e_2 + a e_3 . \quad (\text{A4.3.13})$$

Wegen der Gleichwertigkeit aller Richtungen gibt es nur zwei elastische Konstanten, nämlich  $a$  für die Deformation parallel zur wirkenden Spannung und  $b$  senkrecht dazu. Üblicherweise werden die **Laméschen Moduln**

$$\mu = \frac{a - b}{2} \quad \lambda = b \quad (\text{A4.3.14})$$

verwendet, mit denen wir

$$\sigma_1 = 2\mu e_1 + \lambda(e_1 + e_2 + e_3) \quad (\text{A4.3.15})$$

$$\sigma_2 = 2\mu e_2 + \lambda(e_1 + e_2 + e_3) \quad (\text{A4.3.16})$$

$$\sigma_3 = 2\mu e_3 + \lambda(e_1 + e_2 + e_3) \quad (\text{A4.3.17})$$

erhalten. Gehen wir vom Hauptachsensystem zu einem beliebigen Koordinatensystem über, so gilt die in der Fußnote<sup>1</sup> gezeigte Beziehung. Mit  $\sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}$  und wegen  $\text{Spur}(\mathbf{e}') = \text{Spur}(\mathbf{e})$  ergibt sich

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e'_{ij} + \lambda \delta_{ij} \text{Spur}(\mathbf{e}') .$$

<sup>1</sup> Nach (A4.3.15) bis (A4.3.17) gilt

$$\sigma_k = 2\mu e_k + \lambda \cdot \text{Spur}(\mathbf{e}) , \quad (\sigma_k = \delta_{kl} \sigma_{kl}, \quad e_k = e_{kl} \sigma_{kl}) .$$

Im beliebigen orthogonalen Koordinatensystem gilt

$$\sigma'_{ij} = \sum_{kl} \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl} = \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} \sigma_k$$

$$e'_{ij} = \sum_{kl} \alpha_{ik} \alpha_{jl} e_{kl} = \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} e_k ,$$

wobei  $\alpha_{ik} = \cos \angle(x'_i, x_k)$  die Richtungskosinus sind. Damit erhalten wir

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} e_k + \lambda \cdot \text{Spur}(\mathbf{e}) \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} .$$

Den Index ' können wir weglassen und erhalten

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \cdot \text{Spur}(\mathbf{e}) . \quad (\text{A4.3.18})$$

Diese Beziehung stellt das Hookesche Gesetz für einen isotropen Festkörper dar. Mit diesem Zusammenhang können wir die allgemeine Bewegungsgleichung (A4.3.7) schreiben als

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \text{Spur}(\mathbf{e})] . \quad (\text{A4.3.19})$$

Mit

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) . \quad (\text{A4.3.20})$$

erhalten wir für  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &\quad + \lambda \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &= \underbrace{\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)}_{\Delta} u_1 + (\mu + \lambda) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{u}} . \end{aligned} \quad (\text{A4.3.21})$$

Analoge Ergebnisse erhalten wir für  $i = 2$  und  $i = 3$ . Zusammengefasst erhalten wir also die Bewegungsgleichung

$$\mu \Delta u_j + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 . \quad (\text{A4.3.22})$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ u_j &= u_{0j} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)} . \end{aligned} \quad (\text{A4.3.23})$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung ein und verwenden

$$\Delta u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2} = -u_j (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = -u_j k^2 \quad (\text{A4.3.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} i(u_1 k_1 + u_2 k_2 + u_3 k_3) = -k_j (\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{A4.3.25})$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} = -k_j^2 u_j \quad (\text{A4.3.26})$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = -\omega^2 u_j , \quad (\text{A4.3.27})$$

so erhalten wir

$$\mu k^2 u_{0j} + (\mu + \lambda) k_j (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) - \rho \omega^2 u_{0j} = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3. \quad (\text{A4.3.28})$$

Wir können dieses Gleichungssystem in Matrixform schreiben und erhalten

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mu k^2 + (\mu + \lambda) k_1^2 - \rho \omega^2 & (\mu + \lambda) k_1 k_2 & (\mu + \lambda) k_1 k_3 \\ (\mu + \lambda) k_2 k_1 & \mu k^2 + (\mu + \lambda) k_2^2 - \rho \omega^2 & (\mu + \lambda) k_2 k_3 \\ (\mu + \lambda) k_3 k_1 & (\mu + \lambda) k_3 k_2 & \mu k^2 + (\mu + \lambda) k_3^2 - \rho \omega^2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{M}} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A4.3.29})$$

Die Lösungen für  $\omega$  erhalten wir, indem wir  $\det \mathbf{M} = 0$  setzen. Wir betrachten nur die Ausbreitung in  $x$ -Richtung ( $k_1 \neq 0, k_2 = k_3 = 0$ ), für die wir

$$\begin{vmatrix} (2\mu + \lambda) k_1^2 - \rho \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu k_1^2 - \rho \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu k_1^2 - \rho \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A4.3.30})$$

und damit

$$[(2\mu + \lambda) k_1^2 - \rho \omega^2] [\mu k_1^2 - \rho \omega^2]^2 = 0 \quad (\text{A4.3.31})$$

erhalten. Für die die Ausbreitung in  $x$ -Richtung ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= (u_{01}, 0, 0) \quad (\text{longitudinale Welle}) \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= (0, u_{02}, 0) \quad (\text{transversale Welle}) \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= (0, 0, u_{03}) \quad (\text{transversale Welle}) \end{aligned} \quad (\text{A4.3.32})$$

Für die Phasengeschwindigkeit  $v_s = \omega/|\mathbf{k}_{[100]}| = \omega/k_1$  erhalten wir

$$v_{s,1} = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}, \quad v_{s,2} = v_{s,3} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{A4.3.33})$$

Wir müssen jetzt noch den Zusammenhang zwischen den Laméschen Moduln und dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Poisson-Zahl  $\nu$  herstellen. Dies können wir tun, indem wir eine Situation betrachten, bei der nur eine Kraft in  $x$ -Richtung wirkt. Wir erhalten mit (A4.3.18)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu e_{xx} + \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \\ \sigma_{yy} &= 0 = 2\mu e_{yy} + \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= 0 = 2\mu e_{zz} + \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \\ \sigma_{yz} &= 0 = 2\mu e_{yz} \\ \sigma_{xz} &= 0 = 2\mu e_{xz} \\ \sigma_{xy} &= 0 = 2\mu e_{xy}, \end{aligned} \quad (\text{A4.3.34})$$

woraus

$$\begin{aligned}
 e_{yy} = e_{zz} &= -\frac{\lambda}{2\mu}(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \\
 e_{yz} = e_{xz} = e_{xy} &= 0 \\
 e_{yy} &= -\frac{\lambda}{2\mu}(e_{xx} + -2\frac{\lambda}{2\mu}e_{yy}) = -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}e_{xx} \\
 \text{Spur}(\mathbf{e}) = e_{xx} \left( 1 - 2\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \right) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}e_{xx}
 \end{aligned} \tag{A4.3.35}$$

folgt. Damit erhalten wir

$$\sigma_{xx} = 2\mu e_{xx} + \lambda \frac{\mu}{\lambda + \mu} e_{xx} = \left( 2\mu + \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \right) e_{xx} \equiv E e_{xx} \tag{A4.3.36}$$

und damit den Elastizitätsmodul

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda + \mu}. \tag{A4.3.37}$$

Für die Poisson-Zahl erhalten wir

$$\nu = \frac{-e_{zz}}{e_{xx}} = \frac{-e_{yy}}{e_{xx}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{A4.3.38}$$

Setzen wir diese Beziehungen in (A4.3.33) ein, so erhalten wir den Ausdruck (A4.3.5) für die Geschwindigkeit der longitudinalen Schwingung.

#### A4.4 Elastische Wellen in [111]-Richtung eines kubischen Kristalls



Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit von transversalen Gitterschwingungen in [111]-Richtung eines kubischen Kristalls mit Massendichte  $\rho$  durch

$$v_s = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{C_{11} - C_{12} + C_{44}}{\rho}}$$

gegeben ist.  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  und  $C_{44}$  sind die drei Komponenten des Elastizitätstensors eines kubischen Kristalls.

#### Lösung

Wir gehen wie in Aufgabe A4.3 von der allgemeinen Bewegungsgleichung für Schallwellen aus:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{jkl} C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}. \tag{A4.4.1}$$

Für kubische Systeme vereinfacht sich dieses gekoppelte Differentialgleichungssystem zu (siehe hierzu R. Gross und A. Marx, *Festkörperphysik*, Walter de Gruyter (2018), Kapitel 4 und Aufgabe A4.2)

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + C_{44} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} \right) \quad (\text{A4.4.2})$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + C_{44} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} \right) \quad (\text{A4.4.3})$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + C_{44} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} \right). \quad (\text{A4.4.4})$$

Hierbei sind  $u_1, u_2, u_3$  die Komponenten des Verschiebungsvektors und  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ . Wir können (A4.4.2) mit Hilfe von

$$\Delta u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2} = -u_j(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = -u_j k^2 \quad (\text{A4.4.5})$$

umschreiben in

$$C_{44} \left( \Delta u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + C_{12} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right) + C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A4.4.6})$$

Dies können wir weiter vereinfachen zu

$$\underbrace{C_{44}}_{=a} \Delta u_1 + \underbrace{(C_{12} + C_{44})}_{=b} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \underbrace{(C_{11} - C_{12} - 2C_{44})}_{=c} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A4.4.7})$$

Analoge Ausdrücke erhalten wir für  $u_2$  und  $u_3$ . Wir können somit allgemein schreiben:

$$a \Delta u_j + b \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + c \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3. \quad (\text{A4.4.8})$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung machen wir den Ansatz

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ u_j = u_{0j} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)}. \quad (\text{A4.4.9})$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung ein und verwenden

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (u_1 k_1 + u_2 k_2 + u_3 k_3) = -k_j (\mathbf{u} \cdot \mathbf{k})\end{aligned}\quad (\text{A4.4.10})$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} = -k_j^2 u_j \quad (\text{A4.4.11})$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = -\omega^2 u_j, \quad (\text{A4.4.12})$$

so erhalten wir

$$ak^2 u_{0j} + bk_j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) + ck_j^2 u_{0j} - \rho \omega^2 u_{0j} = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3. \quad (\text{A4.4.13})$$

Wir können dieses Gleichungssystem in Matrixform schreiben und erhalten

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ak^2 + bk_1^2 + ck_1^2 - \rho\omega^2 & bk_1 k_2 & bk_1 k_3 \\ bk_2 k_1 & ak^2 + bk_2^2 + ck_2^2 - \rho\omega^2 & bk_2 k_3 \\ bk_3 k_1 & bk_3 k_2 & ak^2 + bk_3^2 + ck_3^2 - \rho\omega^2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{M}} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A4.4.14})$$

Durch Umformen der Matrix  $\mathbf{M}$  erhalten wir mit der Abkürzung  $\alpha = a + b + c$

$$\begin{pmatrix} k_1^2 \alpha + a(k_2^2 + k_3^2) - \rho\omega^2 & bk_1 k_2 & bk_1 k_3 \\ bk_2 k_1 & k_2^2 \alpha + a(k_1^2 + k_3^2) - \rho\omega^2 & bk_2 k_3 \\ bk_3 k_1 & bk_3 k_2 & k_3^2 \alpha + a(k_1^2 + k_2^2) - \rho\omega^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A4.4.15})$$

Wir können nun  $\alpha = a + b + c = C_{11}$ ,  $a = C_{44}$ ,  $b = C_{12} + C_{44}$  verwenden und erhalten

$$\begin{pmatrix} C_{11} k_1^2 + C_{44}(k_2^2 + k_3^2) - \rho\omega^2 & (C_{12} + C_{44})k_1 k_2 & (C_{12} + C_{44})k_1 k_3 \\ (C_{12} + C_{44})k_2 k_1 & C_{11} k_2^2 + C_{44}(k_1^2 + k_3^2) - \rho\omega^2 & (C_{12} + C_{44})k_2 k_3 \\ (C_{12} + C_{44})k_3 k_1 & (C_{12} + C_{44})k_3 k_2 & C_{11} k_3^2 + C_{44}(k_1^2 + k_2^2) - \rho\omega^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A4.4.16})$$

Die Lösungen für  $\omega$  erhalten wir, indem wir  $\det \mathbf{M} = 0$  setzen. Wir betrachten dabei verschiedene Ausbreitungsrichtungen (siehe Abb. 4.2):

- Ausbreitung in  $[100]$ -Richtung ( $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 = k_3 = 0$ ):

Wir erhalten

$$\begin{vmatrix} C_{11} k_1^2 - \rho\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} k_1^2 - \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} k_1^2 - \rho\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(C_{11} k_1^2 - \rho\omega^2)(C_{44} k_1^2 - \rho\omega^2)^2 = 0 \quad (\text{A4.4.17})$$

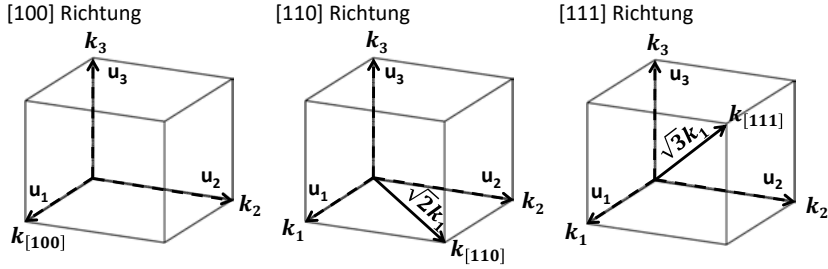


Abb. 4.2: Wellenvektoren  $k_j$  und Auslenkungen  $u_j$  bei der Ausbreitung von Gitterschwingungen in  $[100]$ -,  $[110]$ - und  $[111]$ -Richtung.

und damit

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= (u_{01}, 0, 0) \quad (\text{longitudinale Welle}) \\
 \omega_2 &= \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= (0, u_{02}, 0) \quad (\text{transversale Welle}) \\
 \omega_3 &= \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= (0, 0, u_{03}) \quad (\text{transversale Welle})
 \end{aligned} \tag{A4.4.18}$$

Für die Phasengeschwindigkeit  $v_s = \omega/|\mathbf{k}_{[100]}| = \omega/k_1$  ergibt sich

$$v_{s,1} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad v_{s,2} = v_{s,3} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \tag{A4.4.19}$$

■ Ausbreitung in  $[110]$ -Richtung ( $k_1 = k_2 \neq 0, k_3 = 0$ ):

Wir erhalten

$$\begin{vmatrix}
 (C_{11} + C_{44})k_1^2 - \rho\omega^2 & (C_{12} + C_{44})k_1^2 & 0 \\
 (C_{12} + C_{44})k_1^2 & (C_{11} + C_{44})k_1^2 - \rho\omega^2 & 0 \\
 0 & 0 & 2C_{44}k_1^2 - \rho\omega^2
 \end{vmatrix} = 0 \tag{A4.4.20}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \omega_3 &= \sqrt{\frac{2C_{44} + C_{11} + C_{12}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= \frac{(u_{01}, u_{01}, 0)}{\sqrt{2}} \quad (\text{long. Welle}) \\
 \omega_1 &= \sqrt{\frac{2C_{44}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= (0, 0, u_{03}) \quad (\text{transv. Welle}) \\
 \omega_2 &= \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= \frac{(-u_{01}, u_{01}, 0)}{\sqrt{2}} \quad (\text{transv. Welle})
 \end{aligned} \tag{A4.4.21}$$

Für die Phasengeschwindigkeit  $v_s = \omega/|\mathbf{k}_{[110]}| = \omega/\sqrt{2}k_1$  (siehe Abb. 4.2) ergibt sich

$$v_{s,1} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad v_{s,2} = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{2\rho}}, \quad v_{s,3} = \sqrt{\frac{2C_{44} + C_{11} + C_{12}}{2\rho}} \tag{A4.4.22}$$



■ Ausbreitung in  $[111]$ -Richtung ( $k_1 = k_2 = k_3 \neq 0$ ):

Wir erhalten

$$\begin{vmatrix} (2C_{44} + C_{11})k_1^2 - \rho\omega^2 & (C_{12} + C_{44})k_1^2 & (C_{12} + C_{44})k_1^2 \\ (C_{12} + C_{44})k_1^2 & (2C_{44} + C_{11})k_1^2 - \rho\omega^2 & (C_{12} + C_{44})k_1^2 \\ (C_{12} + C_{44})k_1^2 & (C_{12} + C_{44})k_1^2 & (2C_{44} + C_{11})k_1^2 - \rho\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A4.4.23})$$

und damit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{4C_{44} + C_{11} + 2C_{12}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= \frac{(u_{01}, u_{01}, u_{01})}{\sqrt{3}} \quad (\text{long. Welle}) \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{C_{44} - C_{12} + C_{11}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= \frac{(-u_{01}, 0, u_{01})}{\sqrt{3}} \quad (\text{transv. Welle}) \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{C_{44} - C_{12} + C_{11}}{\rho}} k_1, & \mathbf{u}_0 &= \frac{(-u_{01}, u_{01}, 0)}{\sqrt{3}} \quad (\text{transv. Welle}) \end{aligned} \quad (\text{A4.4.24})$$

Für die Phasengeschwindigkeit  $v_s = \omega/|\mathbf{k}_{[111]}| = \omega/\sqrt{3}k_1$  (siehe Abb. 4.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} v_{s,1} &= \sqrt{\frac{4C_{44} + C_{11} + 2C_{12}}{3\rho}}, & v_{s,2} &= \sqrt{\frac{C_{44} - C_{12} + C_{11}}{3\rho}}, \\ v_{s,3} &= \sqrt{\frac{C_{44} - C_{12} + C_{11}}{3\rho}} \end{aligned} \quad (\text{A4.4.25})$$

Die Phasengeschwindigkeiten für die verschiedenen Ausbreitungsrichtungen sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

**Tabelle 4.1:** Phasengeschwindigkeiten von Gitterschwingungen in kubischen Medien für die Ausbreitung in  $[100]$ ,  $[110]$  und  $[111]$  Richtung.

Richtung		$[100]$	$[110]$	$[111]$
longitudinal (Kompressionswelle)	L	$\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{C_{11}+C_{12}+2C_{44}}{2\rho}}$	$\sqrt{\frac{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}{3\rho}}$
transversal (Torsionswelle)	$T_1$	$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}+C_{44}}{3\rho}}$
	$T_2$	$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}}{2\rho}}$	$\sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}+C_{44}}{3\rho}}$

