DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Biện luận m để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện k (hàm số khác)

Câu 1. **(Mã 101 2019)** (Mã đề 001) Cho hai hàm số $y=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}=|x+2|-x+m$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x=m\,(1)$$

Hàm số

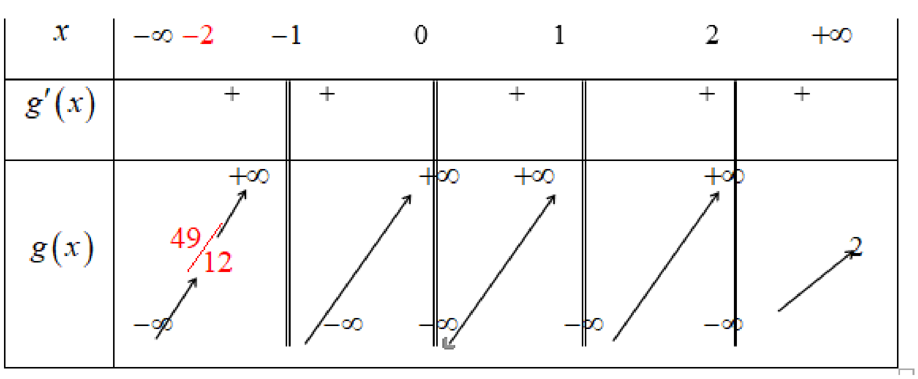
$$p(x)=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x=\begin{cases}\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-2 & \text{khi } x\ge -2\\ \frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+2x+2 & \text{khi } x<-2\end{cases}.$$

Ta có $p'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in(-2;+\infty)\setminus\{-1;0;1;2\}\\ \frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+2>0,\forall x<-2\end{cases}$

nên hàm số $y=p(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$:



Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m\ge 2$.

Câu 2. **(Mã 103 2019)** Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m \ (1)$$

Xét $f(x)=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-|x+2|+x, x\in D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$

Ta có $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-2, x\in(-2;+\infty)\cup D=D_1\\ \dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in(-\infty;-2)\cup D=D_2\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}, \forall x\in D_1\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)>0, \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	-∞		-3		-2		1		0		+∞
f'(x)		+	‖	+	‖	+	‖	+	‖	+	
f(x)	-∞ ↗		+∞ ‖ -∞ ↗		+∞ ‖ -∞ ↗		+∞ ‖ -∞ ↗		+∞ ‖ -∞ ↗		2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m\ge 2\Leftrightarrow m\le -2$.

Câu 3. **(Mã 102 2019)** Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Điều kiện $x\ne -1$; $x\ne -2$; $x\ne -3$ và $x\ne -4$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}=|x+1|-x+m$$

$$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\left(1-\frac{1}{x+4}\right)=|x-1|-x+m$$

$$\Leftrightarrow x-|x+1|+4-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m$$

Đặt tập $D_1=(-1;+\infty)$ và $D_2=(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m, & \text{khi } x\in D_1 \\ 2x+5-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m, & \text{khi } x\in D_2 \end{array}\right.$$

Đặt $f(x)=\begin{cases} 3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x\in D_1 \\ 2x+5-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x\in D_2 \end{cases}$.

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}\right)>0, & \text{khi } x\in D_1 \\ 2+\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}\right)>0, & \text{khi } x\in D_2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3

Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m\ge 3\Rightarrow m\in[3;+\infty)$.

Câu 4. **(Mã 104 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$ và $y=|x+1|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-3]$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ

$$\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=|x+1|-x-m \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-|x+1|+x=-m\,(1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x)=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-|x+1|+x=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}-1 & ,x>-1\\ \dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+2x+1, & x<-1\end{cases}$$

Ta có $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2},x\in(-1;+\infty)\setminus\{0;1\}\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+2,x\in(-\infty;-1)\setminus\{-2\}\end{cases}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=3$

$\lim\limits_{x\to-2^+}F(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-}F(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^+}F(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^-}F(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$F(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m\le 3\Leftrightarrow m\ge -3$.

Câu 5. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x^2-2x}{x-1}+\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15;20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

A. 210. **B.** 85. **C.** 119. **D.** 105.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x^2-2x}{x-1}+\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}=|x+2|-x+m$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x^2-2x}{x-1}+\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}-|x+2|+x=m$ (1).

Đặt $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x^2-2x}{x-1}+\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}-|x-2|+x$.

Ta có $g'(x)=4+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-3)^2}+\dfrac{|x-2|-(x-2)}{|x-2|}>0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$ và $(3;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại năm điểm phân biệt nên (C_1) và (C_2) luôn cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt với mọi giá trị của m. Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $(-15;20)$ nên $m\in\{-14;-13;...;18;19\}$. Khi đó tổng tất cả các giá trị m là $S=15+16+17+18+19=85$.

Câu 6. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}$ và $y=e^x+2020+3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019;2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

A. 2692. **B.** 2691. **C.** 2690. **D.** 2693.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}=e^x+2020+3m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}-e^x-2020=3m$ (1).

Đặt $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}-e^x-2020$.

Ta có $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-e^x<0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-2017$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖		
$g(x)$	-2017	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=3m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m\ge-2017\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{2017}{3}\approx-672,3$.

Do m nguyên thuộc $(-2019;2020)$ nên $m\in\{-672;-671;...;2019\}$. Vậy có tất cả 2692 giá trị m thỏa mãn.

Câu 7. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x\ne \dfrac{4}{3} \\ x\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne \dfrac{4}{3} \\ x\ne 2 \end{cases}$

Ta có:

$(*)\Leftrightarrow \left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11=m$

Xét hàm số $f(x)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11$ trên $[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right),\left(\dfrac{4}{3};2\right),(2;+\infty)$

Ta có, $f'(x)=\left(\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11\right)'$

$=4x\sqrt{x-1}+\left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}>0$ với $\forall x\in[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên

x	1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in(-\infty;1]$.

Câu 8. Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=2^{1-x}+2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=2^{1-x}+2m$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}-2^{1-x}=2m$.

Đặt $g(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}-2^{1-x}$.

Ta có $g'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+2^{1-x}\ln 2>0$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-3)$, $(-3;-2)$ $(-2;-1)$, $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=4$ và và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+		+		+		+		+	
$g(x)$			$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		4
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 5 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại 5 điểm phân biệt khi và chỉ khi $2m<4\Leftrightarrow m<2$

Câu 9. Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y=x-|x+1|+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20;20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

A. 22. **B.** 39. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}=x-|x+1|+m$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}-x+|x+1|=m$ (1).

Đặt $g(x)=\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}-x+|x+1|$.

Ta có $g'(x)=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}+\frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}+\frac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2}-1+\frac{x+1}{|x+1|}$

$$=\frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}+\frac{-(x-1)^2-1}{\left(x^2-2x\right)^2}+\frac{-(x-2)^2-1}{\left(x^2-4x+3\right)^2}+\frac{x+1-|x+1|}{|x+1|}<0$$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-1),(-1;0)$, $(0;1),(1;2),(2;3)$ và $(3;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ và và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	
$g(x)$	$+\infty \searrow$		$-\infty$ || $+\infty \searrow$		$-\infty$ || $+\infty \searrow$		$-\infty$ || $+\infty \searrow$		$-\infty$ || $+\infty \searrow$		$-\infty$ || $+\infty \searrow$		1

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có năm nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại năm điểm phân biệt khi $m\le 1$, do m nguyên thuộc $(-20;20)$ nên $m\in\{-19;-18;...;0;1\}$. Vậy có tất cả 21 giá trị m thỏa mãn.

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x$

Ta có $f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x=x\left[m^2x^3-(m+2)x^2+x+\left(m^2-1\right)\right]$. Giả sử $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=m^2x^3-(m+2)x^2+x+\left(m^2-1\right)=0$ thì hàm số $f(x)=m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=0$, nghĩa là $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x\ge 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=m^2x^3-(m+2)x^2+x+\left(m^2-1\right)=0$ phải có nghiệm $x=0$, suy ra $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm1$

Điều kiện đủ:

Với $m=1, f(x)=x^4-3x^3+x^2=x^2\left(x^2-3x+1\right)$ khi đó $f(1)=-1<0$ không thỏa mãn điều kiện $m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+\left(m^2-1\right)x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. (loại)

Với $m=1, f(x)=x^4-x^3+x^2=x^2\left(x^2-x+1\right)\ge 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Vậy $S=\{-1\}$.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$ (1)

Lí luận tương tự có $h(x)=(x-1)(ax^2+bx+2)=0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}a+b+2=0\\4a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ có $f(x)=(x-1)(x+2)(-x^2-x+2)=-(x-1)^2(x+2)^2\leq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a;b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Trong số các cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ và $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra hoặc $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ hoặc là phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\geq 0,\forall x\in R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\1>0\\\Delta=1-4b\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b\geq\frac{1}{4}\end{cases}$

Trường hợp 2: phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Ta thay $x=1$ vào phương trình $x^2+x+b=0$ có $1^2+1+b=0\Rightarrow b=-2$. Với $b=-2$ có phương trình $x^2+x+b=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Vì $x=a$ cũng là nghiệm của phương trình nên $a=-2$.

Trong trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\b\geq\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow ab\geq\frac{1}{4}$ suy ra tích ab nhỏ nhất khi $ab=\frac{1}{4}$

Và với $a=1, b=\frac{1}{4}$, tích $ab=\frac{1}{4}$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$(x-1)(x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ thỏa mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$ (nhận)

Trong trường hợp 2: Tích $ab=4>\frac{1}{4}$

Vậy tích ab nhỏ nhất khi $ab=\frac{1}{4}$.

Câu 13. Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^7+x^5+x^3+3m-1=|x-2|-x-2m \Leftrightarrow x^7+x^5+x^3-|x-2|+x=-5m+1$ (1).

Xét hàm số $f(x)=x^7+x^5+x^3-|x-2|+x$.

Ta có $f(x)=\begin{cases} x^7+x^5+x^3+2 & \text{khi } x\in[2;+\infty) \\ x^7+x^5+x^3+2x-2 & \text{khi } x\in(-\infty;2)\end{cases}$.

$f'(x)=\begin{cases} 7x^6+5x^4+3x^2>0 & \text{khi } x\in(2;+\infty) \\ 7x^6+5x^4+3x^2+2>0 & \text{khi } x\in(-\infty;2)\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m\in\mathbb{R}$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

A. 2019. **B.** 4032. **C.** 4039. **D.** 4033.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x\in[-3;1]$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}+m\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}\right)=0$. (*)

Đặt $t=2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}=g(x)$, với $x\in[-3;1]\Rightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}=t^2+4$.

Có $g'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}<0,\forall x\in(-3;1)$. Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)=-2$: $\max\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)=4\Rightarrow t\in[-2;4]$.

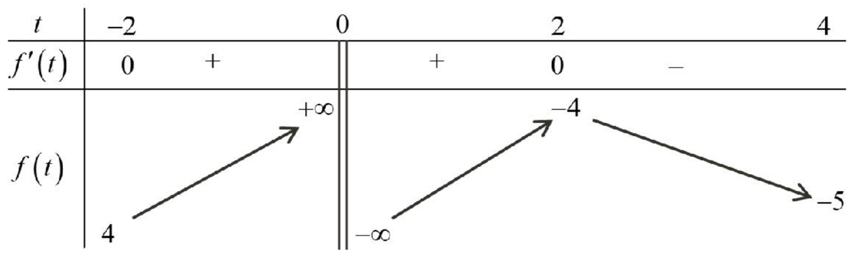
Từ (*) $\Rightarrow t^2+mt+4=0$.

Nếu $t=0\Rightarrow 0+4=0$ (vô lí).

Nếu $t\in[-2;4]\setminus\{0\}$, ta có $m=\dfrac{-t^2-4}{t}=-t-\dfrac{4}{t}=f(t)$.

Có $f'(t)=\dfrac{4-t^2}{t^2}, f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 2$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m\ge 4\\ m\le -4\end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases} m\in[-2019;2019]\\ \left[\begin{array}{l} m\ge 4\\ m\le -4\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow m\in\{-2019;-2018;....;-4;4;...;2018;2019\}$.

Vậy có $(2019-4+1).2=4032$ giá trị nguyên của tham số thực m.

Câu 15. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để phương trình $x^6+6x^4-m^3x^3+(15-3m^2)x^2-6mx+10=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ là:

A. $2<m\le\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{5}\le m<3$. **C.** $\dfrac{11}{5}<m<4$. **D.** $0<m<\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$x^6+6x^4-m^3x^3+(15-3m^2)x^2-6mx+10=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2)^3+3(x^2+2)=(mx+1)^3+3(mx+1)$

$\Leftrightarrow f(x^2+2)=f(mx+1)(*)$

Với $f(t)=t^3+3t$. Do $f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $(*) \Leftrightarrow x^2+2=mx+1$

$\Leftrightarrow x^2-mx+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Ta có: $g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên.

x	$\frac{1}{2}$		1		2
g'		$-$	0	$+$	
g	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ khi và chỉ khi $2<m\le\dfrac{5}{2}$.

Câu 16. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y=\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Lời giải.

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x\ne 10 \\ x\ge \dfrac{m}{4} \end{cases}$.

Xét trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|=\sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m=4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$.

Đặt $g(x)=4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$ với $x\in(0;+\infty)\setminus\{10\}$.

Ta có: $g'(x)=4\left(1+\dfrac{2x-18}{(x-10)^3}\right)$; $g''(x)=\dfrac{-4x+34}{(x-10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{17}{2}$		10		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$g'(x)$	$4,072$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\frac{17}{2};10\right)$. Lại có $g'(9,22)>0$ nên $\alpha \in (9,22;10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$:

x	0		9		α		10		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	$\nearrow$	36	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m=g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$\frac{-81}{25}<m<g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22;10)$ thì $\begin{cases}4x<40\\ 3<\left(\frac{2x-18}{x-10}\right)^2\end{cases}$ nên $g(x)<37 \Rightarrow g(\alpha)\in(36;37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; …; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 17. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn

$[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 4041. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x)=0$ thì phương trình $f'(x)=m.f(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f'(x)=m.f(x) \Leftrightarrow m=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\ldots+\frac{1}{x-2020}$.

Ta có $g'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{-1}{(x-3)^2}+\ldots+\frac{-1}{(x-2020)^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3...;2020\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3	$\cdots$	2020		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$\cdots$	$\Vert$	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert$	$\cdots$	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>0$ hoặc $m<0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020;2020]$ nên

$m\in\{n\in\mathbb{Z}\,|\,-2020\le n\le 2020, n\ne 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 18. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho phương trình $4\cos^3 x-12\cos^2 x-33\cos x=4m+3\sqrt[3]{3\cos^2 x+9\cos x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x$ với $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$, với mỗi $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$ chỉ có một $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $4t^3-12t^2-33t=4m+3\sqrt[3]{3t^2+9t+m}$ (1)

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Đặt $u=\sqrt[3]{3t^2+9t+m}\Rightarrow\begin{cases}4t^3-12t^2-33t=4m+3u\\ u^3=3t^2+9t+m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4t^3=12t^2+33t+4m+3u\\ 4u^3=12t^2+36t+4m\end{cases}$

$\Rightarrow 4t^3-4u^3=3u-3t\Leftrightarrow(t-u)\left(4t^2+4ut+4u^2+3\right)=0\Leftrightarrow u=t,\ \left(4t^2+4ut+4u^2+3>0\right)$

Ta tìm m để phương trình $m=t^3-3t^2-9t$ có nghiệm duy $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Xét $g(t)=t^3-3t^2-9t\Rightarrow g'(t)=3t^2-6t-9\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(l)\\ t=3\ \ (l)\end{array}\right.$

Vậy $g(1)\le m\le g\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow -11\le m\le\frac{29}{8}$ vậy có 15 giá trị nguyên của m.

Câu 19. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai hàm số $y=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A. 506. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

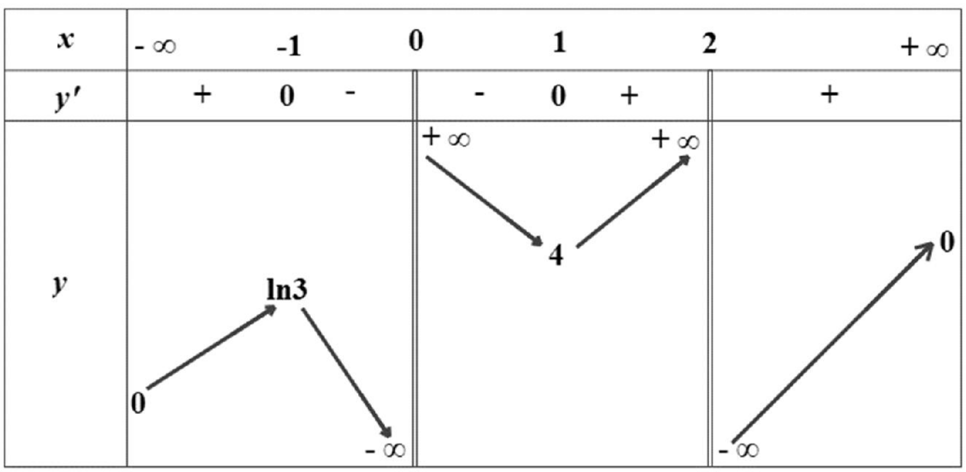
$$\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=4m-2020 \quad (*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi (*) có duy nhất một nghiệm.

+ Xét hàm số $y=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=\begin{cases} g_1(x)=\ln(x-2)-\ln x-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } x>2 \\ g_2(x)=\ln(2-x)-\ln x-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } 0<x<2 \\ g_3(x)=\ln(2-x)-\ln(-x)-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } x<0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} g_1'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x>2 \\ g_2'(x)=\frac{-1}{2-x}-\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0<x<2 \\ g_3'(x)=\frac{-1}{2-x}-\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x<0 \end{cases}$, do vậy $y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

bảng biến thiên hàm số như sau



+ Qua bảng biến thiên này ta có (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 4m-2020=4 \\ 4m-2020=\ln 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=506\in\mathbb{Z} \\ m=\frac{2020+\ln 3}{4}\notin\mathbb{Z} \end{array}\right.$

+ Từ đây yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Câu 20. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4041.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2):

$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ (1)

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x \in \left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x \notin \left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-12x^4-22x^3-x^2+10x+3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| \Leftrightarrow m = -2x-2|x|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = -2x-2|x|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$.

Suy ra: $f'(x) = -2-\frac{2x}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(2x+1)^2}-\frac{3}{(3x+1)^2}$.

Ta có: $f'(x) = \begin{cases} -4-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(2x+1)^2}-\frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0;+\infty) \\ -\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(2x+1)^2}-\frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x(-\infty;0) \setminus \left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\} \end{cases}$ và $f'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì $m \ge 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y = \frac{(x^2-2x+m)^2-3x-m}{x-3}$ (C) và đường thẳng $(d): y = 2x$ (m là tham số thực).

Số giá trị nguyên của $m \in [-15;15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. 15. **B.** 30. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2-2x+m)^2-3x-m}{x-3} = 2x \Leftrightarrow (x^2-2x+m)^2-3x-m = 2x^2-6x \ (x \ne 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+m)^2 = 2x^2-3x+m \ (x \ne 3) \quad (*)$$

Đặt: $x^2-2x+m=t$ ta được hệ: $\begin{cases}x^2-2x+m=t\\ t^2=2x^2-3x+m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x-t+m=0\\ 2x^2-t^2-3x+m=0\end{cases}$

$\Rightarrow x^2-t^2-x+t=0 \Rightarrow (x-t)(x+t-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=x\\ t=1-x\end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}x^2-2x+m=x\\ x^2-2x+m=1-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-3x+m=0\ (1)\\ x^2-x+m-1=0\ (2)\end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

-$(1), (2)$ đều có hai nghiệm pb khác 3 khi: $\begin{cases}9-4m>0\\ 3^3-3.3+m\neq 0\\ 1-4(m-1)>0\\ 3^2-3+m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{9}{4}\\ m\neq 0\\ m<\dfrac{5}{4}\\ m\neq -5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<1,25\\ m\neq 0\\ m\neq -5\end{cases}\ (**)$

-$(1), (2)$ không có nghiệm trùng nhau $\Leftrightarrow$ Hệ: $\begin{cases}x^2-3x+m=0\\ x^2-x+m-1=0\end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-1=0\\ x^2-3x+m=0\end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ x^2-3x+m=0\end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3.\left(\dfrac{1}{2}\right)+m\neq 0$

$\Leftrightarrow m\neq \dfrac{5}{4}\ (***)$

Vậy số giá trị nguyên của $m\in[-15;15]$ đồng thời thỏa mãn $(**)$ và $(***)$ là 15.

Câu 22. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2006. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn A

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$x^6+6x^4+6x^2+1=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)\quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x\geq 0 \Leftrightarrow m\geq 15x\ (*)$.

Nếu $x=0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x\neq 0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x^3+6x^2+6x+\dfrac{1}{x^3}=\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{m-15x}\right)^3+3\sqrt{m-15x}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)=t^3+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\sqrt{m-15x}$ (2).

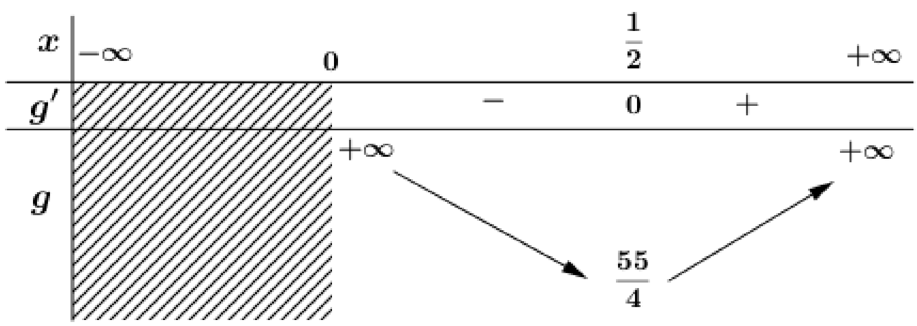
Nếu $x<0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}<0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x>0$.

Khi đó $\begin{cases} m>0 \\ x+\frac{1}{x}>0 \end{cases}$ nên $(2)\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=m-15x \Leftrightarrow m=x^2+\frac{1}{x^2}+2+15x$.

Đặt $g(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+2+15x, x>0$. $g'(x)=2x-\frac{2}{x^3}+15$.

Phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm $x=\frac{1}{2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên



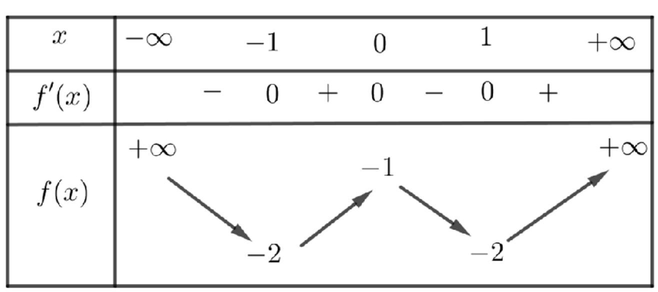
Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>\frac{55}{4}$ (thỏa $m>0$).

Kết hợp với m nguyên và $m\in[-2019;2019]$ ta có được m nguyên và $m\in[14;2019]$.

Khi đó S có $2019-14+1=2006$ phần tử.

Dạng 2. Tương giao hàm hợp, hàm ẩn

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x$. Do $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t)+3=0\Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=-\dfrac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t=a\in(-1;0)$ và $t=b\in(0;1)$.

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi<x_1<x_2<0<\pi<x_3<x_4<2\pi$.

Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0<x_5<x_6<\pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x$, $x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x)=1$ trở thành $f(t)=1,\forall t\in[-1;1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-1;0)\\t=b\in(0;1)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\sin x=t$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\pi<x_1<x_2<2\pi$.

Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

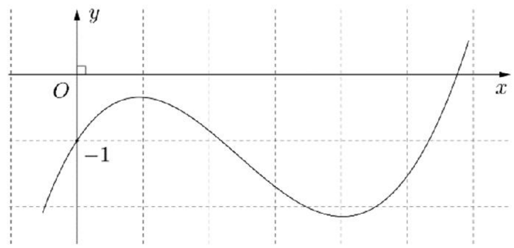
Ứng với mỗi giá trị $t \in (0;1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$0 < x_3 < x_4 < \pi;\ 2\pi < x_5 < \dfrac{5\pi}{2}$;

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ là

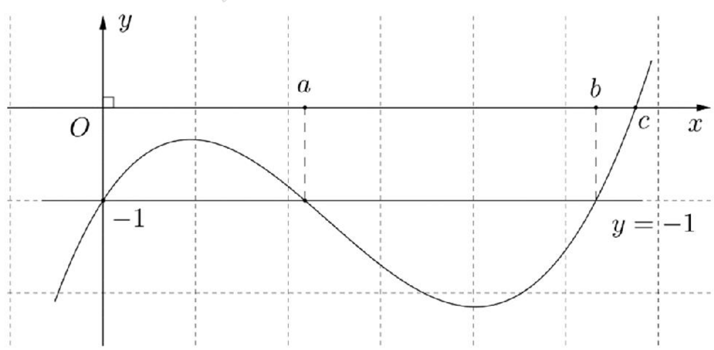


A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

$$f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 f(x)=0 \\ x^3 f(x)=a>0 \\ x^3 f(x)=b>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=\dfrac{a}{x^3} (\text{do } x\neq 0) \\ f(x)=\dfrac{b}{x^3} (\text{do } x\neq 0) \end{array}\right.$$



□ $f(x)=0$ có một nghiệm dương $x=c$.

□ Xét phương trình $f(x)=\dfrac{k}{x^3}$ với $x\neq 0, k>0$.

Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{k}{x^3}$.

$g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}$.

□ Với $x>c$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x)>0 \Rightarrow g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}>0$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} g(c)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(c;+\infty)$

$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(c;+\infty)$.

□ Với $0<x<c$ thì $f(x)<0<\dfrac{k}{x^3} \Rightarrow g(x)=0$ vô nghiệm.

□ Với $x<0$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x)>0 \Rightarrow g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}>0$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$.

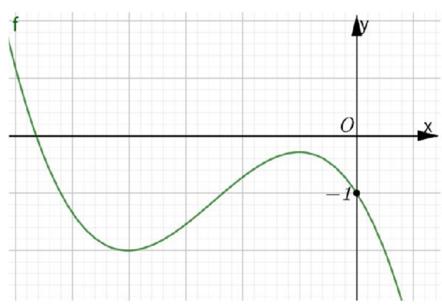
$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(-\infty;0)$.

Tóm lại $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Suy ra hai phương trình $f(x)=\dfrac{a}{x^3}$, $f(x)=\dfrac{b}{x^3}$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c.

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị, ta thấy $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f(x)=a\in(-6;-5) & (1) \\ x^3 f(x)=b\in(-3;-2) & (2) \\ x^3 f(x)=0 & (3) \end{array}\right.$

+ Phương trình (3) tương đương $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1,\ (-6<x_1<a<-5) \end{array}\right.$.

+ Các hàm số $g(x)=\frac{a}{x^3}$ và $h(x)=\frac{b}{x^3}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, và nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên:

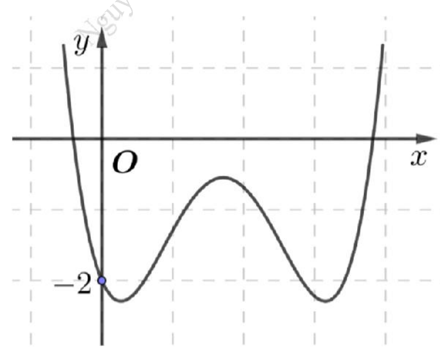
$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\f(x)=h(x)\end{array}\right..$$

+ Trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0\\ \lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=+\infty\end{cases}$ nên các phương trình $f(x)=g(x)$ và $f(x)=h(x)$ có nghiệm duy nhất.

+ Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=-\infty\end{cases}$ nên các phương trình $f(x)=g(x)$ và $f(x)=h(x)$ có nghiệm duy nhất.

Do đó, phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

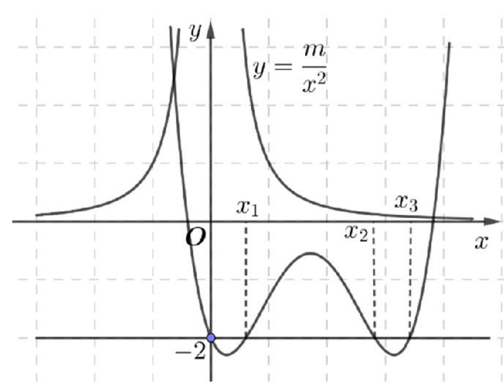


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2f(x)\right)+2=0$ là

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D



$$f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a(1) \\ x^2 f(x)=b(2) \\ x^2 f(x)=c(3) \end{array}\right. \text{ với } 0<a<b<c.$$

Xét phương trình $f(x)=\dfrac{m}{x^2}(1)\quad (m>0)$.

Gọi α,β là hoành độ giao điểm của $(C): y=f(x)$ và Ox; $\alpha<0<\beta$.

(1) $\Leftrightarrow f(x)-\dfrac{m}{x^2}=0$. Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{m}{x^2}$

Đạo hàm $g'(x)=f'(x)+\dfrac{2m}{x^3}$.

Trường hợp 1: $x<\alpha; f'(x)<0; \dfrac{2m}{x^3}<0 \Rightarrow g'(x)<0$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\alpha)=-\dfrac{m}{\alpha^2}<0$. Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha)$.

Trường hợp 2: $\alpha<x<\beta$

$f(x)<0$, $\dfrac{m}{x^2}>0$ suy ra $g(x)<0\quad \forall x\in(\alpha,\beta)$.

Trường hợp 3: $x>\beta; f'(x)>0;\ \dfrac{2m}{x^3}>0 \Rightarrow g'(x)>0$

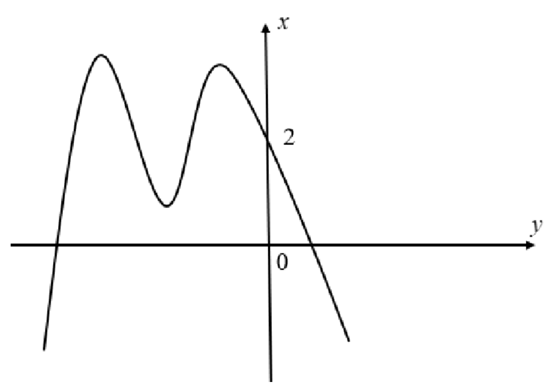
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\beta)=-\dfrac{m}{\beta^2}<0$. Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(\beta;+\infty)$.

Vậy phương trình $f(x)=\dfrac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m>0$.

Ta có: $x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee f(x)=0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)=2$ là:

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f\left(x^2 f(x)\right)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a<0 \\ x^2 f(x)=b<0 \\ x^2 f(x)=c<0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình: $x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$ mà $f(x)=0$ có hai nghiệm $\Rightarrow x^2.f(x)=0$ có ba nghiệm.

Xét phương trình: $x^2 f(x)=a<0$

Do $x^2 \geq 0$; $x=0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow f(x)=\dfrac{a}{x^2}<0$

Xét $g(x)=\dfrac{a}{x^2} \Rightarrow g'(x)=\dfrac{-2a}{x^3}$

Bảng biến thiên:

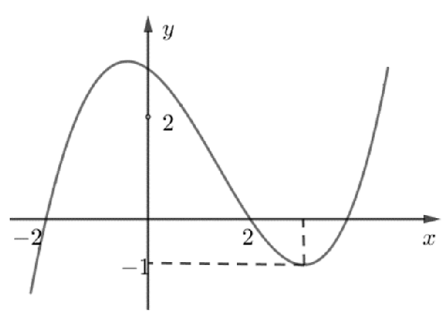
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên với $f(x)<0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{a}{x^2}$ có 2 nghiệm.

Tương tự: $x^2 f(x)=b$ và $x^2 f(x)=c$ $(b,c<0)$ mỗi phương trình cũng có hai nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)=2$ là 9 nghiệm.

Câu 7. **(Mã 103 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ là

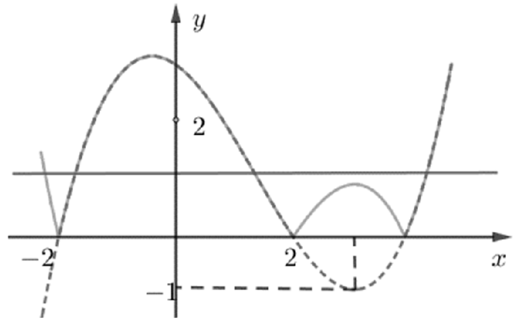


A. 7. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $|f(t)|=\dfrac{3}{2}$ $(*)$.



Từ đồ thị hàm số $y=|f(t)|$ và đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ ta suy ra phương trình $(*)$ có 4 nghiệm $t_1<-2<t_2<0<t_3<2<t_4$

Xét hàm $t=x^3-3x$. Ta có $t'=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t'		+			-			+	
t	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Với $t_1<-2$ phương trình: $t_1=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

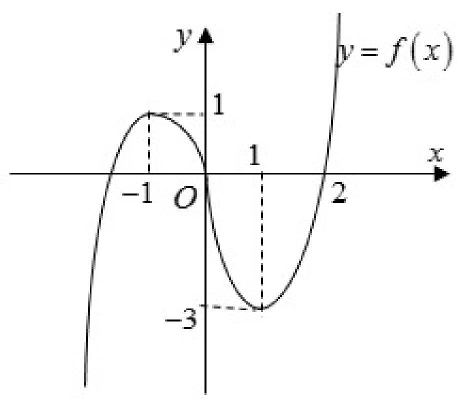
Với $-2<t_2<0$ phương trình: $t_2=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $0<t_3<2$ phương trình: $t_3=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $2<t_4$ phương trình: $t_4=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm. Chọn C

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

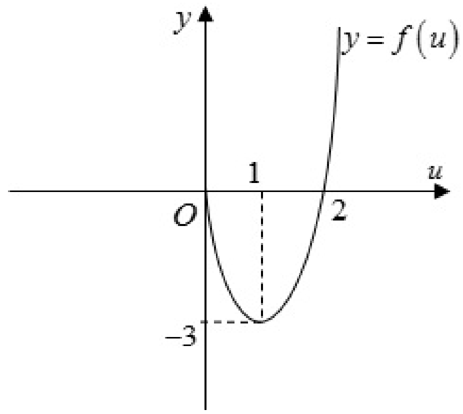
Đặt $u=e^x>0$, từ đồ thị suy ra: $f(u)\ge -3, \forall u>0$.

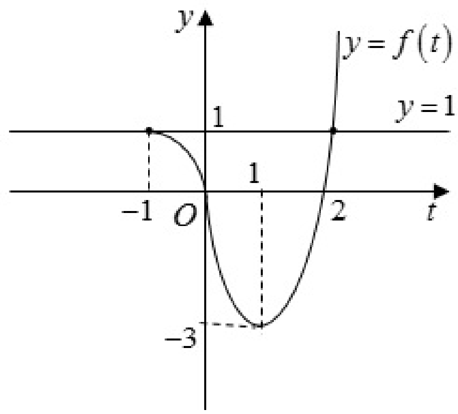
Đặt $t=2+f(u)$, $t\ge -1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t=-1$, có một nghiệm $u=1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t\in(-1;2)$, có hai nghiệm $u\in(0;2)$.

Ứng với mỗi nghiệm $t>2$, có một nghiệm $u>2$.

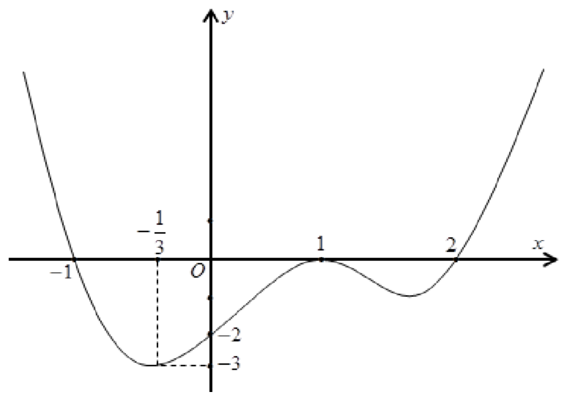




Phương trình $f(t)=1$ có một nghiệm $t=-1$ và một nghiệm $t>2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f\left(f'(x)-1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

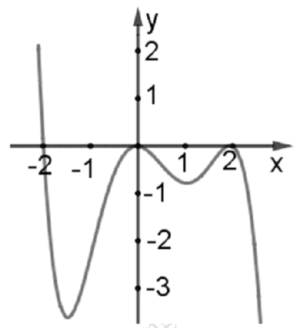
Ta có: $g'(x)=f''(x).f'\left(f'(x)-1\right)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'\left(f'(x)-1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{3} \\ x=1 \\ x=x_0\in(1\,;2) \\ f'(x)-1=-1 \\ f'(x)-1=1 \\ f'(x)-1=2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta cũng có:

- $f'(x)-1=-1 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.
- $f'(x)-1=1 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \in(-\infty\,;\,\text{-}1) \\ x=x_2 \in(2\,;\,+\infty) \end{array}\right.$.
- $f'(x)-1=2 \Leftrightarrow f'(x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3 \in(-\infty\,;\,x_1) \\ x=x_4 \in(x_2\,;\,+\infty) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm.

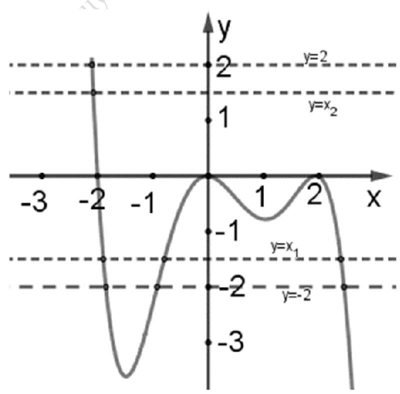
Câu 10. **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(f(x))$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



A. 14. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g'(x)=f'(f(x)).f'(x)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x))=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$$

Có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1,(-2<x_1<-1) \\ x=0 \\ x=x_2,(1<x_2<2) \\ x=2 \end{array}\right.$; $f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1 \\ f(x)=0 \\ f(x)=x_2 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=-2, x=0, x=2$, trong đó có 2 nghiệm trùng với nghiệm của $f'(x)=0$.

$f(x)=x_1$ có 3 nghiệm phân biệt $x_3\in(-2;-1), x_4\in(-1;1), x_5\in(2;+\infty)$.

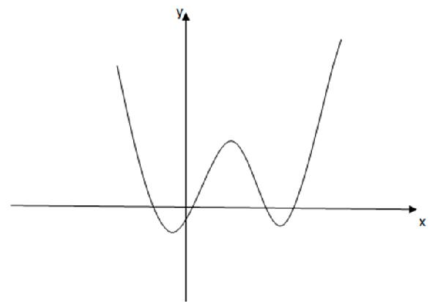
$f(x)=x_2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_6\in(-\infty;-2)$.

$f(x)=2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_7\in(-\infty;-2)$.

Cũng từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,-2,0,2$ đôi một khác nhau.

Vậy $g'(x)=0$ có tổng cộng 10 nghiệm phân biệt.

Câu 11. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=[f'(x)]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4), a\neq 0, x_1<x_2<x_3<x_4$.

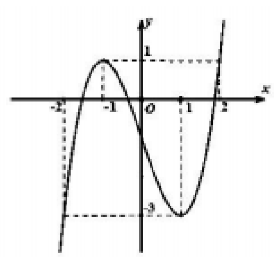
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=[f'(x)]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là

$$[f'(x)]^2-f''(x).f(x)=0\Rightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=0\Rightarrow\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]'=0$$

$$-\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{1}{(x-x_3)^2}-\frac{1}{(x-x_4)^2}=0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=[f'(x)]^2-f''(x).f(x)$ và trục Ox là 0.

Câu 12. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=x_2\in(-1;0) \\ x=x_3\in(1;2) \end{array}\right.$

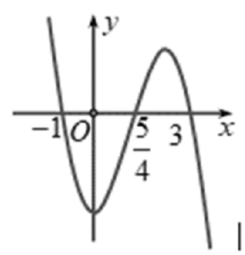
Khi đó: $f(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=x_1\in(-2;-1) \\ f(x)-1=x_2\in(-1;0) \\ f(x)-1=x_3\in(1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1+x_1\in(-1;0) \\ f(x)=1+x_2\in(0;1) \\ f(x)=1+x_3\in(2;3) \end{array}\right.$

+ Ta thấy hai phương trình $f(x)=1+x_1\in(-1;0)$; $f(x)=1+x_2\in(0;1)$ đều có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=1+x_3\in(2;3)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x)-1)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 13. **(Đề tham khảo 2019)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$,. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\frac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m\neq 0$. Hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ (2).

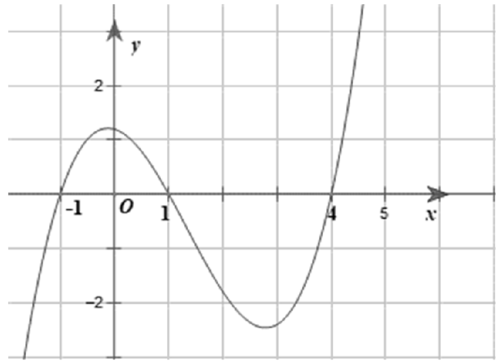
Từ (1) và (2) suy ra $n=-\frac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f(x)=r \Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0 \Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{5}{3} \vee x=3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\frac{5}{3};0;3\right\}$.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1 \vee x=4$

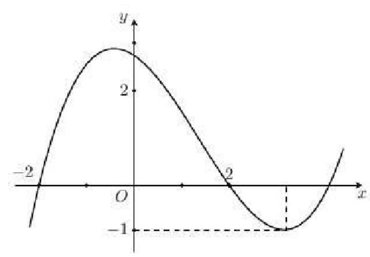
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1	2	4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$						$f(2)$			

Phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r \Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(2\right)$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 15. **(Mã 104 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{2}{3}$ là



A. 10 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=g\left(x\right)=x^3-3x$ (1)

Ta có $g'\left(x\right)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x\pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		+	0	-	0	+	
$g\left(x\right)$	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $t\in(-2;2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1)

$t\in\{-2;2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1)

$t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{2}{3}$ (2) trở thành

$$\left|f(t)\right|=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)=\frac{2}{3}\\ f(t)=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

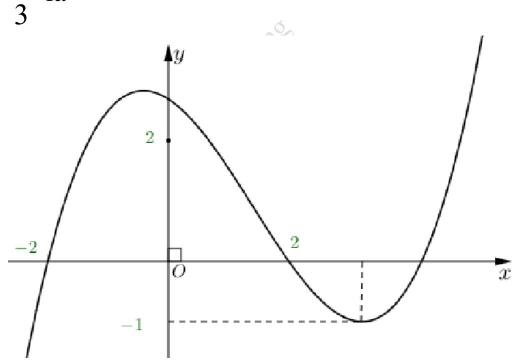
Dựa vào đồ thị ta có:

+ Phương trình $f(t)=\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2<t_1<t_2<2<t_3\Rightarrow$ có 7 nghiệm của phương trình (2).

+ Phương trình $f(t)=-\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4<-2<2<t_5<t_6\Rightarrow$ có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 16. **(Mã 101 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}$ là



A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

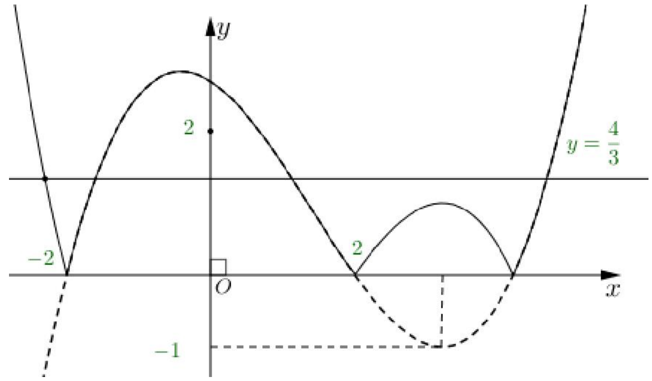
Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^3-3x\Rightarrow t'=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Khi đó $\left|f(t)\right|=\frac{4}{3}$ (1)



Dựa vào đồ thị hàm số $|f(t)|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2$, $-2 < t_2 < 0$, $0 < t_3 < 2$, $t_4 > 2$.

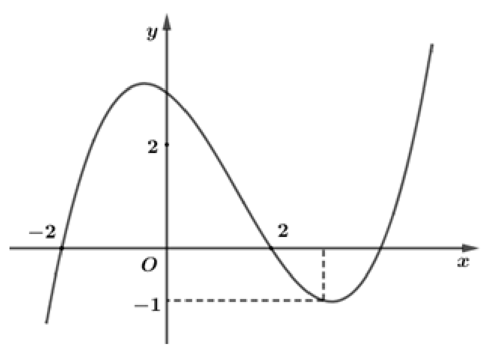
Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào phương trình $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x.

Khi đó

+ $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.
+ $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
+ $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
+ $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \frac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

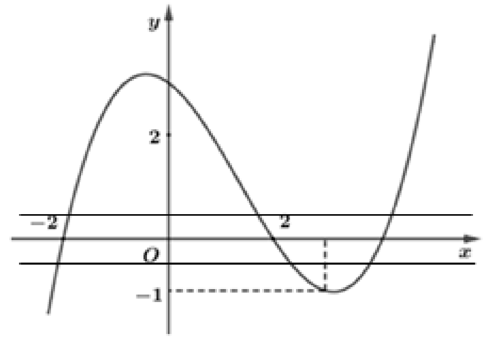
Câu 17. **(Mã 102 2019)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \frac{1}{2}$



A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x^3-3x\right)=\dfrac{1}{2} & (1)\\ f\left(x^3-3x\right)=-\dfrac{1}{2} & (2)\end{array}\right.$

+) $(1)\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=\alpha_1\left(-2<\alpha_1<0\right)\\ x^3-3x=\alpha_2\left(0<\alpha_2<2\right)\\ x^3-3x=\alpha_3\left(\alpha_3>2\right)\end{array}\right.$

+) $(2)\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=\alpha_4\left(x_4<-2\right)\\ x^3-3x=\alpha_5\left(\alpha_5>2\right)\\ x^3-3x=\alpha_6\left(\alpha_6>2\right)\end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^3-3x,\ D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=3x^2-3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

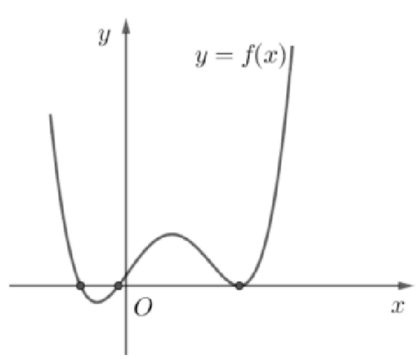
Phương trình: $x^3-3x=\alpha_1$ có 3 nghiệm.

Phương trình: $x^3-3x=\alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3-3x=\alpha_3,\ x^3-3x=\alpha_4,\ x^3-3x=\alpha_5,x^3-3x=\alpha_6$ đều có một nghiệm

Từ đó suy ra phương trình $\left|f\left(x^2-3x\right)\right|=\dfrac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 18. Cho $f\left(x\right)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $\left[f'(x)\right]^2 = f(x).f''(x)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\left[f'(x)\right]^2 = f(x).f''(x)$ (1)

Do $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1, x_2, x_2\,(x_1<x_2<x_3)$ và $f'(x_3)=0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

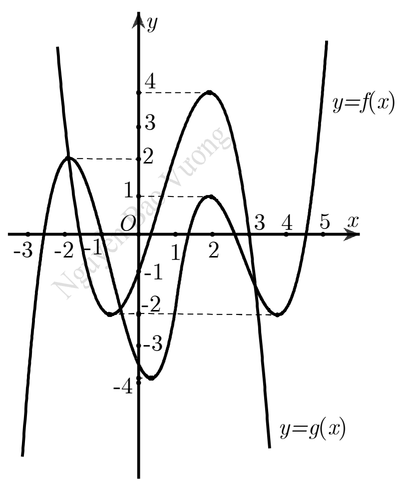
Ta có $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2,(a\neq 0)$

Với $x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{2}{x-x_3}\right)' = 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x-x_1)^2}-\dfrac{1}{(x-x_2)^2}-\dfrac{2}{(x-x_3)^2}=0$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x=x_3$.

Câu 19. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là

A. 25 . **B.** 22 . **C.** 21 . **D.** 26 .

Lời giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta thấy: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\,(-3<x_1<-2) \\ x=-1 \\ x=x_2\,(1<x_2<2) \\ x=x_3\,(2<x_3<3) \\ x=x_4\,(4<x_4<5) \end{array}\right.$.

Do đó: $f\left(g\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g\left(x\right)=x_1\left(1\right) \\ g\left(x\right)=-1\left(2\right) \\ g\left(x\right)=x_2\left(3\right) \\ g\left(x\right)=x_3\left(4\right) \\ g\left(x\right)=x_4\left(5\right) \end{array}\right.$

Phương trình $\left(1\right)$ có đúng 1 nghiệm; Phương trình $\left(2\right)$ có đúng 3 nghiệm; Phương trình $\left(3\right)$ có đúng 3 nghiệm; Phương trình $\left(4\right)$ có đúng 3 nghiệm; Phương trình $\left(5\right)$ có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ có đúng 11 nghiệm.

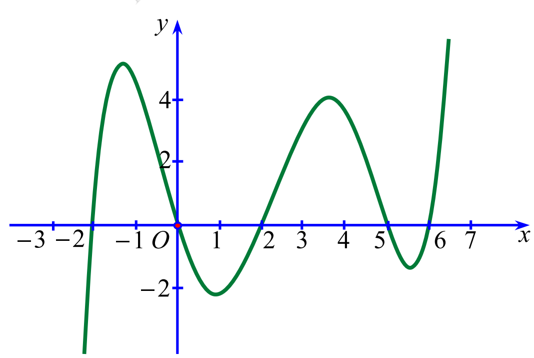
Quan sát đồ thị ta thấy: $g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_5\left(-2<x_5<-1\right) \\ x=x_6\left(0<x_6<1\right) \\ x=3 \end{array}\right.$

Do đó $g\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=x_5\left(6\right) \\ f\left(x\right)=x_6\left(7\right) \\ f\left(x\right)=3\left(8\right) \end{array}\right.$

Phương trình $\left(6\right)$ có 5 nghiệm; Phương trình $\left(7\right)$ có 5 nghiệm; Phương trình $\left(8\right)$ có 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ và $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ là 22 nghiệm.

Câu 20. **(THPT Nghĩa Hưng 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;6\right]$ của phương trình $f\left(x\right)=f\left(0\right)$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ ta có BBT

x	$-\infty$		-2		0		2		5		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f\left(-2\right)$	↗	$f\left(0\right)$	↘	$f\left(2\right)$	↗	$f\left(5\right)$	↘	$f\left(6\right)$	↗	$+\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'\left(x\right); y=0; x=0; x=2$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 2; x = 5$

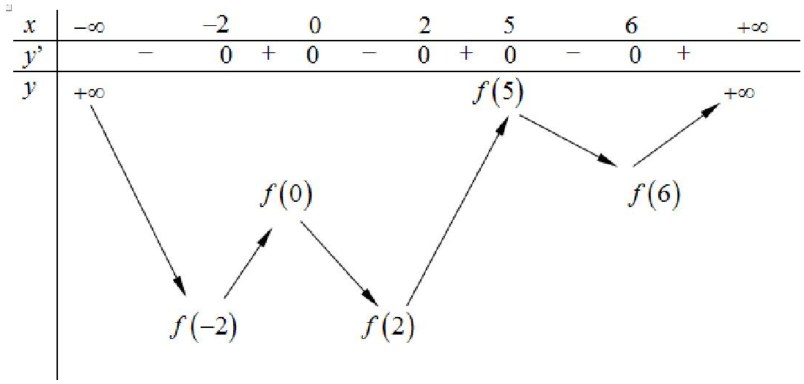
Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 5; x = 6$

$S_1 = -\int_0^2 f'(x)dx = f(0) - f(2)$; $S_2 = \int_2^5 f'(x)dx = f(5) - f(2)$; $S_3 = -\int_5^6 f'(x)dx = f(5) - f(6)$

Từ đồ thị ta thấy $S_2 > S_1 \Rightarrow f(5) - f(2) > f(0) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(5) > f(0)}$

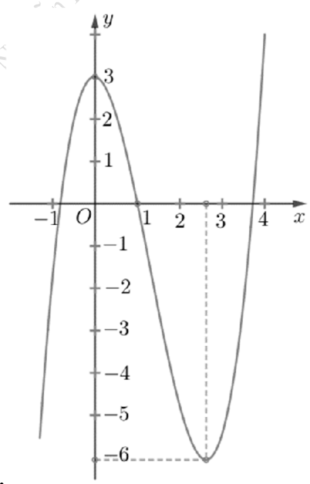
và $S_1 + S_3 < S_2 \Rightarrow f(0) - f(2) + f(5) - f(6) < f(5) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(6) > f(0)}$

Khi đó ta có BBT chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:



Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$

Câu 21. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x)f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{array}\right.$ $(*)$.

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a_1 \end{array}\right.$, với $2 < a_1 < 3$.

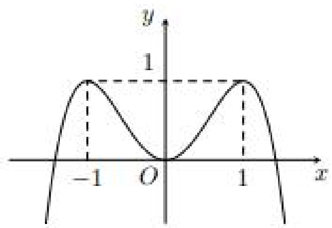
$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \;,(1) \\ f(x) = a_1 \;,(2) \end{array}\right.$.

Phương trình (1): $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $(*)$.

Phương trình (2): $f(x)=a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình $(*)$.

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 22. **(THPT Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b=d=0\Rightarrow f(x)=ax^4+cx^2+e$

Ta có $f'(x)=4ax^3+2cx.$

Từ đồ thị $\Rightarrow\begin{cases}f'(1)=0\\f(0)=0\\f(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+2c=0\\e=0\\a+c+e=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\e=0\Rightarrow f(x)=x^4+2x^2.\\c=2\end{cases}$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{x}\right)=x^2+2x$ và $f\left(\sqrt{f(x)}\right)=f^2(x)+2f(x).$

Như vậy phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0.$

$\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ với $f(x)\geq 0.$

Đặt $t=f(x)(t\geq 0)$ ta được phương trình $g(t)=0$ với $g(t)=t^2-3t-2\sqrt{t}+1.$

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1)<0$

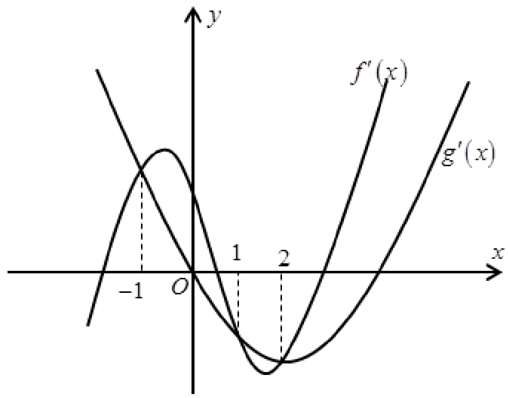
$\Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4)<0$

$\Rightarrow g(t)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;4)$.

Mà $g(t)=0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. Suy ra $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ có duy nhất một nghiệm $f(x)\in(0;1)$. Suy ra phương trình $f(x)=a$ với $a\in(0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 23. **(Sở Hưng Yên - 2019)** Cho các hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(n,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $f'(x), g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

+) Từ giả thiết $f(0)=g(0)$ suy ra $r=d$ do đó phương trình $f(x)=g(x)$ tương đương với:

$$x\left[mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)=0\end{array}\right.$$

+) Từ đồ thị của các hàm số $f'(x), g'(x)$ suy ra $m\neq 0$

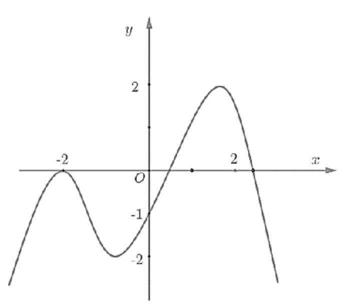
và $\begin{cases}f'(-1)=g'(-1)\\ f'(1)=g'(1)\\ f'(2)=g'(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4m+3(n-a)-2(p-b)+q-c=0\\ 4m+3(n-a)+2(p-b)+q-c=0\\ 32m+12(n-a)+4(p-b)+q-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n-a=-\dfrac{8}{3}m\\ p-b=-2m\\ q-c=8m\end{cases}$.

Từ đó ta có phương trình: $mx^3-\dfrac{8}{3}mx^2-2mx+8m=0\Leftrightarrow x^3-\dfrac{8}{3}x^2-2x+8=0$.

Sử dụng máy tính Casio ta được phương trình có 1 nghiệm và nghiệm đó khác 0.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có 2 phần tử.

Câu 24. **(Sở Hà Tĩnh - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x))+1=0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0$ $f\left(f\left(x\right)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a<-2 \\ f\left(x\right)=b\in\left(-2;-1\right) \\ f\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=c>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=a<-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<-2 \\ x=x_2>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=b\in\left(-2;-1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3<-2 \\ x=x_4\in\left(-2;-1\right) \\ x=x_5\in\left(-1;0\right) \\ x=x_6>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_7=-2 \\ x=x_8\in\left(0;1\right) \\ x=x_9\in\left(2;3\right) \end{array}\right.$.

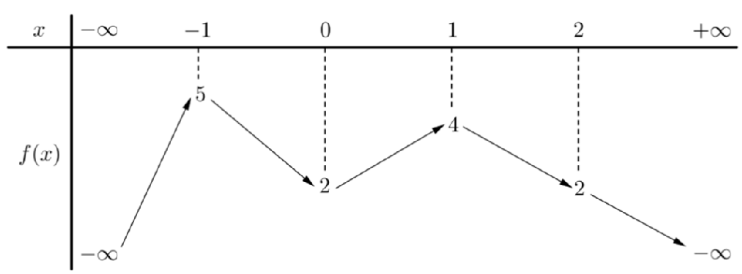
+ Với $f\left(x\right)=c>2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(-\infty;-2\right)$, $f\left(x_1\right)=a\neq b=f\left(x_3\right)$ nên $x_1\neq x_3$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(2;+\infty\right)$, $f\left(x_6\right)=b\neq 0=f\left(x_9\right)$ nên $x_6\neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 25. **(THPT Nguyễn Đức Cảnh - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

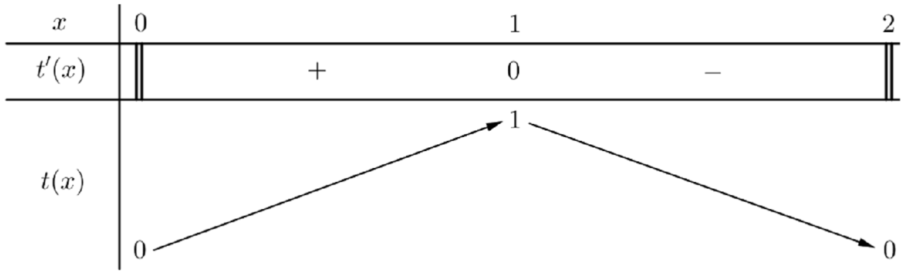
Lời giải

Chọn B

Trước hết, xét hàm số $t=t\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2}$, $x\in\left[0;2\right]$.

Ta có $t'\left(x\right)=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$, $x\in\left(0;2\right)$. $t'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1\in\left(0;2\right)$.

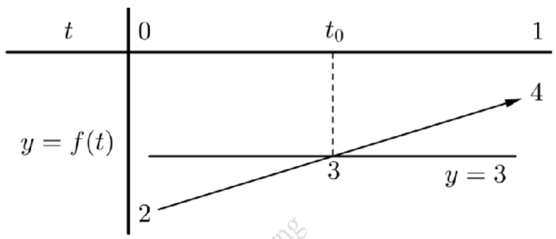
Bảng biến thiên của $t\left(x\right)$:



$\Rightarrow 0 \le t \le 1,\ \forall x \in [0;2]$.

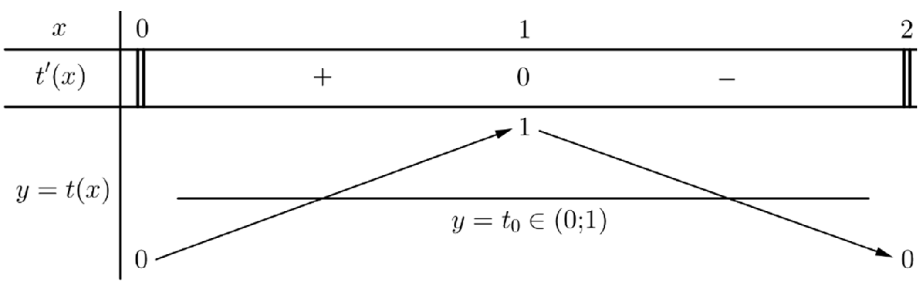
Lúc này, phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ trở thành $f(t)=3$ (1) với $t \in [0;1]$.

Theo bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ thì đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0;1)$ nên phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t=t_0$ với $t_0 \in (0;1)$.



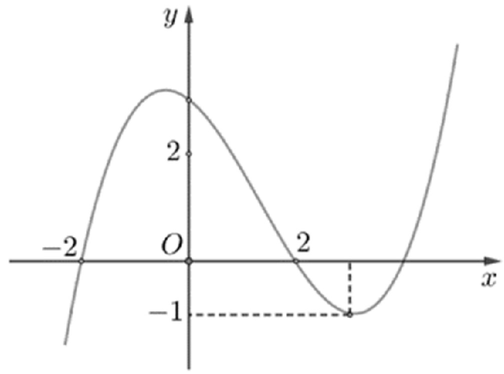
Khi đó, phương trình $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=t_0$ (2), $t_0 \in (0;1)$.

Mặt khác, theo bảng biến thiên của hàm số $t(x)$, với mỗi $t_0 \in (0;1)$ thì đường thẳng $y=t_0$ cắt đồ thị hàm số $y=t(x)$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 26. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ (1)

Đặt $t=x^3-3x$, ta có bảng biến thiên của hàm số $t=g(x)=x^3-3x$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Với mỗi $t_0>2$ hoặc $t_0<-2$, phương trình $t_0=x^3-3x$ có một nghiệm;

+ Với mỗi $-2<t_0<2$, phương trình $t_0=x^3-3x$ có 3 nghiệm.

Khi đó, (1) trở thành $|f(t)|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=1 \\ f(t)=-1 \end{array}\right.$

* TH 1: $f(t)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_1\in(-2;0) \\ t=t_2\in(0;2) \\ t=t_3\in(2;+\infty) \end{array}\right.$

+ Với $t=t_1\in(-2;0) \Rightarrow$ Phương trình $t_1=x^3-3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t=t_2\in(0;2) \Rightarrow$ Phương trình $t_2=x^3-3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t=t_3\in(2;+\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_3=x^3-3x$ có 1 nghiệm;

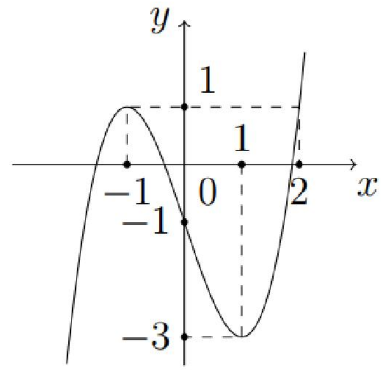
* TH 2: $f(t)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_4\in(-\infty;-2) \\ t=t_5\in(2;+\infty) \end{array}\right.$

+ Với $t=t_4\in(-\infty;-2) \Rightarrow$ Phương trình $t_4=x^3-3x$ có 1 nghiệm;

+ Với $t=t_5\in(2;+\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_5=x^3-3x$ có 1 nghiệm.

Mặt khác, các nghiệm này đều phân biệt. Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ có 9 nghiệm phân biệt.

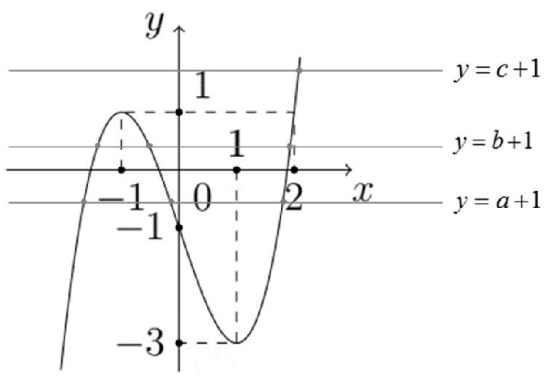
Câu 27. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f\left[f(\cos x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)-1=a\in(-2;-1) \\ f(\cos x)-1=b\in(-1;0) \\ f(\cos x)-1=c\in(1;2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)=a+1\in(-1;0) \\ f(\cos x)=b+1\in(0;1) \\ f(\cos x)=c+1\in(2;3) \end{array}\right.$$

• Xét phương trình $f(\cos x)=a+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=\alpha_1<-1 & (1) \\ \cos x=\alpha_2\in(-1;0) & (2) \\ \cos x=\alpha_3>1 & (3) \end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên phương trình $(1),(3)$ vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

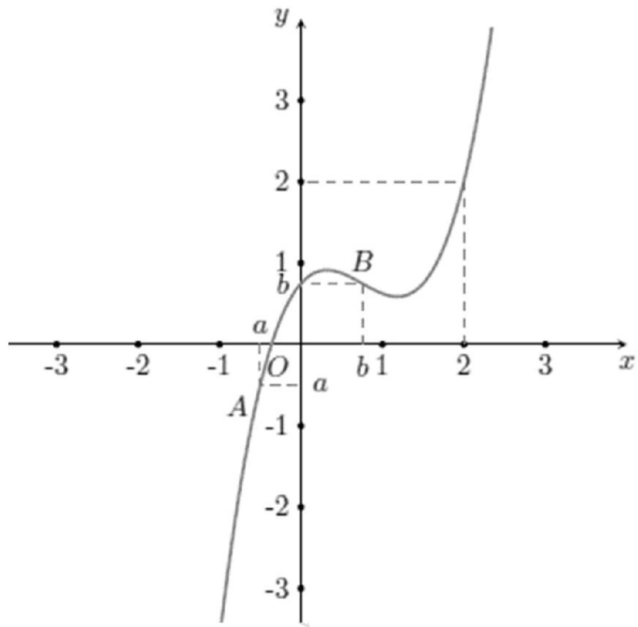
• Xét phương trình $f(\cos x)=b+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=\beta_1<-1 & (4) \\ \cos x=\beta_2\in(-1;0) & (5) \\ \cos x=\beta_3>1 & (6) \end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên phương trình $(4),(6)$ vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

• Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=c+1 \Leftrightarrow \cos x=t>2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình (5) không trùng với nghiệm nào của phương trình (2) nên phương trình $f\left[f\left(\cos x\right)-1\right]=0$ có 4 nghiệm phận biệt.

Câu 28. **(Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:

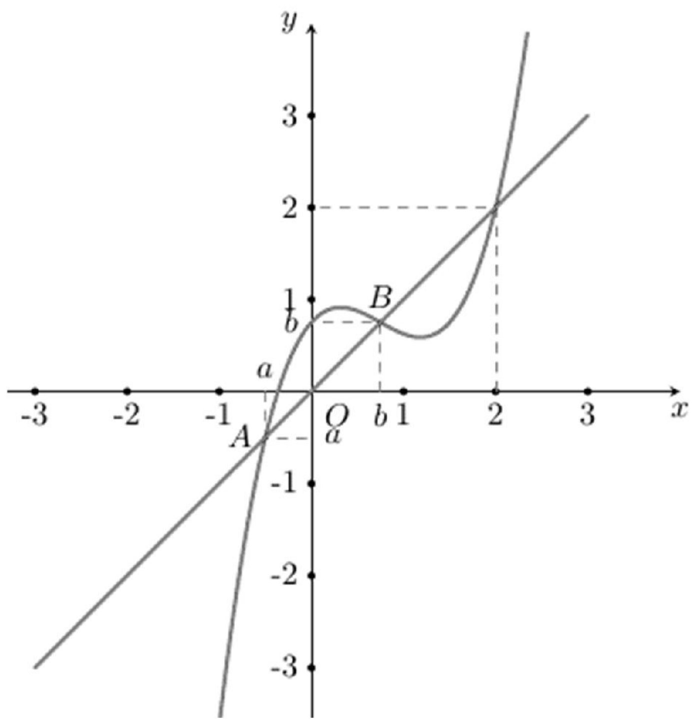


Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Từ đồ thị ta có $f(x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;0) \\ x=b\in(0;1) \\ x=2 \end{array}\right.$

Do đó $f(\cos x+1)=\cos x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+1=a\in(-\infty;0) \\ \cos x+1=b\in(0;1) \\ \cos x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=a-1=t_1\in(-\infty;-1) & (VN) \\ \cos x=b-1=t_2\in(-1;0) & (1) \\ \cos x=1 & (2) \end{array}\right.$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;\ln 2)$ của phương trình $2019f(1-e^x)-2021=0$ là

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3. **D.** 4 .

Lời giải

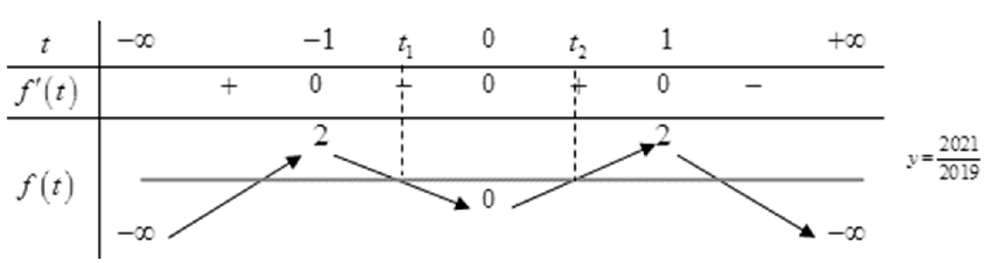
Chọn B

Đặt $t=1-e^x$; $x\in(-\infty;\ln 2)\Rightarrow t\in(-1;1)$.

Nhận xét: $x=\ln(1-t)\Rightarrow$ với mỗi giá trị của $t\in(-1;1)$ ta được một giá trị của $x\in(-\infty;\ln 2)$.

Phương trình tương đương: $f(t)=\frac{2021}{2019}$.

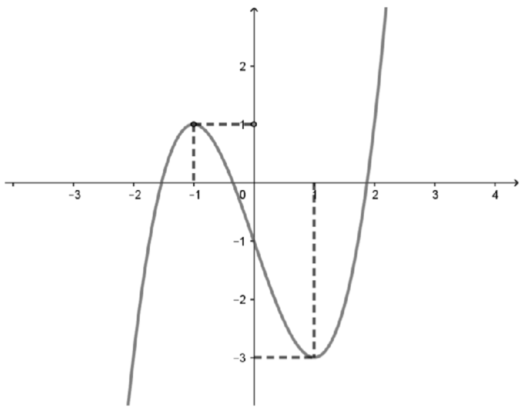
Sử dụng bảng biến thiên của $f(x)$ cho $f(t)$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=\frac{2021}{2019}$ có 2 nghiệm $t_1,t_2\in(-1;1)$.

Vậy phương trình $2019f(1-e^x)-2021=0$ có 2 nghiệm $x\in(-\infty;\ln 2)$.

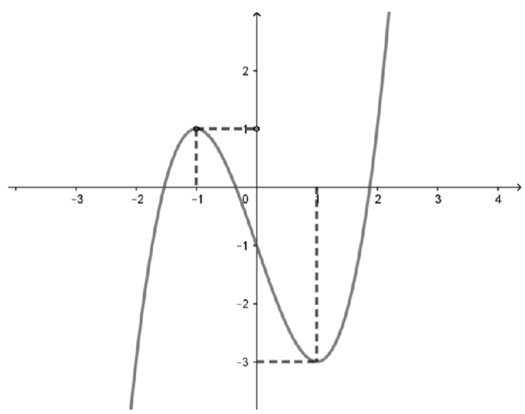
Câu 30. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(f(\cos x)-1)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t=\cos x$, với $x\in[0;3\pi]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Với $t=1$, phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Với $t=-1$, phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Với $-1<t<1$, phương trình $t=\cos x$ có ba nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Thay $t=\cos x$ vào phương trình $f(f(\cos x)-1)=0$, ta được phương trình:

$$f(f(t)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)-1=a\in(-2;-1)\\ f(t)-1=b\in(-1;0)\\ f(t)-1=c\in(1;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(t)=a+1\in(-1;0) & (1)\\ f(t)=b+1\in(0;1) & (2)\\ f(t)=c+1\in(2;3) & (3)\end{array}\right..$$

Từ đồ thị ta có:

+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t\in(-1;0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t\in(-1;0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t>1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 31. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $\left|f(3x+1)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|f(3x+1)-2\right|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(3x+1)-2=5 \\ f(3x+1)-2=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(3x+1)=7 \quad (1) \\ f(3x+1)=-3\,(2) \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên,

+ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $3x+1=a>3 \Leftrightarrow x=\dfrac{a-1}{3}>\dfrac{2}{3}$.

+ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\, x_2$ thỏa mãn $\left\{\begin{array}{l} 3x_1+1=3 \\ 3x_2+1=b<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{b-1}{3}<-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 32. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right)-7=0$ là:

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$x \in \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-1;1]$

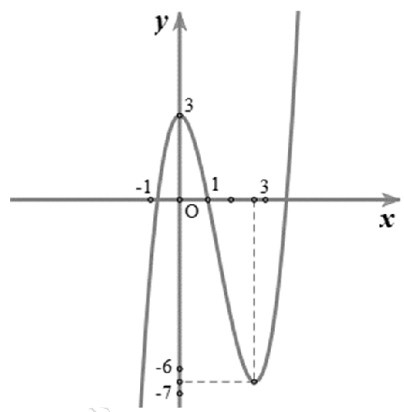
$3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \in (-1;0) \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b \in (0;1) \end{array}\right.$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \in (-1;0)$ có 2 nghiệm.

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b \in (0;1)$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 33. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x).f'\left[f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left[f(x)\right] = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = m \in (1;3) \end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x) = m \in (1;3)$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 34. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(2\sin x+1)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x+1=-1 \\ 2\sin x+1=a\in(1;3) \\ 2\sin x+1=b\in(3;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x=-1 & (1) \\ \sin x=\dfrac{a-1}{2}\in(0;1) & (2) \\ \sin x=\dfrac{b-1}{2}\in(1;+\infty) & (3) \end{array}\right.$

(1) có 2 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

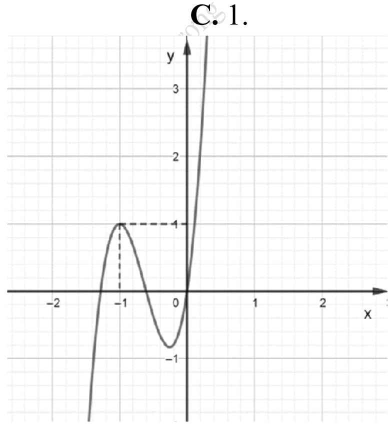
(2) có 5 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

(3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 35. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}\right)-f(1)=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.



Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{f(x)}$, $t\ge 0$.

Ta có: $f\left(f(t)+t^2+2t\right)-f(1)=0$ (*).

Xét $t=0$: (*) $\Leftrightarrow f(0)-f(1)=0$ (không thỏa).

Xét $t>0$: Ta có $f(t)>0$ và $f(t)+t^2+2t>0$

Theo đồ thị, hàm $f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

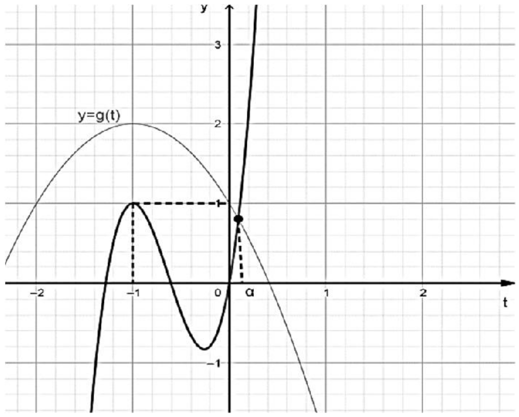
Do đó, (*) $\Leftrightarrow f\left(f(t)+t^2+2t\right)=f(1) \Leftrightarrow f(t)+t^2+2t=1$

$\Leftrightarrow f(t)=1-t^2-2t$

$\Leftrightarrow f(t)=g(t)$ (**)(với $g(t)=1-t^2-2t, t>0$)

Vì hàm $f(t)$ đồng biến và $g(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên phương trình (**) có nghiệm duy nhất $t=\alpha$

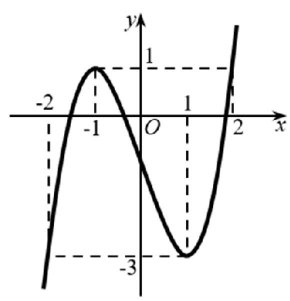
Theo đồ thị hàm $f(t),g(t)$ ta có $\alpha\in(0;1)$.



Khi đó, $t=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha^2$, $\alpha^2\in(0;1)$ (***).

Vì đồ thị hàm $f(x)$ cắt đường thẳng $y=\alpha^2$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (***) có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 36. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

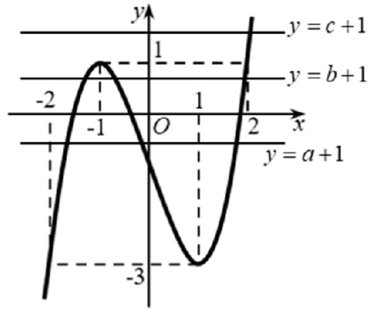
Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\x=b\in(-1;0)\\x=c\in(1;2)\end{array}\right.$

Suy ra $f(f(x)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-1=a\\f(x)-1=b\\f(x)-1=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a+1\\f(x)=b+1\\f(x)=c+1\end{array}\right.$

+ Do $a\in(-2;-1)\Rightarrow a+1\in(-1;0)\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=a+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

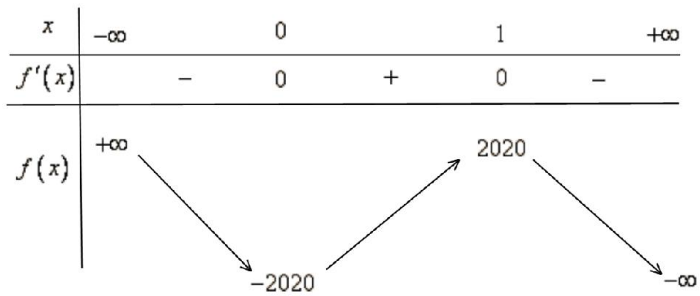
+ Do $b\in(-1;0)\Rightarrow b+1\in(0;1)\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=b+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $c\in(1;2)\Rightarrow c+1\in(2;3)\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=c+1$ có 1 nghiệm.



Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có $3+3+1=7$ nghiệm.

Câu 37. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x+2019\right)-2020\right|=2021$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$$\left|f\left(x+2019\right)-2020\right|=2021 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x+2019\right)-2020=-2021 \\ f\left(x+2019\right)-2020=2021 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x+2019\right)=-1 \\ f\left(x+2019\right)=4041 \end{array}\right. .$$

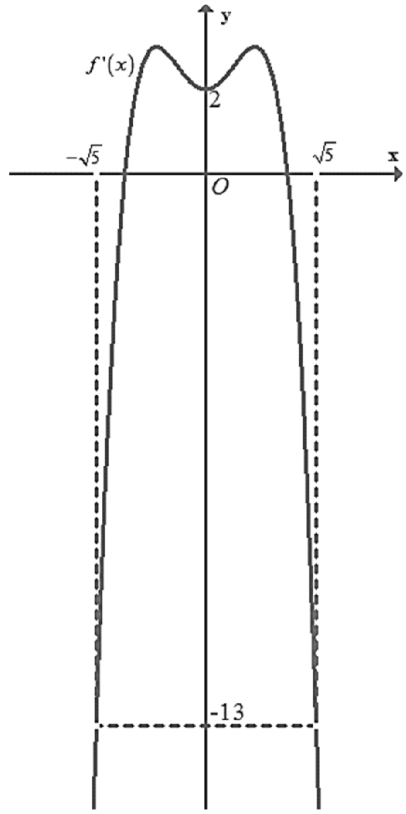
Từ bảng biến thiên suy ra:

+) Phương trình: $f\left(x+2019\right)=-1$ có 3 nghiệm.

+) Phương trình: $f\left(x+2019\right)=4041$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 38. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g\left(x\right)\le 0, \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



A. $m \ge \frac{2}{3} f\left(-\sqrt{5}\right) - 4\sqrt{5}$. **B.** $m \le \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m \le \frac{2}{3} f(0) - 2\sqrt{5}$. **D.** $m \ge \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

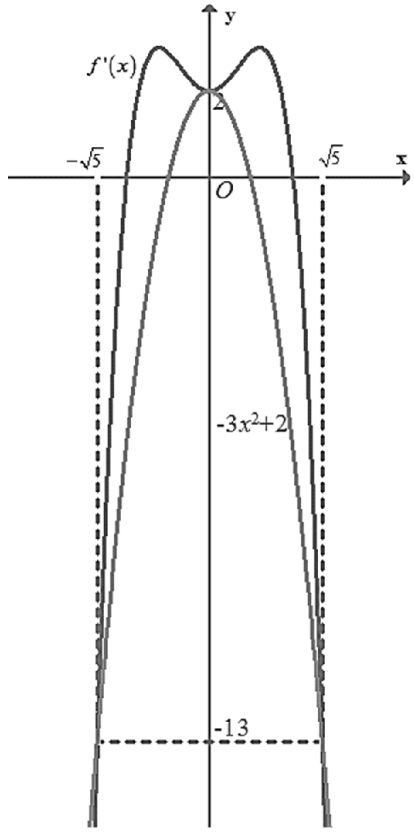
Chọn D

Ta có $g(x) \le 0 \Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x \le 3m + 6\sqrt{5}$.

Đặt $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x$ thì bất phương trình $g(x) \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le 3m + 6\sqrt{5}$

$h'(x) = 2f'(x) + 2.3x^2 - 4 = 2\left(f'(x) - \left(-3x^2 + 2\right)\right)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = -3x^2 + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm số $y = f'(x)$.



Ta thấy $f'(x) \geq -3x^2 + 2\ \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$ nên $h'(x) \geq 0, \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.

Suy ra $h(x) \leq h\left(\sqrt{5}\right), \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$ hay $\max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} h(x) = h\left(\sqrt{5}\right) = 2f\left(\sqrt{5}\right) + 6\sqrt{5}$

Do đó $h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}, \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] \Leftrightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}$

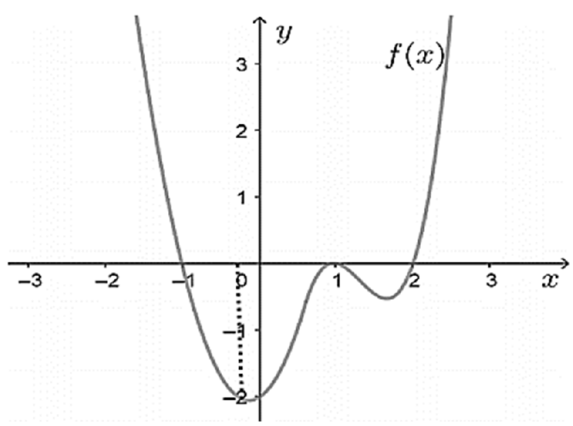
$\Leftrightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right) + 6\sqrt{5} \leq 3m + 6\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$

Câu 39. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(f(x) - 1\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g'(x) = f'(x).f'\left(f(x) - 1\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x).f'(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x)-1)=0 \end{array}\right.$.

+) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a_1\left(a_1 \in(-1;0)\right) \\ x=1 \\ x=a_2\left(a_2 \in(1;2)\right) \end{array}\right.$

+) $f'(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=a_1 \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=a_1+1 \in(0;1) & (1) \\ f(x)=2 & (2) \\ f(x)=a_2+1 \in(2;3) & (3) \end{array}\right.$

Từ đồ thị suy ra

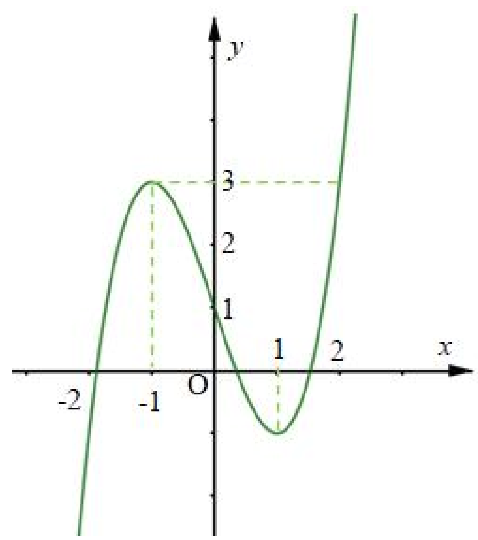
□ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1 \in(-2;-1); b_2 \in(2;3)$

□ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1 \in(-2;b_1); c_2 \in(b_2;3)$

□ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1 \in(-2;c_1); d_2 \in(c_2;3)$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 40. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x))=0$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(\cos x)=t$ ta được phương trình $f(t)=0$.

Quan sát đồ thị $y=f(x)$ ta suy ra $f(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_1 \in\in(-2;-1) \\ t=t_2 \in(0;1) \\ \mathrm{t}=\mathrm{t}_3 \in(1;2) \end{array}\right.$.

* Với $t=t_1$ ta có $f(\cos x)=t_1$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=t_1 \in(-2;-1) \Rightarrow f(\cos x)=t_1 \Leftrightarrow \cos x=x_1<-1$ nên phương trình vô nghiệm.

* Với $t = t_2$ ta có $f(\cos x) = t_2$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = t_2 \in (0;1) \Rightarrow f(\cos x) = t_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = x_2 < -1 \\ \cos x = x_3 \in (0;1) \\ \cos x = x_4 \in (1;2) \end{array}\right.$.

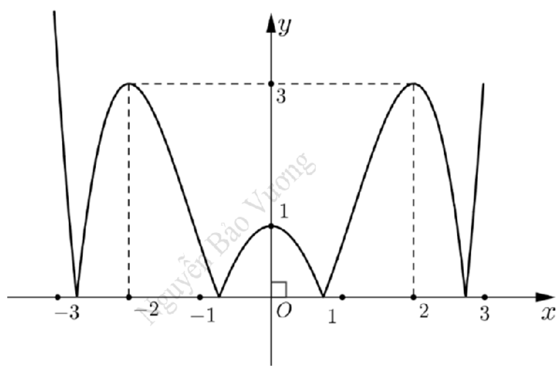
Chỉ có $\cos x = x_3$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 3 giá trị $x \in \left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_3$.

* Với $t = t_3$ tương tự ta có $\left[\begin{array}{l} \cos x = x_5 < -1 \\ \cos x = x_6 \in (-1;0) \\ \cos x = x_7 > 1 \end{array}\right.$.

Chỉ có $\cos x = x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x \in \left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Câu 41. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nhưu hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x) = 8$.



A. 8. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

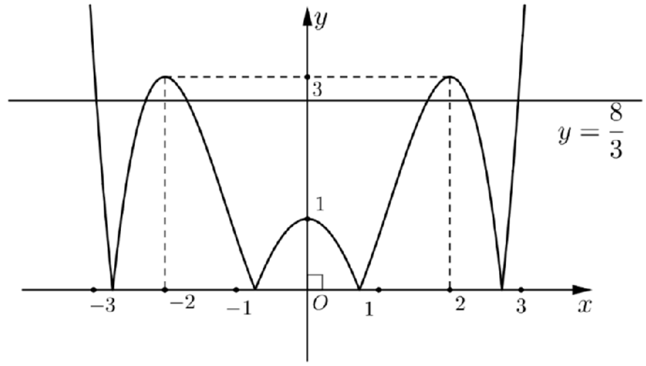
Chọn D

Đặt $t = 2\cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau

x	2017π		2018π		2019π		2020π
t	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Khi đó $3f(2\cos x) = 8 \Leftrightarrow f(t) = \frac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y = \frac{8}{3}$ trên đồ thị $y = f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2;2]$, đường thẳng $y=\frac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1 \in (-2;-1)$ và $t_2 \in (1;2)$.

Từ bảng biến thiên của t, ứng với giá tị t_1, ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x = t_1$, tươngtự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x = t_2$.

Vậy phương trình $3f(2\cos x)=8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$