**Dạng 1. Bài toán cực trị hàm số chứa dấu trị tuyệt đối**

**Bài toán**: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

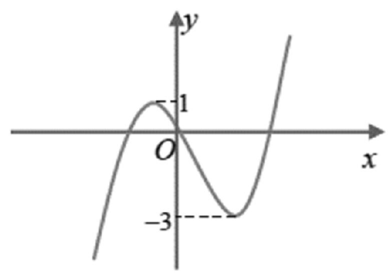
(Áp dụng định nghĩa). $y=f(x)=\sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{2f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\,(1) \\ f'(x)=0\,(2) \end{array}\right.$$

Số nghiệm của $(1)$ chính là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của $(2)$ là số cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra $(2)$. Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của $(1)$ và $(2)$ chính là số cực trị cần tìm.

*Dạng toán này mình làm tựa theo đề tham khảo 2018, vẫn xuất hiện ở dạng toán hàm hợp, các bạn học chú ý nhé!*

**Câu 1.** **(Chuyên Vinh – Lần 2).** Đồ thị $(C)$ có hình vẽ bên.




Tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị là:

**A.** $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **B.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. **C.** $m=-1$ hoặc $m=3$. **D.** $1\le m\le 3$.

**Giải**

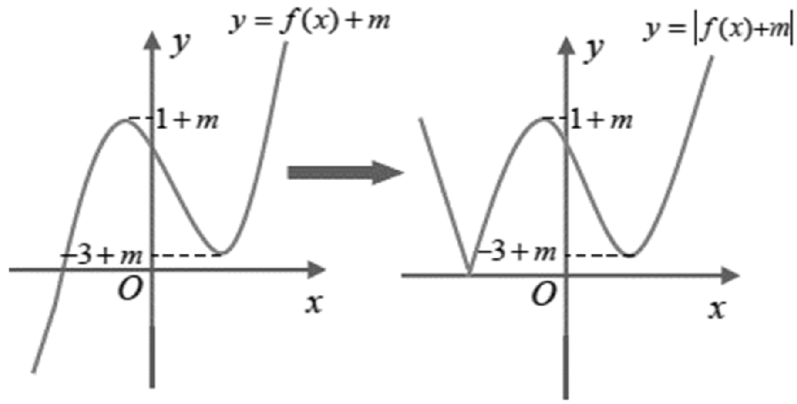
***Cách 1:***

Do $y=f(x)+m$ là hàm số bậc ba

Khi đó, hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ hàm số $y=f(x)+m$ có $y_{CD}.y_{CT}\ge 0$

(hình minh họa)




$\Leftrightarrow (1+m)(-3+m)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 3\end{array}\right. \to$ Đáp án A

***Cách 2:***

Ta có $y=|f(x)+m|=\sqrt{(f(x)+m)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{(f(x)+m).f'(x)}{\sqrt{(f(x)+m)^2}}$.

Để tìm cực trị của hàm số $y=|f(x)+m|$, ta tìm $x$ thỏa mãn $y'=0$ hoặc $y'$ không xác định.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f(x)=-m & (2)\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số có 2 điểm cực trị $x_1, x_2$ trái dấu.

Suy ra (1) có hai nghiệm $x_1, x_2$ trái dấu.

Vậy để đồ thị hàm số có 3 cực trị thì (2) có một nghiệm khác $x_1, x_2$.

Số nghiệm của (2) chính là số giao điểm của đồ thị $(C)$ và đường thẳng $y=-m$.

Do đó để (2) có một nghiệm thì dựa vào đồ thị ta có điều kiện: $\left[\begin{array}{l} -m\geq 1 \\ -m\leq -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 3\end{array}\right.$

$\to$ Đáp án. **A.**

***Chú ý:***

*Nếu $x=x_0$ là cực trị của hàm số $y=f(x)$ thì $f'(x_0)=0$ hoặc không tồn tại $f'(x_0)$.*

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ có 7 điểm cực trị?

**A.** 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 3

**Lời giải.**

**Chọn C**

$y=|f(x)|=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$

Ta có: $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$.; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-1$ hoặc $x=2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $m-5$ | ↗ | $m$ | ↘ | $m-32$ | ↗ | $+\infty$ |

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có $7$ điểm cực trị khi

Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5$.

Vậy có $4$ giá trị nguyên thỏa đề bài là $m=1; m=2; m=3; m=4$.

**Câu 3.** **(Gia Bình 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $6$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số $y=f\left(\left|x-3\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị

**A.** 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 1

**Lời giải**



**Chọn C**

$y=f\left(\left|x-3\right|\right)$ $(1)$, Đặt $t=|x-3|, t\geq 0$ Thì (1) trở thành: $y=f(t)(t\geq 0)$

Có $t=\sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow t'=\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y_x'=t_x'f'(t)$

$y_x'=0 \Leftrightarrow t_x'f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_x'=0 \\ f'(t)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ t=-2(L) \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Lấy x=8 có $t'(8)f'(5)>0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | CT | ↗ | CĐ | ↘ | CT | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào BBT thì hàm số $y=f\left(\left|x-3\right|\right)$ có 3 cực trị.

**Câu 4.** **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm số các giá trị nguyên của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị

**A.** $1$. **B.** $4$. **C.** $0$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^2+m-12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$x^4-2mx^2+2m^2+m-12=0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-\left(2m^2+m-12\right)>0 \\ 2m>0 \\ 2m^2+m-12>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4<m<3 \\ m>0 \\ m<\dfrac{-1-\sqrt{97}}{4} \vee m>\dfrac{-1+\sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{97}}{4}<m<3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m^2+m-12\right|$ có bảy điểm cực trị.

**Câu 5.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

**A.** 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

**Lời giải**

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m^2$; $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-1; x_3=2$. Suy ra, hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2+m^2=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4-4x^3-12x^2+m^2=0 \Leftrightarrow -3x^4+4x^3+12x^2=m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x)=-3x^4+4x^3+12x^2$; $g'(x)=-12x^3+12x^2+24x$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $32$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2<0 \\ 5<m^2<32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{5}<|m|<\sqrt{32}$.

Vậy $m\in\{3;4;5;-3;-4;-5\}$.

**Câu 6.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

**A.** 16 **B.** 44 **C.** 26 **D.** 27

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt: $g(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$

Ta có: $g'(x)=12x^3-12x^2-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=m-32 \\ x=-1 \Rightarrow y=m-5 \\ x=0 \Rightarrow y=m \end{array}\right.$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $m-5$ | ↗ | $m$ | ↘ | $m-32$ | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y=|g(x)|$ có $5$ điểm cực trị khi $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m-5>0 \\ m-32<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ 5<m<32 \end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên dương cho nên có 26 số m thỏa đề bài

**Câu 7.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+2m-1\right|$ với $m$ là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $[-2;2]$ của $m$ để hàm số đã cho có $3$ điểm cực trị là

**A.** 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1



**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $f(x)=x^4-2mx^2+2m-1$, $f'(x)=4x^3-4mx$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$

+ **Trường hợp 1:** hàm số có một cực trị $\Rightarrow m\in[-2;0]$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị là $A(0;2m-1)$.

Do $m\in[-2;0] \Rightarrow y_A=2m-1<0$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại $2$ điểm phân biệt nên hàm số $y=|f(x)|$ có $3$ cực trị $\Rightarrow$ có $3$ giá trị nguyên của $m$ thỏa ycbt.

+ **Trường hợp 2:** hàm số có ba cực trị $\Rightarrow m\in(0;2]$.

Khi đó đồ thị hàm số có $3$ điểm cực trị là $A(0;2m-1)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+2m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2+2m-1\right)$.

Do $a=1>0$ nên hàm số $y=|f(x)|$ có $3$ điểm cực trị khi hàm số $y=f(x)$ có $y_B=y_C\ge 0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m-1\ge 0 \Leftrightarrow m=1$.

Nếu $y_B=y_C<0$ (trong bài toán này không xảy ra) thì hàm số có ít nhất $5$ điểm cực trị.

Vậy có $4$ giá trị của $m$ thỏa ycbt.

**Câu 8.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tập hợp các giá trị của $m$ để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có $7$ điểm cực trị là:

**A.** $(0;6)$ **B.** $(6;33)$ **C.** $(1;33)$ **D.** $(1;6)$

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m-1$,

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $m-6$ | $\nearrow$ | $m-1$ | $\searrow$ | $m-33$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có $7$ điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt $Ox$ tại $4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6<0<m-1 \Leftrightarrow 1<m<6$.

**Câu 9.** **(THPT Kinh Môn - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

**A.** $\frac{5}{4}<m\le 2$. **B.** $-2<m<\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}<m<2$. **D.** $\frac{5}{4}<m<2$.



**Lời giải**

Ta có: $y'=3x^2-2\left(2m-1\right)x+2-m$

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi chỉ khi hàm số $f\left(x\right)$ có hai cực trị dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2m-1\right)^2-3\left(2-m\right)>0 \\ \dfrac{2\left(2m-1\right)}{3}>0 \\ \dfrac{2-m}{3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-m-5>0 \\ m>\dfrac{1}{2} \\ m<2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4}<m<2$$

**Câu 10.** **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

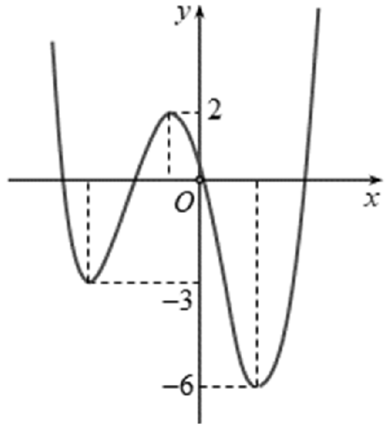
**A.** $9$. **B.** $2018$. **C.** $2022$. **D.** $11$.

**Lời giải**

Ta có $f'\left(x\right)=x^3\left(x-2\right)\left(x^2-2\right)=0$ có $4$ nghiệm và đổi dấu $4$ lần nên hàm số $y=f\left(x\right)$ có $4$ cực trị. Suy ra $f\left(x\right)=0$ có tối đa $5$ nghiệm phân biệt.

Do đó $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có tối đa $9$ cực trị.

**Câu 11.** **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa - 2018)** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$.



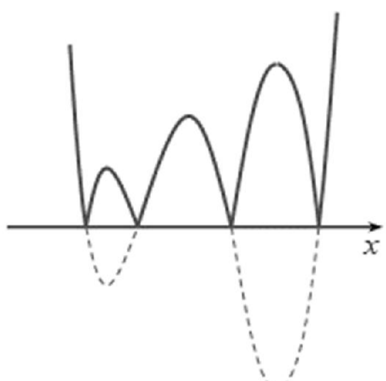

Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có $5$ điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của $S$ bằng

**A.** $9$. **B.** $12$. **C.** $18$. **D.** $15$.

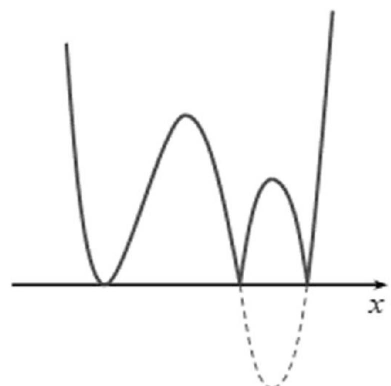
**Lời giải**

Nhận xét: Số giao điểm của $\left(C\right): y=f\left(x\right)$ với $Ox$ bằng số giao điểm của $\left(C'\right): y=f\left(x-1\right)$ với $Ox$.

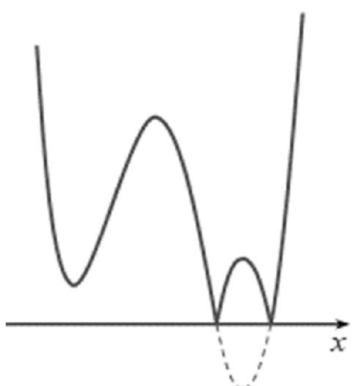
Vì $m>0$ nên $\left(C''\right): y=f\left(x-1\right)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $\left(C'\right): y=f\left(x-1\right)$ lên trên $m$ đơn vị.




TH1: $0<m<3$




TH2 : $m=3$




TH3: $3<m<6$


TH4 : $m\geq 6$

TH1: $0<m<3$. Đồ thị hàm số có $7$ điểm cực trị. Loại.

TH2: $m=3$. Đồ thị hàm số có $5$ điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3<m<6$. Đồ thị hàm số có $5$ điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m\geq 6$. Đồ thị hàm số có $3$ điểm cực trị. Loại.

Vậy $3\leq m<6$. Do $m\in\mathbb{Z}^*$ nên $m\in\left\{3;4;5\right\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của $S$ bằng $12$.

**Câu 12.** **(THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right|$ có $7$ điểm cực trị?

**A.** $3$. **<u>B</u>.** $9$. **C.** $6$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Ta có $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right|=\sqrt{\left(3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow y'=\frac{\left(12x^3+12x^2-24x\right)\left(3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\left(3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}12x^3+12x^2-24x=0\ \ (1)\\ 3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}=0\ \ (2)\end{array}\right..$$

Từ $(1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$.

Vậy để hàm số có $7$ điểm cực trị thì (2) phải có bốn nghiệm phân biệt khác $\{0;1;-2\}$.

Xét hàm số $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\Rightarrow f'(x)=12x^3+12x^2-24x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$



| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-32+\frac{m}{2}$ | ↗ | $\frac{m}{2}$ | ↘ | $-5+\frac{m}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Rightarrow\begin{cases}-5+\frac{m}{2}<0\\ \frac{m}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<10\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<10.$$

Vậy có $9$ giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right|$ có $7$ điểm cực trị.

**Câu 13.** **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có $5$ điểm cực trị?

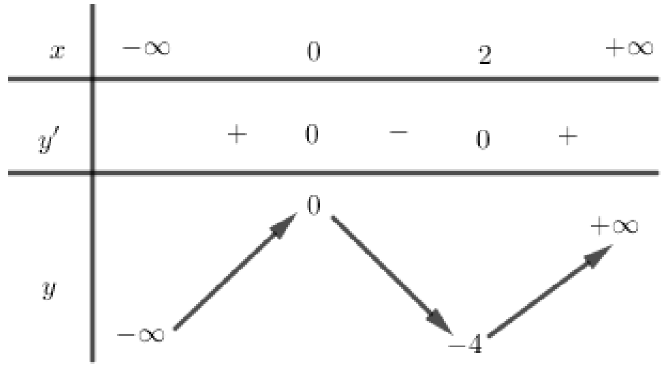
**A.** $5$. **<u>B</u>.** $3$. **C.** $6$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có $5$ điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3-3x^2+m=0$ $(1)$ có ba nghiệm phân biệt.

Xét bbt của hàm số $y=x^3-3x^2$

$$y'=3x^2-6x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$




Từ đó ta được $(1)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4<-m<0\Leftrightarrow 0<m<4$. Vậy có $3$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 14.** **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

**A.** $42$. **B.** $21$. **C.** $40$. **D.** $20$.

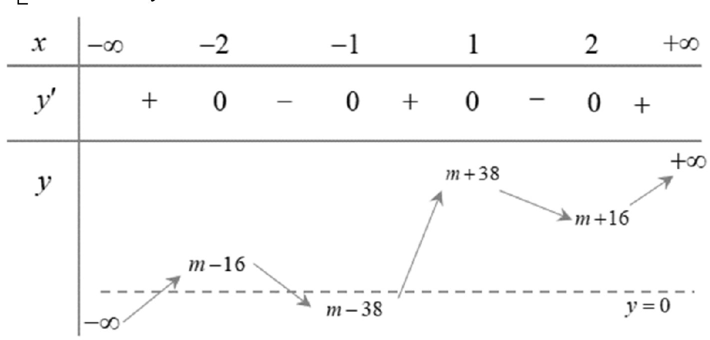


**Lời giải**

$y=3x^5-25x^3+60x+m$

$\Rightarrow y'=15x^4-75x^2+60$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=m-16\\x=-1\Rightarrow y=m-38\\x=1\ \ \Rightarrow y=m+38\\x=2\ \ \Rightarrow y=m+16\end{array}\right.$$




Suy ra $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-38<0<m-16\\m+16<0<m+38\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}16<m<38\\-38<m<-16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\overline{17,37}\\m=\overline{-37,-17}\end{array}\right.$$

Có tất cả 42 giá trị nguyên của $m$.

**Câu 15.** **(Sở Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $11$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ có $5$ điểm cực trị khi và chỉ khi

**A.** $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

**Lời giải**

Từ BBT của hàm số $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)-2m$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left[f(x)-2m\right]'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-2m$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $11-2m$ | $\searrow$ | $4-2m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)-2m$ nằm phía trên trục hoành.

+ Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y=f(x)-2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục $Ox$.

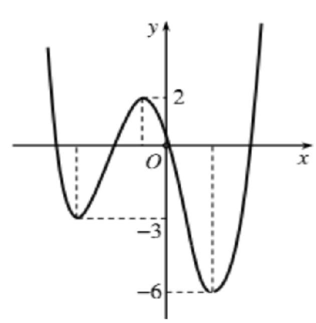
Do đó, đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ có $5$ điểm cực trị khi và chỉ khi

$$(4-2m)(11-2m)<0\Leftrightarrow m\in\left(2;\frac{11}{2}\right).$$

**Câu 16. (THPT Nguyễn Huệ - Tt Huế - 2018)** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2)+m\right|$ có $5$ điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của $S$ bằng

**A.** $15$. **B.** $18$. **C.** $9$. **D.** $12$.

**Lời giải**



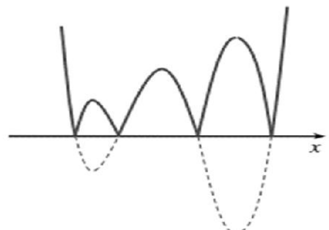

***Cách 1:*** *dùng đồ thị.*

- Nhận thấy: số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với $Ox$ bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x-2)$ với $Ox$.

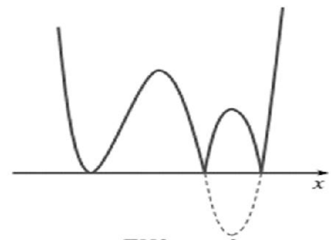
Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x-2) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x-2)$ lên trên $m$ đơn vị.

- Đồ thị hàm số $y = |f(x-2)+m|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành $Ox$ phần đồ thị $(C_2)$ nằm phía dưới trục $Ox$ và giữ nguyên phần phía trên trục $Ox$.

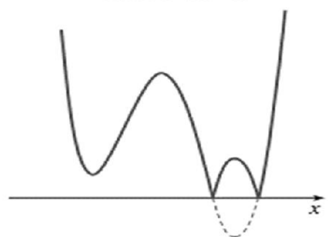
- Ta xét các trường hợp sau:



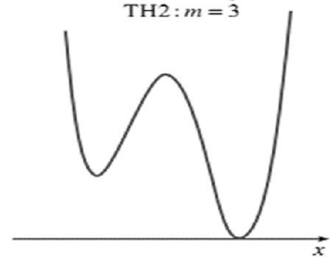
$\text{TH1}: 0 < m < 3$



$\text{TH2}: m = 3$



$\text{TH3}: 3 < m < 6$



$\text{TH4}: m \geq 6$

+ Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).

+ Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$ Do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$ hay $S = \{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của $S$ bằng $12$.

***Cách 2:** đạo hàm hàm số hợp.*

- Ta có: $y = |f(x-2)+m| = \sqrt{\left[f(x-2)+m\right]^2} \Rightarrow y' = \dfrac{\left(f(x-2)+m\right).f'(x-2)}{\sqrt{\left[f(x-2)+m\right]^2}}$

- Xét $f'(x-2) = 0 \quad (1)$

+ Do phương trình $f'(x) = 0$ có $3$ nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2) = 0$ cũng có $3$ nghiệm phân biệt.

- Xét $f(x-2) + m = 0 \Leftrightarrow f(x-2) = -m \quad (2)$

+ Nếu $-6 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 6$ thì phương trình $(2)$ có $2$ nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của $(1)$.

+ Nếu $-m = -3 \Leftrightarrow m = 3$ thì $(2)$ có $3$ nghiệm phân biệt (trong đó có $2$ nghiệm đơn khác 3 nghiệm của $(1)$ và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của $(1)$)

*Tóm lại :* với $3 \leq m < 6$ thì hai phương trình $(1)$ và $(2)$ có tất cả $5$ nghiệm bội lẻ phân biệt và $y'$ đổi dấu khi $x$ đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y = |f(x-2)+m|$ có $5$ điểm cực trị.

- Lại do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$ hay $S = \{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của $S$ bằng $12$.

**Câu 17.** **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ với $m\in[-5;5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $8$. **D.** $6$.

**Lời giải**

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$ có $g'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | - | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $m$ | ↘ | -4+m | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có đúng một giao điểm hoặc tiếp xúc với $Ox$.

Điều kiện này tương đương với $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\-4+m\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\m\ge 4\end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $m\in[-5;5]$ ta có $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;4;5\}$. Vậy có 8 giá trị thoả mãn.

**Câu 18.** **(Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2018$ | ↘ | $-2018$ | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Có $y=f(x-2017)$ bằng cách tịnh tiến sang bên phải $2017$ đơn vị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x-2017)$

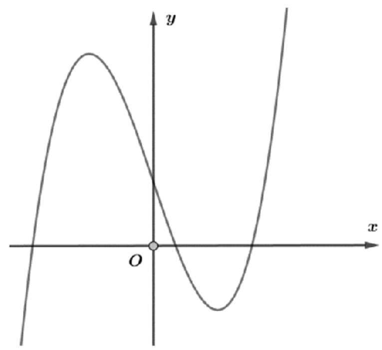
| $x$ | $-\infty$ | | $2016$ | | $2020$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x-2017)$ | $-\infty$ | ↗ | $2018$ | ↘ | $-2018$ | ↗ | $+\infty$ |

Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x-2017)$ lên trên 2018 đơn vị và lấy trị tuyệt đối ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x-2017)+2018\right|$

| $x$ | $-\infty$ | | | 2016 | | 2020 | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ 4036 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | | |

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 cực trị.

**Câu 19.** **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.




Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Cách 1:** Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta thấy $f(x)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ lấy đối xứng phần đồ thị hàm số bên phải trục tung qua trục tung ta được bốn cực trị, cộng thêm giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|) + 2018$ với trục tung nữa ta được tổng cộng là 5 cực trị.

**Cách 2:** Ta có: $y = f(|x|) + 2018 = f\left(\sqrt{x^2}\right) + 2018$.

Đạo hàm: $y' = f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}.f'(|x|)$.

Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ cùng dấu với $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ với $x_1 < 0$, $0 < x_2 < x_3$.

Suy ra: $f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x| - x_1)(|x| - x_2)(|x| - x_3)$.

Do $|x| - x_1 > 0$ nên $y' = f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x| - x_2)(|x| - x_3).\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$.

Vậy hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có 5 cực trị.

**Câu 20.** **(Sở- Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 11 | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

**A.** $m \in (4;11)$. **B.** $m \in \left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m = 3$. **D.** $m \in \left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

**Lời giải**

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có $5$ điểm cực trị thì đồ thị $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m$ tại $5 - 2 = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < 2m < 11 \Leftrightarrow 2 < m < \dfrac{11}{2}$.

## Dạng 2. Số điểm cực trị của hàm hợp

**Bài toán:** Cho hàm số $y = f(x)$ *(Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$).* Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$ trong đó $u$ là một hàm số đối với $x$

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

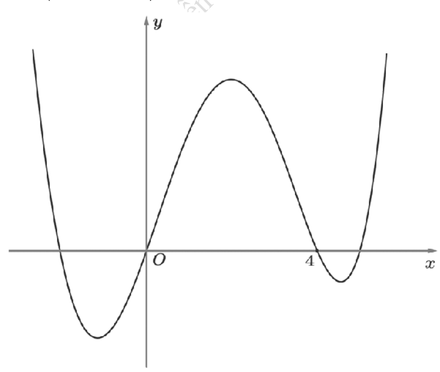
**Bước 1.** Tính đạo hàm $y' = u'.f'(u)$

**Bước 2.** Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{array}\right.$

**Bước 3**.Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà $y'$ không xác định.

**Kết luận**

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là




**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $7$. **D.** $11$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x).f'(x^3 + 3x^2)$

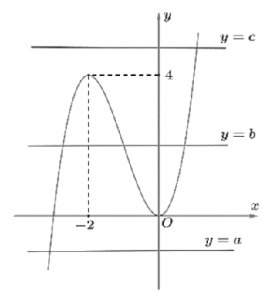
Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x^3+3x^2=a;\ a<0 \\ x^3+3x^2=b;\ 0<b<4 \\ x^3+3x^2=c;\ c>4 \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow h'(x)=3x^2+6x$. Cho $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ta có đồ thị của hàm $h(x)=x^3+3x^2$ như sau




Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y=c$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ có 7 cực trị.



**Câu 2.** **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-2x)$ là

**A.** 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn C**

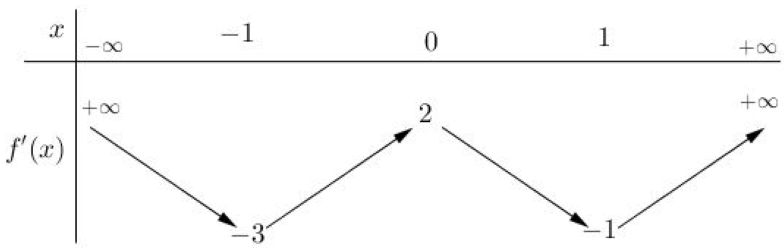
Ta có $y'=2(x-1).f'(x^2-2x)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=a\in(-\infty;-1) \\ x^2-2x=b\in(-1;0) \\ x^2-2x=c\in(0;1) \\ x^2-2x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x^2-2x-a=0, a\in(-\infty;-1) & (1) \\ x^2-2x-b=0, b\in(-1;0) & (2) \\ x^2-2x-c=0, c\in(0;1) & (3) \\ x^2-2x-d=0, d\in(1;+\infty) & (4) \end{array}\right..$$

Phương trình $(1)$ vô nghiệm, các phương trình $(2),(3),(4)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do $b,c,d$ đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình $(2),(3),(4)$ cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'\left(x^2-2x\right)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là 7.

**Câu 3.** **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:



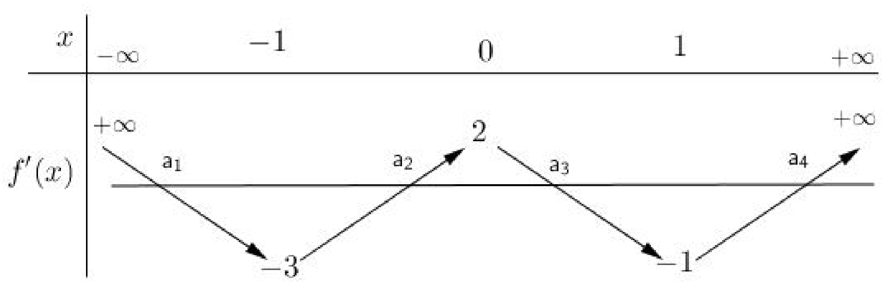

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ là

**A.** 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

**Lời giải**

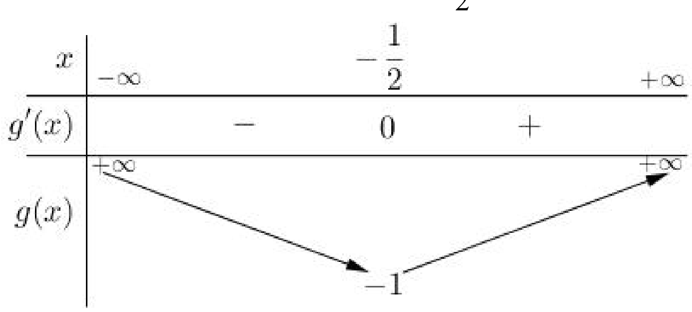
**Chọn C**

Có $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)'=\left(8x+4\right)f'\left(4x^2+4x\right)$, $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ f'\left(4x^2+4x\right)=0\end{array}\right.$.




Từ bảng biến thiên trên ta có $f'\left(4x^2+4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^2+4x=a_1\in\left(-\infty;-1\right)\\ 4x^2+4x=a_2\in\left(-1;0\right)\\ 4x^2+4x=a_3\in\left(0;1\right)\\ 4x^2+4x=a_4\in\left(1;+\infty\right)\end{array}\right.$. (1)

Xét $g\left(x\right)=4x^2+4x$, $g'\left(x\right)=8x+4$, $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên




Kết hợp bảng biến thiên của $g\left(x\right)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $4x^2+4x=a_1\in\left(-\infty;-1\right)$ vô nghiệm.

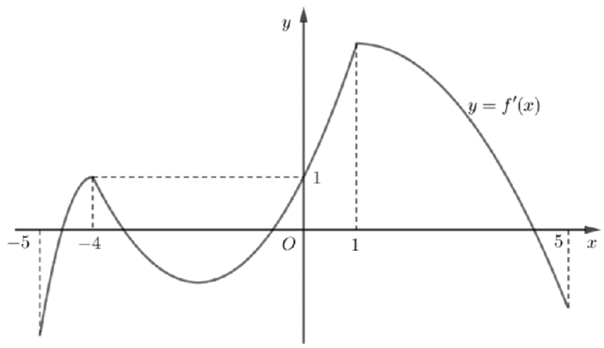
Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

**Câu 4.** **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?




**A.** 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $g(x)=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$

$\Rightarrow g'(x)=(2x+4)f'\left(x^2+4x\right)-(2x+4)=(2x+4)\left[f'\left(x^2+4x\right)-1\right]$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x+4=0 & \\ x^2+4x=-4 & (1)\\ x^2+4x=0 & (2)\\ x^2+4x=a\in(1;5) & (3)\end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^2+4x=a\in(1;5)$, ta có BBT của hàm số $y=x^2+4x$ trên $(-5;1)$ như sau:

| $x$ | $-5$ | | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | |
| $y$ | $5$ ↘ | | $0$ ↘ | | $-4$ | ↗ | $0$ | ↗ | $5$ |

Suy ra (1) có nghiệm kép $x=-2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x=-4; x=0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x=x_1; x=x_2$ khác $-2$; $0$; $-4$. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=-2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x=-4; x=0; x=x_1; x=x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 5.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

**A.** $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$g'(x)=-f'(1-x)+x^2-4x+3$.

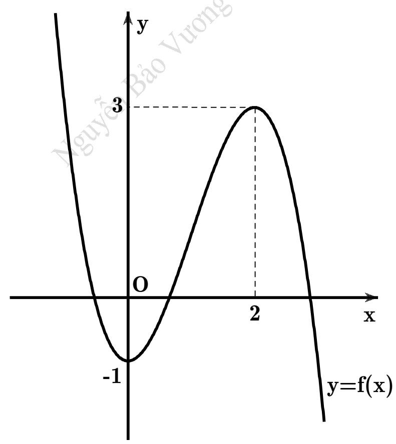
$-f'(1-x)>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x<-2\\0<1-x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\-3<x<1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-f'(1-x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2-4x+3$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | không xác định | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

**Câu 6.** **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.




Hàm số $g(x)=f(x^3+x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0$. Giá trị $x_0$ thuộc khoảng nào sau đây

**A.** $(1;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $g(x)=f(x^3+x) \Rightarrow g'(x)=(3x^2+1)f'(x^3+x)$.

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow (3x^2+1)f'(x^3+x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3+x=0\\x^3+x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

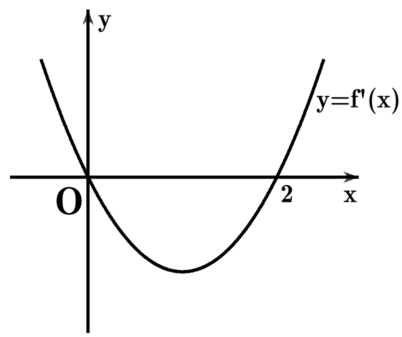
Do đó $g'(x)>0 \Leftrightarrow (3x^2+1)f'(x^3+x)>0 \Leftrightarrow f'(x^3+x)>0 \Leftrightarrow 0<x^3+x<2 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-\infty$ |

Vậy hàm số $g(x)=f(x^3+x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0=0$. Suy ra $x_0\in(-1;1)$.

**Câu 7.** **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.




Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(-x^2+x)$ là

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.



**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g(x)=f(-x^2+x)\Rightarrow g'(x)=(-2x+1)f'(-x^2+x)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow(-2x+1)f'(-x^2+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+1=0\\ f'(-x^2+x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ -x^2+x=0\\ -x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=0\end{array}\right..$$

Do đó $g'(x)>0\Leftrightarrow(-2x+1)f'(-x^2+x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x+1>0\\ f'(-x^2+x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}-2x+1<0\\ f'(-x^2+x)<0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -x^2+x>2 \\ -x^2+x<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 0<-x^2+x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 0<x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \dfrac{1}{2}<x<1 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

**Câu 8.** **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là

**A.** 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

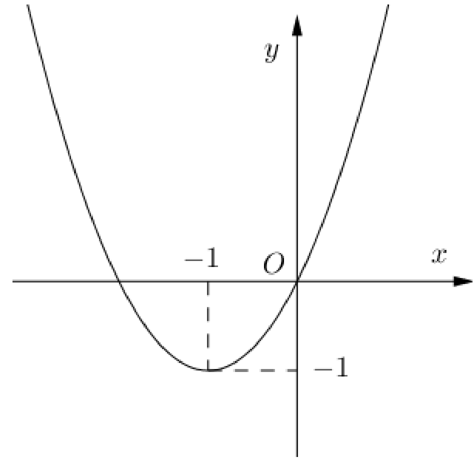
**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ f'\left(x^2+2x\right)=0 \quad (1) \end{array}\right..$

Từ BBT ta thấy phương trình $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+2x=a<-1 & (2) \\ x^2+2x=b\in(-1;1) & (3) \\ x^2+2x=c>1 & (4) \end{array}\right..$

Đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ có dạng




Từ đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3) ; phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y'=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 9.** **(Sở Bắc Giang - 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $3$. **B.** $8$. **C.** $10$. **D.** $7$.

**Lời giải**

Vì hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm là $-2;-1;0$ (ba nghiệm bội lẻ).

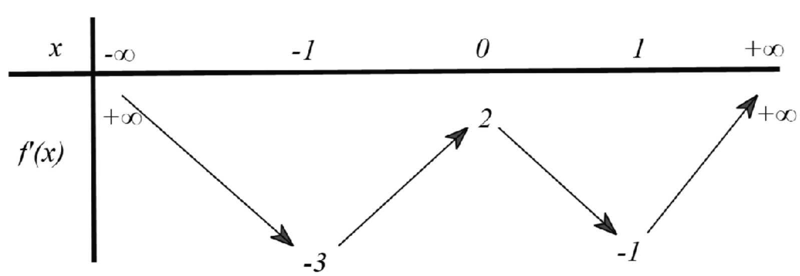
Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có $y'=\left(2x-2\right).f'\left(x^2-2x\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left(2x-2\right).f'\left(x^2-2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Do $y'=0$ có một nghiệm bội lẻ ($x=1$) và hai nghiệm đơn ($x=0$; $x=2$) nên hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ chỉ có ba điểm cực trị.



**Câu 10.** **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau



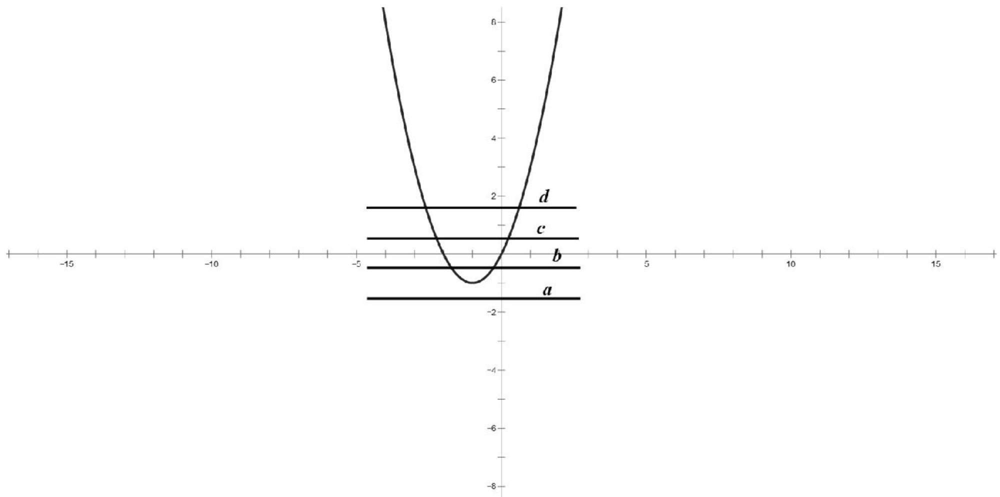

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là

**A.** $9$. **B.** $5$. **C.** $7$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y'=(2x+2)f'(x^2+2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=0 \\ x^2+2x=a, a<-1 \\ x^2+2x=b, -1<b<0 \\ x^2+2x=c, 0<c<1 \\ x^2+2x=d, d>1 \end{array}\right.$




Dựa vào đồ thị ta được $y'=0$ có 7 nghiệm đơn nên nó có 7 cực trị

**Câu 11.** **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

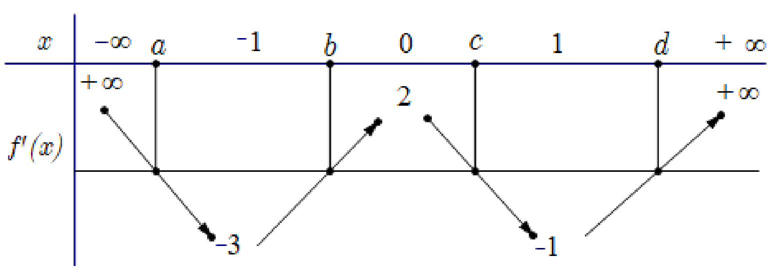
Số cực trị của hàm số $y=f(4x^2-4x)$ là

**A.** $3$. **B.** $9$. **C.** $5$. **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ bảng biến thiên




Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;1) \\ x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

Với $y=f(4x^2-4x)$, ta có $y'=(8x-4)f'(4x^2-4x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x-4=0\\ f'\left(4x^2-4x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ 4x^2-4x=a\in(-\infty;-1)\ (1)\\ 4x^2-4x=b\in(-1;0)\ (2)\\ 4x^2-4x=c\in(0;1)\ (3)\\ 4x^2-4x=d\in(1;+\infty)\ (4)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=4x^2-4x$, ta có $g'(x)=8x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có:

□Vì $a\in(-\infty;-1)$ nên $(1)$ vô nghiệm.

□Vì $b\in(-1;0)$ nên $(2)$ có $2$ nghiệm phân biệt.

□Vì $c\in(0;1)$ nên $(3)$ có $2$ nghiệm phân biệt.

□Vì $d\in(1;+\infty)$ nên $(4)$ có $2$ nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ có $7$ điểm cực trị



**Cách khác:**

Ta có: $y'=(8x-4).f'\left(4x^2-4x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow(8x-4).f'\left(4x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x-4=0\\ f'\left(4x^2-4x\right)=0\end{array}\right.$$

\+ $8x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

$$+\ f'\left(4x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^2-4x=a\,(a<-1)\ (1)\\ 4x^2-4x=b\,(-1<b<0)\ (2)\\ 4x^2-4x=c\,(0<c<1)\ (3)\\ 4x^2-4x=d\,(d>1)\ (4)\end{array}\right.$$

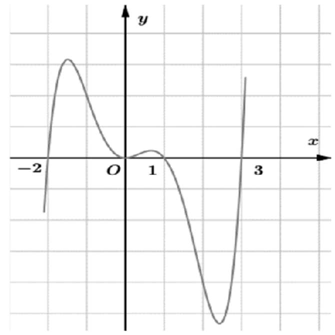
\+ Phương trình $4x^2-4x=m\Leftrightarrow 4x^2-4x-m=0$ có nghiệm khi $\Delta'=4-4m\geq 0$ hay $m\leq 1$.

Từ đó, ta có phương trình $(1)$; $(2)$; $(3)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $(4)$ vô nghiệm.

Do đó, hàm số đã cho có $7$ cực trị.

**Câu 12.** **(Chuyên An Giang - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.




Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$;

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{array}\right.$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.



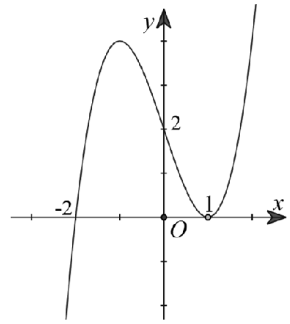
Ta có $f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x^2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có $5$ điểm cực trị.

**Câu 13.** **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.




**A.** 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn D**

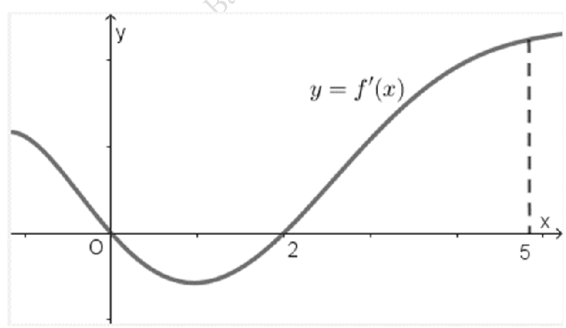
Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2-3\right)\right]' = 2x.f'\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2-3 = -2 \\ x^2-3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Mà $x = \pm 2$ là nghiệp kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$ có ba cực trị.

**Câu 14.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2\right)$ trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.






**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2\right) \Rightarrow g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$.

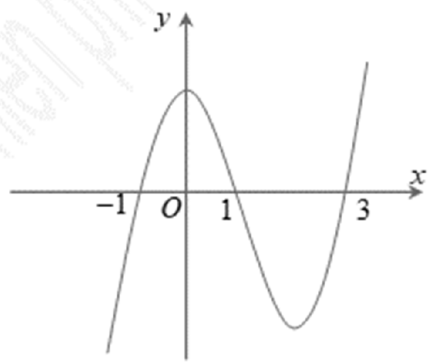
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu:

| $x$ | $-\sqrt{5}$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $\sqrt{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ đó suy ra hàm số $y = f\left(x^2\right)$ có 3 điểm cực trị.

**Câu 15.** **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là




**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta chọn $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y=\left[f(u)\right]'=u'f'(u)$ với $u=\sqrt{x^2+2x+2}$

Ta có

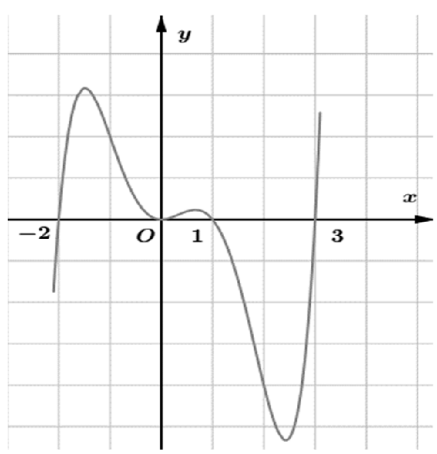
$$y'=\left[f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right]'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-3\right)$$

$$=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)(x+1)^2\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+3\right)}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1+2\sqrt{2}\\x=-1-2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1-2\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $-1+2\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $y$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

**Câu 16.** **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.




Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Có $g'(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]'=2xf'\left(x^2\right)$

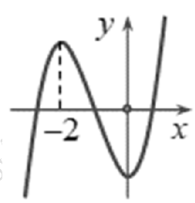
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x^2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số có $5$ điểm cực trị.

**Câu 17.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?




**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x-4\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)f'\left(x^2-2x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x-4\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-4=-2\\x^2-2x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}\\x=1+\sqrt{5}\\x=1-\sqrt{5}\end{array}\right.$$ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).

Ta chọn $x=-2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2)=2.(-3).f'(4)$.

Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó: $f'(4)>0$.

Suy ra: $g'(-2)<0$.

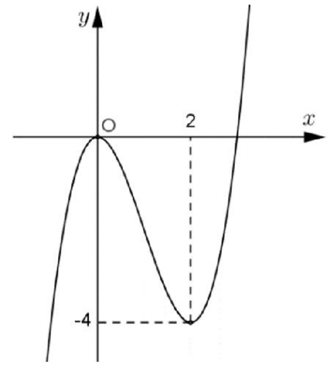
Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng xét dấy $g'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | $1-\sqrt{5}$ | $1-\sqrt{3}$ | $1$ | $1+\sqrt{3}$ | $1+\sqrt{5}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

**Câu 18.** **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An -2018)** Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.




**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $6$.

**Lời giải**

Xét hàm số $y=f\left[f(x)\right]$, $y'=f'(x).f'\left[f(x)\right]$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ x=a\in(2;+\infty)\\ x=b\in(a;+\infty)\end{array}\right..$$

Với $x>b$, ta có $f(x)>2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$

Với $a<x<b$, ta có $0<f(x)<2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]<0$

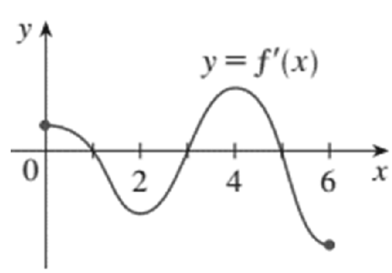
Với $0<x<a$ hoặc $x<0$, ta có $f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$

BBT:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=f\left[f(x)\right]$ có bốn điểm cực trị.

**Câu 19.** **(Sở Bình Phước - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.




**A.** $3$. **B.** $7$. **C.** $6$. **D.** $4$.

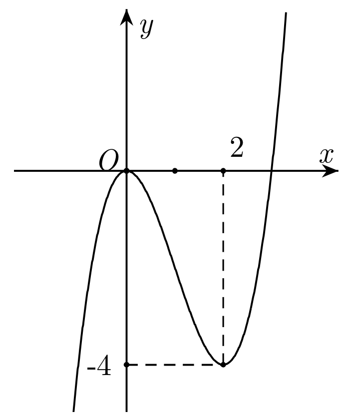
**Lời giải**

Ta có $y' = 2f(x)f'(x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị ta suy ra $f(x)=0$ có tối đa $4$ nghiệm, $f'(x)=0$ có tối đa $3$ nghiệm.

Do đó, hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa $7$ điểm cực trị nên có tối đa $7$ cực trị.

**Câu 20.** Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$?




**A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

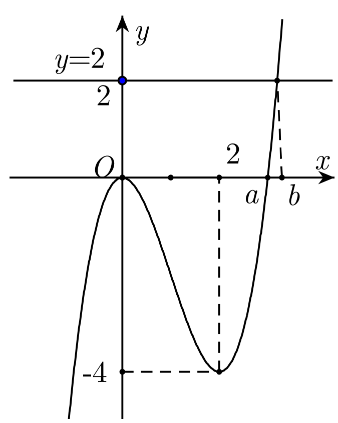
**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $y'=\left[f\left(f(x)\right)\right]'=f'(x).f'\left(f(x)\right)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left(f(x)\right)=0 \end{array}\right.$

+ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ vì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x=0; x=2$

+ $f'\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$




Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm bội chẵn $x=0$ và

một

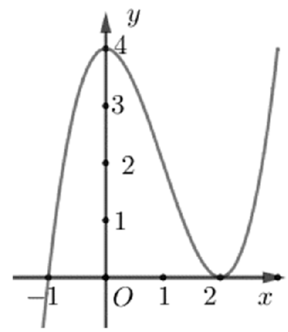
nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = a > 2$.

Kẻ đường thẳng $y = 2$ nhận thấy phương trình $f\left(x\right) = 2$ có một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = b > a$

Do đó $y'$ có các điểm đổi dấu là $x = 0; x = 2, x = a, x = b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

**Câu 21.** **(THPT Đô Lương 3 - Nghệ An - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right) = f\left(f\left(x\right)\right)$ là.




**A.** 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g'\left(x\right) = f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)\right)$.

$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right) = 0 \\ f'\left(f\left(x\right)\right) = 0 \end{array}\right.$.

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

$f'\left(f\left(x\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = 0\left(*\right) \\ f\left(x\right) = 2\left(**\right) \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (*) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Phương trình ( **) có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = m\left(-1 < n < 0\right) \\ x = n\left(0 < n < 1\right) \\ x = p\left(p > 2\right) \end{array}\right.$

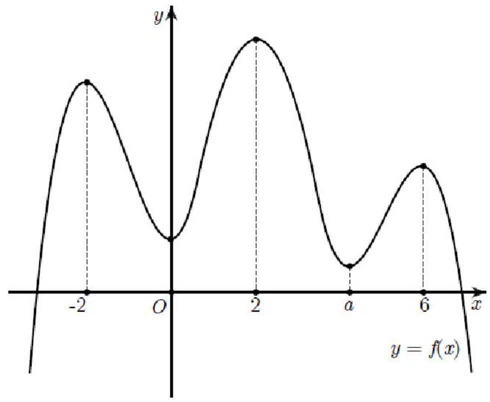
$g'\left(x\right) = 0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = m \\ x = 0 \\ x = n \\ x = 2 \\ x = p \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $m$ | | $0$ | | $n$ | | $2$ | | $p$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | \| | + | \| | + | 0 | - | \| | - | 0 | + | \| | + | |
| $f'(f(x))$ | | + | 0 | - | 0 | + | \| | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + | |
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)=f(f(x))$ có 6 cực trị.

**Câu 22.** **(Sở GD Bắc Ninh - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là $-2$; $0$; $2$; $a$; $6$ với $4<a<6$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^6-3x^2)$ là

**A.** 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ đồ thị ta có -2; 0; 2; $a$; 6 là tất cả các nghiệm của $f'(x)$.

Ta có: $y'=\left(f\left(x^6-3x^2\right)\right)'=\left(6x^5-6x\right)f'\left(x^6-3x^2\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^5-6x=0 \\ f'\left(x^6-3x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, x=\pm 1 \\ x^6-3x^2=-2 \\ x^6-3x^2=0 \\ x^6-3x^2=2 \\ x^6-3x^2=a \\ x^6-3x^2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, x=\pm 1 \\ x=\pm 1 \\ x=0, x=\pm\sqrt[4]{3} \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm m, m>\sqrt{2} \\ x=\pm n,\ n>m \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^6-3x^2$

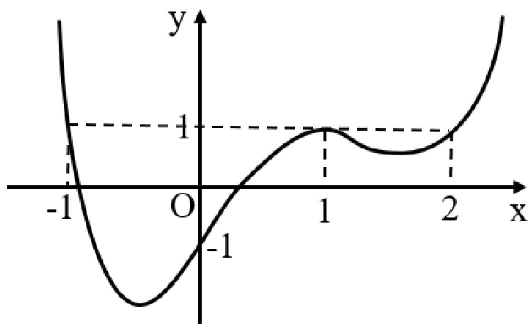
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | + | 0 | $-$ | 0 | + | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | 0 | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^6-3x^2$, ta suy ra $\pm 1$ là nghiệm kép của phương trình $x^6-3x^2=-2$ và $0$ là nghiệm kép của phương trình $x^6-3x^2=0$. Do đó $\pm 1$ và $0$ là nghiệm kép của $f'\left(x^6-3x^2\right)$. Do vậy $\pm 1$ và $0$ là nghiệm bội ba của $y'$.

Các nghiệm khác $\pm 1$ và $0$ của $y'$ đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

**Câu 23.** **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?




**A.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$ **B.** $(-2;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$

**Lời giải**

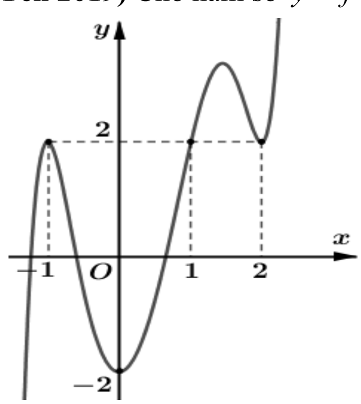
Ta có $g'(x)=f'(x)-1; g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

| x | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | | + | 0 | − | 0 | − | 0 | + | |

Từ bảng xét dấu nhận thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1\in(-2;0)$.

**Câu 24.** **(Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

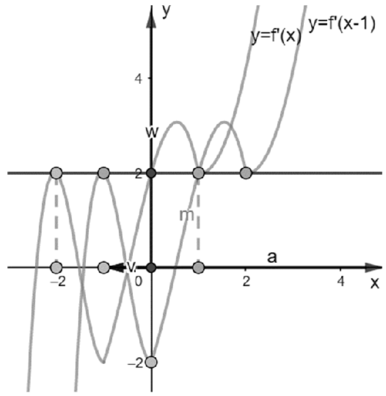
**A.** $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

**Lời giải:**

Ta có: $y'=\left[2f'(x)-4\right]\pi^{2f(x)-4x}\ln\pi$.

$y'=0 \Leftrightarrow 2f'(x)-4=0 \Leftrightarrow f'(x)=2$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị




nên $f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ .

Do $x=-2$ và $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | | | | | | | | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.



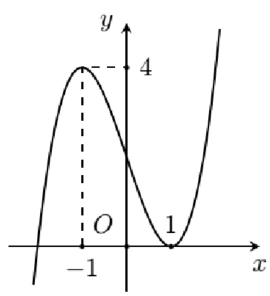
**Câu 25.** **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ là.

**A.** 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

**Lời giải**

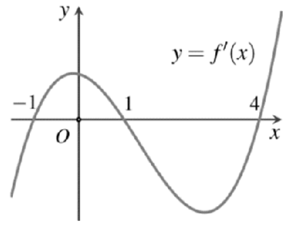
**Chọn C**




Ta có: $\left[f(x-2017)-2018x+2019\right]'=0 \Leftrightarrow f'(x-2017)-2018=0 \Leftrightarrow f'(x-2017)=2018$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x-2017)=2018$ □có 1 nghiệm đơn duy nhất. Suy ra hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ có 1 điểm cực trị.

**Câu 26.** **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:




Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

Ta có $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$

$y' = 2f'(x).e^{2f(x)+1} + f'(x).5^{f(x)}\ln 5 = f'(x)\left(2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}\ln 5\right)$.

Nhận xét $2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}\ln 5 > 0, \forall x$ làm cho $f(x)$ xác định nên dấu của $y'$ phụ thuộc hoàn toàn vào $f'(x)$.

Vì vậy do $f'(x)$ đổi dấu $3$ lần nên số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là $3$.

**Câu 27.** **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số $y = 2f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

**A.** $x = 2$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 5$.

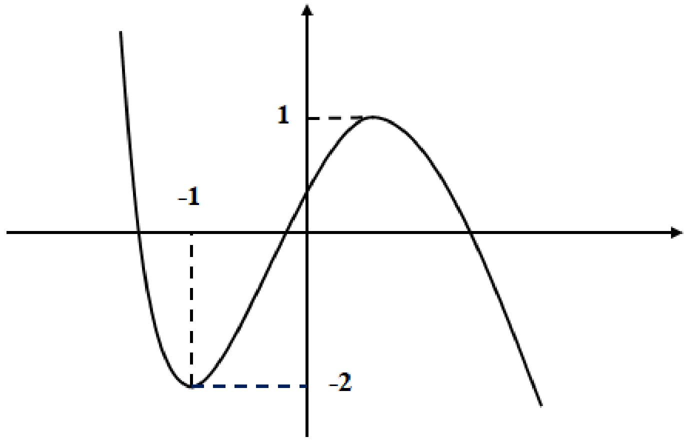
**Lời giải**

Ta có: $y = 2f(x) + 1 \Rightarrow y' = 2f'(x)$.

Suy ra: Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ cũng chính là điểm cực tiểu của hàm số $y = 2f(x) + 1$.

Vậy: Hàm số $y = 2f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

**Câu 28.** **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là:




**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Đặt $g(x)=f(x)+2x$ suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)+2=0 \Leftrightarrow f'(x)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=x_0>-1 \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có: Trên $(-\infty;-1)$ thì $f'(x)>-2 \Leftrightarrow f'(x)+2>0$.

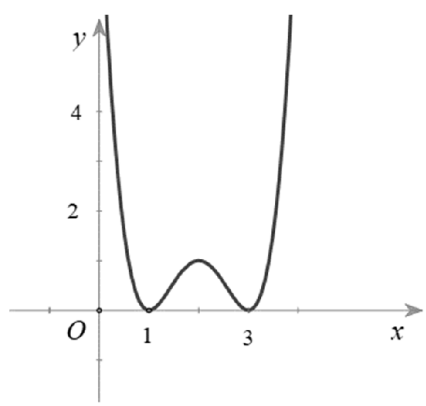
Trên $(-1;x_0)$ thì $f'(x)>-2 \Leftrightarrow f'(x)+2>0$.

Trên $(x_0;+\infty)$ thì $f'(x)<-2 \Leftrightarrow f'(x)+2<0$.

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | + | 0 | – | |
| $g(x)$ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | |

Vậy hàm số $g(x)=f(x)+2x$ có $1$ cực trị.

**Câu 29.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+2x^2-5x+2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?



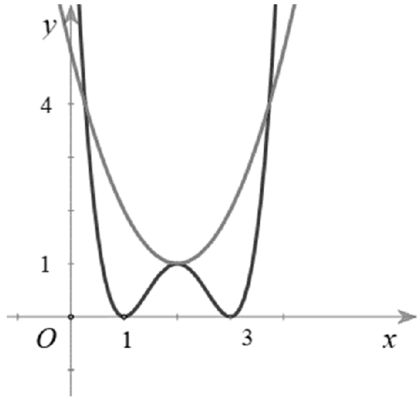

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Có $g'(x)=f'(x)-x^2+4x-5 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2-4x+5$

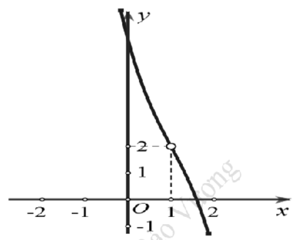
Ta có đồ thị hàm số $y=x^2-4x+5$ và đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới




Quan sát hình vẽ ta thấy $g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó chỉ có 1 nghiệm bội chẵn

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

**Câu 30.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là đường cong của như hình vẽ dưới đây.




Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2-2x.f(x)+2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**<u>A</u>.** Đồ thị của hàm số $y=h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

**B.** Hàm số $y=h(x)$ không có cực trị.

**C.** Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$.

**D.** Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$.

**Lời giải**

**<u>Chọn A</u>**

Theo bài ra ta có

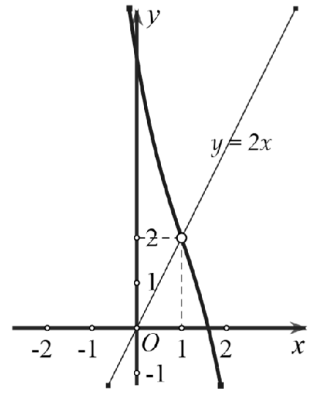
$h'(x)=f'(x).f(x)-2f(x)+2x.f'(x)+4x=f'(x)(f(x)-2x)-2(f(x)-2x)$

$=(f'(x)-2)(f(x)-2x)$

Từ đồ thị ta thấy $y=f(x)$ nghịch biến nên $f'(x)<0$ suy ra $f'(x)-2<0$.

Suy ra $h'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-2x=0$.

Từ đồ thị dưới ta thấy $f(x)-2x=0 \Leftrightarrow x=1$.




Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Suy ra đồ thị của hàm số $y=h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

**Câu 31.** Cho hàm số $f(x)=x^4$. Hàm số $g(x)=f'(x)-3x^2-6x+1$ đạt cực tiểu, cực đại lần lượt tại $x_1,\ x_2$. Tính $m=g(x_1)g(x_2)$.

**A.** $m=0$. **B.** $m=\dfrac{-371}{16}$. **C.** $m=\dfrac{1}{16}$. **<u>D</u>.** $m=-11$.

**Lời giải**



**<u>Chọn D</u>**

Theo bài ra ta có $f'(x)=4x^3$.

Suy ra $g(x)=4x^3-3x^2-6x+1$.

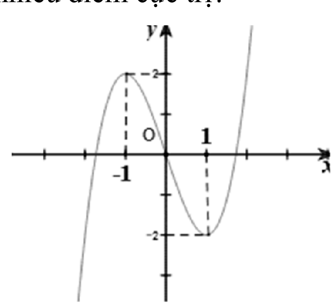
Suy ra $g'(x)=12x^2-6x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số lên - xuống – lên.

Hàm số $g(x)=f'(x)-3x^2-6x+1$ đạt cực tiểu, cực đại lần lượt tại $x_1=1,\ x_2=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $m=g(1).g(2)=(4-3-6+1)\left[4.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3-3.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2-6.\left(\dfrac{-1}{2}\right)+1\right]=-11$.

**Câu 32.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Biết đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $g(x)=f'(x)$

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0)$, $(-1;2)$, $(1;-2)$ nên ta có:

$$\begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=-2 \\ -a+b-c+d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ b=0 \\ a+c=-2 \end{cases}$$

Do đó: $g(x)=ax^3+cx \Rightarrow g'(x)=3ax^2+c$

Hàm số đạt cực trị tại $x=\pm 1$ nên $g'(\pm 1)=0 \Leftrightarrow 3a+c=0$

Từ đó có: $a=1; c=-3 \Rightarrow g(x)=f'(x)=x^3-3x$

Xét hàm số: $y=f(x)-2x$

$y'=f'(x)-2=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$



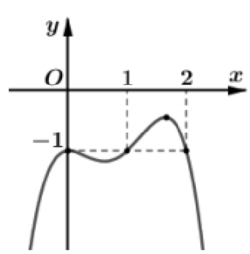
$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Dấu của $y'$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Do đó hàm số có 1 điểm cực trị.

**Câu 33.** **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$.

**C.** Không có điểm cực tiểu. **D.** $x=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=f(x)+x$ có $g'(x)=f'(x)+1$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có:

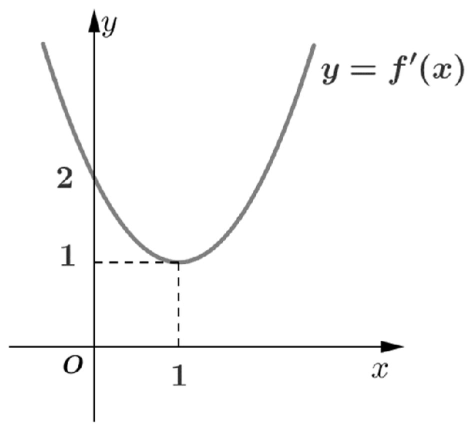
$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | CT | $\nearrow$ | CĐ | $\searrow$ | |

Từ đó suy ra hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

**Câu 34.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol như hình bên dưới.

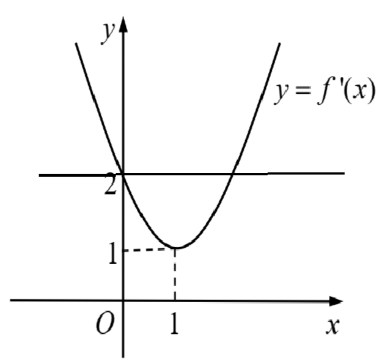



Hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu cực trị?

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

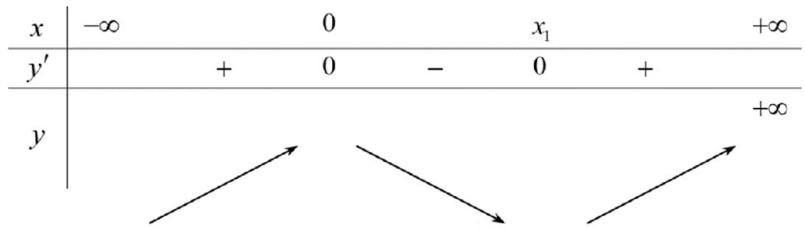
**Chọn B**




Ta có $y'=f'(x)-2$.

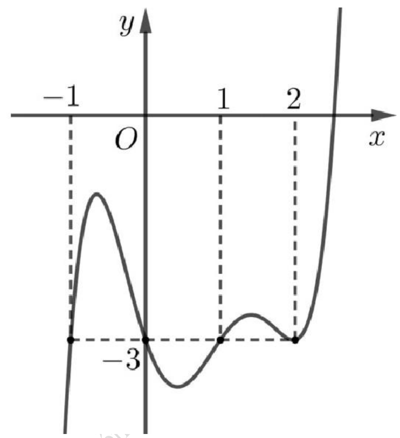
$$y'=0\Leftrightarrow f'(x)-2=0\Leftrightarrow f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=x_1>1\end{array}\right..$$

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2$, ta có bảng biến thiên sau




Vậy hàm số $y = f(x) - 2x$ có hai điểm cực trị.

**Câu 35.** Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ cóbao nhiêu cực trị?




**A.** 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn B**

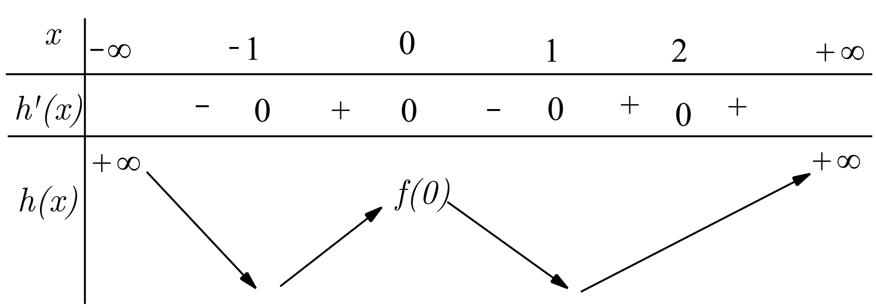
Đặt $h(x) = f(x) + 3x$

$h'(x) = f'(x) + 3$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$

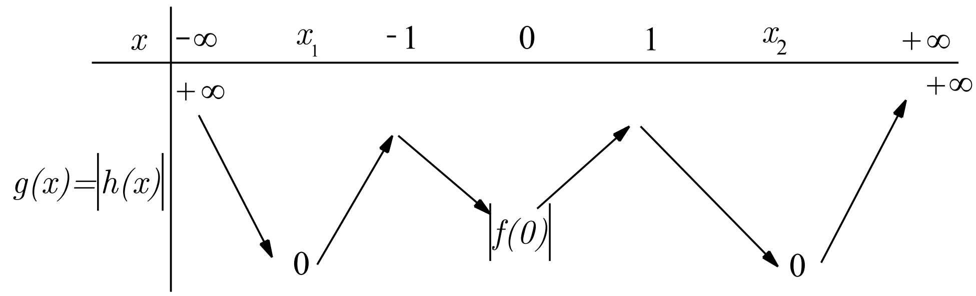
Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì phương trình $f'(x) = -3$ có $4$ nghiệm $\{-1; 0; 1; 2\}$

Ta có bảng biết thiên



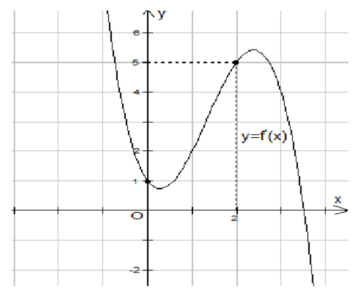

Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < -1$; và $x_2 > 1$ (do có $f(0) < 0$)

Khi đó ta có




Vậy hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ có $5$ cực trị.

**Câu 36.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình bên.




Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ đạt cực đại tại $x=0$.

**B.** Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

**C.** Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ không đạt cực trị tại $x=0$.

**D.** Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ không có cực trị.



**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$.

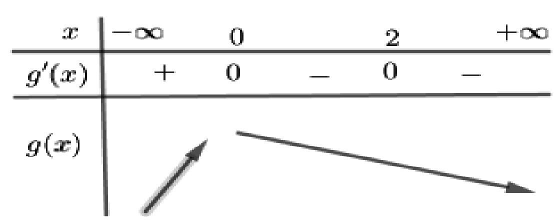
Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x-1$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=2x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

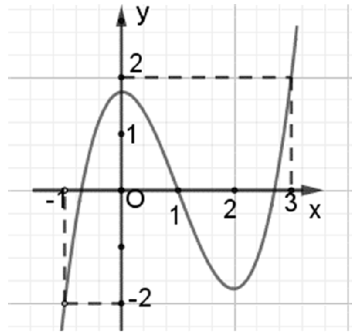
Dựa vào đồ thị ta có: $g'(1)=f'(1)-3<0$, $g'(3)=f'(3)-7<0$ nên $x=0$ là nghiệm đơn và $x=2$ là nghiệm kép.

Bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên ta có $x=0$ là điểm cực đại.

**Câu 37.** **(THPT Minh Khai)** Cho hàm số Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2019$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.




Số điểm cực trị của hàm số $y=g(|x|)$ là

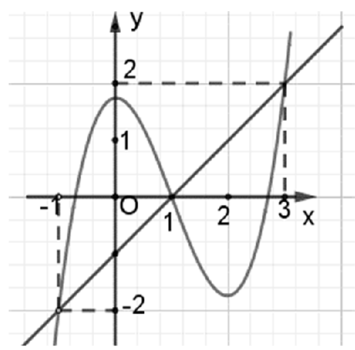
**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$*$ $g'(x)=2f'(x)-2x+2$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$

Đường thẳng $y=x-1$ đi qua các điểm $(-1;-2)$, $(1;0)$, $(3;2)$




Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có BBT của hàm số $y=g'(x)$ như sau

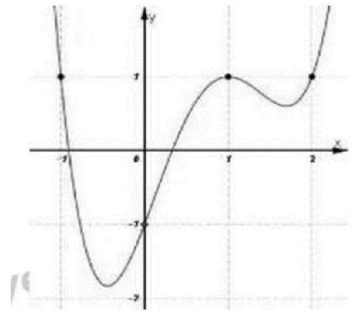
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $g(-1)$ | $\nearrow$ | $g(0)$ | $\nearrow$ | $g(1)$ | $\searrow$ | $g(3)$ | $\nearrow$ | |

$*$Đồ thị hàm số $y=g(|x|)$ nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng nên từ BBT trên ta suy ra BBT của hàm số $y=g(|x|)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $g(3)$ | $\nearrow$ | $g(1)$ | $\searrow$ | $g(0)$ | $\nearrow$ | $g(1)$ | $\searrow$ | $g(3)$ | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y=g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 38.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $g'(x)=f'(x)-1=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$.

Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại ba điểm có hoành độ là $x=-1, x=1$ và $x=2$

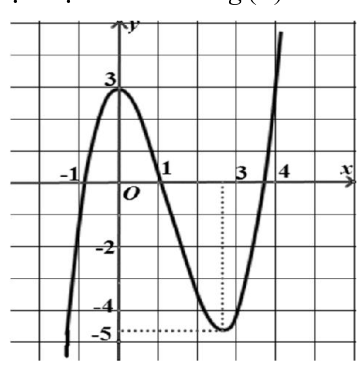
Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | 0 | − | 0 | + | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta suy ra $x_{CD}=-1$.

**Câu 39.** **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x)=3f\left(f(x)\right)+4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$




**A.** 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $g'(x)=3f'(x).f'\left(f(x)\right)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(x).f'\left(f(x)\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left(f(x)\right)=0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số trên ta thấy:

+ Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x=0; x=\alpha$ với $\alpha \in (1;3)$.

+ Phương trình $f'\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=\alpha \end{array}\right.$.

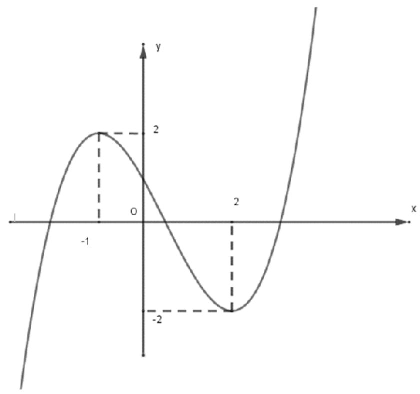
+ Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2 nghiệm trên.

+ Phương trình $f(x)=\alpha$ với $\alpha\in(1;3)$ có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 8 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm.

Do đó hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

**Câu 40.** **(HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho hàm số $y=f(\mathrm{x})$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x)=\left|[f(x)]^2-4f(x)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?




**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $7$.

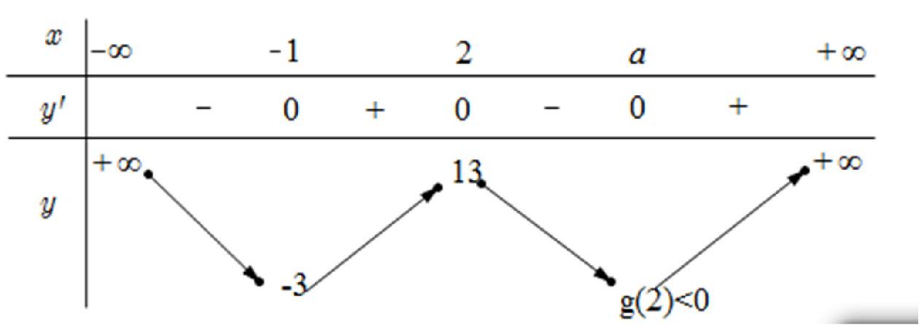
**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $g(x)=[f(x)]^2-4f(x)+1$.

Khi đó, $g'(x)=2f(x).f'(x)-4f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\,(a>2) \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

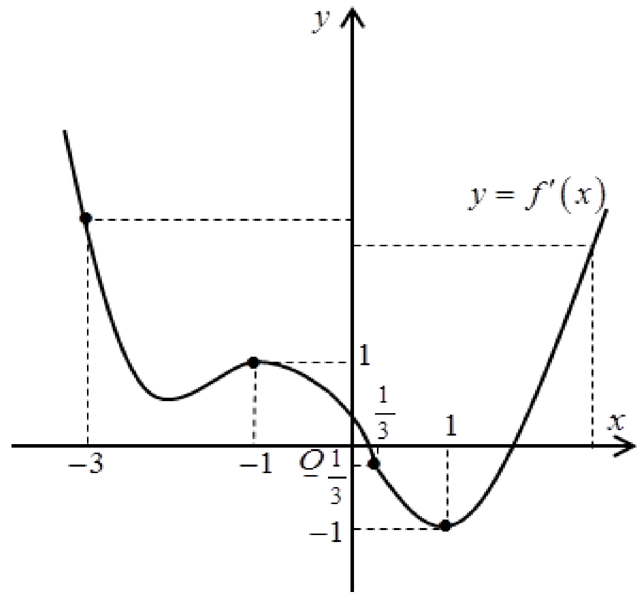
Do đó, ta có bảng biến thiên:




Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với $Ox$.

Vậy đồ thị hàm số $y=h(x)=|g(x)|$ có số cực trị là $3+4=7$.

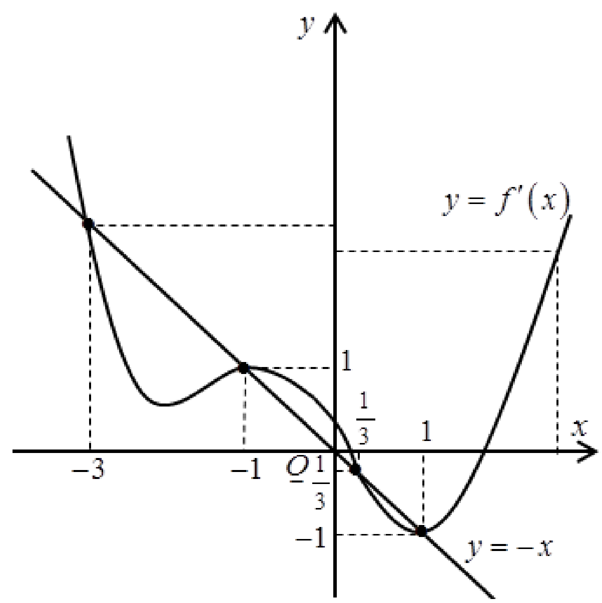
**Câu 41.** **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$.




**A.** $9$. **B.** $7$. **C.** $6$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có: $g'(x)=5\cos xf'\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\cos x\left(5\sin x-1\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow 5\cos xf'\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\cos x\left(5\sin x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ f'\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) = -\dfrac{5\sin x - 1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = -3 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = -1 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 5\sin x - 1 = -6 \\ 5\sin x - 1 = -2 \\ 5\sin x - 1 = \dfrac{2}{3} \\ 5\sin x - 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{5} \\ \sin x = \dfrac{1}{3} \\ \sin x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{5} \\ \sin x = \dfrac{1}{3} \\ \sin x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \\ x = \pi - arc\sin\left(-\dfrac{1}{5}\right) \vee x = 2\pi + arc\sin\left(-\dfrac{1}{5}\right) \\ x = arc\sin\left(\dfrac{1}{3}\right) \vee x = \pi - arc\sin\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ x = arc\sin\left(\dfrac{3}{5}\right) \vee x = \pi - arc\sin\left(\dfrac{3}{5}\right) \end{array}\right., \text{( Vì } 0 < x < 2\pi \text{)}.$$



Suy phương trình $g'(x) = 0$ có $9$ nghiệm, trong đó có nghiệm $x = \dfrac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có $7$ cực trị.

**Câu 42.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $-2$ | | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

**A.** $11$. **B.** $9$. **C.** $7$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta chọn hàm $f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

Đạo hàm

$g'(x) = 4x^3\left[f(x+1)\right]^2 + 2x^4 f(x+1) f'(x+1) = 2x^3 f(x+1)\left[2f(x+1) + xf'(x+1)\right]$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3 f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right.$.

+) $f(x+1)=0\ (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4-10(x+1)+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1\approx 1,278 \\ x+1\approx 0,606 \\ x+1\approx -0,606 \\ x+1\approx -1,278 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác $0$.

+) $2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \overset{t=x+1}{\Rightarrow} 2(5t^4-10t^2+3)+(t-1)(20t^3-20t)=0$

$\Leftrightarrow 30t^4-20t^3-40t^2+20t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 1,199 \\ t\approx 0,731 \\ t\approx -0,218 \\ t\approx -1,045 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác $0$ và khác các nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là $9$.

**Câu 43.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $5$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g'(x)=2x.\left[f(x-1)\right]^4+4x^2f'(x-1)\left[f(x-1)\right]^3=2x.\left[f(x-1)\right]^3\left(f(x-1)+2xf'(x-1)\right)$

Vậy $g'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x-1)=0\ (1) \\ f(x-1)+2xf'(x-1)=0\ (2) \end{array}\right.$

Phương trình $(1)$ có $4$ nghiệm phân biệt

Phương trình $(2)$ có $f(x-1)=-2xf'(x-1) \Rightarrow f(x)=-2(x+1)f'(x)$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm $f(x)$ là bậc bốn trùng phương nên ta có

$f(x)=-3x^4+6x^2-1$ thay vào $f(x)=-2(x+1)f'(x)$ vô nghiệm

Vậy hàm $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 44.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biên thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4[f(x-1)]^2$ là

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $9$. **D.** $11$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có : $f(x)=4x^4-8x^2+3 \Rightarrow f'(x)=16x(x^2-1)$

Ta có $g'(x)=2x^3.f(x-1).[2f(x-1)+x.f'(x-1)]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3=0 & (1) \\ f(x-1)=0 & (2) \\ 2f(x-1)+x.f'(x-1)=0 & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình $(1)$ có $x=0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình $(2)$ có cùng số nghiệm với phương trình $f(x)=0$ nên $(2)$ có 4 nghiệm đơn.

Phương trình $(3)$ có cùng số nghiệm với phương trình :

$2f(x)+(x+1).f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(4x^4-8x^2+3)+16x(x+1)(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow 24x^4+16x^3-32x^2-16x+6=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Dễ thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x)=0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

**Câu 45.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $9$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$g'(x)=2x\left[f(x+1)\right]^4+4x^2\left[f(x+1)\right]^3.f'(x+1)=2x\left[f(x+1)\right]^3.\left[f(x+1)+2x.f'(x+1)\right]$

$g'(x)=0$ ta được

+ **TH1:** $x=0$

+ **TH2:** $f(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<-2 \\ x=b\in(-2;-1) \\ x=c\in(-1;0) \\ x=d>0 \end{array}\right.$

**+ TH3:** $f(x+1)+2x.f'(x+1)=0$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số thỏa mãn là $f(x)=-5x^4+10x^2-2$

$\Rightarrow f(x+1)+2x.f'(x+1)=0 \Leftrightarrow h(x)=f(x+1)+2(x+1).f'(x+1)-2f'(x+1)=0$

Với $t=x+1$ ta có: $h(t)=-5t^4+10t^2-2+2t(-20t^3+20t)-2(-20t^3+20t)=0$

$\Leftrightarrow -45t^4+40t^3+50t^2-40t-2=0$

Lập bảng biến thiên ta suy ra có $4$ nghiệm $t \Rightarrow 4$ nghiệm $x$

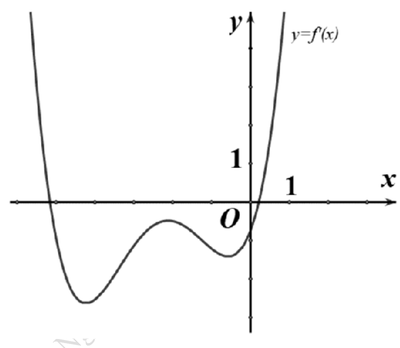
Vậy có $9$ cực trị.

Bài toán tìm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left[u(x)\right]+h(x)\right|$

**Bước 1.** Tìm cực trị của hàm số $v(x)=f\left[u(x)\right]+h(x)$

**Bước 2.** Sử dụng phương pháp biến đổi đồ thị hàm số trị tuyệt đối để tìm số cực trị của hàm số $g(x)$

**Câu 46.** **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ là




**A.** 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét $h(x)=f\left(x^3\right)-x$

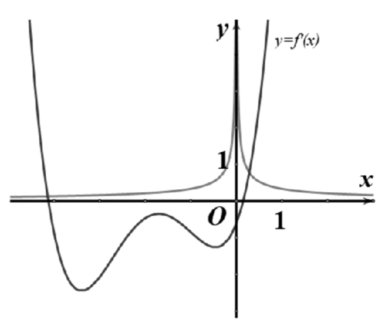
Có $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)-1$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2f'\left(x^3\right)-1=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{1}{3x^2}\ \ (x\neq 0)\ \ (1)$

Đặt $x^3=t \Rightarrow x^2=\sqrt[3]{t^2}$ phương trình (1) trở thành:

$f'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\ \ (t\neq 0)\ \ (2)$

Vẽ đồ thị hàm $y=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y=f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có:

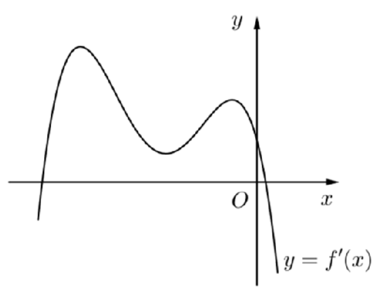
$$f'(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=b<0 \\ t=a>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3=b<0 \\ x^3=a>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{b}<0 \\ x=\sqrt[3]{a}>0 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $\sqrt[3]{b}$ | | $0$ | | $\sqrt[3]{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | $\nearrow$ | $f(b)-\sqrt[3]{b}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $f(a)-\sqrt[3]{a}$ | $\nearrow$ | |
| $g(x)=\|h(x)\|=\|f(x^3)-x\|$ | $\searrow$ | $0$ | $f(b)-\sqrt[3]{b}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $-f(a)+\sqrt[3]{a}$ | $0$ | $\nearrow$ |

Dựa vào BBT ta thầy hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 47.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)+x\right|$ là




**A.** 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

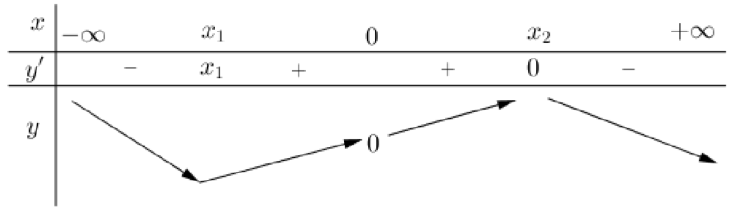
**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $h(x)=f\left(x^3\right)+x \Rightarrow h'(x)=3x^2 f'\left(x^3\right)+1=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=-\dfrac{1}{3x^2}$

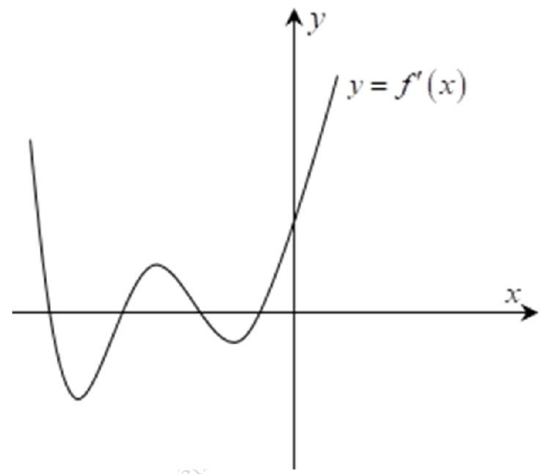
Đặt $t=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t)=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$

Xét hàm số $y=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y'=\dfrac{2}{9\sqrt[3]{t^5}}$ đổi dấu khi qua 0 và đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$. Khi vẽ đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'(t)$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thuộc góc phần tử thứ 3 và 4, gọi 2 giao điểm lần lượt là $t_1<0, t_2>0 \Rightarrow x_1=\sqrt[3]{t_1}, x_2=\sqrt[3]{t_2}$. Như vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau




Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt và hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị không nằm trên trục hoành, do đó hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 48.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-x^2\right|$ là




**A.** 4. **B.** 3. **C.** 6. **<u>D</u>.** 5.

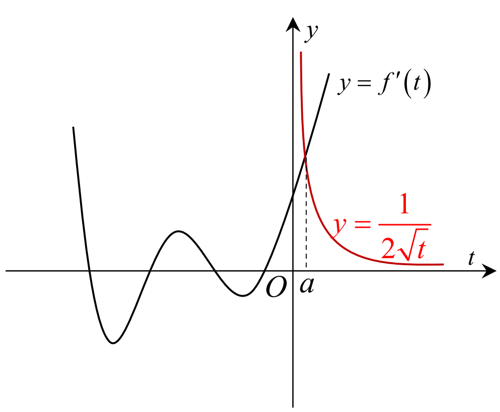
**Lời giải**

**<u>Chọn D</u>**

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-x^2$ có $h'(x)=4x^3f'\left(x^4\right)-2x$.

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{1}{2x^2} \quad (*) \end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*)$: Đặt $t=x^4$ thì $(*)$ thành $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ với $t>0$.




Dựa vào đồ thị, phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm $a>0$.

Khi đó, ta được $x=\pm\sqrt[4]{a}$.

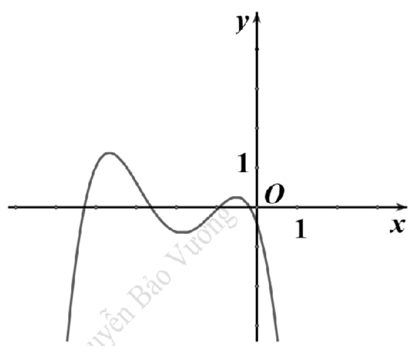
Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f(x^4)-x^2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt[4]{a}$ | | $0$ | | $\sqrt[4]{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | ↘ | | ↗ | $0$ | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

Số cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^4)-x^2\right|$ bằng số cực trị của hàm $h(x)=f(x^4)-x^2$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $h(x)=0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(x)$ thì số cực trị của $g(x)$ là 5.

**Câu 49.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^4)+x^2\right|$ là




**A.** 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $h(x)=f(x^4)+x^2$

Có $h'(x)=4x^3f'(x^4)+2x=2x\left(2x^2f'(x^4)+1\right)$

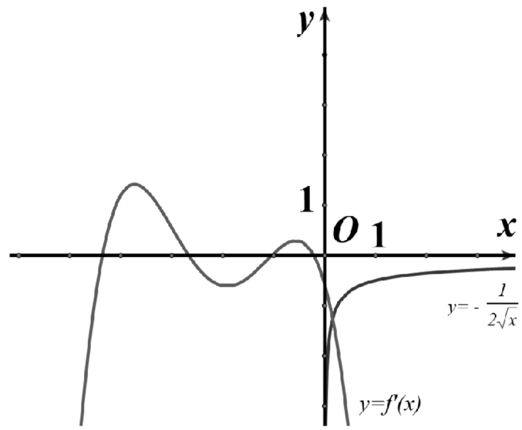
$$h'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(2x^2f'(x^4)+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2f'(x^4)+1=0\quad(1)\end{array}\right.$$

$$(1):2x^2f'(x^4)+1=0\Leftrightarrow f'(x^4)=-\frac{1}{2x^2}\quad(x\neq0)\quad(2)$$

Đặt $x^4=t\Rightarrow x^2=\sqrt{t}\quad(t>0)$ phương trình (2) trở thành:

$$f'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{t}}\quad(t>0)\quad(3)$$

Vẽ đồ thị hàm $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y=f'(x)$.




Dựa vào đồ thị ta có: phương trình (3) có nghiệm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x^4 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[4]{a} \\ x = -\sqrt[4]{a} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt[4]{a}$ | | $0$ | | $\sqrt[4]{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | | ↗ | $f(a)+\sqrt{a}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $f(a)+\sqrt{a}$ | ↘ | |
| $g(x)=\lvert h(x)\rvert=\lvert f(x^4)+x^2\rvert$ | ↘ | $0$ ↗ | $f(a)+\sqrt{a}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $f(a)+\sqrt{a}$ | ↘ $0$ | ↗ |

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)+x^2\right|$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 50. (Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** 4 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 11

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

* $y=h\left(x\right)=f\left(|x|^2-2|x|\right)$

$y'=h'\left(x\right)=f'\left(|x|^2-2|x|\right).\frac{x}{|x|}.\left(2|x|-2\right).$

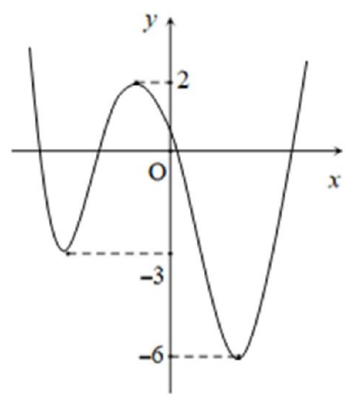
$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ |x|^2-2|x|=0 \\ |x|^2-2|x|=1 \\ |x|^2-2|x|=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=-2 \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=-1-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{3} \\ x=-1-\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

Ta thấy phương trình $h'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn $(1)$.

$h'(x)$ không tồn tại tại $x=0$ mà $x=0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu $(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra hàm số đã cho có $9$ điểm cực trị.

**Câu 51.** **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc $4$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x)=|2f(x-1)+m|$ có $5$ điểm cực trị?




**A.** $13$. **B.** $14$. **C.** $15$. **D.** $12$.

**Lời giải**

**Chọn C**

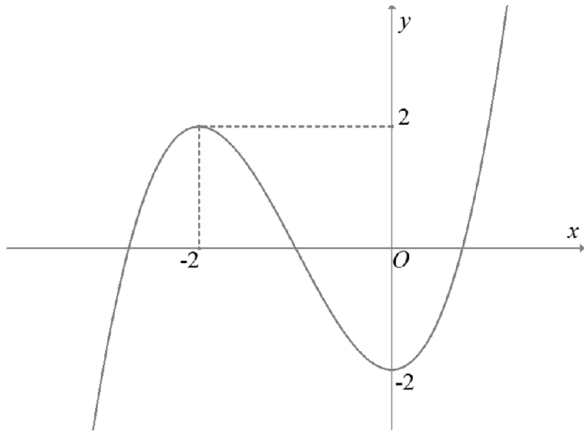
Đặt $h(x)=2f(x-1)+m \Rightarrow g(x)=|h(x)|$.

- Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y=h(x)$ + số giao điểm của $y=h(x)$ với trục $Ox$ khác với điểm cực trị của $y=h(x)$.
- Hàm số $y=f(x)$ có $3$ điểm cực trị. Suy ra hàm số $y=h(x)$ cũng có $3$ điểm cực trị.
- Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x-1)=-\dfrac{m}{2}$ có $2$ nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.
- Đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang bên phải $1$ đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\dfrac{m}{2}\ge 2$ hoặc $-6<-\dfrac{m}{2}\le -3$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ 6\le m<12 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}\,;\, m\in[-12;12]}$ có $15$ giá trị $m$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 52.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $a\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(-2x^2+4x)$




**A.** 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải.**

**Chọn D**

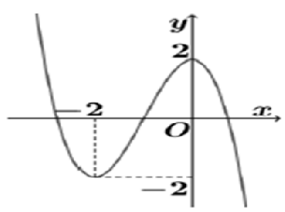
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=-2; x=0$.

$g(x)=f(-2x^2+4x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $g'(x)=(-4x+4)f'(-2x^2+4x)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4x+4=0\\-2x^2+4x=0\\-2x^2+4x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\\(x-1)^2=0\end{array}\right.$$

Như vậy $g'(x)$ có 3 nghiệm, trong đó 1 là nghiệm bội 3, 0 và 2 là nghiệm đơn nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

**Câu 53.** **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ




Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(-x^2+x)$ bằng

**A.** 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Khi đó $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có

$$\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(-2)=-2 \\ f(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ c=0 \\ -8a+4b-2c+d=-2 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b=0 \\ -8a+4b=-4 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}.$$

Vậy $f(x)=-x^3-3x^2+2$.

Khi đó, ta có $g(x)=f\left(-x^2+x\right)=x^6-3x^5+5x^3-3x^2+2$.

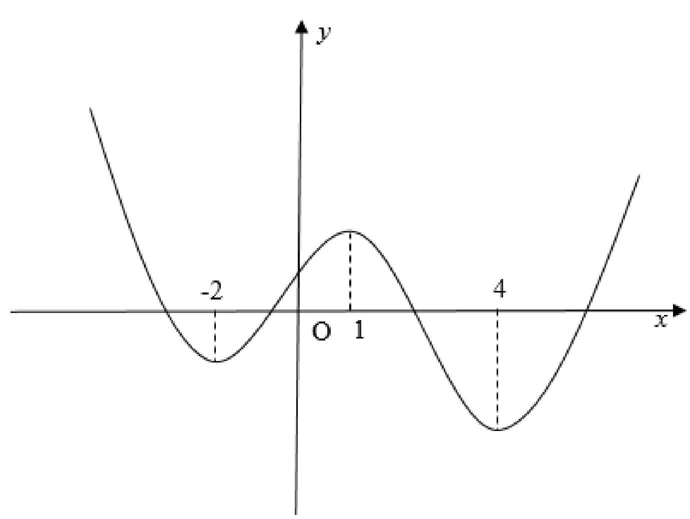
$$g'(x)=3x\left(2x^4-5x^3+5x-2\right) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $0.5$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Suy ra, hàm số $g(x)=f\left(-x^2+x\right)$ có ba điểm cực tiểu.

**Câu 54.** **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?




**A.** $3$. **B.** $7$. **C.** $6$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g'(x)=\left(e^x-x-1\right)f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left(e^x-x-1\right)f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x-x-1=0\\ f'\left(e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}e^x-x-1=0 & (1)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=-2 & (2)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=1 & (3)\\ e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=4 & (4)\end{array}\right.$$

Ta xét $u(x)=e^x-x-1; v(x)=e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}$

Ta có $u'(x)=e^x-1; u'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ $u'(x)=e^x-1; v'(x)=e^x-x-1$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy $u(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $v(x)=e^x-\dfrac{x^2+2x}{2}$

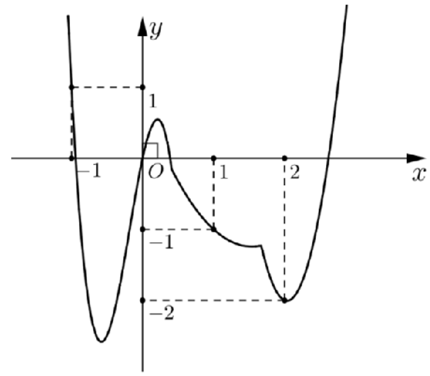
Ta có $v'(x)=e^x-x-1\ge 0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $v(x)$ | $-\infty$ | | $\nearrow$ | | $+\infty$ |

Khi đó các phương trình $(2),(3),(4)$ có nghiệm duy nhất và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó.
Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

**Câu 55.** **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Đặt $g\left(x\right)=2f\left(x\right)+x^2+1$. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

**B.** Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

**C.** Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

**D.** Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

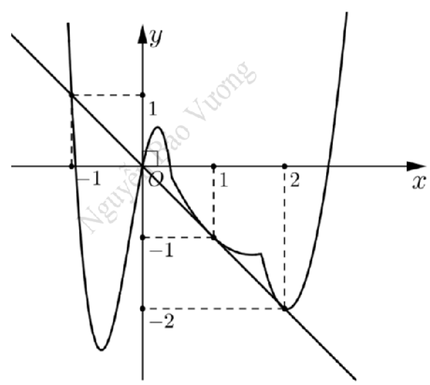
**Lời giải**

**Chọn C**

$g'(x) = 2f'(x) + 2x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$.

Ta vẽ thêm đường thẳng $y = -x$ và đồ thị.




Khi đó phương trình $g'(x) = 0$ có các nghiệm $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | | $\nearrow$ | | | | |

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

**Câu 56.** **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số

$y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$

có 5 điểm cực trị?

**A.** 16. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 27.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm số $f\left(x\right)=3x^4-4x^3-12x^2+m$. Ta có $f'\left(x\right)=12x^3-12x^2-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $m-5$ | $\nearrow$ | $m$ | $\searrow$ | $m-32$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy với mọi $m$ hàm số $f\left(x\right)$ luôn có ba điểm cực trị.

Do đó để hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right)=0$ có đúng hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ \begin{cases} m-5\ge 0 \\ m-32<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 5\le m<32 \end{array}\right.$.

Vì $m$ là số nguyên dương cho nên có $27$ số $m$ thỏa đề bài.

**Câu 57.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | |

Hàm số $y=f(2x)$ đạt cực đại tại

**A.** $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

**Lời giải**

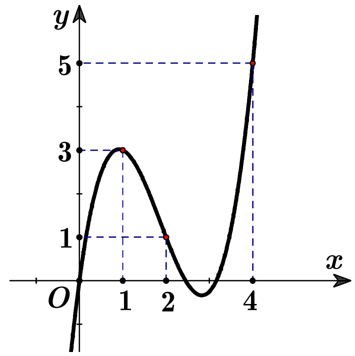
**Chọn C**

Đặt $t=2x \Rightarrow y=f(t)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(t)$ đạt cực đại tại $\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-1 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f(2x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ và $x=-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 58.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0; f\left(4\right)>4$. Biết hàm $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.




Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-2x\right|$ là

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm số $h(x)=f(x^2)-2x$.

Ta có: $h'(x)=2xf'(x^2)-2$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$(vô nghiệm $\forall x\le 0$).

Đặt $t=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{t}, \forall t>0$.

Khi đó: $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ (*). Nhận thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $w(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng biến, do đó (*) nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1)=-2\left(2f'(1)-2\right)=-8<0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\exists x_0\in(0;1): h'(x_0)=0$.

Vậy $h'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(0;1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên). (1)

Xét phương trình: $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x^2)-2x=0$ (**).

Ta có: $h(0)=f(0)=0 \Rightarrow x=0$ là một nghiệm của (**).

Mặt khác: $h\left(\sqrt{x_0}\right).h(2)=\left(f(x_0)-2\sqrt{x_0}\right)\left(f(4)-4\right)<0 \Rightarrow \exists x_1\in\left(\sqrt{x_0};2\right): h(x_1)=0$.

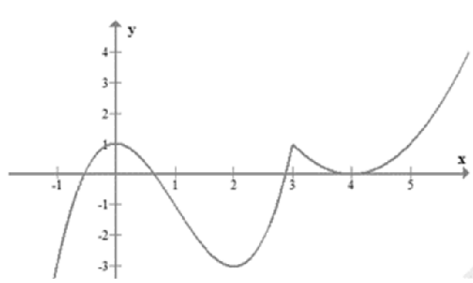
Nên (**) có nghiệm $x_1\in\left(\sqrt{x_0};2\right)$.

Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên (**) có không quá 2 nghiệm.

Vậy $h(x)=f(x^2)-2x=0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-2x\right|$ có 3 điểm cực trị.

**Câu 59.** **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(2|x|-2)$ bằng



**A.** 7 . **B.** 5. **C.** 4 . **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn D**

$g(x)=f(2|x|-2)\Rightarrow g'(x)=(2|x|-2)'f'(2|x|-2)=\left(2\sqrt{x^2}-2\right)'f'(2|x|-2)=\frac{x}{|x|}f'(2|x|-2)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x}{|x|}f'(2|x|-2)=0\Leftrightarrow f'(2|x|-2)=0\,(x\neq 0)$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$

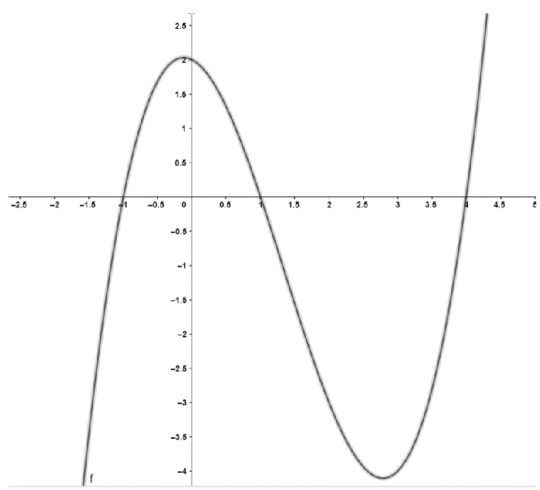
$\rightarrow f'(2|x|-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2|x|-2=0\\2|x|-2=2\\2|x|-2=3\\2|x|-2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=1\\|x|=2\\|x|=\frac{5}{2}\\|x|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\x=\pm 2\\x=\pm\frac{5}{2}\\x=\pm 3\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | $\frac{-5}{2}$ | | -2 | | -1 | | 0 | | 1 | | 2 | | $\frac{5}{2}$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | + | 0 | $-$ | 0 | + | 0 | | $\|$ | + | 0 | $-$ | 0 | + | 0 | $-$ | 0 | + | |

Suy ra hàm số $y=f(2|x|-2)$ có 9 điểm cực trị

**Câu 60.** **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Tìm điểm cực đại của hàm số $y=2019^{-f(x)}-2020^{f(x)}$.

**A.** 2 . **B.** 3 . **C.** 0 . **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $y=f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Xét hàm số $y=2019^{-f(x)}-2020^{f(x)} \Rightarrow y'=-f'(x)\left(2019^{-f(x)}\ln 2019+2020^{f(x)}\ln 2020\right)$

Vì $2019^{-f(x)}\ln 2019+2020^{f(x)}\ln 2020>0$

Nên $y'=-f'(x)\left(2019^{-f(x)}\ln 2019+2020^{f(x)}\ln 2020\right)$ có bảng xét dấu như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | |

Vậy hàm số $y=2019^{-f(x)}-2020^{f(x)}$ có hai điểm cực đại.

**Câu 61.** **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)=f\left(|x|^2-|x|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(|x|\right)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ cộng thêm 1.

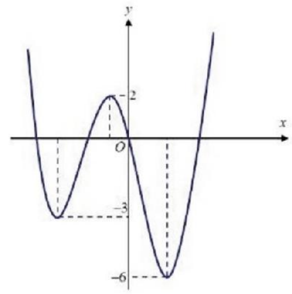
Xét hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)\Rightarrow h'(x)=(2x-1)f'\left(x^2-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-x=-1 \\ x^2-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |

Hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)$ có 2 điểm cực trị dương, vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)=f\left(|x|^2-|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 62.** **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập $S$ bằng

**A.** 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right| \Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{f'\left(x+2018\right)\left[f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right]}{\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right|}$

Phương trình $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x+2018\right)=0 \ (1) \\ f\left(x+2018\right)=-\dfrac{m^2}{3} \ (2) \end{array}\right.$

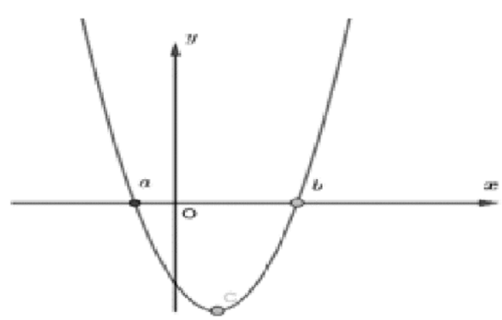
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $(1)$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $(2)$ phải có 2 nghiệm đơn phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m^2}{3}>2 \\ -6<-\dfrac{m^2}{3}\le -3 \end{array}\right. \left(m\in\mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow m\in\{3;4\}$.

Vậy tổng các phần tử là 7.

**Dạng 3. Tìm m để hàm số f(u) thỏa mãn điều kiện cho trước**

**Câu 1.** **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ và $f\left(b\right)=1$. Số giá trị nguyên của $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là



**A.** 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:**

Ta có bảng biến thiên của $f\left(x\right)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(a)$ | ↘ | $f(b)=1$ | ↗ | $+\infty$ |

Xét hàm số $h\left(x\right)=f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)f\left(x\right)+4f'\left(x\right)$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]$

$h'\left(x\right)=0\Rightarrow 2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a;x=b \\ x=c\left(c\langle a\right) \end{array}\right.$

Pt có $3$ nghiệm phân biệt $\Rightarrow$có $3$ điểm cực trị

Xét$h\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)=-m\left(2\right)$

Để $g\left(x\right)=\left|h\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi PT $\left(2\right)$có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt

Xét hàm số $t\left(x\right)=f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)$

Ta có Bảng biến thiên của $t\left(x\right)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $c$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $t(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $t(a)$ | ↘ | $5$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | | | $y=-m$ | | | | |

Từ YCBT $\Leftrightarrow t\left(x\right)=-m$ có hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ pb

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -m\ge t\left(a\right)>5 \\ -4<-m\le 5 \end{array}\right. \\ -5\le m\le 5;m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m\le -t\left(a\right)<-5 \\ -4<-m\le 5 \end{array}\right. \\ -5\le m\le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5\le m<4 \\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m\in\left\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\right\}$.

**Cách 2:**

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(a)$ | $\searrow$ | $f(b)=1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$

$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)f(x) + 4f'(x)$

$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)\left[f(x) + 2\right]$

$h'(x) = 0 \Rightarrow 2f'(x)\left[f(x) + 2\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ & f(x) = -2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = a; x = b \\ & x = c\left(c \langle a\right) \end{aligned}\right.$

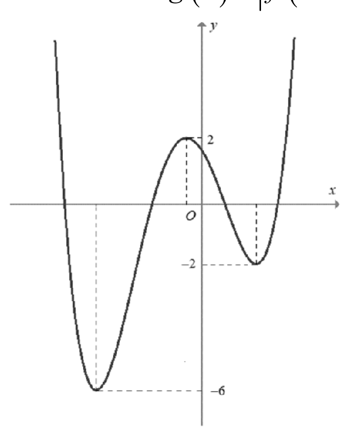
| $x$ | $-\infty$ | | $c$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4+m$ | $\nearrow$ | $h(a)$ | $\searrow$ | $5+m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ YCBT $g(x) = \left|h(x)\right| = \left|f^2(x) + 4f(x) + m\right|$ có 5 điểm cực trị khi:

$\left\{\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & h(a) \le 0 \\ & -4 + m < 0 \le 5 + m \end{aligned}\right. \\ & m \in \mathbb{Z}; m \in \left[-5;5\right] \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & m \le f^2(a) + 4f(\mathrm{a}) < -5 \\ & -5 \le m < 4 \end{aligned}\right. \\ & m \in \mathbb{Z}; m \in \left[-5;5\right] \end{aligned}\right.$

$\Leftrightarrow m \in \left\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\right\}$

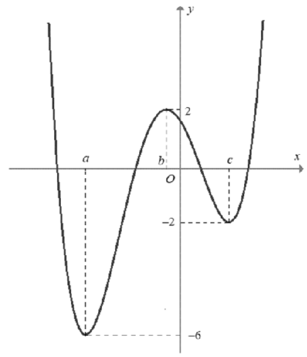
**Câu 2.** **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m$ để hàm số $g(x) = \left|f(x + 2020) + m^2\right|$ có 5 điểm cực trị?



**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $a,b,c$ $(a<b<c)$ là ba điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Khi đó: $f(a)=-6; f(b)=-2; f(c)=2$.

Xét hàm $h(x)=f(x+2020)$ với $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $h'(x)=f'(x+2020).(x+2020)'=f'(x+2020)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a-2020\\x=b-2020\\x=c-2020\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $a-2020$ | | $b-2020$ | | $c-2020$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $h(x)$ | | $\searrow$ | $-6$ | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | |

Hàm số $g(x)=\left|f(x+2020)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x+2020)+m^2=0$ có đúng 2 nghiệm không thuộc $\{a-2020;b-2020;c-2020\}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=2\\m^2=-2\\2<m^2<6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\sqrt{2}\\-\sqrt{6}<m<-\sqrt{2}\\\sqrt{2}<m<\sqrt{6}\end{array}\right..$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của $m$ là $m=2$ và $m=-2$ thì hàm số $g(x)=\left|f(x+2020)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 3.** **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

**B.** $7$. **B.** $5$. **C.** $8$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ (x+2)^4=0 \\ (x+4)^3=0 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=-4 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0\ (*) \end{array}\right.$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là $-4$.

**Trường hợp 1.** Phương trình $(*)$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta = 4m^2+24m+36-24m-72=4m^2-36<0$

$\Leftrightarrow -3<m<3 \Rightarrow m\in\{-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$

**Trường hợp 2.** Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

**Trường hợp 3.** Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$. Trong đó $x_1=-4$.

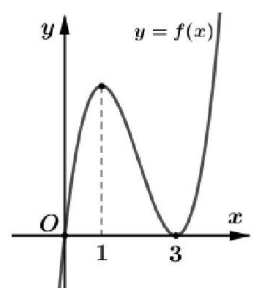
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta=4m^2-36>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>3 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=-4+x_2=-2m-6 \\ P=x_1.x_2=-4.x_2=6m+18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-2m-2 \\ x_2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m-2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m\in\{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 4.** **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới




Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

**A.** $m>1$ **B.** $m\ge 1$ **C.** $m\le 2$ **D.** $m>2$

**Lời giải**

**Chọn B**

Số cực trị của hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số $y(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$ và $y=0$.

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$

$g'(x)=2f(x).f'(x)+2f'(x)=2f'(x)\left[f(x)+1\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=\alpha\,(\alpha<0) \end{array}\right.$$

BBT

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1+2m$ | $\nearrow$ | CĐ | $\searrow$ | $2m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{1}{2}$. Đáp án B là gần kết quả nhất

**Câu 5.** **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của $a$ để hàm số $y=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

**A.** $\left[-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right]\backslash\left\{0;\dfrac{15}{13}\right\}$. **B.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\backslash\left\{0;\dfrac{15}{13}\right\}$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\backslash\{0\}$. **D.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\backslash\left\{\dfrac{15}{13}\right\}$.

**Lời giải**

$$y'=f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)=\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)'.\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2\left(\frac{5x}{x^2+4}-a\right)\left(13\frac{5x}{x^2+4}-15\right)^3$$

$$=\frac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}.\frac{25x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\left(\frac{-ax^2+5x-4a}{x^2+4}\right)\left(\frac{-15x^2+65x-60}{x^2+4}\right)^3.$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=\dfrac{4}{3} \\ -ax^2+5x-4a=0 \quad (1) \end{array}\right. \qquad (x=0 \text{ là nghiệm kép }).$$

đặt $g(x)=-ax^2+5x-4a$

Ycbt thỏa mãn khi phương trình $y'=0$ có $6$ nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 2;0;1;4$. (Nếu $g(0)=0$ thì $y'=0$ chỉ có 5 nghiệm bội lẻ).

Điều kiện: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 5^2 - 4a.4a > 0 \\ g(2) \neq 0 \\ g(-2) \neq 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(3) \neq 0 \\ g\left(\dfrac{4}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -\dfrac{5}{4} < a < \dfrac{5}{4} \\ a \neq \pm\dfrac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \dfrac{15}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{4} < a < \dfrac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \dfrac{15}{13} \end{cases}$.

**Câu 6.** **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

**A.** 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

**Lời giải**

Đặt $g(x) = f(x^2-8x+m)$

$f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 4 & \\ x^2-8x+m-1=0 & (1) \\ x^2-8x+m=0 & (2) \\ x^2-8x+m-2=0 & (3) \end{array}\right.$

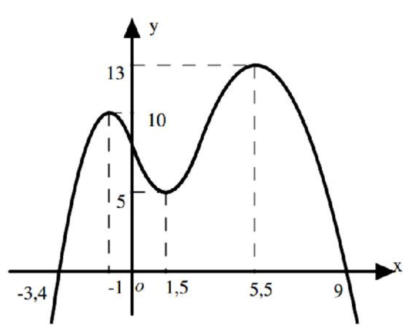
Các phương trình $(1)$, $(2)$, $(3)$ không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2-8x+m-1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $(2)$ và $(3)$ có hai nghiệm phân biệt khác 4

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-m>0 \\ 16-m+2>0 \\ 16-32+m \neq 0 \\ 16-32+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<16 \\ m<18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m<16$.

$m$ nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị $m$ cần tìm.

**Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có **đúng** hai điểm cực trị.




**A.** 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

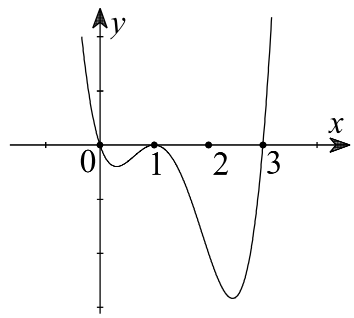
$g'(x) = f'(x) - m$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số nghiệm đơn (bội lẻ) của phương trình $f'(x) = m.$

Dựa và đồ thị ta có điều kiện $\left[\begin{array}{l} 0 < m \le 5 \\ 10 \le m < 13 \end{array}\right.$.

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của $m$ thỏa mãn.

**Câu 8.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.




Tìm $m$ để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có $3$ điểm cực trị.

**A.** $m \in (3;+\infty)$. **B.** $m \in [0;3]$. **C.** $m \in [0;3)$. **D.** $m \in (-\infty;0)$.



**Lời giải**

**Chọn C**

Do hàm số $y = f(x^2 + m)$ là hàm chẵn nên hàm số có $3$ cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng $1$ điểm cực trị dương.

$y = f(x^2 + m) \Rightarrow y' = 2xf'\left(x^2 + m\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 + m\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = 3 - m \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ nên các nghiệm của pt $x^2 = 1 - m$ (nếu có) không làm $f'\left(x^2 + m\right)$ đổi dấu khi $x$ đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \end{array}\right.$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \le 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$.

**Câu 9.** **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2\left(x^2 - 4x + 3\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có $5$ điểm cực trị?

**A.** $18$. **B.** $16$. **C.** $17$. **D.** $15$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=3\end{array}\right.$, $x=2$ là nghiệm kép nên khi qua giá trị $x=2$ thì $f'(x)$ không bị đổi dấu.

Đặt $g(x)=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ khi đó $g'(x)=f'(u).(2x-10)$ với $u=x^2-10x+m+9$.

Nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-10=0\\\left(x^2-10x+m+9-2\right)^2=0\\x^2-10x+m+9=1\\x^2-10x+m+9=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\\left(x^2-10x+m+9-2\right)^2=0\\x^2-10x+m+8=0\ (1)\\x^2-10x+m+6=0\ (2)\end{array}\right.$

Hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có $5$ điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu $5$ lần

Hay phương trình $(1)$ và phương trình $(2)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $5$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1'>0\\\Delta_2'>0\\h(5)\neq0\\p(5)\neq0\end{cases}$, (Với $h(x)=x^2-10x+m+8$ và $p(x)=x^2-10x+m+6$).



$\Leftrightarrow\begin{cases}17-m>0\\19-m>0\\-17+m\neq0\\-19+m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m<17$.

Vậy có $16$ giá trị nguyên dương $m$ thỏa mãn.

**Câu 10.** **(Chuyên Bắc Giang - Lần 4 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y=f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị dương.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\\x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\quad(*)\end{array}\right.$

Có $x=2$ là nghiệm bội 2, $x=1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq 1$, có một nghiệm $x\leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x=0$ khi đó $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Với $m=1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$ (TM)

Với $m=-1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ (Loại)

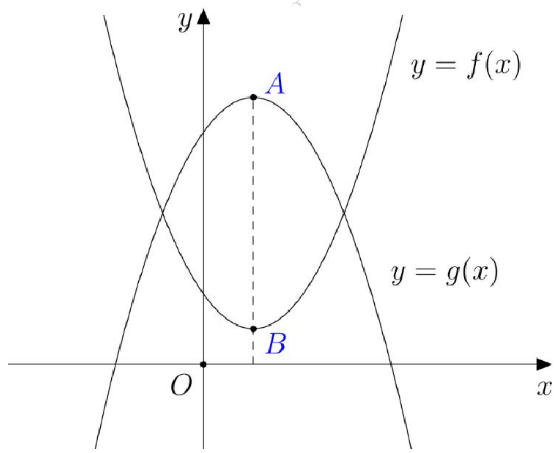
Trường hợp 2: $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq 1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\begin{cases} m^2-1<0 \\ 1^2-2(m+1).1+m^2-1\neq 0 \end{cases} \begin{cases} m\in(-1;1) \\ m\neq 1\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=0$

Vậy có hai giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

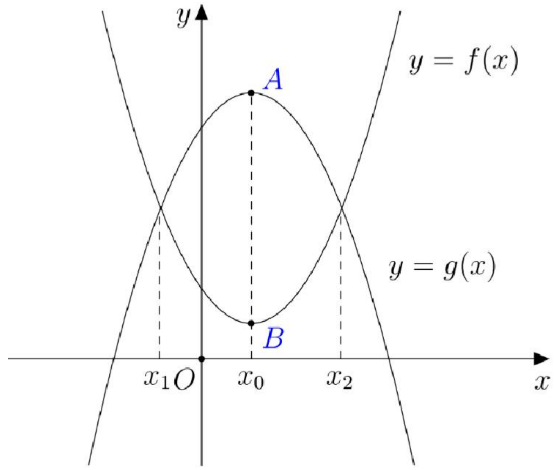
**Câu 11.** **(Sở GD Quảng Nam - 2019)** Cho hai hàm đa thức $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là $A$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là $B$ và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?




**A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn B**




Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$, ta có: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$;

$h(x)=0 \Leftrightarrow x=x_1$ hoặc $x=x_2$ ($x_1<x_0<x_2$);

$h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=-\dfrac{7}{4}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{7}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)=\left|f(x)-g(x)\right|$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $k(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{4}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Do đó, hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y=\left|k(x)+m\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=k(x)+m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x)+m=0$, mà hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)$, phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m\ge \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow m\le -\dfrac{7}{4}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\le -\dfrac{7}{4}$ và $m\in(-5;5)$ nên $m\in\{-4;-3;-2\}$.

**Câu 12.** **(Sở GD Bạc Liêu - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số

$m$ để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\dfrac{a}{b};c\right)$, (với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M=a^2+b^2+c^2$ là

**A.** $M=40$. **B.** $M=11$. **C.** $M=31$. **D.** $M=45$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$ có đạo hàm là

$y'=f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+(2-m)$

- Để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1$, $x_2$ dương.

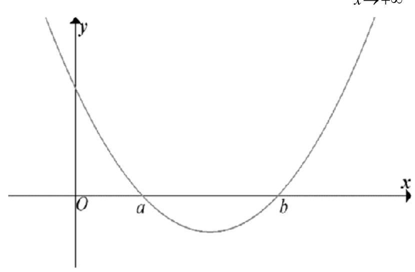
Tương đương với phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(2m-1)^2-3(2-m)>0\\ S=\dfrac{2(2m-1)}{3}>0\\ P=\dfrac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-m-5>0\\ m>\dfrac{1}{2}\\ m<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\vee m>\dfrac{5}{4}\\ m>\dfrac{1}{2}\\ m<2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{5}{4}<m<2.$$

Suy ra $\begin{cases}a=5\\ b=4\\ c=2\end{cases}\Rightarrow M=a^2+b^2+c^2=45$.

**Câu 13.** **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - Lần 3 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tập hợp $S$ tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $g(x)=\left|2f^2(x)+3f(x)+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị, biết phương trình $f'(x)=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt, $f(a)=1, f(b)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.



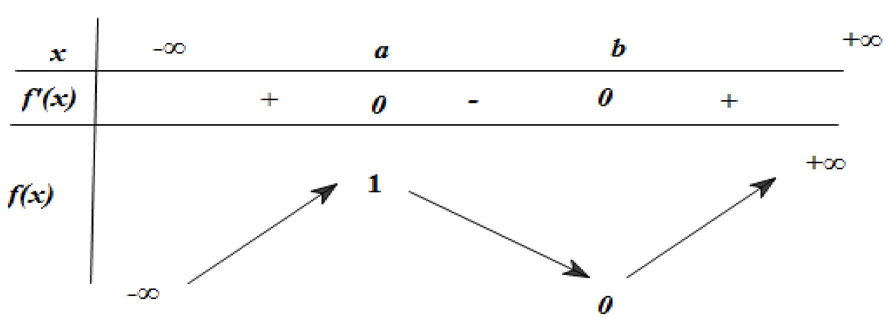



**A.** $S=(-5;0)$. **B.** $S=(-8;0)$. **C.** $S=\left(-8;\dfrac{1}{6}\right)$. **D.** $S=\left(-5;\dfrac{9}{8}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ gt ta có BBT của $f(x)$



Xét hàm số $h(x)=2f^2(x)+3f(x)$, có $h'(x)=4f(x).f'(x)+3f'(x)$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 4f(x).f'(x)+3f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \vee 4f(x)+3=0$

$\Leftrightarrow x=a \vee x=b \vee f(x)=-3/4$

$f(x)=-3/4 \Leftrightarrow x=c<a$ (theo BBT)

BBT của $h(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $c$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | - | $0$ | + | $0$ | - | $0$ | + | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | ↘ | $\frac{-9}{8}$ | ↗ | $5$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Để hàm số $g(x)=|2f^2(x)+3f(x)+m|=|h(x)+m|$ có đúng 7 điểm cực trị thì phương trình $h(x)=-m$ phải có 4 nghiệm phân biệt, hay $0<-m<5 \Leftrightarrow -5<m<0$

**Câu 14.** **(THPT Thanh Chương - Nghệ An - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số

$y=\frac{1}{3}|x^3|-(3-m)x^2+(3m+7)|x|-1$ có $5$ điểm cực trị?

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $2$. **D.** $4$.



**Lời giải**

Ta có $y=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-(3-m)x^2+(3m+7)x-1, khi \quad x\ge 0\\ -\frac{x^3}{3}-(3-m)x^2-(3m+7)x-1, khi \quad x<0\end{cases}$

$\Rightarrow y'=\begin{cases}x^2-2(3-m)x+(3m+7), khi \quad x>0\\ -x^2-2(3-m)x-(3m+7), khi \quad x<0\end{cases}$.

Dễ thấy tại $x=0$ đạo hàm không tồn tại $\Rightarrow x=0$ là một điểm cực trị

Để hàm số có $5$ điểm cực trị thì phương trình $x^2-2(3-m)x+(3m+7)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m>\frac{9+\sqrt{73}}{2}\\ m<\frac{9-\sqrt{73}}{2}\end{array}\right.\\ m<3\\ m>-\frac{7}{3}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{3}<m<\frac{9-\sqrt{73}}{2}$.

Do $m$ nguyên nên $m\in\{-2;-1;0\}$.