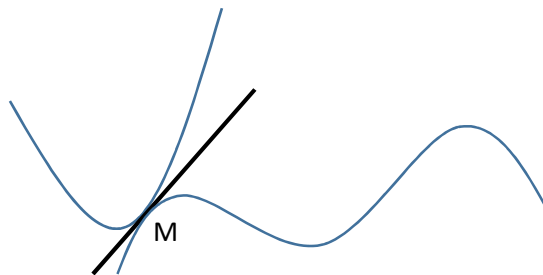


ĐIỀU KIỆN TIẾP XÚC CỦA HAI ĐỒ THỊ

1) Định nghĩa : Cho hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$

Hai đồ thị $(C), (C')$ gọi là tiếp xúc nhau tại điểm M nếu chúng cùng đi qua M và tại M hai đồ thị có chung tiếp tuyến.



2) Điều kiện tiếp xúc :

* $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

* Nghiệm của hệ pt trên là hoành độ của tiếp điểm.

* Đường thẳng $(d): y = kx + b$ là tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm

3) BÀI TẬP :

Bài 1. Định tham số m để hai đồ thị sau tiếp xúc nhau :

a) $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}, (d): y = mx + 2$

b) $(C): y = x^3 - mx^3 + mx - 2, (d): y = mx + 2$

c) $(C): y = x^3 + (m+1)x + 1, (d): y = x + 1$

d) $(C): y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}, (d): y = mx + \frac{3}{2}$

e) $(C): y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x, (d): y = m(x-3)$

f) $(C): y = x^4 - 5x^2 + 4, (d): y = x^2 + m$

g) $(C): y = x^3 - (m+1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - 2m(2m-1); (d): y = -49x + 98$

Bài 2. Tìm tham số m để đồ thị hàm số sau tiếp xúc với trục hoành :

a) $(C): y = x^3 - 1 - m(x-1)$

b) $(C): y = x^3 - (2m+1)x^2 + (6m-5)x - 3$

c) $(C): y = 2mx^3 - (4m^2 + 1)x^2 + 4m^2$

c) $(C): y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m-1)$

Bài 3. Tìm k để $(P): y = 6x^2 - 3$ tiếp xúc với đồ thị $(C): y = x^4 - 8x^2 + 4 - k$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của $(P), (C)$ tại tiếp điểm.

Bài 4. Chứng minh hai đồ thị sau tiếp xúc nhau: $y = f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x$ và $y = g(x) = \frac{3x}{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại tiếp điểm.

Bài 5. Tìm trên trục hoành các điểm mà từ đó có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến với $(C): y = \frac{3x+5}{2x+2}$

Bài 6. Tìm trên trục tung các điểm mà từ đó có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến với $(C): y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Bài 7. Tìm trên trục hoành các điểm mà từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến với đồ thị:

$$\text{a)} (C): y = \frac{x^2 - 9}{x + 1}$$

$$\text{b)} (C): y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$$

Bài 8. Tìm trên trục tung các điểm mà từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$

Bài 9. Tìm trên trục tung các điểm mà từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị

$$\text{a)} (C): y = x^4 - x^2 - 2$$

$$\text{b)} (C): y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$$

Bài 10. Tìm trên đường thẳng $y = 2$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị

$$(C): y = -x^3 + 3x^2 - 2$$

Bài 11. Tìm trên trục hoành các điểm mà từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = x^3 + 3x^2$ trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

Bài 12. Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị

$$(C): y = x^3 - 3x^2 + 2 \text{ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau.}$$

Bài 13. Tìm trên đường thẳng $x = 1$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị

$$(C): y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \text{ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau.}$$

Bài 14. Tìm tập hợp những điểm M trong mặt phẳng tọa độ qua đó vẽ được hai tiếp tuyến với (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau

$$\text{a)} (C): y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\text{b)} (C): y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$\text{c)} (C): y = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

Bài 15. (HSG12-2021) Cho hàm số $y = x^2 + x + 2021$ có đồ thị (P) . Tìm tập hợp những điểm M trong mặt phẳng tọa độ mà từ M có thể kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến (P) .

Bài 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Xét 3 điểm A, B, C thẳng hàng và thuộc (C) . Gọi A', B', C' là giao điểm của (C) với tiếp tuyến của (C) tại A, B, C . Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

Bài 17. Tìm trên đường thẳng $y = 7$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến tạo với nhau một góc

$$45^\circ \text{ tới đồ thị } (C): y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

Bài 18. Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Tìm trên đường thẳng $(d): y = 9x - 14$ các điểm M qua đó kẻ được :

a) đúng một tiếp tuyến tới (C)

b) hai tiếp tuyến tới (C)

c) ba tiếp tuyến tới (C)

Bài 19. Định tham số m để từ gốc tọa độ O ta có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị

$$(C): y = \frac{2x^2 + x + m}{x + 1}$$

Bài 20. Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ và điểm $M(m; -2)$. Tìm m để qua M ta kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) .

Bài 21. Cho đồ thị $(C): y = \frac{-x + 2}{x - 1}$ và điểm $A(a; 1)$. Biết $a = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản là giá trị để qua A có duy nhất một tiếp tuyến đến (C) . Tìm $m + n$

Bài 22. (*) Tìm các đường thẳng cố định luôn tiếp xúc với họ đồ thị $(C_m): y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$ với mọi giá trị thực $m \neq 0$.

Bài 23. (*) Tìm các đường thẳng cố định luôn tiếp xúc với họ đồ thị $(C_m): y = \frac{(m-2)x - m^2 + 2m - 4}{x-m}$ với mọi giá trị thực m .

Bài 24. Chứng minh rằng $\forall m \neq 0$, họ đồ thị (C_m) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định:

$$\text{a) } (C_m): y = \frac{(m+1)x + m}{x+m} \quad \text{b) } (C_m): y = \frac{-m(x+1)x + x + 2}{m(x+1) - 1}$$

Bài 25. (HSG12-2021) Chứng minh rằng họ đường cong (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định với $(C_m): y = x^3 - 3(m-2)x^2 + 3(m^2 - 4m + 3)x - m^3 + 6m^2 - 9m + 2$

ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐỒ THỊ

1) Cho họ đồ thị $(C_m): y = f(x; m)$ phụ thuộc vào tham số m .

* Điểm $M(x_0; y_0)$ gọi là điểm cố định của họ đồ thị $(C_m) \Leftrightarrow M(x_0; y_0) \in (C_m), \forall m \Leftrightarrow y_0 = f(x_0; m), \forall m$ (*)

* Biến đổi phương trình (*) về biến là m , sử dụng điều kiện phương trình (*) nghiệm đúng $\forall m$

$$\diamond Am + B = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\diamond Am^2 + Bm + C = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

* Số nghiệm của hệ (I),(II) là số điểm cố định của họ đồ thị (C_m) .

* Nếu hệ (I),(II) vô nghiệm thì họ đồ thị (C_m) không có điểm cố định.

2) BÀI TẬP :

Bài 1. Tìm các điểm cố định (nếu có) của họ đồ thị sau :

a) $y = x^3 - (m+1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - 2m(2m-1)$

b) $y = x^4 + mx^2 - (m+1)$

c) $y = \frac{mx+4}{x+m}$

d) $y = \frac{mx^2 - (m-1)x - 1}{x-m}$

e) $y = \frac{x^2 - 2(m+2)x + 6m + 5}{x-2}$

Bài 2. Chứng minh rằng họ đồ thị $(C_m): y = (m+2)x^3 - 3(m+2)x^2 - 4x + 2m - 1$ luôn qua 3 điểm cố định thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng qua 3 điểm cố định đó.

Bài 3. Cho hàm số $y = (m+1)x^3 - (2m+1)x - m + 1$ có đồ thị (C_m) .

a) Chứng minh rằng (C_m) luôn qua 3 điểm cố định A, B, C thẳng hàng.

b) Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng qua A, B, C ?

ĐS: a) $y = x + 2$ b) 20 giá trị

Bài 4. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m + 1)x + 3 - m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho khoảng cách từ điểm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)$ đến đường thẳng AB đạt GTLN.

Bài 5. Chứng minh rằng họ đồ thị $(C_m): y = \frac{(1-m)x+m}{x+m}$ luôn tiếp xúc nhau tại một điểm cố định. Viết phương trình tiếp tuyến chung của họ (C_m) tại điểm cố định đó.