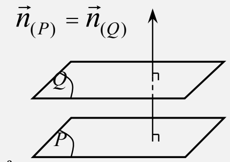
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định phương trình mặt phẳng (không chứa yếu tố đường thẳng)

Dạng 1. ***Mặt*** $(P):\begin{cases} \bullet\ Qua\ A(x_\circ;y_\circ;z_\circ) \\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)\end{cases} \Rightarrow (P):\boxed{a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=0}.$

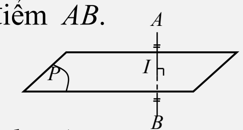
Dạng 2. ***Viết phương trình*** (P) ***qua*** $A(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ ***và*** $(P)\parallel(Q): ax+by+cz+d=0.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases} \bullet\ Qua\ A(x_\circ,y_\circ,z_\circ) \\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\vec{n}_{(Q)}=(a;b;c)\end{cases}$



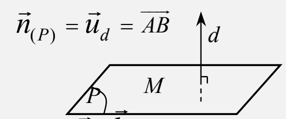
Dạng 3. ***Viết phương trình mặt phẳng trung trực*** (P) ***của đoạn thẳng*** $AB.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases} \bullet\ Qua\ I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right) & : \text{là trung điểm } AB. \\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$



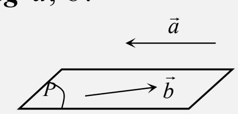
Dạng 4. ***Viết phương trình mặt phẳng*** (P) ***qua*** M ***và vuông góc với đường thẳng*** $d\equiv AB.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases} \bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ) \\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\end{cases}$



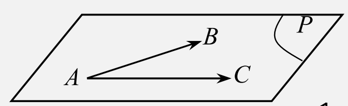
Dạng 5. ***Viết phương trình mặt phẳng*** (P) ***qua điểm*** M ***và có cặp véctơ chỉ phương*** $\vec{a},\ \vec{b}.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases} \bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ) \\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=[\vec{a},\vec{b}]\end{cases}$



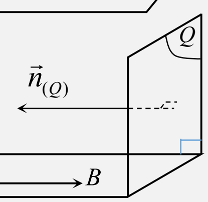
Dạng 6. ***Viết phương trình mặt phẳng*** (P) ***đi qua ba điểm*** $A,\ B,\ C$ ***không thẳng hàng.***

Phương pháp. $(P):\begin{cases} \bullet\ Qua\ A,\ (hay\ B\ hay\ C) \\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\end{cases}$



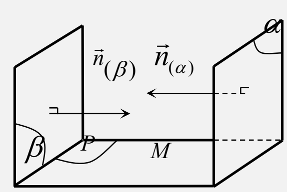
Dạng 7. ***Viết phương trình mặt phẳng*** (P) ***đi qua*** $A,\ B$ ***và*** $(P)\perp(Q).$

Phương pháp. $(P):\begin{cases} \bullet\ Qua\ A,\ (hay\ B) \\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(Q)}\right]\end{cases}$



Dạng 8. ***Viết phương trình mp*** (P) ***qua*** M ***và vuông góc với hai mặt*** $(\alpha),\ (\beta).$

Phương pháp. $(P):\begin{cases} \bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ) \\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{n}_{(\beta)}\right]\end{cases}$



Dạng 9. ***Viết*** (P) ***đi qua*** M ***và giao tuyến*** d ***của hai mặt phẳng:***

$(Q): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(T): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$

Phương pháp: Khi đó mọi mặt phẳng chứa d *đều có dạng:*

$(P): m(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+n(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,\ m^2+n^2\neq 0.$

Vì $M\in(P)\Rightarrow$ *mối liên hệ giữa* m *và* $n.$ *Từ đó chọn* $m\Rightarrow n$ *sẽ tìm được* $(P).$

Dạng 10. ***Viết phương trình mặt phẳng đoạn chắn***

Phương pháp: Nếu mặt phẳng (P) *cắt ba trục tọa độ lần lượt tại các điểm* $A(a;0;0),$ $B(0;b;0),\ C(0;0;c)$ *với* $(abc\neq 0)$ *thì* $(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ *gọi là mặt phẳng đoạn chắn.*

Dạng 1.1 Xác định phương trình mặt phẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 1. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $3x-y-z=0$. **B.** $3x+y+z-6=0$. **C.** $x+y+2z-6=0$. **D.** $6x-2y-2z-1=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ và đi qua trung điểm $I(1;1;2)$ của đoạn thẳng ***AB***. Do đó, phương trình mặt phẳng đó là:

$-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow -6x+2y+2z=0 \Leftrightarrow 3x-y-z=0$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $2x-y+z+2=0$. **C.** $2x+y+z-4=0$. **D.** $2x-y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Suy ra $I(1;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vtpt, nên có phương trình là $(\alpha):2x-y+z-2=0$.

Câu 3. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

A. $3x+y+z-6=0$ **B.** $3x-y-z=0$ **C.** $6x-2y-2z-1=0$ **D.** $3x-y-z+1=0$

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

(α) đi qua $I(1;1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ làm một VTPT.

$\Rightarrow (\alpha):-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0 \Rightarrow (\alpha):\ 3x-y-z=0$.

Câu 4. **(Mã 101 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là:

A. $x+y+2z-3=0$. **B.** $3x+2y-z-14=0$. **C.** $2x-y-z+5=0$. **D.** $2x-y-z-5=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm $I(3;2;-1)$, có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2;-1;-1)$ có phương trình: $2(x-3)-1(y-2)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-z-5=0$.

Chọn đáp án **B.**

Câu 5. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;2)$ và $B(6;5;-4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x+2y-3z-17=0$. **B.** $4x+3y-z-26=0$.

C. $2x+2y-3z+17=0$. **D.** $2x+2y+3z-11=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm của AB là $M(4;3;-1)$ và có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(4;4;-6)$ nên có phương trình là

$4(x-4)+4(y-3)-6(z+1)=0$

$\Leftrightarrow 2(x-4)+2(y-3)-3(z+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y-3z-17=0$

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-4)$ và $B(-1;2;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB.

A. $(\alpha):4x+2y+12z+7=0$. **B.** $(\alpha):4x-2y+12z+17=0$.

C. $(\alpha):4x+2y-12z-17=0$. **D.** $(\alpha):4x-2y-12z-7=0$.

Lời giải

Gọi $I\left(0;\frac{5}{2};-1\right)$ là trung điểm của AB; $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;6)$.

Mặt phẳng (α) qua $I\left(0;\frac{5}{2};-1\right)$ và có VTPT $\vec{n}=(-2;-1;6)$ nên có

PT: $(\alpha):-2(x)-\left(y-\frac{5}{2}\right)+6(z+1)=0\Leftrightarrow 4x+2y-12z-17=0$.

Câu 7. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$; $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với (P)

A. $(Q):2x-y+3=0$ **B.** $(Q):x+z=0$ **C.** $(Q):-x+y+z=0$ **D.** $(Q):3x-y+z=0$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)=-2(1;1;-1),\vec{u}=(1;1;-1)$

$\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;-1)$

$\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(1;0;1)$

Vậy $(Q):x+z=0$.

Câu 8. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1),B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$. **C.** $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Mp (Q) đi qua điểm $A(2;4;1)$ suy ra phương trình tổng quát của mp(Q) là:

$0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0\Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Câu 9. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(3;3;0)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z+2=0$. **C.** $x+2y-z-3=0$. **D.** $x+2y-z+3=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=2(1;2;-1)$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2;1;1)$.

+ Mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB đi qua I và nhận $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$x-2+2(y-1)-(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-z-3=0$.

Vậy mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $x+2y-z-3=0$.

Câu 10. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$ có phương trình là

A. $4x-3y+2z+3=0$. **B.** $4x-3y-2z+3=0$. **C.** $2x+y-3z-1=0$. **D.** $4x+y-2z-1=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, vectơ pháp tuyến mặt phẳng (Q): $\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-1)$.

Theo đề bài ta có vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}\wedge\overrightarrow{AB}=(4;-3;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x-3y-2z+C=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3+C=0 \Leftrightarrow C=3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x-3y-2z+3=0$.

Câu 11. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0, (\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x-y-2z=0$. **B.** $2x-y+2z=0$.

C. $2x+y-2z=0$. **D.** $2x+y-2z+1=0$.

Lời giải

Chọn C

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;-2;2), \overrightarrow{n_\beta}=(5;-4;3)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;1;-2)$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O, VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$: $2x+y-2z=0$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1); B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=15$. **C.** $a+b+c=-5$. **D.** $a+b+c=-15$.

Lời giải

Chọn A

Vì (Q) vuông góc với (P) nên (Q) nhận vtpt $\vec{n}=(1;-3;2)$ của (P) làm vtcp

Mặt khác (Q) đi qua A và B nên (Q) nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$ làm vtcp

(Q) nhận $\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(0;8;12)$ làm vtpt

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):0(x+1)+8(y-1)+12(z-3)=0$, hay $(Q):2y+3z-11=0$

Vậy $a+b+c=5$. Chọn **A.**

Câu 13. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$; $B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y-z-3=0$. **B.** $x+y+z-2=0$. **C.** $-x+y=0$. **D.** $3x-2y-z+3=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$

Từ (P) suy ra vec tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$

Gọi vec tơ pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n_Q}$

Vì (Q) chứa A,B nên $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{AB}\ (1)$

Mặt khác $(Q)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}\ (2)$

Từ $(1),(2)$ ta được $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;-2;-1)$

(Q) đi qua $A(1;-1;2)$ và có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(3;-2;-1)$ nên (Q) có phương trình là

$3(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 14. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0,\ (Q):x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

A. $x+y+z-3=0$ **B.** $x+y+z+3=0$ **C.** $-2x+z+6=0$ **D.** $-2x+z-6=0$

Lời giải

Chọn A

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là

$\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(3;3;3)=3(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$ nên (α) có phương trình:

$x+y+z-3=0$.

Câu 15. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

A. $2x+y-2z+1=0$. **B.** $2x+y-2z=0$. **C.** $2x-y-2z=0$. **D.** $2x-y+2z=0$.

Lời giải

Gọi mặt phẳng phải tìm là (P). Khi đó véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;\ 1;\ -2)$.

Phương trình của (P) là $2x+y-2z=0$.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2);B(2;1;1)$. Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y-z+3=0$. **B.** $x+y+z-2=0$. **<u>C</u>.** $3x-2y-z-3=0$. **D.** $-x+y=0$.

Lờigiải

Mặt phẳng (P) có 1 véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_p}=(1;1;1)$. Véc tơ $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của (Q), do (Q) vuông góc với (P) nên $\vec{n}$ có giá vuông góc với $\overrightarrow{n_p}$, mặt khác véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có giá nằm trong mặt phẳng (Q) nên $\vec{n}$ cũng vuông góc với $\overrightarrow{AB}$

Mà $\vec{n}_P$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương nên ta có thể chọn $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AB}\right]=(-3;2;1)$, mặt khác (Q) đi qua $A(1;-1;2)$ nên phương trình của mặt phẳng (Q) là:

$-3(x-1)+2(y+1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0$.

Câu 17. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;1;0),B(2;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-y-1=0$ là:

A. $x+y-3z-1=0$. **B.** $2x+2y-5z-2=0$.

C. $x-2y-6z+2=0$. **<u>D</u>.** $x+y-z-1=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$. Mặt phẳng (P) có 1 véctơ pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)}=(1;-1;0)$.

Gọi $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm. Khi đó $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(P)}\right]=(1;1;-1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $1(x-0)+1(y-1)-1(z-0)=0 \Leftrightarrow x+y-z-1=0$.

Câu 18. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng qua O, đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

A. $2x-y+2z=0$. **B.** $2x-y+2z+1=0$. **<u>C</u>.** $2x+y-2z=0$. **D.** $2x-y-2z=0$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(3;-2;2)$.

Mặt phẳng (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(5;-4;3)$.

Giả sử mặt phẳng (γ) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

Do mặt phẳng (γ) vuông góc với cả (α) và (β) nên ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{n_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (2;1;-2).$$

Mặt phẳng (γ) đi qua $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;1;-2)$ có phương trình là:

$2x + y - 2z = 0$.

Câu 19. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$; $B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $3x - 2y - z - 3 = 0$. **B.** $-x + y = 0$. **C.** $x + y + z - 2 = 0$. **D.** $3x - 2y - z + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1\,;2\,;-1)$, mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{m} = (1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (Q) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{m}\right] = (3\,;-2\,;-1)$.

Mặt phẳng (Q) có phương trình là $(Q): 3(x-1) - 2(y+1) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z - 3 = 0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 9 = 0$ chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = -12$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = -4$. **D.** $S = -2$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB} = (-6;3;1)$.

$\overrightarrow{n_{(Q)}} = (3;1;1)$ là VTPT của mp(Q).

Mp(P) chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q).

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(Q)}}\right] = (2;9;-15)$ là VTPT của mp(P)

$A(3;2;1) \in (P)$

$\Rightarrow (P): 2x + 9y - 15z - 9 = 0$ hoặc $(P): -2x - 9y + 15z + 9 = 0$

Mặt khác $(P): ax + by + cz - 9 = 0 \Rightarrow a = 2; b = 9; c = -15$.

Vậy $S = a + b + c = 2 + 9 + (-15) = -4$.

Câu 21. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, $(Q): 2y+z-5=0$ và $(R): x-y+z-2=0$. Gọi (α) là mặt phẳng qua giao tuyến của (P) và (Q), đồng thời vuông góc với (R). Phương trình của (α) là

A. $2x+3y-5z+5=0$. **<u>B</u>.** $x+3y+2z-6=0$.

C. $x+3y+2z+6=0$. **D.** $2x+3y-5z-5=0$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Tọa độ mọi điểm thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases}$$

Cho $z=1$ ta được $A(-2;2;1)$, cho $z=5$ ta được $B(-4;0;5)$ thuộc giao tuyến, $\overrightarrow{AB}(-2;-2;4)$.

Mặt phẳng (R) có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_R}=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $A(-2;2;1)$ và có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_R}\right]=(1;3;2)$.

Phương trình của (α) là: $(x+2)+3(y-2)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+3y+2z-6=0$.

Câu 22. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$ là

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **<u>D</u>.** $4x+5y-3z-22=0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$ có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;3)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) nên (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;5;-3)$.

Ta lại có (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ nên $(P): 4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0$

$\Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Câu 23. **(Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng là $ax+by+cz-11=0$. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=10$. **B.** $a+b+c=3$. **<u>C</u>.** $a+b+c=5$. **D.** $a+b+c=-7$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, (P) có vtpt $\vec{n}=(1;-3;2)$, (Q) có vtpt $\vec{k}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(0;8;12)$

$\Rightarrow (Q)$ có dạng: $2(y-4)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Vậy $a+b+c=5$.

Câu 24. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x-y+3z-1=0$, $(Q): y=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $3x-y+2z-4=0$. **B.** $3x+y-2z-2=0$. **C.** $3x-2z=0$. **D.** $3x-2z-1=0$.

Lời giải

$(P): 2x-y+3z-1=0$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$.

$(Q): y=0$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(0;1;0)$.

Do mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có véctơ pháp tuyến

$\vec{n}_{(R)}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]$. $\Rightarrow \vec{n}_{(R)}=(-3;0;2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (R) là: $-3x+2z+1=0 \Leftrightarrow 3x-2z-1=0$.

Câu 25. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho hai mặt phẳng (α): $3x-2y+2z+7=0$ và (β): $5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc (α) và (β) là:

A. $x-y-2z=0$. **B.** $2x-y+2z=0$. **C.** $2x+y-2z+1=0$. **D.** $2x+y-2z=0$.

Lời giải

Gọi $\vec{n}_P$ là vectơ pháp tuyến của (P). Ta có $\vec{n}_P \perp \vec{n}_\alpha$ và $\vec{n}_P \perp \vec{n}_\alpha$ với $\vec{n}_\alpha=(3;-2;2)$ và $\vec{n}_\beta=(5;-4;3)$. Chọn $\vec{n}_P=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]=(2;1;-2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ nên (P): $2x+y-2z=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 26. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng: $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b=c$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a\in(b;c)$. **D.** $a+b>c$.

Lời giải

Ta có: $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$.

Véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n}=(1;-3;2)$.

Do mặt phẳng (Q) đi qua AB và vuông góc với (P) nên (Q) nhận véc tơ $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(0;-8;-12)$ làm một véc tơ pháp tuyến nên phương trình của (Q) sẽ là: $2(y-4)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Suy ra $a=0$, $b=2$, $c=3 \Rightarrow a+b+c=5$.

Câu 27. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x-2y-z+4=0$. **B.** $4x-2y+z+4=0$. **C.** $4x+2y+z-4=0$. **D.** $4x+2y-z+4=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;6;-8)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+6y-8z+10=0$.

Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với AC là: $2x+y+z-2=0$.

Phương trình mặt phẳng qua C và vuông góc với AB là: $2x-3y-2z+6=0$.

Giao điểm của ba mặt phẳng trên là trực tâm H của tam giác ABC nên $H\left(-\frac{22}{101};\frac{70}{101};\frac{176}{101}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A, H nên $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{22}{101};-\frac{31}{101};-\frac{26}{101}\right)=-\frac{1}{101}(22;31;26)$.

Mặt phẳng $(P)\perp(ABC)$ nên $\overrightarrow{n_P}\perp\vec{n}_{(ABC)}=(1;6;-8)$.

Vậy $\left[\vec{n}_{(ABC)};\vec{u}_{AH}\right]=(404;-202;-101)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

Chọn $\vec{n}_P=(4;-2;-1)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $4x-2y-z+4=0$.

Dạng 1.2 Xác định phương trình mặt phẳng đoạn chắn

Câu 28. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC.

A. $(P):6x+3y+2z+18=0$.
B. $(P):6x+3y+2z+6=0$.
C. $(P):6x+3y+2z-18=0$.
D. $(P):6x+3y+2z-6=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $A\in Ox$, $B\in Oy$, $C\in Oz$ nên ta có thể đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Vì $M(1;2;3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$.

Từ đó ta có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là:

$(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$.

Câu 29. **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox,Oy,Oz. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.
B. $\frac{x}{1}-\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.
C. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$.
D. $-\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Chọn A

+ A là hình chiếu vuông góc của M trên trục $Ox\Rightarrow A(1;0;0)$.

B là hình chiếu vuông góc của M trên trục $Oy\Rightarrow B(0;2;0)$.

C là hình chiếu vuông góc của M trên trục $Oz \Rightarrow C(0;0;3)$.

+ Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 30. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$?

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=1$. **B.** $12x+3y+4z-48=0$.

C. $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=0$. **D.** $12x+3y+4z=0$.

Lời giải

Chọn B

Mp(P) cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C nên $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$.

Vì G là trọng tâm tứ diện $OABC$ nên $\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_O}{4}=\frac{a}{4} \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C+y_O}{4}=\frac{b}{4} \\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C+z_O}{4}=\frac{c}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=16 \\ c=12 \end{cases}$.

Khi đó mp(P) có phương trình là $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=1$ hay $12x+3y+4z-48=0$.

Vậy mp(P) thỏa mãn là $12x+3y+4z-48=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 31. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M,N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM=2ON$

A. $(P):3x+y+2z-6=0$ **B.** $(P):2x+3y-z-4=0$

C. $(P):2x+y+z-4=0$ **D.** $(P):x+2y-z-2=0$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Giả sử (P) đi qua 3 điểm $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$

Suy ra $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Mà (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ nên ta có hệ $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ \frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ \frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1 \end{cases}$

Theo giả thuyết ta có $OM=2ON \Leftrightarrow |a|=2|b| \Leftrightarrow |b|=1$

TH1. $b=1 \Rightarrow c=-2$ suy ra $(P):x+2y-z-2=0$

TH1. $b=-1 \Rightarrow c=-\frac{2}{3}$ suy ra $(P):x-2y+3z-2=0$

Câu 32. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, nếu ba điểm A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;3)$ lên các trục tọa độ thì phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$.

Lời giải

Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;3)$ lên Ox,Oy,Oz.

Suy ra: $A(1;0;0),B(0;2;0),C(0;0;3)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 33. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(8;-2;4)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B và C là

A. $x-4y+2z-8=0$ **B.** $x-4y+2z-18=0$ **C.** $x+4y+2z-8=0$ **D.** $x+4y-2z-8=0$

Lời giải

$M(8;-2;4)$ chiếu lên Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(8;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;4)$

Phương trình đoạn chắn qua A, B, C là: $\frac{x}{8}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow x-4y+2z-8=0$

Câu 34. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(2;1;-3)$, biết (α) cắt trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho tam giác ABC nhận M làm trực tâm

A. $2x+5y+z-6=0$. **B.** $2x+y-6z-23=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $3x+4y+3z-1=0$.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $abc \neq 0$.

Khi đó mặt phẳng (α) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do $M \in (\alpha) \Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{c}=1 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2-a;1;-3)$, $\overrightarrow{BM}=(2;1-b;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Do M là trực tâm tam giác ABC nên: $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-b-3c=0\\ -2a-3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-3c\\ a=-\frac{3c}{2}\end{cases} \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta có: $-\frac{4}{3c}-\frac{1}{3c}-\frac{3}{c}=1 \Leftrightarrow c=-\frac{14}{3} \Rightarrow a=7, b=14$.

Do đó $(\alpha): \frac{x}{7}+\frac{y}{14}-\frac{3z}{14}=1 \Leftrightarrow 2x+y-3z-14=0$.

Câu 35. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $H(2;1;1)$. Gọi các điểm A,B,C lần lượt ở trên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó hoành độ điểm A là:

A. -3. **B.** -5. **C.** 3. **D.** 5

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$. Khi đó mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Ta có:

$\overrightarrow{AH}=(2-a;1;1)$; $\overrightarrow{BH}=(2;1-b;1)$

$\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$; $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

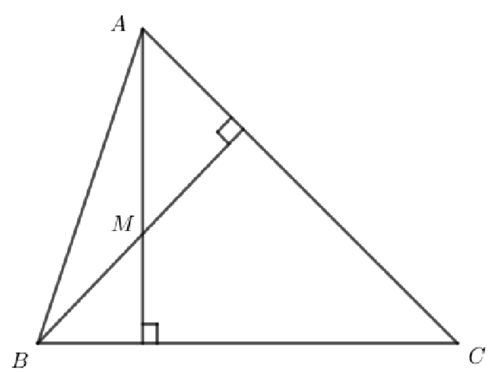
Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases} H\in(ABC) \\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ -b+c=0 \\ -2a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=6 \end{cases}$

Vậy $A(3;0;0)$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục $Ox,\ Oy,\ Oz$ lần lượt tại $A,\ B,\ C$ (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by+cz-14=0$. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 8. **B.** 14. **C.** $T=6$. **D.** 11.

Lời giải



Mặt phẳng (α) cắt các trục $Ox,\ Oy,\ Oz$ lần lượt tại $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$, $C(0;0;p)$, $m,n,p\neq 0$. Ta có phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$.

Mà $M\in(\alpha)\Leftrightarrow \frac{1}{m}+\frac{2}{n}+\frac{3}{p}=1$. (1)

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1-m;2;3)$, $\overrightarrow{BM}=(1;2-n;3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-n;p)$, $\overrightarrow{AC}=(-m;0;p)$.

M là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p-2n=0 \\ 3p-m=0 \end{cases}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $m=14;\ n=7;\ p=\frac{14}{3}$.

Suy ra (α) có phương trình $\frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Vậy $T=a+b+c=1+2+3=6$.

Câu 37. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz tại $A,\ B,\ C$ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-8=0$. **B.** $x+2y+5z-30=0$. **C.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

Lời giải

Cách 1 :

Ta có tính chất hình học sau : tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc thì điểm M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC).

Do đó mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;5)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}(1;2;5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $(x-1)+2(y-2)+5(z-5)=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-30=0$.

Cách 2:

Giả sử $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Theo giả thiết ta có $M \in (P)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{5}{c}=1 (1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1-a;2;5); \overrightarrow{BC}(0;-b;c); \overrightarrow{BM}=(1;2-b;5); \overrightarrow{AC}(-a;0;c)$

Mặt khác M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=5c \\ a=5c \end{cases} (2)$

Từ (1) và (2) ta có $a=30; b=15; c=6$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{30}+\frac{y}{15}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow x+2y+5z-30=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+4y-2z-6=0$, $(Q): x-2y+4z-6=0$. Mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z+6=0$. **C.** $x+y+z-3=0$. **D.** $x+y-z-6=0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P): x+4y-2z-6=0$ có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;4;-2)$.

Mặt phẳng $(Q): x-2y+4z-6=0$ có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;4)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(12;-6;-6)$, cùng phương với $\vec{u}=(2;-1;-1)$.

Gọi $d=(P)\cap(Q)$. Ta có đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;-1)$ và đi qua điểm $M(6;0;0)$.

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa $d \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ M \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c} = 0 \\ \dfrac{6}{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3} (*) \end{cases}$.

Ta lại có hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow |b| = |c| = 6$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $b = c = 6$.

Vậy phương trình của mặt phẳng $(\alpha): \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\dfrac{81}{2}$. **B.** $\dfrac{243}{2}$. **C.** $\dfrac{81}{6}$. **D.** 243.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Mặt phẳng (P) có phương trình (theo đoạn chắn): $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ nên $\dfrac{9}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$.

Ta có $1 = \dfrac{9}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{9}{a.b.c}} \Rightarrow a.b.c \geq 243$.

$V_{OABC} = \dfrac{1}{6} a.b.c \geq \dfrac{243}{6} = \dfrac{81}{2}$. Vậy thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{81}{2}$.

Câu 40. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABC), (P)$ cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $6x + 3y + 2z - 24 = 0$. **B.** $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.
C. $6x + 3y + 2z = 0$. **D.** $6x + 3y + 2z - 36 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$

+ (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên (P) có dạng: $6x + 3y + 2z + D = 0$ $(D \neq -12)$

+ $d(D;(P)) = d((ABC),(P)) \Leftrightarrow d(D;(P)) = d(A,(P)) \Leftrightarrow |36 + D| = |12 + D| \Leftrightarrow D = -24$.

Vậy (P) là: $6x + 3y + 2z - 24 = 0$.

Câu 41. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là ba số thực dương thay đổi, thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2017$. Khi đó, mặt phẳng (ABC) luôn đi qua có một điểm có tọa độ cố định là

Nguyễn Bảo Vương

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.   **B.** $(1;1;1)$.

C. $\left(\frac{1}{2017};\frac{1}{2017};\frac{1}{2017}\right)$.   **D.** $(2017;2017;2017)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Dựa vào điều kiện, chọn $M(m;m;m)$ cố định nằm trên (ABC).

Ta có: $M\in(ABC)\Leftrightarrow m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1\Leftrightarrow m.2017=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2017}$.

Vậy $\left(\frac{1}{2017};\frac{1}{2017};\frac{1}{2017}\right)$ là điểm cố định.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC là

A. $(P):6x+3y+2z-18=0$.   **B.** $(P):6x+3y+2z-6=0$.

C. $(P):6x+3y+2z+18=0$.   **D.** $(P):6x+3y+2z+6=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ các điểm $A(a;0;0)\in Ox$, $B(0;b;0)\in Oy$ và $C(0;0;c)\in Oz$.

M là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases}3x_M=x_A+x_B+x_C\\3y_M=y_A+y_B+y_C\\3y_M=z_A+z_B+z_C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$$

Do đó phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$.

Câu 43. Cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-8=0$.   **B.** $x+2y+5z-30=0$.

C. $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$.   **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$. Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (P) đi qua M nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{5}{c}=1(*)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-a;b;0),\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$, $\overrightarrow{BM}=(1;2-b;5),\overrightarrow{CM}=(1;2;5-c)$.

Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{a}{2}\\ c=\dfrac{a}{5}\end{cases}$.

Thay vào (*) ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{a}+\dfrac{25}{a}=1\Leftrightarrow a=30\Rightarrow b=15,c=6$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{15}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow x+2y+5z-30=0$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ $\Rightarrow(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Mà $OA=OB=OC\neq 0\Rightarrow\begin{cases}|b|=|a|\\ |c|=|a|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\pm a\\ c=\pm a\end{cases}$

Trường hợp 1: $b=a;c=a$

$\Rightarrow(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{5}{a}=1\Rightarrow a=8$

Trường hợp 2: $b=a;c=-a$

$\Rightarrow(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}-\dfrac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}-\dfrac{5}{a}=1\Rightarrow a=-2$

Trường hợp 3: $b=-a;c=a$

$\Rightarrow(ABC):\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a}+\dfrac{5}{a}=1\Rightarrow a=-4$

Trường hợp 4: $b=-a;c=-a$

$\Rightarrow(ABC):\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{a}-\dfrac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a}-\dfrac{5}{a}=1\Rightarrow a=-6$

Vậy có 4 mặt phẳng (α)

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox,y'Oy,z'Oz$ lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 8

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox,y'Oy,z'Oz$ lần lượt tại các điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Nguyễn Bảo Vương

Theo bài mặt phẳng (P) đi qua $M(1;1;2)$ và $OA=OB=OC$ nên ta có hệ:

$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \ (1) \\ |a|=|b|=|c| \quad (2) \end{cases}$. Ta có: $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a=b=-c \\ a=c=-b \\ b=c=-a \end{array}\right.$

- Với $a=b=c$ thay vào (1) được $a=b=c=4$

- Với $a=b=-c$ thay vào (1) được $0=1$.

- Với $a=c=-b$ thay vào (1) được $a=c=-b=2$.

- Với $b=c=-a$ thay vào (1) được $b=c=-a=2$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn bài toán là:

$(P_1): \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1;\ (P_2): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{2}=1;\ (P_3): \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2;1;3)$, $A(0;0;4)$ và cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại B, C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $B(a;0;0)$, $C(0;b;0)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy.

Phương trình mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{4}=1$.

Vì $M(2;1;3)$ thuộc (P) nên ta có $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{4}=1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4a+8b=ab$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}OB.OC=\dfrac{1}{2}|a|.|b|=\dfrac{1}{2}|ab|=1 \Leftrightarrow |ab|=2$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 4a+8b=ab \\ ab=2 \end{cases},(I)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+8b=2 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b=1 \\ 2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1-4b \\ (1-4b)b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1-4b \\ 4b^2-b+4=0,(vn) \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 4a+8b=ab \\ ab=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+8b=-2 \\ ab=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b=-1 \\ 2ab=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=-1-4b \\ (-1-4b)b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=-1-4b \\ 4b^2+b-4=0 \end{cases}$. Hệ có hai nghiệm.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 47. **(Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$.

C. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$, khi đó phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c),\overrightarrow{CA}=(a;0;-c)$ và $\overrightarrow{AM}=(3-a;2;1),\overrightarrow{BM}=(3;2-b;1)$.

Vì M là trực tâm tam giác ABC nên ta có hệ

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2b+c=0\\ 3a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b\\ c=3a\end{cases}.$$

Hơn nữa vì M thuộc (ABC) nên $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{3}{a}+\frac{2}{\frac{3a}{2}}+\frac{1}{3a}=1\Leftrightarrow a=\frac{14}{3}$.

Ta được $a=\frac{14}{3}$, $b=7$, $c=14$ hay $(ABC):\frac{x}{\frac{14}{3}}+\frac{y}{7}+\frac{z}{14}=1$.

Ta chọn $(ABC): 3x+2y+z-14=0$.

Câu 48. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

A. $2x-y-z-1=0$. **B.** $x+2y+4z+1=0$. **C.** $4x+2y+z+1=0$. **D.** $4x+2y+z-8=0$.

Lời giải

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0, c>0$).

Theo đề: $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}\Leftrightarrow\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{b}{2}\\ c=2b\end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1\Leftrightarrow\frac{4}{b}=1\Leftrightarrow b=4$.

Khi đó $a=2$, $c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1\Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 49. **(Sở Nam Định - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2(x+2y+3z)=0$. Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm (khác gốc tọa độ O) của mặt cầu (S) và các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. $6x-3y-2z+12=0$. **B.** $9x-3y+2z-12=0$.

C. $6x+3y+2z-12=0$. **D.** $6x-3y-2z-12=0$.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0)\in Ox, B(0;b;0)\in Oy, C(0;0;c)\in Oz$. Theo giả thiết ta có $a,b,c\neq 0$.

Vì $A\in(S)$ nên ta có: $a^2-2a=0 \xleftrightarrow{a\neq 0} a=2$. Vậy $A(2;0;0)$.

Vì $B\in(S)$ nên ta có: $b^2-4a=0 \xleftrightarrow{b\neq 0} b=4$. Vậy $B(0;4;0)$.

Vì $C\in(S)$ nên ta có: $c^2-6c=0 \xleftrightarrow{c\neq 0} c=6$. Vậy $C(0;0;6)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Câu 50. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ và chắn trên Oz một đoạn dài gấp đôi các đoạn chắn trên các tia Ox, Oy. Giả sử $(\alpha): ax+by+cz+d=0$ (a, b, c, d là các số nguyên). Tính $S=\frac{a+b+c}{d}$.

A. 3. **B.** -3. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$, $C(0;0;p)$ (với $m,n,p>0$)

Theo giả thiết có $OC=2OA=2OB \Rightarrow p=2m=2n \quad (1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$.

Do mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ nên $\frac{1}{m}-\frac{3}{n}+\frac{8}{p}=1 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được $\frac{1}{m}-\frac{3}{m}+\frac{8}{2m}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{m}=1 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow m=n=2, p=4$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 2x+2y+z-4=0$

Từ đó suy ra $a=2t, b=2t, c=t, d=-4t \quad (t\neq 0)$

Vậy $S=\frac{a+b+c}{d}=-\frac{5}{4}$.

Dạng 1.3 Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm

Câu 51. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$. **B.** $3x-2y+6z=6$.

C. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $3x-2y+6z-12=0$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oxz), (Oyz).

Khi đó, $M(2;-3;0)$, $N(2;0;1)$ và $P(0;-3;1)$

$\overrightarrow{MN}=(0;3;1)$ và $\overrightarrow{MP}=(-2;0;1)$.

Ta có, $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ là cặp vectơ không cùng phương và có giá nằm trong (MNP)

Do đó, (MNP) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(3;-2;6)$.

Mặt khác, (MNP) đi qua $M(2;-3;0)$ nên có phương trình là:

$3(x-2)-2(y+3)+6(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+6z-12=0$.

Câu 52. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;1), B(2;-1;4)$ và $C(1;1;4)$. Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-3;3); \overrightarrow{AC}=(2;-1;3)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-3;3)$.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) có vecto chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ do đó chọn $\vec{u}(2;1;-1)$.

Câu 53. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ-2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=1, d=1$. **B.** $a=6, d=-6$. **C.** $a=-1, d=-6$. **D.** $a=-6, d=6$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)=(6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-1)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Ta có pt $mp(ABC)$ là:

$x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0$. Vậy $a=1, d=1$.

Câu 54. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;2)$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua các điểm là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ?

A. $3x+5y+2z-60=0$. **B.** $10x+6y+15z-60=0$.

C. $10x+6y+15z-90=0$. **D.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Oxz).

Ta có $A_1(3;5;0)$, $A_2(0;5;2)$, $A_3(3;0;2)$. $\overrightarrow{A_1A_2}=(-3;0;2)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(0;-5;2)$.

Mặt phẳng qua A_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]=(10;6;15)$ có phương trình là $10x+6y+15z-60=0$.

Câu 55. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. **B.** $2x+3y-6z-12=0$.

C. $2x-3y+6z=0$. **D.** $2x+3y+6z+12=0$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(0;4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;4;3)$, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(4;-6;12)$.

Ta có $\vec{n}=(4;-6;12)$ cùng phương $\vec{n}_1=(2;-3;6)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $C(0;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là:

$2(x-0)-3(y-2)+6(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y+6z=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-3y+6z=0$.

Cách 2:

Vì phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua 3 điểm A, B, C nên thay tọa độ điểm $C(0;2;1)$ lần lượt vào các đáp án. Loại đáp án A, B, **D.** Còn lại đáp án C thỏa.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-3y+6z=0$.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$, $C(1;0;2)$ có phương trình là

A. $x-y+2z-5=0$. **B.** $x+2y-3z+4=0$.

C. $3x-3y+z=0$. **D.** $x+y-2z+3=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;3;3)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-2;-1)$

Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$, $C(0;1;2)$ nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;3;-6)$ làm véctơ pháp tuyến.

Nên phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$, $C(1;0;2)$ có phương trình là $3x+3y-6z+9=0$ hay $x+y-2z+3=0$

Câu 57. **(SGD - Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;\ 3;\ 5)$, $B(3;\ 2;\ 4)$ và $C(4;\ 1;\ 2)$ có phương trình là

A. $x+y+5=0$. **B.** $x+y-5=0$. **C.** $y-z+2=0$. **D.** $2x+y-7=0$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}\subset(ABC)$ nên (ABC) sẽ nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ làm một vectơ pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;-3)$ suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;\ 1;\ 0)$.

Hiển nhiên (ABC) đi qua $A(2;\ 3;\ 5)$ nên ta có phương trình của (ABC) là

$1(x-2)+1(y-3)+0(z-5)=0\Leftrightarrow x+y-5=0$.

Câu 58. **(Lê Quý Đôn - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

A. $2x+y+z+1=0$. **B.** $x-y+z-4=0$. **C.** $7x-2y+z-9=0$. **D.** $2x+y-z-2=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;8;9)$,

(ABC) đi qua $A(1;1;4)$ có vtpt $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(14;-14;14)=14(1;-1;1)$ có dạng $x-y+z-4=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 59. **(SGD - Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $S(-1;6;2)$, $A(0;0;6)$, $B(0;3;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S, B, H là

A. $x+y-z-3=0$. **B.** $x+y-z-3=0$.

C. $x+5y-7z-15=0$. **D.** $7x+5y-4z-15=0$.

Lời giải

Phương trình Mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow -3x+2y+z-6=0$.

H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$ nên H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABC)\Rightarrow H\left(\dfrac{19}{14};\dfrac{31}{7};\dfrac{17}{14}\right)$

Mặt phẳng $(SBH):\begin{cases} qua\,B(0;3;0) \\ vtpt\left[\overrightarrow{BH},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\dfrac{11}{14};\dfrac{55}{14};-\dfrac{11}{2}\right)=\dfrac{11}{14}(1;5;-7)\end{cases}$.

Phương trình Mặt phẳng $(SBH):x+5(y-3)-7z=0\Leftrightarrow x+5y-7z-15=0$.

Dạng 2. Một số bài toán liên đến khoảng cách - góc

Dạng 2.1 Khoảng cách từ điểm đến mặt, khoảng cách giữa hai mặt

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- *Khoảng cách từ điểm* $M(x_M; y_M; z_M)$ *đến mặt phẳng* $(P): ax + by + cz + d = 0$ *được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P)) = \dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$.

  Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng
- *Cho hai mặt phẳng song song* $(P): ax + by + cz + d = 0$ *và* $(Q): ax + by + cz + d' = 0$ *có cùng véctơ pháp tuyến, khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là* $\boxed{d\left((Q),(P)\right) = \dfrac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$.

Viết phương trình $(P) \| (Q): ax + by + cz + d = 0$ ***và cách*** $M(x_\circ; y_\circ; z_\circ)$ ***khoảng*** k.

Phương pháp:

- *Vì* $(P) \| (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0.$
- *Sử dụng công thức khoảng cách* $d_{[M,(P)]} = \dfrac{|ax_\circ + by_\circ + cz_\circ + d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = k \Rightarrow d'.$

Viết phương trình mặt phẳng $(P) \| (Q): ax + by + cz + d = 0$ ***và*** (P) ***cách mặt phẳng*** (Q) ***một khoảng*** k ***cho trước.***

Phương pháp:

- *Vì* $(P) \| (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0.$
- *Chọn một điểm* $M(x_\circ; y_\circ; z_\circ) \in (Q)$ *và sử dụng công thức:*

$$d_{[(Q);(P)]} = d_{[M,(P)]} = \frac{|ax_\circ + by_\circ + cz_\circ + d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = k \Rightarrow d'.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) ***vuông góc với hai mặt phẳng*** $(\alpha), (\beta)$, ***đồng thời*** (P) ***cách điểm*** $M(x_\circ; y_\circ; z_\circ)$ ***một khoảng bằng*** k ***cho trước.***

Phương pháp:

- *Tìm* $\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{(\beta)}$. *Từ đó suy ra* $\vec{n}_{(P)} = \left[\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{(\beta)}\right] = (a; b; c).$
- *Khi đó phương trình* (P) *có dạng* $(P): ax + by + cz + d = 0$, *(cần tìm* d*).*
- *Ta có:* $d_{[M;(P)]} = k \Leftrightarrow \dfrac{|ax_\circ + by_\circ + cz_\circ + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = k \Rightarrow d.$

Câu 1. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là

A. $M(0; -3; 0)$. **B.** $M(0; 3; 0)$. **C.** $M(0; -2; 0)$. **D.** $M(0; 1; 0)$.

Lời giải

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$.

Theo giả thiết: $d\left(M(P)\right) = d\left(M(Q)\right) \Leftrightarrow \dfrac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|-y-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -3$.

Vậy $M(0; -3; 0)$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$ (1).

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P): $d(A,(P))=\dfrac{|2.1+2+m.3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+m^2}}=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}$ (2).

Để $AB=d(A,(P))\Rightarrow 3=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}\Leftrightarrow 9(5+m^2)=9(m+1)^2\Leftrightarrow m=2$.

Câu 3. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;3)$, $C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\left[\begin{array}{l}2x+3y+z-1=0\\3x+y+7z+6=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x+2y+z-1=0\\-2x+3y+6z+13=0\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-1=0\\-2x+3y+7z+23=0\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x+y+z-1=0\\-23x+37y+17z+23=0\end{array}\right.$

Lời giải

Gọi $(P):\begin{cases}qua\ A(1;0;0)\\VTPT\ \vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0}\end{cases}$

$(P):A.(x-1)+By+Cz=0$

$B\in(P):-A-2B+3C=0\Leftrightarrow A=-2B+3C$ (1)

$d(C;(P))=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{|B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 3(B^2+C^2+2BC)=4(A^2+B^2+C^2)$

$\Leftrightarrow B^2+C^2-6BC+4A^2=0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $B^2+C^2-6BC+4(-2B+3C)^2=0\Leftrightarrow 17B^2-54BC+37C^2=0$

Cho $C=1$: $17B^2-54B+37=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=1\Rightarrow A=1\\B=\dfrac{37}{17}\Rightarrow A=\dfrac{-23}{17}\end{array}\right.$

$(P):x+y+x-1=0$

$(P):-23x+37y+17z+23=0$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$ **B.** $6x+3y+2z-12=0$

C. $6x+3y+2z=0$ **D.** $6x+3y+2z-36=0$

Lời giải

Chọn A

$(ABC):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

$(P)//(ABC)\Rightarrow(P):6x+3y+2z+m=0$ $(m\neq -12)$.

Nguyễn Bảo Vương

(P) cách đều D và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d(D,(P)) = d(A,(P))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|6.2+3.4+2.6+m|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \dfrac{|6.2+3.0+2.0+m|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} \Leftrightarrow |36+m| = |12+m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 36+m=12+m \\ 36+m=-12-m \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m=-24$ (nhận).

Vậy phương trình của (P) là $6x+3y+2z-24=0$.

Câu 5. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d(B;(P)) = 2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải.

Vì $d(B;(P)) = 2d(A;(P))$ và (P) cắt đoạn AB tại I nên

$$\overrightarrow{BI} = -2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} a-5=-2(a-1) \\ b+4=-2(b-2) \\ c+1=-2(c-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{3} \\ b=0 \\ c=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=4.$$

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-3=0$ bằng:

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Lấy $A(2;1;3) \in (P)$.Do (P) song song với (Q) nên Ta có

$d((P),(Q)) = d(A,(Q)) = \dfrac{|2+2.1+2.3-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{7}{3}$

Câu 7. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x-y+z=0$ và $2x-y+z-7=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 7. **B.** $7\sqrt{6}$. **C.** $6\sqrt{7}$. **D.** $\dfrac{7}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $O(0;0;0)$.

Do mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng: $d((P),(Q)) = d(O,(Q)) = \dfrac{|-7|}{\sqrt{6}} = \dfrac{7}{\sqrt{6}}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-8=0$ và $(Q): x+2y+2z-4=0$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}(P)//(Q)\\ A(8;0;0)\in(P)\end{cases}\Rightarrow d\left((P);(Q)\right)=d\left(A;(Q)\right)=\dfrac{|8+2.0+2.0-4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{4}{3}$.

Nhận xét:

Nếu mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d$ *và* $(Q):ax+by+cz+d'$ $\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$ *song song với nhau* $(d\neq d')$ *thì* $d\left((P);(Q)\right)=\dfrac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$..

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z-16=0$ và $(Q):x+2y-2z-1=0$ bằng

A. 5. **B.** $\frac{17}{3}$. **C.** 6. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}(P)//(Q)\\ A(16;0;0)\in(P)\end{cases}\Rightarrow d\left((P);(Q)\right)=d\left(A;(Q)\right)=\dfrac{|16+2.0-2.0-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=5$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian Oxyz khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+3z-1=0$ và $(Q):x+2y+3z+6=0$ là

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$ **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$ **C.** 14 **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Lời giải

$(P):x+2y+3z-1=0$ $(Q):x+2y+3z+6=0$. Ta có: $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}\neq\frac{-1}{6}$

Các giải trắc nghiệm:

Công thức tính nhanh: $(P):Ax+By+Cz+D_1=0;\ (Q)\ Ax+By+Cz+D_2=0$

$$\mathrm{d}\left((P);(Q)\right)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$(P)//(Q)$ áp dụng công thức: $\mathrm{d}\left((P);(Q)\right)=\dfrac{|-1-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):6x+3y+2z-1=0$ và $(Q):x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+8=0$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Vì $\frac{6}{1}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{3}}\neq\frac{-1}{8}\Rightarrow(P)//(Q)$ nên $d\left((P);(Q)\right)=d\left(M;(Q)\right)$ với $M(0;1;-1)\in(P)$

$$d\left((P);(Q)\right)=d\left(M;(Q)\right)=\frac{\left|x_M+\frac{1}{2}y_M+\frac{1}{3}z_M+8\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{\left|0+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+8\right|}{\sqrt{\frac{49}{36}}}=7.$$

Câu 12. **(Chuyên Lam Sơn-2019)** Trong không gian Oxyz khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+3z-1=0$ và $(Q):x+2y+3z+6=0$ là:

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$. **C.** 14. **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Lời giải

Chọn A

Có $(P)//(Q)\Rightarrow d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)$ với A bất kì thuộc (P).

Chọn $A(1;0;0)\in(P)$ có $d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)=\frac{|7|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}$.

Câu 13. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha):x-2y-2z+4=0$ và $(\beta):-x+2y+2z-7=0$.

A. 0. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Ta có $M(0;1;1)\in(\alpha)$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ là:

$$h=d\left(M,(\beta)\right)=\frac{|-0+2.1+2.1-7|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}=1.$$

Câu 14. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+6z+14=0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$.

Vậy $d\left(I,(P)\right)=\frac{|3-2+6+14|}{\sqrt{9+4+36}}=3$..

Câu 15. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-2z-9=0$ và $(Q):4x-2y-4z-6=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Trong mặt phẳng (P) ta chọn điểm $M(0;-9;0)$. Tính khoảng cách từ M đến (Q) ta có:

$d(M,(Q))=\dfrac{|4.0-2.(-9)-4.0-6|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}}=2$. Vậy $d((P),(Q))=d(M,(Q))=2$.

Câu 16. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z-6=0$ và $(Q):x+2y-2z+3=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

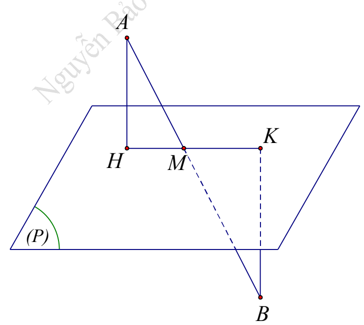
Lấy $M(6;0;0)\in(P)$ ta có $d((P);(Q))=d(M;(Q))=\dfrac{|1.6+2.0-2.0+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$.

Câu 17. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+4y-12z+5=0$ và điểm $A(2;4;-1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M. Gọi B là điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P).

A. $d=6$. **B.** $d=\dfrac{30}{13}$. **C.** $d=\dfrac{66}{13}$. **D.** $d=9$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AM}\Rightarrow BM=2.AM\Rightarrow\dfrac{d(B,(P))}{d(A,(P))}=\dfrac{BM}{AM}=2$

$\Rightarrow d(B,(P))=2.d(A,(P))=2.\dfrac{|3.2+4.4-12.(-1)+5|}{\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}}=2.3=6$.

Câu 18. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y-z-1=0$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3?

A. $(Q):2x+2y-z+10=0$. **B.** $(Q):2x+2y-z+4=0$.

C. $(Q):2x+2y-z+8=0$. **D.** $(Q):2x+2y-z-8=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;0;-1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3 nên có dạng $(Q): 2x+2y-z+d=0, (d \neq -1)$.

Mặt khác ta có $d(M,(Q))=3 \Leftrightarrow \frac{|1+d|}{\sqrt{4+4+1}}=3 \Leftrightarrow |d+1|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=8 \\ d=-10 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Do đó $(Q): 2x+2y-z+8=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z-10=0$.

Câu 19. **(SGD Bến Tre 2019)** Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$.

A. $M(0;0;-3)$. **B.** $M(0;0;3)$. **C.** $M(0;0;-4)$. **D.** $M(0;0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $M \in Oz \Rightarrow M(0;0;m)$. Ta có: $MA=\sqrt{2^2+3^2+(4-m)^2}$; $d(M,(P))=\frac{|m-17|}{\sqrt{14}}$.

M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$ khi và chỉ khi

$\sqrt{2^2+3^2+(4-m)^2}=\frac{|m-17|}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow 13(m-3)^2=0 \Leftrightarrow m=3$. Vậy $M(0;0;3)$.

Câu 20. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;4;0)$, mặt phẳng $(P): ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB=3<d(\mathrm{B},(P))$ suy ra A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B xuống mặt phẳng (P).

Ta có $6=AH+BK \geq AK \geq AH=6$. Do đó A, B, H, K thẳng hàng.

Từ đó suy ra $AB \perp (P)$ và B là trung điểm của AH nên $H(5;6;-1)$, $\overrightarrow{AB}(2;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng

$(P): 2(x-5)+2(y-6)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z-23=0 \Leftrightarrow -4x-4y+2z+46=0$.

Vậy $a+b+c=-6$.

Câu 21. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) với (Q) song song với (P) và khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{7}{3}$ là.

A. $x+2y+2z+3=0; x+2y+2z-17=0$ **B.** $x+2y+2z-3=0; x+2y+2z+17=0$

C. $x+2y+2z+3=0; x+2y+2z+17=0$ **D.** $x+2y+2z-3=0; x+2y+2z-17=0$

Lời giải

Chọn D

Vì (Q) song song với (P) nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng

$$(Q): x+2y+2z+c=0$$

Lấy $M\in(P)\Rightarrow M(0;0;5)\Rightarrow d(M,(Q))=\dfrac{7}{3}$. Khi đó ta có

$$d(M,(Q))=\frac{|2.5+c|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{7}{3}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}10+c=7\\10+c=-7\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=-3\\c=-17\end{array}\right.$$

Vậy ta có các mặt phẳng (Q) là

$(Q):x+2y+2z-3=0;(Q):x+2y+2z-17=0$

Câu 22. **(SGD Hưng Yên 2019)** Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta):x+y-z+3=0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

A. $x+y-z+6=0$; $x+y-z=0$.
B. $x+y-z+6=0$.
C. $x-y-z+6=0$; $x-y-z=0$.
D. $x+y+z+6=0$; $x+y+z=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi mặt phẳng (α) cần tìm.

Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên phương trình (α) có dạng : $x+y-z+c=0$ với $c\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lấy điểm $I(-1;-1;1)\in(\beta)$.

Vì khoảng cách từ (α) đến (β) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có :

$d(I,(\alpha))=\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{|-1-1-1+c|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{|c-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\c=6\end{array}\right.$. (thỏa điều kiện $c\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$).

Vậy phương trình (α) là: $x+y-z+6=0$; $x+y-z=0$.

Câu 23. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(4;2;1)$, $B(0;0;3)$, $C(2;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa OC và cách đều 2 điểm A,B.

A. $x-2y-2z=0$ hoặc $x+4y-2z=0$.
B. $x+2y+2z=0$ hoặc $x-4y-2z=0$.
C. $x+2y-2z=0$ hoặc $x+4y-2z=0$.
D. $x+2y-2z=0$ hoặc $x-4y-2z=0$.

Lời giải

Gọi $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2\neq0)$.

$O\in(\alpha)$ nên ta có: $D=0$ (1)

$C\in(\alpha)$ nên ta có: $Ax+By+Cz-2A-C=0$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow C=-2A$.

Theo đề bài: $d(A,(\alpha))=d(B,(\alpha))$.

$$\Leftrightarrow|2A+2B|=|-6A|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2A+B=6A\\2A+B=-6A\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}B=2A&(*)\\B=-4A&(**)\end{array}\right.$$

Từ $(*)$:Chọn $A=1\Rightarrow B=2,\ C=-2$ $\Rightarrow(\alpha):x+2y-2z=0$.

Từ $(**)$:Chọn $A=1\Rightarrow B=-4,\ C=-2$ $\Rightarrow(\alpha):x-4y-2z=0$.

Câu 24. **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0),B(0;-2;3),C(1;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa A,B sao cho khoảng cách từ C tới (P) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ là

A. $x+y+z-1=0$ hoặc $-23x+37y+17z+23=0$.

B. $x+y+2z-1=0$ hoặc $-23x+3y+7z+23=0.$

C. $x+2y+z-1=0$ hoặc $-13x+3y+6z+13=0.$

D. $2x+3y+z-1=0$ hoặc $3x+y+7z-3=0.$

Lời giải

Giả sử $\vec{n}=(a;b;c)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ta có $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}=(-1;-2;3)\Rightarrow -a-2b+3c=0\Rightarrow a=-2b+3c.$

$(P):\text{ax}+\text{by}+\text{cz}-\text{a}=0\Rightarrow d(C;(P))=\dfrac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{3}|b+c|=2\sqrt{b^2+c^2+(-2b+3c)^2}\Leftrightarrow 17b^2-54bc+37c^2=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=c \\ b=\dfrac{37}{17}c \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=c=1 \\ c=17,b=37 \end{array}\right.$

TH1: $b=c=1\Rightarrow a=1\Rightarrow (P):\text{x}+\text{y}+\text{z}-1=0$.

TH2: $b=37,c=17\Rightarrow a=-23\Rightarrow (P):-23\text{x}+37\text{y}+17\text{z}+23=0$.

Câu 25. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Nguyễn Bảo Vương

A. $(Q):2x-2y+z+4=0$.

B. $(Q):2x-2y+z-14=0$.

C. $(Q):2x-2y+z-19=0$.

D. $(Q):2x-2y+z-8=0$.

Lời giải

Ta có, (Q) song song (P) nên phương trình mặt phẳng $(Q):2x-2y+z+C=0$; $C\neq -5$

Chọn $M(0;0;5)\in(P)$

Ta có $d\big((P);(Q)\big)=d\big(M;(Q)\big)=\dfrac{|5+C|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=4 \\ C=-14 \end{array}\right.$

$C=4\Rightarrow (Q):2x-2y+z+4=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

$C=-14\Rightarrow (Q):2x-2y+z-14=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q):2x-2y+z-14=0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):2x-2y+z-14=0$.

Câu 26. **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q): $x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng (P) không qua O, song song với mặt phẳng (Q) và $d\big((P),(Q)\big)=1$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+2z+1=0$ **B.** $x+2y+2z=0$ **C.** $x+2y+2z-6=0$ **D.** $x+2y+2z+3=0$

Lời giải

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)

$\Rightarrow vtpt\overrightarrow{n_P} = vtpt\overrightarrow{n_Q} = (1;2;2)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+2y+2z+D=0$

Gọi $A(3;0;0)\in(Q)$

$\Rightarrow d((P),(Q)) = d(A,(P)) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|3+D|}{3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+D=3 \\ 3+D=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=0 \quad (l), qua\, O \\ D=-6\ (n) \end{array}\right.$

Câu 27. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$. **B.** $6x+3y+2z-12=0$.

C. $6x+3y+2z=0$. **D.** $6x+3y+2z-36=0$.

Lời giải

Phương trình $mp(ABC)$: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên phương trình có dạng:

$$6x+3y+2z+d=0,\ d\neq -12.$$

Mặt phẳng (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC)

$\Leftrightarrow d((ABC),(P)) = d(D,(P)) \Leftrightarrow d(A,(P)) = d(D,(P))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|6.2+d|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \dfrac{|6.2+3.4+2.6+d|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} \Leftrightarrow |d+12| = |d+36| \Leftrightarrow d=-24$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $6x+3y+2z-24=0$.

Câu 28. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) qua $D(1;1;1)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

A. $2x+3y-6z+1=0$. **B.** $3x+2y-6z+1=0$.

C. $3x+2y-5z=0$. **D.** $6x+2y-3z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-1}=1$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên

$(P): \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y-z+m=0\ (m\neq -1)$.

Do $D(1;1;1)\in(P)$ có: $\dfrac{1}{2}.1+\dfrac{1}{3}.1-1+m=0 \Leftrightarrow m-\dfrac{1}{6}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{6}$.

Vậy $(P): \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y-z+\dfrac{1}{6}=0 \Leftrightarrow 3x+2y-6z+1=0$.

Câu 29. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Mặt phẳng (α) đi qua $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, (α) song song với đường thẳng CD. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x+y+2-3=0$. **B.** $2x-y+z-2=0$. **C.** $2x+y+z-3=0$. **D.** $x+y-2=0$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$, $\overrightarrow{CD}=(0;1;-1)$ $\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-2;-1;-1)$.

(α) đi qua $A(1;1;0)$ và có một VTPT là $\vec{n}(2;1;1)\Rightarrow(\alpha):2x+y+z-3=0$.

Dạng 2.2 Góc của 2 mặt phẳng

1. ***Góc giữa hai véctơ***

Cho hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn hoặc tù.

$$\boxed{\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}\ \text{với } 0°<\alpha<180°.$$

2. ***Góc giữa hai mặt phẳng***

Cho hai mặt phẳng $(P):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

$$\boxed{\cos((P),(Q))=\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}\ \text{với } 0°<\alpha<90°.$$

Câu 30. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;2)$, H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q):x+y-11=0$

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Lời giải

Chọn C

(P) qua O và nhận $\overrightarrow{OH}=(2;1;2)$ làm VTPT

$(Q):x-y-11=0$ có VTPT $\vec{n}=(1;1;0)$

Ta có $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\frac{|\overrightarrow{OH}.\vec{n}|}{OH.|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=45^0$

Câu 31. **(THPT Quang Trung Đống Đa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y+2z-5=0$. Xét mặt phẳng $(Q):x+(2m-1)z+7=0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=4\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=4\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Lời giải

Mặt phẳng (P), (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_p}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;2m-1)$

Vì (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$ nên

$$\cos\frac{\pi}{4}=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_p};\overrightarrow{n_Q}\right)\right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|1+2(2m-1)|}{3.\sqrt{1+(2m-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(4m-1)^2=9(4m^2-4m+2)$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-20m+16=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=4 \end{array}\right..$$

Câu 32. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Khi đó $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B nên $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$.

Và (P) tạo với (Oyz) góc $60°$ nên $\cos((P),(Oyz))=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ (*).

Thay $a=b=1$ vào phương trình được $\sqrt{2+c^2}=2 \Rightarrow c=-\sqrt{2}$.

Khi đó $a+b+c=2-\sqrt{2}\in(0;3)$.

Câu 33. **(Chuyên Bắc Giang -2019) Trong không gian với hệ tọa độ** $Oxyz$**, cho hai mặt phẳng** $(P): x+2y-2z+1=0$, $(Q): x+my+(m-1)z+2019=0$**. Khi hai mặt phẳng** (P)**,** (Q) **tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng** (Q) **đi qua điểm** M **nào sau đây?**

A. $M(2019;-1;1)$ **B.** $M(0;-2019;0)$ **C.** $M(-2019;1;1)$ **D.** $M(0;0;-2019)$

Lời giải

Chọn C

Gọi φ **là góc giữa hai mặt phẳng** (P) **và** (Q)**.**

Khi đó:

$$\cos\varphi=\frac{|1.1+2.m-2.(m-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2+(m-1)^2}}=\frac{1}{3\sqrt{2m^2-2m+2}}=\frac{1}{3.\sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}}\le\frac{1}{3\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Góc φ **nhỏ nhất** $\Leftrightarrow$ $\cos\varphi$ **lớn nhất** $\Leftrightarrow$ $m=\frac{1}{2}$**.**

Khi $m=\frac{1}{2}$ **thì** $(Q): x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+2019=0$**, đi qua điểm** $M(-2019;1;1)$**.**

Câu 34. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+5=0$ và $(Q): x-y+2=0$. Trên (P) có tam giác ABC; Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên (Q). Biết tam giác ABC có diện tích bằng 4, tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{|2.1-1.(-1)+2.0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\alpha = 4.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 35. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2;-1;-2)$. Số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q): x-y-5=0$ là

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q} = (1;-1;0)$.

Hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2;-1;-2) \Rightarrow (P)$ qua H và nhận $\overrightarrow{OH} = (2;-1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{n_Q}\right)\right| = \frac{|2+1+0|}{\sqrt{4+1+4}.\sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \varphi = 45°$.

Câu 36. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;\ 1;\ 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+y-11=0$ là

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có H là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt phẳng (P) nên $OH \perp (P)$. Do đó $\overrightarrow{OH} = (2;\ 1;\ 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;\ 1;\ 0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q).

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{OH}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{OH}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{|2.1+1.1+2.0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là $45°$.

Câu 37. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;1), B(6;-2;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}$ là

A. $\left[\begin{array}{l} 2x+3y+6z-12=0 \\ 2x+3y-6z=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 2x-3y+6z-12=0 \\ 2x-3y-6z=0 \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} 2x-3y+6z-12=0 \\ 2x-3y-6z+1=0 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} 2x+3y+6z+12=0 \\ 2x+3y-6z-1=0 \end{array}\right.$

Lời giải

Giả sử (P) có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(a;b;c)$

(P) có VTCP $\overrightarrow{AB}=(3;-2;0)$ suy ra $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Rightarrow 3a+b(-2)+0.c=0\Rightarrow 3a-2b=0\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}b \qquad (1)$

(Oyz) có phương trình $x=0$ nên có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(1;0;0)$

Mà $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}\Leftrightarrow\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{2}{7}\Leftrightarrow\dfrac{|a.1+b.0+c.0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\dfrac{2}{7}$

$\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.}=\dfrac{2}{7}\Leftrightarrow 7|a|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow 49a^2=4\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow 45a^2-4b^2-4c^2=0 \qquad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được $4b^2-c^2=0$

Chọn $c=2$ ta có $4b^2-2^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{2}{3}\\a=\dfrac{-2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\vec{n}=\left(\dfrac{2}{3};1;2\right)\\\vec{n}=\left(-\dfrac{2}{3};-1;2\right)\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}\vec{n}=(2;3;6)\\\vec{n}=(2;3;-6)\end{array}\right.$

Vậy $(P)\left[\begin{array}{l}2x+3y+6z-12=0\\2x+3y-6z=0\end{array}\right.$

Câu 38. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc $60°$. Khi đó giá trị $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;8)$. **D.** $(8;11)$.

Lời giải

Ta có: $A,B\in(P)$ nên $\begin{cases}b+d=0\\a+d=0\end{cases}$. Suy ra (P) có dạng $ax+ay+cz-a=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;a;c)$.

Mặt phẳng (yOz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Ta có: $\cos 60°=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{i}\right|}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{|a|}{\sqrt{2a^2+c^2}.1}\Leftrightarrow 2a^2+c^2=4a^2\Leftrightarrow 2a^2-c^2=0$.

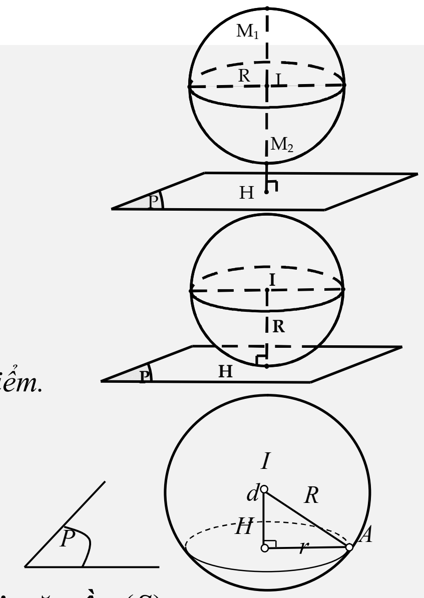
Chọn $a=1$, ta có: $c^2=2\Rightarrow c=-\sqrt{2}$ do $c<0$.

Ta có: $a+b+c=a+a+c=1+1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}\in(0;3)$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 3. Vị trí tương đối

Dạng 3.1 Vị trí tương đối mặt phẳng với mặt cầu



Vị trí tương đối giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó:

- *Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.*
- *Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu.*
  Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.
- *Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện*
  là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.

Viết phương trình mặt $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$ ***và tiếp xúc với mặt cầu*** (S).

Phương pháp:

- *Vì $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0$.*
- *Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu.*
- *Vì (P) tiếp xúc (S) nên có $d_{[I;(P)]} = R \Rightarrow d'$.*

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

A. $x + y + 3z - 9 = 0$ **B.** $x + y - 3z + 3 = 0$ **C.** $x + y - 3z - 8 = 0$ **D.** $x - y - 3z + 3 = 0$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA} = (-1;-1;3)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là $-x - y + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.

Câu 2. **(Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. $r = \dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. **B.** $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $r = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. **D.** $r = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R = 2$. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α). Ta có $d = d(I,(\alpha)) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó ta có: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-7=0$.

A. $x^2+y^2+z^2+4x+2y-8z-4=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+8z-4=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z-4=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z-4=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu cần tìm có bán kính $R=d(I,(\alpha))=\dfrac{|2-2.1+2.(-4)-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=5$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=25$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z-4=0$.

Câu 4. **(SGD Bình Phước - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π. Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2$. **B.** $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

C. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$. **D.** $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi R,r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giải thiết ta có:

$$\pi r^2=2\pi \Leftrightarrow r^2=2$$

Mặt khác $\mathrm{d}(I,(P))=1$ nên $R^2=r^2+\left[d(I,(P))\right]^2=3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

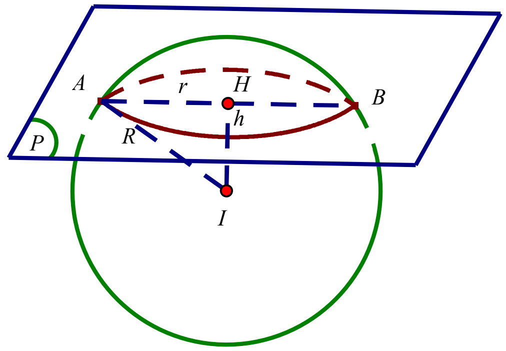
Câu 5. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Lời giải

Chọn D



Gọi h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) ta có:

$h=d(I;(P))=\dfrac{|-1-4-2-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Lời giải

Chọn C

Vì mặt cầu tâm $I(-1;2;1)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x-2y-2z-2=0$ nên bán kính

$R=d(I,(P))=\dfrac{|-1-2.2-2.1-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3 \Rightarrow (S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 7. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Phương trình mặt cầu tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $(P):2x-y+2z+4=0$ là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=\dfrac{20}{3}$.
B. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=\dfrac{400}{9}$.
C. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\dfrac{20}{3}$.
D. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\dfrac{400}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $d(I,(P))=\dfrac{|2.3-(-2)+2.4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{20}{3}$. Suy ra mặt cầu tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $(P):2x-y+2z+4=0$ có bán kính $R=\dfrac{20}{3}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(3;-2;4)$, bán kính $R=\dfrac{20}{3}$ là:

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\dfrac{400}{9}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z+3=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$. **B.** $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=16$.

C. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=16$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính của mặt cầu (S) là R.

Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow d(I;(P))=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3-2.1-2.(-1)+3|}{\sqrt{1+4+4}}=R \Leftrightarrow R=2.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.

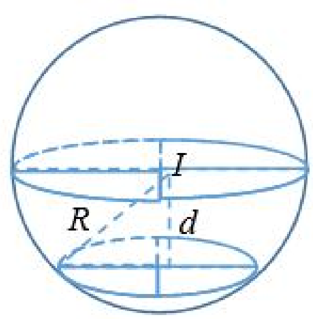
Câu 9. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

Chọn D



Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$d=d(I,(P))=\frac{|2.1-2+2.1+7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3.$$

Đường tròn giao tuyến có đường kính bằng 8 nên bán kính đường tròn là $r=4$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{d^2+r^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

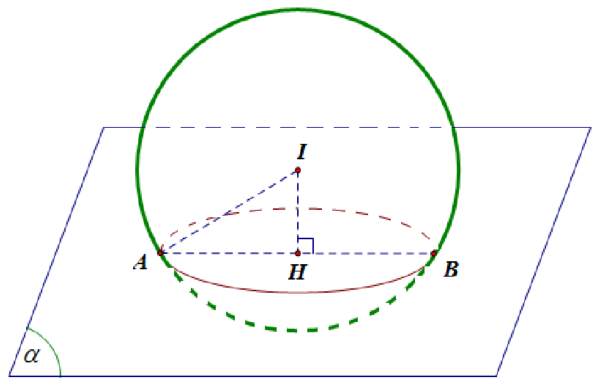
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 10. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y-z+9=0$. Tính bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. 8. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là tâm mặt cầu (S), H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) và AB là một đường kính của đường tròn (C).

Dễ thấy $I(3;-2;1)$, $IA=10$, $IH=d\left(I,(\alpha)\right)=6$ suy ra $HA=\sqrt{IA^2-IH^2}=8$.

Vậy bán kính đường tròn (C) bằng 8.

Câu 11. **(chuyên Hùng Vương Gia Lai -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng $(P): x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (P) tiếp xúc với (S).

B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.

C. (P) và (S) không có điểm chung.

D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I=(2;-1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{4+1+1-(-10)}=\sqrt{16}=4$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|2+2.(-1)-2(-1)+10\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{12}{3}=4$

Ta thấy: $d\left(I,(P)\right)=R$, vậy (P) tiếp xúc với (S).

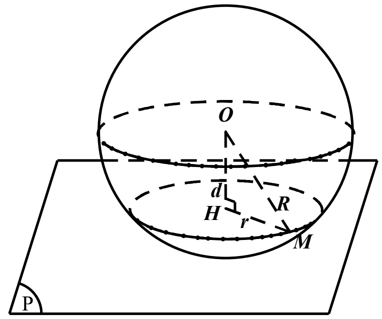
Câu 12. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. $r=\dfrac{1}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{1}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Nguyễn Bảo Vương



Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=1$.

Khoảng cách $d(O,(P))=\frac{1}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 13. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$?

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=3$. **B.** $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) có R là bán kính. Khi đó ta có: $d(I,(P))=R \Rightarrow R=\frac{|2.3+2.1-0+1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow R=3$.

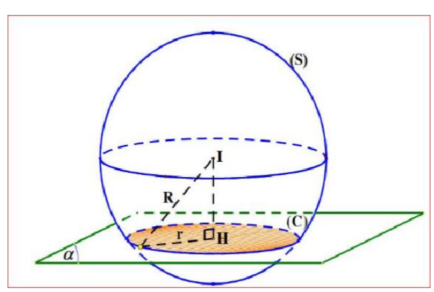
Vậy phương trình của (S) là $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Câu 14. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. $r=3$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=\sqrt{6}$. **D.** $r=\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là $d=3$, suy ra bán kính đường tròn giao tuyến cần tìm là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$ **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$ **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Lời giải

Chọn D

Gọi R,r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

Ta có $R^2=r^2+\left(d\left(I,(P)\right)\right)^2=1+\left(\dfrac{|2.2+1.1+2.1+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}\right)^2=10$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R=\sqrt{10}$ là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Câu 16. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.

A. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+2=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-2=0$

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-10=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$

Lời giải

Chọn D

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d>0\,(*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm I thuộc $mp(P)$

nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a+6b+6c-d=22\\4a-2b-2c-d=6\\4a+2b-6c+d=-14\\2a+3b-c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=3\\d=-2\end{cases}:T/m(*)$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0$; $n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R=1$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{3}{2}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

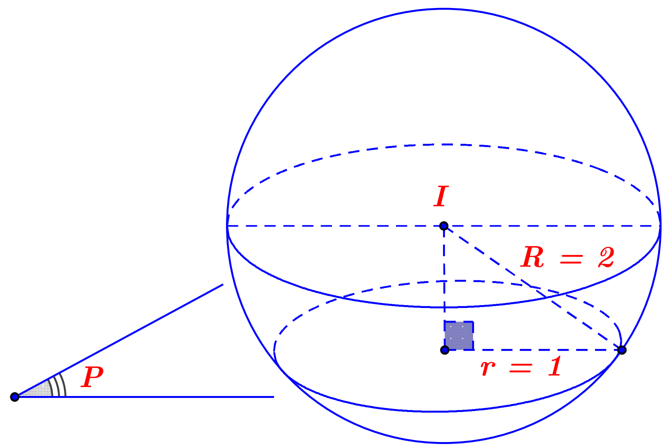
Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+z=1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx+my+mnz-mn=0$

Mặt khác $d\left(I;\left(ABC\right)\right)=\dfrac{\left|1-mn\right|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}=1$ (vì $m+n=1$) và $ID=1=d\left(\left(I;\left(ABC\right)\right)\right)$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D. Khi đó $R=1$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng (P): $x+my+z-3m-1=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.



A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-2$.
C. $m=1$ hoặc $m=2$. **D.** $m=-1$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ có tâm $I(2;4;1)$, bán kính $R=2$.

Ta có $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|2+4m+1-3m-1\right|}{\sqrt{1+m^2+1}}=\dfrac{\left|m+2\right|}{\sqrt{m^2+2}}$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 nên bán kính đường tròn giao tuyến $r=1$.

Ta có $R^2=d^2\left(I,(P)\right)+r^2 \Leftrightarrow 4=\dfrac{(m+2)^2}{m^2+2}+1 \Leftrightarrow m^2+4m+4=3\left(m^2+2\right) \Leftrightarrow 2m^2-4m+2=0$

$\Leftrightarrow m=1$.

Câu 19. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz). Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $|a|=1$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $|b|=1$. **D.** $|c|=1$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (Oxz): $y=0$.

Vì mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1 tiếp xúc với (Oxz) nên ta có:

$d\left(I;(Oxz)\right)=1 \Leftrightarrow |b|=1$.

Câu 20. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$ có phương trình là:

A. $2x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-y+2z+9=0$.

C. $2x-y+2z+7=0$. **D.** $2x-y+2z-9=0$.

Lời giải

Ta gọi phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$ có dạng : $(Q): 2x-y+2z+D=0, (D\neq -11)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2-5}=3$

Vì mặt phẳng tiếp xúc với (S) nên ta có :

$$d(I,(Q))=R \Leftrightarrow \frac{|2.(-1)-2+2.3+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3 \Leftrightarrow \frac{|2+D|}{3}=3.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2+D=9\\2+D=-9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=7\\D=-11\end{array}\right.. \text{ Do } D\neq -11 \Rightarrow D=7.$$

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x-y+2z+7=0$.

Câu 21. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+z-2=0$ và $(Q): 2x-y+z+1=0$. Số mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $M(0;0;2)\in(P)\Rightarrow d((P);(Q))=d(\mathrm{M};(Q))=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$d(\mathrm{A};(P))=\frac{\sqrt{6}}{2}; d(\mathrm{A};(Q))=\sqrt{6}\Rightarrow d(\mathrm{A};(Q))=d(\mathrm{A};(P))+d((Q);(P))$$

Vậy không có mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

A. $(P): 5x+y-6z+62=0$. **B.** $(P): 5x+y-6z-62=0$.

C. $(P): 5x-y-6z-62=0$. **D.** $(P): 5x+y+6z+62=0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(1;1;1)$.

Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm là điểm I.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A nên mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}=(5;1;-6)$ là vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P):

$$5(x-6)+1(y-2)-6(z+5)=0 \Leftrightarrow 5x+y-6z-62=0.$$

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=5 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(S):\begin{cases} I(1;-1;1) \\ R=3 \end{cases}$.

Để (P) tiếp xúc với (S) thì $d(I;(P))=R \Leftrightarrow \dfrac{|1-m^2-3m|}{3}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+3m-10=0 \\ m^2+3m+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$.

Câu 24. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $0xyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ có tâm I và mặt phẳng $(P): x+2y+2z+7=0$. Thể tích của khối nón đỉnh I và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) bằng

A. 12π **B.** 48π **C.** 36π **D.** 24π

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=5$

Ta có chiều cao của khối nón $h=d(I,(P))=\dfrac{|1+2+2+7|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$

Bán kính đáy của hình nón là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{25-16}=3$

Thể tích của khối nón $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi.3^3.4=12\pi$.

Câu 25. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ lần lượt có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$, $x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z+5=0$. Xét các mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc cả hai mặt cầu đã cho. Gọi $A(a;b;c)$ là điểm mà tất cả các mặt phẳng (P) đi qua. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=\dfrac{5}{2}$. **B.** $S=-\dfrac{5}{2}$. **C.** $S=\dfrac{9}{2}$. **D.** $S=-\dfrac{9}{2}$.

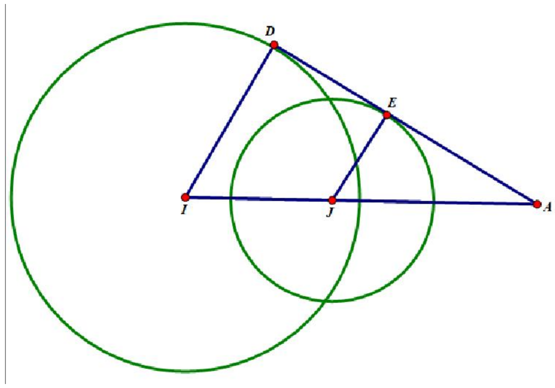
Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R_1=5$

Mặt cầu (S_2) có tâm $J(3;-2;-1)$ và bán kính $R_2=3$

Ta có $\overrightarrow{IJ}(2;-3;-2) \Rightarrow \text{IJ}=\sqrt{17} \Rightarrow R_1-R_2<\text{IJ}<R_1+R_2$. Vậy $(S_1),(S_2)$ là hai mặt cầu cắt nhau.



Gọi A là tâm tỉ cự của hai mặt cầu ta có

$$\frac{AI}{AJ}=\frac{ID}{JE}=\frac{5}{3}\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AJ}\Rightarrow 3\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{AJ}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\frac{5\overrightarrow{OJ}-3\overrightarrow{OI}}{2}\Rightarrow A\left(6;-\frac{13}{2};-4\right)\Rightarrow a+b+c=-\frac{9}{2}$$

Câu 26. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-13=0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ thì giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -11. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-1)$ và bán kính $R=3\sqrt{5}$.

Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)\Rightarrow I$ là hình chiếu của A lên mp(P) $\Leftrightarrow \begin{cases} I\in(P)\\ \overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{n_P}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c-13=0\\ 1-a=k\\ 2-b=k\\ -1-c=-k\end{cases} \Rightarrow (1-k)+(2-k)-(-1+k)-13=0\Leftrightarrow k=-3 \Rightarrow I(4;5;-4).$$

Vậy $a+b+c=5$.

Câu 27. **(Sở Hà Nam - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Hỏi (Q) đi qua điểm nào trong số các điểm sau?

A. $(6;0;1)$. **B.** $(-3;1;4)$. **C.** $(-2;-1;5)$. **D.** $(4;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{15}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến. Ta có $2\pi r=6\pi\Leftrightarrow r=3$.

Do $(Q)//(P) \Rightarrow (Q): x-2y+z+d=0 \quad (d \neq 7)$.

Ta có: $d\left(I,(Q)\right)=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \dfrac{|d-1|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=7 \quad (\text{loại}) \\ d=-5 \quad (\text{nhận}) \end{array}\right.$

Vậy $(Q): x-2y+z-5=0$. Thay tọa độ $(-2;-1;5)$ vào (Q) thấy thỏa mãn.

Câu 28. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có: tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2+2}=4$.

Vì $(\alpha)||(\beta)$ nên phương trình mp (α) có dạng: $4x+3y-12z+d=0, (d \neq 10)$.

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S)

nên: $d_{(I,(\beta))}=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1+3.2-12.3+d|}{\sqrt{4^2+3^2+(-12)^2}}=4 \Leftrightarrow |d-26|=52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=-26 \\ d=78 \end{array}\right.$.

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d=78$.

Vậy mp (β): $4x+3y-12z+78=0$.

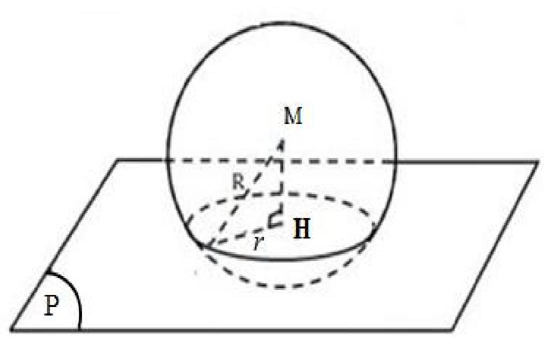
Nguyễn Bảo Vương

Câu 29. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-1=0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu

tâm M, bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}-1$.

Lời giải



Mặt cầu tâm tâm M, bán kính bằng $R=\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm H, bán kính r suy ra $r=\sqrt{R^2-MH^2}$.

Với $MH=d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|2.1-(-2)-2.0-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=1$. Suy ra $r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}$.

Câu 30. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π đi qua điểm nào sau đây?

A. $(2;-2;1)$. **B.** $(1;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-5)$. **D.** $(-2;2;-1)$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{15}$.

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r=\frac{6\pi}{2\pi}=3$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x-2y+z+D=0$, $D\neq -5$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π nên

$$d(I;(P))=\sqrt{R^2-r^2} \Leftrightarrow d(I;(P))=\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-2.0-2+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow |D-1|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D-1=6 \\ D-1=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=7 \\ D=-5 \end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta được $D=7$. Do đó phương trình mặt phẳng $(P): x-2y+z+7=0$.

Nhận thấy điểm có tọa độ $(-2;2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 31. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$. Phương trình mặt phẳng (β) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $M(0;4;-2)$ là

A. $x+6y-6z+37=0$ **B.** $x-2y-2z-4=0$ **C.** $x-2y-2z+4=0$ **D.** $x+6y-6z-37=0$

Lời giải

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$ có tâm $I(1;2;-4)$.

$\overrightarrow{IM}=(-1;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua $M(0;4;-2)$ nhận $\overrightarrow{IM}=(-1;2;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến là

$$-1(x-0)+2(y-4)+2(z+2)=0 \Leftrightarrow x-2y-2z+4=0.$$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng (P): $4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-21$.

C. $m=1$ hoặc $m=21$. **D.** $m=-9$ hoặc $m=31$.

Lời giải

Ta có mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(2;-1;-2)$, bán kính $R=2$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|4.2-3.(-1)-m|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2 \Leftrightarrow |11-m|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=21 \end{array}\right.$.

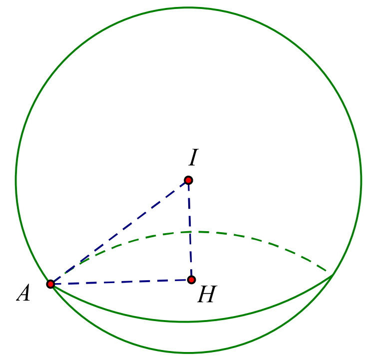
Câu 33. **(THPT Ba Đình -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): mx+2y-z+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu

$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m?

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $m=\pm 4$. **<u>D</u>.** $m=6\pm 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Từ $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ ta có tâm $I=(2;1;0)$ bán kính $R=3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và $(P)\cap(S)=C(H;r)$ với $r=2$



Ta có $IH=d(I;(P)) \Leftrightarrow IH=\dfrac{|2m+2-0+1|}{\sqrt{m^2+4+1}}=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+5}}$

Theo yêu cầu bài toán ta có $R^2=IH^2+r^2 \Leftrightarrow 9=\dfrac{(2m+3)^2}{m^2+5}+4$

$\Leftrightarrow m^2-12m+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6-2\sqrt{5} \\ m=6+2\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Câu 34. **(Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

A. $(Q):y+3z=0$. **B.** $(Q):x+y-2z=0$. **C.** $(Q):y-z=0$. **<u>D</u>.** $(Q):y-2z=0$.

Lời giải

(Q) chứa trục Ox nên có dạng $By+Cz=0\left(B^2+C^2\neq 0\right)$.

(S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$.

Bán kính đường tròn giao tuyến $r=3$.

Vì $R=r$ nên $I\in(Q)$.

$\Leftrightarrow -2B-C=0$ vì B, C không đồng thời bằng 0 nên chọn $B=1\Rightarrow C=-2$.

Vậy $(Q):y-2z=0$.

Câu 35. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-2z+8=0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P):

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$ **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$ **<u>D</u>.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P):

$\Rightarrow R=d(I;(P))=\dfrac{|-1+4-2+8|}{\sqrt{1+4+4}}=3$

Vậy: $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

Câu 36. Trong không gian **với** hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(0;1;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$?

A. $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $x^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=3$. **D.** $x^2+(y+1)^2+(z+3)^2=3$.

Lời giải

Ta có: Bán kính mặt cầu là: $R=d(I;(P))=\dfrac{|-1-6-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=3$.

Phương trình mặt cầu là: $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 37. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1;2;5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng
$(P): x-2y+2z+4=0$ là

<u>A</u>. $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-10z+21=0$. **B.** $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+10z+21=0$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-10z-21=0$. **D.** $(S): x^2+y^2+z^2+x-2y-5z-21=0$.

Lời giải

Ta có bán kính của mặt cầu (S) là $R=d(I;(P))=\dfrac{|-1-2.2+2.5+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;5)$ và bán kính của $R=3$ suy ra phương trình mặt cầu (S) là
$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y-10z+21=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 38. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$. Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với (P) có phương trình là:

<u>A</u>. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Lời giải

Theo giả thiết $R=d(I,(P))=\dfrac{|2.1-(-2)+2.3-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$

Vậy (S): $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 39. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x-2y-2z-1=0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=25$.

<u>C</u>. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$. **D.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Gọi S, r lần lượt là diện tích hình tròn và bán kính hình tròn.

Ta có: $S=\pi r^2=\pi \Rightarrow r=1$

$d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left|-3-2.0-2.1-1\right|}{\sqrt{1+4+4}}=2$

(S) có tâm $I(-3;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{d^2\left(I;(P)\right)+r^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

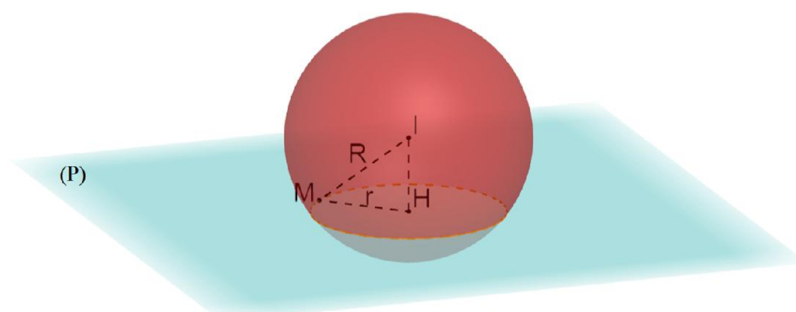
Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$.

Câu 40. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;\,2;\,-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Lời giải



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta có $IM=R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

$$IM^2=R^2=d^2_{(I;(P))}+r^2 \qquad (*)$$

Ta có: $d_{(I;(P))}=\dfrac{\left|-1-2.2+2.(-1)-2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3=IH$.

Từ $(*)\Rightarrow R^2=3^2+5^2=34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 41. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2z-2=0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S).

A. $2x+2y+z-4=0$. **B.** $6x+6y+3z-8=0$.

C. $2x+2y+z+2=0$ **D.** $6x+6y+3z-3=0$.

Lời giải

Chọn C

$(S): x^2+y^2+(z+1)^2=3 \Rightarrow$ mặt cầu tâm $I(0;0;-1)$, $R=\sqrt{3}$.

Do $\overrightarrow{IK}=(2;2;1), IK=3>R\Rightarrow$ K nằm ngoài mặt cầu. Suy ra từ K vẽ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu và khoảng cách từ K đến các tiếp điểm bằng nhau.

Gọi E là 1 tiếp điểm $\Rightarrow IE\perp EK\Rightarrow \Delta IKE$ vuông tại $E\Rightarrow$ $KE=\sqrt{IK^2-IE^2}=\sqrt{6}$ $\Rightarrow$ E thuộc mặt cầu tâm K bán kính $R'=\sqrt{6}$.

Tọa độ điểm E thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2z-2=0\\(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=6\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2z-2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=6$$

$\Leftrightarrow 4x+4y+2z+4=0\Leftrightarrow 2x+2y+z+2=0.$

Câu 42. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=17-m$.

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17-m>0\Leftrightarrow m<17$.

Khi đó $I(-1;2;3)$; $R=\sqrt{17-m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S).

Để mặt phẳng $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r=4$.

Ta có $R^2=d^2(I,(\beta))+r^2\Leftrightarrow 17-m=16+2\Leftrightarrow m=-1$ (TMĐK).

Câu 43. **(THPT Kinh Môn - HD - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha):x+4y+z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P), biết (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l}x-2y+z+3=0\\x-2y+z-21=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}3x+y+4z+1=0\\3x+y+4z-2=0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}4x-3y-z+5=0\\4x-3y-z-27=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z+3=0\\2x-y+2z-21=0\end{array}\right.$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$.

Vì mặt phẳng (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) nên có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$.

Mặt phẳng $(P):2x-y+2z+D=0$.

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I;(P))=R\Leftrightarrow\frac{|2.1+3+2.2+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4\Leftrightarrow|D+9|=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-21\\D=3\end{array}\right..$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z+3=0\\2x-y+2z-21=0\end{array}\right.$

Câu 44. **(SGD - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $x-2y-2z+1=0$. **B.** $-x+2y+2z+5=0$.
C. $x-2y-2z-23=0$. **<u>D</u>.** $-x+2y+2z+17=0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-3)$ và bán kính $R=2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Phương trình (Q) có dạng: $x-2y-2z+D=0$ $(D\neq -5)$.

(Q) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(I,(Q))=R \Leftrightarrow \dfrac{|1-2.(-2)-2.(-3)+D|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$

$\Leftrightarrow |D+11|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D+11=6\\D+11=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=-5\\D=-17\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện suy ra $D=-17$.

Vậy phương trình của (Q) là $x-2y-2z-17=0 \Leftrightarrow -x+2y+2z+17=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 45. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha):x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với $(\alpha),(P)$ song song với giá của vecto $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Lập phương trình mặt phẳng (P).

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$. **B.** $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.
<u>C</u>. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$. **D.** $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Lời giải

(S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$. Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;4;1)$.

Suy ra VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$.

Do đó (P) có dạng: $2x-y+2z+d=0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=4$

Hay $\dfrac{|2+3+4+d|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}d=-21\\d=3\end{array}\right.$.

Câu 46. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh – 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

<u>A</u>. 1 mặt phẳng. **B.** 2 mặt phẳng. **C.** 0 mặt phẳng. **D.** Vô số mặt phẳng.

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng là: $(P): Ax+By+Cz+D=0\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

Theo đề bài, mặt phẳng qua A,B nên ta có:

$\begin{cases}A+D=0\\2C+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2C\\D=-2C\end{cases}$. Vậy mặt phẳng (P) có dạng: $2Cx+By+Cz-2C=0$.

(S) có tâm $I(1,1,0)$ và $R=1$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d_{(\mathrm{I},(P))}=R\Leftrightarrow\dfrac{2C+B-2C}{\sqrt{5C^2+B^2}}=1\Leftrightarrow B^2=5C^2+B^2\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $A=D=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): y=0$.

Câu 47. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song với mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-7=0$. Biết $mp(Q)$ cắt mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-2y+z-7=0$.

C. $2x-2y+z-17=0$. **D.** $2x-2y+z+17=0$.

Lời giải

Do mặt phẳng $(Q)//(P): 2x-2y+z-7=0$, suy ra $(Q): 2x-2y+z+m=0,\quad (m\neq -7)$.

Ta có $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$ có tâm $I(0;2;-1)$ bán kính $R=5$.

Gọi $h=d_{(I;(Q))}=\dfrac{|2.0-2.2-1+m|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{|m-5|}{3}$.

Do (Q) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$, suy ra: $R^2=r^2+h^2$

$\Leftrightarrow 25=9+\dfrac{(m-5)^2}{9}\Leftrightarrow (m-5)^2=144\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-5=12\\m-5=-12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=17\\m=-7\ (\text{loai})\end{array}\right.$.

Vậy $mp(Q)$ có phương trình: $2x-2y+z+17=0$.

Dạng 3.2 Vị trí tương đối hai mặt

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *và* $(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

- (P) *cắt* $(Q)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\parallel(Q)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

Câu 48. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+3z-5=0$ và $(Q): nx-8y-6z+2=0$, với $m,n\in\mathbb{R}$. Xác định m, n để (P) song song với (Q).

A. $m=n=-4$. **B.** $m=4;n=-4$. **C.** $m=-4;n=4$. **D.** $m=n=4$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_1}(2;m;3)$

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_2}(n;-8;-6)$

Mặt phẳng $(P)//(Q) \Rightarrow \vec{n_1} = k\,\vec{n_2}\ (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = kn \\ m = -8k \\ 3 = -6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ m = 4 \\ n = -4 \end{cases}$

Nên chọn đáp án **B**

Câu 49. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và $(Q): mx+y-2z+1=0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=-6$ **D.** $m=6$

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$1.m-2.1+2.(-2)=0 \Leftrightarrow m=6$

Câu 50. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, tìm tập hợp các điểm cách đều cặp mặt phẳng sau đây: $4x-y-2z-3=0$, $4x-y-2z-5=0$.

A. $4x-y-2z-6=0$. **B.** $4x-y-2z-4=0$. **C.** $4x-y-2z-1=0$. **D.** $4x-y-2z-2=0$.

Lời giải

Gọi điểm $A(0;-3;0) \in 4x-y-2z-3=0\ (\alpha)$ và $B(0;-5;0) \in 4x-y-2z-5=0\ (\beta)$.

Mặt phẳng cách đều hai mp trên có dạng: $4x-y-2z+m=0\ (\gamma)$.

Để mp (γ) cách đều hai mp trên thì $d(A;(\beta)) = 2d(A;(\gamma)) \Leftrightarrow |m+3|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-4 \end{array}\right.$.

Mặt khác điểm hai điểm A, B phải nằm về hai phía của mp (γ).

Do đó:

+) Với $m=-2$ ta có: $(4.0+3-2.0-2)(4.0+5-2.0-2)>0$ nên $A;B$ cùng phía.

+) Với $m=-4$ ta có: $(4.0+3-2.0-4)(4.0+5-2.0-4)<0$ nên $A;B$ khác phía.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $4x-y-2z-4=0\ (\gamma)$.

Câu 51. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $x-2y-z+3=0$; (Q): $2x+y+z-1=0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1;1;1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q); phương trình của (R): $m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$. Khi đó giá trị của m là

A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** -3.

Lời giải

Vì (R): $m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$ đi qua điểm $M(1;1;1)$ nên ta có:

$m(1-2.1-1+3)+(2.1+1+1-1)=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Câu 52. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y+z-2=0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-2=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $x+y+z-2=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;1;1)$.

Mặt phẳng $(Q): x-y-z-2=0$ có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;-1)$.

Mà $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=2-1-1=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q} \Rightarrow (P)\perp(Q)$.

Vậy mặt phẳng $x-y-z-2=0$ là mặt phẳng cần tìm.

Câu 53. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian *Oxyz*, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $b.c\neq 0$ và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Mối liên hệ giữa b,c để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $2b=c$. **B.** $b=2c$. **C.** $b=c$. **D.** $b=3c$.

Lời giải

• Phương trình (ABC): $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow (ABC)$ có VTPT: $\vec{n}=\left(1;\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$.

• Phương trình $(P): y-z+1=0 \Rightarrow (P)$ có VTPT: $\vec{n}'=(0;1;-1)$.

• $(ABC)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}'=0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0 \Leftrightarrow b=c$.

Câu 54. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x+y-2z+5=0$ và $(Q): 4x+(2-m)y+mz-3=0$, m là tham số thực. Tìm tham số m sao cho mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $m=-3$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;-2)$.

Mặt phẳng (Q) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(4;2-m;m)$.

Ta có: $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{n_{(Q)}} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}=0 \Leftrightarrow 4.1+2-m-2m=0 \Leftrightarrow m=2$.

Nên $m=2$.

Câu 55. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax-y+2z+b=0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x-y-z+1=0$ và $(Q): x+2y+z-1=0$. Tính $a+4b$.

A. -16. **B.** -8. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(P),(Q)$ ta lấy lần lượt 2 điểm A,B như sau:

Lấy $A(x;y;1)\in\Delta$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow A(0;0;1)$.

Lấy $B(-1;y;z)\in\Delta$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y+z=0 \\ 2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow B(-1;2;-2)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $A,B \in (\alpha)$. Do đó ta có: $\begin{cases} 2+b=0 \\ -a+b-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=-2 \end{cases}$.

Vậy $a+4b=-8+2.(-2)=-16.$

Câu 56. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z-1=0$ và $(\beta): 2x+4y-mz-2=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A. $m=1$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vec tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-1)$, vec tơ pháp tuyến của (β) là $\overrightarrow{n_2}=(2;4;-m)$.

Hai mặt phẳng (α) và (β) song song khi $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{-m}{-1}\neq\frac{-2}{-1}$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 57. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-2019)** Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z-1=0$, mặt phẳng nào dưới đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3.

A. $(Q): x+2y-2z+8=0$. **B.** $(Q): x+2y-2z+5=0$.

C. $(Q): x+2y-2z+1=0$. **D.** $(Q): x+2y-2z+2=0$.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có: $(P): x+2y-2z-1=0$, chọn $A(1;0;0)\in(P)$.

+ Xét đáp án A, ta có $d\left(A;(Q)\right)=\frac{|1+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$. Vậy đáp án A thoả mãn.

Câu 58. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q): x+y+z+3=0$, cách điểm $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a;b;c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a+b+c<-2$?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Ta có mặt phẳng cần tìm là $(P): x+y+z+d=0$ với $d\neq 3$.

Mặt phẳng (P) cách điểm $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|6+d|}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=3 \\ d=-15 \end{array}\right.$ đối chiếu điều kiện suy ra $d=-15$. Khi đó $(P): x+y+z-15=0$.

Theo giả thiết $X(a;b;c)\in(P) \Leftrightarrow a+b+c=15>-2$ không thỏa mãn $a+b+c<-2$.

Vậy không tồn tại mặt phẳng (P).

Nguyễn Bảo Vương

Câu 59. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1): 3x-y+4z+2=0$ và $(Q_2): 3x-y+4z+8=0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) là:

A. $(P): 3x-y+4z+10=0$.
B. $(P): 3x-y+4z+5=0$.
C. $(P): 3x-y+4z-10=0$.
D. $(P): 3x-y+4z-5=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có dạng $3x-y+4z+D=0$.

Lấy $M(0;2;0)\in(Q_1)$ và $N(0;8;0)\in(Q_2)$. Do $(Q_1)//(Q_2)$ trung điểm $I(0;5;0)$ của MN phải thuộc vào (P) nên ta tìm được $D=5$.

Vậy $(P): 3x-y+4z+5=0$.

Câu 60. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Gọi m,n là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m): x-my+nz+2=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x-y-6z+3=0$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$.
B. $m+n=2$.
C. $m+n=1$.
D. $m+n=3$.

Lời giải

+ $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(m;2;n)$.

$(Q_m): x-my+nz+2=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}(1;-m;n)$.

$(\alpha): 4x-y-6z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}(4;-1;-6)$.

+ Giao tuyến của hai mặt phẳng (P_m) và (Q_m) vuông góc với mặt phẳng (α) nên

$$\begin{cases}(P_m)\perp(\alpha)\\(Q_m)\perp(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\\\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\\\overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-2-6n=0\\4+m-6n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}.$$

Vậy $m+n=3$.

Câu 61. **(Chuyên KHTN 2019)** Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

A. 7.
B. -9.
C. -7.
D. 9.

Lời giải

Cách 1

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O.

Vì (α) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+b+c+d=0\\-2b+2c+d=0\end{cases}\quad(*)$$

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại $M(-d;0;0), N\left(0;\frac{-d}{b};0\right)$.

Vì M,N cách đều O nên $OM=ON$. Suy ra: $|d|=\left|\frac{d}{b}\right|$.

Nếu $d=0$ thì chỉ tồn tại duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán (mặt phẳng này sẽ đi qua điểm O).

Do đó để tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì: $|d|=\left|\frac{d}{b}\right|\Leftrightarrow b=\pm 1$.

• Với $b=1$, $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}c+d=-2\\2c+d=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=4\\d=-6\end{cases}$. Ta được mặt phẳng (P): $x+y+4z-6=0$

• Với $b=-1$, $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}c+d=0\\2c+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2\\d=2\end{cases}$. Ta được mặt phẳng (Q): $x-y-2z+2=0$

Vậy: $b_1b_2+c_1c_2=1.(-1)+4.(-2)=-9$.

Cách 2

$\overrightarrow{AB}=(-1;-3;1)$

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O lần lượt tại M,N. Vì M,N cách đều O nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $M(a;0;0),N(0;a;0)$ với $a\neq 0$ khi đó (α) chính là (P). Ta có $\overrightarrow{MN}=(-a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_1}=(-1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_1}\right]=(-1;-1;-4)$,

suy ra $(P): x+y+4z+d_1=0$

TH2: $M(-a;0;0),N(0;a;0)$ với $a\neq 0$ khi đó (α) chính là (Q). Ta có $\overrightarrow{MN}=(a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_2}=(1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_2}\right]=(-1;1;2)$,

suy ra $(Q): x-y-2z+d_2=0$

Vậy: $b_1b_2+c_1c_2=1.(-1)+4.(-2)=-9$.

Câu 62. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $3x+2y+z+14=0$. **B.** $2x+y+3z+9=0$. **C.** $3x+2y+z-14=0$. **D.** $2x+y+z-9=0$.

Lời giải

Gọi $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\,(a.b.c\neq 0)$

Vì (P) qua M nên $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1\quad(1)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(a-3;-2;-1);\overrightarrow{MB}=(-3;b-2;-1);\overrightarrow{BC}=(0;-b;c);\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Vì M là trực tâm của tam giác ABC nên: $\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=c\\3a=c\end{cases}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=\frac{14}{3};b=\frac{14}{2};c=14$. Khi đó phương trình (P): $3x+2y+z-14=0$

Vậy mặt phẳng song song với (P) là: $3x+2y+z+14=0$.

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI
☞**https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing**

Theo dõi Fanpage: Nguyễn Bảo Vương ☞ https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Hoặc Facebook: Nguyễn Vương ☞ https://www.facebook.com/phong.baovuong

Tham gia ngay: Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN) ☞ https://www.facebook.com/groups/703546230477890/

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương
☞ **https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber**

Tải nhiều tài liệu hơn tại: http://diendangiaovientoan.vn/

ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!

Nguyễn Bảo Vương