



Optimisation Numérique - 2ème année IMA

## Navigation par satellite : calcul de la position d'un utilisateur avec le GPS

### 1 Introduction

L'objectif du TP est de déterminer la position d'un utilisateur sur le globe terrestre en se plaçant dans le cadre de la constellation de satellites dédiée au GPS.

Le principe de fonctionnement du système est le suivant : tout utilisateur disposant d'un récepteur GPS reçoit de la part de tous les satellites visibles des informations lui permettant de se positionner correctement par triangulation. On se propose de résoudre dans l'environnement MATLAB le problème mathématique sous-jacent.

Ce TP est issu de l'ensemble cours / TD / TP développés par Enguerran Grandchamp suite à sa thèse et n'en constitue qu'un bref aperçu.

### 2 Les satellites

Un satellite est un objet quelconque parcourant une orbite elliptique dans le repère galiléen  $R(O, X, Y, Z)$  autour d'un astre (situé à un foyer de l'ellipse). Il est défini grâce à un certain nombre de paramètres orbitaux (6 précisément).

La position du satellite est calculée en appliquant un mécanisme de propagation des paramètres orbitaux en prenant en compte la dérive standard de chacun des paramètres et les effets liés à la rotation de la terre. Le calcul de la position du satellite consiste à exprimer les coordonnées  $(X, Y, Z)$  en fonction des paramètres orbitaux.

Une constellation de satellites est un ensemble de satellites travaillant ensemble pour répondre à un même besoin. La taille de la constellation et la valeur des paramètres orbitaux dépendent de l'application et des spécifications techniques. La répartition des satellites dans une constellation symétrique telle que définie par Walker sur une orbite circulaire se fait de manière uniforme.

Quelques exemples de constellations :

- Skybridge (Alcatel) : constellation orbite basse dédiée au multimédia et aux télécommunications

- Teledesic : constellation orbite basse pour une couverture globale pour les télécommunications
- ORBCOMM, Iridium (Motorola) : constellations orbite basse pour les télécommunications
- ELIPSO : constellation de téléphonie cellulaire
- GPS : calcul de positions
- ...

### 3 Le problème du positionnement GPS

On se place dans le cadre d'une constellation GPS. Tout utilisateur disposant d'un récepteur GPS reçoit de la part de tous les satellites visibles des informations lui permettant de déterminer sa position par triangulation.

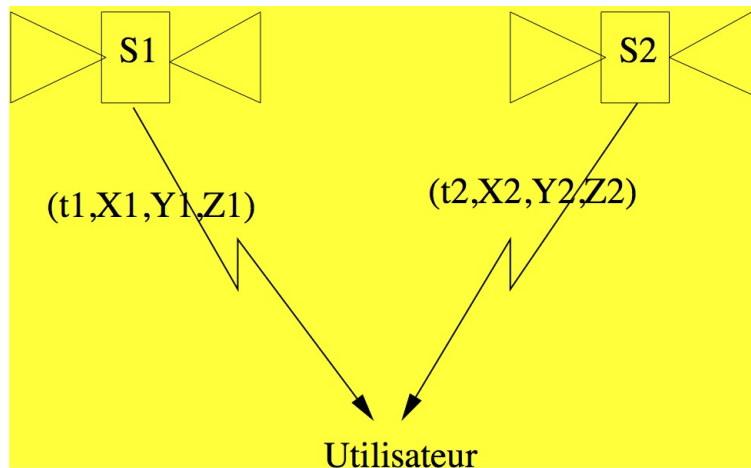


Figure 1: Positionnement GPS.

Les informations renvoyées par le satellite  $S_i$  sont :

- la date d'émission du message  $t_i$ ,
- la position du satellite au moment de l'émission  $(X_i, Y_i, Z_i)$ .

L'utilisateur peut alors calculer la distance  $d_i$  qui le sépare du satellite  $S_i$  connaissant la vitesse de propagation du signal  $c$ . En combinant chacune des distances obtenues, l'utilisateur détermine sa position  $P$  par triangulation.

On introduira de plus un biais  $\tau$  entre l'horloge interne des satellites –  $H_g$  – (horloge atomique parfaitement synchronisée) et l'horloge du récepteur –  $h_r$  – (horloge à quartz). Donc :  $H_r = H_g + \tau$ .

## 4 Mise en équation du problème

On considère que les instruments de mesure sont parfaits, c'est à dire pas d'erreur sur la position des satellites  $(X_i, Y_i, Z_i)_{i=1,N}$  ( $N$  étant le nombre de satellites visibles), sur la date d'émission des signaux  $(t_i)$  et sur la date de réception  $(tu_i)$ .

Soient  $P_i = [X_i, Y_i, Z_i]^t$  la position des satellites visibles et  $P_u = [X_u, Y_u, Z_u]^t$  la position de l'utilisateur à déterminer. On a :

$$d_i = c \times ((tu_i - \tau) - t_i) = \|P_u - P_i\|_2$$

où  $c$  est la vitesse de propagation du signal.

Il faut donc déterminer au mieux la position de l'utilisateur  $P_u$  et le biais d'horloge  $\tau$  afin de minimiser l'écart entre  $c \times ((tu_i - \tau) - t_i)$  et  $\|P_u - P_i\|_2$ , ceci pour l'ensemble des satellites visibles  $1 \leq i \leq N$ .

## 5 Travail à effectuer

1. Exprimer le problème d'optimisation

$$\min_{\beta} \frac{1}{2} \|R(\beta)\|_2^2$$

relatif à l'estimation au sens des moindres carrés de la position de l'utilisateur et du biais d'horloge. On précisera l'espace des paramètres  $\beta$ , ainsi que l'application "résidus"  $R(\beta)$ .

2. Exprimer la dérivée de l'application "résidus" qui intervient dans la formulation du problème.
3. Ecrire formellement les itérations de Gauss-Newton et Newton permettant de résoudre le PB aux moindres carrés non linéaire précédent.
4. Coder en MATLAB la résolution par Gauss-Newton et Newton du problème ci-dessus. Pour cela, on complètera la procédure **positionnement** dont l'entête est fournie. On exploitera aussi la fonction *CholeskiMdC.m* déjà fournie.
5. Tester la simulation du positionnement GPS. Pour ce faire, vous initialiserez les données par un premier appel au script *init\_gps.m* fourni, puis vous pourrez ensuite appeler le script *simulation\_gps.m*.
6. La constante  $c$  (célérité de la lumière) est très élevée, et ceci induit des difficultés numériques dans la résolution du problème. Quelle modification proposeriez vous pour contourner cette difficulté?

## 6 Codes fournis

La simulation représente une carte terrestre sur laquelle sont positionnés les 24 satellites de la constellation ainsi que la position de l'utilisateur qui se déplace d'un point  $A$  à un point  $B$ . Ce parcours défini par l'utilisateur est découpé en plusieurs étapes où l'on compare la position réelle et la position calculée via le GPS (calcul à implanter).

Deux programmes permettent de gérer la simulation :

- *init\_gps* : initialise tous les paramètres, et réalise un premier affichage du globe terrestre, et permet de saisir la position de l'utilisateur. Ne doit être exécutée que lorsque l'on désire changer les données du parcours utilisateur.
- *simulation\_gps* : lance la simulation (propagation des satellites, déplacement de l'utilisateur, calcul des positions), et appelle *positionnement* en lui passant tous les paramètres nécessaires.

La procédure **test\_convergence** permet de réaliser une pause en cours de programme et de visualiser la différence entre position exacte et position estimée de l'utilisateur (éventuellement utile pour la mise au point).

Les satellites visibles depuis la position de l'utilisateur sont codés en rouge, les autres en bleu. On peut positionner à travers la variable **FUN** dans le fichier **simulation\_gps** le nom de la procédure de calcul de position GPS à exécuter. Initialement **FUN = 'positionnement'**, on exécute alors **positionnement.m**.

Le fichier **startup.m** est automatiquement exécuté au lancement de MATLAB (pour peu qu'il soit lancé dans le bon répertoire) et permet de positionner le PATH pour trouver automatiquement tous les fichiers complémentaires qui ne sont pas fournis.

Voici l'entête du fichier *positionnement.m* à compléter.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcul de la position de l'utilisateur
% function M = positionnement(MO,TGps,TRecep,X,Y,Z,c)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Entrees :
%      MO : point initial MO = [X0,Y0,Z0,BH0]' (4x1)
%      TGps : vecteur colonne de taille le nombre de satellites visibles
%             indiquant le temps GPS à l'émission du signal
%      TRecep : vecteur colonne de taille le nombre de satellites visibles
%             indiquant le temps Utilisateur à la réception du signal
%      X : vecteur colonne de taille le nombre de satellites visibles
%             indiquant la coordonnée X des satellites visibles
%      Y : vecteur colonne de taille le nombre de satellites visibles
```

```

%          indiquant la coordonnée Y des satellites visibles
%      Z : vecteur colonne de taille le nombre de satellites visibles
%          indiquant la coordonnée Z des satellites visibles
%      c : vitesse de propagation du signal
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Sortie :
%      M : point solution (4x1)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```