

13 Supraleitung

A13.1 Dauerstromexperiment



In einem Dauerstromexperiment wird das Abklingen des durch den Suprastrom I_s in einem geschlossenen supraleitenden Ring mit Radius $r_0 = 1 \text{ mm}$ und Drahtradius $r_1 = 0.1 \text{ mm}$ erzeugten magnetischen Moments benutzt, um eine obere Grenze für den Widerstand R des Supraleiters abzuschätzen.

- (a) Schätzen Sie den Strom I_s für ein Feld von 1 mT im Zentrum des Rings ab.
- (b) Wie hoch ist das auf der Ringoberfläche erzeugte Magnetfeld?
- (c) Schätzen Sie die Zahl der im Ring enthaltenen Flussquanten Φ_0 ab.
- (d) Nach einem Jahr wird eine Abnahme des magnetischen Moments um etwa 5% gemessen. Welcher maximale Widerstand des Supraleiters kann daraus abgeschätzt werden?

Lösung

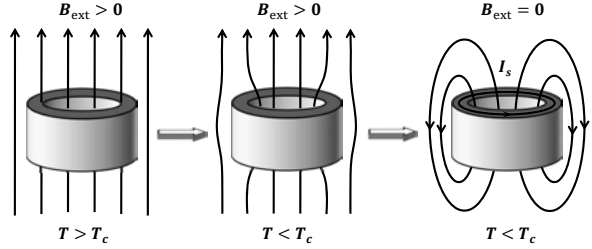
Wir überlegen uns zuerst, ob wir einen Dauerstrom in einem Supraleiter durch Induktion erzeugen können. Wir wissen, dass magnetische Felder aus dem Innern des Supraleiters verdrängt werden, solange sie kleiner als das thermodynamische kritische Feld B_{cth} (Typ-I Supraleiter) bzw. untere kritische Feld B_{cl} (Typ-II Supraleiter) sind. Da der Radius r_1 des supraleitenden Drahts wesentlich größer als die Londonsche Eindringtiefe ist, können wir durch das Anschalten eines externen Magnetfeldes keine Flussänderung im Innern des Rings erzeugen. Das heißt, der Fluss innerhalb des Rings ist zeitlich konstant: $d\Phi/dt = 0$. Diese Tatsache können wir auch daraus ableiten, dass das elektrische Feld entlang einer Konturlinie C tief im Inneren des Supraleiters verschwinden muss. Mit $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\phi$ (\mathbf{A} : Vektorpotenzial, ϕ : skalarcs Potenzial) und $\nabla\phi = 0$ erhalten wir

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad (\text{A13.1.1})$$

wobei Φ der Fluss durch die Fläche ist, die vom geschlossenen Integrationsweg C umschlossen wird. Wählen wir also den Integrationsweg weit im Inneren des Supraleiters, so gilt dort $\mathbf{E} = 0$ und damit $\partial\Phi/\partial t = 0$. Wir sprechen von einem „Einfrieren“ des magnetischen Flusses.

Kühlen wir den supraleitenden Ring in einem externen Magnetfeld B_{ext} unter seine Sprungtemperatur ab, so wird zwar das Feld aus dem supraleitenden Drahtmaterial verdrängt, der die Ringfläche πr_0^2 durchsetzende magnetische Fluss $\Phi = \pi r_0^2 B_{\text{ext}}$ bleibt aber in dem Ring eingefroren, wenn wir das externe Feld wieder abschalten (siehe Abb. 13.1). Dies gilt natürlich nur dann, wenn das externe Feld kleiner als B_{cth} (Typ-I Supraleiter) bzw. B_{cl} (Typ-II Supraleiter) ist.

Abb. 13.1: Zur Erzeugung eines Dauerstroms in einem supraleitenden Ring. Wir legen für $T > T_c$ ein homogenes Magnetfeld an und kühlen dann unter T_c ab. Schalten wir nun das Feld ab, wird die im Ring eingeschlossene Flussdichte durch einen im Ring zirkulierenden Dauerstrom beibehalten.



- (a) Nach dem Biot-Savart-Gesetz erzeugt ein Strom I_s , der in einer in der xy -Ebene liegenden, kreisförmigen Leiterschleife mit Radius r_0 fließt, folgendes Magnetfeld entlang der in z -Richtung zeigenden Symmetrieachse der Leiterschleife:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I_s}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (\text{A13.1.2})$$

In der Ebene der Leiterschleife ($z = 0$) ergibt sich daraus

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 I_s}{2r_0} \quad (\text{A13.1.3})$$

und damit für $B_z(0) = 1 \text{ mT}$ und $r_0 = 1 \text{ mm}$ der Suprastrom

$$I_s = \frac{2r_0}{\mu_0} B_z(0) = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} 10^{-3} \text{ A} \approx 1.6 \text{ A}. \quad (\text{A13.1.4})$$

- (b) Das auf der Ringoberfläche erzeugte Magnetfeld B_1 können wir mit Hilfe der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$ bestimmen. Integrieren wir dies über die Querschnittsfläche $A_1 = \pi r_1^2$ des Rings auf und benutzen das Stokessche Theorem, so erhalten wir

$$\int_{A_1} \mu_0 \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{A} = \int_{A_1} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{C_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (\text{A13.1.5})$$

Hierbei ist C_1 die Konturlinie entlang der Oberfläche des Drahtquerschnitts. Mit $\int_{A_1} \mu_0 \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I_s$ und $\oint_{C_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r_1 B_1$ erhalten wir

$$B_1 = \frac{r_0}{\pi r_1} B_z(0) \simeq 3 B_{\text{ext}} \simeq 3 \text{ mT}. \quad (\text{A13.1.6})$$

Das Feld an der Drahtoberfläche ist damit immer noch wesentlich kleiner als das kritische Feld von z. B. Pb ($B_{\text{cth}} = 80 \text{ mT}$).

Mit dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I$ können wir auch den kritischen Strom I_c des Drahtes bestimmen. Dieser wird erreicht, wenn das Feld an der Drahtoberfläche das kritische Feld B_{cth} erreicht. Daraus ergibt sich für Blei

$$2\pi r_1 B_{\text{cth}} = \mu_0 I_c$$

$$I_c = \frac{2\pi r_1}{\mu_0} B_{\text{cth}} = \frac{2\pi \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} 80 \times 10^{-3} \text{ A} = 40 \text{ A}. \quad (\text{A13.1.7})$$

Wäre dieser Strom gleichmäßig über den Drahtquerschnitt verteilt, ergäbe sich eine mittlere kritische Stromdichte von

$$\langle J_c \rangle = \frac{I_c}{\pi r_1^2} = \frac{40}{\pi (10^{-4})^2} \text{ A/m}^2 = 6.4 \times 10^8 \text{ A/m}^2. \quad (\text{A13.1.8})$$

In Wirklichkeit fließt der Strom aber nur in einer dünnen Oberflächenschicht der Dicke λ_L , wodurch sich die tatsächliche kritische Stromdichte von Blei ($\lambda_L = 40 \text{ nm}$) zu

$$J_c = \frac{B_{\text{cth}}}{\mu_0 \lambda_L} = \frac{80 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \cdot 4 \times 10^{-8}} \text{ A/m}^2 = 8 \times 10^{11} \text{ A/m}^2 \quad (\text{A13.1.9})$$

ergibt. Bei dieser Abschätzung haben wir noch nicht berücksichtigt, dass mit zunehmender Stromdichte der supraleitende Ordnungsparameter reduziert wird. Würden wir dies in einer Behandlung im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie tun, so erhielten wir die um den Faktor 0.54 reduzierte kritische Stromdichte.

- (c) Die Zahl der Flussquanten innerhalb des Rings können wir grob zu

$$N \simeq \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\pi r_0^2 B_z}{\Phi_0} = \frac{\pi \cdot (10^{-3})^2 \cdot 10^{-3}}{2 \times 10^{-15}} = 1.6 \times 10^6 \quad (\text{A13.1.10})$$

abschätzen, wenn wir vereinfachend annehmen, dass $B_z = 1 \text{ mT}$ über die gesamte Fläche der Leiterschleife homogen ist.

- (d) Falls der supraleitende Ring einen endlichen Widerstand besitzen würde, sollte der Ringstrom zeitlich mit einer L/R -Zeitkonstante abklingen:

$$I_s(t) = I_s(0) e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (\text{A13.1.11})$$

Hierbei ist $L \approx \mu_0 A / 2\pi r_0 \simeq 60 \text{ pH}$ die geometrische Induktivität des Rings. Aus $I_s(t)/I_0 = 0.95$ für $t = 1 \text{ Jahr}$ erhalten wir für die obere Grenze des ohmschen Widerstands

$$R = -\frac{\ln 0.95 \cdot L}{t} = -\frac{\ln 0.95 \cdot 60 \times 10^{-12}}{3.15 \times 10^7} \Omega \approx 10^{-19} \Omega. \quad (\text{A13.1.12})$$

Wir sehen, dass wir durch das Messen des zeitlichen Abklingens des Ringstromes eine extrem hohe Auflösung bezüglich der oberen Schranke für einen eventuell vorhandenen Widerstand erhalten. In einem einfachen Transportexperiment, bei dem wir einen Strom über einen Supraleiter schicken und den Widerstandsabfall über den Supraleiter messen, ist die Auflösung wesentlich geringer. Benutzen wir einen Strom von 10 A und ein Voltmeter mit einer guten Auflösung von 1 nV , so liegt die obere Schranke für den Widerstand bei nur $R = 10^{-10} \Omega$.

A13.2 Magnetisierung eines Supraleiters

Für den Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte \mathbf{B} , Magnetfeld \mathbf{H} und Magnetisierung \mathbf{M} gilt

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi\mathbf{H}) = \mu_0\mathbf{H}(1 + \chi).$$



Für einen Supraleiter gilt aufgrund des perfekten Diamagnetismus $\chi = -1$. Im einfachen Fall eines unendlich langen Zylinders mit externem Feld $\mathbf{H}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_{\text{ext}}/\mu_0$ parallel zur Zylinderachse können wir Entmagnetisierungseffekte vernachlässigen und für das lokale Feld im Inneren des Supraleiters gilt $\mathbf{H}_{\text{lok}} = \mathbf{H}_{\text{ext}}$, so dass für die lokale Flussdichte im Inneren des Supraleiters $\mathbf{B}_i = 0$ gilt. Im Fall eines endlichen Entmagnetisierungsfaktors N gilt

$$\mathbf{H}_{\text{lok}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_N = \mathbf{H}_{\text{ext}} - N\mathbf{M}.$$

Dabei ergibt sich der Entmagnetisierungsfaktor N aus der Lösung des Randwertproblems $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Für einen langen Zylinder oder eine dünne planparallele Platte parallel zu \mathbf{H}_{ext} gilt $N = 0$, für eine Kugel $N = 1/3$ und einen Zylinder bzw. eine Platte senkrecht zum Feld $N = 1/2$ bzw. $N = 1$.

- Wie sieht N qualitativ für einen Zylinder aus? Welche Probengeometrie ist für quantitative Messungen der Magnetisierung eines Supraleiters geeignet?
- Berechnen Sie \mathbf{H}_{lok} , \mathbf{B}_i und \mathbf{M} für eine Kugel als Funktion von χ und \mathbf{H}_{ext} .
- Wie könnte eine realistische Messkonfiguration zur Bestimmung von χ aussehen? Wie erhält man χ für eine homogene isotrope Probe mit Entmagnetisierungsfaktor N aus den gemessenen Größen?
- Diskutieren Sie die Bedeutung von \mathbf{H} und \mathbf{B} anhand einer zylinderförmigen supraleitenden Probe, die sich in einer langen Spule befindet. Vernachlässigen Sie dabei Entmagnetisierungseffekte.
- Wie groß ist die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}_{\text{ext}}(r = R)$ unmittelbar außerhalb einer supraleitenden Kugel im Meißner-Zustand an den Polen und am Äquator?
- Berechnen Sie die magnetische Flussdichte außerhalb einer supraleitenden Kugel im Meißner-Zustand in Kugelkoordinaten. Benutzen Sie hierzu

$$\mathbf{B}(r \geq R) = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{ext}} + |\mu_0 \mathbf{H}_{\text{ext}}| \frac{R^3}{2} \nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right).$$

Lösung

Entmagnetisierung und Entmagnetisierungsfaktor: Bevor wir mit der Lösung der Aufgabe beginnen, definieren wir den Entmagnetisierungsfaktor N . Die lokale Feldstärke \mathbf{H}_{lok} im Innern eines magnetisierten Körpers ist nur in dem Spezialfall, dass die permeable Materie das magnetische Feld vollkommen ausfüllt (z. B. in einer ringförmigen oder unendlich langen Spule), identisch zur Vakuumfeldstärke \mathbf{H}_{ext} . Füllt das Material dagegen das Feld nur längs eines Teils der Feldlinien aus, so bilden sich an den freien Enden des eingebrachten Körpers „magnetische Pole“ aus, von denen rückläufige Feldlinien ausgehen. Je nach Vorzeichen der Magnetisierung \mathbf{M} bzw. der magnetischen Suszeptibilität χ schwächen oder verstärken sie das ursprüngliche Vakuumfeld \mathbf{H}_{ext} (siehe hierzu Abb. 13.2). Diese Erscheinung bezeichnen wir als *Entmagnetisierung*. Die Stärke der Entmagnetisierung hängt einerseits von der im permeablen Material induzierten Magnetisierung \mathbf{M} ab und andererseits von der geometrischen Form des Körpers. Im Allgemeinen ist sowohl Betrag und Richtung der Magnetisierung, als auch der durch die geometrische Form bestimmte Entmagnetisierungsfaktor eine komplizierte Raumfunktion. Nur für den Spezialfall einer gleichmäßig magnetisierten Probe mit der Form eines Rotationsellipsoiden ist das Entmagnetisierungsfeld ebenfalls

gleichmäßig. In diesem Fall können wir den Einfluss der Entmagnetisierung einfach durch das Entmagnetisierungsfeld

$$\mathbf{H}_N = -N\mathbf{M} \quad (\text{A13.2.1})$$

beschreiben. Für die lokale Feldstärke \mathbf{H}_{lok} im Innern des magnetisierten Körpers erhalten wir dann

$$\mathbf{H}_{\text{lok}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_N = \mathbf{H}_{\text{ext}} - N\mathbf{M}.$$

Der Entmagnetisierungsfaktor N hängt nur noch von der geometrischen Form des homogen magnetisierten Körpers ab. Er ist im allgemeinen Fall durch einen Tensor 2. Stufe gegeben:

$$\begin{pmatrix} H_{N,x} \\ H_{N,y} \\ H_{N,z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} N_{xx} & N_{xy} & N_{xz} \\ N_{yx} & N_{yy} & N_{yz} \\ N_{zx} & N_{zy} & N_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}.$$

Entlang der Hauptachsen eines Rotationsellipsoids sind \mathbf{H}_N und \mathbf{M} kollinear. In der Komponentendarstellung treten nur noch drei voneinander verschiedene Entmagnetisierungsfaktoren N_a , N_b und N_c in Richtung der drei Hauptachsen a , b und c auf. Betrachten wir also ein Rotationsellipsoid und fallen dessen Hauptachsen mit den Achsen des verwendeten kartesischen Koordinatensystems zusammen, so ist der Entmagnetisierungstensor diagonal und es gilt

$$N_{xx} + N_{yy} + N_{zz} = N_a + N_b + N_c = 1. \quad (\text{A13.2.2})$$

Es ist gängige Praxis, einen Entmagnetisierungsfaktor auch für die Beschreibung der internen Felder von Körpern (z. B. Zylinder, Scheiben) zu benutzen, die keine Rotationsellipsoide sind und deshalb kein gleichmäßiges Entmagnetisierungsfeld besitzen. Man nähert die Form dieser Körper dann mit Rotationsellipsoiden an.

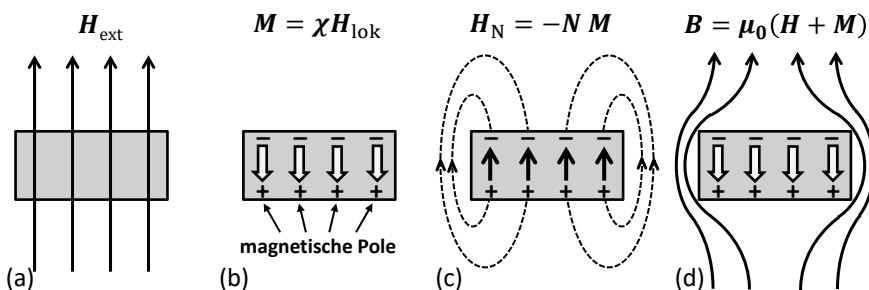


Abb. 13.2: (a) Eine diamagnetische Probe mit magnetischer Suszeptibilität $\chi < 0$ wird in ein homogenes externes Magnetfeld \mathbf{H}_{ext} gebracht. (b) In der Probe wird eine Magnetisierung $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}_{\text{lok}}$ induziert, die wegen $\chi < 0$ antiparallel zum lokal wirkenden Feld orientiert ist. (c) Aufgrund der endlichen Probengröße entstehen an der Probenoberfläche magnetische Pole, die zum Entmagnetisierungsfeld \mathbf{H}_N führen, das antiparallel zur Magnetisierung steht und dessen Größe von der Form der Probe abhängt. (d) Für einen perfekten Diamagneten ($\chi = -1$) verschwindet die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}_i = \mu_0 (\mathbf{H}_{\text{lok}} + \mathbf{M})$ im Inneren der Probe. Die Flussdichte im Außenraum entsteht durch die Überlagerung des homogenen angelegten Felds \mathbf{H}_{ext} mit dem Streufeld aufgrund der magnetischen Oberflächenpole.

- (a) Wir betrachten nun einen Zylinder, den wir durch einen Rotationsellipsoiden annähern, um seinen Entmagnetisierungsfaktor für verschiedene Grenzfälle abzuschätzen. Für einen Zylinder mit $a \geq b = c$ und a parallel zu \mathbf{B}_{ext} muss nach (A13.2.2) der Entmagnetisierungsfaktor zwischen $N_a = N_{xx} = 0$ für $a \gg b, c$ und $N_a = N_{xx} = 1/3$ für $a = b = c$ liegen. Für einen Zylinder mit $a \geq b = c$ und a senkrecht zu \mathbf{B}_{ext} muss der entsprechende Entmagnetisierungsfaktor zwischen $N_b = N_{yy} = N_c = N_{zz} = 1/3$ für $a = b = c$ und $N_b = N_{yy} = N_c = N_{zz} = 1/2$ für $a \gg b, c$ liegen. Ist im letzteren Fall $b \neq c$, so wird $N_b \neq N_c$. Ist $c \ll b$ und ist c parallel zu \mathbf{B}_{ext} , so ergibt sich $N_c = N_{zz} = 0$; für c senkrecht zu \mathbf{B}_{ext} erhalten wir $N_b = N_{yy} = 1$. Für quantitative Messungen der Magnetisierung ist eine Probengeometrie mit $N = 0$ optimal. Dies entspricht einem langen dünnen Zylinder mit $a \gg b, c$ und \mathbf{B}_{ext} parallel zu a .
Wir sehen leicht, dass sich wegen $a = b = c$ für eine Kugel aus (A13.2.2) $N_{xx} = N_{yy} = N_{zz} = N = 1/3$ ergibt. Eine planparallele dünne Platte mit c senkrecht zur Platte können wir mit einem Rotationsellipsoiden mit $a, b \gg c$ approximieren. Für \mathbf{B}_{ext} parallel zur Platte erhalten wir $N_{xx} = N_{yy} = 0$, für \mathbf{B}_{ext} senkrecht zur Platte erhalten wir $N_{zz} = 1$.
- (b) Bringen wir eine magnetisch isotrope Kugel mit magnetischer Suszeptibilität χ in ein homogenes externes Magnetfeld \mathbf{H}_{ext} , so magnetisieren wir die Kugel auf (siehe Abb. 13.3). Die Magnetisierung ist allerdings nicht proportional zu \mathbf{H}_{ext} , sondern zum lokal wirkenden Magnetfeld \mathbf{H}_{lok} . Es gilt also

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}_{\text{lok}} = (\mu - 1) \mathbf{H}_{\text{lok}}. \quad (\text{A13.2.3})$$

Durch die endliche Magnetisierung der Kugel entstehen an ihrer Oberfläche magnetische Pole die zu einem Entmagnetisierungsfeld \mathbf{H}_N führen. Je nach Vorzeichen der Magnetisierung \mathbf{M} bzw. der magnetischen Suszeptibilität χ schwächt oder verstärkt das Entmagnetisierungsfeld das ursprüngliche äußere Vakuumfeld \mathbf{H}_{ext} (siehe hierzu

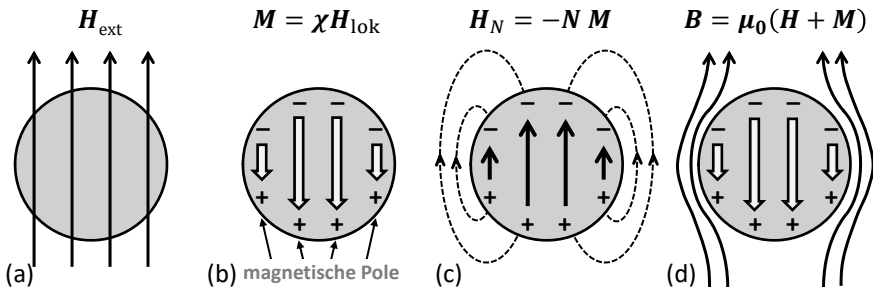


Abb. 13.3: (a) Eine supraleitende Kugel mit magnetischer Suszeptibilität $\chi = -1$ wird in ein homogenes externes Magnetfeld \mathbf{H}_{ext} gebracht. (b) In der Probe wird eine homogene Magnetisierung $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}_{\text{lok}} = -\frac{3}{2} \mathbf{H}_{\text{ext}}$ induziert, die wegen $\chi = -1$ antiparallel zum lokal wirkenden Feld orientiert ist. (c) Aufgrund der auf der Kugeloberfläche entstehenden magnetischen Pole mit Flächendichte $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \mathbf{\hat{e}}_n$ ($\mathbf{\hat{e}}_n$ ist der Einheitsvektor senkrecht auf der Kugeloberfläche) resultiert ein Entmagnetisierungsfeld $\mathbf{H}_N = -N \mathbf{M} = \frac{1}{3} \frac{3}{2} \mathbf{H}_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_{\text{ext}}$ antiparallel zur Magnetisierung. (d) Die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}_i = \mu_0(\mathbf{H}_{\text{lok}} + \mathbf{M})$ verschwindet im Inneren der Probe. Die Flussdichte im Außenraum entsteht durch die Überlagerung des homogenen angelegten Felds \mathbf{H}_{ext} mit dem Streufeld aufgrund der magnetischen Oberflächenpole.

Abb. 13.2). Für das lokal im Inneren der Kugel wirkende Feld erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\text{lok}} &= \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_N \\ &= \mathbf{H}_{\text{ext}} - N\mathbf{M} = \mathbf{H}_{\text{ext}} - N\chi\mathbf{H}_{\text{lok}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} - N(\mu - 1)\mathbf{H}_{\text{lok}}.\end{aligned}\quad (\text{A13.2.4})$$

Auflösen nach \mathbf{H}_{lok} ergibt

$$\mathbf{H}_{\text{lok}} = \frac{1}{1 + N\chi} \mathbf{H}_{\text{ext}} = \frac{1}{1 + N(\mu - 1)} \mathbf{H}_{\text{ext}}. \quad (\text{A13.2.5})$$

Wir sehen, dass für eine supraleitende Kugel ($N = 1/3$, $\chi = -1$) das lokale Feld $\mathbf{H}_{\text{lok}} = \frac{3}{2}\mathbf{H}_{\text{ext}}$ beträgt. Setzen wir (A13.2.5) in (A13.2.3) ein, so erhalten wir

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}_{\text{lok}} = \frac{\chi}{1 + N\chi} \mathbf{H}_{\text{ext}} = \frac{(\mu - 1)}{1 + N(\mu - 1)} \mathbf{H}_{\text{ext}}. \quad (\text{A13.2.6})$$

Für eine supraleitende Kugel ($N = 1/3$, $\chi = -1$) erhalten wir dann $\mathbf{M} = -\frac{3}{2}\mathbf{H}_{\text{ext}}$. Ohne Berücksichtigung der Entmagnetisierungseffekte würden wir also die scheinbare Suszeptibilität $\tilde{\chi} = -3/2$ bestimmen. Mit den Ausdrücken für \mathbf{H}_{lok} und \mathbf{M} ergibt sich die magnetische Flussdichte \mathbf{B}_i im Inneren der Probe zu

$$\mathbf{B}_i = \frac{1 + \chi}{1 + N\chi} \mathbf{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu}{1 + N(\mu - 1)} \mathbf{B}_{\text{ext}}. \quad (\text{A13.2.7})$$

Für eine supraleitende Kugel ($N = 1/3$, $\chi = -1$) erhalten wir $\mathbf{B}_i = 0$, wie wir es für einen Supraleiter erwarten (siehe hierzu Abb. 13.3).

- (c) Eine realistische Messkonfiguration ist in Abb. 13.4 gezeigt. Zur Messung der Probenmagnetisierung befindet sich innerhalb des Solenoids eine Messspule (nicht gezeigt), welche die Probe umgibt und mit einem Voltmeter verbunden ist. Wenn das vom Solenoid erzeugte Feld $\mathbf{B}_{\text{ext}}(t)$ langsam – z. B. mit einer Frequenz von einigen 10 Hz (quasistatischer Limes) – oszilliert, können wir die erzeugte Flussdichteänderung $\dot{\mathbf{B}}_i(t)$ in der Probe als induzierte Spannung $V_{\text{ind}}(t) = -\partial\Phi_i/\partial t \propto -\partial B_i/\partial t$ messen. Das Integral $\int V_{\text{ind}}(t)dt \propto -B_i$ kann dann durch Kalibrierung in eine quantitative Beziehung zu

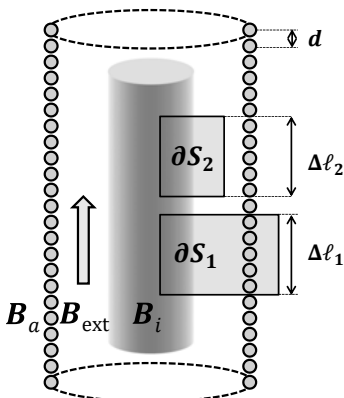


Abb. 13.4: Zylinderförmige supraleitende Probe in einer unendlich langen Spule.

$B_i(t)$ gebracht werden. Mit dem obigen Ausdruck für B_i können wir dann die magnetische Suszeptibilität χ bei bekanntem Entmagnetisierungsfaktor N der Probe bestimmen. Auflösen von (A13.2.7) nach χ ergibt

$$\chi = \frac{B_i - B_{\text{ext}}}{B_{\text{ext}} - NB_i} . \quad (\text{A13.2.8})$$

Wir weisen darauf hin, dass die obigen Gleichungen exakt nur für homogene isotrope Materialien mit einer Form (z. B. Rotationsellipsoid, unendlich dünne planparallele Platte, unendlich langer Zylinder) gelten, für die eine homogene Magnetisierung der Probe parallel zum externen Feld vorliegt. Für komplizierte Probenformen und bei Vorliegen einer magnetischen Anisotropie können die Zusammenhänge wesentlich komplizierter sein.

- (d) Wir wollen nun einige grundlegende Überlegungen zur Unterscheidung zwischen \mathbf{H} und \mathbf{B} anhand der in Abb. 13.4 gezeigten Messkonfiguration machen. Mit $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ können wir allgemein schreiben

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{J}_{\text{sp}} + \mathbf{J}_{\text{m}}) . \quad (\text{A13.2.9})$$

Wir sehen, dass die Rotation von \mathbf{B} mit der Gesamtstromdichte verbunden ist, die sich aus der üblichen elektrischen Stromdichte \mathbf{J}_{sp} – z. B. im elektrischen Leiter einer Spule – und einer „Magnetisierungsstromdichte“ \mathbf{J}_{m} zusammensetzt, die mit einem magnetisierten Medium assoziiert ist. Die Rotation von \mathbf{H} ist dagegen nur mit der in der Spule fließenden Stromdichte \mathbf{J}_{sp} verbunden, die von einer äußeren Quelle erzeugt wird. Für das Flächenintegral über die von einem geschlossenen Pfad ∂S umschlossenen Fläche S gilt deshalb

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{J}_{\text{sp}} + \mathbf{J}_{\text{m}}) \quad (\text{A13.2.10})$$

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_{\text{sp}} . \quad (\text{A13.2.11})$$

Hierbei haben wir das Stokessche Theorem verwendet. Wir wenden diesen Sachverhalt nun auf die in Abb. 13.4 gezeigte Konfiguration an. Um die Diskussion einfach zu halten, vernachlässigen wir Entmagnetisierungseffekte an den Probenenden ($N = 0$), d. h. wir gehen von einer unendlich langen Probe aus. Für das Flächenintegral über die vom geschlossenen Pfad ∂S_1 umschlossene Fläche S_1 gilt

$$\int_{S_1} d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \oint_{\partial S_1} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int_{S_1} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{J}_{\text{sp}} + \mathbf{J}_{\text{m}}) . \quad (\text{A13.2.12})$$

Die Stromdichte \mathbf{J}_{sp} ist mit dem in der Spule fließenden Strom I_0 verbunden, während die Stromdichte \mathbf{J}_{m} mit der Magnetisierung des Supraleiters, also mit der im Supraleiter fließenden Suprastromdichte \mathbf{J}_s verknüpft ist. Dies ist eine wichtige Feststellung. Da es sich bei der Suprastromdichte um eine makroskopische Stromdichte und nicht wie bei anderen magnetischen Materialien um mikroskopische atomare Ströme handelt, wird oft vergessen, dass es sich bei \mathbf{J}_s um eine Magnetisierungsstromdichte handelt.

Mit dem Spulenstrom I_0 und dem Windungsabstand d ergibt sich aus Gleichung (A13.2.12)

$$(B_i - B_a) \Delta \ell_1 = \mu_0 \left[J_s \lambda_L \Delta \ell_1 + I_0 \frac{\Delta \ell_1}{d} \right]. \quad (\text{A13.2.13})$$

Dabei haben wir angenommen, dass der Suprastrom nur in einer Oberflächenschicht der Dicke λ_L (Londonsche Eindringtiefe) fließt. Da im Meißner-Zustand $B_i = 0$ und ferner außerhalb der unendlich langen Spule $B_a = 0$, finden wir

$$J_s = -\frac{I_0}{d\lambda_L}. \quad (\text{A13.2.14})$$

Da für $N = 0$ das lokale Feld H_i im Innern des Supraleiters und das äußere Feld H_{ext} gleich sind [vergleiche (A13.2.5)], folgt

$$H_i = H_{\text{ext}} = \frac{I_0}{d}. \quad (\text{A13.2.15})$$

Wenden wir das Ampèresche Durchflutungsgesetz auf die \mathbf{H} -Felder an, so erhalten wir nach Gleichung (A13.2.11) für den Integrationsweg ∂S_1

$$\oint_{\partial S_1} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{S_1} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_{\text{sp}} \quad \Rightarrow \quad H_i = \frac{I_0}{d}. \quad (\text{A13.2.16})$$

Wir erhalten also wiederum das für $N = 0$ erwartete Ergebnis $H_i = H_{\text{ext}}$. Würden wir dagegen auf der rechten Seite von Gleichung (A13.2.16) die Gesamtstromdichte $\mathbf{J}_{\text{sp}} + \mathbf{J}_{\text{m}}$ verwenden (dies würde bedeuten, dass wir J_s nicht als Magnetisierungsstromdichte interpretieren), so würden wir das paradoxe Ergebnis

$$H_i = J_s \lambda_L + \frac{I_0}{d} = 0 \quad (\text{A13.2.17})$$

erhalten. Wir würden in gleicher Weise ein paradoxes Ergebnis erhalten, wenn wir in Gleichung (A13.2.10) auf der rechten Seite anstelle der Gesamtstromdichte nur die Spulenstromdichte \mathbf{J}_{sp} verwenden würden. Da außerhalb der langen Spule $B_a = 0$ ist, würde sich das für einen Supraleiter erstaunliche Ergebnis $B_i \neq 0$ ergeben.

- (e) Mit den bereits gemachten Überlegungen erhalten wir folgendes Bild von der magnetischen Flussdichte unmittelbar außerhalb einer Kugel: Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ wissen wir, dass die Normalkomponente B_n der magnetischen Flussdichte auf der Oberfläche stetig sein muss. Das bedeutet, dass $\mathbf{B}(r = R, \theta = 0)$ an den Polen der Kugel Null ist. Nach Aufgabenteil (b) ist die Feldstärke im Inneren ortsunabhängig und gegeben durch

$$\mathbf{H}_{\text{lok}} = \frac{\mathbf{H}_{\text{ext}}}{1 + N\chi} \stackrel{N=1/3, \chi=-1}{=} \frac{\mathbf{H}_{\text{ext}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\mathbf{H}_{\text{ext}}}{2/3} = \frac{3}{2} \mathbf{H}_{\text{ext}}. \quad (\text{A13.2.18})$$

Da die Tangentialkomponente H_t von \mathbf{H} stetig sein muss, gilt am Äquator der Kugel $\mathbf{B}(r = R, \theta = \pi/2) = \frac{3}{2} \mathbf{B}_{\text{ext}}$.

- (f) Für die magnetische Flussdichte außerhalb einer supraleitenden Kugel findet man in Büchern den Ausdruck

$$\mathbf{B}(r \geq R) = \mathbf{B}_{\text{ext}} + B_{\text{ext}} \frac{R^3}{2} \nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right). \quad (\text{A13.2.19})$$

Dabei ist $B_{\text{ext}} = |\mathbf{B}_{\text{ext}}|$. Der Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten (r, θ, φ) und den kartesischen Koordinaten (x, y, z) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A13.2.20})$$

Der Gradient lautet in Kugelkoordinaten

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{A13.2.21})$$

Zuerst müssen wir \mathbf{B}_{ext} in Kugelkoordinaten umrechnen. Wir erhalten

$$\mathbf{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}} (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta). \quad (\text{A13.2.22})$$

Wegen der Symmetrie des Problems gibt es keine Projektion auf die \mathbf{e}_φ -Achse. Ferner ist \mathbf{e}_θ antiparallel zur \mathbf{e}_z -Achse, was in einem negativen Vorzeichen des \mathbf{e}_θ -Terms resultiert. Mit den Ableitungen nach r und θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) &= - \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) &= - \left(\frac{\sin \theta}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A13.2.23})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} B_r &= B_{\text{ext}} \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \\ B_\theta &= -B_{\text{ext}} \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{A13.2.24})$$

Für $r = R$ gilt $B_r \equiv 0$ und $B_\theta = -\frac{3}{2} B_{\text{ext}} \sin \theta$. Die magnetische Flussdichte am Äquator ist also wie oben schon gesehen um 50% überhöht. Das Feld im Außenraum ist eine Superposition des angelegten Feldes $B_{\text{ext}} = \mu_0 H_{\text{ext}}$ und des magnetischen Moments der Probe. Letzteres entspricht einem Dipol im Zentrum der Kugel mit $\mu_0 \mathbf{m} = \mu_0 (4\pi/3) R^3 \mathbf{M} = -2\pi R^3 \mathbf{B}_{\text{ext}}$.

Wegen $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ (siehe oben) können wir \mathbf{H} von einem skalaren Potenzial ableiten, also $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$ schreiben. Mit den gegebenen Randbedingungen gilt dann für das Außenfeld

$$\Phi_m(r, \theta) = -\frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0} \cos \theta \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right). \quad (\text{A13.2.25})$$

Der erste Term ist für das externe Feld in z -Richtung, der zweite das Fernfeld des Dipols, das von den Supraströmen an der Oberfläche herrührt, verantwortlich.

A13.3 Meißner-Ochsenfeld-Effekt und London-Gleichungen



Wir bringen einen (genügend dicken) Supraleiter oberhalb seiner Sprungtemperatur in ein äußeres Magnetfeld $B_{\text{ext}} = \mu_0 H_{\text{ext}}$ und kühlen ihn unter seine Sprungtemperatur T_c ab. Wir beobachten, dass unterhalb der Sprungtemperatur der magnetische Fluss aus dem Inneren des Supraleiters verdrängt wird. Diesen Effekt bezeichnet man nach seinen Entdeckern als Meißner-Ochsenfeld-Effekt. Er kann nicht alleine durch die Annahme einer perfekten Leitfähigkeit erklärt werden. Das heißt, ein Supraleiter ist mehr als ein idealer Leiter.

- (a) Zeigen Sie, dass die magnetische Suszeptibilität im supraleitenden Zustand $\chi = -1$ beträgt.
- (b) Versuchen sie, den Meißner-Ochsenfeld-Effekt im Bild eines idealen Leiters zu erklären. Betrachten sie dazu die Bewegungsgleichung

$$m_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = q_s \mathbf{E}$$

der "supraleitenden" Ladungsträger mit Ladung q_s , Masse m_s und Dichte n_s in einem idealen Leiter (keine Reibungskraft) bei Vorhandensein eines elektrischen Feldes \mathbf{E} . Hierbei ist \mathbf{v}_s die Geschwindigkeit der Ladungsträger, die mit der Stromdichte über $\mathbf{J}_s = q_s n_s \mathbf{v}_s$ verbunden ist. Aus dem Faradayschen Induktionsgesetzes können wir einen Ausdruck der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} [f(\mathbf{J}_s) + g(\mathbf{b})] = 0$$

mit zwei Funktionen f und g ableiten, die von \mathbf{J}_s bzw. der inneren magnetischen Flussdichte $\mathbf{b} = \mu_0(\mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{M})$ abhängen. Diskutieren Sie die magnetische Flussdichte \mathbf{b} und Stromdichten \mathbf{J}_s innerhalb des idealen Leiters und beschreiben Sie, welche Lösung dieser Gleichung die experimentellen Beobachtungen in einem Supraleiter physikalisch sinnvoll beschreibt.

- (c) Aus der experimentellen Beobachtung des Meißner-Ochsenfeld-Effekts können wir schließen, dass im Supraleiter nicht nur die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte, sondern diese selbst verschwindet. Deshalb muss

$$f(\mathbf{J}_s) + g(\mathbf{b}) = 0 \quad .$$

gelten (2. London-Gleichung) und nicht nur $\frac{\partial}{\partial t} [f(\mathbf{J}_s) + g(\mathbf{b})] = 0$. Lösen Sie die entsprechende Differentialgleichung für den Spezialfall eines halbbunendlich ausgedehnten Supraleiters, der den Halbraum $x \geq 0$ einnimmt. Definieren Sie eine charakteristische Eindringtiefe λ_L (die sog. Londonsche Eindringtiefe) des Magnetfeldes. Welche Bedeutung besitzt λ_L ?

Lösung

- (a) Für die magnetische Flussdichte im Inneren eines Supraleiters gilt $\mathbf{b}_i = 0$. Für einen langen Zylinder, in dem Entmagnetisierungseffekte vernachlässigt werden können, folgt wegen $\mathbf{H}_{\text{lok}} = \mathbf{H}_{\text{ext}}$ für die Magnetisierung $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}_{\text{lok}} = \chi \mathbf{H}_{\text{ext}}$. Für die Flussdichte im

Inneren des Supraleiters ergibt sich damit

$$\mathbf{b}_i = \mu_0 (\mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{ext}} (1 + \chi) = 0, \quad (\text{A13.3.1})$$

also $\chi = -1$. Ein Supraleiter ist daher ein idealer Diamagnet.

- (b) Die im Folgenden vorgestellte phänomenologische Beschreibung der Supraleitung wurde zuerst von London und London (1935) vorgeschlagen. Wir gehen von einem Leiter mit einem verschwindenden spezifischen Widerstand $\rho = 0$ aus. Da $\rho \propto 1/\tau$ ist dies gleichbedeutend mit der Annahme einer unendlich langen Streuzeit $\tau \rightarrow \infty$. In der klassischen Bewegungsgleichung der supraleitenden Ladungsträger in einem äußeren elektrischen Feld kann deshalb der Reibungsterm $m_s v/\tau$ weggelassen werden und wir erhalten

$$m_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = q_s \mathbf{E}. \quad (\text{A13.3.2})$$

Mit der Stromdichte $\mathbf{J}_s = q_s n_s \mathbf{v}_s$ folgt daraus sofort die so genannte 1. London-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}_s = \frac{n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{E}. \quad (\text{A13.3.3})$$

Die 1. London-Gleichung besagt, dass nicht die Stromdichte proportional zum elektrischen Feld ist (Ohmsches Gesetz) sondern ihre Zeitableitung. Mittels des Faradayschen Induktionsgesetzes $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{b}/\partial t$ erhalten wir aus (A13.3.3) sofort die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \mathbf{J}_s + \frac{q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{b} \right) = 0, \quad (\text{A13.3.4})$$

also $\frac{\partial}{\partial t} [f(\mathbf{J}_s) + g(\mathbf{b})] = 0$ mit den Funktionen $f(\mathbf{J}_s) = \nabla \times \mathbf{J}_s$ und $g(\mathbf{b}) = \frac{q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{b}$. Gleichung (A13.3.4) beschreibt das Verhalten eines idealen Leiters mit $\rho = 0$ vollkommen korrekt, z.B. dass der magnetische Fluss durch eine Leiterschleife mit perfekter Leitfähigkeit zeitlich konstant bleibt (vergleiche hierzu Aufgabe A13.1). Sie beschreibt allerdings noch nicht den Meißner-Ochsenfeld-Effekt, also den idealen Diamagnetismus eines Supraleiters bzw. die vollkommene Verdrängung der magnetischen Flussdichte aus dem Inneren eines Supraleiters.

Wir betrachten nun verschiedene Spezialfälle möglicher Lösungen für die magnetische Flussdichte \mathbf{b} :

- $\mathbf{b} = \text{const}$: Ein statisches Magnetfeld, das von Null verschieden ist, führt gemäß $\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{J}_s$ zu einer zeitlich konstanten Stromdichte \mathbf{J}_s und erfüllt trivialerweise Gleichung (A13.3.4). Wir wissen allerdings, dass die magnetische Flussdichte im Inneren eines Supraleiters verschwindet. Somit wäre an den Rändern die Differenzierbarkeit nicht gegeben.
- $\mathbf{b} = 0$: Für diese Lösung müsste auch $\mathbf{J}_s = 0$ gelten. Dies ist allerdings in einem Supraleiter bei endlichem äußeren Feld nicht der Fall.
- $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \exp(-z)$: Ein exponentieller Abfall der magnetischen Flussdichte von der Oberfläche ins Innere der Probe hinein beschreibt die experimentellen Beobachtungen gut (siehe nachfolgende Teilaufgabe).

- (c) Die Integration von Gleichung (A13.3.4) liefert bei zeitlich konstanter Stromdichte und Flussdichte eine Integrationskonstante. Setzen wir diese gleich Null, erhalten wir unmittelbar die 2. London-Gleichung

$$f(\mathbf{J}_s) + g(\mathbf{b}) = 0, \quad (\text{A13.3.5})$$

bzw.

$$\nabla \times \mathbf{J}_s + \frac{q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{b} = 0. \quad (\text{A13.3.6})$$

Diese Gleichung beschreibt den Meißner-Ochsenfeld-Effekt richtig. Sie besagt, dass im supraleitenden Zustand nicht nur eine zeitliche Änderung der Flussdichte, sondern diese selbst verschwindet. Kühlen wir einen Supraleiter in einem konstantem Magnetfeld unter die Sprungtemperatur ab, so verdrängt er das Feld vollkommen. Ein idealer Leiter würde das nicht tun, er würde nur zeitliche Änderungen perfekt verdrängen. Für einen Supraleiter ist es also egal, ob wir zuerst das Magnetfeld einschalten und dann bei konstantem Feld abkühlen oder erst abkühlen und dann das Magnetfeld anschalten. Der Endzustand ist immer der gleiche (siehe Abb. 13.5b) und unabhängig von den Details des Weges, wie man zu diesem Endzustand gelangt. Der supraleitende Zustand ist deshalb eine thermodynamische Phase. Für einen idealen Leiter ist das nicht so. Kühlen wir zuerst ab und schalten wir dann das Magnetfeld ein, so wird die zeitliche Änderung (Einschalten) der Flussdichte abgeschirmt. Schalten wir allerdings das Magnetfeld zuerst ein und kühlen dann bei konstantem Magnetfeld ab, so ist die zeitliche Änderung der Flussdichte nach Erreichen des perfekt leitenden Zustands Null und der perfekte Leiter wird von der Flussdichte durchsetzt (siehe Abb. 13.5a).

Wir sehen, dass die supraleitende Stromdichte \mathbf{J}_s nicht wie beim Ohmschen Gesetz proportional zum elektrischen Feld \mathbf{E} sondern zum Vektorpotential \mathbf{A} ist:¹

$$\mathbf{J}_s = -\frac{q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{A}. \quad (\text{A13.3.7})$$

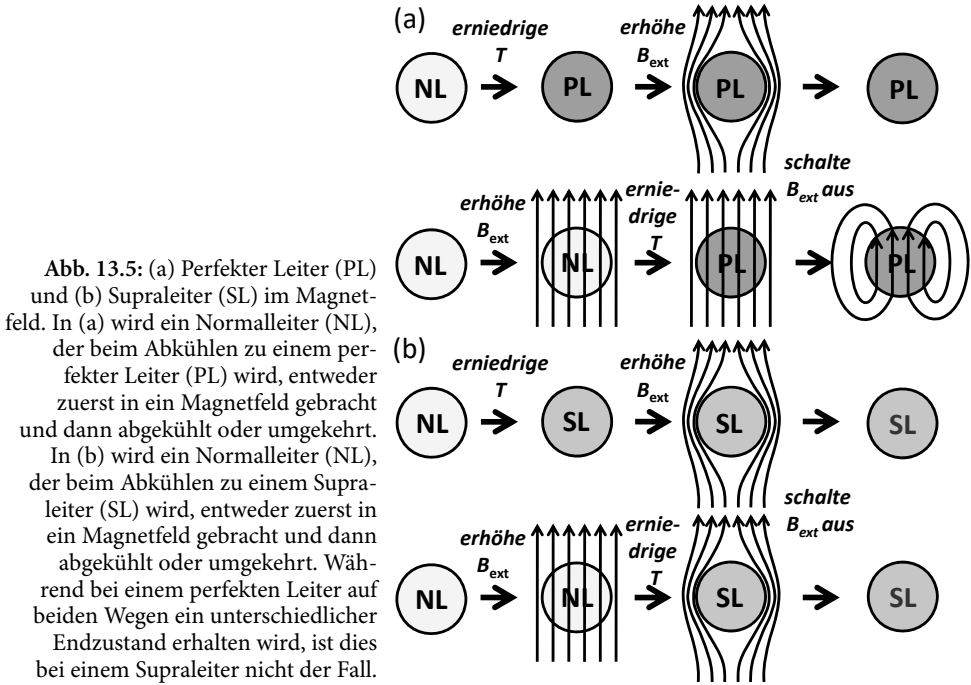
Bilden wir die Rotation der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{J}_s$ erhalten wir unter Benutzung von (A13.3.7)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) = -\frac{\mu_0 q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{b}. \quad (\text{A13.3.8})$$

Mit der Vektoridentität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \nabla^2 \mathbf{b}$ und $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\nabla^2 \mathbf{b} = \frac{\mu_0 q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{b}. \quad (\text{A13.3.9})$$

¹ Wir weisen darauf hin, dass dieser Zusammenhang nicht eichinvariant ist. Der eichinvariante Zusammenhang lautet $\mathbf{J}_s = -\frac{q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{A} + \frac{q_s n_s \hbar}{m_s} \nabla \theta$. Bilden wir die Rotation dieser Gleichung, so verschwindet die Rotation des Gradienten der skalaren Funktion $\theta(\mathbf{r}, t)$ und wir erhalten (A13.3.6).



Für einen halbumendlich ausgedehnten Supraleiter mit $x \geq 0$ und einem in z -Richtung angelegten Magnetfeld $B_{\text{ext}} = B_0$ führt dies zu

$$\partial_x^2 b_z - \frac{b_z}{\lambda_L^2} = 0 \quad (\text{A13.3.10})$$

mit der Londonschen Eindringtiefe λ_L

$$\lambda_L \equiv \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 q_s^2 n_s}}. \quad (\text{A13.3.11})$$

Die physikalisch relevante Lösung lautet

$$b_z(x) = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right). \quad (\text{A13.3.12})$$

Gleichung (A13.3.12) zeigt, dass das Magnetfeld im Inneren des Supraleiters exponentiell mit der charakteristischen Längenskala λ_L abklingt. Aus

$$\nabla^2 \mathbf{J}_s = \frac{\mu_0 q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{J}_s \quad (\text{A13.3.13})$$

folgt analog, dass nicht nur die magnetische Flussdichte, sondern auch die supraleitenden Stromdichte im Supraleiter exponentiell abklingt (siehe Abb. 13.6). Eine größenordnungsmaßige Abschätzung der Londonschen Eindringtiefe ergibt einige 10 nm. Bei einem makroskopischen Supraleiter mit Abmessungen im Zentimeterbereich können wir

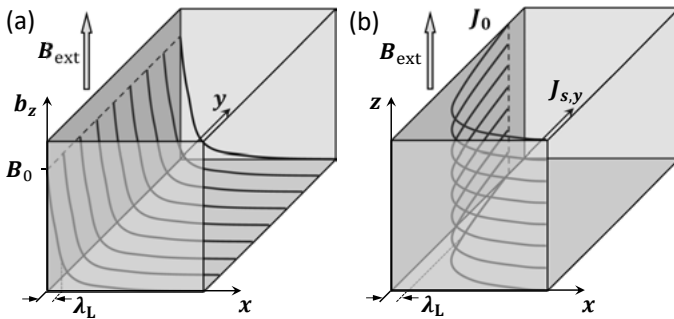


Abb. 13.6: Zur Diskussion der Londonschen Eindringtiefe: Exponentieller Abfall der magnetischen Flussdichte b_z (a) und der supraleitenden Stromdichte $J_{s,y}$ (b) im Inneren eines halbunendlich ausgedehnten Supraleiters als Funktion des Abstandes x von der Oberfläche. Das externe Magnetfeld ist hierbei in z -Richtung angelegt, der Supraleiter erstreckt sich im Halbraum $x \geq 0$.

also in guter Näherung sagen, dass die magnetische Flussdichte vollkommen aus dem Inneren verdrängt wird. Bei dünnen Filmen mit Schichtdicken im Bereich der Londonschen Eindringtiefe ist dies natürlich nicht mehr der Fall (siehe Aufgabe A13.4).

Wir haben gesehen, dass wir die Londonschen Gleichungen aus der klassischen Bewegungsgleichung für die "supraleitenden Ladungsträger" herleiten können, wenn wir den Reibungsterm vernachlässigen (perfekte Leitfähigkeit) und wenn wir annehmen, dass nicht nur zeitliche Änderungen der magnetischen Flussdichte sondern diese selbst im Inneren des Supraleiters verschwinden (Meißner-Effekt). Nach der Entwicklung der BCS-Theorie (1957) wurde klar, dass nicht einzelne Elektronen sondern Elektronenpaare – so genannte Cooper-Paare – den Strom in Supraleitern tragen. Wir können dies in unserer obigen Diskussion einfach berücksichtigen, indem wir $n_s = n/2$, $q_s = -2e$ und $m_s = 2m$ setzen.

A13.4 Das Eindringen eines Magnetfeldes in eine dünne Platte



Zeigen Sie, dass das Magnetfeld $b_z(x)$ im Inneren einer in der yz -Ebene unendlich ausgedehnten Platte der Dicke d mit $(-d/2 \leq x \leq d/2)$ ein Profil der Form

$$b_z(x) = B_0 \frac{\cosh(x/\lambda_L)}{\cosh(d/2\lambda_L)}$$

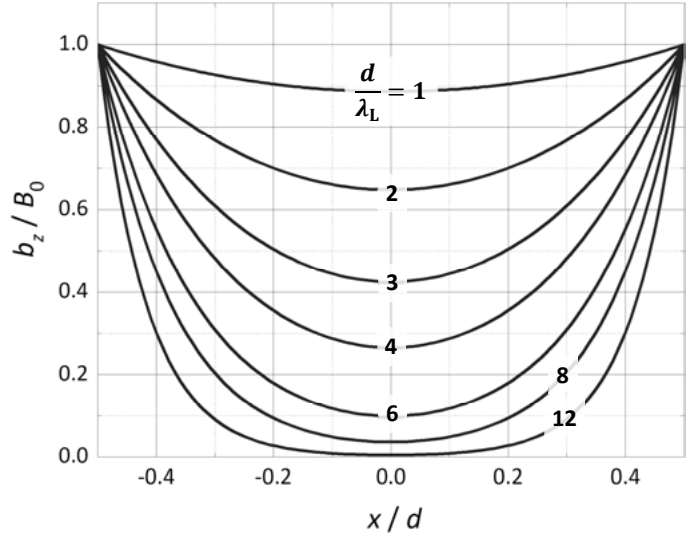
aufweist. Hierbei ist $B_0 = b_z(x = \pm d/2)$ das von außen parallel zur Platte angelegte Feld und λ_L die Londonsche Eindringtiefe.

Lösung

Wir starten von der Abschirmungsgleichung (A13.3.10)

$$\frac{\partial^2 b_z(x)}{\partial x^2} = \frac{b_z(x)}{\lambda_L^2} \quad (\text{A13.4.1})$$

Abb. 13.7: Feldverteilung $b_z(x)/B_0$ in einer dünnen supraleitenden Platte mit Dicke d für verschiedene Werte von λ_L/d . Das äußere Feld B_0 ist parallel zur Platte in z -Richtung angelegt.



und machen den Lösungsansatz

$$b_z(x) = e^{\kappa x} . \quad (\text{A13.4.2})$$

Einsetzen dieses Ansatzes liefert $\kappa^2 = \lambda_L^{-2}$ und somit

$$\kappa_{1,2} = \pm \frac{1}{\lambda_L} . \quad (\text{A13.4.3})$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung

$$b_z(x) = c_1 e^{\frac{x}{\lambda_L}} + c_2 e^{-\frac{x}{\lambda_L}} . \quad (\text{A13.4.4})$$

Die Randbedingungen $b_z(x = \pm d/2) = B_0$ liefern folgendes Gleichungssystem für c_1 und c_2 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{\frac{d}{2\lambda_L}} & e^{-\frac{d}{2\lambda_L}} \\ e^{-\frac{d}{2\lambda_L}} & e^{\frac{d}{2\lambda_L}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_0 \end{pmatrix} . \quad (\text{A13.4.5})$$

Die Inversion der Matrix \mathbf{M} ergibt

$$c_1 = c_2 = \frac{B_0}{2 \cosh\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right)} . \quad (\text{A13.4.6})$$

Damit lautet das Resultat für die Feldverteilung in der Platte:

$$b_z(x) = B_0 \frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda_L}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{2\lambda_L}\right)} . \quad (\text{A13.4.7})$$

Diese Feldverteilung ist in Abb. 13.7 für verschiedene Werte des Parameters λ_L/d dargestellt.

A13.5 Spezifische Wärmekapazität von Supraleitern



Wir betrachten die Supraleiter Al, Nb und Pb mit den in Tabelle 13.1 gegebenen charakteristischen Parametern.

Tabelle 13.1: Materialparameter von Al, Nb und Pb.

Material	T_c (K)	$B_{cth}(0)$ (mT)	$\Delta c/c_n$ exp.	$\Delta(0)$ (meV)	γ (mJ/(mol K ²))	M (g/mol)	ρ (g/cm ³)
Al	1.2	10	1.4	0.17	1.35	27.0	2.7
Nb	9.2	206	1.9	1.52	7.79	92.9	8.4
Pb	7.2	80	2.7	1.37	2.98	207.2	11.4

- Berechnen Sie den Sprung der spezifischen Wärmekapazität $\Delta c/c_n = (c_s - c_n)/c_n$ eines Supraleiters bei T_c , aus der Dichte der freien Energie. Hierbei sind c_s und c_n die spezifischen Wärmekapazitäten in der supraleitenden und normalleitenden Phase.
- Berechnen Sie $\Delta c/c_n$ für Aluminium, Niob und Blei aus dem kritischen Feld $B_{cth}(0)$ und T_c . Benutzen Sie dazu die Werte aus Tabelle 13.1.
- Nach der mikroskopischen (BCS) Theorie ist der Unterschied zwischen der Dichte der freien Enthalpien von Normal- und Suprazustand gegeben durch $\frac{1}{4V} D(E_F) \Delta^2(0)$. Dabei ist $D(E_F)$ die elektronische Zustandsdichte (für beide Spin-Richtungen) an der Fermi-Energie und $\Delta(0)$ die Energielücke des Supraleiters bei $T = 0$, die man z.B. aus dem Tieftemperaturverlauf von c_s , aus Tunnel- oder aus optischen Experimenten erhalten kann. Benutzen Sie den Sommerfeld-Ausdruck für c_n , um $\Delta c/c_n$ aus den mikroskopischen Größen zu berechnen.
- Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse von (b) und (c).

Lösung

- Mit dem Differential der inneren Energie, $dU = TdS - pdV + VB_{\text{ext}}dM$, wobei $VB_{\text{ext}}dM$ die an dem System verrichtete Magnetisierungsarbeit ist, und der freien Energie $F = U - TS$ erhalten wir das Differential der freien Energie zu

$$dF = -SdT - pdV + VB_{\text{ext}}dM. \quad (\text{A13.5.1})$$

Um die Terme $-pdV$ und $VB_{\text{ext}}dM$ vernachlässigen zu können, müssten wir Experimente bei konstantem Volumen und konstantem magnetischem Moment durchführen, was schwierig zu realisieren ist. Deshalb ist es günstiger, die freie Enthalpie $G = U - TS + pV - VMB_{\text{ext}}$ zu betrachten, deren Differential durch

$$dG = -SdT + Vdp - VdB_{\text{ext}} \quad (\text{A13.5.2})$$

gegeben ist. Führen wir das Experiment bei konstantem Druck und konstantem äußeren Feld durch, was leicht realisiert werden kann, so erhalten wir $dG = -SdT$ und damit

$$S = - \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_{p, B_{\text{ext}}}. \quad (\text{A13.5.3})$$

Für die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck und Magnetfeld ergibt sich

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{C_p}{V} = \frac{1}{V} \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_{p, B_{\text{ext}}} \stackrel{\delta T \rightarrow 0}{=} \frac{T}{V} \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{p, B_{\text{ext}}} \\ &= -\frac{T}{V} \left. \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right|_{p, B_{\text{ext}}} = -T \left. \frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \right|_{p, B_{\text{ext}}} . \end{aligned} \quad (\text{A13.5.4})$$

Hierbei haben wir die Enthalpiedichte $g = G/V$ benutzt.

Die Differenz der freien Enthalpiedichten im supraleitenden und normalleitenden Zustand ist gegeben durch

$$\Delta g(T) = g_s(0, T) - g_n(0, T) = -\frac{B_{\text{cth}}^2(T)}{2\mu_0} , \quad (\text{A13.5.5})$$

wobei B_{cth} das thermodynamische kritische Feld des Supraleiters ist. Mit Gleichung (A13.5.4) erhalten wir dann

$$\Delta c_p = c_{p,s} - c_{p,n} = \frac{T}{\mu_0} \left[B_{\text{cth}} \frac{\partial^2 B_{\text{cth}}}{\partial T^2} + \left(\frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} \right)^2 \right] . \quad (\text{A13.5.6})$$

Dieser Zusammenhang wird meist als *Rutgers-Formel* bezeichnet.² Für $T \rightarrow T_c$ können wir den ersten Term in der eckigen Klammer vernachlässigen, da $B_{\text{cth}} \rightarrow 0$. Benutzen wir $c_{p,n} = \gamma T$, wobei γ der Sommerfeld-Koeffizient ist, und die phänomenologische Temperaturabhängigkeit $B_{\text{cth}} = B_{\text{cth}}(0) [1 - (T/T_c)^2]$, so erhalten wir für $T = T_c$

$$\frac{\Delta c_p}{c_{p,n}} = \frac{c_{p,s} - c_{p,n}}{c_{p,n}} = \frac{1}{\gamma T_c} \frac{T_c}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2 = \frac{8}{\gamma T_c^2} \frac{B_{\text{cth}}^2(0)}{2\mu_0} . \quad (\text{A13.5.7})$$

- (b) Gleichung (A13.5.7) zeigt, dass wir einen Sprung in der spezifischen Wärmekapazität bei T_c erwarten. Dieser kann direkt kalorimetrisch gemessen werden. Andererseits können wir aber auch $B_{\text{cth}}(0)$ durch eine Magnetisierungsmessung bei sehr tiefen Temperaturen bestimmen und mit diesem gemessenen Wert den Sprung in der spezifischen Wärmekapazität bei $T = T_c$ berechnen. Letzteres wollen wir im Folgenden tun, wobei wir die in der Tabelle 13.1 angegebenen Werte für $B_{\text{cth}}(0)$, T_c und γ verwenden. Um die Berechnung durchzuführen, müssen wir zuerst alle Größen in SI-Einheiten umrechnen. Um den Sommerfeld-Koeffizienten in $\text{J}/(\text{m}^3 \text{K}^2)$ zu erhalten, müssen wir die in der Aufgabenstellung in $\text{mJ}/(\text{mol K}^2)$ angegebenen Werte zuerst mit 1000 multiplizieren, durch die Molmasse M teilen und mit der Dichte ρ multiplizieren. Das Ergebnis und der daraus berechnete Wert für $\Delta c_p/c_{p,n}$ sind in Tabelle 13.2 angegeben. Wir sehen, dass die berechneten und direkt kalorimetrisch gemessenen Werte gut übereinstimmen.
- (c) Wir benutzen nun die Vorhersage der BCS-Theorie, dass die Grundzustandsenergiedichte bei $T = 0$ um $D(E_F)\Delta^2(0)/4V$ unter derjenigen des Normalzustandes liegt. Damit erhalten wir für den Unterschied der freien Enthalpiedichten zu

$$\Delta g = g_s(0, T) - g_n(0, T) = -\frac{1}{4} \frac{D(E_F)}{V} \Delta^2(0) = -\frac{B_{\text{cth}}^2(0)}{2\mu_0} , \quad (\text{A13.5.8})$$

² A. J. Rutgers, *Bemerkung zur Anwendung der Thermodynamik auf die Supraleitung*, Physica 3, 999 (1936).

Tabelle 13.2: Berechnete und gemessene Werte des Sprungs $\Delta c/c_n$ der spezifischen Wärmekapazität zusammen mit weiteren Materialparametern von Al, Nb und Pb.

Material	T_c (K)	$B_{cth}(0)$ (mT)	$\Delta c/c_n$ exp.	$\Delta c/c_n$ ber.	γ (mJ/(mol K ²))	γ (J/(m ³ K ²))	M (g/mol)	ρ (g/cm ³)
Al	1.2	10	1.4	1.6	1.35	135	27.0	2.7
Nb	9.2	206	1.9	2.2	7.79	704	92.9	8.4
Pb	7.2	80	2.7	2.4	2.98	164	207.2	11.4

wobei $\Delta(0)$ die Energielücke im Anregungsspektrum des Supraleiters bei $T = 0$ ist. Wir können nun diese Beziehung wiederum dazu benutzen, um $\Delta c_p/c_{p,n}$ abzuschätzen. Wir müssen hierzu noch den Sommerfeld-Koeffizienten γ als Funktion der Zustandsdichte $D(E_F)$ an der Fermi-Kante ausdrücken. Es gilt

$$\gamma = \frac{\pi^2}{2} n \frac{k_B^2}{E_F} \underbrace{D(E_F) = \frac{3}{2} E_F n V}_{=} \frac{\pi^2}{3} \frac{D(E_F)}{V} k_B^2. \quad (\text{A13.5.9})$$

Mit diesem Ausdruck erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\Delta c_p}{c_{p,n}} &= \frac{8}{\gamma T_c^2} \frac{B_{cth}^2(0)}{2\mu_0} = \frac{8}{\gamma T_c^2} \frac{1}{4} \frac{D(E_F)}{V} \Delta^2(0) \\ &= \frac{8}{\frac{\pi^2}{3} \frac{D(E_F)}{V} k_B^2 T_c^2} \frac{1}{4} \frac{D(E_F)}{V} \Delta^2(0) = \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A13.5.10})$$

Mit der BCS-Vorhersage $\Delta(0)/k_B T_c = \pi/e^\gamma = 1.76387699$ für schwach koppelnde Supraleiter (mit der Euler-Konstante $\gamma = 0.5772\dots$), erhalten wir

$$\frac{\Delta c_p}{c_{p,n}} = 1.8914. \quad (\text{A13.5.11})$$

Man beachte, dass der Vorfaktor $6/\pi^2 = 0.6079\dots$ in Gleichung (A13.5.10), den wir unter Benutzung der BCS-Kondensationsenergiedichte $D(E_F) \Delta^2(0)/4V$ für $T = 0$ und der phänomenologischen Temperaturabhängigkeit $\propto [1 - (T/T_c)^2]$ erhalten haben, etwas größer ist als der von der BCS-Theorie vorhergesagte Wert von $0.4601\dots$. Die BCS-Theorie liefert nämlich (siehe R. Gross und A. Marx, *Festkörperphysik*, Walter de Gruyter GmbH (2014), Abschnitt 13.5.4)

$$\frac{\Delta c_p}{c_{p,n}} = \frac{D(E_F)}{2\gamma T_c} \left. \frac{-d\Delta^2(T)}{dT} \right|_{T=T_c}, \quad (\text{A13.5.12})$$

was mit $\Delta(T) = 1.7366 \Delta(0) [1 - (T/T_c)]^{1/2}$ für $T \simeq T_c$ auf

$$\frac{\Delta c_p}{c_{p,n}} = \frac{3 \cdot 1.7366^2}{2\pi^2} \left(\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} \right)^2 = 0.45837 \left(\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} \right)^2 = 1.4261\dots \quad (\text{A13.5.13})$$

führt. Der kleinere Wert resultiert daraus, dass die BCS-Theorie eine von der phänomenologischen Näherung $B_{\text{cth}}(T) \propto [1 - (T/T_c)^2]$ etwas abweichende Temperaturabhängigkeit des kritischen Feldes ergibt. Benutzen wir die in der Aufgabenstellung angegebenen Werte von $\Delta(0)$ und T_c , so erhalten wir die in Tabelle 13.3 angegebenen Werte für $\Delta c_p/c_{p,n}$.

Tabelle 13.3: Sprung $\Delta c_p/c_{p,n}$ der spezifischen Wärmekapazität von Al, Nb und Pb berechnet nach Gleichung (A13.5.10) und (A13.5.12) mit den angegebenen Werten für $\Delta(0)$ und T_c . Zum Vergleich ist der kalorimetrisch gemessene Wert gezeigt.

Material	T_c (K)	$\Delta(0)$ (meV)	$\Delta c/c_n$ exp.	$\Delta c/c_n$ Gl.(A13.5.10)	$\Delta c/c_n$ Gl.(A13.5.12)
Al	1.2	0.17	1.4	1.6	1.2
Nb	9.2	1.52	1.9	2.2	1.7
Pb	7.2	1.37	2.7	2.9	2.2

- (d) Das Verhältnis $\Delta(0)/k_B T_c$ ist ein Maß für die Kopplungsstärke zwischen den Elektronen in Supraleitern. Im Grenzfall schwacher Kopplung (BCS-Theorie) gilt im isotropen Fall $\Delta(0)/k_B T_c = \pi/e^\gamma = 1.7638 \dots$ (mit der Euler-Konstante $\gamma = 0.5772 \dots$) und damit $\Delta c_p/c_{p,n} = 12/7\zeta(3) = 1.4261 \dots$ (mit der Riemannschen ζ -Funktion). Dagegen erhalten wir $\Delta c_p/c_{p,n} = 1.8913 \dots$, wenn wir Gleichung (A13.5.10) verwenden, und $\Delta c_p/c_{p,n} = 2$, wenn wir den thermodynamischen Tieftemperaturlimit verwenden. Wir wollen in diesem Zusammenhang aber darauf hinweisen, dass außer dem BCS-Ergebnis die Zahlenwerte hier nicht so wichtig sind. Sie sollen lediglich zeigen, wie nahe man dem richtigen Wert mit einfachen Überlegungen u. U. kommen kann und ein Gefühl für die Größenordnung vermitteln.

Der Sprung $\Delta c_p/c_{p,n}$ steigt schnell mit der Kopplungsstärke an. Besonders interessant ist, dass die makro- und mikroskopischen Parameter unabhängig voneinander mess- und/oder berechenbar sind. Mit Hilfe einfacher thermodynamischer Betrachtungen können wir deshalb eine qualitative Beziehung zwischen ihnen herstellen und dadurch eine Konsistenzprüfung durchführen. Die erhaltene Konsistenz ist beachtlich gut angesichts der Einfachheit der bei der Herleitung der BCS-Ausdrücke gemachten Annahmen.



A13.6 Cooper-Paare

Die Gesamtwellenfunktion eines Cooper-Paares können wir als Produkt einer Orbitalfunktion $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ und einer Spin-Funktion $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ schreiben.

- (a) Zeigen Sie, dass man aus der Schrödinger-Gleichung für die orbitale Wellenfunktion $f_s(\mathbf{r})$ ($s = 0$: Singulett-Paarung; $s = 1$: Triplett-Paarung) eines Cooper-Paares folgende Integralgleichung für die Amplitude $f_{\mathbf{k}} = \text{FT}[f(\mathbf{r})]$ im Fourier-Raum

$$(E - 2\xi_{\mathbf{k}})f_{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}'| > k_F} V(\mathbf{k} - \mathbf{k}')f_{\mathbf{k}'}$$

ableiten kann. Hier bedeutet $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ und $V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = V^{(s)}(\mathbf{q}) = \text{FT}[V^{(s)}(\mathbf{r})]$ ist die Fourier-Transformierte der Paarwechselwirkung im Spin-Singulett ($s = 0$) und im Spin-Triplett ($s = 1$) Kanal.

- (b) Lösen Sie diese Integralgleichung mit der folgenden einfachen Modellannahme für die Paar-Wechselwirkung

$$V_{k,k'} = \begin{cases} -V_0^{(s)} & \text{für } |\xi_{\mathbf{k}}|, |\xi_{\mathbf{k}'}| < \epsilon_c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

in der ϵ_c eine Abschneideenergie darstellt.

Lösung

Die Wellenfunktion von zwei Fermionen können wir allgemein schreiben als

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2) = e^{i\mathbf{K}_S \cdot \mathbf{R}} f^{(s)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \chi^{(s)}(\sigma_1, \sigma_2) = -\Psi(\mathbf{r}_2, \sigma_2, \mathbf{r}_1, \sigma_1). \quad (\text{A13.6.1})$$

Hierbei haben wir den Ortsanteil in eine Schwerpunkts- und Relativ- oder Orbitalbewegung aufgespalten. Es gilt $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{K}_S = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2$ und $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$. Wir nehmen im Folgenden $\mathbf{K}_S = 0$ an. Zu einer symmetrischen Orbitalfunktion $f^{(s=0)}(\mathbf{r})$ gehört eine antisymmetrische Spin-Funktion $\chi^{(s=0)}$ ($s = 0$, Singulett-Paarung), zu einer antisymmetrischen Orbitalfunktion $f^{(s=1)}(\mathbf{r})$ eine symmetrische Spin-Funktion $\chi^{(s=1)}$ ($s = 1$, Triplett-Paarung).

- (a) Die Schrödinger-Gleichung für das Fermionen-Paar im Ortsraum (Zweikörperproblem) lautet

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m} - 2\mu \right] f(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}) = E f(\mathbf{r}). \quad (\text{A13.6.2})$$

Hierbei ist μ das chemische Potenzial und E die Paarenergie. Um zu einer Beschreibung im Impulsraum überzugehen, schreiben wir

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{A13.6.3})$$

Genauso wie $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ die Relativkoordinate im Ortsraum darstellt, beschreibt \mathbf{k} die Relativbewegung (Bahndrehimpuls) des Elektronenpaares. Die Fourier-Transformation des Wechselwirkungspotenzials V ergibt

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{A13.6.4})$$

Wir setzen die Ausdrücke für $V(\mathbf{r})$ und $f(\mathbf{r})$ in die Schrödinger-Gleichung ein und multiplizieren mit $\exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})$. Integrieren wir dann über das gesamte Probenvolumen Ω , so verschwindet das Integral über $\exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}]$ für $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ und ist gleich dem Probenvolumen für $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$. Damit erhalten wir die Schrödinger-Gleichung im \mathbf{k} -Raum zu

$$(E - 2\xi_{\mathbf{k}}) f_{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}'| > k_F} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'} \quad (\text{A13.6.5})$$

Hierbei ist $\xi_{\mathbf{k}} = (\hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m) - \mu$, d. h. die Einteilchenenergie bezogen auf das chemische Potenzial, und $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = V(\mathbf{q})$. Die Summation läuft nur über $|\mathbf{k}'| > k_F$, da alle Zustände unterhalb von k_F bei $T = 0$ besetzt sind (Pauli-Blockade) und deshalb nicht als mögliche Streuzustände zur Verfügung stehen.

- (b) Um das Problem zu lösen, müssen wir alle Matrixelemente $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ kennen. Cooper nahm nun vereinfachend eine vollkommen isotrope Wechselwirkung an, so dass die Matrixelemente in einem Intervall $[\mu - \epsilon_c, \mu + \epsilon_c]$ (ϵ_c ist eine charakteristische Abschneideenergie) den konstanten Wert $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = -V_0^{(s)}$ annehmen und sonst verschwinden:

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \begin{cases} -V_0^{(s)} & \text{für } |\xi_{\mathbf{k}}|, |\xi_{\mathbf{k}'}| < \epsilon_c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (\text{A13.6.6})$$

Das negative Vorzeichen von $V_0^{(s)}$ bedeutet, dass wir eine attraktive Wechselwirkung annehmen. Damit vereinfacht sich Gleichung (A13.6.5) zu

$$(E - 2\xi_{\mathbf{k}}) f_{\mathbf{k}} = -\Theta(\epsilon_c - |\xi_{\mathbf{k}}|) V_0^{(s)} \sum_{|\mathbf{k}'| > k_F} \Theta(\epsilon_c - |\xi_{\mathbf{k}'}|) f_{\mathbf{k}'}. \quad (\text{A13.6.7})$$

Hier bedeutet $\Theta(x)$ die Heaviside-Sprungfunktion mit der Eigenschaft $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$. Auflösen nach $f_{\mathbf{k}}$ ergibt

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{\Theta(\epsilon_c - |\xi_{\mathbf{k}}|) V_0^{(s)}}{2\xi_{\mathbf{k}} - E} \sum_{|\mathbf{k}'| > k_F} \Theta(\epsilon_c - |\xi_{\mathbf{k}'}|) f_{\mathbf{k}'}. \quad (\text{A13.6.8})$$

Wir können diesen Ausdruck weiter vereinfachen, indem wir auf beiden Seiten über alle $|\mathbf{k}| > k_F$ aufsummieren. Da das Ergebnis nicht von der Benennung des Summationsindex abhängt, gilt $\sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'}$ und wir erhalten

$$1 = V_0^{(s)} \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} \frac{\Theta(\epsilon_c - |\xi_{\mathbf{k}}|)}{2\xi_{\mathbf{k}} - E}. \quad (\text{A13.6.9})$$

Nehmen wir an, dass die Elektronenpaardichte in dem betrachteten schmalen Energieintervall konstant durch $D(\mu)/2 = D(\xi_{\mathbf{k}} = 0)/2 = D_F/2$ gegeben ist, können wir die Summation in eine Integration überführen und erhalten

$$\begin{aligned} 1 &= V_0^{(s)} \frac{D_F}{2} \int_{-\epsilon_c}^{\epsilon_c} \frac{d\xi_{\mathbf{k}}}{2\xi_{\mathbf{k}} - E} = V_0^{(s)} D_F \int_0^{\epsilon_c} \frac{d\xi_{\mathbf{k}}}{2\xi_{\mathbf{k}} - E} \\ &= V_0^{(s)} D_F \frac{1}{2} \left| \ln(2\xi_{\mathbf{k}} - E) \right|_0^{\epsilon_c} = \frac{V_0^{(s)} D_F}{2} \ln \left(\frac{2\epsilon_c - E}{-E} \right). \end{aligned} \quad (\text{A13.6.10})$$

Auflösen nach E ergibt

$$E = -\frac{2\epsilon_c e^{-2/D_F V_0^{(s)}}}{1 - e^{-2/D_F V_0^{(s)}}}. \quad (\text{A13.6.11})$$

Für die Grenzfälle $D_F V_0^{(s)} \ll 1$ und $D_F V_0^{(s)} \gg 1$ ergibt sich

$$E = \begin{cases} -2\epsilon_c e^{-2/D_F V_0^{(s)}} & \text{für } D_F V_0^{(s)} \ll 1 \text{ (schwache Kopplung)} \\ -\epsilon_c D_F V_0^{(s)} & \text{für } D_F V_0^{(s)} \gg 1 \text{ (starke Kopplung)} \end{cases} \quad (\text{A13.6.12})$$

Die Paarenergie E ist für das attraktive Wechselwirkungspotenzial negativ, das heißt, wir erhalten einen gebundenen Paarzustand. Für ein repulsives Wechselwirkungspotenzial würden wir eine positive Paarenergie, also einen antibindenden Zustand erhalten.

Wird die attraktive Wechselwirkung z. B. durch Phononen vermittelt, so können wir die charakteristische Abschneideenergie mit der Debye-Energie $\hbar\omega_D$ gleichsetzen. Da die maximale Energie der Phononen auf $\hbar\omega_D$ beschränkt ist, spielt sich die Wechselwirkung nur in einem Energieintervall $\pm\hbar\omega_D$ um das chemische Potenzial μ ab. Zustände weiter unterhalb von μ können nicht teilnehmen, da die Phononen eine zu geringe Energie haben, um sie in leere Zustände bei oder oberhalb von μ zu streuen. Zustände weiter oberhalb von μ können nicht partizipieren, da die Phononenenergie zu gering ist, um Elektronen bei oder unterhalb von μ in diese Zustände zu streuen.

A13.7 Spin-Suszeptibilität in BCS-Supraleitern



Die Spin-Polarisation $\delta n = \delta N/V = n_{\uparrow} - n_{\downarrow}$ für normale Metallelektronen (Paulische Spin-Suszeptibilität, vergleiche Aufgabe A12.6), überträgt sich im Supraleiter auf das Gas der thermischen Anregungen aus dem supraleitenden Grundzustand, der so genannten Bogoliubov-Quasiteilchen. Man kann δn aus einer verschobenen Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion für Bogoliubov-Quasiteilchen berechnen:

$$\delta N = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \sigma \delta f_{\mathbf{k}\sigma}^{\text{lok}}, \quad \delta f_{\mathbf{k}\sigma}^{\text{lok}} = f(E_{\mathbf{k}} + \delta E_{\mathbf{k}\sigma}) - f_{\mathbf{k}}^0$$

$$f(E_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/k_B T} + 1}, \quad E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}.$$

Hierbei ist Δ die Energielücke, $\sigma = \pm 1$ und $\delta E_{\mathbf{k}\sigma} = -\sigma \mu_B B_{\text{ext}}$ die Zeeman-Energieverschiebung. Zeigen Sie, dass die Modifikation $\chi(T)$ der Paulischen Spin-Suszeptibilität im BCS-Supraleiter die folgende Form hat:

$$\chi(T) = \chi_P Y(T) \quad \text{mit} \quad Y(T) = \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^2 \sqrt{x^2 + \left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T}\right)^2}}.$$

Hierbei ist χ_P die Paulische Spin-Suszeptibilität des Metalls im Normalzustand und $Y(T)$ die so genannte Yosida-Funktion.

Lösung

Eine Taylor-Entwicklung der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion für Bogoliubov-Quasiteilchen $f(E_{\mathbf{k}} + \delta E_{\mathbf{k}\sigma})$ nach der Energieverschiebung $\delta E_{\mathbf{k}\sigma} = -\sigma \mu_B B_{\text{ext}}$ liefert in führender Ordnung

$$f(E_{\mathbf{k}} + \delta E_{\mathbf{k}\sigma}) = f_{\mathbf{k}}^0 + \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta E_{\mathbf{k}\sigma} = f_{\mathbf{k}}^0 + \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right) \sigma \mu_B B_{\text{ext}}. \quad (\text{A13.7.1})$$

Mit der Abweichung vom lokalen Gleichgewichtswert

$$\delta f_{\mathbf{k}\sigma}^{\text{lok}} = \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right) \sigma \mu_{\text{B}} B_{\text{ext}} \quad (\text{A13.7.2})$$

lässt sich die Spin-Polarisation $\delta n = \delta N/V$ wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} \delta N &= \sum_{\mathbf{k}\sigma} \sigma \delta f_{\mathbf{k}\sigma}^{\text{lok}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \sigma \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right) \sigma \mu_{\text{B}} B_{\text{ext}} \\ &= \mu_{\text{B}} B_{\text{ext}} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A13.7.3})$$

Daraus ergibt sich die Magnetisierung M zu

$$M = \mu_{\text{B}} \frac{\delta N}{V} = \frac{\mu_{\text{B}}^2 B_{\text{ext}}}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right). \quad (\text{A13.7.4})$$

Mit $M = \chi(T) B_{\text{ext}}/\mu_0$ erhalten wir für die Suszeptibilität

$$\chi(T) = \frac{\mu_0 \mu_{\text{B}}^2}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right). \quad (\text{A13.7.5})$$

Die Berechnung von $\chi(T)$ ergibt im Einzelnen (wir gehen von einer Summation zu einer Integration über)

$$\frac{\chi(T)}{\mu_0 \mu_{\text{B}}^2} = \frac{1}{V} \underbrace{\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi}}_{=1} \int_{-\mu}^{\infty} d\xi_{\mathbf{k}} D(\mu + \xi_{\mathbf{k}}) \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right). \quad (\text{A13.7.6})$$

Hierbei ist $D(\xi_{\mathbf{k}})$ die Zustandsdichte für beide Spin-Richtungen und $\xi_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m - \mu$ die Energie bezogen auf das chemische Potenzial, weshalb wir die untere Integrationsgrenze $\xi_{\mathbf{k}} = -\mu$ verwenden müssen. Da die Funktion $\partial f_{\mathbf{k}}^0/\partial E_{\mathbf{k}}$ nur in einem schmalen Intervall der Breite $\sim k_{\text{B}} T$ um das chemische Potenzial wesentlich von Null verschieden ist, können wir $D(\mu + \xi_{\mathbf{k}}) \simeq D(E_{\text{F}}) = \text{const}$ annehmen und erhalten damit

$$\frac{\chi(T)}{\mu_0 \mu_{\text{B}}^2} = \frac{D(E_{\text{F}})}{V} \int_{-\mu}^{\infty} d\xi_{\mathbf{k}} \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right) = \frac{D(E_{\text{F}})}{V} \frac{1}{4k_{\text{B}} T} \int_{-\mu}^{\infty} \frac{d\xi_{\mathbf{k}}}{\cosh^2 \frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_{\text{B}} T}}. \quad (\text{A13.7.7})$$

Mit der Substitution $x = \xi_{\mathbf{k}}/2k_{\text{B}} T$ und $N_{\text{F}} = D(E_{\text{F}})/V$ erhalten wir schließlich

$$\chi(T) = \mu_0 \mu_{\text{B}}^2 N_{\text{F}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \sqrt{x^2 + \left(\frac{\Delta(T)}{2k_{\text{B}} T} \right)^2}}}_{=Y(T)}. \quad (\text{A13.7.8})$$

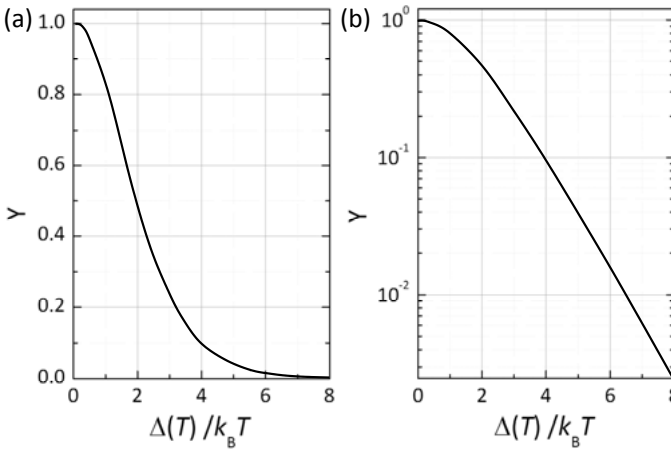


Abb. 13.8: Yosida-Funktion als Funktion von $\Delta(T)/k_B T$ in (a) linearer und (b) logarithmischer Auftragung.

Wir können somit als Resultat für die Spin-Suszeptibilität $\chi(T)$ eines BCS-Supraleiters zusammenfassen:

$$\chi_P^{\text{BCS}}(T) = \mu_0 \mu_B^2 N_F Y(T) = \chi_P Y(T) \quad (\text{A13.7.9})$$

$$\text{mit } Y(T) = \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^2 \sqrt{x^2 + \left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T}\right)^2}}. \quad (\text{A13.7.10})$$

Hierbei ist χ_P die Paulische Spin-Suszeptibilität im Normalzustand (vergleiche hierzu (A12.6.10) in Aufgabe A12.6) und $Y(T)$ die *Yosida-Funktion*, die in Abb. 13.8 als Funktion von $\Delta(T)/k_B T$ dargestellt ist.

A13.8 Stromdichte in BCS-Supraleitern

Die eichinvariante Form für die supraleitende Teilchenstromdichte \mathbf{J}_s kann wie folgt geschrieben werden (vgl. R. Gross, A. Marx, *Festkörperphysik*, Kapitel 13 und Aufgabe A9.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} f(E_{\mathbf{k}} + \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_s) + n \mathbf{v}_s \\ \mathbf{v}_s &= \frac{1}{m_s} (\hbar \nabla \theta - q_s \mathbf{A}) = \frac{1}{2m} (\hbar \nabla \theta + 2e \mathbf{A}) \\ f(E_{\mathbf{k}}) &= \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/k_B T} + 1} \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Teilchenstromdichte \mathbf{J}_s

- für freie Fermionen ($E_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$) oberhalb T_c und
- für Bogoliubov-Quasiteilchen mit der Energiedispersion $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}$ unterhalb T_c .
- Berechnen Sie aus dem Resultat von (b) das Verhalten der London-Magnetfeld Eindringtiefe im Limes $T \rightarrow T_c$.

Lösung

Die i -te Komponente der Stromdichte ($i = x, y, z$) besteht aus den beiden Termen³

$$J_{s,i} = \underbrace{\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{\hbar k_i}{m} f(E_{\mathbf{k}} + \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_s)}_1 + \underbrace{nv_{s,i}}_2. \quad (\text{A13.8.1})$$

Zur allgemeinen Auswertung des Terms 1 führen wir eine Taylor-Entwicklung nach der kleinen Energieverschiebung $\hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_s$ durch. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \text{Term 1} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{\hbar k_i}{m} \left\{ f(E_{\mathbf{k}}) + \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \hbar k_j v_{s,j} \right\} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{\hbar k_i}{m} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} \hbar k_j v_{s,j} \\ &= -n_{ij}^n v_{s,j}. \end{aligned} \quad (\text{A13.8.2})$$

Dieses Resultat gibt Anlass zur Definition der so genannten *normalfluiden Dichte*

$$n_{ij}^n = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} y_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 k_i k_j}{m} \quad (\text{A13.8.3})$$

$$y_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^0}{\partial E_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2k_B T} \frac{1}{\cosh(E_{\mathbf{k}}/k_B T) + 1} = \frac{1}{4k_B T} \frac{1}{\cosh^2(E_{\mathbf{k}}/k_B T)}. \quad (\text{A13.8.4})$$

Die Supra-Teilchenstromdichte hat dann die London-Form

$$J_{s,i} = \text{Term 1} + \text{Term 2} = n_{ij}^s v_{s,j} \quad (\text{A13.8.5})$$

mit der suprafluiden Dichte

$$n_{ij}^s = n \delta_{ij} - n_{ij}^n, \quad (\text{A13.8.6})$$

die es jetzt für die beiden Fälle auszuwerten gilt.

(a) Für freie Fermionen oberhalb der Sprungtemperatur T_c gilt

$$\begin{aligned} n_{ij}^n &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial \xi_{\mathbf{k}}} \right) \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{m} \\ &= \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \underbrace{\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \widehat{\mathbf{k}}_i \widehat{\mathbf{k}}_j}_{=\frac{1}{3}\delta_{ij}} \int_{-\mu}^{\infty} d\xi_{\mathbf{k}} N(\mu + \xi_{\mathbf{k}}) \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial \xi_{\mathbf{k}}} \right) \\ &\simeq \frac{1}{3} \delta_{ij} \underbrace{\frac{N_F \hbar^2 k_F^2}{m}}_{=3n} \frac{1}{4k_B T} \int_{-\mu}^{\infty} \frac{d\xi_{\mathbf{k}}}{\cosh^2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2k_B T}} \\ &\stackrel{x=\xi_{\mathbf{k}}/2k_B T}{=} n \delta_{ij} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x}}_{=1} = n \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A13.8.7})$$

³ Wir diskutieren hier die Teilchenstromdichte. Die elektrische Stromdichte erhalten wir durch Multiplikation mit der Ladung der Teilchen.

Das (enttäuschende) Resultat lautet somit

$$n^s = n\delta_{ij} - n_{ij}^n = 0. \quad (\text{A13.8.8})$$

(b) Für freie Fermionen unterhalb der Sprungtemperatur T_c erhalten wir dagegen

$$\begin{aligned} n_{ij}^n &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\sigma} y_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{m} \\ &= \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \underbrace{\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \widehat{\mathbf{k}}_i \widehat{\mathbf{k}}_j}_{=\frac{1}{3}\delta_{ij}} \int_{-\mu}^{\infty} d\xi_{\mathbf{k}} N(\mu + \xi_{\mathbf{k}}) \left(-\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial E_{\mathbf{k}}} \right) \\ &\simeq \frac{1}{3} \delta_{ij} \underbrace{\frac{N_F \hbar^2 k_F^2}{m}}_{=3n} \frac{1}{4k_B T} \int_{-\mu}^{\infty} \frac{d\xi_{\mathbf{k}}}{\cosh^2 \frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T}} \\ &\stackrel{x=\xi_{\mathbf{k}}/2k_B T}{=} n \delta_{ij} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \sqrt{x^2 + \left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right)^2}}}_{=Y(T)} \\ &= n \delta_{ij} Y(T). \end{aligned} \quad (\text{A13.8.9})$$

Das Resultat lautet somit

$$n_{ij}^s = n [1 - Y(T)] \delta_{ij} = n \left[1 - \int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \sqrt{x^2 + \left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right)^2}} \right] \delta_{ij}. \quad (\text{A13.8.10})$$

Zusatzbemerkungen: Es ist bemerkenswert, dass die Temperaturabhängigkeit der Spin-Suszeptibilität $\chi_P^{\text{BCS}}(T)$ [vergleiche (A13.7.9)] und der normalfluiden Dichte $n_{ij}^n(T)$ im Rahmen der BCS-Theorie durch ein und dieselbe Funktion, nämlich die Yosida-Funktion $Y(T)$ beschrieben wird. Dies ist natürlich ein Artefakt der Annahme freier Elektronen und der daraus resultierenden sphärischen Fermi-Fläche. Wir weisen darauf hin, dass n_{ij}^n für realistische Fermi-Flächen im allgemeinen ein Tensor zweiter Stufe ist und mit der skalaren Spin-Suszeptibilität $\chi(T)$ nichts mehr gemeinsam hat. Auch für Supraleiter mit Anisotropien in der Energielücke stimmen die Temperaturabhängigkeiten von $n_{ij}^n(T)$ und $\chi(T)$ nicht mehr überein.

Das Resultat (A13.8.10) für die suprafluide Dichte n_{ij}^s erklärt die Euphorie, die im Jahr 1957 bei John Bardeen, Leon Cooper und Robert Schrieffer ausgebrochen war, als den Pionieren der mikroskopischen Theorie der Supraleitung klar wurde, welche zentrale Rolle dem Öffnen einer Energielücke $\Delta(T)$ unterhalb der Sprungtemperatur T_c für die Supraleitung zukommt. Für $\Delta(T) = 0$ hat die Yosida-Funktion nämlich den Wert 1 und es gilt deshalb $n_{ij}^s(T) = 0$ oberhalb von T_c . Dagegen ist unterhalb der Sprungtemperatur T_c die Energielücke $\Delta(T) > 0$ und daher $n_{ij}^s(T)$ und somit auch die Suprastromdichte \mathbf{J}_s von Null verschieden.

- (c) Wir wollen zunächst die Yosida-Funktion bei tiefen Temperaturen und in der Nähe der Sprungtemperatur analysieren. Für $T \rightarrow 0$ zeigt $Y(T)$ ein thermisch aktiviertes Verhalten:

$$\lim_{T \rightarrow 0} Y(T) = \sqrt{\frac{2\pi\Delta(T)}{k_B T}} e^{-\frac{\Delta(T)}{k_B T}}. \quad (\text{A13.8.11})$$

Dies ist gut in Abb. 13.8(b) zu erkennen. Für $T \rightarrow T_c$ zeigt $Y(T)$ die folgende Temperaturabhängigkeit

$$\lim_{T \rightarrow T_c} Y(T) = 1 - 2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right). \quad (\text{A13.8.12})$$

Die Temperaturabhängigkeit der Londonschen Magnetfeldeindringtiefe ergibt sich mit Gleichung (A13.8.10) zu

$$\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n^s(T) q_s^2}} = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - Y(T)}}. \quad (\text{A13.8.13})$$

Mit der Näherung (A13.8.12) für $T \simeq T_c$ ($\Delta(T) \rightarrow 0$) erhalten wir näherungsweise folgende Temperaturabhängigkeit

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \lambda_L(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}}. \quad (\text{A13.8.14})$$

Wir sehen, dass $\lambda_L(T)$ für $T \rightarrow T_c$ divergiert. Dies muss so sein, da ja normalleitende Metalle stationäre Magnetfelder nicht verdrängen können.



A13.9 Zweiflüssigkeitsbeschreibung der Supraleitung

Bei endlichen Temperaturen existieren in einem Supraleiter Quasiteilchenanregungen (Normalkomponente), deren Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}_n der Drude-Relaxationsgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_n\right) \mathbf{v}_n = \frac{q_n \mathbf{E}}{m_n}$$

genügt, wobei $\Gamma_n = 1/\tau_n$. Zusammen mit der 1. London-Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_s\right) \mathbf{v}_s &= \frac{q_s \mathbf{E}}{m_s}, \quad (\Gamma_s \rightarrow 0) \\ \mathbf{v}_s &= \frac{\hbar}{m_s} \nabla \theta - \frac{q_s}{m_s} \mathbf{A} \end{aligned}$$

erhalten wir für die gesamte Stromdichte $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_n = q_s \tilde{n}_s \mathbf{v}_s + q_n n_n \mathbf{v}_n$. Mit $q_s = -2e$, $q_n = -e$ und $m_s = 2m$ sowie der Paardichte $\tilde{n}_s = n_s/2$ ($n_s = n - n_n$) erhalten wir die elektrische Stromdichte⁴

$$\mathbf{J} = -e(n_s \mathbf{v}_s + n_n \mathbf{v}_n)$$

in der Zweiflüssigkeitenbeschreibung.

⁴ Für negative Ladungsträger ist die technische Stromdichte der Teilchengeschwindigkeit entgegengesetzt.

- (a) Nehmen Sie eine harmonische Zeitabhängigkeit $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ und $\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_0 e^{-i\omega t}$ an und berechnen Sie die komplexe Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ des Supraleiters aus der konstitutiven Gleichung $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.
- (b) Zerlegen Sie die Leitfähigkeit in Real- und Imaginärteil, $\sigma = \sigma' + i\sigma''$, und bestimmen Sie σ' und σ'' für die normal- und suprafluide Komponente.

Lösung

- (a) Die gesamte Stromdichte $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_n$ lautet

$$\mathbf{J} = \left(\frac{n_s}{-i\omega + \Gamma_s} + \frac{n_n}{-i\omega + \Gamma_n} \right) \frac{e^2}{m} \mathbf{E} \equiv \sigma(\omega) \mathbf{E} \quad (\text{A13.9.1})$$

mit der komplexen dynamischen Leitfähigkeit des Supraleiters

$$\sigma(\omega) = \sigma_s + \sigma_n = \frac{e^2}{m} \left(\frac{n_s}{-i\omega + \Gamma_s} + \frac{n_n}{-i\omega + \Gamma_n} \right). \quad (\text{A13.9.2})$$

Mit der Identität⁵

$$\lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \frac{1}{-i\omega + \Gamma_s} = iP\left(\frac{1}{\omega}\right) + \pi\delta(\omega) \quad (\text{A13.9.3})$$

erhalten wir

$$\sigma(\omega) = \underbrace{\frac{n_s e^2}{m} \left[iP\left(\frac{1}{\omega}\right) + \pi\delta(\omega) \right]}_{\text{Kondensat}} + \underbrace{\frac{n_n e^2}{m} \frac{1}{-i\omega + \Gamma_n}}_{\text{Normalkomponente}}. \quad (\text{A13.9.4})$$

- (b) Trennen wir das Ergebnis (A13.9.4) in Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir mit $\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega)$

$$\sigma'_s(\omega) = \frac{n_s e^2}{m} \pi\delta(\omega) \quad (\text{A13.9.5})$$

$$\sigma''_s(\omega) = \frac{n_s e^2}{m} P\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (\text{A13.9.6})$$

$$\sigma'_n(\omega) = \frac{n_n e^2 \tau_n}{m} \frac{1}{1 + (\omega \tau_n)^2} \quad (\text{A13.9.7})$$

$$\sigma''_n(\omega) = \frac{n_n e^2 \tau_n}{m} \frac{\omega \tau_n}{1 + (\omega \tau_n)^2}. \quad (\text{A13.9.8})$$

Hierbei haben wir $\Gamma_n = 1/\tau_n$ verwendet.

A13.10 Energieabsenkung im Grundzustand eines Supraleiters

In der Molekularfeldnäherung nimmt der BCS-Hamilton-Operator des Supraleiters nach der Bogoliubov-Transformation folgende Form an:

$$\mathcal{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}} [\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}}^{\dagger} \Delta_{\mathbf{k}}] + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} [\alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}}^{\dagger} \beta_{\mathbf{k}}]$$

⁵ P bezeichnet den Cauchysche Hauptwert des divergenten Integrals.



Berechnen Sie die Absenkung der Grundzustandsenergie im supraleitenden relativ zum normalleitenden Zustand für $T = 0$. Den Hamilton-Operator für den Normalzustand erhalten wir aus obiger Gleichung, indem wir den Grenzübergang $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ und entsprechend $E_{\mathbf{k}} \rightarrow |\xi_{\mathbf{k}}|$ machen. Man beachte, dass $-\xi_{|\mathbf{k}| \leq k_F} = \xi_{|\mathbf{k}| \geq k_F} \geq 0$ (Teilchen-Loch-Symmetrie).

Lösung

Wir ermitteln zuerst $\langle \mathcal{H}_{\text{BCS}} \rangle$ im Normalzustand, indem wir $\Delta = 0$ setzen. Der Beitrag $\sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} [\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}}^\dagger \beta_{\mathbf{k}}]$ der Bogoliubov-Quasiteilchen liefert keinen Beitrag sowohl bei $T = 0$ (keine Quasiteilchen angeregt) als auch im Normalzustand.

Im Grenzfall $\Delta \rightarrow 0$ erhalten wir mit $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} \simeq |\xi_{\mathbf{k}}|$ für den Normalzustand

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_n \rangle &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle \mathcal{H}_{\text{BCS}} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - |\xi_{\mathbf{k}}|) \\ &= \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} (\xi_{\mathbf{k}} - |\xi_{\mathbf{k}}|) + \sum_{|\mathbf{k}| \geq k_F} (\xi_{\mathbf{k}} - |\xi_{\mathbf{k}}|) \\ &= 2 \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} \xi_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (\text{A13.10.1})$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass $|\xi_{\mathbf{k}}| = -\xi_{\mathbf{k}}$ für $|\mathbf{k}| \leq k_F$ (Teilchen-Loch-Symmetrie).

Für die Absenkung der Grundzustandsenergie im supraleitenden Zustand für $T = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle \mathcal{H}_{\text{BCS}} \rangle - \langle \mathcal{H}_n \rangle \\ &= \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} [(\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}}^\dagger \Delta_{\mathbf{k}}) - 2\xi_{\mathbf{k}}] + \sum_{|\mathbf{k}| \geq k_F} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}}^\dagger \Delta_{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (\text{A13.10.2})$$

Benutzen wir wiederum die Teilchen-Loch-Symmetrie, $|\xi_{\mathbf{k}}| = -\xi_{\mathbf{k}}$ für $|\mathbf{k}| \leq k_F$, und $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}$, so erhalten wir

$$\Delta E = 2 \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} \left(\xi_{\mathbf{k}} - \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} + g_{\mathbf{k}}^\dagger \Delta_{\mathbf{k}} \right). \quad (\text{A13.10.3})$$

Den letzten Term in der runden Klammer können wir umformen, indem wir

$$g_{\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* \quad (\text{A13.10.4})$$

$$\frac{\Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}}{v_{\mathbf{k}}^*} = \xi_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}} \quad (\text{A13.10.5})$$

benutzen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{k}}^\dagger \Delta_{\mathbf{k}} &= \frac{\Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^*}{v_{\mathbf{k}}^{*2}} v_{\mathbf{k}}^{*2} = (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \\ &= \frac{|\Delta_{\mathbf{k}}|^2}{2E_{\mathbf{k}}} = \frac{|\Delta_{\mathbf{k}}|^2}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}} \end{aligned} \quad (\text{A13.10.6})$$

und durch Einsetzen in Gleichung (A13.10.3) schließlich

$$\Delta E = 2 \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} \left[\xi_{\mathbf{k}} - \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} + \frac{|\Delta_{\mathbf{k}}|^2}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}} \right]. \quad (\text{A13.10.7})$$

Um die Diskussion einfach zu halten, benutzen wir im Folgenden $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta$. Wir können nun unter Verwendung der Zustandsdichte für eine Spin-Richtung $D(0)/2 = D(E_F)/2$ (bei der Summation wird nicht über die Spin-Projektionen aufsummiert) die Summation in eine Integration überführen. Mit der Substitution $x = \xi_{\mathbf{k}}/\Delta$ erhalten wir

$$\Delta E = D(E_F) \Delta^2 \int_0^z dx \left[x - \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right]. \quad (\text{A13.10.8})$$

Hierbei ist $z = \hbar\omega_D/\Delta$ die durch die Debye-Energie bestimmte obere Integrationsgrenze. Mit $\int dx \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + 1} + \sinh^{-1} x)$ sowie $\int dx (2\sqrt{x^2 + 1})^{-1} = \frac{1}{2} \sinh^{-1} x$ erhalten wir

$$\Delta E = D(E_F) \Delta^2 \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} (z\sqrt{z^2 + 1} - \sinh^{-1} z) + \frac{1}{2} \sinh^{-1} z \right]. \quad (\text{A13.10.9})$$

Da $z = \hbar\omega_D/\Delta \gg 1$ können wir $\sqrt{1 + 1/z^2} \simeq 1 + 1/2z^2$ verwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} D(E_F) \Delta^2 \left[z^2 - z^2 \left(1 + \frac{1}{2z^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4} D(E_F) \Delta^2. \end{aligned} \quad (\text{A13.10.10})$$

Wir erhalten also die Kondensationsenergie bei $T = 0$ zu

$$E_{\text{Kond}} = \langle \mathcal{H}_{\text{BCS}} \rangle - \langle \mathcal{H}_n \rangle = -\frac{1}{4} D(E_F) \Delta^2(0). \quad (\text{A13.10.11})$$

Um die Energiedichte zu berechnen, müssen wir noch durch das Volumen teilen und erhalten

$$\frac{E_{\text{Kond}}}{V} = -\frac{1}{4} \frac{D(E_F)}{V} \Delta^2(0) = -\frac{1}{4} N_F \Delta^2(0). \quad (\text{A13.10.12})$$

Verwenden wir noch $N_F = 3n/2E_F$ und die BCS-Beziehung $\Delta(0)/k_B T_c = \pi/e^\gamma = 1.76387699$ (mit der Euler-Konstante $\gamma = 0.5772 \dots$), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{Kond}}}{V} &= -\frac{3}{8} n \frac{\Delta^2(0)}{E_F} = -\frac{3\pi^2}{8e^{2\gamma}} n \frac{(k_B T_c)^2}{E_F} \\ &= -1.166723 \dots n \frac{(k_B T_c)^2}{E_F}. \end{aligned} \quad (\text{A13.10.13})$$

Hierbei ist n die Elektronendichte. Die Kondensationsenergie ist also von der Größenordnung $(k_B T_c)^2/E_F$. Die charakteristische Energie der Wechselwirkung $\hbar\omega_D$ geht dagegen im Grenzfall schwacher Kopplung nicht in die Kondensationsenergie ein. Das Ergebnis (A13.10.13) können wir intuitiv verstehen. Da die Verschmierung der Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes bei $T = 0$ etwa $\Delta(0)$ beträgt, kann an dem Paarwechselwirkungsprozess nur ein kleiner Anteil $\Delta(0)/E_F$ aller Elektronen teilnehmen. Da dieser Anteil der Elektronen im Mittel eine Energieabsenkung von etwa $\Delta(0)$ erfährt, ergibt sich eine Kondensationsenergiedichte $\sim \Delta^2(0)/E_F$.

