TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Tính toán liên quan đến logarit dùng đẳng thức

◆ Định nghĩa logarit:

Cho hai số thực dương a,b với $a\neq 1,\ \alpha=\log_a b \Leftrightarrow a^\alpha=b$:

◆ Các tính chất logarit: Cho ba số thực dương a,b,c với $0<a,b,c\neq 1$

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_a a}$; $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$; $\log_a b-\log_a c=\dfrac{\log_a b}{\log_a c}$;

$\log_a b.\log_b c=\log_a c$.

◆ Phương trình mũ cơ bản nhất $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b\quad \left(0<a\neq 1;b>0\right)$.

◆ Cách giải phương trình mũ có dạng $\alpha_1 a^{2x}+\alpha_2\left(ab\right)^x+\alpha_3 b^{2x}=0$ trong đó $\alpha_i\left(i=1,2,3\right)$ là hệ số, cơ số $0<a,b\neq 1$

B1: Biến đổi phương trình về dạng: $2\alpha_1\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x}+\alpha_2\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+\alpha_3=0\quad (*)$.

B2: Đặt ẩn phụ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=t,t>0$, phương trình $(*)$ trở thành $\alpha_1 t^2+\alpha_2 t+\alpha_3=0$.

B3: Giải tìm t thỏa mãn $t>0$.

B4: Giải phương trình mũ cơ bản $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=t$. Tìm được x.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(2x+y\right)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}}2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(2x+y\right)$. Khi đó $\begin{cases}x=9^t\\ y=6^t\\ 2x+y=4^t\end{cases}\Rightarrow 2.9^t+6^t=4^t$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{9}{4}\right)^t+\left(\frac{3}{2}\right)^t-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^t=-1\\ \left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{1}{2}.$$

Do đó: $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{9}{6}\right)^t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** các số thực a, b, c thỏa mãn $(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=8$ và $2^a=3^b=6^{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a=-c\log_2 6$ và $b=-c\log_3 6$. Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$. Hay $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

Hay $ab+bc+ca=0$. Suy ra $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$ nên $(a+b+c)^2-4(a+b+c)+4=0$. Vậy $a+b+c=2$.

Câu 3. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho $4^x+4^{-x}=7$. Khi đó biểu thức $P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{8+4.2^x+4.2^{-x}}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng

A. 10. **B.** -8. **C.** 8. **D.** -10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4^x+4^{-x}=7\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+2.2^x.2^{-x}+\left(2^{-x}\right)^2-2=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=9\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=3$.

Do đó $P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{8+4.2^x+4.2^{-x}}=\frac{5-\left(2^x+2^{-x}\right)}{8+4.\left(2^x+2^{-x}\right)}=\frac{5-3}{8+4.3}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

Suy ra $a=1,b=10$.

Vậy $a.b=10$.

Câu 4. **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a=9^b=6^c$. Khi đó $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=4^a=9^b=6^c\Rightarrow\begin{cases}a=\log_4 t\\ b=\log_9 t\\ c=\log_6 t\end{cases}$.

Khi đó $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{\log_6 t}{\log_4 t}+\frac{\log_6 t}{\log_9 t}=\log_6 t.\log_t 4+\log_6 t.\log_t 9=\log_6 t\left(\log_t 4+\log_t 9\right)$

$=\log_6 t.\log_t 36=\log_6 36=\log_6 6^2=2$.

Câu 5. Biết $a=\log_{30}10$, $b=\log_{30}150$ và $\log_{2000}15000=\frac{x_1a+y_1b+z_1}{x_2a+y_2b+z_2}$ với $x_1;y_1;z_1;x_2;y_2;z_2$ là các số nguyên, tính $S=\frac{x_1}{x_2}$.

A. $S=\frac{1}{2}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{2000} 15000 = \dfrac{\log_{30} 15000}{\log_{30} 2000} = \dfrac{\log_{30} 150 + 2\log_{30} 10}{\log_{30} 2 + 3\log_{30} 10}$ (1)

Ta có $a = \log_{30} 10 = \log_{30} 5 + \log_{30} 2 \Rightarrow \log_{30} 2 = a - \log_{30} 5$ (2)

$b = \log_{30} 150 = 1 + \log_{30} 5 \Rightarrow \log_{30} 5 = b - 1$ thay vào (2) ta được $\log_{30} 2 = a - b + 1$

Ta có $\log_{2000} 1500 = \dfrac{b + 2a}{a - b + 1 + 3a} = \dfrac{2a + b}{4a - b + 1}$

Suy ra $S = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 6. Cho các số thực dương x, y khác 1 và thỏa mãn $\begin{cases} \log_x y = \log_y x \\ \log_x (x - y) = \log_y (x + y) \end{cases}$.

Giá trị của $x^2 + xy - y^2$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x > y$.

Ta có $\begin{cases} \log_x y = \log_y x \\ \log_x (x - y) = \log_y (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = \dfrac{1}{\log_x y} \\ \log_x (x - y) = \log_y (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ x = y \end{array}\right. \\ \log_x (x - y) = \log_{x^{-1}} (x + y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \log_x (x - y) + \log_x (x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \log_x \left(x^2 - y^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + xy - y^2 = 2$.

Câu 7. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log\sqrt{a} + \log\sqrt{b} = 100$ và $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương. Tính $P = ab$.

A. 10^{164}. **B.** 10^{100}. **C.** 10^{200}. **D.** 10^{144}.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log\sqrt{a} + \log\sqrt{b} = 100$

$\Leftrightarrow \log a + \log b + 2\sqrt{\log a} + 2\sqrt{\log b} = 200 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\log a} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{\log b} + 1\right)^2 = 202 = 81 + 121$ $(*)$

Mà $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương nên

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\log a} + 1 = 9 \\ \sqrt{\log b} + 1 = 11 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\log a} + 1 = 11 \\ \sqrt{\log b} + 1 = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log a = 64 \\ \log b = 100 \end{cases} \\ \begin{cases} \log a = 100 \\ \log b = 64 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 10^{64} \\ b = 10^{100} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 10^{100} \\ b = 10^{64} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy: $P=ab=10^{64}.10^{100}=10^{164}$.

Câu 8. Cho $\log_9 5=a$; $\log_4 7=b$; $\log_2 3=c$ .Biết $\log_{24}175=\dfrac{mb+nac}{pc+q}$.Tính $A=m+2n+3p+4q$

A. 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{24}175=\log_{24}7.5^2=\log_{24}7+2\log_{24}5=\dfrac{1}{\log_7 24}+\dfrac{2}{\log_5 24}=$

$$\frac{1}{\log_7 3+\log_7 2^3}+\frac{2}{\log_5 3+\log_5 2^3}=\frac{1}{\dfrac{1}{\log_3 7}+\dfrac{3}{\log_2 7}}+\frac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5}+\dfrac{3}{\log_2 5}}=$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\log_2 7.\log_3 2}+\dfrac{3}{\log_2 7}}+\frac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5}+\dfrac{3}{\log_2 3.\log_3 5}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2b.\dfrac{1}{c}}+\dfrac{3}{2b}}+\frac{2}{\dfrac{1}{2a}+\dfrac{3}{c.2a}}=$$

$$\frac{1}{\dfrac{c}{2b}+\dfrac{3}{2b}}+\frac{2}{\dfrac{c}{2ac}+\dfrac{3}{2ac}}=\frac{2b}{c+3}+\frac{4ac}{c+3}=\frac{2b+4ac}{c+3}.$$

$A=m+2n+3p+4q=2+8+3+12=25.$

Câu 9. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2-6y^2=xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

A. $M=\dfrac{1}{4}$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\dfrac{1}{2}$. **D.** $M=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2-6y^2=xy\Leftrightarrow x^2-xy-6y^2=0\,(*)$.

Do x, y là các số thực dương lớn hơn 1 nên ta chia cả 2 vế của $(*)$ cho y^2 ta

được $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=3\\ \dfrac{x}{y}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3y\,(n)\\ x=-2y\,(l)\end{array}\right.$

Vậy $x=3y$ (1).

Mặt khác $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}=\dfrac{\log_{12}12xy}{\log_{12}(x+3y)^2}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có $M=\dfrac{\log_{12}36y^2}{\log_{12}36y^2}=1$.

Câu 10. Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với a, $b\in\mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log e))=2$. Tính $f(\log(\ln 10))$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x_0=\log(\log e)$

Có: $f(x_0)=a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)+b\sin x_0+6=2$

Ta có $f(\log(\ln 10))=f\left(\log\left(\dfrac{1}{\log e}\right)\right)=f(-\log(\log e))=f(-x_0)$

$f(-x_0)=a\ln\left(\sqrt{x_0^2+1}-x_0\right)+b\sin(-x_0)+6=-a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)-b\sin x_0+6$

$=-\left[a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)+b\sin x_0+6\right]+12=-f(x_0)+12=10$.

Câu 11. Cho $9^x+9^{-x}=14$ và $\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a.b$.

A. $P=10$. **B.** $P=-45$. **C.** $P=-10$. **D.** $P=45$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$9^x+9^{-x}=14\Leftrightarrow 3^{2x}+2.3^{2x}.3^{-2x}+3^{-2x}=16$

$\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=16\Leftrightarrow 3^x+3^{-x}=4$.

$\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3.3^x-3.3^{-x}}=\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3.\left(3^x+3^{-x}\right)}$

$=\dfrac{6+3.4}{2-3.4}=-\dfrac{18}{10}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=-\dfrac{9}{5}\Rightarrow ab=-45$.

Câu 12. Cho hai số thực dương a,b thỏa $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. **C.** $\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$. **D.** $\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$.

Lờigiải

Chọn D

Đặt $t=\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$.

$$\Rightarrow\begin{cases}a=4^t\\ b=6^t\\ a+b=9^t\end{cases}\Rightarrow 4^t+6^t=9^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}+\left(\frac{2}{3}\right)^t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{-1+\sqrt5}{2}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{-1-\sqrt5}{2}(L)\end{array}\right..$$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4^t}{6^t}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$.

Câu 13. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_6 x=\log_9 y=\log_4(2x+2y)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$?

A. $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$. **C.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$. **D.** $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

Lờigiải

Chọn B

Giả sử $\log_6 x=\log_9 y=\log_4\left(2x+2y\right)=t$. Ta có: $\begin{cases} x=6^t & (1)\\ y=9^t & (2)\\ 2x+2y=4^t & (3)\end{cases}$.

Khi đó $\frac{x}{y}=\frac{6^t}{9^t}=\left(\frac{2}{3}\right)^t>0$.

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2.6^t+2.9^t=4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t}-2.\left(\frac{2}{3}\right)^t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(\frac{2}{3}\right)^t=1+\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}-1} & (\text{thoa})\\ \left(\frac{2}{3}\right)^t=1-\sqrt{3} & (\text{loai})\end{array}\right..$$

Câu 14. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\frac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương, tính $a+b$.

A. $a+b=14$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=21$. **D.** $a+b=34$.

Lờigiải

Chọn D

Ta có $\log_{25}\frac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\frac{x+y}{4}\Rightarrow\begin{cases} y=15^{\log_{25}\frac{x}{2}}\\ \log_9\frac{x+15^{\log_{25}\frac{x}{2}}}{4}=\log_{25}\frac{x}{2}\end{cases}$

Đặt $t=\log_{25}\frac{x}{2}\Rightarrow x=2.25^t$, ta được $2.25^t+15^t=4.9^t\Leftrightarrow 2\left(\frac{5}{3}\right)^{2t}+\left(\frac{5}{3}\right)^t=4$

$\Rightarrow t=\log_{\frac{5}{3}}\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{2.25^t}{15^t}=2.\left(\frac{5}{3}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Do đó $a=1$, $b=33$ nên $a+b=34$.

Câu 15. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn $\log_3\left(2u_5-63\right)=2\log_4\left(u_n-8n+8\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n}<\frac{148}{75}$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lờigiải

Chọn A

Ta có $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\log_3\left(2u_5-63\right)=2\log_4\left(u_n-8n+8\right)\Leftrightarrow\log_3\left(2u_5-63\right)=\log_2\left(u_n-8n+8\right)$.

Đặt $t=\log_3\left(2u_5-63\right)\Rightarrow\begin{cases}2u_5-63=3^t\\ u_n-8n+8=2^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2u_5-63=3^t\\ u_5-32=2^t\end{cases}$ (với $n=5$)

$\Rightarrow 1=3^t-2.2^t\Rightarrow t=2\Rightarrow u_n=8n-4$. Khi đó $u_5=36$

Với $u_n = 8n-4$ và $u_5 = 36$, ta có:

$\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2.36 - 63) = 2\log_4(8n - 4 - 8n + 8)$

$\Leftrightarrow \log_3 9 = 2\log_4 4 \Leftrightarrow 2 = 2$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = 8(n+1) - 4 - (8n-4) = 8$. Vậy (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 4$, công sai $d = 8$.

$\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{(u_1 + u_n).n}{2} = 4n^2$.

Do đó $\dfrac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n} = \dfrac{(8n-4).16n^2}{(16n-4).4n^2} < \dfrac{148}{75} \Rightarrow n < 19$.

Dạng 2. Bài toán tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất mũ – loagrit (sử dụng phương pháp bất đẳng thức – biến đổi)

① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)

- $\forall a,b \ge 0$, thì $\boxed{a + b \ge 2\sqrt{ab}}$. Dấu "=" xảy ra khi: $a = b$.
- $\forall a,b,c \ge 0$, thì $\boxed{a + b + c \ge 3.\sqrt[3]{abc}}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $a.b \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$.

② Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiaxcôpki)

- $\forall a,b,x,y,$ thì: $\boxed{(a.x + b.y)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$. Dấu "=" khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.
- $\forall a,\text{b},\text{c},\text{x},\text{y},\text{z}$ thì: $\boxed{(a.x + b.y + c.z)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $|a.x + b.y| \le \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Hệ quả. Nếu a,b,c là các số thực và x,y,z là các số dương thì:

$\boxed{\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y}}$ và $\boxed{\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}}$: bất đẳng thức cộng mẫu số.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét các số thực dương a,b,x,y thoả mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $\left[2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $\left[\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a,b > 1$ nên $t > 0$.

Ta có: $a^x = \sqrt{ab} \Rightarrow x = \log_a \sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(1 + \log_a b) = \dfrac{1}{2}(1+t)$.

$b^y = \sqrt{ab} \Rightarrow y = \log_b \sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(1 + \log_b a) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$.

Vậy $P = x + 2y = \dfrac{1}{2}(1+t) + 1 + \dfrac{1}{t} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{t} \ge \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t}{2}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow b=a^{\sqrt{2}}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ bằng $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ thuộc nửa khoảng $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} (1)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$9^t=(x+y)^2 \le 2\left(x^2+y^2\right)=4^t \Rightarrow \frac{9^t}{4^t} \le 2 \Rightarrow t \le \log_{\frac{9}{2}} 2$

Như vậy,

$x^2+y^2=4^t \Rightarrow x^2 \le 4^t \le 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 1,89 \Rightarrow x \in \{-1;0;1\}$

➢ Trường hợp 1: $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=1 \end{cases}$.

➢ Trường hợp 2: $x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$.

➢ Trường hợp 3: $x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2+1=4^t \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ y=3^t+1 \ge 2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 \ge 5$ mâu thuẫn với

$x^2+y^2 \le 4^{\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}$ suy ra loại $x=-1$.

Vậy có hai giá trị $x \in \{0;1\}$

Cách 2:

Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} (1)$.

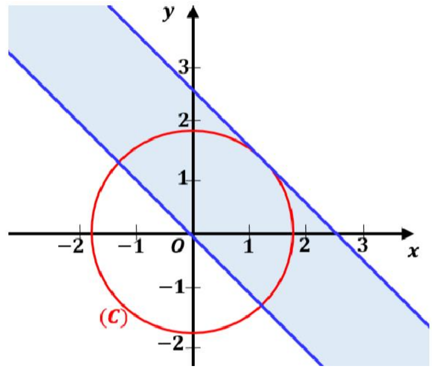
Suy ra x, y là tọa độ của điểm M với M thuộc đường thẳng $d: x+y=3^t$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=4^t$.

Để tồn tại y tức tồn tại M nên $d, (C)$ có điểm chung, suy ra $d(O,d) \le R$ trong đó

$O(0;0)$, $R=2^t$ nên $\frac{\left|-3^t\right|}{\sqrt{2}} \le 2^t \Leftrightarrow t \le \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2}$.

Khi đó $(1) \Rightarrow \begin{cases} 0<x+y \le 3^{\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \\ x^2+y^2 \le 4^{\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \end{cases}$.

Minh họa quỹ tích điểm M như hình vẽ sau



Ta thấy có 3 giá trị $x \in \mathbb{Z}$ có thể thỏa mãn là $x=-1; x=0; x=1$.

Thử lại:

➢ Trường hợp 1: $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=1 \end{cases}$.

➢ Trường hợp 2: $x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$.

➢ Trường hợp 3: $x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2+1=4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y=3^t+1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 \geq 5$ mâu thuẫn với $x^2+y^2 \leq 4^{\frac{\log_3 \sqrt{2}}{2}}$ suy ra loại $x=-1$.

Câu 3. **(Mã 103 2018)** Cho $a>0, b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 6 **B.** $\frac{27}{4}$ **C.** $\frac{20}{3}$ **D.** 9

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)>0$ và $\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)>0$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right) \geq 2\sqrt{\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right).\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)}$

$=2\sqrt{\log_{8ab+1}\left(16a^2+b^2+1\right)}$.

Mặt khác $16a^2+b^2+1=\left(4a-b\right)^2+8ab+1 \geq 8ab+1 \left(\forall a,b>0\right)$,

suy ra $2\sqrt{\log_{8ab+1}\left(16a^2+b^2+1\right)} \geq 2$.

Khi đó $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{4a+5b+1}\left(8ab+1\right)=\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right) \\ b=4a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{24a+1}\left(32a^2+1\right)=1 \\ b=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32a^2=24a \\ b=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}$.

Vậy $a+2b=\frac{3}{4}+6=\frac{27}{4}$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{65}{8}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Nhận xét: Giá trị của x, y thỏa mãn phương trình $2x+y\cdot 4^{x+y-1}=3(1)$ sẽ làm cho biểu thức P nhỏ nhất. Đặt $a=x+y$, từ (1) ta được phương trình

$$4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}=0.$$

Nhận thấy $y=4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}$ là hàm số đồng biến theo biến a, nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $a=\frac{3}{2}\Rightarrow x+y=\frac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P=(x+y)^2+4(x+y)+2\left(y-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$. Vậy $P_{\min}=\frac{65}{8}$.

Cách 2:

Với mọi x, y không âm ta có

$$2x+y.4^{x+y-1}\geq 3\Leftrightarrow x+y.4^{x+y-\frac{3}{2}}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)\geq 0\ (1)$$

Nếu $x+y-\frac{3}{2}<0$ thì $\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)<0+y.\left(4^0-1\right)=0$ (vô lí)

Vậy $x+y\geq\frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$$P=x^2+y^2+4x+6y=(x+3)^2+(y+2)^2-13$$

$$\geq\frac{1}{2}(x+y+5)^2-13\geq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2-13=\frac{65}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x+y=\frac{3}{2}\\x+3=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{5}{4}\\x=\frac{1}{4}\end{cases}$.

Vậy $\min P=\frac{65}{8}$.

Câu 5. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. -2. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

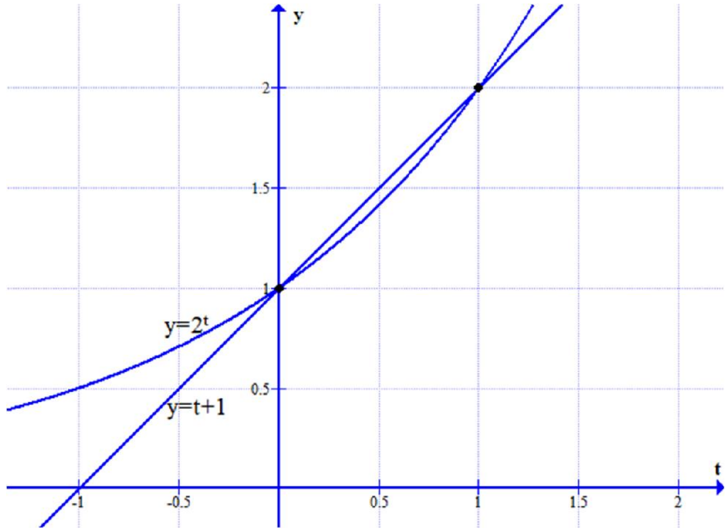
Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+1-2x} \le x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2} \le (x-1)^2+y^2+1$. Đặt $t=(x-1)^2+y^2\ (t\ge 0)$, ta được BPT: $2^t \le t+1$.

Đồ thị hàm số $y=2^t$ và đồ thị hàm số $y=t+1$ như sau:



Từ đồ thị suy ra $2^t \le t+1 \Leftrightarrow 0\le t\le 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$. Do đó tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn thuộc hình tròn (C) tâm $I(1;0), R=1$.

Ta có $P=\dfrac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$ là phương trình của đường thẳng d.

Do d và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d\left(I,(d)\right)\le R \Leftrightarrow \dfrac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}}\le 1 \Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$, suy ra giá trị nhỏ nhất của P **gần nhất** với -3.

Câu 6. Cho các số thực x,y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+3y$ là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\dfrac{5+\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\dfrac{3+\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Điều kiện $4x^2+9y^2\ne 1$.

Trường hợp 1: $4x^2+9y^2<1$.

Ta có $(2x)^2+(3y)^2<1 \Rightarrow \begin{cases}2x<1\\3y<1\end{cases} \Rightarrow x+3y<\dfrac{1}{2}+1 \Rightarrow P<\dfrac{3}{2}$. (1)

Trường hợp 2: $4x^2+9y^2>1$.

Khi đó $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y)\ge 1 \Leftrightarrow 2x+3y\ge 4x^2+9y^2 \Leftrightarrow \left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(3y-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{1}{2}$.

$P=x+3y=\dfrac{1}{2}\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)+\left(3y-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{4}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta được:

$$\left[\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right)+\left(3y-\frac{1}{2}\right)\right]^2 \le \left(\frac{1}{4}+1\right)\left[\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3y-\frac{1}{2}\right)^2\right] \le \frac{5}{8}.$$

Suy ra $P=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right)+\left(3y-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\le\frac{3+\sqrt{10}}{4}$. (2)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2\left(2x-\frac{1}{2}\right)=3y-\frac{1}{2}\\ x+3y=\frac{3+\sqrt{10}}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x-6y=1\\ 4x+12y=3+\sqrt{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{5+\sqrt{10}}{20}\\ y=\frac{5+2\sqrt{10}}{30}\end{cases}$. Từ

(1) và (2) suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

Câu 7. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho các số thực a,b thay đổi, thỏa mãn $a>\frac{1}{3},b>1$. Khi biểu thức $P=\log_{3a}b+\log_b\left(a^4-9a^2+81\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

A. $3+9^{\sqrt{2}}$ **B.** $9+2^{\sqrt{3}}$ **C.** $2+9\sqrt{2}$ **D.** $3+3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Do $a^4-9a^2+81\ge 9a^2 \Leftrightarrow \left(a^2-9\right)^2\ge 0$ đúng $\forall a>\frac{1}{3}$; Dấu bằng xảy ra khi $a=3$

Suy ra $P\ge\log_{3a}b+\log_b(3a)^2=\log_{3a}b+2\log_b 3a\ge 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=3\\ \log_{3a}b=2\log_b 3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=9^{\sqrt{2}}\end{cases}$

Vậy, khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b=3+9^{\sqrt{2}}$.

Câu 8. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0<a<1$; $\frac{1}{8}<b<1$; $\frac{3}{8}<c<1$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{3}\le M<2$. **B.** $M\ge 2$. **C.** $\sqrt{2}\le M<\sqrt{3}$. **D.** $M<\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{b}{2}-\frac{1}{16}=\frac{8b-1}{16}=\frac{1}{4}.\frac{8b-1}{4}\le\left(\frac{2b}{2}\right)^2=b^2$.

$\frac{c}{2}-\frac{3}{16}=\frac{8c-3}{16}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{8c-3}{2}\le\left(\frac{4c}{4}\right)^4=c^4$.

Suy ra $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$

$\ge\frac{3}{16}\log_a b^2+\frac{1}{4}\log_b c^4+\frac{1}{3}\log_a c \ge 3.\sqrt[3]{\frac{2}{16}}=\frac{3}{2}$.

Vậy $P_{\min}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}8b-1=1\\8c-3=1\\\frac{3}{8}\log_a b=\log_b c=\frac{1}{3}\log_c a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{4}\\c=\frac{1}{2}\\a=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$.

Câu 9. Cho các số thực a,b,m,n sao cho $2m+n<0$ và thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases}\log_2\left(a^2+b^2+9\right)=1+\log_2\left(3a+2b\right)\\9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}}+\ln\left[\left(2m+n+2\right)^2+1\right]=81\end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\left(a-m\right)^2+\left(b-n\right)^2}$

A. $2\sqrt{5}-2$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{5}-2$. **D.** $2\sqrt{5}$

Lời giải

- $\log_2\left(a^2+b^2+9\right)=1+\log_2\left(3a+2b\right)\Leftrightarrow a^2+b^2+9=6a+4b\Leftrightarrow a^2+b^2-6a-4b+9=0\ (1)$

Gọi $A(a;b)$. Từ (1) ta suy ra điểm A thuộc điểm đường tròn (C) có tâm $I(3;2)$, bán kính $R=2$.

- $9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}}+\ln\left[\left(2m+n+2\right)^2+1\right]=81\Leftrightarrow\ln\left[\left(2m+n+2\right)^2+1\right]=81-3^{-(2m+n)+\frac{-4}{2m+n}}\ (*)$

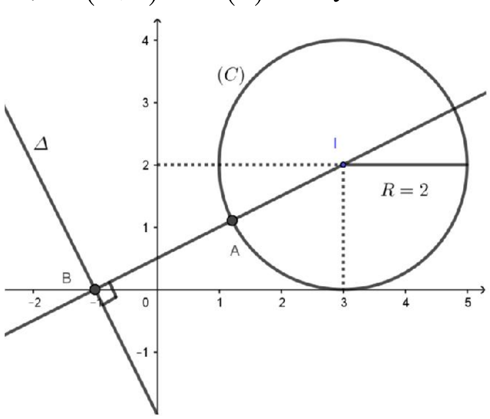
Theo bất đẳng thức Cô-si: $-(2m+n)+\frac{-4}{2m+n}\ge2\sqrt{-(2m+n).\frac{-4}{2m+n}}=4\Rightarrow3^{-(2m+n)+\frac{-4}{2m+n}}\ge81$.

(Đẳng thức xảy ra khi: $-(2m+n)=\frac{-4}{2m+n}\Rightarrow2m+n=-2$)

Từ $(*)\Rightarrow\ln\left[\left(2m+n+2\right)^2+1\right]\le0\Leftrightarrow\left(2m+n+2\right)^2+1\le1\Leftrightarrow\left(2m+n+2\right)^2\le0$

$\Rightarrow2m+n+2=0\ (2)$.

Gọi $B(m;n)$. Từ (2) ta suy ra điểm B thuộc đường thẳng $\Delta:\ 2x+y+2=0$



Ta có: $P=\sqrt{\left(a-m\right)^2+\left(b-n\right)^2}=AB$

$\Rightarrow\min P=\min AB=d\left(I;\Delta\right)-R=\frac{\left|3.2+2+2\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}-2=2\sqrt{5}-2.$

Câu 10. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0<a<1$; $\frac{1}{8}<b<1$; $\frac{3}{8}<c<1$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{3}\le M<2$. **B.** $M\ge 2$. **C.** $\sqrt{2}\le M<\sqrt{3}$. **D.** $M<\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{b}{2}-\frac{1}{16}=\frac{8b-1}{16}=\frac{1}{4}.\frac{8b-1}{4}\le\left(\frac{2b}{2}\right)^2=b^2$.

$\frac{c}{2}-\frac{3}{16}=\frac{8c-3}{16}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{8c-3}{2}\le\left(\frac{4c}{4}\right)^4=c^4$.

Suy ra $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$

$\ge\frac{3}{16}\log_a b^2+\frac{1}{4}\log_b c^4+\frac{1}{3}\log_a c\ \ge 3.\sqrt[3]{\frac{2}{16}}=\frac{3}{2}$.

Vậy $P_{\min}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}8b-1=1\\8c-3=1\\\frac{3}{8}\log_a b=\log_b c=\frac{1}{3}\log_c a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{4}\\c=\frac{1}{2}\\a=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$.

Câu 11. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Xét các số thực dương a,b,c lớn hơn 1 (với $a>b$) thỏa mãn $4\left(\log_a c+\log_b c\right)=25\log_{ab}c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a+\log_a c+\log_c b$ bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_c a=x,\log_c b=y$.

Vì $a,b,c>1$ và $a>b$ nên suy ra $\log_c a>\log_c b$ hay $x>y>0$.

Từ giả thiết suy ra: $4\left(\frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b}\right)=25.\frac{1}{\log_c ab}\Leftrightarrow\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{25}{x+y}$

$\Leftrightarrow\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{17}{4}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{y}=4\\\frac{x}{y}=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Rightarrow x=4y$ (vì $x>y$).

Ta có: $\log_b a+\log_a c+\log_c b=\frac{\log_c a}{\log_c b}+\frac{1}{\log_c a}+\log_c b=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}+y$

$=\frac{x}{y}+\frac{1}{4y}+y\ge 4+2\sqrt{\frac{1}{4y}.y}=5$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y=\frac{1}{2}$ và $x=2$, tức là $a=c^2;c=b^2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho bằng 5.

Cách khác

Từ giả thiết suy ra: $4\left(\log_a b.\log_b c+\log_b c\right)=25.\log_{ab} b.\log_b c$

$\Leftrightarrow\ 4\log_b c\left(\log_a b+1\right)=25\dfrac{\log_b c}{\log_b ab}\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_b c=0\\ 4\left(\log_a b+1\right)=\dfrac{25}{\log_b a+1}\end{array}\right.$.

Do $a,b,c>1$ nên $\log_b c>0$; suy ra $4\left(1+\log_a b\right)\left(1+\log_b a\right)=25\ \Rightarrow\ \log_a b=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó: $\log_b a+\log_a c+\log_c b\geq 4+2\sqrt{\log_a c.\log_c b}=4+2\sqrt{\log_a b}=5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 5 đạt được khi và chỉ khi $a=b^4,a=c^2,c=b^2$.

Câu 12. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Xét các số thực dương a, b, x,y thỏa mãn $a>1$, $b>1$ và $a^{2x}=b^{3y}=a^6b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4xy+2x-y$ có dạng $m+n\sqrt{165}$ (với m,n là các số tự nhiên), tính $S=m+n$.

A. 58. **B.** 54. **C.** 56. **D.** 60

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có: $a^{2x}=b^{3y}=a^6b^6\Leftrightarrow\begin{cases}a^{2x}=a^6b^6\\ b^{3y}=a^6b^6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\log_a\left(a^6b^6\right)\\ 3y=\log_b\left(a^6b^6\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=6+6\log_a b\\ 3y=6+6\log_b a\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\left(1+\log_a b\right)\\ y=2\left(1+\log_b a\right)\end{cases}$

Vì a, $b>1$ nên $\log_a b>\log_a 1=0$.

Do đó:

$$P=4xy+2x-y=24(1+\log_a b)(1+\log_b a)+6+6\log_a b-2-2\log_b a$$
$$=52+30\log_a b+22\log_b a\geq 52+2\sqrt{30\log_a b.22\log_b a}=52+4\sqrt{165}$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $m+n\sqrt{165}$ khi $30\log_a b=22\log_b a\Leftrightarrow\log_a b=\sqrt{\dfrac{11}{15}}\Leftrightarrow b=a^{\sqrt{\frac{11}{15}}}$

Ta có: $\begin{cases}m=52\\ n=4\end{cases}\Rightarrow m+n=56$.

Câu 13. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực x,y thỏa mãn $\log_2\left(x-1\right)+\log_2\left(y-1\right)=1$. Khi biểu thức $P=2x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x-2y=a+b\sqrt{3}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $T=ab$?

A. $T=9$. **B.** $T=\dfrac{7}{3}$. **C.** $T=\dfrac{5}{3}$. **D.** $T=7$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\ y-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ y>1\end{cases}$

Khi đó: $\log_2\left(x-1\right)+\log_2\left(y-1\right)=1\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(y-1\right)=2\Leftrightarrow y-1=\dfrac{2}{x-1}\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{x-1}+1$

Suy ra: $P=2x+3y=2x+\dfrac{6}{x-1}+3=2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}+5$

Cách 1: Dùng bất đẳng thức

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}\geq 2\sqrt{2(x-1).\dfrac{6}{x-1}}$

$\Rightarrow 2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}\geq 4\sqrt{3}\Rightarrow P\geq 4\sqrt{3}+5$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2(x-1)=\dfrac{6}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)^2=3\Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3}\ (N) \\ x=1-\sqrt{3}\ (L)\end{array}\right.$

$\Rightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\Rightarrow a=1;\ b=\dfrac{5}{3}\Rightarrow T=ab=\dfrac{5}{3}$.

Cách 2: Dùng bảng biến thiên

Ta có: $P=2x+\dfrac{6}{x-1}+3\ \Rightarrow P'=2-\dfrac{6}{(x-1)^2}$

$P'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3}\ (N) \\ x=1-\sqrt{3}\ (L)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{3}+5$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P_{\min}=4\sqrt{3}+5\Leftrightarrow x=1+\sqrt{3}\Rightarrow y=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\Rightarrow a=1;\ b=\dfrac{5}{3}\Rightarrow T=ab=\dfrac{5}{3}$.

Câu 14. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. $\dfrac{27}{4}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{20}{3}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $a>0,b>0$

Nên $\begin{cases} 4a+5b+1>1 \\ 8ab+1>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)>0 \\ \log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)>0 \end{cases}$

$P=\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)\ge 2\sqrt{\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right).\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)}$

$\Leftrightarrow P\ge 2\sqrt{\log_{8ab+1}\left(16a^2+b^2+1\right)}$

Mặt khác:

$16a^2+b^2+1\ge 2\sqrt{16a^2b^2}+1=8ab+1 \Leftrightarrow P\ge 2\sqrt{\log_{8ab+1}\left(8ab+1\right)}=2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 16a^2=b^2 \\ 8ab+1=4a+5b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=b \\ 2b^2+1=6b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}$

Do đó $a+2b=\dfrac{27}{4}$.

Câu 15. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho a,b,c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a}+\dfrac{1010}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\dfrac{8080}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}$ bằng

A. 2020. **B.** 16160. **C.** 20200. **D.** 13130.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\dfrac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a}+\dfrac{1010}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\dfrac{8080}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}=\dfrac{4040}{2\log_{bc} a}+\dfrac{1010}{\dfrac{1}{2}\log_{ac} b}+\dfrac{8080}{3.\dfrac{1}{3}\log_{ab} c}$

$=2020\log_a bc+2020\log_b ac+8080\log_c ab$

$=2020\left(\log_a b+\log_a c\right)+2020\left(\log_b a+\log_b c\right)+8080\left(\log_c a+\log_c b\right)$

$=2020\log_a b+2020\log_b a+2020\log_a c+8080\log_c a+2020\log_b c+8080\log_c b$

Vì $a,b,c>1$ nên các số $\log_a b,\log_b a,\log_a c,\log_c a,\log_b c,\log_c b>0$

Khi đó ta có

$2020\log_a b+2020\log_b a\ge 2\sqrt{2020^2\log_a b\log_b a}=4040$

$2020\log_a c+8080\log_c a\ge 2\sqrt{4040^2\log_a c\log_c a}=8080$

$2020\log_b c+8080\log_c b\ge 2\sqrt{4040^2\log_b c\log_c b}=8080$

Suy ra $P\ge 4040+8080+8080=20200$

Câu 16. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho a,b,c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a\dfrac{c}{b}-2\log_b\dfrac{c}{b}-3$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a b-\log_b c$. Giá trị của biểu thức $S=3m-M$ bằng

A. -16. **B.** 4. **C.** -6. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi đẳng thức đề bài ta được

$\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a\dfrac{c}{b}-2\log_b\dfrac{c}{b}-3 \Leftrightarrow \log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a c-\log_a b-2\log_b c-1$

$\Leftrightarrow \log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a b.\log_b c-\log_a b-2\log_b c-1$

Đặt $u=\log_a b; v=\log_b c$ ta có phương trình

$u^2+v^2=uv-u-2v-1$

$\Leftrightarrow u^2-2uv+v^2+u^2+2u+1+v^2+4v+4=3$

$\Leftrightarrow (u-v)^2+(u+1)^2+(v+2)^2=3 \qquad (*)$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc $x^2+y^2\ge \frac{1}{2}(x-y)^2$ dấu bằng xảy ra khi $x=-y$, áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$(u+1)^2+(v+2)^2\ge \frac{1}{2}(u+1-v-2)^2 \Leftrightarrow (u+1)^2+(v+2)^2\ge \frac{1}{2}(u-v-1)^2 \ (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $3-(u-v)^2\ge \frac{1}{2}(u-v-1)^2$ hay

$$3-P^2\ge \frac{1}{2}(P-1)^2 \Leftrightarrow 3P^2-2P-5\le 0 \Leftrightarrow -1\le P\le \frac{5}{3}$$

Vậy $m=-1, M=\frac{5}{3}$ suy ra $S=m-3M=-6$.

Câu 17. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho các số thực $x,y\ge 1$ và thỏa mãn điều kiện $xy\le 4$. Biểu thức $P=\log_{4x}8x-\log_{2y^2}\frac{y^2}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=x_0, y=y_0$. Đặt $T=x_0^4+y_0^4$ mệnh đề nào sau đây đúng

A. $T=131$. **B.** $T=132$. **C.** $T=129$. **D.** $T=130$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=\log_{4x}8x-\log_{2y^2}\frac{y^2}{2}=\frac{\log_2 8x}{\log_2 4x}-\frac{\log_2\frac{y^2}{2}}{\log_2 2y^2}=\frac{3+\log_2 x}{2+\log_2 x}-\frac{2\log_2 y-1}{2\log_2 y+1}$.

Đặt $\log_2 x=a$, $\log_2 y=b$ ($a,b\ge 0$), ta được $P=\frac{3+a}{2+a}-\frac{2b-1}{2b+1}=\frac{1}{2+a}+\frac{2}{2b+1}$.

Vì $xy\le 4$ suy ra $\log_2 x+\log_2 y\le 2 \Leftrightarrow a+b\le 2 \Leftrightarrow 0\le a\le 2-b$

Suy ra $P=\frac{1}{2+a}+\frac{2}{2b+1}\ge \frac{1}{4-b}+\frac{2}{2b+1}$.

Xét hàm $f(b)=\frac{1}{4-b}+\frac{2}{2b+1}$ trên $[0;2]$,ta có:

$$f'(b)=\frac{1}{(4-b)^2}-\frac{4}{(2b+1)^2}$$

$$f'(b)=0\Leftrightarrow (2b+1)^2-4(4-b)^2=0\Leftrightarrow b=\frac{7}{4}.$$

Ta có: $f(0)=\frac{9}{4}, f(2)=\frac{9}{10}, f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{8}{9}$.

Suy ra trên đoạn $[0;2]$ ta có: $\min P=\frac{8}{9}\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x=\frac{1}{4}\\ \log_2 y=\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2^{\frac{1}{4}}\\ y=2^{\frac{7}{4}}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x_0=2^{\frac{1}{4}}\\ y_0=2^{\frac{7}{4}}\end{cases}$

Vậy $T=x_0^4+y_0^4=\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4+\left(2^{\frac{7}{4}}\right)^4=130$.

Câu 18. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=10$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $F=5\log a.\log b+2\log b.\log c+\log c.\log a$ bằng $\frac{m}{n}$ với m,n nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tổng $m+n$ bằng

A. 13. **B.** 16. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}\log a=x\\ \log b=y\\ \log c=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=10^x\\ b=10^y\\ c=10^z\end{cases}$, mà $abc=10\Leftrightarrow 10^x.10^y.10^z=10\Leftrightarrow x+y+z=1\ (*)$.

Ta có $F=5\log a.\log b+2\log b.\log c+\log c.\log a=5xy+2yz+zx$.

Từ $(*)\Rightarrow y=1-x-z$, thay vào biểu thức F, ta được:

$F=5x(1-x-z)+2(1-x-z)z+xz=-2z^2-5x^2-6xz+2z+5x$

$=-2z^2-\frac{9}{2}x^2-\frac{1}{2}-6xz+2z+3x-\frac{1}{2}x^2+2x-2+\frac{5}{2}$

$=-2\left(z^2+\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{4}+3xz-z-\frac{3}{2}x\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-4x+4\right)+\frac{5}{2}$

$=-2\left(z+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{5}{2}\le\frac{5}{2}$.

Vậy $\max F=\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y+z=1\\ z+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0\\ x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{3}{2}\\ x=2\\ z=-\frac{5}{2}\end{cases}$.

Vậy $m=5,n=2\Rightarrow m+n=5+2=7$.

Câu 19. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}\left(25a^2+b^2+1\right)+\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)=2$. Giá trị biểu thức $a+2b$ bằng?

A. 6. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 22.

Lời giải

Chọn B

Với $a>0,b>0$ ta có $25a^2+b^2+1\ge 10ab+1$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=5a$.

Suy ra $\log_{10a+3b+1}\left(25a^2+b^2+1\right)\ge\log_{10a+3b+1}\left(10ab+1\right)$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=5a$.

Mặt khác, ta lại có với $a>0,b>0$ thì $\log_{10a+3b+1}\left(10ab+1\right)>0,\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)>0$.

Do đó:

$\log_{10a+3b+1}\left(25a^2+b^2+1\right)+\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)\ge\log_{10a+3b+1}\left(10ab+1\right)+\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)$

$\ge 2\sqrt{\log_{10a+3b+1}\left(10ab+1\right).\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)}=2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = 5a \\ \log_{10a+3b+1}(10ab+1) = \log_{10ab+1}(10a+3b+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ 10a+3b+1 = 10ab+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + 2b = \frac{11}{2}$$

Câu 20. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho các số thực dương $a;b;c$ khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c + 2\log_b \dfrac{c}{b} = \log_a \dfrac{c}{a^3 b}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a ab - \log_b bc$. Tính giá trị biểu thức $S = 2m^2 + 9M^2$.

A. $S = 28$. **B.** $S = 25$. **C.** $S = 26$. **D.** $S = 27$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = \log_a b; y = \log_b c, (x; y > 0) \Rightarrow \log_a c = xy \Rightarrow P = \log_a ab - \log_b bc = x - y \Rightarrow x = P + y$

$$\log_a^2 b + \log_b^2 c + 2\log_b \frac{c}{b} = \log_a \frac{c}{a^3 b} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 2 = xy - 3 - x$$

Khi đó ta có $(P+y)^2 + y^2 + 2y - 2 = (P+y)y - 3 - (P+y)$.

$$\Leftrightarrow y^2 + (P+3)y + P^2 + P + 1 = 0$$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -3P^2 + 2P + 5 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le P \le \dfrac{5}{3} \Rightarrow m = -1; M = \dfrac{5}{3} \Rightarrow S = 27$

Nên giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{8}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \dfrac{1}{4} \\ \log_2 y = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{4}} \\ y = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2^{\frac{1}{4}} \\ y_0 = 2^{\frac{7}{4}} \end{cases} \Rightarrow T = x_0^{\ 4} + y_0^{\ 4} = 130$

Câu 21. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 9. **B.** 6. **C.** $\dfrac{27}{4}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bất đẳng thức Côsi với $a > 0, b > 0$ ta có:

$$16a^2 + b^2 + 1 \ge 2\sqrt{16a^2b^2} + 1 = 8ab + 1 \Rightarrow 16a^2 + b^2 + 1 \ge 8ab + 1 \ (*)$$

Do $4a + 5b + 1 > 1$ nên từ (*) có:

$$\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \ge \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)$$

$$\Rightarrow \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \ge \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \frac{1}{\log_{4a+5b+1}(8ab + 1)}$$

Mặt khác $4a + 5b + 1 > 1$ và $8ab + 1 > 1$ nên: $\log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \dfrac{1}{\log_{4a+5b+1}(8ab + 1)} \ge 2$.

Suy ra $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \ge 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}16a^2=b^2\\4a+5b+1=8ab+1\\a,b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4a\\2b^2-6b=0\\a,b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\b=3\end{cases}$.

Vậy $a+2b=\dfrac{27}{4}$.

Câu 22. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Xét các số thực a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x-2y$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}a^x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\\b^y=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\log_a\sqrt{\dfrac{a}{b}}\\y=\log_b\sqrt{\dfrac{a}{b}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(1-\log_a b)\\y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\log_a b}-1\right)\end{cases}$

Đặt $t=\log_a b$. Vì $a>1,b>1$, nên $t>0$.

Khi đó: $P=\dfrac{1}{2}(1-t)-\left(\dfrac{1}{t}-1\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{t}\right)\le\dfrac{3}{2}-2.\sqrt{\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{1}{t}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow t=\sqrt{2}\ (t>0)$. $P_{\max}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}086\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 23. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho biểu thức $P=3^{y-2x+3}(1+4^{2x-y-1})-2^{2x-y-1}$ và biểu thức $Q=\log_{y-3-2x}3y$. Giá trị nhỏ nhất của y để tồn tại x đồng thời thỏa mãn $P\ge 1$ và $Q\ge 1$ là số y_0. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $4y_0+1$ là số hữu tỷ. **B.** y_0 là số vô tỷ.

C. y_0 là số nguyên dương. **D.** $3y_0+1$ là số tự nhiên chẵn.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases}y-2x+3>0\\y>0\end{cases}$.

$P=3^{y-2x+1}.(1+4^{2x-y-1})-2^{2x-y-1}=3^{y-2x+1}.(1+\dfrac{1}{4^{2x-y-1}})-\dfrac{1}{2^{y-2x+1}}$.

Đặt $t=y-2x+1$ ta có $P=3^t(1+\dfrac{1}{4^t})-\dfrac{1}{2^t}$.

Cho $P\ge 1\Leftrightarrow 3^t(1+\dfrac{1}{4^t})-\dfrac{1}{2^t}\ge 1\Leftrightarrow 12^t+3^t\ge 4^t+2^t$ (1).

* Với $t=0$ thỏa mãn (1).

* Với $t>0$ ta có $\left.\begin{matrix}12^t>4^t\\3^t>2^t\end{matrix}\right\}\Rightarrow 12^t+3^t>4^t+2^t\Rightarrow$ (1) thỏa mãn.

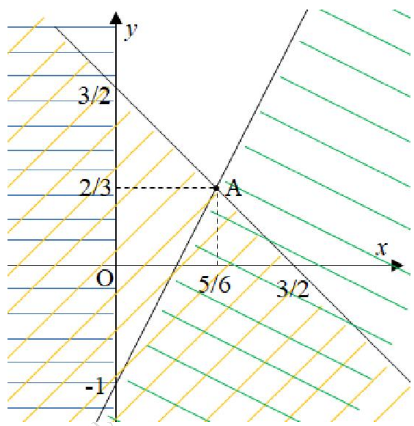
* Với $t<0$ ta có $\left.\begin{array}{l}12^t<4^t\\3^t<2^t\end{array}\right\}\Rightarrow 12^t+3^t<4^t+2^t\Rightarrow$ (1) không thỏa mãn.

Vậy (1) $\Leftrightarrow t\ge 0$ hay $y-2x+1\ge 0$ (a).

Vì $y-2x+1>0\Rightarrow$ $y-2x+3>2>1$ nên $Q=\log_{y-2x+1}3y\ge 1\Leftrightarrow 3y\ge y-2x+3\Leftrightarrow 2x+2y\ge 3$ (b).

Từ (a), (b) và điều kiện ta có $\begin{cases}y-2x+1\ge 0\\2x+2y\ge 3\\y>0\end{cases}$.

Cặp số $(x;y)$ thỏa mãn hệ được biểu diễn ở miền không bị gạch ở hình bên. Điểm A thuộc miền không bị gạch và có $y_{\min}=\dfrac{2}{3}$.



Vậy $y_0=\dfrac{2}{3}$. Do đó $4y_0+1=\dfrac{11}{3}\in\mathbb{Q}$.

Câu 24. **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1\ne 1$ thỏa mãn $\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\log_2^2 5+\log_2^2 7$ và $u_{n+1}=7u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>1111111$ bằng:

A. 11. **B.** 8. **C.** 9. **<u>D</u>.** 10.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Ta có $u_{n+1}=7u_n,\forall n\ge 1\Rightarrow (u_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu là u_1, công bội $q=7$.

$\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=[\log_2 5+\log_2 u_1]^2+[\log_2 7+\log_2 u_1]^2$

$=\log_2^2 5+2.\log_2 5.\log_2 u_1+\log_2^2 u_1+\log_2^2 7+2.\log_2 7.\log_2 u_1+\log_2^2 u_1$

$=2\log_2^2 u_1+2.(\log_2 5+\log_2 7).\log_2 u_1+\log_2^2 5+\log_2^2 7$

$=2\log_2^2 u_1+2.\log_2 35.\log_2 u_1+\log_2^2 5+\log_2^2 7=\log_2^2 5+\log_2^2 7$

$\Leftrightarrow 2\log_2^2 u_1+2.\log_2 35.\log_2 u_1=0\Leftrightarrow 2\log_2 u_1.(\log_2 u_1+\log_2 35)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 u_1=0\\\log_2 u_1+\log_2 35=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u_1=1\ (\text{loai})\\\log_2 u_1=-\log_2 35\end{array}\right.\Leftrightarrow u_1=\dfrac{1}{35}\ (\text{nhan})$.

Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=u_1.q^{n-1}=\dfrac{1}{35}.7^{n-1}=\dfrac{1}{5.7}.7^{n-1}=\dfrac{1}{5}.7^{n-2}$.

$u_n > 1111111 \Leftrightarrow \frac{1}{5}.7^{n-2} > 1111111 \Leftrightarrow 7^{n-2} > 5555555 \Leftrightarrow n-2 > \log_7 5555555$

$\Leftrightarrow n > \log_7 5555555 + 2$. Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất của n bằng 10.

Câu 25. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1)+\log_2(y-1)=1$. Khi biểu thức $P=2x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x-2y=a+b\sqrt{3}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $T=ab$.

A. $T=9$. **B.** $T=\frac{7}{3}$. **C.** $T=\frac{5}{3}$. **D.** $T=7$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x-1)+\log_2(y-1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x,y>1 \\ y-1=\frac{2}{x-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ y=1+\frac{2}{x-1}\end{cases}$.

Khi đó $P=2x+3y=2x+3\left(\frac{2}{x-1}+1\right)=2(x-1)+\frac{6}{x-1}+5\ge 2\sqrt{12}+5$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x>1 \\ 2(x-1)=\frac{6}{x-1} \\ y=1+\frac{2}{x-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{3} \\ y=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases} \Rightarrow 3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=1+\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $a=1, b=\frac{5}{3}$ nên $T=\frac{5}{3}$.

Câu 26. Xét các số thực a, b, $c\neq 0$ thỏa mãn $3^a=5^b=15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $[-5;-1)$. **C.** $[2;4)$. **D.** $[4;6)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $3^a=5^b=15^{-c}=t>0 \Rightarrow \begin{cases} a=\log_3 t \\ b=\log_5 t \\ c=-\log_{15} t\end{cases}$. Khi đó

$P=\log_3^2 t+\log_5^2 t+\log_{15}^2 t-4(\log_3 t+\log_5 t-\log_{15} t)$

$=\log_3^2 t\left(1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3\right)-4\log_3 t\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)$

$=X^2\left(1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3\right)-4X\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)$, (với $X=\log_3 t$)

$$P_{\min}=P\left(\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}\right)=-4,$$

khi $\log_3 t=\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3} \Rightarrow t=3^{\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}}$

Suy ra

$a=\dfrac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}$

$b=\log_5 3^{\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}}$

$c=-\log_{15} 3^{\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}}$.

Câu 27. Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a>1$, $b>1$, $c>1$ và $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\dfrac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[10;13)$. **B.** $[7;10)$. **C.** $[3;5)$. **D.** $[5;7)$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có

$x=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_a b+\log_a c\right)$, $y=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_b a+\log_b c\right)$, $z=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_c b+\log_c a\right)$. Khi đó ta có

$2P=4+\log_a b+\log_b a+\log_a c+\log_c a+\log_b c+\log_c b$.

Vì $a>1$, $b>1$, $c>1$ nên $\log_a b>0$, $\log_b c>0$, $\log_c a>0$, $\log_b a>0$, $\log_c b>0$, $\log_a c>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta được

$\log_a b+\log_b a\geq 2\sqrt{\log_a b.\log_b a}$ hay $\log_a b+\log_b a\geq 2$.

Tương tự $\log_a c+\log_c a\geq 2$ và $\log_b c+\log_c b\geq 2$.

Do đó $2P\geq 10$ hay $P\geq 5$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P_{\min}=5$.

Câu 28. Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{x^2}=b^{y^2}=\sqrt{a.b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

A. $P=\dfrac{9}{4}$. **B.** $P=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $P=\dfrac{3}{2}$. **D.** $P=\dfrac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$$a^{x^2}=b^{y^2}=\sqrt{a.b}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{2}\log_a b+\dfrac{1}{2}\\ y^2=\dfrac{1}{2}\log_b a+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$+)\left(xy\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\log_a b+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\log_b a+\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\log_a b+\log_b a\right)+\dfrac{1}{4}\right)$

$\geq\dfrac{3}{2}$ $\left(a,b>1\Rightarrow\log_a b>0,\log_b a>0\right)$.

Vì $x>0,y>0\Rightarrow xy\geq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 29. Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

A. $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=3$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn B

$$a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}=1+\log_a b\\ \dfrac{y^2}{x}=1+\log_b a\end{cases}.$$

Ta có $xy=\dfrac{x^2}{y}.\dfrac{y^2}{x}=\left(1+\log_a b\right)\left(1+\log_a b\right)$

$=1+1+\log_a b+\log_b a$

$\geq 4\,(\,a,b>1\Rightarrow\log_a b>0,\log_b a>0\,)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 30. Xét các số thực dương a,b,c,x,y,z thỏa mãn $a>1,b>1,c>1,y>2$ và $a^{x+1}=b^{y-2}=c^{z+1}=abc$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$ là

A. $P=13$. **B.** $P=3$. **C.** $P=9$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn C

$$a^{x+1}=b^{y-2}=c^{z+1}=abc\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=1+\log_a b+\log_a c\\ y-2=1+\log_b a+\log_b c\\ z+1=1+\log_c b+\log_c a\end{cases}.$$

Ta có: $x+1+y-2+z-1=3+\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c b+\log_c a$

$\Leftrightarrow x+y+z\geq 3+6$

$\Leftrightarrow P\geq 9\,(\,a,b,c>1\Rightarrow\log_a b>0,\log_a c>0,\log_b a>0,\log_b c>0,\log_c a>0,\log_c b>0\,)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Dạng 3. Sử dụng phương pháp hàm số (hàm đặc trưng) giải các bài toán logarit

1. Định lý: Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên $\left(a;b\right)$ thì

* $\forall u;v\in\left(a;b\right):f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v$.

* Phương trình $f\left(x\right)=k\ \left(k=const\right)$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $\left(a;b\right)$.

2. Định lý: Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên $\left(a;b\right)$, đồng thời

$\lim\limits_{x\to a^+}f\left(x\right).\lim\limits_{x\to b^-}f(x)<0$ thì phương trình $f\left(x\right)=k\left(k=const\right)$ có duy nhất nghiệm trên $\left(a;b\right)$.

3. Tính chất của logarit:

1.1. So sánh hai logarit cũng cơ số:	**1.2. Hệ quả:**
Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương b,c.	Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương b,c.
∘ Khi $a>1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$.	∘ Khi $a>1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b>1$.
∘ Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$.	∘ Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b<1$.
	∘ $\log_a b=\log_a c\Leftrightarrow b=c$.

2. Logarit của một tích: Cho 3 số dương $a,\, b_1,\, b_2$ với $a \ne 1$, ta có $\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$	**3. Logarit của một thương**: Cho 3 số dương $a,\, b_1,\, b_2$ với $a \ne 1$, ta có $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$ Đặc biệt: với $a,\, b > 0,\, a \ne 1$ $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.
4. Logarit của lũy thừa: Cho $a,\, b > 0,\, a \ne 1$, với mọi α, ta có $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$. Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$ (n nguyên dương).	**5. Công thức đổi cơ số**: Cho 3 số dương $a,\, b,\, c$ với $a \ne 1, c \ne 1$, ta có $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Đặc biệt: $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$ với $\alpha \ne 0$.

Câu 1. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right) \ge \log_3\left(x+y\right)$?

A. 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+y>0 \\ x+y>0 \end{cases}$.

Đặt $\log_3\left(x+y\right)=t$, ta có $\begin{cases} x^2+y \ge 4^t \\ x+y=3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x^2-x \ge 4^t-3^t} & (*) \\ y=3^t-x \end{cases}$.

Nhận xét rằng hàm số $f\left(t\right)=4^t-3^t$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ và $f\left(t\right)>0$ với mọi $t>0$

Gọi $n \in \mathbb{Z}$ thỏa $4^n-3^n=x^2-x$, khi đó $(*) \Leftrightarrow \boxed{t \le n}$

Từ đó, ta có $-x<y=3^t-x \le 3^n-x$.

Mặt khác, vì có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn đề bài nên $3^n \le 242 \Leftrightarrow n \le \log_3 242$.

Từ đó, suy ra $\boxed{x^2-x \le 4^{\log_3 242}-242} \Leftrightarrow \boxed{-27,4 \le x \le 28,4}$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \left\{-27,\, -26,\, ...,\, 27,\, 28\right\}$.

Vậy có 56 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right) \ge \log_3(x+y)$?

A. 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

Lời giải

Chọn C.

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \ge x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x+y)-\log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $\mathrm{D}=(-x;+\infty)$ (do $y>-x\Rightarrow y>-x^2$).

$f'(y)=\dfrac{1}{(x+y)\ln 3}-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\geq 0,\ \forall x\in D$ (do $x^2+y\geq x+y>0$, $\ln 4>\ln 3$)

$\Rightarrow f$ tăng trên D.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\leq 0$.

Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f\left(y\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729)>0\Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0\Leftrightarrow x^2-x-3367<0$

$\Leftrightarrow -57{,}5\leq x\leq 58{,}5$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\left\{-57,-56,...,58\right\}$.

Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên x thỏa.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\geq\log_2\left(x+y\right)$?

A. 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left(x^2+y\right)\geq\log_2\left(x+y\right)(1)$

Đặt $t=x+y\in\mathbb{N}^*$ (do $x,y\in\mathbb{Z},x+y>0$)

$(1)\Leftrightarrow\log_3\left(x^2-x+t\right)\geq\log_2 t\Leftrightarrow g(t)=\log_2 t-\log_3\left(x^2-x+t\right)\leq 0\left(2\right)$

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-\dfrac{1}{\left(x^2-x+t\right)\ln 3}>0$ với mọi y. Do đó $g\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t\in\mathbb{N}^*$ nên ta có

$g(128)>0\Leftrightarrow\log_2 128-\log_3\left(x^2-x+128\right)>0$

$\Leftrightarrow\quad x^2-x+128<3^7\Leftrightarrow -44{,}8\leq x\leq 45{,}8$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ bằng

A. $\dfrac{65}{8}$. **B.** $\dfrac{33}{4}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3\Leftrightarrow y.2^{2x+2y-2}\geq 3-2x\Leftrightarrow\boxed{2y.2^{2y}\geq\left(3-2x\right).2^{3-2x}}$ $(*)$

Hàm số $f\left(t\right)=t.2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên từ $\left(*\right)$ ta suy ra $2y\geq 3-2x\Leftrightarrow\boxed{2x+2y-3\geq 0}$ (1)

Ta thấy $\left(1\right)$ bất phương trình bậc nhất có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d:2x+2y-3=0$ (phần không chứa gốc tọa độ O), kể cả các điểm thuộc đường thẳng d.

Xét biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y \Leftrightarrow \boxed{(x+3)^2+(y+2)^2=P+13}$ (2)

Để P tồn tại thì ta phải có $P+13\geq 0 \Leftrightarrow P\geq -13$.

Trường hợp 1: Nếu $P=-13$ thì $x=-3;\ y=-2$ không thỏa (1). Do đó, trường hợp này không thể xảy ra.

Trường hợp 2: Với $P>-13$, ta thấy (2) là đường tròn (C) có tâm $I(-3;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{P+13}$.

Để d và (C) có điểm chung thì $d(I;d)\leq R \Leftrightarrow \frac{13}{2\sqrt{2}}\leq \sqrt{P+13} \Leftrightarrow \boxed{P\geq \frac{65}{8}}$.

Vậy $\boxed{\min P=\frac{65}{8}}$

Câu 5. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\leq x\leq 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$. (1)

Đặt $\log_3(x+1)=t \Rightarrow x+1=3^t$.

Phương trình (1) trở thành: $t+3^t=2y+3^{2y}$ (2)

Xét hàm số $f(u)=u+3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u)=1+3^u\ln 3>0, \forall u\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f(t)=f(2y)\Leftrightarrow t=2y \Rightarrow \log_3(x+1)=2y \Leftrightarrow x+1=9^y \Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\leq x\leq 2020 \Rightarrow 0\leq 9^y-1\leq 2020 \Leftrightarrow 1\leq 9^y\leq 2021 \Leftrightarrow 0\leq y\leq \log_9 2021$

$(\log_3 2021\approx 3,464)$

Do $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của x

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

Cách 2:

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$

Xét hàm số $f(x)=\log_3(x+1)+x+1$ với $x\in[0;2020]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ln 3}+1>0,\forall x\in x\in[0;2020]\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;2020]$.

Suy ra $f(0)\le f(x)=\log_3(x+1)+x+1\le f(2020)\Leftrightarrow 1\le f(x)\le \log_2 2021+2021$

$\Rightarrow 1\le 2y+9^y\le \log_3 2021+2021<2028$

Nếu $y<0\Rightarrow 2y+9^y<9^y<9^0=1\Rightarrow y\ge 0$

Khi đó $y\in\mathbb{N}\Rightarrow(2y+9^y)\in\mathbb{N}\Rightarrow 2y+9^y\le 2027\Rightarrow 9^y\le 2027-2y\le 2027$

$\Rightarrow y\le\log_9 2027\approx 3,465\ \Rightarrow y\le 3\Rightarrow 0\le y\le 3$

$\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của y chỉ cho 1 giá trị của x.

+) $y=0\Rightarrow\log_3(x+1)+x+1=1\Leftrightarrow x=0$

+) $y=1\Rightarrow\log_3(x+1)+x+1=11\Leftrightarrow\log_3(x+1)+x=10\Leftrightarrow x=8$

+) $y=2\Rightarrow\log_3(x+1)+x+1=85\Leftrightarrow\log_3(x+1)+x=84\Leftrightarrow x=80$

+) $y=3\Rightarrow\log_3(x+1)+x+1=735\Leftrightarrow\log_3(x+1)+x=734\Leftrightarrow x=729$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 6. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2x+4y$ bằng

A. $\dfrac{33}{8}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow(2x-3).4^{-x}+y.4^{y-1}\ge 0\Leftrightarrow 2y.2^{2y}\ge(3-2x)2^{3-2x}$ (1)

Xét TH: $3-2x\le 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2}\\ y\ge 0\end{cases}\Rightarrow P=x^2+y^2+2x+4y\ge\dfrac{21}{4}$ (2)

Xét TH: $3-2x>0\Leftrightarrow 0\le x<\dfrac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t\ge 0$

$\Rightarrow f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0$ với mọi $t\ge 0$

(1) $\Leftrightarrow f(2y)\ge f(3-2x)\Leftrightarrow 2y\ge 3-2x\Leftrightarrow y\ge\dfrac{3}{2}-x$. Khi đó:

$P=x^2+y^2+2x+4y\ge x^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+2x+2(3-2x)=2x^2-5x+\frac{33}{4}=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{41}{8}\ge\frac{41}{8}$ (3)

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của P là $\frac{41}{8}$ khi $x=\frac{5}{4},y=\frac{1}{4}$.

Câu 7. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)$?

A. 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)\Leftrightarrow x^2+y\ge 3^{\log_2(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge(x+y)^{\log_2 3}$ (1)

Đk: $x+y\ge 1$ (do $x,y\in\mathbb{Z}$, $x+y>0$)

Đặt $t=x+y\ge 1$, nên từ $(1)\Rightarrow x^2-x\ge t^{\log_2 3}-t$ (2)

Để (1) không có quá 255 nghiệm nguyên y khi và chỉ khi bất phương trình (2) có không quá 255 nghiệm nguyên dương t.

Đặt $M=f(255)$ với $f(t)=t^{\log_2 3}-t$.

Vì f là hàm đồng biến trên $[1,+\infty)$ nên $(2)\Leftrightarrow 1\le t\le f^{-1}\left(x^2-x\right)$ khi $x^2-x\ge 0$.

Vậy (2) có không quá 255 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-x\right)\le 255\Leftrightarrow x^2-x\le 255\Leftrightarrow -78\le x\le 79$ $(x\in\mathbb{Z})$.

Vậy có 158 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+2y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow(2x-3).4^{-x}+y.4^{y-1}\ge 0\Leftrightarrow 2y.2^{2y}\ge(3-2x)2^{3-2x}$ (1)

Xét TH $3-2x\le 0\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ y\ge 0\end{cases}\Rightarrow P=x^2+y^2+4x+2y\ge\frac{33}{4}$ (2)

Xét TH $3-2x>0\Leftrightarrow 0\le x<\frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t\ge 0$

$\Rightarrow f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0$ với mọi $t\ge 0$

(1) $\Leftrightarrow f(2y)\ge f(3-2x)$

$\Leftrightarrow 2y\ge 3-2x$

$\Leftrightarrow y\ge\frac{3}{2}-x$

$\Rightarrow P=x^2+y^2+4x+2y\ge x^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+4x+(3-2x)=2x^2-x+\frac{21}{4}$

$\Rightarrow P = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \geq \frac{41}{8}$ (3)

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của P là $\frac{41}{8}$ khi $x = \frac{1}{4}, y = \frac{5}{4}$

Câu 9. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 16$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m - n\ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 16. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(a) = 2a^m - n\ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$, ta có $f'(a) = 2ma^{m-1} - \frac{n}{\sqrt{a^2+1}}$.

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2ma^{m-1} - \frac{n}{\sqrt{a^2+1}} = 0 \Leftrightarrow a^{m-1}\sqrt{a^2+1} = \frac{n}{2m}$ phải có một nghiệm $a_0 < 1$.

Suy ra $\frac{n}{2m} < 2 \Rightarrow \frac{n}{m} < 4$ suy ra a_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có bảng biến thiên

a	0		a_0		1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	0	$\searrow$	$f(a_0)$	$\nearrow$	$f(1)$

Ta thấy 0 là một nghiệm của phương trình $f(a) = 0$.

Nếu $m = 1$ suy ra để có nghiệm duy nhất thì $\frac{n}{2m} > 1 \Rightarrow n > 2$ (loại)

Nếu m lẻ và $m \neq 1$ thì ta có a là một nghiệm thì $-a$ cũng là một nghiệm, do đó có đủ 3 nghiệm.
Nếu m chẵn thì phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm (vì không có nghiệm âm).
Suy ra m lẻ.
Để có 1 nghiệm dương thì theo BBT ta có

$f(1) > 0 \Rightarrow 2 > n\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \approx 2,2$.

Suy ra $n \in \{1; 2\}$ suy ra $m \in \{3; 5; \cdots; 15\}$.

Suy ra có 13 cặp (m, n) (do $15 + 2 = 17 > 16$).

Câu 10. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq \left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8x+4}{2x - y + 1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 9 **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

$2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$

$2^{x^2+y^2-2x+1} \le x^2+y^2-2x+2$

$2^{(x-1)^2+y^2} - \left[(x-1)^2+y^2\right] - 1 \le 0 \, (1)$

Đặt $t=(x-1)^2+y^2$

$(1) \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$

$P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Rightarrow (2P-8).x - P.y + (P-4) = 0$

Yêu cầu bài toán tương đương:

$\dfrac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}} \le 1 \Leftrightarrow |3P-12| \le \sqrt{(2P-8)^2+P^2} \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \le P \le 5+\sqrt{5}$

Câu 11. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n \le 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{2a^m}{n} = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Xét hai hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ và $g(x)=\dfrac{2}{n}x^m$ trên $(-1;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và

$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

+ Nếu m chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$g(1)$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó m lẻ.

+ Nếu m lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x=0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1;1)$ khi có 1 nghiệm trên $(0;1)$, hay

$f(1)>g(1) \Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right) < \dfrac{2}{n} \Leftrightarrow n < \dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \approx 2,26 \Rightarrow n \in \{1;2\}$.

Đối chiếu điều kiện, với $n=1$ suy ra $m \in \{1;3;5;7;9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n=2$ thì $m\in\{1;3;5;7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

Câu 12. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét $x^2+y^2-2x+2>0\forall x;y$

Bất phương trình $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x\Leftrightarrow\dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)\Leftrightarrow2^{x^2+y^2-2x+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)$.

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow2^t\le t+1\Leftrightarrow2^t-t-1\le0$

Đặt $f(t)=2^t-t-1$. Ta thấy $f(0)=f(1)=0$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln2-1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow2^t\ln2=1\Leftrightarrow t=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln2}\right)\approx0,52$

t	$-\infty$		0		$\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$		1		$+\infty$
$f'(t)$			$-$		0		$+$		
$f(t)$		↘	0	↘		↗	0	↗	

Quan sats BBT ta thấy $f(t)\le0\Leftrightarrow0\le t\le1$

$0\le x^2+y^2-2x+1\le1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2\le1\ (1)$

Xét $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}\Leftrightarrow2Px-Py+P=8x+4$

$\Leftrightarrow P-4=(8-2P)x+Py$

$\Leftrightarrow P-4+2P-8=(8-2P)x+2P-8+Py$

$\Leftrightarrow3P-12=(8-2P)(x-1)+Py$

$\Leftrightarrow(3P-12)^2=\left[(8-2P)(x-1)+Py\right]^2\le\left[(8-2P)^2+P^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]$

Thế (1) vào ta có $(3P-12)^2\le\left[(8-2P)^2+P^2\right]\Leftrightarrow4P^2-40P+80\le0\Leftrightarrow5-\sqrt5\le P\le5+\sqrt5$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{8-2P}{P}=\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y \\ \left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{-\sqrt{5}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $5-\sqrt{5}\approx 2,76$ gần giá trị 3 nhất.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C.

Xét $f(x)=\dfrac{2}{n}.x^m-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2m}{n}x^{m-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$

Theo đề bài $f(x)=0$ có ba nghiệm nên $\dfrac{2m}{n}x^{m-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có ít nhất hai nghiệm

Xét đồ thị của hàm $y=x^{m-1}; y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $m-1$ chẵn và $m-1>0$

Suy ra $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$. Khi đó $f'(x)=0$ có nghiệm $\begin{cases} x_1<0 \\ x_2>0 \end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} f(1)>0 \\ f(-1)<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n}>\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \\ -\dfrac{2}{n}<\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases} \Leftrightarrow n\le 2 \Rightarrow n=\{1;2\}$

$n\in\{1;2\}$ và $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$, do $m+n\le 14$ nên ta có 11 cặp $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 14. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 12$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1,1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})$?

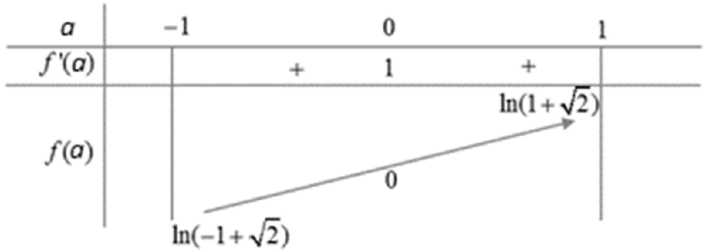
A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1}) \Leftrightarrow \dfrac{2}{n}a^m=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ (*).

Xét hàm $f(a)=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ trên $(-1,1)$ (dễ thấy hàm f lẻ, đồng biến trên R), có BBT:



Xét hàm $g(a)=\dfrac{2}{n}.a^m$ trên $(-1,1)$.

Với m chẵn, $g(a)$ là hàm chẵn và $g(a)\ge 0,\forall a\in R$, do đó (*) không thể có 3 nghiệm.

Với m lẻ, $g(a)$ là hàm lẻ, đồng biến trên R và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a=0$ là đường thẳng $y=0$.

Dễ thấy (*) có nghiệm $a=0\in(-1;1)$. Để (*) có đúng 3 nghiệm tức là còn có 2 nghiệm nữa là $\pm a_0$ với $0<a_0<1$.

Muốn vậy, thì $g(1)=\dfrac{2}{n}.1^m=\dfrac{2}{n}>f(1)=\ln(1+\sqrt{2})\Leftrightarrow n<\dfrac{2}{\ln(1+\sqrt{2})}\approx 2,26\Rightarrow n=1;n=2$

Cụ thể:

+ $m\in\{3;5;7;9\}$ thì $n\in\{1;2\}$: Có 8 cặp (m,n)

+ $m=11$ thì $n\in\{1\}$: Có 1 cặp (m,n)

+ $m=1$: Đồ thị hàm số $g(a)$ là đường thẳng ($g(a)=a;g(a)=2a$) không thể cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại giao điểm $a_0\ne 0$ được vì tiếp tuyến của hàm số $f(a)$ tại điểm có hoành độ $a=0$ là đường thẳng $y=a$.

Vậy có cả thảy 9 cặp (m,n).

Câu 15. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực x và y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1+y^2}\le\left(x^2-2x+1\right)+y^2+1$.

Đặt $t=x^2-2x+1+y^2\Rightarrow t\ge 0$. Khi đó ta có $2^t\le t+1,\ \forall t\ge 0$.

Đặt $f(t)=2^t-t-1,\ \forall t\ge 0$, ta có: $f'(t)=2^t\ln 2-1$, cho $f'(t)=0$.

Ta nhận thấy phương trình $f'(t)=0$ có một nghiệm nên phương trình $f(t)=0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác ta có $f(0)=f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(t)=0$ có hai nghiệm $t=1$ và $t=0$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0		1		$+\infty$
f(t)	0	−	0	+	

Khi đó $f(t)\le 0 \Leftrightarrow t\in[0;1]$. Suy ra $x^2-2x+1+y^2\le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

Khi đó tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một hình tròn (S) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Ta có: $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$.

Khi đó ta cũng có tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một đường thẳng $\Delta: 2Px+(P-4)y+P=0$.

Để Δ và (S) có điểm chung, ta suy ra $d(I,\Delta)\le 1$.

$\Leftrightarrow \dfrac{|2P+P|}{\sqrt{(2P)^2+(P-4)^2}}\le 1 \Leftrightarrow 3|P|\le\sqrt{5P^2-8P+16}$

$\Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$.

Ta suy ra $P_{\max}=-1+\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$

Câu 16. **(Mã 123 2017)** Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$

A. $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$

C. $P_{\min}=\dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$

Lời giải

Chọn A

Với x,y dương và kết hợp với điều kiện của biểu thức $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$ ta được $1-xy>0$

Biến đổi $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$

$\Leftrightarrow \log_3(1-xy)-\log_3(x+2y)=-3(1-xy)+(x+2y)-\log_3 3$

$\Leftrightarrow \left[\log_3(1-xy)+\log_3 3\right]+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y)$

$\Leftrightarrow \log_3\left[3(1-xy)\right]+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y) (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $D=(0;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0$ với mọi $x\in D$ nên hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $D=(0;+\infty)$

Từ đó suy ra $(1)\Leftrightarrow 3(1-xy)=x+2y\Leftrightarrow 3-2y=x(1+3y)\Leftrightarrow x=\dfrac{3-2y}{1+3y}$ (do $y>0$)

Theo giả thiết ta có $x>0, y>0$ nên từ $x=\dfrac{3-2y}{1+3y}$ ta được $0<y<\dfrac{3}{2}$.

$P=x+y=\dfrac{3-2y}{1+3y}+y=\dfrac{3y^2-y+3}{3y+1}$

Xét hàm số $g\left(y\right)=\dfrac{3y^2-y+3}{3y+1}$ với $0<y<\dfrac{3}{2}$

$g'\left(y\right)=\dfrac{9y^2+6y-10}{\left(3y+1\right)^2}=0$ ta được $y=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{3}$.

Từ đó suy ra $\min P=g\left(\dfrac{-1+\sqrt{11}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Câu 17. **(Mã 110 2017)** Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+2b$.

A. $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{10}-7}{2}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$ **C.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-5}{2}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $ab<1$.

Ta có $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3\Leftrightarrow\log_2\left[2\left(1-ab\right)\right]+2\left(1-ab\right)=\log_2\left(a+b\right)+\left(a+b\right)$ $(*)$.

Xét hàm số $y=f\left(t\right)=\log_2 t+t$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f\left[2\left(1-ab\right)\right]=f\left(a+b\right)\Leftrightarrow 2\left(1-ab\right)=a+b\Leftrightarrow a\left(2b+1\right)=2-b\Leftrightarrow a=\dfrac{-b+2}{2b+1}$.

Do $a>0,\ b>0$ nên $\dfrac{-b+2}{2b+1}>0\Rightarrow 0<b<2$.

Khi đó: $P=a+2b=\dfrac{-b+2}{2b+1}+2b$. Xét hàm số $g(b)=\dfrac{-b+2}{2b+1}+2b$ trên khoảng $\left(0;2\right)$.

$$g'\left(b\right)=\frac{-5}{\left(2b+1\right)^2}+2=0\Leftrightarrow\left(2b+1\right)^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{4}\notin\left(0;2\right)\\ b=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{4}\in\left(0;2\right)\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên

x	0		$\frac{-2+\sqrt{10}}{4}$		2
$g'(b)$		$-$	0	$+$	
$g(b)$		$\searrow$	$\frac{-3+2\sqrt{10}}{2}$	$\nearrow$	

Vậy $P_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{10}-2}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Câu 18. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x+1)\ln x+(y+1)\ln y$.

A. $P_{\max}=10$. **B.** $P_{\max}=0$. **C.** $P_{\max}=1$. **D.** $P_{\max}=\ln 2$.

Lời giải

$2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)-\ln 2}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}.2^{\ln 2}\Leftrightarrow 10^{\ln(x+y)}=2^{\ln 10}$

$\Leftrightarrow \ln(x+y)=\log\left(2^{\ln 10}\right)\Leftrightarrow \ln(x+y)=\ln 10.\log 2\Leftrightarrow e^{\ln(x+y)}=e^{\ln 10.\log 2}\Leftrightarrow x+y=10^{\log 2}\Leftrightarrow x+y=2$

.

Do đó $P=(x+1)\ln x+(3-x)\ln(2-x)$.

Xét hàm số $f(x)=(x+1)\ln x+(3-x)\ln(2-x)$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-\ln(2-x)-\dfrac{3-x}{2-x}=\ln\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{2-2x}{x(2-x)}$.

$f''(x)=-\dfrac{1}{(2-x)^2}.\dfrac{2-x}{x}-\dfrac{2x^2-4x+4}{\left(2x-x^2\right)^2}<0,\forall x\in(0;2)$

Do đó $f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;2)$

Mà $x=1$ là một nghiệm của pt $f'(x)=0$ nên phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Lập bảng biến thiên ta được $\max f(x)=f(1)=0$.

Câu 19. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho các số thực x,y thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ và $\log_3\dfrac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Với điều kiện biểu thức đề bài có nghĩa, ta có

$\log_3\dfrac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0\Leftrightarrow \log_3(x+y)-\log_3(1-xy)+xy+x+y-1=0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)(*)$

Xét hàm số $f(x)=\log_3 t+t$ trên $(0;2)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t}\ln 3+1>0,\forall t\in(0;2)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Do đó từ $(*)$ ta có $x+y=1-xy\Leftrightarrow y(1+x)=1-x\Leftrightarrow y=\dfrac{1-x}{1+x}$

$P=2x+y=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$

$P'(x)=2-\dfrac{2}{(1+x)^2}\ge 0,\forall x\in[0;1]$

Suy ra $\min P=P(0)=1$ đạt được khi $x=0,y=1$.

Câu 20. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho các số thực a,b thỏa mãn $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $P=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b=a^k$. Khẳng định nào sau đây là sai

A. $k \in [2;3]$.　　**B.** $k \in (0;1)$.　　**C.** $k \in [0;1]$.　　**D.** $k \in \left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có $a \ge b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$.

$$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a ab + \sqrt{\log_a a - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}.$$

Đặt $t = \sqrt{1 - \log_a b}$ $(t \ge 0) \Rightarrow \log_a b = 1 - t^2$. Ta có: $P = -t^2 + t + 2$ trên $[0; +\infty)$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
P	$\nearrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\searrow$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = \dfrac{1}{2}$.

Với $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \sqrt{1 - \log_a b} \Leftrightarrow \log_a b = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow b = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$.

Câu 21. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}(2a - 8b) = 1$. Tính $P = \dfrac{a}{b}$ khi biểu thức $S = 4a + 6b - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{8}{5}$　　**B.** $\dfrac{-13}{2}$　　**C.** $\dfrac{-13}{4}$　　**D.** $\dfrac{17}{44}$

Lời giải

Chọn B

$\log_{a^2+4b^2+1}(2a - 8b) = 1 \Leftrightarrow 2a - 8b = a^2 + 4b^2 + 1$

Ta có:

$$\begin{cases}2a-8b=a^2+4b^2+1\\ S=4a+6b-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-8b=a^2+4b^2+1\\ a=\dfrac{S-6b+5}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\left(\dfrac{S-6b+5}{4}\right)-8b=\left(\dfrac{S-6b+5}{4}\right)^2+4b^2+1\\ a=\dfrac{S-6b+5}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8S-48b+40-128b=S^2+36b^2+25-12Sb+10S-60b+64b^2+16\\ a=\dfrac{S-6b+5}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}100b^2+2(58-6S)b+2S+1+S^2=0\\ a=\dfrac{S-6b+5}{4}\end{cases}$$

$\Delta=(58-6S)^2-100.(1+S)^2\geq 0\Leftrightarrow -64S^2-896S+3264\geq 0$

$\Leftrightarrow -17\leq S\leq 3$

Giá trị lớn nhất của S là: $3\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{13}{5}\\ b=\dfrac{-2}{5}\end{cases}$

Suy ra $\dfrac{a}{b}=\dfrac{13}{2}$

Câu 22. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho a,b là các số dương thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a}\leq b<a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=\dfrac{1}{1-\log_a b}+4.\left(\log_b a-1\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\log_b a}}+4.\left(\log_b a-1\right)$

Đặt $t=\log_b a$. Vì $\sqrt{a}\leq b<a\Rightarrow\log_b\left(\sqrt{a}\right)\leq 1\leq\log_b a\Leftrightarrow\dfrac{t}{2}<1<t\Leftrightarrow 1<t<2$.

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{1-\frac{1}{t}}+4\left(t-1\right)=\dfrac{t}{t-1}+4\left(t-1\right)$ với $t\in\left(1;2\right)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t-1}+4\left(t-1\right)$ với $t\in\left(1;2\right)$.

$f'(t)=\dfrac{-1}{\left(t-1\right)^2}+4,\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{2}(tm)\\ t=\dfrac{1}{2}(l)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	1		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$f'(t)$				-	0	+		
$f(t)$			$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	6	

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{(1;2)} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 5.

Câu 23. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5) = \log_5(a+b) + a+3b-4$

$\Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5) + (4a+2b+5) = \log_5[5(a+b)] + 5(a+b)$ (*).

Xét hàm $f(x) = \log_5 x + x, x > 0$.

Đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{x.\ln 5} + 1 > 0, \forall x > 0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình (*) viết lại:

$$f(4a+2b+5) = f(5(a+b)) \Leftrightarrow 4a+2b+5 = 5(a+b) \Leftrightarrow a+3b=5.$$

Mặt khác: $5^2 = (a+3b)^2 \le (1^2+3^2).(a^2+b^2) \Rightarrow T = a^2+b^2 \ge \frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}$.

Câu 24. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Với hai số thực a,b bất kì, ta kí hiệu $f_{(a,b)}(x) = |x-a| + |x-b| + |x-2| + |x-3|$.Biết rằng luôn tồn tại duy nhất số thực x_0 để $\min\limits_{x\in R} f_{(a,b)}(x) = f_{(a,b)}(x_0)$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $a^b = b^a$ và $0 < a < b$. Số x_0 bằng

A. $2e-1$ **B.** $2,5$ **C.** e **D.** $2e$

Lời giải

Ta có $a^b = b^a \Leftrightarrow b\ln a = a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ $(*)$.

Xét hàm số $y = \frac{lnx}{x}$, trên tập xác định $D = (0;+\infty)$

$y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = e$

Bảng biến thiên

x	0	a		e		b	$+\infty$
y'		|	$+$	0	$-$	|	
y	$-\infty$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$		0

Có $\begin{cases} 0 < a < b \\ f(a) = f(b) \end{cases}$

Kết hợp với bảng biến thiên suy ra $a < e < b \; (1)$.

Ta lại có $f_{(a,b)}(x) = |x-a| + |b-x| + |x-2| + |3-x| \ge |x-a+b-x| + |x-2+3-x| = b-a+1$.

Suy ra $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_{(a,b)}(x) = b-a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \le x \le b \\ 2 \le x \le 3 \end{cases} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra số thực duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x = e$

Thử lại: khi $x = e$ thì $f(e) = b-a+1$.

Vậy $\min\limits_{x\in R} f_{(a,b)}(x) = f_{(a,b)}(x_0) = f_{(a,b)}(e)$

Câu 25. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số thực $a > 1, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2 - 4(x_1+x_2)$.

A. $3\sqrt[3]{4}$. **B.** 4 **C.** $3\sqrt[3]{2}$. **D.** $\sqrt[3]{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^x b^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow x + (x^2-1)\log_a b = 0 \Leftrightarrow (\log_a b)x^2 + x - \log_a b = 0$

Do phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 nên theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-1}{\log_a b} = -\log_b a \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$

Khi đó $S = \dfrac{1}{\log_b^2 a} + 4\log_b a$

Đặt $t = \log_b a$, do $a > 1, b > 1 \Rightarrow t > 0$. Khi đó $S = \dfrac{1}{t^2} + 4t = \dfrac{1}{t^2} + 2t + 2t \ge 3\sqrt[3]{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{1}{t^2} = 2t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\min S = 3\sqrt[3]{4}$

Câu 26. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y} \ge x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \log_x\sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Cách 1.

Ta có:

$y^x\left(e^x\right)^{e^y} \ge x^y\left(e^y\right)^{e^x} \Leftrightarrow \ln\left(y^x\left(e^x\right)^{e^y}\right) \ge \ln\left(x^y\left(e^y\right)^{e^x}\right)$

$\Leftrightarrow x\ln y + xe^y \ge y\ln x + ye^x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x + e^x} \ge \frac{y}{\ln y + e^y}$ (*) (vì $y = e^x + \ln x$ có

$y' = e^x + \frac{1}{x} > 0; \forall x > 1$ nên $y \ge y(1) = e > 0$)

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t}{\ln t + e^t}$ trên $(1;+\infty)$ ta có $f'(t) = \frac{\ln t + e^t - 1 - te^t}{\left(\ln t + e^t\right)^2}$. Với hàm số

$g(t) = \ln t + e^t - 1 - te^t$ có $g'(t) = \left(\ln t + e^t - 1 - te^t\right)' = \frac{1}{t} - te^t < 0, \forall t > 1$

Nên $g(t) < g(1) = -1 \Rightarrow f'(t) < 0; \forall t > 1$

$\Rightarrow y = f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên với (*) $f(x) \ge f(y) \Rightarrow y \ge x > 1$

Khi đó $P = \log_x\sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \ge \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\log_x y.\frac{1}{\log_x y}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{2}\log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow \left(\log_x y\right)^2 = 2 \Leftrightarrow y = x^{\sqrt{2}}$

Vậy: $P_{\min} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2:

Với $x, y > 1$ thì $\log_x y; \log_y x$ là các số dương, ta có:

$P = \log_x\sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \ge \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\log_x y.\frac{1}{\log_x y}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{2}\log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow \left(\log_x y\right)^2 = 2 \Leftrightarrow y = x^{\sqrt{2}}$,

Thay $\begin{cases} y = x^{\sqrt{2}} \\ x > 1 \end{cases}$ vào điều kiện thấy thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Vậy $P_{\min} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **B.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Lời giải

Để $\frac{1-y}{x+3xy} > 0$ mà từ giả thiết $x, y > 0$ suy ra $1 - y > 0 \Leftrightarrow y < 1$. Vậy ĐKXĐ: $x > 0; 0 < y < 1$.

Ta có: $\log_3 \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 \Leftrightarrow \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \dfrac{3(1-y)}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(1-y)}{x+3xy} = \dfrac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y).3^{3-3y} = (3xy+x).3^{3xy+x} (*)$

Xét $f(t) = t.3^t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 3^t + t.3^t.\ln 3 > 0$ với $\forall t > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y) = f(3xy+x)$ với $3-3y > 0, 3xy + x > 0$ nên $3-3y = 3xy + x \Leftrightarrow y = \dfrac{3-x}{3(x+1)}$.

Ta có $P = x + y = x + \dfrac{3-x}{3(x+1)} = (x+1) + \left(\dfrac{3-x}{3(x+1)} + \dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{4}{3}$

$$P = (x+1) + \frac{4}{3(x+1)} - \frac{4}{3} \ge 2\sqrt{(x+1).\frac{4}{3(x+1)}} - \frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}.$$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \dfrac{4}{3(x+1)} \\ y = \dfrac{3-x}{3(x+1)} \\ x > 0; 0 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}.$

Câu 28. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $P_{\min} = 9$ **B.** $P_{\min} = 8$ **C.** $P_{\min} = \dfrac{25\sqrt{2}}{4}$ **D.** $P_{\min} = \dfrac{17}{2}$

Lời giải.

Ta có:

$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (xy) \le \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow xy \ge x + y^2$

$\Leftrightarrow x(y-1) \ge y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{y^2}{y-1} \\ y > 1 \end{cases}$ (Vì $x; y > 0$).

Ta có: $P = x + 3y \ge \dfrac{y^2}{y-1} + 3y = 4y + 1 + \dfrac{1}{y-1}$.

Xét hàm số: $f(y) = 4y + 1 + \dfrac{1}{y-1}; y > 1$.

Đạo hàm: $f'(y) = 4 - \dfrac{1}{(y-1)^2}$.

$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{2} (n) \\ y = \dfrac{1}{2} (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

y	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 29. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019}x+\log_{2019}y\ge\log_{2019}\left(x^2+y\right)$. Gọi $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2x+y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $T_{\min}\in(7;8)$ **B.** $T_{\min}\in(6;7)$ **C.** $T_{\min}\in(5;6)$ **D.** $T_{\min}\in(8;9)$

Lời giải.

Ta có:

$\log_{2019}x+\log_{2019}y\ge\log_{2019}\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow\log_{2019}xy\ge\log_{2019}\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow xy\ge x^2+y$

$\Leftrightarrow y(x-1)\ge x^2\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge\dfrac{x^2}{x-1}\\x>1\end{cases}$

Ta có: $T=2x+y\ge2x+\dfrac{x^2}{x-1}=3x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

Xét hàm số: $f(x)=3x+1+\dfrac{1}{x-1};x>1$.

Đạo hàm: $f'(x)=3-\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1+\dfrac{\sqrt3}{3}(do\ x>1)$.

Bảng biến thiên.

x	1		$1+\frac{\sqrt3}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt3$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó: $T_{\min}=4+2\sqrt3$.

Câu 30. **(Mã 105 2017)** Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi số thực x,y thỏa mãn $e^{x+y}\le e(x+y)$.Tìm số phần tử của S.

A. 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)+f(y)=1\Leftrightarrow9^{x+y}=m^4\Rightarrow x+y=\log_9m^4=\log_3m^2$

Đặt $x+y=t,t>0$. Vì $e^{x+y}\le e(x+y)\Rightarrow e^t\le et\Leftrightarrow t\le1+\ln t\Leftrightarrow1+\ln t-t\ge0,\forall t>0$ (1)

Xét hàm $f(t)=\ln t+1-t$ với $t>0$. $f'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}=0 \Rightarrow t=0$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)\le f(1),\forall t>0 \Leftrightarrow 1+\ln t-t\le 0,\forall t>0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $t=1\Rightarrow \log_3 m^2=1\Rightarrow m^2=3\Rightarrow m=\pm\sqrt{3}$

Câu 31. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ và có đạo hàm cấp hai $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	n^2	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi a,b,c,n là các số thực và biểu thức: $P=-\left(e^{f(a)}+e^{f(b)}+e^{f(c)}\right)+\frac{3}{2}\left[f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+1\right]^2$. Khẳng định đúng với mọi $a,b,c,n\in\mathbb{R}$ là

A. $0<P<3$. **B.** $7-3e\le P\le 0$. **C.** $P\ge 3$. **D.** $P<7-3e$.

Lời giải

Ta có $e^{f(a)}+e^{f(b)}+e^{f(c)}\ge 3\sqrt[3]{e^{f(a)+f(b)+f(c)}}$.

Mặt khác do $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là hàm lồi, áp dụng bất đẳng thức lồi ta có

$f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

Do đó $e^{f(a)}+e^{f(b)}+e^{f(c)}\ge 3\sqrt[3]{e^{3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}}=3e^{f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}$

Suy ra $P\le -3e^{f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}+\frac{3}{2}\left[f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+1\right]^2$. Đặt $t=f\left(\frac{a+b+c}{3}\right), t\ge n^2\ge 0$

Ta có $P\le g(t)$ với $g(t)=-3e^t+\frac{3}{2}(t+1)^2$

$g'(t)=-3e^t+3(t+1); g''(t)=-3e^t+3=-3\left(e^t-1\right)\le 0,\forall t\ge 0$. Nên $g'(t)$ là hàm nghịch biến trên $[0;+\infty)$. $\Rightarrow g'(t)\le g(0)=0,\forall t\in[0;+\infty)\Rightarrow g(t)\le g(0)$

Do đó $P\le g(0)=\frac{-3}{2}<7-3e$.

Câu 32. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m)+f(2m-2^{12})<0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0\in[1513;2019)$ **B.** $m_0\in[1009;1513)$ **C.** $m_0\in[505;1009)$ **D.** $m_0\in[1;505)$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $-x\in\mathbb{R}$, ta có $f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ. (1)

Mặt khác $f'(x)=(2^x+2^{-x})\ln 2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (2)

Ta có $f(m)+f(2m-2^{12})<0\Leftrightarrow f(2m-2^{12})<-f(m)$.

Theo (1) suy ra $f(2m-2^{12})<f(-m)$.

Theo (2) ta được $2m-2^{12}<-m\Leftrightarrow 3m<2^{12}\Leftrightarrow m<\dfrac{2^{12}}{3}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\le 1365\Rightarrow m_0=1365$. Vậy $m_0\in[1009;1513)$.

Câu 33. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=m\log_2^2 x-2\log_2 x+2m+1$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất có hoành độ thuộc khoảng $[1;+\infty)$.

A. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

B. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

C. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

D. $m\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $m\log_2^2 x-2\log_2 x+2m+1=0$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $[1;+\infty)$.

Đặt $t=\log_2 x\ge 0\ \ \forall x\in[1;+\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow mt^2-2t+2m+1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2t-1}{t^2+2}$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình có duy nhất một nghiệm $t\in[0;+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t-1}{t^2+2}$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2(t^2+2)-2t(2t-1)}{(t^2+1)^2}=\dfrac{-2t^2+2t+4}{(t^2+1)^2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow -2t^2+2t+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\notin[0;+\infty)\\ t=2\in[0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra: ycbt $\Leftrightarrow m \in \left[-\frac{1}{2};0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 34. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho $x;y$ là hai số thực dương thỏa mãn $x \neq y$ và $\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y+\frac{1}{2^y}\right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+3y^2}{xy-y^2}$ bằng

A. $\frac{13}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** -2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y+\frac{1}{2^y}\right)^x \Leftrightarrow \left(4^x+1\right)^y < \left(4^y+1\right)^x$

$\Leftrightarrow y\ln\left(4^x+1\right) < x\ln\left(4^y+1\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(4^x+1\right)}{x} < \frac{\ln\left(4^y+1\right)}{y}$ (vì $x,y>0$).

Xét hàm số $f(t)=\frac{\ln\left(4^t+1\right)}{t}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{\frac{4^t.\ln 4}{4^t+1}.t-\ln\left(4^t+1\right)}{t^2}=\frac{4^t\ln 4^t-\left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)}{\left(4^t+1\right)t^2}<0, \forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lại có $f(x)<f(y) \Rightarrow x>y$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$, khi đó $t\in(1;+\infty) \Rightarrow P=\frac{t^2+3}{t-1}$.

Cách 1: Xét $P=\frac{t^2+3}{t-1}$ với $t\in(1;+\infty)$, ta có $P'=\frac{t^2-2t-3}{(t-1)^2}; P'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t		1		3		$-\infty$
P'			$-$	0	$+$	
P			$\searrow$	6	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 khi $t=3$ hay $x=3y$.

Cách 2: Ta có $P=\frac{t^2+3}{t-1}=t-1+\frac{4}{t-1}+2\geq 2\sqrt{4}+2=6$ $(AM-GM)$.

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 khi $t=3$ hay $x=3y$.

Câu 35. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $2\left(x^2+y^2+4\right)+\log_2\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{2}(xy-4)^2$. Khi $x+4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2\left(x^2+y^2+4\right)+\log_2\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{2}(xy-4)^2$

$\Leftrightarrow 2(x+y)^2-4xy+8+1+\log_2(x+y)-\log_2(xy)=\frac{1}{2}(xy)^2-4xy+8$

$\Leftrightarrow 2(x+y)^2+\log_2(x+y)=2\left(\frac{xy}{2}\right)^2+\log_2\left(\frac{xy}{2}\right) \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2+\log_2 t$, với $t\in(0;+\infty)$

$f'(t)=4t+\frac{1}{t.\ln 2}>0,\forall t>0$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ $(1)\Rightarrow f(x+y)=f\left(\frac{xy}{2}\right)\Leftrightarrow 2(x+y)=xy$.

Ta có: $2(x+y)=xy\Leftrightarrow x(y-2)=2y\Rightarrow x=\frac{2y}{y-2};y>2$.

$P=x+4y=\frac{2y}{y-2}+4y=10+4(y-2)+\frac{4}{y-2}\ge 10+2\sqrt{4(y-2).\frac{4}{y-2}}=18$

$\Rightarrow P_{\min}=18$ khi $4(y-2)=\frac{4}{y-2}\Leftrightarrow y-2=1\Leftrightarrow y=3$.

$y=3\Rightarrow x=\frac{2y}{y-2}=6\Rightarrow\frac{x}{y}=2$.

Câu 36. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Biết phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$

A. $T_{\min}=\frac{4}{3}$. **B.** $T_{\min}=4$. **C.** $T_{\min}=2$. **D.** $T_{\min}=\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$.

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được

$x^2+ax+b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=-ax-b-\frac{c}{x}\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(-ax-b-\frac{c}{x}\right)^2$.

Ta có $\left(-ax-b-\frac{c}{x}\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$.(theo BĐT Cauchy - Schwarz)

Khi đó $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 \le \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge \frac{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)}$.(1)

Đặt $t=x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2$ (theo BĐT Cô Si).

Khảo sát hàm số $f(t)=\frac{t^2}{t+1}, t\in[2;+\infty)$ có $f'(t)=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0, \forall t\in[2;+\infty)$.

Do đó $\min\limits_{[2;+\infty)} f(t)=f(2)=\frac{4}{3}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{4}{3}$.

Dấu " = " $\Leftrightarrow a=-b=c=\frac{2}{3}$.

Phương trình có nghiệm thi $T\ge\min\limits_{[2;+\infty)} f(t)$.

$\Rightarrow x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1=0$ có nghiệm $x=-1\Rightarrow t=2$ thỏa mãn.

Vậy $T_{\min}=\frac{4}{3}$.

Câu 37. (Chuyên KHTN - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2\frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=(x+y-1)(2x+2y-1)-4(xy+1)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{5x+3y-2}{2x+y+1}$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

• Ta có: $\log_2\frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=(x+y-1)(2x+2y-1)-4(xy+1)$

$\Leftrightarrow \log_2\frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=2x^2+2y^2-3x-3y-3$

$\Leftrightarrow \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=\frac{2^{2x^2+2y^2}}{2^{3x+3y+3}} \Leftrightarrow (3x+3y+4).2^{3x+3y+3}=\left(x^2+y^2\right).2^{2x^2+2y^2}$

$\Leftrightarrow 2.(3x+3y+4).2^{3x+3y+3}=2.\left(x^2+y^2\right).2^{2x^2+2y^2}$

$\Leftrightarrow (3x+3y+4).2^{3x+3y+4}=\left(2x^2+2y^2\right).2^{2x^2+2y^2}$ (1)

• Đặt $f(t)=t.2^t\ (t>0)$.

Ta xét: $f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0,\ \forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lúc đó; (1) có dạng: $f(3x+3y+4)=f\left(2x^2+2y^2\right)$

$\Leftrightarrow 3x+3y+4=2x^2+2y^2 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-3(x+y)-4=-x^2+2xy-y^2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4=-(x-y)^2$

$\Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4\le 0 \Rightarrow -1\le x+y\le 4 \Rightarrow x+y-4\le 0$.

- Khi đó: $P=\dfrac{5x+3y-2}{2x+y+1}=2+\dfrac{x+y-4}{2x+y+1}\le 2+0=2$.

- Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt được khi $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y+4=2x^2+2y^2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$.

Câu 38. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho các số thực x,y thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y$

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0 \Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+xy+x+y-1=0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y)+x+y=\log_3(1-xy)+1-xy$

Xét hàm số đặc trưng $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\ \forall t>0$

Hàm số $f(t)$ đồng biến với $t>0$

Có $f(x+y)=f(1-xy)\Leftrightarrow x+y=1-xy \Leftrightarrow x(y+1)=1-y \Leftrightarrow x=\dfrac{1-y}{y+1}$

Ta có $P=2x+y=\dfrac{2-2y}{y+1}+y=-3+\dfrac{4}{y+1}+y+1\ge -3+2\sqrt{\dfrac{4}{y+1}(y+1)}=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Câu 39. **(Chuyên Chu Văn An - 2020)** Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3\dfrac{x+4y}{x+y}=2x-y+1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x^4y+2xy+2y^2}{x(x+y)^2}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\dfrac{x+4y}{x+y}=2x-y+1 \Leftrightarrow \log_3(x+4y)+(x+4y)=\log_3 3(x+y)+3(x+y)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f(x+4y)=f(3(x+y))$ và $(x+4y)>0; 3(x+y)>0$.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow x+4y=3(x+y)\Leftrightarrow y=2x$.

$$P=\frac{3x^4y+2xy+2y^2}{x(x+y)^2}=\frac{6x^5+12x^2}{9x^3}=\frac{1}{9}\left(6x^2+\frac{12}{x}\right)=\frac{1}{9}\left(6x^2+\frac{6}{x}+\frac{6}{x}\right)\geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.Vậy $P_{Min}=2$.

Câu 40. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{x^2}=b^{y^2}=(ab)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\sqrt{2}x+y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[10;15)$. **B.** $[6;10)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $[4;6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $a^{x^2}=(ab)^2\Rightarrow x^2=\log_a(ab)^2=2(1+\log_a b)\Rightarrow x=\sqrt{2+2\log_a b}$

$b^{y^2}=(ab)^2\Rightarrow y^2=\log_b(ab)^2=2(1+\log_b a)\Rightarrow y=\sqrt{2+2\log_b a}$

$P=2\sqrt{2}x+y=4\sqrt{1+\log_a b}+\sqrt{2+2\log_b a}$.

Đặt $t=\log_a b\ (t>0)$ ta được: $P=4\sqrt{1+t}+\sqrt{2+\frac{2}{t}}$.

Xét hàm số $f(t)=4\sqrt{1+t}+\sqrt{2+\frac{2}{t}}$, với $t\in(0;+\infty)$.

$f'(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t^2\sqrt{2+\frac{2}{t}}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t^2\sqrt{2+\frac{2}{t}}}=0\Leftrightarrow 2t^2\sqrt{2+\frac{2}{t}}=\sqrt{1+t}$

$\Leftrightarrow 4t^4\left(2+\frac{2}{t}\right)=1+t\Leftrightarrow 8t^4+8t^3-t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$.

t	0		$\frac{1}{2}$		
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$3\sqrt{6}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $\text{Min}P=\min\limits_{(0;+\infty)}f(t)=3\sqrt{6}\in[6;10)$ khi $\begin{cases}\log_a b=\frac{1}{2}\\ x=\sqrt{3}\\ y=\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b^2\\ x=\sqrt{3}\\ y=\sqrt{6}\end{cases}$.

Câu 41. (Chuyên Lào Cai - 2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_\pi x+\log_\pi y\geq\log_\pi(x+y^2)$. Biểu thức $P=x+8y$ đạt giá trị nhỏ nhất của bằng:

A. $P_{\min}=16$. **B.** $P_{\min}=\frac{33}{2}$. **C.** $P_{\min}=11\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=\frac{31}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ đề bài $xy\geq x+y^2$

$\Leftrightarrow x(y-1) \ge y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{y^2}{y-1} \\ y > 1 \end{cases}$ (Vì $x; y > 0$).

Ta có: $P = x + 8y \ge \dfrac{y^2}{y-1} + 8y = 9y + 1 + \dfrac{1}{y-1}$.

Xét hàm số: $f(y) = 9y + 1 + \dfrac{1}{y-1}; y > 1$.

Đạo hàm: $f'(y) = 9 - \dfrac{1}{(y-1)^2}$.

$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} (l) \end{array} \right.$.

Bảng biến thiên, ta thấy giá trị nhỏ nhất của $f(y)$ là $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = 16$.

Vậy $P_{\min} = 16$ khi $x = \dfrac{16}{3}$.

Câu 42. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$?

A. $T = 9$. **B.** $T = \dfrac{7}{3}$. **C.** $T = \dfrac{5}{3}$. **D.** $T = 7$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$

Khi đó: $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 2 \Leftrightarrow y - 1 = \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{x-1} + 1$

Suy ra: $P = 2x + 3y = 2x + \dfrac{6}{x-1} + 3 = 2(x-1) + \dfrac{6}{x-1} + 5$

Cách 1: Dùng bất đẳng thức

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $2(x-1) + \dfrac{6}{x-1} \ge 2\sqrt{2(x-1).\dfrac{6}{x-1}}$

$\Rightarrow 2(x-1) + \dfrac{6}{x-1} \ge 4\sqrt{3} \Rightarrow P \ge 4\sqrt{3} + 5$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2(x-1) = \dfrac{6}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3}\ (N) \\ x = 1 - \sqrt{3}\ (L) \end{array} \right.$

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1 = \dfrac{2\sqrt{3} + 3}{3}$.

Do đó: $3x - 2y = 3(1 + \sqrt{3}) - 2\left(\dfrac{2\sqrt{3} + 3}{3}\right) = 1 + \dfrac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a = 1;\ b = \dfrac{5}{3} \Rightarrow T = ab = \dfrac{5}{3}$.

Cách 2: Dùng bảng biến thiên

Ta có: $P=2x+\dfrac{6}{x-1}+3 \Rightarrow P'=2-\dfrac{6}{(x-1)^2}$

$P'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3}\ (N) \\ x=1-\sqrt{3}\ (L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{3}+5$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P_{\min}=4\sqrt{3}+5 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{3} \Rightarrow y=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\dfrac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a=1;\ b=\dfrac{5}{3} \Rightarrow T=ab=\dfrac{5}{3}$.

Câu 43. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+2}(4a+6b-7)=1$ và $27^c.81^d=6c+8d+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-c)^2+(b-d)^2$.

A. $\dfrac{49}{25}$. **B.** $\dfrac{64}{25}$. **C.** $\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{a^2+b^2+2}(4a+6b-7)=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+2=4a+6b-7 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-3)^2=4\quad (1)$.

Lại có $27^c.81^d=6c+8d+1 \Leftrightarrow 3^{3c+4d}=2(3c+4d)+1\quad (2)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t-2t-1$ trên $\mathbb{R}$.

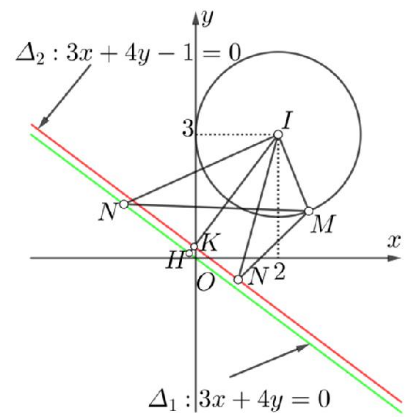
Khi đó $f(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t)=3^t.\ln 3-2$.

Vì phương trình $f'(t)=0$ có đúng một nghiệm $\left(t_0=\log_3\left(\dfrac{2}{\ln 3}\right)\right)$ nên phương trình $f(t)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Mặt khác, $f(0)=f(1)=0$ nên $S=\{0;1\}$ là tập nghiệm của phương trình $f(t)=0$.

Do đó, (2) tương đương với $3c+4d=0$ hoặc $3c+4d=1\quad (3)$.

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, gọi điểm M có tọa độ (a,b) và điểm N có tọa độ (c,d). Khi đó, từ (1) suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(2;3)$, bán kính $r=2$ và từ (3) suy ra N thuộc đường thẳng $\Delta_1: 3x+4y=0$ hoặc $\Delta_2: 3x+4y-1=0$.

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-c)^2+(b-d)^2=MN^2$.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên các đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Nếu N di chuyển trên đường thẳng Δ_1 thì $MN \ge IN - IM \ge IH - r$ nên $MN \ge \frac{8}{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $N \equiv H$ và M là giao điểm của đoạn thẳng IH với đường tròn.

Nếu N di chuyển trên đường thẳng Δ_2 thì $MN \ge IN - IM \ge IK - r$ nên $MN \ge \frac{7}{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $N \equiv K$ và M là giao điểm của đoạn thẳng IK với đường tròn.

Từ hai trường hợp trên, ta có giá trị nhỏ nhất của MN bằng $\frac{7}{5}$. Từ đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $\frac{49}{25}$.

Câu 44. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^3 + 3y$ là

A. 16. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$, $0<y<6$.

Ta có $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x \Leftrightarrow \log_2 x + x^2 = \log_2(6-y) + 6x - xy$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x + x^2 = \log_2(6-y) + \log_2 x + 6x - xy$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2) + x^2 = \log_2[x(6-y)] + x(6-y)$ (*)

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t.\ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(x^2) = f(x(6-y)) \Leftrightarrow x^2 = x(6-y) \Leftrightarrow x = 6-y \Leftrightarrow y = 6-x$.

$\Rightarrow T = x^3 + 3(6-x) = x^3 - 3x + 18 = g(x)$.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 18$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin (0;+\infty) \\ x = 1 \in (0;+\infty) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| 18	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $T = g(x) \geq g(1) = 16$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 - x = 5 \end{cases}$.

Câu 45. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Xét các số thực dương a, b thoả mãn $\log_2 \dfrac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + b$.

A. $P_{\min} = -1 + 2\sqrt{5}$. **B.** $P_{\min} = 2 + \sqrt{5}$. **<u>C</u>.** $P_{\min} = -1 + \sqrt{5}$. **D.** $P_{\min} = 1 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Điều kiện $1 - ab > 0 \Leftrightarrow ab < 1$.

Ta có $\log_2 \dfrac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2(1-ab) - \log_2(a+b) = (a+b) - 2(1-ab) - 1$

$\Leftrightarrow \log_2(1-ab) + 1 + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + (a+b)$

$\Leftrightarrow \log_2 2(1-ab) + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + (a+b)$. (1)

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t.\ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow f(2(1-ab)) = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a + b \Leftrightarrow 2 - a = b(2a+1) \Leftrightarrow b = \dfrac{2-a}{2a+1}$.

Do $a, b > 0 \Rightarrow \dfrac{2-a}{2a+1} > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2$.

Khi đó $P = a + b = a + \dfrac{2-a}{2a+1} = \dfrac{2a^2+2}{2a+1}$

Xét hàm $g(a) = \dfrac{2a^2+2}{2a+1} \Rightarrow g'(a) = \dfrac{4a^2+4a-4}{(2a+1)^2} \Rightarrow g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bảng biến thiên

a	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		2
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	2	$\searrow$	$-1+\sqrt{5}$	$\nearrow$	2

Vậy $P_{\min} = -1 + \sqrt{5}$.

Câu 46. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)-\log_2 y=2x+2y+xy-5$.

Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+xy$ là bao nhiêu?

A. $30-20\sqrt{2}$. **B.** $33-22\sqrt{2}$. **C.** $24-16\sqrt{2}$. **D.** $36-24\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases}\dfrac{2-x}{2+x}>0\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+2}<0\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<2\\ y>0\end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$\log_2\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)-\log_2 y=2x+2y+xy-5$

$\Leftrightarrow \log_2(2-x)-\log_2(x+2)-\log_2 y=2(x-2)+y(x+2)-1$

$\Leftrightarrow \log_2(2-x)+1-(2x-4)=\log_2\left[(x+2)y\right]+y(x+2)$

$\Leftrightarrow \log_2(4-2x)+(4-2x)=\log_2\left[y(x+2)\right]+y(x+2)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t(t>0)$:

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0\forall t>0$

Suy ra: $f(t)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Mà $f(4-2x)=f\left[y(x+2)\right]$ nên $4-2x=y(x+2)\Leftrightarrow y=\dfrac{4-2x}{x+2}$

Vì $P=x^2+y^2+xy\geq\dfrac{3}{4}(x+y)^2$

Thay vào P ta có:

$P\geq\dfrac{3}{4}\left(x+\dfrac{4-2x}{x+2}\right)^2=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^2$

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+4}{x+2}$ trên khoảng $(-2;2)$:

$y'=\dfrac{2x(x+2)-(x^2+4)}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x-4}{(x+2)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2+4x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2+2\sqrt{2}\\ x=-2-2\sqrt{2}(l)\end{array}\right.$

(Vì $x\in(-2;2)$)

Lập bảng biến thiên:

x	-2		$-2+2\sqrt{2}$		2
y'	‖	-	0	+	
y	‖ $+\infty$	↘	$-4+4\sqrt{2}$	↗	2

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y_{\min}=-4+4\sqrt{2}$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{3}{4}\left(-4+4\sqrt{2}\right)^2=36-24\sqrt{2}$

Câu 47. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x+\log_2 y+1\geq \log_2\left(x^2+2y\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+2y$ bằng

A. $2\sqrt{2}+3$. **B.** $2+3\sqrt{2}$. **C.** $3+\sqrt{3}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Với $x>0; y>0$. Ta có:

$\log_2 x+\log_2 y+1\geq \log_2\left(x^2+2y\right) \quad (1)$

$\Leftrightarrow 2xy\geq x^2+2y \quad (2)$

$\Leftrightarrow 2y(x-1)\geq x^2$

$\Leftrightarrow x-1\geq \dfrac{x^2}{2y}>0$

$\Rightarrow x>1$.

Đặt $m=x+2y$ ta có:

$(2)\Leftrightarrow x(m-x)\geq x^2-x+m$

$\Leftrightarrow m(x-1)\geq 2x^2-x$

$\Leftrightarrow m\geq \dfrac{2x^2-x}{x-1}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x^2-x}{x-1}$ với $x>1$.

Ta tìm thấy $\min\limits_{(1;+\infty)} g(x)=3+2\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m\geq 3+2\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện bài toán).

Vậy GTNN của $x+2y$ là $3+2\sqrt{2}$.

Câu 48. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho các số thực x, y thuộc đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2020^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^3+6y^3+3x^2-9xy$. Tính $M.m$.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$2020^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}\Leftrightarrow 2020^{1-x-y}\left(y^2-2y+2022\right)=x^2+2021$

$\Leftrightarrow 2020^{1-y}\left[(1-y)^2+2021\right]=2020^x\left(x^2+2021\right)$.

Ta có

$f(t)=2020^t\left(t^2+2021\right)$ với $t\in[0;1]$ có $f(t)=2020^t.\ln 2020.\left(t^2+2021\right)+2.2020^t.t>0$.

Do vậy $f(t)=2020^t\left(t^2+2021\right)$ đồng biến trên khoảng $t\in[0;1]$.

Suy ra $f(1-y)=f(x)\Leftrightarrow x=1-y\Leftrightarrow y=1-x$.

Do vậy

$2x^3+6y^3+3x^2-9xy=2x^3+6(1-x)^3+3x^2-9x(1-x)$

$=2x^3+6-18x+18x^2-6x^3+3x^2-9x+9x^2=-4x^3+30x^2-27x+6$.

Xét $f(x)=-4x^3+30x^2-27x+6$ với $x\in(0;1)$.

Mà $f(x)=-4x^3+30x^2-27x+6$ nên $f'(x)=-12x^2+60x-27=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{9}{2}\text{(loai)} \end{array}\right.$.

Mặt khác $f(0)=6, f(1)=5, f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$. Do vậy $M=6$ và $m=-\frac{1}{2}$.

Vậy nên $M.m=-3$.

Câu 49. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Xét các số thực dương $x.y$ thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+3y$.

A. $P_{\min}=\frac{17}{2}$. **B.** $P_{\min}=8$. **C.** $P_{\min}=9$. **D.** $P_{\min}=\frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}(xy)\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\Leftrightarrow xy\ge x+y^2$

$\Leftrightarrow(y-1)x\ge y^2$.

Do $y>0\Rightarrow y^2>0\Rightarrow(y-1)x\ge y^2>0$. Mà $x>0$ nên $y-1>0$, hay $y>1$.

Khi đó ta có $x\ge\frac{y^2}{y-1}$. Suy ra $P=x+3y\ge\frac{y^2}{y-1}+3y$

Xét hàm số $f(y)=\frac{y^2}{y-1}+3y$ trên $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(y)=\frac{y^2-2y}{(y-1)^2}+3=\frac{4y^2-8y+3}{(y-1)^2}$; $f'(y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\notin(1;+\infty) \\ y=\frac{3}{2}\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

y	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$	||	$-$	0	$+$	
$f(y)$	|| $+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(y)\ge f\left(\frac{3}{2}\right)=9$. Vậy $P\ge f(y)\ge9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{y^2}{y-1} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$.

Câu 50. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$. Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\dfrac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right)$. Tổng $M + m$ bằng

A. $-4 - 3\sqrt{2}$. **B.** $-4 - 5\sqrt{2}$. **C.** $-4 - 2\sqrt{2}$. **D.** $-4 - 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} = 1$.

Đặt $t = \dfrac{5x - y + 2}{x + y + 4} \Rightarrow t(x + y + 4) = 5x - y + 2 \Leftrightarrow (t-5)x + (t+1)y + 4t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t-5)\left(x - \dfrac{y}{2}\right) + \left(\sqrt{3}t - \sqrt{3}\right)\dfrac{\sqrt{3}y}{2} = 2 - 4t$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có

$$(2-4t)^2 = \left[(t-5)\left(x - \frac{y}{2}\right) + \left(\sqrt{3}t - \sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}y}{2}\right]^2 \le \left[(t-5)^2 + \left(\sqrt{3}t - \sqrt{3}\right)^2\right]\left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right]$$

$\Rightarrow (2-4t)^2 \le \left[(t-5)^2 + \left(\sqrt{3}t - \sqrt{3}\right)^2\right].1 \Leftrightarrow 12t^2 - 24t \le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$ với $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Ta có $f'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$.

Khi đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right.$.

Ta có $f\left(-\sqrt{2}\right) = -5 - 4\sqrt{2}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f\left(-\sqrt{2}\right) = -5 + 4\sqrt{2}$.

Do đó $M = f(0) = 1$, $m = f\left(-\sqrt{2}\right) = -5 - 4\sqrt{2}$.

Vậy $M + m = -4 - 4\sqrt{2}$.

Câu 51. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hai số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_a\left(\dfrac{a^2 + 4b^2}{4}\right) + \dfrac{1}{4\log_{ab} b}$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{a^2+4b^2}{4}=\frac{a^2+(2b)^2}{4}\ge\frac{4ab}{4}=ab\Rightarrow\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)\ge\log_a ab$.

Do $a, b>1\Rightarrow\log_a b>\log_a 1=0$.

Ta có

$S=\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)+\frac{1}{4}\log_b ab\ge\log_a ab+\frac{1}{4}\log_b ab$

$=1+\log_a b+\frac{1}{4}(\log_b a+1)=\log_a b+\frac{1}{4\log_a b}+\frac{5}{4}$.

Đặt $t=\log_a b$, ta có $S\ge t+\frac{1}{4t}+\frac{5}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{4t}+\frac{5}{4}$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=1-\frac{1}{4t^2}=\frac{4t^2-1}{4t^2}$.

Khi đó $f'(t)=0\Leftrightarrow\frac{4t^2-1}{4t^2}=0\Leftrightarrow 4t^2-1=0\Leftrightarrow t^2=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	

Suy ra $\min\limits_{t\in(0;+\infty)} f(t)=\frac{9}{4}$ khi $t=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S=\frac{9}{4}$ khi $t=\log_a b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow b=\sqrt{a}$.

Câu 52. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Với các số thực dương x,y,z thay đổi sao cho $\log_2\left(\frac{x+2y+2z}{x^2+y^2+z^2}\right)=x(x-4)+y(y-8)+z(z-8)-2$, gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{x^2+y^2+z^2-4x-7y-11z+8}{6x+5y-86}$ thứ tự là M và m. Khi đó $M+m$ bằng:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $\log_2\left(\frac{x+2y+2z}{x^2+y^2+z^2}\right)=x(x-4)+y(y-8)+z(z-8)-2$

$\Leftrightarrow\log_2 4(x+2y+2z)-\log_2(x^2+y^2+z^2)=x^2+y^2+z^2-4(x+2y+2z)$

$\Leftrightarrow\log_2 4(x+2y+2z)+4(x+2y+2z)=\log_2(x^2+y^2+z^2)+x^2+y^2+z^2$ (1).

+) Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log_2 t+t, \forall t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+t>0, \forall t>0$.

+) Ta có (1) $\Leftrightarrow f\left(4(x+2y+2z)\right)=f\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=4x+8y+8z$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=36$.

+) Thay vào biểu thức T, ta được $T=\dfrac{(4x+8y+8z)-4x-7y-11z+8}{6x+5y-86}=\dfrac{y-3z+8}{6x+5y-86}$

$\Rightarrow T(6x+5y-86)=y-3z+8\Leftrightarrow 6Tx+(5T-1)y+3z=8+86T$.

$\Leftrightarrow 6T(x-2)+(5T-1)(y-4)+3(z-4)=8+86T-12T-4(5T-1)-12$

$\Leftrightarrow 6T(x-2)+(5T-1)(y-4)+3(z-4)=54T$

+) Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$\left|6T(x-2)+(5T-1)(y-4)+3(z-4)\right|\le\sqrt{(6T)^2+(5T-1)^2+3^2}.\sqrt{36}$

$\Leftrightarrow (54T)^2\le 36\left((6T)^2+(5T-1)^2+3^2\right)\Leftrightarrow 720T^2+360T-360\le 0\Leftrightarrow -1\le T\le\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $M+m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 53. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho các số thực x,y thỏa mãn $\ln y\ge\ln(x^3+2)-\ln 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=e^{4y-x^3-x-2}-\dfrac{x^2+y^2}{2}+x(y+1)-y$.

A. 1. **B.** 0. **C.** e. **D.** $\dfrac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Do $\ln y\ge\ln\left(x^3+2\right)-\ln 3\Leftrightarrow x^3+2\le 3y\Leftrightarrow 4y-x^3-x-2\ge y-x$

$\Rightarrow H\ge e^{y-x}-(y-x)-\dfrac{(y-x)^2}{2}$.

Đặt $t=y-x\Rightarrow t\ge\dfrac{x^3+2}{3}-x=\dfrac{x^3-3x+2}{3}=g(x)$ với $x\ge\sqrt[3]{-2}$.

$g'(x)=\dfrac{3x^2-3}{3}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1\Rightarrow g(x)\ge g(1)=0$, suy ra $t\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=e^t-t-\dfrac{t^2}{2}$ với $t\ge 0$.

$f'(t)=e^t-1-t$

$f''(t)=e^t-1$.

$f''(t)=0\Leftrightarrow e=0$.

Ta có bảng biến thiên như sau

t	0		$+\infty$
$f''(t)$	0	$+$	
$f'(t)$	0	$\nearrow$ $+$	$+\infty$
$f(t)$	$f(0)$	$\nearrow$	

Suy ra $H \ge f(0)$.

Vậy $\min H = 1$.

Câu 54. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y} = \dfrac{8-8xy}{x+y}$.

Khi $P = 2xy^2 + xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2xy+x+y} = \dfrac{8-8xy}{x+y} \Leftrightarrow 2xy + x + y = \log_2(8-8xy) - \log_2(x+y)$

$\Leftrightarrow \log_2 2(1-xy) + 2(1-xy) = \log_2(x+y) + (x+y)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó từ $(*)$ ta có $2(1-xy) = x+y \Leftrightarrow x = \dfrac{2-y}{2y+1}$

Suy ra $P = 2xy^2 + xy = -y^2 + 2y \Rightarrow P_{\min} = 1$ khi $y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $3x + 2y = 3$

Câu 55. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log(x+2y) = \log(x) + \log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{1+2y} + \dfrac{4y^2}{1+x}$ là:

A. $\dfrac{31}{5}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{29}{5}$. **D.** $\dfrac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log(x+2y) = \log(x) + \log(y) \Leftrightarrow \log(x+2y) = \log(xy) \Leftrightarrow x + 2y = xy$

Mặt khác: $xy = x + 2y \ge 2\sqrt{2xy} \Leftrightarrow (xy)^2 - 8(xy) \ge 0 \Rightarrow xy \ge 8$

Áp dụng bất đẳng thức cauchy- Swat ta có: $P = \dfrac{x^2}{1+2y} + \dfrac{4y^2}{1+x} \ge \dfrac{(x+2y)^2}{2+x+2y} = \dfrac{(xy)^2}{xy+2}$

Đặt $xy = t$ suy ra $P \ge \dfrac{(xy)^2}{xy+2} = \dfrac{t^2}{t+2}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{t+2}$, với $t \in [8;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{t^2+4t}{(t+2)^2}>0, \forall t\geq 8$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(8;+\infty)$.

$\Rightarrow f(t)\geq f(8)=\dfrac{32}{5}\Rightarrow P\geq f(t)\geq \dfrac{32}{5}$.

$\Rightarrow \text{Min}P=\dfrac{32}{5}$ khi $\begin{cases}x=2y\\xy=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$.

Câu 56. **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Cho các số thực x,y thay đổi, thỏa mãn $x>y>0$ và $\ln(x-y)+\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của $M=x+y$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Với $x>y>0$, ta có

$\ln(x-y)+\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)-\ln(x-y)\Leftrightarrow\ln(xy)=2\ln\dfrac{x+y}{x-y}$

$\Leftrightarrow\ln(xy)=\ln\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2\Leftrightarrow xy=\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2\Leftrightarrow(x-y)^2xy=(x+y)^2$ (*)

Đặt $\begin{cases}u=x+y>0\\v=xy>0\end{cases}$

Ta có (*) $\Leftrightarrow(u^2-4v)v=u^2\Leftrightarrow(v-1)u^2=4v^2\Leftrightarrow u^2=\dfrac{4v^2}{v-1}=f(v)$, $(v>1)$

$f'(v)=\dfrac{8v(v-1)-4v^2}{(v-1)^2}=\dfrac{4v(v-2)}{(v-1)^2}$, $f'(v)=0\Leftrightarrow v=2$ do $v>1$

Bảng biến thiên :

v	1		2		$+\infty$
$f'(v)$		-	0	+	
$f(v)$	$+\infty$	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min(x+y)=\min u=4\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4\\xy=2\\x>y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\\y=2-\sqrt{2}\end{cases}$

Câu 57. **(Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Xét x, y, z là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $xyz=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$S=\log_2^3x+\log_2^3y+\dfrac{1}{4}\log_2^3z$ bằng

A. $\dfrac{1}{32}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(xyz)=1 \Leftrightarrow \log_2 x+\log_2 y+\log_2 z=1$. Đặt $a=\log_2 x,\ b=\log_2 y,\ c=\log_2 z$. Khi đó ta có $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c=1$.

$$S=\log_2^3 x+\log_2^3 y+\frac{1}{4}\log_2^3 z=a^3+b^3+\frac{1}{4}c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+\frac{1}{4}c^3$$

$$\ge (a+b)^3-3\frac{(a+b)^2}{4}(a+b)+\frac{1}{4}c^3=\frac{1}{4}\left(3c^2-3c+1\right) \text{ với } 0<c<1.$$

Đặt $f(c)=3c^2-3c+1$, $f'(c)=0 \Leftrightarrow 6c-3=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên

c	0		$\frac{1}{2}$		1
$f(c)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1

Từ đây ta suy ra $S\ge\frac{1}{16}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ c=\frac{1}{2} \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{4} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $x=y=\sqrt[4]{2},\ z=\sqrt{2}$.

Câu 58. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+2y^2\right)$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** Vô số

Phân tích

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+y>0$.

Đặt $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+2y^2\right)=t$, suy ra $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+2y^2=4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3^t-y \\ \left(3^t-y\right)^2+2y^2=4^t \end{cases}$ (1)

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 3y^2-2.3^t y+9^t-4^t=0$. Phương trình phải có nghiệm nên:

$$\Delta'=9^t-3\left(9^t-4^t\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\le\frac{3}{2} \Leftrightarrow t\le\frac{1}{2}.$$

Do đó: $\begin{cases} 0<x+y\le\sqrt{3} \\ x^2+2y^2\le 2 \end{cases} \Rightarrow x^2\le 2 \Rightarrow x\in\{0;\pm1\}$ (vì $x\in\mathbb{Z}$)

Thử lại:

Với $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ 2y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\log_{\frac{4}{9}}2 \\ y=3^{\log_{\frac{4}{9}}2} \end{cases}$

Với $x=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+y=3^t \\ 1+2y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$

Với $x=-1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t+1\\2y^2+1=4^t\end{cases}\Rightarrow 2.9^t+4.3^t+3-4^t=0\quad(2)$

Khi $t\ge 0\Rightarrow 9^t\ge 4^t$ nên (2) vô nghiệm, khi $t<0\Rightarrow 4^t<1\Rightarrow 1-4^t>0$ nên (2) cũng vô nghiệm.

Vậy $x\in\{0;1\}$.

Câu 59. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1\le x\le 10^6$ và $\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $10x^2-20x+20>0$, đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\log\left[10\left(x^2-2x+2\right)\right]=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\log 10+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+2\right)+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow 10^{\log\left(x^2-2x+2\right)}+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$ (*).

Xét hàm $f(t)=10^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=10^t.\ln 10+1>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f\left[\log\left(x^2-2x+2\right)\right]=f\left(y^2\right)\Leftrightarrow\log\left(x^2-2x+2\right)=y^2\Leftrightarrow x^2-2x+2=10^{y^2}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+1=10^{y^2}$.

Vì $1\le x\le 10^6$ nên $1\le(x-1)^2+1=10^{y^2}\le\left(10^6-1\right)^2+1\Rightarrow 0\le y^2\le\log\left[\left(10^6-1\right)^2+1\right]$.

Vì $y\in\mathbb{Z}^+$ nên $y\in\{1;2;3\}$.

+ Với $y=1\Rightarrow x^2-2x+2=10\Leftrightarrow x^2-2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\text{ (ktm)}\\x=4\text{ (tm)}\end{array}\right.$.

+ Với $y=2\Rightarrow x^2-2x+2=10^4\Leftrightarrow x^2-2x-9998=0$ (không có giá trị x nguyên nào thỏa mãn).

+ Với $y=3\Rightarrow x^2-2x+2=10^9\Rightarrow x^2-2x-999999998=0$ (không có giá trị x nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x;y)=(4;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 60. Có bao nhiêu số nguyên $y<10$ sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y=5^{x^2-x-1}+(x-1)^2$?

A. 10 **B.** 1 **C.** 5 **D.** Vô số

Phân tích

Phương trình dạng $f(u)=f(v)$.

Phương pháp: Chứng minh $y=f(t)$ đơn điệu trên $(a;b)$. Từ phương trình suy ra $u=v$. Từ đó tìm sự liên hệ giữa 2 biến x,y và chọn x,y thích hợp.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y=5^{x^2-x-1}+(x-1)^2 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y+x-1=5^{x^2-x-1}+x^2-x$

Xét: $f(t)=5^{t-1}+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ phương trình trên suy ra:

$\sqrt{2}^y+x-1=x^2-x \Leftrightarrow (x-1)^2=\sqrt{2}^y=2^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow x=1\pm 2^{\frac{y}{2}}$.

Do x nguyên nên ta có $2^{\frac{y}{2}}\in\mathbb{Z}$ và $y<10$ nên $y\in\{0;2;4;6;8\}$.

Câu 61. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $1\le x\le 2020$ và $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

A. 2021. **B.** 10. **C.** 2020. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài, $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y+\log_2\left(2^y\right)=2x+\log_2\left(x+\dfrac{2^y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y+2^y+\log_2\left(2^y\right)=2x+2^y+\log_2\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2.\left(2^y\right)+\log_2\left(2^y\right)=2\cdot\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right)+\log_2\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right)(1)$.

Xét hàm số $f(t)=2t+\log_2 t$, $t>0$.

Vì $f'(t)=2+\dfrac{1}{t\ln 2}>0\ \forall t>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

nên $(1)\Leftrightarrow f\left(2^y\right)=f\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right)\Leftrightarrow 2^y=\dfrac{2x+2^y}{2}\Leftrightarrow 2.2^y=2x+2^y \Leftrightarrow 2x=2^y \Leftrightarrow x=2^{y-1}$.

Do $1\le x\le 2020$ nên $0\le y-1\le \log_2 2020 \Leftrightarrow 1\le y\le 11{,}98$.

Do $y\in\mathbb{N}^*$ nên $y\in\{1;2;3;...;11\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thoả đề.

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn đề bài.

Câu 62. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t=2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$.

Suy ra: $\begin{cases}(x+y)^2=2^{t+\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)}\\ x^2+y^2-1=\sqrt{3}^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2=\left(1+\sqrt{3}\right).2^t\\ x^2+y^2=1+\sqrt{3}^t\end{cases}$

Ta có:

$(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{3}\right).2^t \le 2\left(1+\sqrt{3}^t\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)2^t}{2} \le 1+\sqrt{3}^t$.

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^t + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t \ge \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Xét $f(t) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^t + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^t + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t \ge \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow f(t) \ge f(1) \Leftrightarrow t \le 1$.

Do đó $\begin{cases} 0 < x+y = 2^{\frac{t+\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}} \le \sqrt{2\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)} \\ x^2+y^2 = 1+\sqrt{3}^t \le 1+\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \{0;\pm 1\}$ (vì $x \in \mathbb{Z}$)

Thử lại:

Với $x=1$:

$\begin{cases} y = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)2^t} - 1 \\ y^2 = \sqrt{3}^t \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)2^t} - 1\right)^2 - \sqrt{3}^t = 0$

$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)2^t - 2\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right).2^t} - \sqrt{3}^t + 1 = 0$

Ta có: $g(x) = \left(1+\sqrt{3}\right)2^t - 2\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right).2^t} - \sqrt{3}^t + 1$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $g(0)g(1) < 0$ nên phương trình có nghiệm $t \in (0;1)$.

Do đó với $x=1$ thì tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x+y) - \log_2\left(1+\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$

Với $x=-1$:

$\begin{cases} y = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)2^t} + 1 \\ y^2 = \sqrt{3}^t \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)2^t} + 1\right)^2 - \sqrt{3}^t = 0$

$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)2^t + 2\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right).2^t} - \sqrt{3}^t + 1 = 0$

Ta có: $\left(1+\sqrt{3}\right)2^t + 2\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right).2^t} - \sqrt{3}^t + 1 > 0, \forall t \le 1$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó với $x=-1$ thì không tồn tại số thực y thỏa mãn

$2\log_2(x+y) - \log_2\left(1+\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$

Với $x=0$:

$\begin{cases} y^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)2^t \\ y^2 = 1+\sqrt{3}^t \end{cases}$

$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)2^t = \sqrt{3}^t + 1$

$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)2^t - \sqrt{3}^t - 1 = 0$

Ta có: $h(x) = \left(1+\sqrt{3}\right)2^t - \sqrt{3}^t - 1$ liên tục trên $[-1;0]$ thỏa mãn $h(-1)h(0) < 0$ nên phương trình có nghiệm $t \in (-1;0)$.

Do đó với $x = 0$ thì tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x+y) - \log_2\left(1+\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$.

Vậy $x \in \{0;1\}$.

Câu 63. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le y \le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2^x-1}{y}\right) = y+1-2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y \ne 0 \\ \dfrac{2^x-1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Ta có: PT $\Leftrightarrow \log_3\left(2^x-1\right) + 2^x - 1 = \log_3 y + y \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0;+\infty)$

Khi đó $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

(*) có dạng $f\left(2^x-1\right) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$

Vì $0 \le y \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le 2^x - 1 \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le 2^x \le 2021 \Leftrightarrow 0 \le x \le \log_2(2021)$

$\begin{cases} 0 \le x \le \log_2(2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 11 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 64. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Xét các số thực a,b,x thoả mãn $a > 1, b > 1, 0 < x \ne 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

A. $\dfrac{1-3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{e}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)} \Leftrightarrow \ln\left(a^{\log_b x}\right) = \ln\left(b^{\log_a(x^2)}\right) \Leftrightarrow \log_b x.\ln a = 2.\log_a x.\ln b$

$\Leftrightarrow \log_b a.\ln a = 2\ln b \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b}.\ln a = 2\ln b \Leftrightarrow \ln^2 a = 2\ln^2 b \Rightarrow \ln a = \sqrt{2}\ln b$ (vì $a > 1, b > 1$).

Thay $\ln a = \sqrt{2}\ln b$ vào biểu thức P ta được

$P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab) = 3\ln^2 b - \left(\sqrt{2}+1\right)\ln b = 3t^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)t$ (với $t = \ln b > 0$).

Đặt $f(t) = 3t^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)t$. Ta có $f'(t) = 6t - \left(\sqrt{2}+1\right) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}+1}{6} \in (0;+\infty)$.

BBT:

t	0		$\dfrac{\sqrt{2}+1}{6}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = -\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$.