

Quanten Analogien

Kevin Mika
kevin.mika@tu-dortmund.de

Noah Krystiniak
noah.krystiniak@tu-dortmund.de

Durchführung: 27.11.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	1
1.1	Gemeinsamkeiten von Akustischen und Quantenmechanischen Systemen .	1
1.2	Unterschiede von Akustischen und Quantenmechanischen Systemen	2
1.3	Analogien zur Festkörperphysik	2
2	Auswertung	2
2.1	Näherungen für Molekül-/Atomketten	8
3	Diskussion	14

1 Theorie

Im Grunde beschäftigt sich der Versuch nicht mit quantenmechanischen, sondern mit akustischen Phänomenen. Es lassen sich im Hinblick auf die mathematische Beschreibung akustischer Phänomene viele Analogien zur Wellenmechanik der Quantentheorie finden. Diese Analogien sind nicht exakt, da dies schon an den unterschiedlichen Dispersionsrelationen scheitert, führen oft aber weit genug, um Charakteristika der quantenmechanischen Beschreibung eines Teilchens im klassischen Regime der Akustik beobachten zu können.

1.1 Gemeinsamkeiten von Akustischen und Quantenmechanischen Systemen

Aus der linearen Euler Gleichung

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) \quad (1)$$

und der Kontinuitätsgleichung folgt, dass sich eine eindimensionale Welle mit

$$p(x) = p_0 \cos(kx - \omega t) \quad (2)$$

beschreiben lässt. In einer Röhre mit der Länge L lässt sich mit den Randbedingungen herleiten, dass $k = \frac{n\pi}{L}$ ist.

Analog kann damit ein Teilchen in einem Potentialtopf beschrieben werden. Das Teilchen wird mit der Schrödingergleichung beschrieben:

$$E\psi(r) = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi(r) + V(r)\psi(r). \quad (3)$$

In einem Unendlich hohen Potentialtopf dessen Zwischenraum ein Potential von $V = 0$ besitzt, vereinfacht sich die Schrödingergleichung zu

$$E\psi(r) = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi(r) \quad (4)$$

dessen Lösung für die Eigenwerte Wellen der Form

$$\psi(x) = A \sin(kx). \quad (5)$$

Aus den Randbedingungen folgt $k = \frac{n\pi}{L}$. Die Eigenwerte sind

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (6)$$

Die Gemeinsamkeit, dass beide Wellenfunktionen ein delokalisiertes Objekt beschreiben. Ebenfalls können bei beiden Systemen stehende Wellen auftreten.

1.2 Unterschiede von Akustischen und Quantenmechanischen Systemen

Die Wellengleichungen unterscheiden sich in der zeitlichen Ableitung. Während die klassische Wellengleichung auf Grund der zweiten Zeitableitung periodische Lösungen besitzt, folgt dies im quantenmechanischen Fall aus der ersten Zeitableitung in Verbindung mit einem komplexen Phasenfaktor. Komplexwertige Funktionen können nicht direkt beobachtet werden. Gemessen werden kann nur das Betragsquadrat der Lösung und diese nur in statistischen Auswertungen.

Die Dispersionsrelationen unterscheiden sich, dass in der klassischen Mechanik linear ist, während Materiewellen parabolischen Dispersionsrelationen folgt. Die Folge daraus sind unterschiedliche Gruppen- und Phasengeschwindigkeit.

Im unendlichen Potentialtopf wird ein Verschwinden der Wellenfunktion an den Rändern gefordert, während der Druck dort einen Schwingungsbauch vorweist.

1.3 Analogien zur Festkörperphysik

Über eingebaute Blenden zwischen den Röhren, welche den Schall streuen, kann eine Elektronenwelle welche an einem Atom gestreut wird, simuliert werden. Dies führt zu neuen Resonanzfrequenzen welche zur Bandstruktur führt, wobei die Blendgröße (Irisdurchmesser) ein Maß für den Wirkungsquerschnitt ist. Die Bandstruktur bilden sich, wenn die Bragg Bedingung erfüllt wird, also

$$n \cdot \lambda = 2 \cdot a \quad (7)$$

gilt. n ist Element der natürlichen Zahlen und a ist der Abstand der reflektierenden Ebenen. Im diesem Versuch stellen die Blenden die reflektierenden Ebenen dar und der Abstand ist dann die Röhrenlänge.

2 Auswertung

Die Spektren für verschiedene Rohrlängen sind in Abbildung 1 und 2 zu sehen. Bei längeren Röhren sind mehr Resonanzen zu sehen. Die Resonanzfrequenzen wird in Abbildung 3 gegen den Index n aufgetragen. Daraufhin kann mit einer Linearen Regression die Schallgeschwindigkeit bestimmt werden. Resonanzen treten auf, wenn die Bedingung

$$2 \cdot L = \frac{n \cdot c}{f} \quad (8)$$

erfüllt ist. Dabei ist L die Länge der Röhre, n eine Natürliche Zahl, c die Schallgeschwindigkeit und f die Frequenz. Umgestellt nach f :

$$\underbrace{f}_{\tilde{y}} = \frac{c}{\underbrace{2 \cdot L}_m} \underbrace{\cdot n + 0}_{\tilde{x}} \quad (9)$$

Die Steigung m der Linearen Regression entspricht somit $\frac{c}{2 \cdot L}$. Aufgelöst nach c ergibt sich damit:

$$c = m \cdot 2 \cdot L. \quad (10)$$

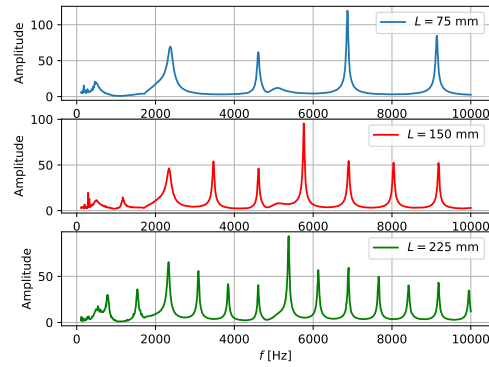


Abbildung 1: Schallamplitude in verschieden langen Röhren L bei variierender Frequenz.

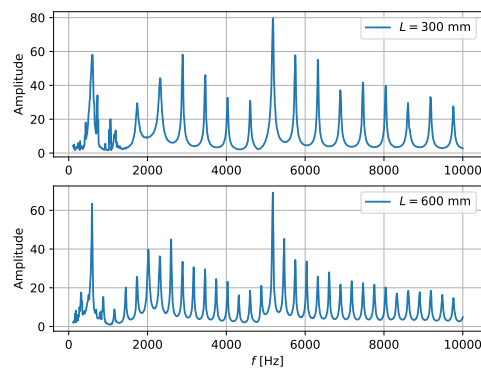


Abbildung 2: Schallamplitude in verschieden langen Röhren L bei variierender Frequenz.

Da m fehlerbehaftet ist, muss der Ausdruck nach m abgeleitet werden:

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 2 \cdot L. \quad (11)$$

Eingesetzt in die Fehlerentwicklung nach Gauß:

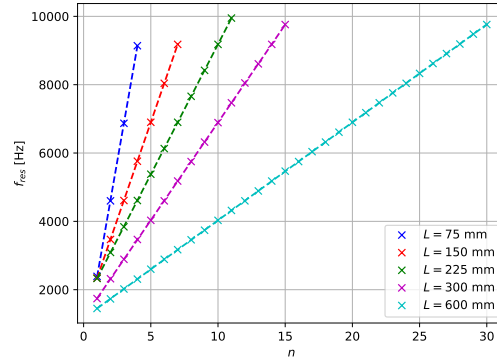


Abbildung 3: Resonanzfrequenzen für Schallwellen bei verschiedenen Längen Röhren L sowie die entsprechende Lineare Regression.

$$\Delta c = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} \quad (12)$$

$$\Delta c = 2 \cdot L \cdot \Delta m \quad (13)$$

Die Steigungen der Linearen Regression m , sowie die daraus bestimmte Schallgeschwindigkeit c der verschiedenen Längen L sind in Tabelle 1 zu finden. Der gemittelte Wert

Tabelle 1: Steigung der Linearen Regression m der Resonanzfrequenzen aufgetragen gegen den Index n bei verschiedenen Längen L , sowie die daraus berechnete Schallgeschwindigkeit c .

L / mm	m / Hz	$\Delta m / \text{Hz}$	$c / \text{m/s}$	$\Delta c / \text{m/s}$
75	2252.0	10.39	337.80	1.60
150	1141.1	0.89	342.32	0.27
225	762.0	0.48	342.90	0.22
300	572.4	0.30	343.41	0.18
600	286.7	0.07	344.06	0.09

für die Schallgeschwindigkeit, welcher sich nach

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (14)$$

bestimmt, beträgt $c = (342.098 \pm 2.22)\text{m/s}$. Der angegebene Fehler ist die Standardabweichung, welche nach

$$\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad (15)$$

bestimmt wurde. Verglichen mit dem Literaturwert von 343m/s ergibt sich eine Abweichung von

$$p = \left(\frac{c_{\text{Exp}}}{c_{\text{Lit}}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (16)$$

$$p = -0.26\%. \quad (17)$$

Für 12.50 mm ist das Spektrum in Abbildung 4 abgebildet. Die Frequenz ist in Abbildung 5 gegen die Wellenzahl k aufgetragen. Die Wellenzahl k wird mit

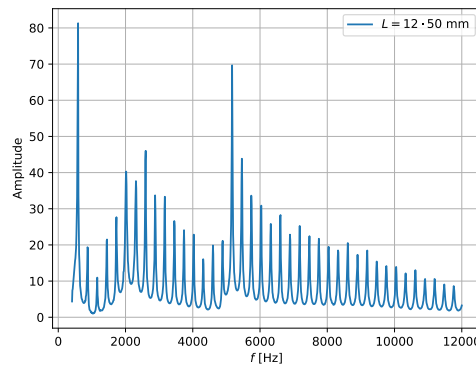


Abbildung 4: Spektrum von einer Röhre, bestehend aus 12.50 mm langen Partien.

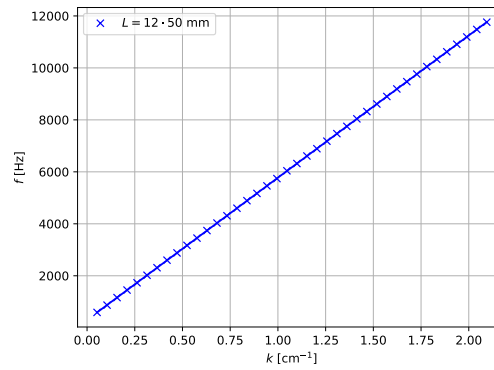


Abbildung 5: Frequenzspektrum aufgetragen gegen die Wellenzahl k für 12.50 mm Röhren.

$$k = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{L} \quad (18)$$

bestimmt. Es wird an der Abbildung deutlich, dass es ein lineares Verhältnis $f(k) = d \cdot k$ sichtbar. Der Fitparameter für die Dispersion beträgt $d = 5473.63$. Somit ist die Dispersionsrelation $f(k) = 5473.63 \cdot k$. Die Dispersionsrelation der Röhre ohne Streuzentren ist also linear und deckt das Frequenzspektrum mit diskreten Zuständen ab. Die Zustandsdichte ist also konstant. Aus Abbildung 7 wird deutlich, dass die

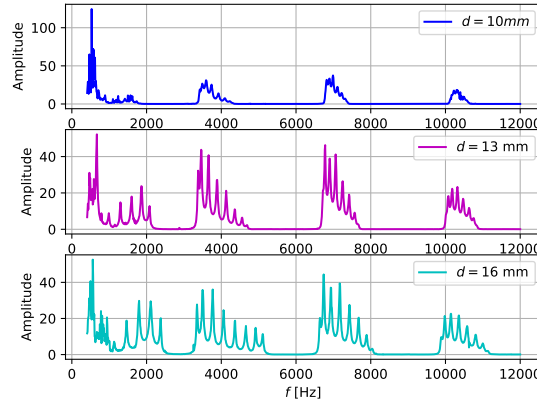


Abbildung 6: Spektrum einer Röhre mit variierendem Durchmesser der Iris zwischen den Rohrabschnitten.

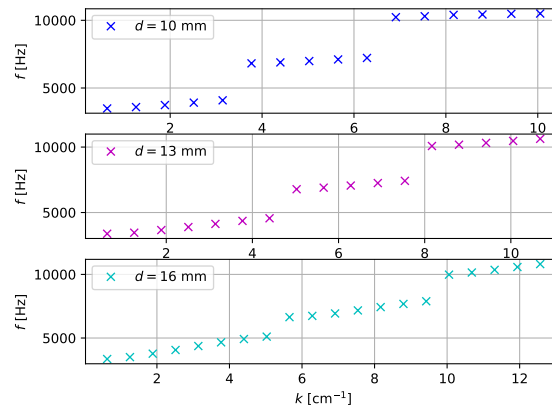


Abbildung 7: Frequenz einer Röhre mit variierendem Durchmesser der Iris zwischen den Rohrabschnitten abhängig von der Wellenzahl k .

Bänder mit steigendem Irisdurchmesser d auch breiter werden. Der Vergleich zwischen verschiedenen Längen Röhren mit einem Irisdurchmesser von 16 mm ist in Abbildung 8 zu sehen. Die Amplitude wird für kleinere Rohrlängen größer, die Resonanzen scheinen bei gleicher Frequenz zu liegen. Beim Vergleich der Spektren für 8 einzelröhren mit der Länge $l = 50$ mm und 75 mm (Abbildung 9) fällt auf, dass die Amplitude bei kleineren

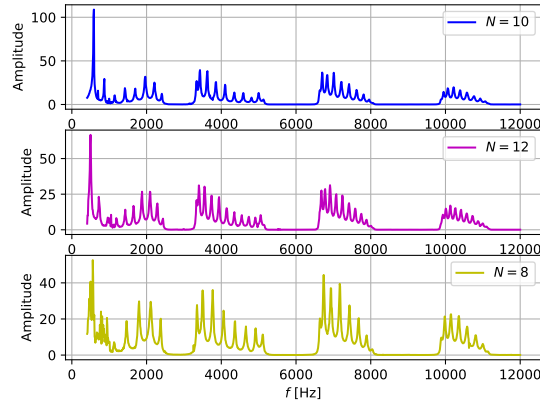


Abbildung 8: Spektren von $n \cdot 50$ mm Röhren und einem Irisdurchmesser von $d = 16$ mm.

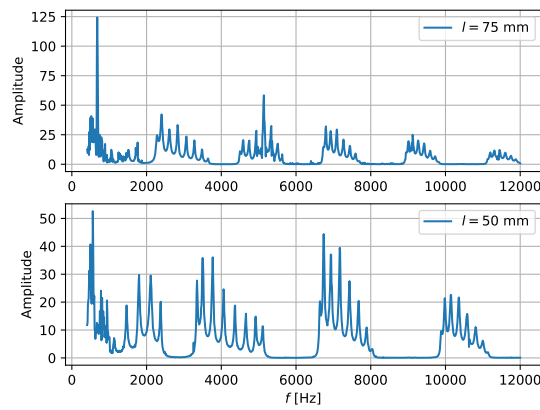


Abbildung 9: Spektren von Röhren, bestehend aus 8 Stücken mit der Länge l und dem Irisdurchmesser $d = 16$ mm.

Rohrlängen zunimmt und die Resonanzfrequenzen sich verschieben.

2.1 Näherungen für Molekül-/Atomketten

Der Vergleich der Spektren einer 50 mm Röhre mit einer 75 mm Röhre (Abbildungen 10) zeigt, dass sich die Anzahl der Resonanzen erhöht und diese ebenfalls leicht verschoben sind für das längere Rohr. Aus Abbildung 11 wird ersichtlich, dass mit größerem

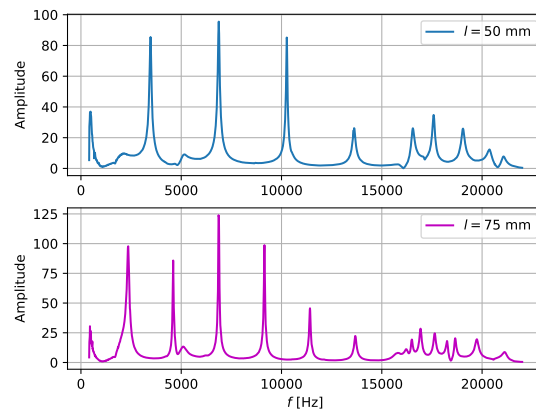


Abbildung 10: Spektren von einer 50 mm und 75 mm Röhre.

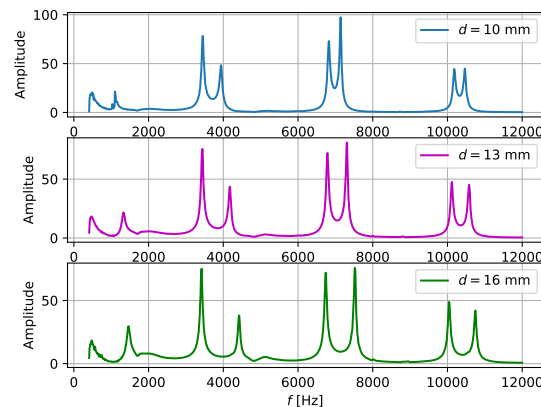


Abbildung 11: Spektren von 2 50 mm Röhren mit variierenden Irisdurchmesser d .

Irisdurchmesser der Abstand zwischen den Resonanzen steigt. Die Kompression der Bändern führt zu einer Verringerung der Steigung der einzelnen Dispersionszweige. Da die Frequenz der ersten Resonanz eines Bandes unverändert bleibt, führt dieser Effekt zu einer Vergrößerung der Bandlücke. Aus Abbildung 15 wird deutlich, dass sich die Bandbreiten mit zunehmender Anzahl an Elementarzellen erhöht, sonst bleiben die

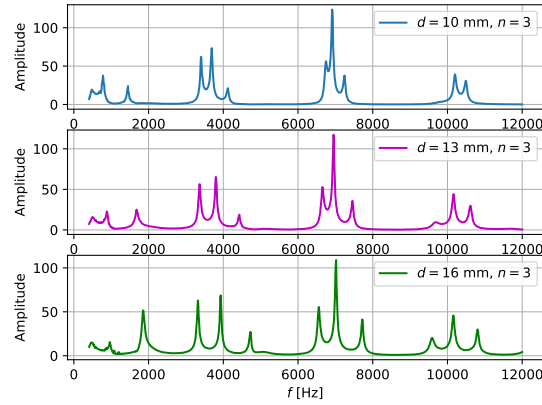


Abbildung 12: Spektren von n Elementarzellen mit variierendem Irisdurchmesser d .

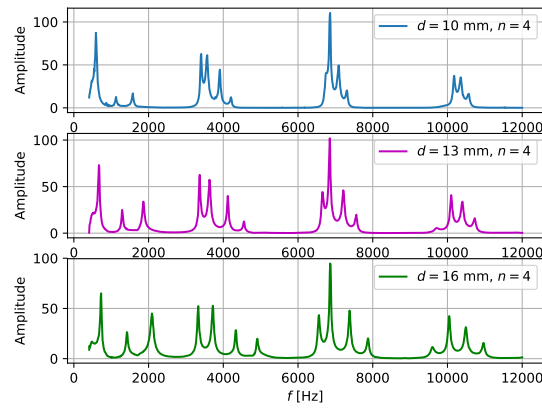


Abbildung 13: Spektren von n Elementarzellen mit variierendem Irisdurchmesser d .

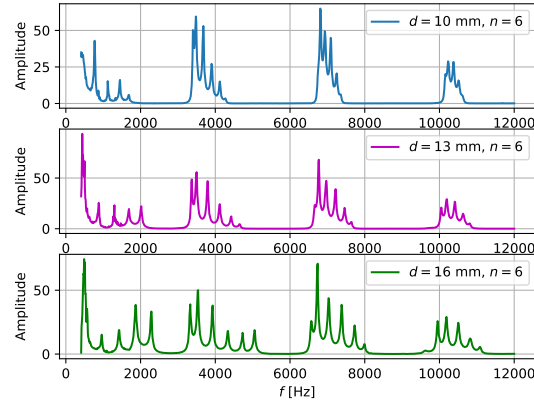


Abbildung 14: Spektren von n Elementarzellen mit variierendem Irisdurchmesser d .

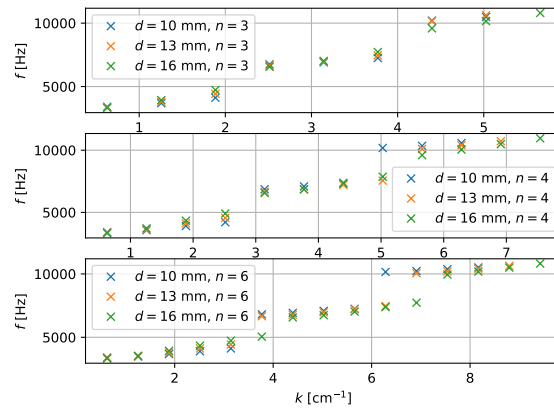


Abbildung 15: Bandstrukturen von n Elementarzellen mit variierendem Irisdurchmesser d .

Bandstrukturen jedoch gleich. Während die ersten beiden Bänder stark gestört sind, zeigen die Bänder mit höherer Elementarzellenzahl, wie sich die Bandstruktur beim Hinzufügen von Elementarzellen aufbaut. Die Resonanzen aus den beiden Grafiken aus Abbildung 16

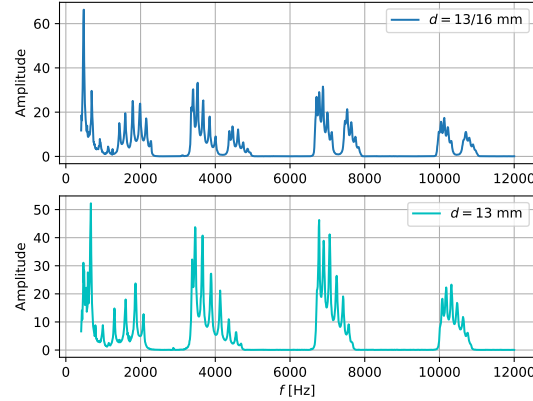


Abbildung 16: Spektrum mit 12 50 mm Röhren mit alternierenden Irisdurchmesser von 13 und 16 mm. Zum Vergleich das Spektrum von 12 50 mm Röhren mit einem festen Irisdurchmesser von 13 mm.

scheinen gleich zu sein, lediglich bei den alternierenden Irisdurchmesser spalten sich die Resonanzen auf.

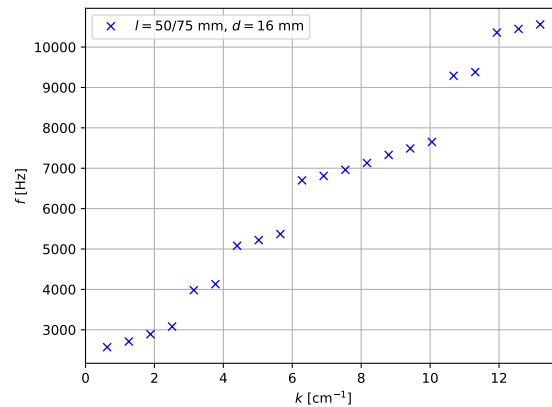


Abbildung 17: Bandstruktur von 5 Elementarzellen, welche aus 50 mm und 75 mm Röhren und 16 mm Irisdurchmesser bestehen.

Aus Abbildung 18 und 19 wird deutlich, dass durch den Einbau des Defekts sich in der ersten Bandlücke ein neuer Zustand ausbildet. Durch Verschiebung des Defektes nach innen, verschiebt sich auch die Position des Defektmodes weiter nach rechts, konvergiert jedoch gegen die mittige Störung und wandert dann wieder nach links, wenn der Defekt

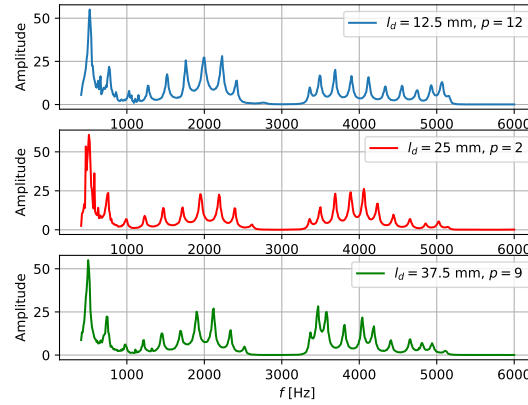


Abbildung 18: Spektrum von 12 50 mm Röhren mit einem Irisdurchmesser von 16 mm. Dazu wurde ein Defekt an der Stelle p eingebaut mit der Länge l_d .

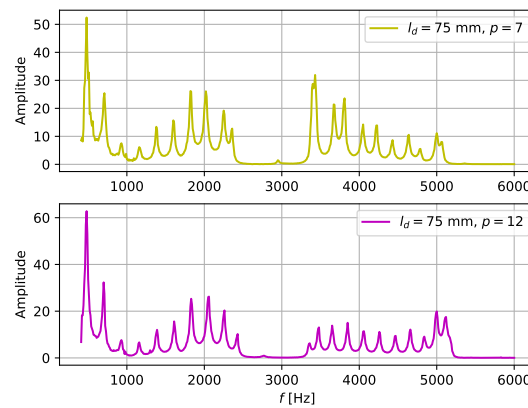


Abbildung 19: Spektrum von 12 50 mm Röhren mit einem Irisdurchmesser von 16 mm. Dazu wurde ein Defekt an der Stelle p eingebaut mit der Länge l_d .

über die Mitte hinausgeschoben wird.

3 Diskussion

Der experimentell bestimmte Wert für die Schallgeschwindigkeit $c = 342,098 \text{ m/s}$ weicht nur 0,26% vom Literaturwert ab, was eine ziemlich präzise Messung darstellt.

Abbildungen 1, 2, 4 und 10 zeigen gut die Analogie zwischen den Röhren und dem Quantenmechanischen Potentialtopf, welcher nur diskrete Werte als Eigenenergie zulässt. Die Resonanzfrequenzen sind diskret und deren Anzahl nimmt mit zunehmender Länge der Röhre zu.

In Abbildung 6, 12, 13, 14 und 11 ist gut zu sehen, wie sich eine Welle bzw. die Wellenfunktion eines Elektrons verhält, wenn es an einem Hindernis mit variierendem Wirkungsquerschnitt gestreut wird verhält, simuliert mit Iriden zwischen den Rohrab-schnitten mit verschiedenen Durchmessern. Die Bandstrukturen in Abbildung 7 und 15, welche aus der Streuung resultieren zeigen die Energieniveaus des Elektrons.

Die Anzahl der Resonanzen pro Band nimmt mit steigender Anzahl von Elementarzellen (simuliert mit 50 mm Röhren) zu, wie in Abbildung 8 zu sehen ist.

Der Einfluss des Raumes zwischen den Atomen, kann mit verschiedenen langen Rohren zwischen den Iriden beeinflusst werden: Die Resonanzfrequenzen verschieben sich, während die Anzahl der Maxima bleibt gleich (Abbildung 9).

Ein Molekül, bestehend aus 2 Atomen, wurde in Abbildung 16 simuliert mit alternierenden Iridendurchmesser (Wirkungsquerschnitt). Verglichen mit einem Spektrum mit einem konstanten Irisdurchmesser wird deutlich, wie sich die Resonanzfrequenzen und damit auch die Bandstrukturen aufspalten in Zwischenstufen, was in Abbildung 17 anschaulich dargestellt wird.

Der Einbau eines Defekts führte zu einer Störung der Bandstruktur, was zur Bildung eines neuen Zustands führt (Abbildung 18 und 19).

Die Nutzung von Schallwellen als Analogon zur Wellenfunktion eines Elektrons eignet sich gut, um das Verhalten eines jenen Elektrons in einem Gitter oder Potentialtopf zu untersuchen.