

11 Dielektrische Eigenschaften

A11.1 Polarisierbarkeit von atomarem Wasserstoff



Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem äußeren elektrischen Feld, das senkrecht zur Bahnebene steht (semiklassische Betrachtungsweise). Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die elektronische Polarisierbarkeit des Wasserstoffatoms $\alpha_{el} = 4\pi a_0^3$ gilt, wobei a_0 der Radius der ungestörten Bahn ist. Nehmen Sie an, dass das angelegte Feld in x -Richtung zeigt und die Bahnebene in der yz -Ebene liegt. Die Auslenkung x soll außerdem klein gegenüber a_0 sein.

Anmerkung: Die x -Komponente des Kernfeldes an der ausgelenkten Position der Elektronenbahn muss gleich dem angelegten Feld sein.

Lösung

Die elektronische Polarisierbarkeit des Wasserstoffatoms α_{el} ergibt sich

$$\mathbf{p}_{el} = \epsilon_0 \alpha_{el} \mathbf{E}. \quad (\text{A11.1.1})$$

Das elektrische Dipolmoment lässt sich wie folgt berechnen: Eine Ladung erfährt im elektrischen Feld \mathbf{E}_{ext} die Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{ext}$. Zwei Ladungen üben aufeinander die Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A11.1.2})$$

aus. Hierbei ist $\hat{\mathbf{r}}$ der Einheitsvektor in Richtung von \mathbf{r} . Wir nehmen nun an, dass sich das Proton mit Ladung $q_1 = e$ (siehe Abb. 11.1) im Ursprung befindet. Durch das in x -Richtung angelegte elektrische Feld $E_{ext,x}$ entsteht auf das Proton in x -Richtung die Kraft $+eE_{ext,x}$ und auf das Elektron die Kraft $-eE_{ext,x}$. Dadurch werden der negative und der positive Ladungsschwerpunkt des Atoms in x -Richtung gegeneinander verschoben. Um die Gleichgewichtsverschiebung x zu bestimmen, müssen wir die Kraft aufgrund des angelegten Feldes der rücktreibenden Kraft aufgrund der Anziehung der beiden Ladungen gleichsetzen. Für die x -Komponente ergibt sich

$$eE_{ext,x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{x}{r}. \quad (\text{A11.1.3})$$

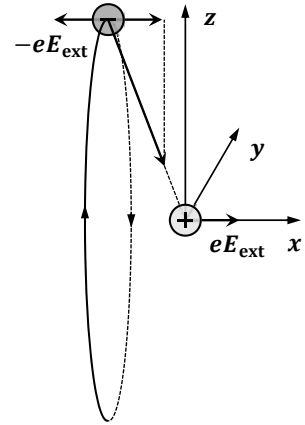


Abb. 11.1: Zur Ableitung der elektronischen Polarisierbarkeit des Wasserstoffatoms.

Damit erhalten wir das elektrische Dipolmoment

$$p_{\text{el},x} = ex = E_{\text{ext},x} 4\pi\epsilon_0 r^3 \quad (\text{A11.1.4})$$

und für das elektrische Feld

$$E_{\text{ext},x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ex}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_x^{\text{el}}}{r^3}. \quad (\text{A11.1.5})$$

Das elektrische Dipolmoment weist in positive x -Richtung (wir können uns entweder die Ladung $-e$ in negativer x -Richtung oder die Ladung $+e$ in positiver x -Richtung verschoben denken).

Da $x \ll a_0$, können wir benutzen, dass

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = y^2 + a^2 \approx a_0^2 \quad (\text{A11.1.6})$$

gilt, und wir erhalten

$$p_{\text{el},x} = ex = E_{\text{ext},x} 4\pi\epsilon_0 a_0^3. \quad (\text{A11.1.7})$$

Vergleichen wir nun die Definition des elektrischen Dipolmoments (A11.1.1) mit (A11.1.7), so erhalten wir

$$\alpha_{\text{el}} = \frac{p_{\text{el},x}}{\epsilon_0 E_{\text{ext},x}} = 4\pi a_0^3. \quad (\text{A11.1.8})$$

Wichtig ist, dass die Polarisierbarkeit α_{el} eines Atoms über das lokale, am Ort des Atoms wirkende elektrische Feld E_{lok} definiert wird. In dieser Aufgabe ist das lokale Feld natürlich gleich dem äußeren Feld, da wir nur ein einzelnes Atom betrachtet haben und die Wirkung der Dipolfelder benachbarter Atome dann nicht berücksichtigen müssen.

A11.2 Makroskopisches elektrisches Feld



Wird ein ellipsoidförmiger dielektrischer Festkörper in ein homogenes elektrisches Feld \mathbf{E}_{ext} gebracht, so wird dieser homogen polarisiert und wir erhalten im Inneren des Festkörpers ein makroskopisches elektrisches Feld der Stärke $\mathbf{E}_{\text{mak}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_N$ mit dem Depolarisationsfeld $\mathbf{E}_N = -N\mathbf{P}/\epsilon_0$. Die Größe N ist dabei der Depolarisationsfaktor der Probe, der im allgemeinsten Fall einen Tensor 2. Stufe darstellt, und \mathbf{P} die in der Probe vorliegende homogene Polarisation.

- Zwischen den Hauptkomponenten des Depolarisationstensors besteht die Beziehung $N_{xx} + N_{yy} + N_{zz} = 1$. Welche Werte müssen die Hauptkomponenten für einen langen Stab, eine Kugel und eine dünne Scheibe annehmen?
- Leiten Sie einen Ausdruck für das in der Probe herrschende makroskopische elektrische Feld \mathbf{E}_{mak} her.
- Welcher Zusammenhang besteht in diesem Fall zwischen der dielektrischen Verschiebungsdichte \mathbf{D} und dem extern angelegten elektrischen Feld \mathbf{E}_{ext} ?
- Berechnen Sie das Verhältnis $E_{\text{mak}}/E_{\text{ext}}$ für einen Festkörper mit einer Dielektrizitätskonstante von $\epsilon = 2.5$, wenn dieser die Form eines langen Stabes, einer Kugel oder einer dünnen Scheibe besitzt. Das externe elektrische Feld soll dabei parallel zum Stab bzw. senkrecht zur Scheibe angelegt sein.

Lösung

Nur im Falle eines einzelnen Atoms entspricht das von außen angelegte externe Feld \mathbf{E}_{ext} auch dem am Ort des Atoms wirkenden lokalen Feld \mathbf{E}_{lok} . In einem Festkörper ergibt sich das lokale elektrische Feld aus dem von außen angelegten Feld und der Summe aller Dipolfelder der einzelnen Atome im Festkörper. Für das lokale elektrische Feld \mathbf{E}_{lok} gilt hierbei in "linear response"

$$\mathbf{E}_{\text{lok}} = \mathbf{E}_{\text{mak}} + \mathbf{E}_L = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_N + \mathbf{E}_L \quad (\text{A11.2.1})$$

mit dem makroskopischen Feld

$$\mathbf{E}^{\text{mak}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_N, \quad (\text{A11.2.2})$$

wobei $\mathbf{E}_L = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$ das Lorentz-Feld und $\mathbf{E}_N = -\frac{N\mathbf{P}}{\epsilon_0}$ das Depolarisationsfeld bezeichnet mit dem Depolarisations- oder Entelektrisierungsfaktor N (siehe Abb. 11.2). Das Depolarisationsfeld entsteht dadurch, dass durch die von \mathbf{E}_{ext} erzeugte endliche Polarisation \mathbf{P} Oberflächenladungen entstehen, die zu einem der Polarisation entgegengesetzten elektrischen Feld führen.

- Für eine *Kugel* müssen aus Symmetriegründen die drei Hauptkomponente des Depolarisationstensors gleich sein (eine homogene Kugel vorausgesetzt). Es gilt dann $N_{xx} = N_{yy} = N_{zz} = 1/3$.

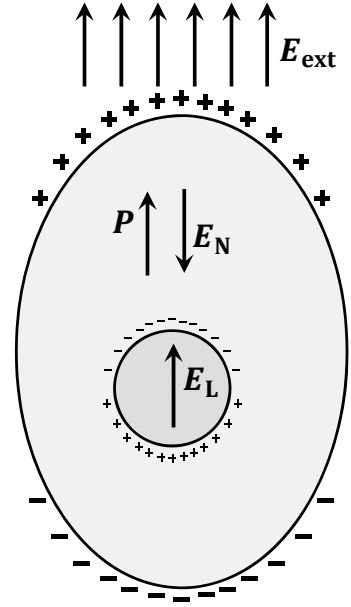


Abb. 11.2: Zur Diskussion des Depolarisationsfelds E_N , des Lorentz-Felds E_L und des lokalen Felds E_{lok} , das sich aus der Summe von äußerem Feld E_{ext} , Lorentz-Feld E_L und Depolarisationsfeld E_N ergibt.

Für einen *Stab*, dessen Länge als unendlich angenommen wird, tritt in dessen Längsrichtung keine Depolarisation auf. Falls die Längsrichtung die z -Richtung ist, gilt $N_{zz} = 0$. Aufgrund der Zylindersymmetrie in der xy -Ebene müssen die beiden verbleibenden Komponenten wiederum gleich sein, d. h. es gilt $N_{xx} = N_{yy} = 1/2$. Für eine in der xy -Ebene unendlich ausgedehnte *Scheibe* tritt innerhalb der Ebene keine Depolarisation auf. Das heißt, es gilt $N_{xx} = N_{yy} = 0$. Damit muss für die dritte Hauptkomponente $N_{zz} = 1$ gelten.

Reale Proben besitzen immer endliche Abmessungen, weshalb die für den Stab und die Scheibe ermittelten Werte nur Näherungen darstellen.

- (b) Wir gehen von einem linearen Zusammenhang $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_{\text{mak}}$ zwischen Polarisation und makroskopischem elektrischem Feld aus. Es gilt dann:

$$\mathbf{E}_{\text{mak}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_N = \mathbf{E}_{\text{ext}} - N \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - N \chi \mathbf{E}_{\text{mak}}. \quad (\text{A11.2.3})$$

Lösen wir nach \mathbf{E}_{mak} auf, so erhalten wir

$$\mathbf{E}_{\text{mak}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}}{1 + N \chi} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}}{1 + N(\epsilon - 1)} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}}{1 - N + N \epsilon}. \quad (\text{A11.2.4})$$

Das heißt, das makroskopische elektrische Feld im Inneren eines Festkörpers hängt linear von der Stärke des externen Feldes ab. Da $0 \leq N \leq 1$ und χ stets positiv ist, können wir folgern, dass die Stärke des makroskopischen Feldes im Dielektrikum stets kleiner oder gleich der Stärke des externen Feldes ist.

- (c) Der allgemeine Zusammenhang zwischen der dielektrischen Verschiebungsdichte \mathbf{D} und dem makroskopischen elektrischen Feld \mathbf{E}^{mak} lautet

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}} + \mathbf{P}. \quad (\text{A11.2.5})$$

Mit $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_{\text{mak}}$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_{\text{mak}} = (1 + \chi) \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}} \\ &= \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}}. \end{aligned} \quad (\text{A11.2.6})$$

Setzen wir jetzt noch (A11.2.4) ein, so erhalten wir

$$\mathbf{D} = (1 + \chi) \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}} = \frac{1 + \chi}{1 + N\chi} \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{ext}}. \quad (\text{A11.2.7})$$

- (d) Für einen Festkörper mit $\epsilon = 2.5$ erhalten wir die elektrische Suszeptibilität zu $\chi = \epsilon - 1 = 1.5$.

Für einen *langen Stab* beträgt für die Feldrichtung parallel zum Stab der Depolarisationsfaktor $N = 0$ und damit nach (A11.2.4)

$$\mathbf{E}_{\text{mak}} = \mathbf{E}_{\text{ext}}.$$

Das heißt, das elektrische Feld im Innern des Stabes stimmt mit dem von außen angelegten Feld überein.

Bei einer *dünnen Scheibe* ist für ein äußeres Feld senkrecht zur Scheibe $N = 1$ und damit

$$\mathbf{E}_{\text{mak}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}}{1 + \chi} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}}{\epsilon}.$$

Das bedeutet, dass das externe Feld im Innern der Scheibe auf $\mathbf{E}_{\text{ext}}/\epsilon$ abgeschwächt wird. Für den betrachteten Festkörper entspricht die Absenkung gerade einem Faktor $1/2.5 = 0.4$.

Für die *kugelförmige Probe* ist $N = 1/3$ und damit das Feldstärkeverhältnis

$$\mathbf{E}_{\text{mak}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}}{1 + \frac{\chi}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon-1}{3}} \mathbf{E}_{\text{ext}} = \frac{2}{3} \mathbf{E}_{\text{ext}}.$$

A11.3 Polarisation einer Kugel



Betrachten Sie eine isolierende Kugel mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ in einem homogenen elektrischen Feld \mathbf{E}_{ext} .

- Welchen Wert hat das über das gesamte Volumen der Kugel gemittelte elektrische Feld \mathbf{E} innerhalb der Kugel?
- Welchen Wert hat die Polarisation \mathbf{P} in der Kugel? Setzen Sie bei der Rechnung voraus, dass das Feld \mathbf{E}_{ext} beim Einbringen der Kugel unverändert bleibt. (Hinweis: Es ist hier nicht nötig das lokale elektrische Feld \mathbf{E}_{lok} zu berechnen.)

Lösung

Die effektive Feldstärke in einem Kondensator ist bei teilweiser Ausfüllung mit einem Dielektrikum kleiner (oder höchstens gleich) der effektiven Feldstärke bei gesamter Ausfüllung des Kondensators. Dies bezeichnet man als Depolarisation oder Entelektrisierung. Handelt es sich um einen Rotationsellipsoid, so ist das Feld im Innenraum des Körpers homogen. Dies ist ein Resultat, das aus der klassischen Elektrodynamik bekannt ist (siehe hierzu Abb. 11.3).

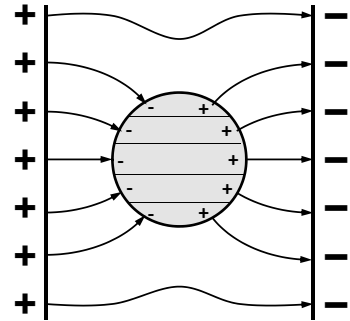


Abb. 11.3: Isolierende Kugel in einem homogenen elektrischen Feld.

- (a) Es gilt $\mathbf{E}_{\text{mak}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_N$, wobei \mathbf{E}_{mak} das effektive Feld im Inneren der Kugel, \mathbf{E}_{ext} das angelegte Feld und \mathbf{E}_N das durch die Polarisation des Kugelmateriale erzeugte Depolarisationsfeld ist. Weiterhin gilt $\mathbf{E}_N = -N\mathbf{P}/\epsilon_0$ mit $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E}_{\text{mak}}$. Der Depolarisationsfaktor einer Kugel ist $N = \frac{1}{3}$. Damit erhalten wir

$$\mathbf{E}_{\text{mak}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{1}{3} \frac{\epsilon_0\chi\mathbf{E}_{\text{mak}}}{\epsilon_0} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{\chi}{3}\mathbf{E}_{\text{mak}} \quad (\text{A11.3.1})$$

und damit

$$\mathbf{E}_{\text{mak}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}}{1 + \frac{\chi}{3}}. \quad (\text{A11.3.2})$$

- (b) Die Polarisation können wir einfach angeben, ohne ein lokales Feld berechnen zu müssen, da das elektrische Feld in einem Rotationsellipsoiden homogen ist. Da $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E}_{\text{mak}}$, gilt

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_0\chi}{1 + \frac{\chi}{3}} \mathbf{E}_{\text{ext}}. \quad (\text{A11.3.3})$$



A11.4 Plasmafrequenz, elektrische Leitfähigkeit und Reflexionsvermögen von Metallen

Mit optischen Messungen bestimmen Sie die Plasmafrequenz eines organischen Leiters zu $\omega_p = 1.8 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Die Relaxationszeit der Elektronen in diesem Material beträgt bei Raumtemperatur $\tau = 2.83 \times 10^{-15} \text{ s}$.

- (a) Berechnen Sie aus diesen Daten die elektrische Leitfähigkeit σ . Gehen Sie dabei von einer verschwindend kleinen elektronischen Polarisierbarkeit des Materials aus. Hinweis:

Die effektive Masse der Ladungsträger ist nicht bekannt und wird hier auch nicht benötigt.

- (b) Aus der Kristall- und chemischen Struktur erhält man die Dichte der Leitungselektronen zu $n = 4.7 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$. Berechnen Sie mit diesem Wert die effektive Masse m^* der Elektronen.

In einem Metall sollen die Bedingungen $\omega\tau \ll 1$ und $\sigma(0) \gg \epsilon_0\omega$ erfüllt sein, wobei $\sigma(0) = ne^2\tau/m^*$ die Gleichstrom-Leitfähigkeit ist.

- (c) Zeigen Sie, dass die komplexe Dielektrizitätskonstante dieses Metalls durch $\epsilon = \epsilon_0(1 + \sigma(0)/\epsilon_0\omega)$ gegeben ist.
 (d) Berechnen Sie den komplexen Brechungsindex und zeigen Sie, dass im infraroten Wellenlängenbereich das Reflexionsvermögen durch

$$R \simeq 1 - \sqrt{\frac{8\epsilon_0\omega}{\sigma(0)}}$$

gegeben ist.

Lösung

Da die elektronische Polarisation des Materials verschwindend klein sein soll, können wir $\chi_{\text{el}} = 0$ und damit $\epsilon_{\text{el}} = 1 + \chi_{\text{el}} = 1$ setzen. Dies ist in vielen Fällen eine gute Näherung. Damit können wir für die Plasmafrequenz den Ausdruck

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0\epsilon_{\text{el}}m^*}} = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0m^*}} \quad (\text{A11.4.1})$$

verwenden.

- (a) Die elektrische Leitfähigkeit σ bei der Frequenz $\omega = 0$ ist gegeben durch

$$\sigma(0) = \frac{ne^2\tau}{m^*} = \frac{ne^2}{\epsilon_0m^*} \epsilon_0\tau = \omega_p^2 \epsilon_0\tau. \quad (\text{A11.4.2})$$

Mit $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ As/Vm}$ und den angegebenen Werten für ω_p und τ erhalten wir, $\sigma = 8.11 \times 10^4 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ oder $\rho = 1.23 \times 10^{-5} \Omega\text{m}$.

- (b) Lösen wir den Ausdruck für die Plasmafrequenz nach m^* auf, so erhalten wir

$$m^* = \frac{ne^2}{\epsilon_0\omega_p^2}. \quad (\text{A11.4.3})$$

und damit $m^* = 4.19 \times 10^{-30} \text{ kg}$ oder $m^*/m_e = 4.61$. Man beachte, dass m^* nur dann mit der effektiven Masse identisch ist, wenn die Fermi-Oberfläche eine Kugel ist. Ansonsten erhält man die effektive Masse im niederfrequenten Bereich, während im hochfrequenten Bereich für beliebige Fermi-Oberflächen eine sogenannte optische effektive Masse eingeführt wird.

Zur Lösung des zweiten Aufgabenteils gehen wir von der dielektrischen Funktion eines freien Elektronengases aus (vergleiche R. Gross und A. Marx, *Festkörperphysik*, Walter de Gruyter GmbH (2018), Abschnitt 11.6.1). Die gesamte dielektrische Funktion erhalten wir hierbei als Summe aus dem Beitrag der gebundenen $\epsilon_{\text{el}}(\omega)$ und vollkommen freien Elektronen $\chi_{\text{L}}(\omega)$:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi_{\text{el}}(\omega) + \chi_{\text{L}}(\omega) = \epsilon_{\text{el}}(\omega) + \chi_{\text{L}}(\omega) \quad (\text{A11.4.4})$$

mit

$$\chi_{\text{L}}(\omega) = -\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega} \frac{1}{\left(\omega + i\frac{1}{\tau}\right)} \quad (\text{A11.4.5})$$

Aus Gleichung (A11.4.4) und (A11.4.5) ergibt sich

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{el}}(\omega) \left[1 - \omega_{\text{p}}^2 \tau^2 \frac{1 - \frac{i}{\omega\tau}}{1 + \omega^2 \tau^2} \right]. \quad (\text{A11.4.6})$$

Teilen wir diese Gleichung in Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir (siehe Abb. 11.4)

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_{\text{el}}(\omega) \left(1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) = \epsilon_{\text{el}}(\omega) \left(1 - \frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \epsilon_{\text{el}}(\omega) \omega} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \quad (\text{A11.4.7})$$

$$\epsilon_i(\omega) = \epsilon_{\text{el}}(\omega) \left(\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) = \epsilon_{\text{el}}(\omega) \left(\frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \epsilon_{\text{el}}(\omega) \omega} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \quad (\text{A11.4.8})$$

und können damit die angegebenen Grenzfälle betrachten.

- (c) Für $\omega\tau \ll 1$ und $\sigma(0) \gg \epsilon_0 \omega$ (niederfrequenter Bereich), wobei $\sigma(0) = ne^2\tau/m^*$ die Gleichstrom-Leitfähigkeit ist, ist der Imaginärteil der dielektrischen Funktion wesentlich größer als der Realteil. Aus (A11.4.8) erhalten wir

$$\epsilon_i(\omega) = \epsilon_{\text{el}}(\omega) \left(\frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \epsilon_{\text{el}}(\omega) \omega} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \simeq \frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \omega}. \quad (\text{A11.4.9})$$

Für die dielektrische Funktion des Metalls ergibt sich also $\epsilon(\omega) = i\epsilon_i(\omega) = i\sigma(0)/\epsilon_0 \omega$.

- (d) Das Quadrat des komplexen Brechungsindex $\tilde{n} = n + i\kappa$ ist gegeben durch $\tilde{n}^2 = n^2 + 2in\kappa - \kappa^2 = \epsilon_r(\omega) + i\epsilon_i(\omega)$. Da der Realteil der dielektrischen Funktion vernachlässigbar klein ist, ergibt sich daraus sofort näherungsweise $n^2 \simeq \kappa^2$ und $2in\kappa \simeq 2i\kappa^2 = i\epsilon_i(\omega) \simeq i\sigma(0)/\epsilon_0 \omega$, also

$$n \simeq \kappa \simeq \sqrt{\frac{\sigma(0)}{2\epsilon_0 \omega}}. \quad (\text{A11.4.10})$$

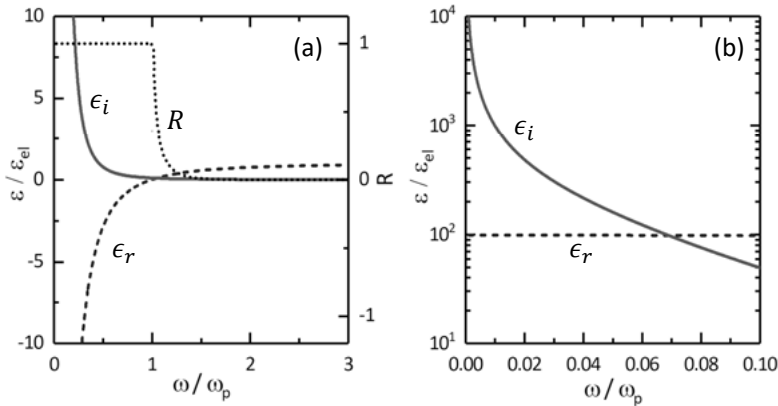


Abb. 11.4: (a) Real- ϵ_r und Imaginärteil ϵ_i der dielektrischen Funktion sowie Reflexionsvermögen R eines freien Elektronengases. (b) Niedrigfrequenter Bereich der dielektrischen Funktion. Für Metalle mit Ladungsträgerdichten im Bereich von 10^{22} cm^{-3} liegt die Plasmafrequenz im Bereich von $\omega_p \approx 10^{15} - 10^{16} \text{ Hz}$ und die Streuzeit τ typischerweise im Bereich von $10^{-13} - 10^{-14} \text{ s}$.

Das Reflexionsvermögen

$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{(n - 1)^2 + \kappa^2}{(n + 1)^2 + \kappa^2} = 1 - \frac{4n}{(n + 1)^2 + \kappa^2} \quad (\text{A11.4.11})$$

können wir für $n \simeq \kappa \gg 1$ durch $R \simeq 1 - 2/n$ annähern. Wir erhalten dann mit $n^2 \simeq \kappa^2 \simeq \sigma(0)/2\epsilon_0\omega$ die sogenannte **Hagen-Rubens-Relation** (siehe Abb. 11.4)

$$R \simeq 1 - \sqrt{\frac{8\epsilon_0\omega}{\sigma(0)}}. \quad (\text{A11.4.12})$$

Wir sehen, dass die Abweichung vom idealen Reflexionsvermögen $R = 1$ umso geringer ist, je höher die Leitfähigkeit eines Metalls ist. Für Silber mit einer Leitfähigkeit von $6.25 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ erhalten wir im Infraroten bei einer Frequenz von 10^{13} s^{-1} ein Reflexionsvermögen von $R = 0.997$, also einen Wert sehr nahe bei eins. Selbst im sichtbaren Bereich ist $R > 0.96$. Wir können deshalb versilberte Flächen gut als Spiegel verwenden.

A11.5 Plasmafrequenz von Indium-dotiertem Zinkoxid (ITO)

ITO ist elektrisch leitend und im sichtbaren Bereich transparent. Es besitzt deshalb eine große Bedeutung für die Bildschirmtechnik.

- Eine ITO-Schicht soll eine Ladungsträgerdichte von $5 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ haben. Bis zu welcher Wellenlänge ist sie transparent? Nehmen Sie $m^* = m_e$ und $\epsilon_\infty = 3.84$ an.
- Bei welcher Wellenlänge ist die Reflektivität minimal?

Lösung

Wir betrachten ITO als ein Metall mit einer geringen Ladungsträgerdichte.

- (a) Um abzuschätzen, bis zu welcher Wellenlänge ITO transparent ist, bestimmen wir zunächst seine Plasmafrequenz ω_p . Mit dem Ausdruck für ein freies Elektronengas

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 \epsilon_{el} m^*}} \quad (\text{A11.5.1})$$

erhalten wir mit $m^* = m_e$, $\epsilon_{el} = 3.84$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ As/Vm}$ und $n = 5 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$

$$\omega_p = 2 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}, \quad f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 3 \times 10^{14} \text{ Hz}, \quad \lambda_p = \frac{c}{f_p} = 1 \mu\text{m}. \quad (\text{A11.5.2})$$

Im Frequenzbereich $\omega > \omega_p$ wird der Realteil der dielektrischen Funktion positiv. Da in diesem Frequenzbereich gleichzeitig $\omega\tau \gg 1$, wird der Imaginärteil vernachlässigbar klein. Wir erhalten [vergleiche (A11.4.7)]

$$\tilde{n} \simeq \sqrt{\epsilon_{el}(\omega)}. \quad (\text{A11.5.3})$$

ITO wird, da gleichzeitig der Absorptionskoeffizient $\kappa \simeq 0$ ist, für elektromagnetische Strahlung mehr oder weniger transparent mit einem Absorptionskoeffizienten [vergleiche (A11.4.8)]

$$K \equiv \frac{\epsilon_i \omega}{c} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \tau c} \ll 1. \quad (\text{A11.5.4})$$

Für $\omega < \omega_p$ wird eine auf ITO auftreffende elektromagnetische Welle dagegen totalreflektiert, da der Realteil der dielektrischen Funktion hier negativ wird. Da für ITO $f_p = \omega_p/2\pi$ gerade knapp unterhalb des sichtbaren Frequenzbereichs liegt, wird sichtbares Licht nur wenig reflektiert, Infrarotstrahlung dagegen sehr stark. Dieses ideale Verhalten wird üblicherweise für Metalle nicht beobachtet, da sich der Antwort des Elektronensystems durch Intraband-Übergänge auch immer noch Beiträge durch Interbandübergänge überlagern, die zu einem endlichen Wert des Imaginärteils der dielektrischen Funktion führen. Da solche Interbandübergänge bei ITO erst bei etwa 2.8 eV einsetzen, was knapp oberhalb des sichtbaren Frequenzbereichs liegt, ist ITO im Sichtbaren sehr gut transparent, im Infraroten dagegen stark reflektierend. Dies kann z. B. zur Reduktion von Wärmeverluststrahlung durch Fensterscheiben verwendet werden.

- (b) Das Reflexionsvermögen von ITO wird für $\tilde{n} \simeq \sqrt{\epsilon_r(\omega)} = 1$ also für $\epsilon_r(\omega) = 1$ minimal. Wir benutzen [vergleiche (A11.4.7)]

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \quad (\text{A11.5.5})$$

und berücksichtigen, dass im Bereich optischer Frequenzen $\omega\tau \gg 1$ eine gute Näherung ist. Setzen wir $\epsilon_r(\omega) = 1$ und lösen nach der Frequenz auf, so erhalten wir

$$\omega = \omega_p \sqrt{\frac{\epsilon_\infty}{\epsilon_\infty - 1}}. \quad (\text{A11.5.6})$$

Mit $\epsilon_\infty = 3.84$ und $\omega_p = 2 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ erhalten wir das Minimum der Reflektivität für $\omega = 2.32 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Dies entspricht einer Wellenlänge von 810 nm.

A11.6 Plasmonen-Schwingung einer metallischen Kugel



Die Frequenz der langwelligen Plasmonenschwingung einer metallischen Kugel (homogene Verschiebung der Elektronen gegenüber den Ionenrümpfen innerhalb der gesamten Kugel) wird durch das Depolarisationsfeld $\mathbf{E}_N = -N\mathbf{P} = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$ mit $N = 1/3$ für eine Kugel bestimmt. Die Polarisation beträgt dabei $\mathbf{P} = n(-e)\mathbf{r}$, wobei \mathbf{r} die mittlere Auslenkung der Elektronen mit der Dichte n ist. Zeigen Sie, dass sich aus $\mathbf{F} = (-e)\mathbf{E} = m\ddot{\mathbf{r}}$ die Resonanzfrequenz des freien Elektronengases zu $\omega_0^2 = \frac{ne^2}{3\epsilon_0 m}$ ergibt. Weil alle Elektronen an der Schwingung beteiligt sind, bezeichnen wir eine solche Anregung als kollektive Anregung oder kollektive Schwingung des Elektronengases.

Lösung

Wir wollen mit einer allgemeinen Betrachtung von longitudinalen und transversalen Moden der Polarisation in einem dielektrischen Festkörper beginnen. Nehmen wir an, dass die Atome eine Auslenkung in \mathbf{r} -Richtung erfahren, so stellt

$$\mathbf{P}_{\parallel} = \mathbf{P}_{0\parallel} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (\text{A11.6.1})$$

eine longitudinale Polarisationswelle und

$$\mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{P}_{0\perp} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (\text{A11.6.2})$$

eine transversale Welle dar. Die longitudinale Welle muss die Bedingung

$$\nabla \times \mathbf{P}_{\parallel} = i\mathbf{q} \times \mathbf{P}_{0\parallel} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = 0 \quad (\text{A11.6.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_{\parallel} = i\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}_{0\parallel} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \neq 0 \quad (\text{A11.6.4})$$

erfüllen, während die transversale Welle der Bedingung

$$\nabla \times \mathbf{P}_{\perp} = i\mathbf{q} \times \mathbf{P}_{0\perp} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \neq 0 \quad (\text{A11.6.5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_{\perp} = i\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}_{0\perp} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = 0 \quad (\text{A11.6.6})$$

genügen muss.

In einem elektrisch neutralen dielektrischen Medium wie einem Metall (Raumladungsdichte $\rho = 0$) muss die Divergenz der dielektrischen Verschiebung verschwinden. Wir benutzen

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}} + \mathbf{P} \\ \mathbf{P} &= \chi(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}} = [\epsilon(\omega) - 1] \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}} \\ \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{mak}} &= \frac{\mathbf{P}}{\epsilon(\omega) - 1} \end{aligned} \quad (\text{A11.6.7})$$

und erhalten

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{mak}} = \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega) - 1} \nabla \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (\text{A11.6.8})$$

Da für eine longitudinale Welle aber $\nabla \cdot \mathbf{P}_{\parallel} \neq 0$ gelten muss, kann (A11.6.8) nur für

$$\epsilon(\omega) = 0, \quad \omega = \omega_{\parallel} \quad (\text{A11.6.9})$$

erfüllt werden. Das heißt, eine longitudinale Schwingungsmoden kann nur für eine Eigenfrequenz ω_{\parallel} existieren, für die die dielektrische Funktion verschwindet. Solche longitudinalen Moden können nicht mit transversalen elektromagnetischen Wellen wechselwirken und deshalb nicht mit elektromagnetischer Strahlung angeregt werden. Eine Anregung der longitudinalen Moden kann z. B. durch Beschuss mit hochenergetischen Elektronen erfolgen.

Wir sehen, dass die Bedingung $\epsilon(\omega) = 0$ die Eigenfrequenz ω_{\parallel} der longitudinalen Schwingungsmoden festlegt. Wir betrachten nun den langwelligen Fall ($q \rightarrow 0$ bzw. $\lambda = 2\pi/q \rightarrow \infty$), also eine einheitliche Auslenkung des gesamten Elektronengases mit mittlerer Auslenkung \mathbf{r} . Für diesen Grenzfall haben wir in der Aufgabe A7.7 die dielektrische Funktion eines Metalls berechnet. Das Resultat war [vergleiche (A7.7.21)]

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{-i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} \stackrel{\omega\tau \gg 1}{\approx} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (\text{A11.6.10})$$

Für ein solches Metall folgt aus der Bedingung $\epsilon(\omega) = 0$ sofort, dass $\omega = \omega_{\parallel} = \omega_p$. Dies bedeutet, dass wir eine freie longitudinale Schwingung des Elektronengases mit der Plasmafrequenz ω_p erhalten. Die Quanten dieser Anregungen bezeichnen wir als Plasmonen. Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \mathbf{E}_N = \frac{e N \mathbf{P}}{\epsilon_0} = -N \frac{ne^2}{\epsilon_0} \mathbf{r} = -\frac{ne^2}{3\epsilon_0} \mathbf{r}. \quad (\text{A11.6.11})$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz

$$\omega_0^2 = N \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} = \frac{ne^2}{3\epsilon_0 m}. \quad (\text{A11.6.12})$$

Diese Eigenfrequenz unterscheidet sich von der Plasmafrequenz einer dünnen Metallplatte um den Faktor $1/3$. Dies resultiert daraus, dass der Depolarisationsfaktor einer dünnen Platte $N = 1$ (in Richtung parallel zur Platte) und derjenige einer Kugel nur $N = 1/3$ ist.



A11.7 Ausbreitung von polarisiertem Licht in ionisiertem Medium – Magnetooptik

Polarisiertes Licht breitet sich in einem vollkommen ionisierten, isotropen Medium mit Ladungsträgerdichte $n = N/V$ entlang der z -Achse aus. Das Medium soll sich in einem externen Magnetfeld $\mathbf{B}_{\text{ext}} = (0, 0, B)$ parallel zur z -Achse befinden.

- Leiten Sie zunächst die dielektrische Funktion, den Brechungsindex und den Absorptionskoeffizienten für den Fall $\mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$ für linear und zirkular polarisiertes Licht her.
- Wie sehen die entsprechenden Ausdrücke für den Fall $\mathbf{B}_{\text{ext}} \neq 0$ aus?
- Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit für den Fall $\mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$ und $\mathbf{B}_{\text{ext}} \neq 0$?
- Diskutieren sie, was mit der Polarisationssebene einer linear polarisierten Welle beim Durchgang durch ein Medium der Dicke d passiert?
- Welche Effekte beobachtet man bei der Reflexion einer linear polarisierten Welle?

Lösung

Polarisation von Licht: Wir diskutieren zunächst die Polarisation von Licht. Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen, das heißt, die Vektoren des elektrischen und magnetischen Feldes stehen senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Von linear polarisiertem Licht sprechen wir, wenn das elektrische Feld immer in nur einer Richtung in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingt. Für eine linear polarisierte Welle mit Wellenvektor $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, die sich in z -Richtung ausbreitet, können wir schreiben

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \widehat{\mathbf{e}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{A11.7.1})$$

Hierbei ist E_0 die Amplitude des elektrischen Feldes und $\widehat{\mathbf{e}} \perp \mathbf{k}$ der Einheitsvektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Wir sprechen von elliptisch polarisiertem Licht, wenn sich die Spitze des E -Feldvektors in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung auf einer Ellipse bewegt. Diese Bewegung kommt durch die Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen zustande, die zueinander senkrecht mit einer Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen 0 und $\pi/2$ schwingen. Für eine elliptisch polarisierte Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, können wir schreiben

$$\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\widehat{\mathbf{x}} \pm \widehat{\mathbf{y}} e^{i\Delta\varphi}) e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{A11.7.2})$$

mit den Einheitsvektoren $\widehat{\mathbf{x}}$ und $\widehat{\mathbf{y}}$ in x - und y -Richtung. Wir können dies in Matrixform durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_+ \\ \mathbf{E}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\Delta\varphi} \\ 1 & -e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix} \quad (\text{A11.7.3})$$

ausdrücken, mit

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) = \widehat{\mathbf{x}} E_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t) = \widehat{\mathbf{y}} E_0 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (\text{A11.7.4})$$

Wir sprechen von rechts- (\mathbf{E}_+) und linkselliptisch (\mathbf{E}_-) polarisiertem Licht, je nachdem ob sich der E -Feldvektor im oder gegen den Uhrzeigersinn bewegt. Beträgt der Phasenunterschied $\Delta\varphi$ zwischen den beiden Schwingungen gerade $\Delta\varphi = \pi/2$ und sind die Amplituden des elektrischen Feldes gleich groß, so beschreibt die Spitze des E -Feldvektors einen Kreis. In diesem speziellen Fall erhalten wir zirkular polarisiertes Licht:

$$\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\widehat{\mathbf{x}} \pm i\widehat{\mathbf{y}}) e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{A11.7.5})$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_+ \\ \mathbf{E}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix}. \quad (\text{A11.7.6})$$

Wir sehen ferner leicht, dass wir umgekehrt linear polarisiertes Licht durch Überlagerung von rechts- und linkszirkular polarisiertem Licht erhalten können. Für eine in x - bzw. y -

Richtung linear polarisierte Welle können wir schreiben

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_+ + E_-) e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{A11.7.7})$$

$$\mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (E_+ - E_-) e^{i(kz - \omega t)} . \quad (\text{A11.7.8})$$

In Matrixform lautet dieser Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} . \quad (\text{A11.7.9})$$

- (a) Als Beispiel für ein völlig ionisiertes Medium betrachten wir ein Metall mit Ladungsträgerdichte $n = N/V$. Die Elektronen des Metalls sind nicht mehr an die Ionenrümpfe gebunden und frei beweglich. Es treten also keine Rückstellkräfte auf. Wir betrachten zunächst den Fall $B_{\text{ext}} = 0$ für linear polarisiertes Licht mit $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{x}} E_0 e^{i(kz - \omega t)}$, das sich in z -Richtung ausbreitet [$\mathbf{k} = (0, 0, k)$]. Die Bewegungsgleichung für die Metall-elektronen lautet

$$m^* \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m^*}{\tau} \frac{dx}{dt} = -eE(t) . \quad (\text{A11.7.10})$$

Hierbei ist x die homogene Auslenkung der Elektronen mit effektiver Masse m^* in x -Richtung gegenüber den positiven Ionenrümpfen. Der Term auf der rechten Seite beschreibt die antreibende Kraft, der erste Term auf der linken Seite den Trägheitsterm und der zweite einen Reibungs- bzw. Dämpfungsterm. Dieser kommt durch die Stoßprozesse der Elektronen mit der mittleren Stoßzeit τ zustande. Die Lösung von (A11.7.10) lautet

$$x(t) = \frac{e}{m^*} \frac{1}{\omega \left(\omega + i \frac{1}{\tau} \right)} E(t) . \quad (\text{A11.7.11})$$

Die sich aus der Verschiebung $x(t)$ der Leitungselektronen relativ zu den positiven Ionenrümpfen ergebende Polarisation ist

$$P_L(t) = -enx(t) = -\frac{ne^2}{m^*} \frac{1}{\omega \left(\omega + i \frac{1}{\tau} \right)} E(t) . \quad (\text{A11.7.12})$$

Für den Beitrag der Leitungselektronen zur elektrischen Suszeptibilität erhalten wir damit

$$\chi_L(\omega) = \frac{P_L}{\epsilon_0 E} = -\frac{ne^2}{\epsilon_0 m^*} \frac{1}{\omega \left(\omega + i \frac{1}{\tau} \right)} . \quad (\text{A11.7.13})$$

Die gesamte dielektrische Funktion eines Metalls erhalten wir als Summe aus dem Beitrag der gebundenen und vollkommen freien Elektronen zu

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi_{\text{el}}(\omega) + \chi_L(\omega) . \quad (\text{A11.7.14})$$

Hierbei ist χ_{el} der Beitrag der an die Ionenrümpfe gebundenen Elektronen und χ_L derjenige der völlig freien Leitungselektronen. Im Bereich des sichtbaren Lichts ist der Beitrag χ_{el} üblicherweise klein und wir werden ihn im Folgenden vernachlässigen. Wir erhalten dann die komplexe dielektrische Funktion

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_r + i\epsilon_i = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m^*} \frac{1}{\omega \left(\omega + i\frac{1}{\tau} \right)} = 1 - \omega_p^2 \tau^2 \frac{1 - \frac{i}{\omega\tau}}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (\text{A11.7.15})$$

Hierbei ist

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m^*}} = \sqrt{\frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \tau}} \quad (\text{A11.7.16})$$

die **Plasmafrequenz**, wobei $\sigma(0) = \omega_p^2 \epsilon_0 \tau$ die elektrische Leitfähigkeit bei der Frequenz $\omega = 0$ ist. Für gute Metalle wie Kupfer, Silber oder Gold liegt die Plasmafrequenz im UV-Bereich. Für Metalle mit niedriger Ladungsträgerdichte oder stark dotierte Halbleiter (vergleiche hierzu Aufgabe A11.5) kann sie aber auch im sichtbaren oder sogar im infraroten Bereich liegen.

Fall 1: $\omega < \omega_p$ und $\omega\tau \ll 1$

Für $\omega < \omega_p$ und nicht allzu reine Materialien ($\omega\tau \ll 1$) ist der Realteil der dielektrischen Funktion negativ und wesentlich kleiner als der Imaginärteil. Der komplexe Brechungsindex $\tilde{n} = n + i\kappa = \sqrt{\epsilon}$ ist also rein imaginär. Wir erwarten deshalb $n^2 - \kappa^2 = 0$, das heißt $n \simeq \kappa$, und ferner $2n\kappa \simeq 2\kappa^2 \simeq \epsilon_i$. Für $\omega\tau \ll 1$ können wir die dielektrische Funktion des Metalls mit

$$\epsilon_i(\omega) = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} = \frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \omega} \quad (\text{A11.7.17})$$

annähern. Den daraus resultierenden Reflexions- und Absorptionskoeffizienten haben wir bereits in Aufgabe A11.4 abgeleitet. Wir erhielten dort

$$n \simeq \kappa \simeq \sqrt{\frac{\epsilon_i}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma(0)}{2\epsilon_0 \omega}} \gg 1. \quad (\text{A11.7.18})$$

Daraus ergibt sich der Reflexionskoeffizient (**Hagen-Rubens-Relation**)

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{(n - 1)^2 + \kappa^2}{(n + 1)^2 + \kappa^2} = 1 - \frac{4n}{(n + 1)^2 + \kappa^2} \simeq 1 - \frac{2}{n} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{8\epsilon_0 \omega}{\sigma(0)}}. \end{aligned} \quad (\text{A11.7.19})$$

Die Abweichung vom idealen Reflexionsvermögen $R = 1$ ist umso geringer, je höher die Leitfähigkeit des Metalls ist. Der Absorptionskoeffizient ergibt sich zu

$$K = \frac{2\kappa\omega}{c} \simeq \sqrt{\frac{2\sigma(0)\omega}{\epsilon_0 c^2}}. \quad (\text{A11.7.20})$$

Fall 2: $\omega < \omega_p$ und $\omega\tau \gg 1$

Für reine Materialien ($\omega\tau \gg 1$) können wir den Real- und Imaginärteil der dielektrischen Funktion mit

$$\epsilon_r(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{A11.7.21})$$

$$\epsilon_i(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau} \quad (\text{A11.7.22})$$

annähern. Da $\epsilon_r < 0$ für $\omega < \omega_p$, wird \tilde{n} rein imaginär und wir erhalten wieder $n^2 - \kappa^2 = 0$ und ferner $2n\kappa \simeq 2\kappa^2 \simeq \epsilon$. Daraus ergibt sich

$$n^2 \simeq \kappa^2 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau} \right) \stackrel{\omega\tau \gg 1}{\simeq} \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \quad (\text{A11.7.23})$$

und somit für Frequenzen nicht allzu nahe bei ω_p

$$n \simeq \kappa \simeq \sqrt{\frac{\sigma(0)}{2\epsilon_0 \omega^2 \tau}}. \quad (\text{A11.7.24})$$

Fall 3: $\omega > \omega_p$ und $\omega\tau \gg 1$

Für $\omega > \omega_p$ befinden wir uns bei typischen Metallen bereits oberhalb des sichtbaren Spektralbereichs ($\omega \simeq 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ für grünes Licht). Da die typischen Streuzeiten von Metallen in der Regel größer als 10^{-15} s sind, gilt in diesem Bereich ferner $\omega\tau \gg 1$ und wir erhalten den Real- und Imaginärteil der dielektrischen Funktion zu

$$\epsilon_r(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{A11.7.25})$$

$$\epsilon_i(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau}. \quad (\text{A11.7.26})$$

Daraus erhalten wir

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon_r(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{A11.7.27})$$

$$2n\kappa = \epsilon_i(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau}. \quad (\text{A11.7.28})$$

Da typischerweise $\kappa \ll 1$, erhalten wir näherungsweise folgenden Brechungsindex und Extinktionskoeffizienten

$$n \simeq \sqrt{\epsilon_r(\omega)} \simeq \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}} \quad (\text{A11.7.29})$$

$$\kappa \simeq \frac{\omega_p^2}{2\omega^3 \tau} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \simeq \frac{\sigma(0)}{2\epsilon_0 \omega^3 \tau^2} \ll 1. \quad (\text{A11.7.30})$$

Wir sehen, dass mit zunehmender Frequenz $n \rightarrow 1$ und $\kappa \rightarrow 0$. Das Reflexionsvermögen nimmt deshalb mit zunehmender Frequenz auf Null ab. Das heißt, das Metall wird immer transparenter und immer weniger absorbierend.

Wir sind in der bisherigen Diskussion von linear polarisiertem Licht ausgegangen. Für ein vollkommen isotropes Medium ($\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon$) erhalten wir in dem verwendeten kartesischen Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix}. \quad (\text{A11.7.31})$$

Um den Fall von rechts- und linkszirkular polarisiertem Licht zu diskutieren, verwenden wir die zirkulare Basis

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}_+ \\ \hat{\mathbf{r}}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \quad (\text{A11.7.32})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_+ \\ \mathbf{E}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix}, \quad (\text{A11.7.33})$$

wobei \mathbf{E}_\pm gerade rechts- (\mathbf{E}_+) und linkszirkular polarisiertes (\mathbf{E}_-) Licht beschreibt [vergleiche (A11.7.5)]. Die bisher verwendeten kartesischen Koordinaten und Feldvektoren können wir in dem zirkularen System wie folgt ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}_+ \\ \hat{\mathbf{r}}_- \end{pmatrix} \quad (\text{A11.7.34})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_+ \\ \mathbf{E}_- \end{pmatrix}. \quad (\text{A11.7.35})$$

Setzen wir dies in (A11.7.31) ein, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_+ \\ \mathbf{D}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_+ & 0 \\ 0 & \epsilon_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_+ \\ \mathbf{E}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_+ \\ \mathbf{E}_- \end{pmatrix}. \quad (\text{A11.7.36})$$

Der Dielektrizitätstensor ist also auch in der zirkularen Basis diagonal und es gilt $\epsilon_+ = \epsilon_- = \epsilon$. Das heißt, wir erhalten für rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht genau das gleiche Ergebnis wie für linear polarisiertes Licht. Dies war zu erwarten, da wir eine zirkular polarisierte Lichtwelle als lineare Superposition zweier linear polarisierter Wellen auffassen können und wir ein völlig isotropes Medium vorausgesetzt haben.

- (b) Wir betrachten nun den Fall, dass ein externes Magnetfeld \mathbf{B}_{ext} angelegt ist. In der Bewegungsgleichung (A11.7.10) müssen wir jetzt zusätzlich die Lorentz-Kraft auf die durch das elektrische Feld beschleunigten Elektronen berücksichtigen und erhalten

$$m^* \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{m^*}{\tau} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -e\mathbf{E}(t) - e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}. \quad (\text{A11.7.37})$$

Für $\mathbf{B}_{\text{ext}} = (0, 0, B)$ und $\mathbf{E}(t) = (E_x(t), E_y(t), 0)$, das heißt die Polarisationssebene der elektromagnetischen Welle steht senkrecht auf dem angelegten Magnetfeld, lauten die drei Komponenten der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} = -eE_x(t) - \omega_c \frac{dy}{dt} \quad (\text{A11.7.38})$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dy}{dt} = -eE_y(t) + \omega_c \frac{dx}{dt} \quad (\text{A11.7.39})$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (\text{A11.7.40})$$

Hierbei ist $\omega_c = eB/m^*$ die Zyklotronfrequenz. Wir sehen, dass die x - und y -Komponente der Bewegungsgleichung gekoppelt sind. Weil die Bewegungsgleichungen jedoch rotationsinvariant bezüglich der z -Achse sind, lassen sich die beiden Gleichungen durch Verwendung neuer Koordinaten für die Raum- und E -Feldvektoren entkoppeln. Wir verwenden die oben eingeführte zirkuläre Basis [siehe hierzu (A11.7.32) bis (A11.7.35)]. Damit können wir die Differentialgleichungen (A11.7.38) und (A11.7.39) umschreiben in

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_+}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau} + \omega_c \right) \frac{d\mathbf{r}_+}{dt} = -\frac{e}{m^*} \mathbf{E}_+ \quad (\text{A11.7.41})$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_-}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau} - \omega_c \right) \frac{d\mathbf{r}_-}{dt} = -\frac{e}{m^*} \mathbf{E}_-. \quad (\text{A11.7.42})$$

Die Lösung dieser Gleichungen lautet

$$\mathbf{r}_{\pm}(t) = \frac{e}{m^*} \frac{1}{\omega \left[\omega + i \left(\frac{1}{\tau} \pm \omega_c \right) \right]} \mathbf{E}_{\pm}(t). \quad (\text{A11.7.43})$$

Analog zu (A11.7.15) erhalten wir daraus die dielektrische Funktion zu

$$\begin{aligned} \epsilon_{\pm}(\omega) &= 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m^*} \frac{1}{\omega \left[\omega + i \left(\frac{1}{\tau} \pm \omega_c \right) \right]} \\ &= 1 - \omega_p^2 \frac{1}{\omega^2 + i \left(\frac{\omega}{\tau} \pm \omega \omega_c \right)}. \end{aligned} \quad (\text{A11.7.44})$$

Spalten wir diese in Real- und Imaginärteil auf, so ergibt sich

$$\epsilon_{r,\pm}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2 \pm 2\omega_c \tau + \omega_c^2 \tau^2} \quad (\text{A11.7.45})$$

$$\epsilon_{i,\pm}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega \tau (1 \pm \omega_c \tau)}{1 + \omega^2 \tau^2 \pm 2\omega_c \tau + \omega_c^2 \tau^2}. \quad (\text{A11.7.46})$$

Vergleichen wir diese Ausdrücke mit dem Ergebnis (A11.7.15) für $\mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$, so erkennen wir, dass wir jetzt sowohl für den Real- als auch den Imaginärteil Korrekturen erhalten, deren Vorzeichen von der Polarität des zirkular polarisierten Lichts abhängt. Da für realistische Magnetfelder für Metalle $\omega_c \tau \ll 1$ gilt, sind die Korrekturen allerdings klein.

Fall 1: $\omega < \omega_p$ und $\omega\tau \ll 1$

Der Realteil der dielektrischen Funktion ist für $\omega < \omega_p$ negativ und wesentlich kleiner als der Imaginärteil. Der komplexe Brechungsindex $\tilde{n} = \sqrt{\epsilon}$ ist also insgesamt rein imaginär. Wie für den Fall ohne Magnetfeld erhalten wir

$$n_{\pm} \simeq \kappa_{\pm} \simeq \sqrt{\epsilon_{i,\pm}/2}. \quad (\text{A11.7.47})$$

Da $\omega\tau \ll 1$ und $\omega_c\tau \ll 1$, erhalten wir mit

$$\epsilon_{i,\pm}(\omega) \stackrel{\omega\tau \gg 1}{\simeq} \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} (1 \pm \omega_c \tau) \quad (\text{A11.7.48})$$

unter Benutzung von $\omega_p^2 = \sigma(0)/\epsilon_0 \tau$

$$n_{\pm} \simeq \kappa_{\pm} \simeq \sqrt{\frac{\sigma(0)}{2\epsilon_0 \omega}} \sqrt{(1 \pm \omega_c \tau)} \stackrel{\omega_c \tau \ll 1}{\simeq} n \left(1 \pm \frac{1}{2} \omega_c \tau\right). \quad (\text{A11.7.49})$$

Für den Reflexionskoeffizienten ergibt sich daraus nach (A11.7.19)

$$R_{\pm} \simeq 1 - \frac{2}{n_{\pm}} = 1 - \frac{2}{n \left(1 \pm \frac{1}{2} \omega_c \tau\right)}, \quad (\text{A11.7.50})$$

woraus

$$R_+ - R_- \simeq -\frac{2\omega_c \tau}{n \left(1 + \frac{\omega_c \tau}{2}\right)^2} \stackrel{\omega_c \tau \ll 1}{\simeq} -\frac{2\omega_c \tau}{n}. \quad (\text{A11.7.51})$$

folgt. Für den Absorptionskoeffizienten erhalten wir

$$K_{\pm} = \frac{2\kappa_{\pm}\omega}{c} = \sqrt{\frac{2\sigma(0)\omega}{\epsilon_0 c^2}} \sqrt{(1 \pm \omega_c \tau)} \stackrel{\omega_c \tau \ll 1}{\simeq} K \left(1 \pm \frac{1}{2} \omega_c \tau\right), \quad (\text{A11.7.52})$$

woraus sich

$$K_+ - K_- = K \omega_c \tau \quad (\text{A11.7.53})$$

ergibt. Sowohl für den Reflexions- als auch den Absorptionskoeffizienten wächst die Differenz $R_+ - R_-$ bzw. $K_+ - K_-$ proportional zu $\omega_c \tau$, also proportional zum angelegten Magnetfeld an.

Fall 2: $\omega > \omega_p$ und $\omega\tau \gg 1$

Wir erhalten aus (A11.7.45) und (A11.7.46) die Näherungen

$$\epsilon_{r,\pm}(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 \pm 2\omega_c \tau / \omega^2 \tau^2} \quad (\text{A11.7.54})$$

$$\epsilon_{i,\pm}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau} (1 \pm \omega_c \tau). \quad (\text{A11.7.55})$$

Damit ergeben sich

$$n_{\pm} \simeq n \sqrt{\frac{1}{1 \pm 2\omega_c \tau / \omega^2 \tau^2}} \stackrel{\omega_c \tau \ll 1}{\simeq} n \left(1 \pm \frac{\omega_c \tau}{\omega^2 \tau^2} \right) \quad (\text{A11.7.56})$$

und

$$\kappa_{\pm} = \kappa (1 \pm \omega_c \tau), \quad (\text{A11.7.57})$$

wobei n und κ durch (A11.7.29) und (A11.7.30) gegeben sind. Wir sehen, dass auch in diesem Fall der Unterschied von n und κ für rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht proportional zu $\omega_c \tau$, also proportional zum angelegten Magnetfeld anwächst. In der zirkularen Basis gilt für die dielektrische Verschiebung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_+ \\ \mathbf{D}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_+ & 0 \\ 0 & \epsilon_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_+ \\ \mathbf{E}_- \end{pmatrix}. \quad (\text{A11.7.58})$$

Der Dielektrizitätstensor ist also in dieser Basis diagonal. Wir können nun in die kartesischen Koordinaten zurücktransformieren. Mit $\mathbf{E}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-)$, $\mathbf{E}_y = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-)$ und den entsprechenden Ausdrücken für \mathbf{D}_x und \mathbf{D}_y erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\epsilon_+ + \epsilon_-)/2 & i(\epsilon_+ - \epsilon_-)/2 \\ -i(\epsilon_+ - \epsilon_-)/2 & (\epsilon_+ + \epsilon_-)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A11.7.59})$$

Offensichtlich hängt \mathbf{D}_x auch von \mathbf{E}_y bzw. \mathbf{D}_y von \mathbf{E}_x ab. Der Dielektrizitätstensor ist im kartesischen Koordinatensystem nicht mehr diagonal und besitzt eine magnetfeldinduzierte Anisotropie.

Wir erkennen aus (A11.7.59) sofort, dass $\epsilon_{yx} = -\epsilon_{xy}$. Die durch das Magnetfeld induzierte Anisotropie bewirkt also einen antisymmetrischen Anteil des 2×2 dielektrischen Tensors. Dies ist eine direkte Folge der Zeitumkehrsymmetrie. Führen wir eine Zeitumkehrsymmetrieoperation durch, so bleiben die Vektoren \mathbf{D} und \mathbf{E} unverändert, während das Magnetfeld \mathbf{B} sein Vorzeichen ändert. Die Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen liefern dann $\epsilon_{ij}(E, B) = \epsilon_{ji}(E, -B)$. Entwickeln wir ϵ_{ij} in eine Reihe bis zu linearer Ordnung in E und BV , so sehen wir sofort, dass der antisymmetrische Anteil durch B erzeugt wird. Das Magnetfeld ist natürlich nur eine Möglichkeit, die Zeitumkehrsymmetrie zu brechen. Im Allgemeinen erzeugt aber jede Größe, welche die Zeitumkehrsymmetrie bricht, antisymmetrische Beiträge zum Dielektrizitätstensor.

Wir können schließlich die Beschränkung, dass $B_{\text{ext}} = (0, 0, B)$ aufgeben und beliebige Feldrichtungen zulassen. Für diesen allgemeinen Fall lässt sich der dielektrische Tensor für ein ohne Feld isotropes Medium ($\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{\text{sym}}$) durch

$$\widehat{\epsilon} = \epsilon_{\text{sym}} \begin{pmatrix} 1 & +iQ_z & -iQ_y \\ -iQ_z & 1 & +iQ_x \\ +iQ_y & -iQ_x & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A11.7.60})$$

ausdrücken. Hierbei ist $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ der sogenannte *Voigt-Vektor*, der parallel zur Richtung des angelegten Magnetfeldes ist. Der Betrag von \mathbf{Q} wird als Voigt-Konstante bezeichnet. Aufgrund der endlichen Absorption ist der Voigt-Vektor im Allgemeinen komplex. Für die Brechungsindizes der rechts- und linkszirkular polarisierten Wellen erhalten wir dann

$$n_{\pm} = n \left(1 \pm \frac{1}{2} \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (\text{A11.7.61})$$

Hierbei ist $\hat{\mathbf{k}}$ der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Wellen.

- (c) Wir diskutieren nun die Phasengeschwindigkeit für endliches und verschwindendes Magnetfeld. Mit dem komplexen Brechungsindex $\tilde{n}_{\pm} = n_{\pm} + i\kappa_{\pm}$ für rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht erhalten wir den komplexen Wellenvektor der in z -Richtung laufenden rechts- und linkszirkular polarisierten Welle zu

$$\tilde{k}_{\pm} = k_{\pm,r} + i k_{\pm,i} = \tilde{n}_{\pm} \frac{\omega}{c} = n_{\pm} \frac{\omega}{c} + i \kappa_{\pm} \frac{\omega}{c}. \quad (\text{A11.7.62})$$

Für $B_{\text{ext}} = 0$ ist $n_+ = n_- = n$ und $\kappa_+ = \kappa_- = \kappa$. Wir erhalten dann für beide Polarisierungen die gleiche Phasengeschwindigkeit

$$v_{\pm,\text{ph}} = v_{\text{ph}} = c/n \quad (\text{A11.7.63})$$

und den gleichen Absorptionskoeffizienten

$$K_{\pm} = 2\kappa \frac{\omega}{c}. \quad (\text{A11.7.64})$$

Für $\omega < \omega_p$ wird allerdings der Brechungsindex \tilde{n} von Metallen rein imaginär. In diesem Fall kann sich die elektromagnetische Welle nicht im Metall ausbreiten.

Für $\mathbf{B}_{\text{ext}} \neq 0$ haben wir oben abgeleitet, dass unterschiedliche komplexe Brechungsindizes $\tilde{n}_{\pm} = n_{\pm} + i\kappa_{\pm}$ für rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht vorliegen. Wir können allgemein

$$n_{\pm} = n(1 \pm a), \quad \kappa_{\pm} = \kappa(1 \pm b) \quad (\text{A11.7.65})$$

schreiben, wobei die frequenzabhängigen Konstanten a und b proportional zu B_{ext} und im Allgemeinen klein gegen eins sind. Für die komplexe Wellenzahl der in z -Richtung laufenden rechts- und linkszirkular polarisierten Welle gilt dann $\tilde{k}_+ \neq \tilde{k}_-$. Wir erhalten deshalb für rechts- und linkszirkular polarisierte Wellen unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten

$$v_{\pm,\text{ph}} = c/n_{\pm} \quad (\text{A11.7.66})$$

und unterschiedliche Absorptionskoeffizienten

$$K_{\pm} = 2\kappa_{\pm} \frac{\omega}{c}. \quad (\text{A11.7.67})$$

- (d) Wir diskutieren nun, was mit der Polarisationssebene einer in z -Richtung propagierenden und in x -Richtung linear polarisierten Welle beim Durchgang durch ein Medium der Dicke d passiert. Schreiben wir die linear polarisierte Welle als Superposition einer rechts- und linkszirkular polarisierten Welle, so erhalten wir

$$\mathbf{E}_x(d, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{E}_+ e^{-d \frac{\kappa_+ \omega}{c}} e^{i(d \frac{n_+ \omega}{c} - \omega t)} + \mathbf{E}_- e^{-d \frac{\kappa_- \omega}{c}} e^{i(d \frac{n_- \omega}{c} - \omega t)} \right]. \quad (\text{A11.7.68})$$

Offensichtlich geraten die beiden zirkular polarisierten Wellen beim Durchgang durch das Medium außer Phase, da sie unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten besitzen. Dies ist in Abb. 11.5 dargestellt, wo wir die Überlagerung der zirkular polarisierten Wellen bei $z = 0$ und $z = d$ dargestellt haben. Beim Durchgang durch die Dicke d beträgt die Phasendifferenz der beiden Wellen

$$2\beta_L = \varphi_- - \varphi_+ = (k_- - k_+)d = \frac{\omega}{c} d(n_- - n_+) = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_- - n_+). \quad (\text{A11.7.69})$$

Dies führt zu einer Drehung der Polarisationssebene der linear polarisierten Welle um den Winkel

$$\beta_L = \frac{\varphi_- - \varphi_+}{2} = \frac{\pi}{\lambda_0} d(n_- - n_+). \quad (\text{A11.7.70})$$

Ist $n_+ > n_-$, so dreht sich die Polarisationssebene nach links (beim Blick in Richtung der Quelle), für $n_+ < n_-$ dagegen nach rechts. Letzterer Fall ist in Abb. 11.5 gezeigt. Üblicherweise definiert man den Winkel β_L als positiv, wenn die Welle rechtsdrehend ist. Wir haben oben gesehen, dass $n_- - n_+ \propto \omega_c \tau \propto B_{\text{ext}}$. Deshalb wird der Drehwinkel oft

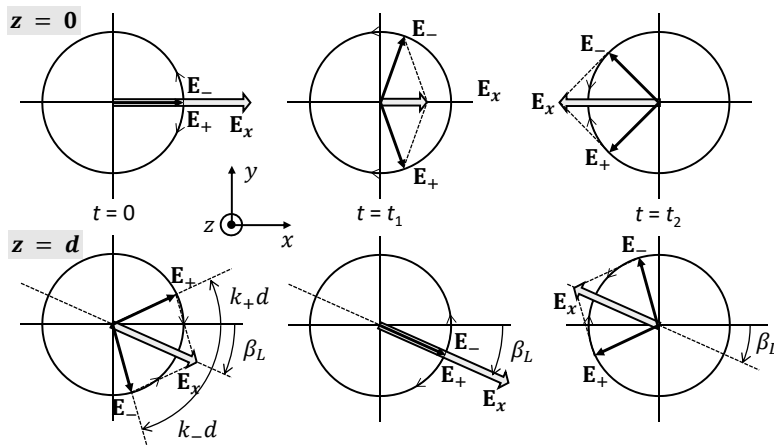


Abb. 11.5: Drehung der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht beim Durchgang durch ein Medium mit $n_+ \neq n_-$. Die Welle breitet sich in z -Richtung aus. Gezeigt ist die Überlagerung einer rechts- und linkszirkular polarisierten Welle zu einer linear polarisierten Welle bei $z = 0$ (oben) und $z = d$ (unten) für den Fall $n_+ < n_-$, für den wir eine Rechtsdrehung der Polarisationssebene erhalten. Die Abschwächung der Amplitude durch Absorption wurde vernachlässigt.

mit der empirischen Beziehung

$$\beta_L = \mathcal{V} B_{\text{ext}} d \quad (\text{A11.7.71})$$

beschrieben, wobei die Proportionalitätskonstante \mathcal{V} als *Verdet-Konstante* bezeichnet wird.

In Abb. 11.5 haben wir die unterschiedliche Absorption der rechts- und linkszirkular polarisierten Welle vernachlässigt. In diesem Fall erhalten wir nach Durchgang der Welle durch eine Schicht der Dicke d nur eine Drehung der Polarisationssebene, das Licht bleibt aber linear polarisiert. Durch die unterschiedliche Absorption der Wellen stimmt allerdings für $z = d$ auch ihre Amplitude nicht mehr überein. Mit $\kappa_{\pm} = \kappa(1 \pm b)$ erhalten wir eine Amplitudendifferenz

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= E_{0,-} - E_{0,+} = \underbrace{E_0 e^{-2\pi\kappa d/\lambda_0}}_{E_0(d)} \underbrace{(e^{-2\pi b d/\lambda_0} - e^{+2\pi b d/\lambda_0})}_{2 \sinh(2\pi b d/\lambda_0)} \\ \Delta E_0 &= 2E_0(d) \sinh\left(\frac{2\pi b d}{\lambda_0}\right). \end{aligned} \quad (\text{A11.7.72})$$

Diese führt dazu, dass in Abb. 11.5 die Feldvektoren \mathbf{E}_+ und \mathbf{E}_- auf Kreisen mit unterschiedlichen Radien umlaufen. Aus der ursprünglich linear polarisierten Welle wird damit eine elliptisch polarisierte Welle. Die Elliptizität können wir mit dem Winkel

$$\alpha_L = \arctan\left(\frac{E_{0,-} - E_{0,+}}{E_{0,-} + E_{0,+}}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta E_0}{2E_0}\right) \quad (\text{A11.7.73})$$

charakterisieren (siehe hierzu Abb. 11.6). Üblicherweise definiert man einen komplexen Winkel

$$\Phi_F = \beta_L + i\alpha_L = \frac{\varphi_- - \varphi_+}{2} + i \frac{E_{0,-} - E_{0,+}}{E_{0,-} + E_{0,+}}, \quad (\text{A11.7.74})$$

um beide Effekte, die Drehung der Polarisationssebene und die endliche Elliptizität, durch eine Größe zu beschreiben. Der Index „F“ steht hierbei für **Michael Faraday**, der bereits im Jahr 1845 entdeckte, dass die Art und Weise, wie sich Licht in Materie ausbreitet, mit einem Magnetfeld beeinflusst werden kann. Insbesondere entdeckte er, dass sich die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht, das durch eine Glasplatte fällt, dreht, wenn ein Magnetfeld in Richtung der Ausbreitungsrichtung angelegt wird.

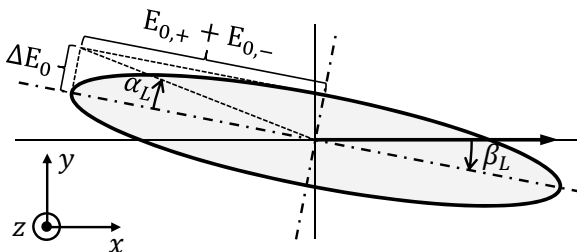
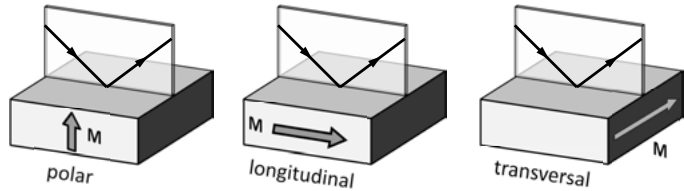


Abb. 11.6: Änderung der Polarisations-eigenschaften einer ursprünglich in x -Richtung linear polarisierten elektromagnetischen Welle bei der Transmission durch ein Medium der Dicke d , das sich in einem Magnetfeld $B_{\text{ext}} = (0, 0, B)$ befindet. Die Welle breitet sich in z -Richtung aus.

Abb. 11.7: Geometrische Konfigurationen bei der Untersuchung des magnetooptischen Kerr-Effekts.



- (e) Für Metalle lässt sich der Faraday-Effekt schlecht beobachten, da die Plasmafrequenz üblicherweise im ultravioletten Spektralbereich liegt und deshalb sichtbares Licht stark reflektiert wird. Bereits 1877 entdeckte aber **John Kerr** (1824–1907), dass linear polarisiertes Licht, das an den Polschuhen eines Magneten reflektiert wird, seinen Polarisationszustand ebenfalls in Abhängigkeit der Stärke des vom Magneten erzeugten Feldes ändert. Er hatte damit das Analogon zum in Transmission erhaltenen *Faraday-Effekt*, den nach ihm benannten *magnetooptischen Kerr-Effekt (MOKE)* entdeckt. Den Kerr-Effekt können wir genauso wie den Faraday-Effekt mit einem komplexen Winkel

$$\Phi_K = \beta_K + i\alpha_K = \frac{\varphi_- - \varphi_+}{2} + i \frac{r_- - r_+}{r_- + r_+} \quad (\text{A11.7.75})$$

beschreiben. Hierbei ist $\varphi_- - \varphi_+$ die Phasendifferenz der beiden reflektierten zirkular polarisierten Wellen und r_{\pm} sind die Reflexionskoeffizienten, die mit Hilfe der Fresnel'schen Formeln abgeleitet werden müssen.

Der magnetooptische Kerr-Effekt (MOKE) wird heute häufig zur Untersuchung von ferromagnetischen Materialien, insbesondere zur Sichtbarmachung von magnetischen Domänen benutzt. An die Stelle des externen Magnetfeldes tritt in diesem Fall die Magnetisierung. Grundsätzlich werden die in Abb. 11.7 gezeigten Geometrien verwendet, die sich hinsichtlich der relativen Orientierung von Streuebene des linear polarisierten Lichts, die durch den Wellenvektor und die Flächennormale aufgespannt wird, und der Magnetisierungsrichtung unterscheiden. Wir unterscheiden danach zwischen polarem, longitudinalem und transversalem Kerr-Effekt. Bei der Verwendung von linear polarisiertem Licht müssen wir noch zwischen parallel und senkrecht polarisierten Wellen unterscheiden. Wir sprechen von TM-polarisiertem (TM = transversal magnetisch) bzw. parallel (p oder π) polarisiertem Licht, wenn die Schwingungsebene des magnetischen Feldes senkrecht zur Streuebene ist. Umgekehrt sprechen wir von TE-polarisiertem (TE = transversal elektrisch) bzw. von senkrecht (s oder σ) polarisiertem Licht, wenn das elektrische Feld senkrecht auf der Streuebene steht. Eine wichtige technische Anwendung des magnetooptischen Kerr-Effekts ist die magnetooptische Datenspeicherung.



A11.8 Lineare ferroelektrische Anordnung

Gegeben sei eine lineare Kette von Atomen mit der Polarisierbarkeit α und dem gegenseitigen Abstand a . Zeigen Sie, dass die Anordnung eine spontane Polarisierung entwickeln kann, wenn

$$\alpha \geq \frac{\pi a^3}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}.$$

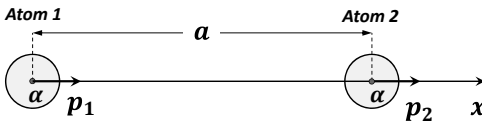


Abb. 11.8: Zur Ableitung des ferroelektrischen Kriteriums für einzelne Atome.

Lösung

Wir betrachten zuerst ein System aus zwei Atomen mit festem Abstand a und der Polarisierbarkeit α für jedes Atom (siehe Abb. 11.8) und überlegen uns, welche Beziehung zwischen a und α gelten muss, wenn das System ferroelektrisch sein soll.

Das Dipolmoment p_2 des Atoms 2 mit Polarisierbarkeit α am Ort $x = a$ ist gegeben durch

$$p_2 = \alpha \epsilon_0 E_{\text{lok}} = \alpha \epsilon_0 E(a) \quad (\text{A11.8.1})$$

Wir müssen nun das lokale elektrische Feld $E_{\text{lok}} = E(a)$ bestimmen, das durch das Atom 1 an der Stelle $x = a$ des Atoms 2 erzeugt wird. Nehmen wir an, dass das Atom 1 einen elektrischen Dipol der Stärke p_1 besitzt, so können wir für das resultierende Dipolfeld schreiben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{r^3}. \quad (\text{A11.8.2})$$

Hierbei ist $\hat{\mathbf{r}}$ der Einheitsvektor in Richtung von \mathbf{r} . Nehmen wir an, dass \mathbf{p}_1 in Richtung der Verbindungsachse der beiden Atome zeigt, so können wir $\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{x}}$ schreiben und ferner das Skalarprodukt durch eine Multiplikation der Beträge ersetzen. Wir erhalten damit

$$E(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p_1 - p_1}{a^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1}{a^3} = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 a^3}. \quad (\text{A11.8.3})$$

Mit $p_2 = \alpha \epsilon_0 E_{\text{lok}} = \alpha \epsilon_0 E(a)$ erhalten wir dann

$$p_2 = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{2p_1}{a^3} = \frac{\alpha p_1}{2\pi a^3}. \quad (\text{A11.8.4})$$

Zum einen ist natürlich $p_1 = p_2 = 0$ eine Lösung dieser Gleichung. Im Falle eines Ferroelektrikums interessieren wir uns aber für die Lösung mit $p_1 = p_2 = p \neq 0$. Dann muss nach (A11.8.4) $\alpha = 2\pi a^3$ gelten. Das ferroelektrische Kriterium lautet also

$$\alpha = 2\pi a^3. \quad (\text{A11.8.5})$$

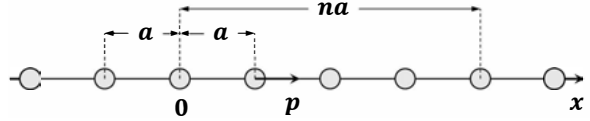
Die Lösung für die lineare Kette erfolgt analog (siehe hierzu Abb. 11.9). Für ein Atom am Ort $x = 0$ wird ein elektrisches Dipolmoment

$$p_0 = \alpha E_{\text{lok}} = \alpha \epsilon_0 E(x = 0)$$

induziert, wobei $E_{\text{lok}} = E(0)$ das am Ort $x = 0$ erzeugte elektrische Feld der elektrischen Dipolmomente p_i aller anderen Atome an den Positionen $x_i = n_i a$ ist. Oben haben wir für das elektrische Feld eines in x -Richtung ausgerichteten Dipolmoments

$$E(x) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p_1}{x^3}$$

Abb. 11.9: Zur Ableitung des ferroelektrischen Kriteriums in einer linearen Kette von Atomen.



abgeleitet. Wir nehmen nun an, dass die Dipolmomente p_i aller Atome der Kette gleich sind, d. h. $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_i = p$. Da jedes Atom zwei Nachbarn im Abstand $x = n \cdot a$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ hat, erhalten wir insgesamt für das auf ein bestimmtes Atom wirkende elektrische Feld:

$$E = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{2\pi\epsilon_0 (na)^3} = \frac{p}{\pi\epsilon_0 a^3} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}_{=\zeta(3)} = \frac{p}{\pi\epsilon_0 a^3} \zeta(3) \quad (\text{A11.8.6})$$

$$\zeta(3) = 1.2020569032 \dots$$

Hierbei haben wir die Riemannsche ζ -Funktion (Bernhard Riemann, 1826–1866)

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

verwendet. Andererseits ist aber $p = \alpha\epsilon_0 E_{\text{lok}}$. Setzen wir für E_{lok} den Ausdruck (A11.8.6) ein, so ergibt sich die Beziehung

$$p = \alpha\epsilon_0 E = p \frac{\alpha}{\pi a^3} \zeta(3). \quad (\text{A11.8.7})$$

Offensichtlich ist $p = 0$ eine Lösung. Aber auch für

$$\alpha = \frac{\pi a^3}{\zeta(3)} = \alpha_{\text{krit}} \quad (\text{A11.8.8})$$

ist prinzipiell eine ferroelektrische Anordnung von beliebigen endlichen elektrischen Dipolmomenten p möglich. Das heißt, für $\alpha = \alpha_{\text{krit}}$ ist eine ferroelektrische Anordnung von Dipolmomenten möglich. Wichtig ist, dass wir eine solche Anordnung auch dann erhalten, wenn die einzelnen Atome zunächst kein elektrisches Dipolmoment besitzen. Durch Fluktuationen treten aber immer lokale Dipolmomente auf, die dann ferroelektrisch ausgerichtete Dipolmomente auf Nachbaratomen erzeugen, die wiederum positiv auf das sie erzeugende Dipolmoment zurückwirken. Für $\alpha < \alpha_{\text{krit}}$ ist die ferroelektrische Anordnung von induzierten Dipolmomenten energetisch nicht stabil. Eine durch Fluktuationen hervorgerufene lokale ferroelektrische Anordnung würde nach kurzer Zeit wieder zerfallen. Erst für $\alpha \geq \alpha_{\text{krit}}$ wird die ferroelektrische Anordnung stabil.

Nach den obigen Gleichungen kann das elektrische Dipolmoment im Prinzip beliebig große Werte annehmen. Dies resultiert aber aus der Tatsache, dass wir eine lineare Beziehung $p = \alpha\epsilon_0 E_{\text{lok}}$ zwischen Dipolmoment und lokalem Feld angenommen haben. Diese lineare Beziehung gilt aber nur für kleine lokale Felder und damit kleine Dipolmomente. Für reale Systeme sorgen Nichtlinearitäten dafür, dass nicht beliebig große Werte von p möglich sind.