Chuyên đề 32 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

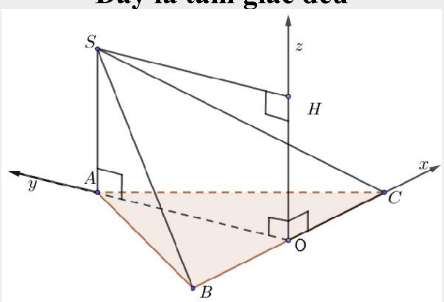
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ GIỎI MỨC ĐỘ 8-9-10 ĐIỂM

Phương pháp giải một số bài toán

1. Gắn tọa độ đối với hình chóp

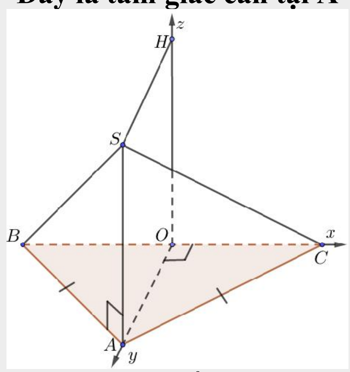
1.1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

Đáy là tam giác đều



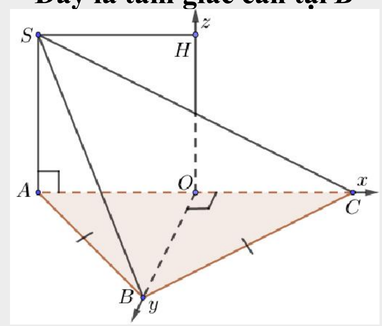
- Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.
- Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại A



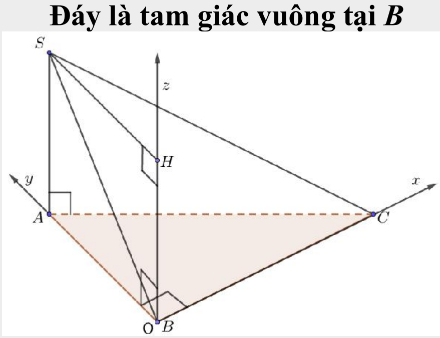
- Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại B



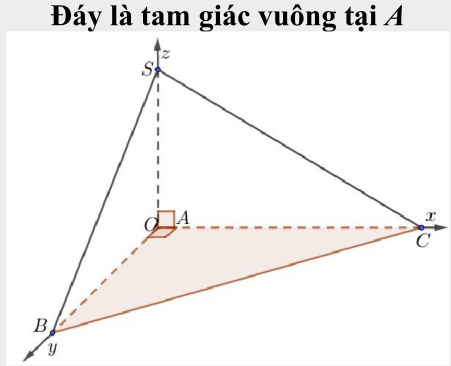
- Gọi O là trung điểm AC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại B



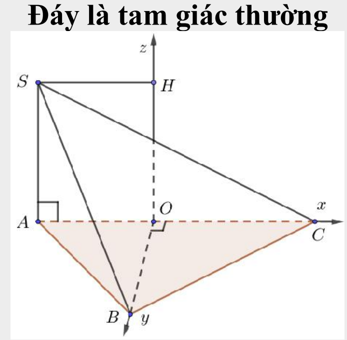
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$, $A(0;AB;0)$, $C(BC,0;0)$, $S\left(0;AB;\underbrace{BH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại A



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

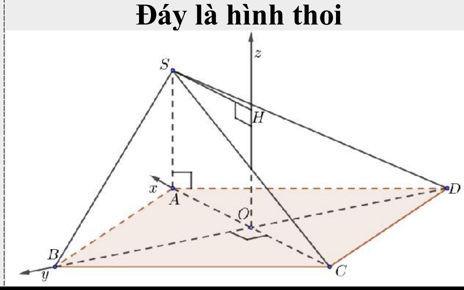
Đáy là tam giác thường



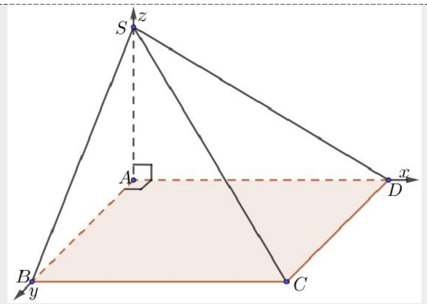
- Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là hình vuông, hình chữ nhật

Đáy là hình thoi



Đáy là hình thang vuông



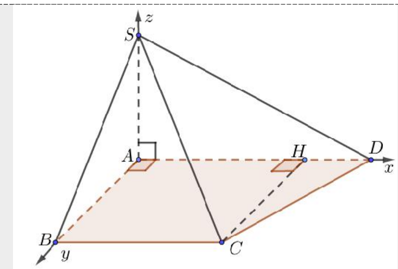
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a=1$.
- Tọa độ $A\equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$,

$C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a=1$.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$,

$B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$

$D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a=1$.
- Tọa độ

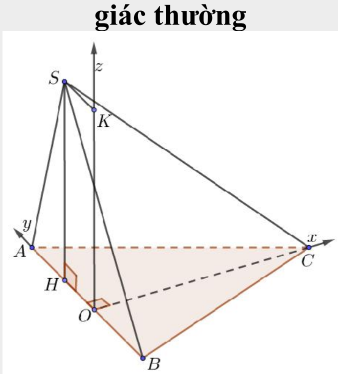
$A\equiv O(0;0;0)$,

$B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$,

$D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

1.2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường

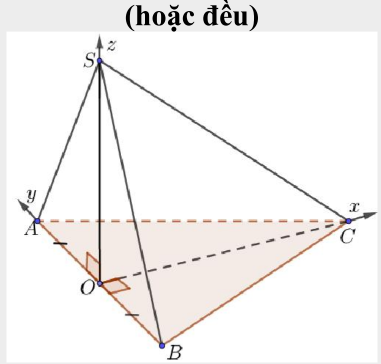


- Vẽ đường cao CO trong ΔABC. Chọn hệ trục như hình, a = 1.
- Ta có:

$O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,

$B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OH;\underbrace{OK}_{=SH}\right)$

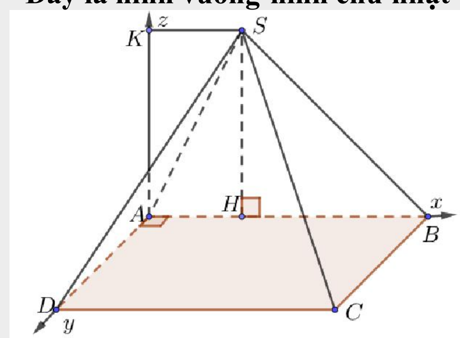
Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, a = 1.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,

$B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật



- Dựng hệ trục như hình, chọn a = 1.
- Ta có: $A\equiv O(0;0;0)$, $B(AB;0;0)$

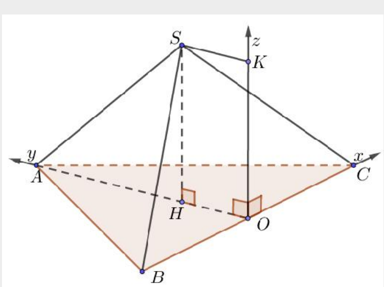
$C(AB;AD;0)$, $D(0;AD;0)$, $S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$

1.3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và a = 1. Tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\dfrac{BC}{2};0;0\right)$,



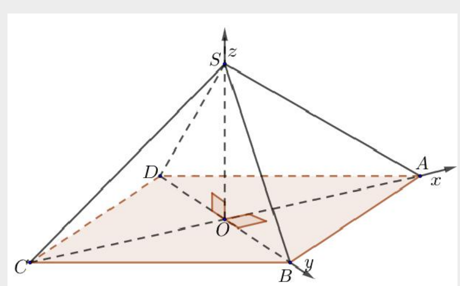
$C\left(\dfrac{BC}{2};0;0\right)$,

$S\left(0;\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}}_{=OH};\underbrace{OK}_{=SH}\right)$.

Hình chóp tứ giác đều

Chọn hệ trục như hình với a = 1. Tọa độ

điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OA};0;0\right)$, $B\left(0;\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$,



$C\left(\underbrace{-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=-OA};0;0\right)$,

$D\left(0;\underbrace{-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$

$S(0;0;SO)$.

2. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

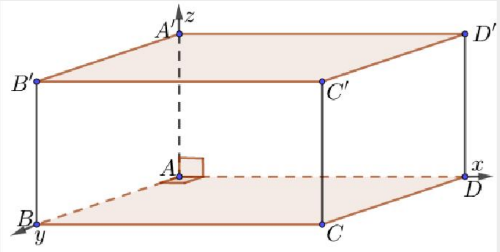
2.1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật

Dựng hệ trục như hình vẽ với a = 1. Tọa độ điểm:

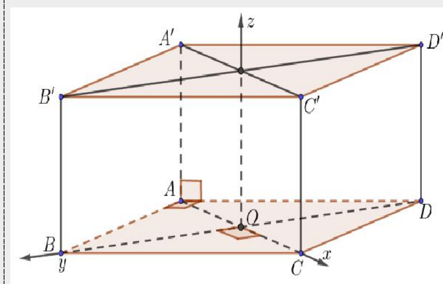
Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình



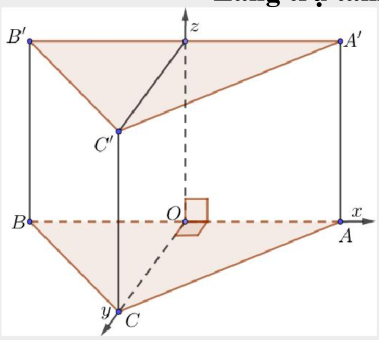
$A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $A'(0;0;AA')$, $B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.

với



$O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $A'(-OA;0;AA')$, $B'(0;OB;AA')$, $C'(OC;0;CC')$, $D'(0;-OD;DD')$

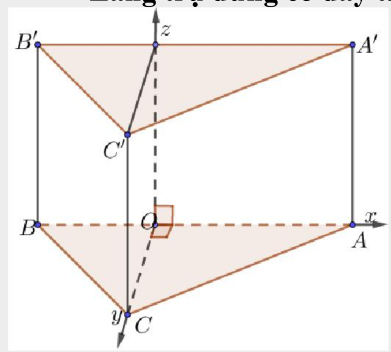
Lăng trụ tam giác đều



Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:

$O(0;0;0)$, $A\left(\frac{AB}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right)$, $C'(0;OC;CC')$.

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

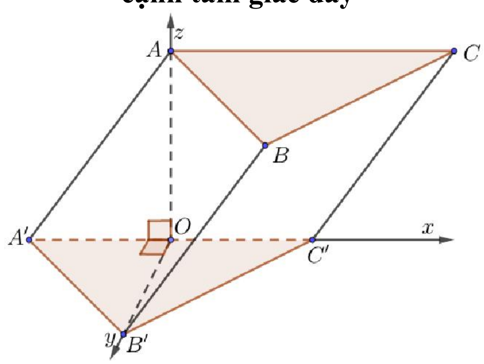


Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm là:

$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

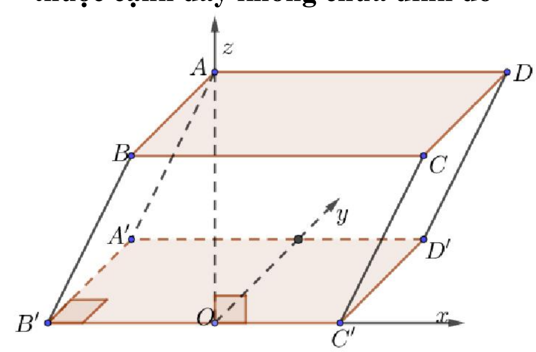
2.2. Lăng trụ nghiêng:

Lăng trụ nghiêng có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

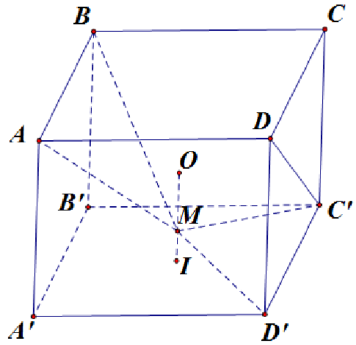
Lăng trụ nghiêng có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

Dạng 1. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm GÓC

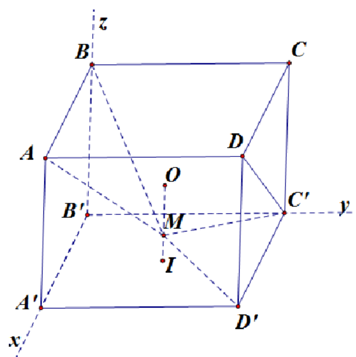
Câu 1. **(Mã 103 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$ B. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$ C. $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$ D. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$

Lời giải

Chọn C



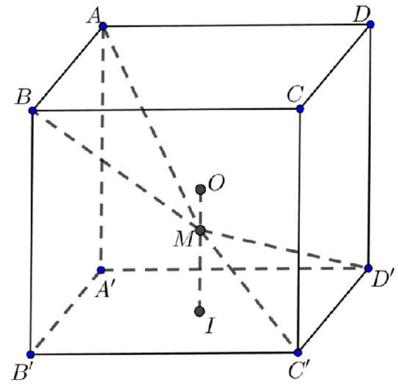
Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, cạnh hình lập phương là 1, ta được tọa độ các điểm như sau : $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{6}\right)$, $C'(0;1;0)$, $D'(1;1;0)$ và $A(1;0;1)$, $B(0;0;1)$.

Khi đó $\vec{n}_{(MC'D')}=(0;1;3)$; $\vec{n}_{(MAB)}=(0;5;3)$ nên $\cos\left(\widehat{(MAB),(MC'D')}\right)=\dfrac{|5.1+3.3|}{\sqrt{5^2+3^2}.\sqrt{1^2+3^2}}$

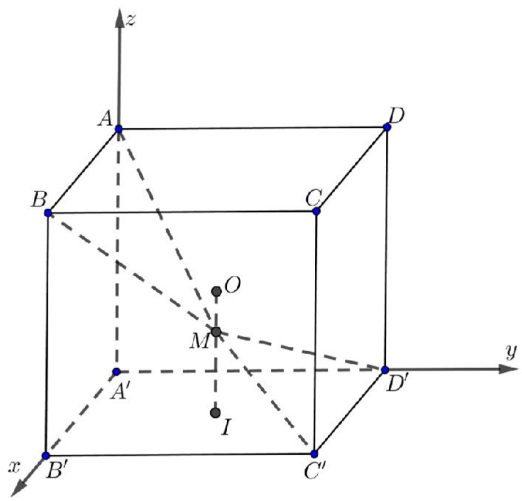
$=\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. Suy ra $\sin\left(\widehat{(MAB),(MC'D')}\right)=\sqrt{1-\left(\dfrac{7\sqrt{85}}{85}\right)^2}=\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$.

Câu 2. **(Mã 102 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO=\dfrac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải



Không mất tính tổng quát ta đặt cạnh của khối lập phương là 1.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A'(0;0;0)$, $B'(1;0;0)$, $D'(0;1;0)$ và $A(0;0;1)$ (như hình vẽ).

Khi đó ta có: $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}=(1;0;0),\overrightarrow{MA}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MA}\right]=\left(0;-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\vec{n}_1=(0;-4;3)$ là VTPT của mặt phẳng (MAB).

$\overrightarrow{D'C'}=(1;0;0),\overrightarrow{MD'}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{D'C'},\overrightarrow{MD'}\right]=\left(0;\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\vec{n}_2=(0;2;-3)$ là VTPT của mặt phẳng $(MC'D')$.

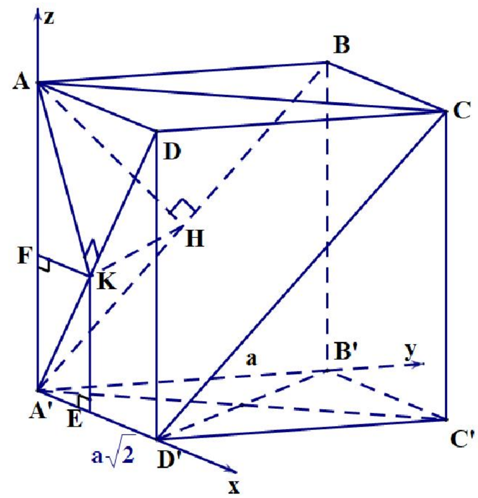
cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ bằng:

$$\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|0.0-4.2+3.(-3)|}{\sqrt{0^2+(-4)^2+3^2}.\sqrt{0^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Câu 3. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB=a, AD=a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

A. $60°$. **<u>B</u>.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $A'C'$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên $(ABCD) \Rightarrow (A'C,(ABCD)) = (A'C, A'C') = \widehat{CA'C'} = 30^0$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}; \tan\widehat{CA'C'} = \dfrac{CC'}{A'C'} \Rightarrow CC' = a$.

Kết hợp với giả thiết ta được $ABB'A'$ là hình vuông và có H là tâm.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên $A'D' \& A'A$.

Ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $A'K = \sqrt{A'A^2 - AK^2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$;

$\dfrac{1}{KF^2} = \dfrac{1}{KA^2} + \dfrac{1}{A'K^2} \Rightarrow KF = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}; KE = \sqrt{A'K^2 - KF^2} \Rightarrow KE = \dfrac{a}{3}$.

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn $O \equiv A'$ còn D', B', A theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz. Khi đó ta có tọa độ các điểm lần lượt là:

$A(0;0;a), B'(0;a;0), H(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}), K(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;\frac{a}{3}), E(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;0), F(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{3})$.

Mặt phẳng $(ABB'A')$ là mặt phẳng (yOz) nên có VTPT là $\vec{n_1} = (1;0;0)$;

Ta có $\left[\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AH}\right] = \dfrac{a^2}{6}\vec{n_2}$, $\vec{n_2}(2;\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Mặt phẳng (AKH) có VTPT là $\vec{n_2} = (2;\sqrt{2};\sqrt{2})$;

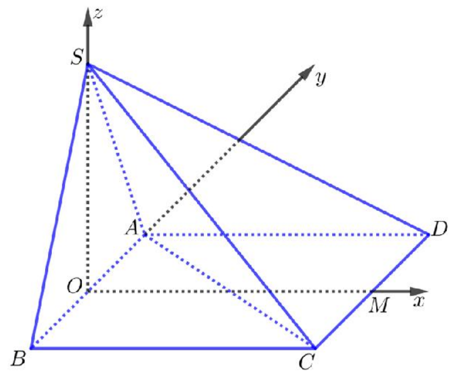
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

Ta có $cos\alpha = \left|cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^0$.

Câu 4. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc tạp bởi (SAC) và (SCD).

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{7}$. **<u>C</u>.** $\frac{5}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải



Chú ý: Ta có thể giải bài toán với cạnh hình vuông $a=1$.

Gọi O,M lần lượt là trung điểm của AB,CD. Vì SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SO\perp(ABCD)$.

Xét hệ trục $Oxyz$ có $O(0;0;0), M(1;0;0), A\left(0;\frac{1}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Khi đó

$C\left(1;\frac{-1}{2};0\right), D\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SA}=\left(0;\frac{1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{AC}(1;-1;0), \overrightarrow{SC}=\left(1;\frac{-1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{CD}=(0;1;0)$.

Mặt phẳng (SAC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_1}=\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$.

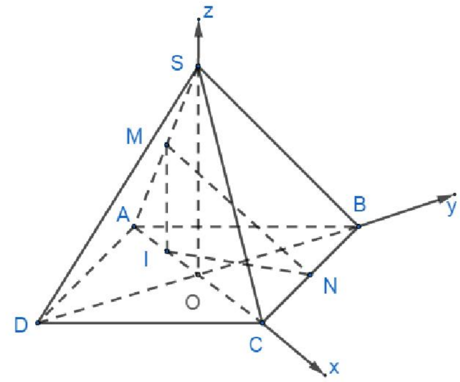
Mặt phẳng (SAD) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_1}=\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right]=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;1\right)$.

Vậy $\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|}=\frac{5}{7}$.

Câu 5. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC, biết $MN=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **<u>B</u>.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I hình chiếu của M lên $\left(ABCD\right)$, suy ra I là trung điểm của AO.

Khi đó $CI=\frac{3}{4}AC=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔCNI có: $CN=\frac{a}{2}$, $\widehat{NCI}=45^{o}$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI=\sqrt{CN^2+CI^2-2CN.CI.\cos 45^{o}}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{8}-2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Xét ΔMIN vuông tại I nên $MI=\sqrt{MN^2-NI^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}-\frac{5a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Mà $MI//SO, MI=\frac{1}{2}SO\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

Ta có: $O\left(0;0;0\right)$, $B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$,

$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

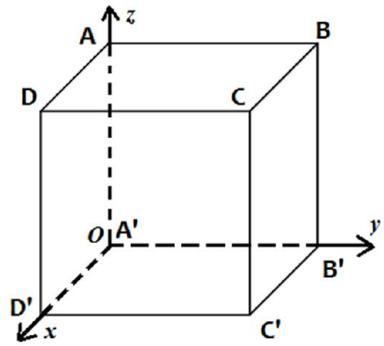
Vectơ pháp tuyến mặt phẳng $\left(SBD\right)$: $\vec{n}=\overrightarrow{SB}\wedge\overrightarrow{SD}=\left(-\sqrt{7};0;0\right)$.

Suy ra $\sin\left(MN,\left(SBD\right)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|-\sqrt{7}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{7}.\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'B'CD\right)$ và $\left(ACC'A'\right)$ bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A', Ox \equiv A'D', Oy \equiv A'B', Oz \equiv A'A$.

Khi đó: $A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $C'(a;a;0)$,

$A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C(a;a;a)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (0;a;0), \overrightarrow{A'D} = (a;0;a), \overrightarrow{A'A} = (0;0;a), \overrightarrow{A'C'} = (a;a;0).$

$\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D}\right] = (a^2;0;-a^2).$

Chọn $\overrightarrow{n_1} = (1;0;-1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(A'B'CD\right)$.

$\left[\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C}\right] = (-a^2;a^2;0).$

Chọn $\overrightarrow{n_2} = (-1;1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$.

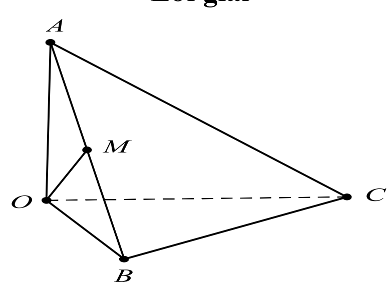
Góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'B'CD\right)$ và $\left(ACC'A'\right)$ là:

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$

Câu 7. **(Sở Bắc Ninh -2019)** Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $135°$. **B.** $150°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Lời giải



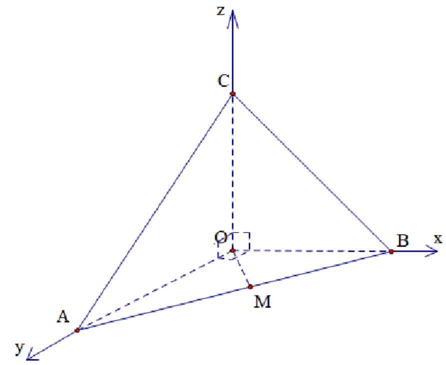
Cách 1:

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}OB^2 = -\frac{a^2}{2}$.

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{2}$ và $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó: $\cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}}{OM.BC} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}\right) = 120°$.

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

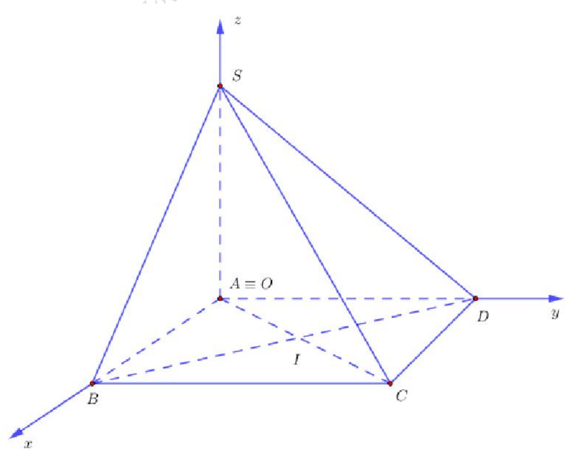
Khi đó ta có: $\overrightarrow{BC}=(-a;0;a),\overrightarrow{OM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OM}}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OM}}{BC.OM}=\frac{-\frac{a^2}{2}}{a.\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OM}\right)=120°.$$

Câu 8. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha=\sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. $30°$. **<u>B</u>.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi $I=AC\cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a.

Ta có $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ SI\perp BD\\ AI\perp BD\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SI;AI}\right)=\widehat{SIA}$.

Ta có $\tan\alpha=\tan\widehat{SIA}=\frac{SA}{AI}\Leftrightarrow SA=a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó $\overrightarrow{SA}=(0;0;-a)$; $\overrightarrow{SC}=(a;a;-a)$; $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(-1;1;0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(1;0;1)$.

Suy ra $\cos\left(\widehat{(SAC);(SBC)}\right)=\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{(SAC);(SBC)}\right)=60°$.

Câu 9. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

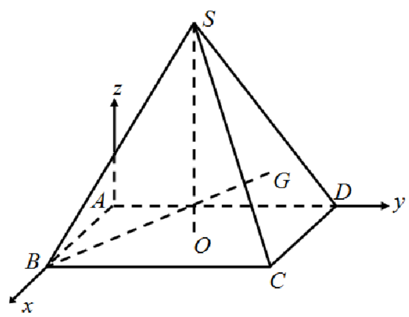
A. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Gọi $O=AC\cap BD$.

Tam giác SAO vuông : $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Gắn tọa độ như hình vẽ



$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $O\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$, $S\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{5a}{6};\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)$.

Ta có : $\overrightarrow{AS}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{a}{2}\left(1;1;\sqrt{6}\right)$, $\overrightarrow{BG}=\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{5a}{6};\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)=\dfrac{a}{6}\left(-3;5;\sqrt{6}\right)$.

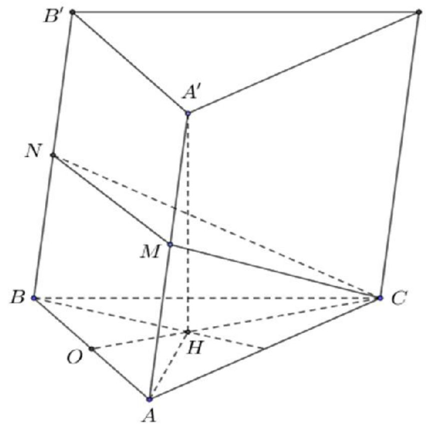
Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

$\cos(BG;SA)=\dfrac{\left|\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{AS}\right|}{BG.AS}=\dfrac{|-3+5+6|}{\sqrt{40}.\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 10. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{13}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AB. Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$,

$A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $H\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$, $A'H=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow A'\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow B'\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\overrightarrow{n_1}=(0;0;1)$.

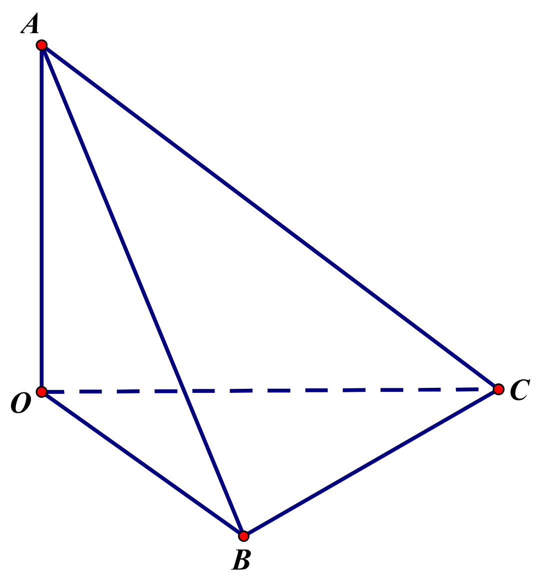
M là trung điểm $AA'\Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, N là trung điểm $BB'\Rightarrow N\left(\frac{-3}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\overrightarrow{MN}=(-1;0;0)$, $\overrightarrow{CM}=\left(\frac{1}{4};\frac{-5\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\Rightarrow$ (CMN) có vtpt $\overrightarrow{n_2}=\left(0;\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(0;2\sqrt{2};5\right)$

$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{33}}\Rightarrow\tan\varphi=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}-1}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

Câu 11. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\left(3+\cot^2\alpha\right).\left(3+\cot^2\beta\right).\left(3+\cot^2\gamma\right)$ là

A. 48. **B.** 125. **C.** Số khác. **D.** $48\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, vì tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta có $OH\perp(ABC)$ và $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Ta có $\alpha=\widehat{(OA;(ABC))}=\widehat{OAH}$, $\beta=\widehat{(OB;(ABC))}=\widehat{OBH}$, $\gamma=\widehat{(OC;(ABC))}=\widehat{OCH}$.

Nên $\sin\alpha=\frac{OH}{OA}$, $\sin\beta=\frac{OH}{OB}$, $\sin\gamma=\frac{OH}{OC}$.

Đặt $a=OA$, $b=OB$, $c=OC$, $h=OH$ thì $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ và

$$M=(3+\cot^2\alpha).(3+\cot^2\beta).(3+\cot^2\gamma)=\left(2+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right).\left(2+\frac{1}{\sin^2\beta}\right).\left(2+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)$$

$$=\left(2+\frac{a^2}{h^2}\right).\left(2+\frac{b^2}{h^2}\right).\left(2+\frac{c^2}{h^2}\right)=8+4(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}+a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}.$$

Ta có: $(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}=(a^2+b^2+c^2).\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 3\sqrt[3]{a^2.b^2.c^2}.3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}}=9$.

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2.b^2c^2.c^2a^2}.\left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}\right)}\right)^2=3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}.9\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}}=27.$$

$$a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}=a^2b^2c^2.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^3\geq a^2b^2c^2.\left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}\right)}\right)^3=27.$$

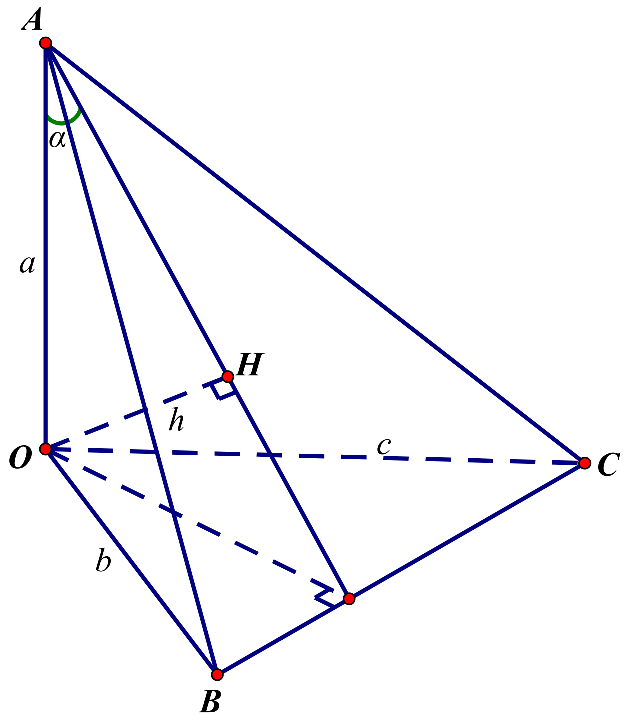
Do đó:

$$M=8+4(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}+a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}$$

$$\geq 8+4.9+2.27+27=125.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hay $OA=OB=OC$.

Vậy $\min M=125$.

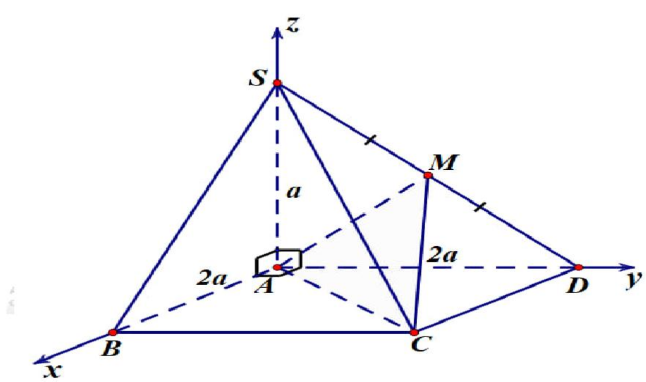


Câu 12. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O$, như hình vẽ:

Khi đó ta có:

$A(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(2a;2a;0)$, $S(0;0;a)$, $M\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{SB}=(2a;0;-a),\overrightarrow{SC}=(2a;2a;-a),\overrightarrow{MA}=\left(0;-a;-\frac{a}{2}\right),\overrightarrow{MC}=\left(2a;a;-\frac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(2a^2;0;4a^2\right)$ và $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right]=\left(a^2;-a^2;2a^2\right)$.

Gọi α ($0°\le\alpha\le 90°$) là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

ta có $\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{\left|2a^2.a^2+4a^2.2a^2\right|}{\sqrt{\left(2a^2\right)^2+\left(4a^2\right)^2}.\sqrt{\left(a^2\right)^2+\left(-a^2\right)^2+\left(2a^2\right)^2}}$

$=\dfrac{10a^4}{\sqrt{20.6.\left(a^4\right)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{30}}$.

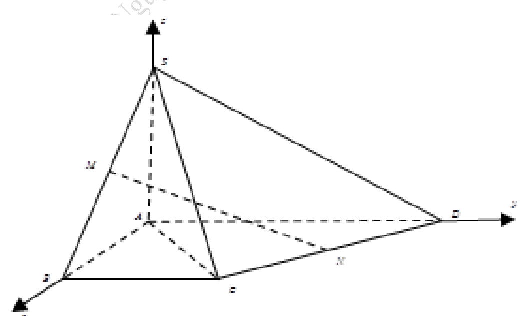
Mà $\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\left(\dfrac{\sqrt{30}}{5}\right)^2-1=\dfrac{5}{25}$. Suy ra $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Biết $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt không gian $Oxyz$ với $A\equiv O(0;0;0)$, $AB\equiv Ox$, $AD\equiv Oy$, $AS\equiv Oz$.

Ta có: $S(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$.

$M(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2})$, $N(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0)$

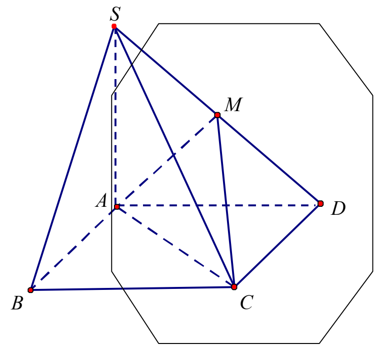
$\overrightarrow{MN}=(0;\frac{3a}{2};\frac{-a}{2})$

$\overrightarrow{AS}=(0;0;a)$, $\overrightarrow{AC}=(a;a;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=(-a^2;a^2;0)$ là vtpt của mặt phẳng (SAC).

$\sin(MN;(SAC))=\dfrac{\overrightarrow{MN}.\vec{n}_{(SAC)}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}_{(SAC)}\right|}=\dfrac{\frac{3a^3}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}.\sqrt{a^4+a^4}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

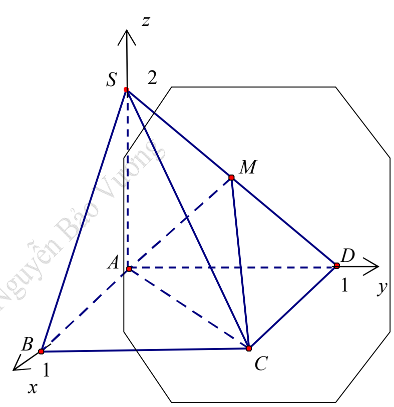
Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ Oxyz. $O \equiv A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $D(0;1;0)$; $C(1;1;0)$; $S(0;0;2)$

Do M là trung điểm của SD nên $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$

$\overrightarrow{BC} = (0;1;0); \overrightarrow{SB} = (1;0;-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{SB}\right] = (2;0;1)$

$\overrightarrow{MA} = \left(0;\frac{1}{2};1\right); \overrightarrow{AC} = (1;1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MA};\overrightarrow{AC}\right] = \left(-1;1;-\frac{1}{2}\right)$. VTPT của (AMC) là: $\vec{n} = (2;-2;1)$

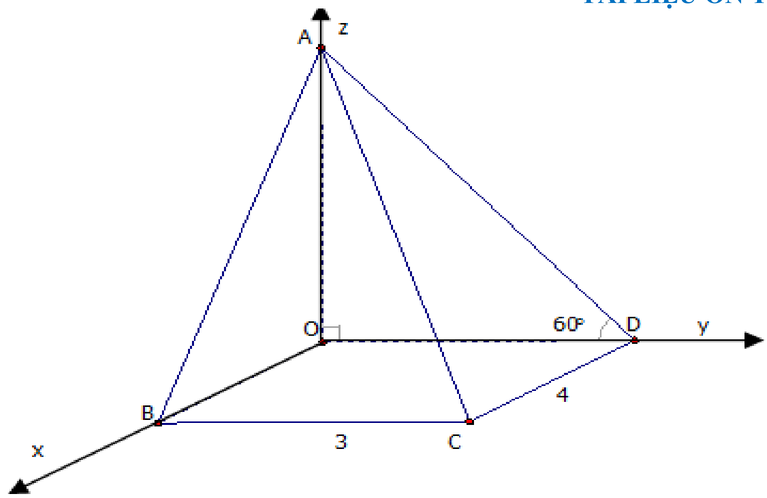
$\cos\left((SBC);(AMC)\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan\left((SBC);(AMC)\right) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Câu 15. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 90^0$. Góc giữa đường thẳng AD và BC bằng 60^0. Côsin góc giữa hai phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A. $\frac{\sqrt{43}}{86}$. **B.** $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. **C.** $\frac{2\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\frac{\sqrt{43}}{43}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng $AO \perp (BCD)$ khi đó O là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $BCDO$.

Góc giữa đường thẳng AD và BC là góc giữa đường thẳng AD và OD và bằng $\widehat{ADO} = 60^0$

Xét tam giác ADO vuông tại O: $\tan 60^0 = \dfrac{OA}{OD} \Rightarrow OA = 3\sqrt{3}.$

Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào hình chóp như hình vẽ.

Ta có:

$O(0;0;0)$; $B(4;0;0)$; $D(0;3;0)$; $C(4;3;0)$; $A(0;0;3\sqrt{3})$.

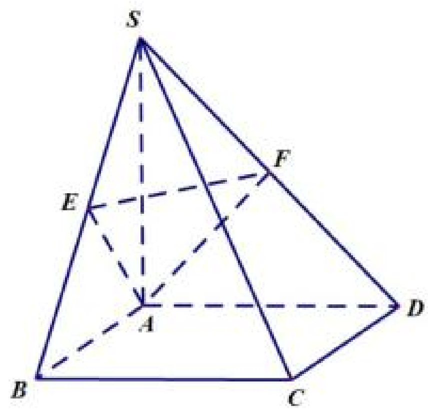
$\overrightarrow{AB} = (4;0;-3\sqrt{3})$; $\overrightarrow{BC} = (0;3;0)$; $\overrightarrow{AD} = (0;3;-3\sqrt{3})$; $\overrightarrow{CD} = (-4;0;0)$.

Mặt phẳng (ABC) nhận véctơ $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = (9\sqrt{3};0;12)$ làm véctơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (ADC) nhận véctơ $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}\right] = (0;12\sqrt{3};12)$ làm véctơ pháp tuyến.

Nên $\cos((ABC);(ADC)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{4}{\sqrt{43.2}} = \dfrac{2\sqrt{43}}{43}.$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB, SD. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.



A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $S \in Oz$.

$\Rightarrow B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;a)$. Khi đó $E\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $F\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AF}=\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Vectơ pháp tuyến của mp(AEF) là $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right]=\left(\frac{-a}{4};\frac{-a}{4};\frac{a}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1;1;-1)$..

Vectơ pháp tuyến của mp$(ABCD)$ là $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{AS}=(0;0;a) \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(0;0;1)$..

Vậy côsin góc giữa 2 mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.

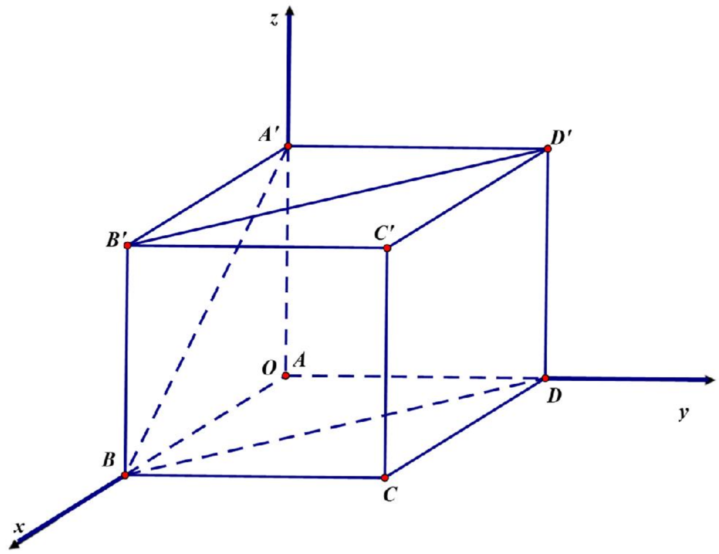
$$\cos\left((AEF),(ABCD)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



+Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a), D'(0;a;a)$.

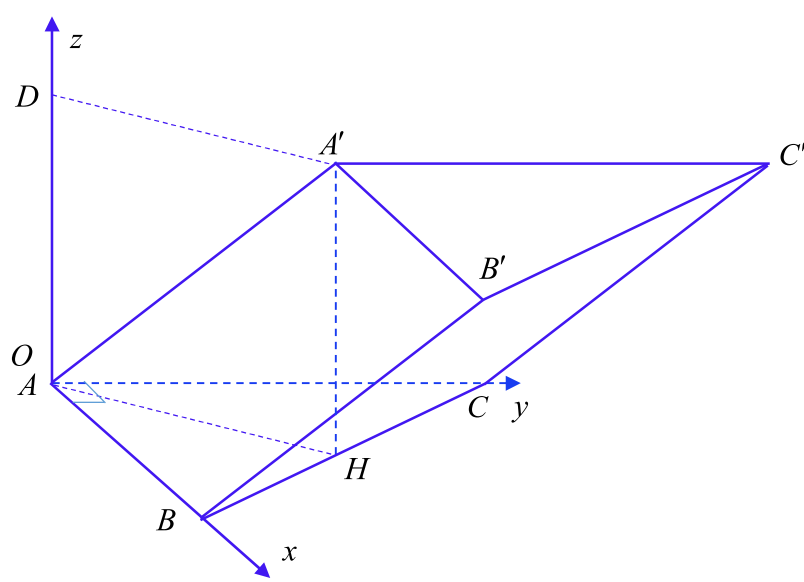
+Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\overrightarrow{OC} = (a;a;0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;0.)$.

+Đường thẳng $A'B$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (a;0;-a)$ ta chọn $\vec{u} = (1;0;-1)$.

+Ta có $\sin\alpha = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{|1.1+1.0+0.(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}.\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{7\sqrt{3}}{48}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.



Lời giải

Chọn D

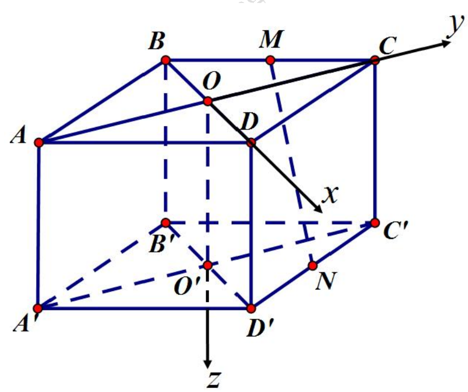
Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$ như hình vẽ, chọn $a=1$ đơn vị, khi đó ta có tọa độ điểm $B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$ suy ra trung điểm của BC là $H\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, vì H là hình chiếu của A' nên suy ra tọa độ của $A'\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right)$. Ta tìm tọa độ B', gọi tọa độ $B'(x;y;z)$ khi đó ta có $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB}$ nên tọa độ $B'\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right)$. Ta cũng có $\overrightarrow{B'C}=\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{5}\right)$ và $\overrightarrow{A'B}=\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{5}\right)$. Từ đó ta có $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{B'C}\right|}{\left|\overrightarrow{A'B}\right|.\left|\overrightarrow{B'C}\right|}=\frac{7}{2.\sqrt{6}.\sqrt{8}}=\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Câu 19. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos\alpha$ bằng:

A. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



* Chọn $AB=2 \Rightarrow BD=2; AC=2\sqrt{3}$, đặt

$AA'=h$, chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có: $D(1;0;0)$, $B(-1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $D'(1;0;h)$, $C'(0;\sqrt{3};h)$, $B'(-1;0;h)$.

$\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};h\right)$, $\overrightarrow{MN}=(1;0;h)$, $\overrightarrow{B'D}=(2;0;-h)$.

* Do $MN \perp B'D \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{B'D}=0 \Leftrightarrow 2-h^2=0 \Rightarrow h=\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(1;0;\sqrt{2})$. Ta có:

$MN // \vec{u}=\overrightarrow{MN}=(1;0;\sqrt{2})$, $(ABCD) \perp \vec{n}=\vec{j}=(0;0;1)$.

* Do α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$ nên ta có:

$$\sin\alpha = \left|\cos\left(\vec{u};\vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

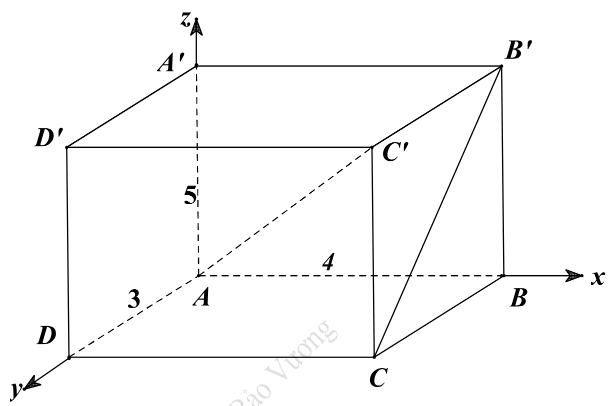
Dạng 2. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm KHOẢNG CÁCH

Câu 20. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB = 4, AD = 3, AA' = 5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **<u>D.</u>** $\frac{30}{19}$.

Lời giải

<u>Chọn D</u>



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Có $A(0 0;0), C'(4;3;5), C(4;3;0), B'(4;0;5)$,

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (4;3;5), \overrightarrow{B'C} = (0;3;-5), \left[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C}\right] = (-30;20;12), \overrightarrow{CC'} = (0;0;5)$,

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng cần tìm là:

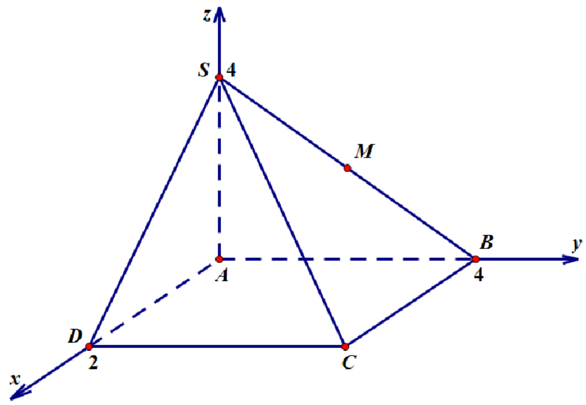
$$d(AC', B'C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{CC'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{60}{\sqrt{1444}} = \frac{30}{19}.$$

Câu 21. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

A. $d(B,(CDM)) = 2$. **B.** $d(B,(CDM)) = 2\sqrt{2}$.

C. $d(B,(CDM)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **<u>D.</u>** $d(B,(CDM)) = \sqrt{2}$.

Lời giải



Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;4;0)$.

M là trung điểm của SB $\Rightarrow M(0;2;2)$.

Viết phương trình mặt phẳng (CDM):

$\overrightarrow{CD} = (0;-4;0)$, $\overrightarrow{CM} = (-2;-2;2) \Rightarrow \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CM} = (-8;0;-8)$.

(CDM) có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;0;1)$.

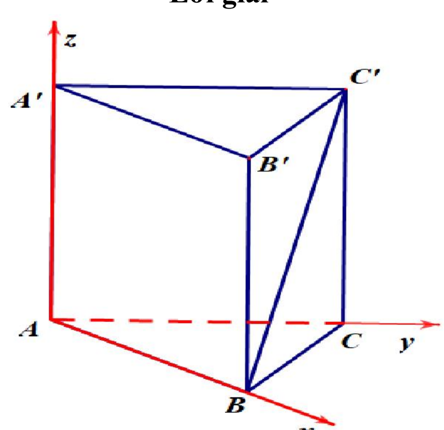
Suy ra (CDM) có phương trình: $x + z - 2 = 0$.

Vậy $d(B;(CDM)) = \dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \sqrt{2}$.

Câu 22. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = h$ $(a,h > 0)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo a, h.

A. $\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$. **B.** $\dfrac{ah}{\sqrt{5a^2+h^2}}$. **C.** $\dfrac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. **D.** $\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Lời giải



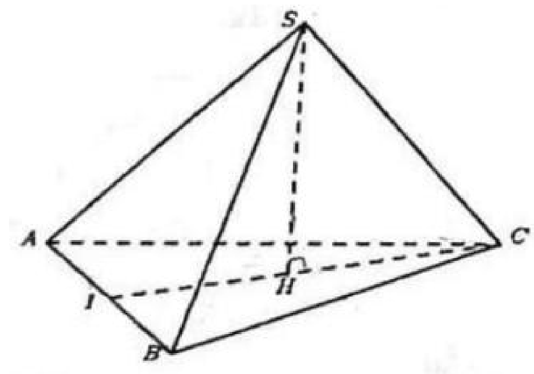
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

$A(0;0;0)$; $A'(0;0;h)$; $C(0;a;0)$; $B(a;0;0)$; $B'(a;0;h)$; $C'(0;a;h)$.

$\overrightarrow{AB'} = (a;0;h)$; $\overrightarrow{BC'} = (-a;a;h)$; $\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right] = (-ah;-2ah;a^2)$; $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$.

$d\left(AB';BC'\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right]\right|}=\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$.

Câu 23. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AB, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 45^0 (hình vẽ bên). Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{8}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Chọn B

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $I(0;0;0)$, $A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Ta có $CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $IH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $AH=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$

H là trung điểm CI suy ra $H\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$.

$45^0=\left(SA,(ABC)\right)=\left(SA,AH\right)=\widehat{SAH}\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}\Rightarrow S\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{7}}{4}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{4};-\dfrac{a\sqrt{7}}{4}\right)$, $\overrightarrow{CG}=\left(-\dfrac{a}{6};-\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{7}}{12}\right)$, $\overrightarrow{CA}=\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CG}\right]=\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{12};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{12}\right)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CG}\right]\right|=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Khoảng cách giữa SA và CG: $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CG}\right].\overrightarrow{CA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CG}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{14}}{8}$.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

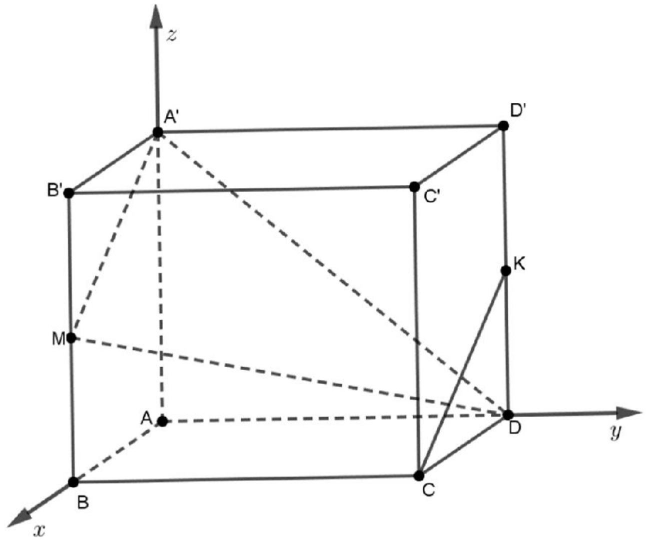
A. $\dfrac{4a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm BB'. Ta có: $CK\,//\,A'M\Rightarrow CK\,//\left(A'MD\right)$.

Khi đó: $d\left(CK,A'D\right)=d\left(CK,\left(A'MD\right)\right)=d\left(C,\left(A'MD\right)\right)$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $A\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $D\left(0;a;0\right)$, $A'\left(0;0;a\right)$, $B'\left(a;0;a\right)$, $C\left(a;a;0\right)$, $M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

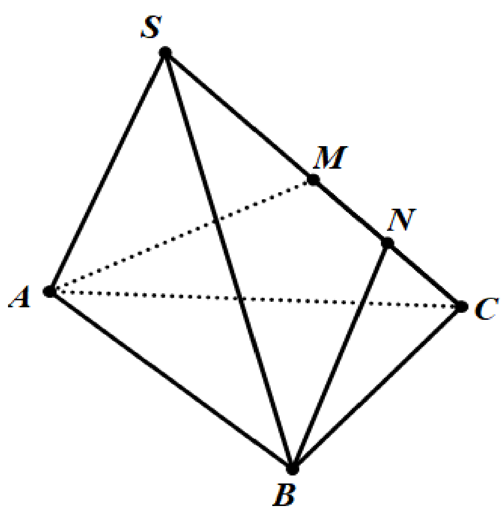
$\overrightarrow{A'M}=\left(a;0;-\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'D}=\left(0;a;-a\right)$, $\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'D}\right]=\left(\frac{a^2}{2};a^2;a^2\right)$.

Vậy mặt phẳng $\left(A'MD\right)$ nhận $\vec{n}=\left(1;2;2\right)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mp$\left(A'MD\right): x+2y+2z-2a=0$.

Do đó: $d\left(C,\left(A'DM\right)\right)=\frac{\left|a+2a-2a\right|}{3}=\frac{a}{3}$.

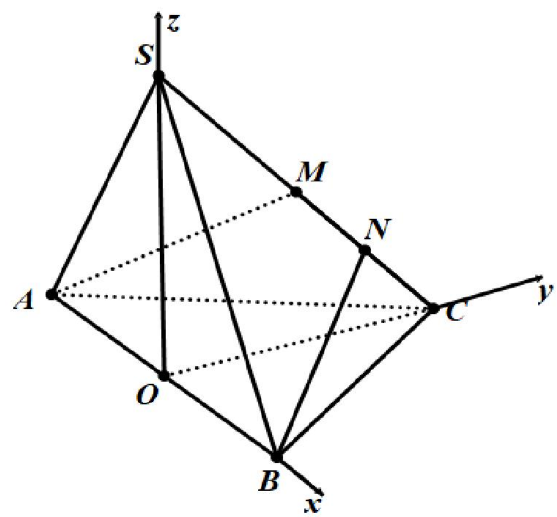
Câu 25. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác cân với $\widehat{ASB}=120^0$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN.



A. $\frac{2\sqrt{327}a}{79}$. **B.** $\frac{\sqrt{237}a}{79}$. **C.** $\frac{2\sqrt{237}a}{79}$. **D.** $\frac{5\sqrt{237}a}{316}$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm AB, ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SO \perp AB$.

Ta có:

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)(gt)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\SO\perp AB(cmt)\end{cases}\Rightarrow SO\perp(ABC).$$

Xét ΔSOB vuông tại O có $\widehat{OSB}=60^0 \Rightarrow SO=\dfrac{OB}{tan60^0}=a$

Ta có: OC là đường cao của tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên: $OC=3a$

Gắn hình chóp $S.ABC$ lên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có:

$O(0;0;0), B\left(a\sqrt{3};0;0\right), A\left(-a\sqrt{3};0;0\right); C(0;3a;0); S(0;0;a) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(2a\sqrt{3};0;0\right)$

M là trung điểm SC nên M có tọa độ: $\left(0;\dfrac{3a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

N là trung điểm MC nên N có tọa độ: $\left(0;\dfrac{9a}{4};\dfrac{a}{4}\right)$.

AM có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}\left(a\sqrt{3};\dfrac{3a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$ hoặc $\vec{a}\left(2\sqrt{3};3;1\right)$

BN có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{BN}\left(-a\sqrt{3};\dfrac{9a}{4};\dfrac{a}{4}\right)$ hoặc $\vec{b}\left(-4\sqrt{3};9;1\right)$

Ta có: $d(AM;BN)=\dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}=\dfrac{2\sqrt{237}}{79}a$

Câu 26. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=1\text{cm}$, $AC=\sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\text{cm}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm SA. Do tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C nên $IA = IS = IB = IC$. Vậy I là tâm cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

Vì cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3 \Rightarrow R = IA = IS = IB = IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $SA = \sqrt{5}; SB = 2, SC = \sqrt{2}$.

Gán hệ trục tọa độ gốc A. ta có $A(0,0,0); B(1,0,0); C(0,\sqrt{3},0)$

Giả sử $S(a,b,c), c > 0$. Ta có hệ phương trình

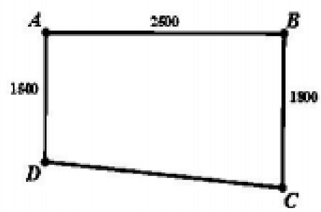
$$\begin{cases} SA = \sqrt{5} \\ SB = 2 \\ SC = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 5 \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ a^2 + (b-\sqrt{3})^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 5 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2a = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{3}b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow S(1,\sqrt{3},1)$$

Mặt phẳng (SAB) qua $A(0,0,0)$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}(0,1,-\sqrt{3})$

Phương trình mặt phẳng (SAB) là: $y - \sqrt{3}z = 0$

Vậy $d(C,(SAB)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ.

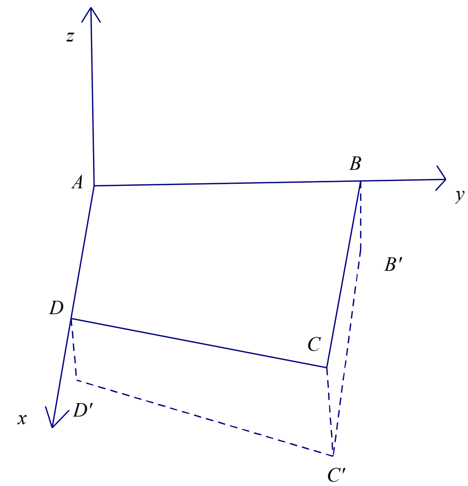


Bước đầu chúng được lấy " thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25\,\text{m}$, $AD = 15\,\text{m}$, $BC = 18\,\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng. Giá trị của a là số nào sau đây?

A. $15,7\,\text{cm}$. **B.** $17,2\,\text{cm}$. **C.** $18,1\,\text{cm}$. **D.** $17,5\,\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$.

Theo bài ra có bốn điểm A; B'; C'; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D'): x+y+250z=0$.

Do $C'(1800;\,2500;-a) \in (AB'D')$ nên có: $1800+2500-250a=0 \Leftrightarrow a=17,2$.

Vậy $a=17,2\,\text{cm}$.

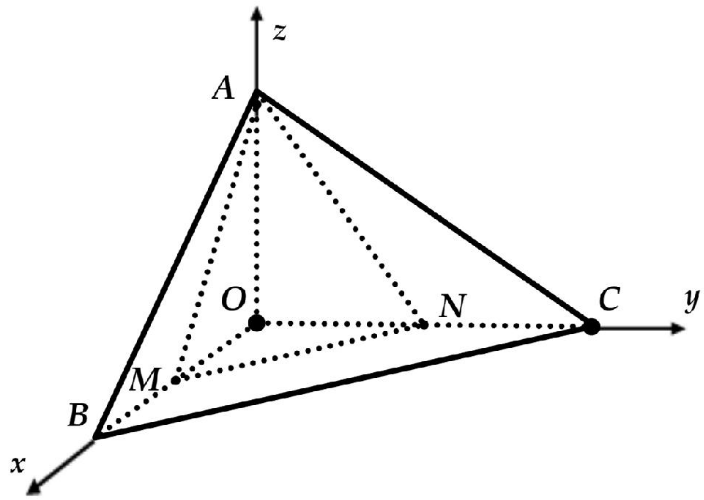
Câu 28. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

A. $\frac{20}{3\sqrt{129}}$. **B.** $\frac{20}{\sqrt{129}}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz, B \in Ox, C \in Oy$ sao cho $AO = 5, OB = 2, OC = 4$

$\Rightarrow A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0)$.

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng (AMN) là: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=1$ hay $10x+5y+2z-10=0$

Vậy khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

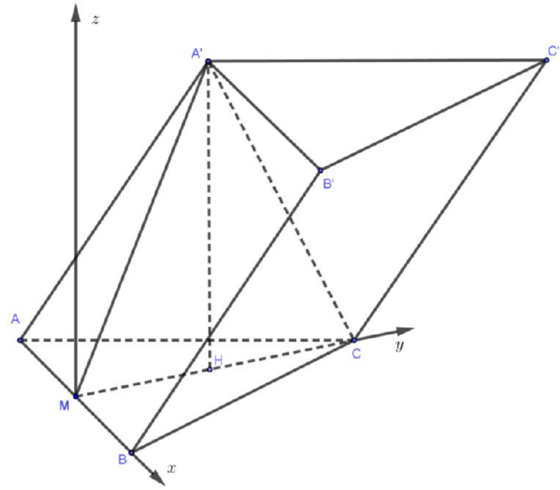
$$d(G,(AMN)) = \frac{\left|\frac{20}{3}+\frac{20}{3}+\frac{10}{3}-10\right|}{\sqrt{100+25+4}} = \frac{20}{3\sqrt{129}}.$$

Câu 29. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi M là trung điểm của AB, $\Delta A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $MC \Rightarrow A'H \perp MC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Ta có $V = S_{\Delta ABC}.A'H \Rightarrow A'H = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{V} = a$.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho:

$O \equiv M(0;0;0)$, $A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right) \in Ox$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right) \in Ox$, $C\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oy$ và $Mz // A'H$.

$\Rightarrow A'\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$.

Ta có. $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{3a\sqrt{3}}{4};a\right)$.

$\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$, $\overrightarrow{CC'} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

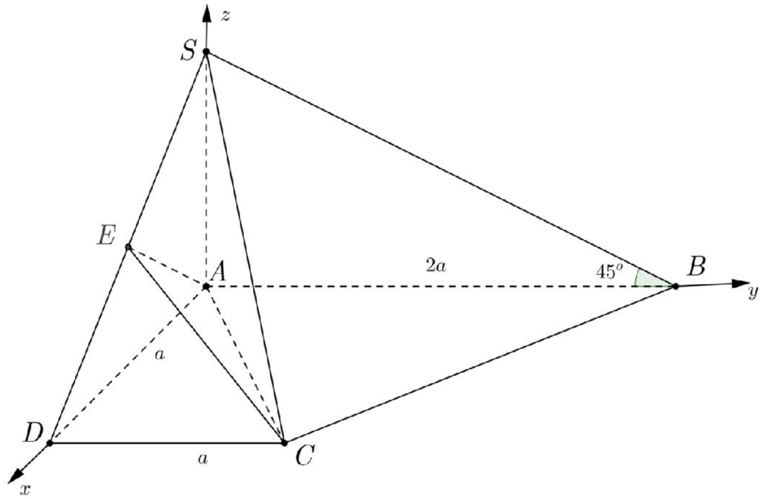
Vậy $d(AB,CC') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CC'}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CC'}\right]\right|} = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 30. **(Sở Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACE).

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{4a}{3}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB $\Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\widehat{SBA} = 45^{\circ}$.

Tam giác SAB vuông cân tại A $\Rightarrow SA = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$, $E\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$.

$\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$, $\overrightarrow{AE} = \left(\dfrac{a}{2};0;a\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AE} = \left(a^2;-a^2;-\dfrac{a^2}{2}\right)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (ACE) có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-2;-1) \Rightarrow (ACE): 2x - 2y - z = 0$.

Vậy $d\left(B,(ACE)\right) = \dfrac{|2.2a|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{4a}{3}$.

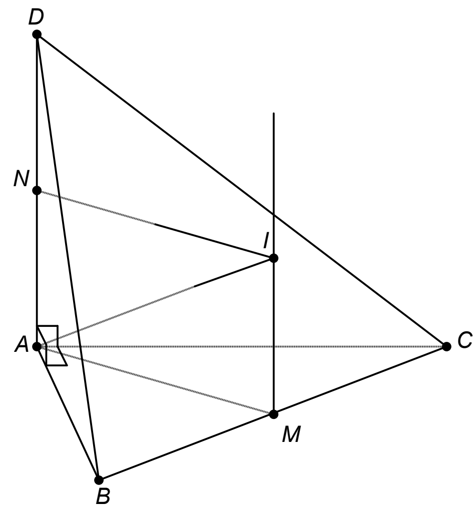
Dạng 3. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm THỂ TÍCH, BÁN KÍNH

Câu 31. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;-1)$. Xét các điểm B,C,D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 64 **B.** $\dfrac{32}{3}$ **C.** $\dfrac{64}{3}$ **D.** 32

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có bán kính $r = IA = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$.

Đặt $AB = a; AC = b; AD = c$

Ta có $IA^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}$

Do đó $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} = 12$

Theo BĐT Cô-si ta có: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} \geq \dfrac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{4}$

Do đó $V = \dfrac{1}{6}abc \leq \dfrac{1}{6}\sqrt{16^3} = \dfrac{32}{3}$.

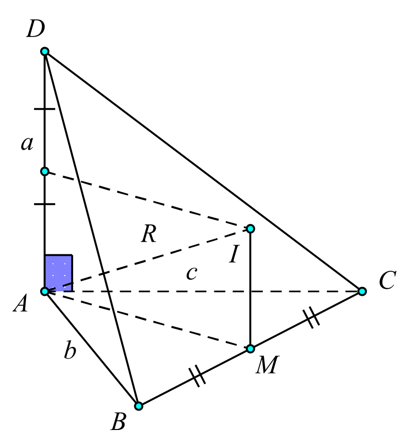
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$..

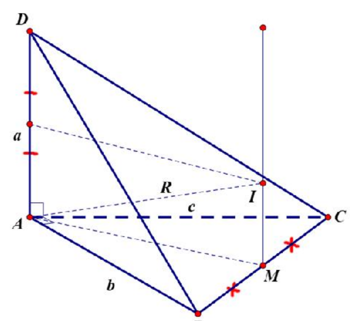
Câu 32. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và đi qua điểm $A(0;1;1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{8}{3}$ **B.** 4 **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 8

Lời giải

Chọn C





Đặt: $AD = a$, $AB = b$, $AC = c$.

Ta có:

• $R = IA = \sqrt{3}$.

• $AM = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}; IM = \dfrac{a}{2} \Rightarrow R^2 = IA^2 = \dfrac{b^2+a^2+c^2}{4} = 3$.

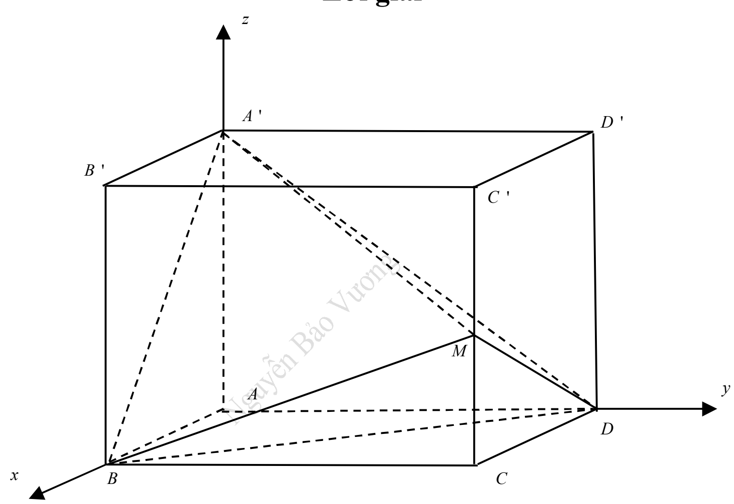
AD BĐT Cosi: $b^2+a^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{b^2a^2c^2} \Rightarrow b^2a^2c^2 \leq \dfrac{\left(b^2+a^2+c^2\right)^3}{27} \Leftrightarrow abc \leq 8$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{6}abc \leq \dfrac{1}{6}.8 = \dfrac{4}{3}$.

Câu 33. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$ và $a+b=2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{64}{27}$. **B.** $\dfrac{32}{27}$. **C.** $\dfrac{8}{27}$. **D.** $\dfrac{4}{27}$.

Lời giải



Tọa độ điểm $C(a;a;0)$, $C'(a;a;b)$, $M(a;a;\dfrac{b}{2})$.

$\overrightarrow{BA'} = (-a;0;b)$, $\overrightarrow{BD} = (-a;a;0)$, $\overrightarrow{BM} = (0;a;\dfrac{b}{2})$.

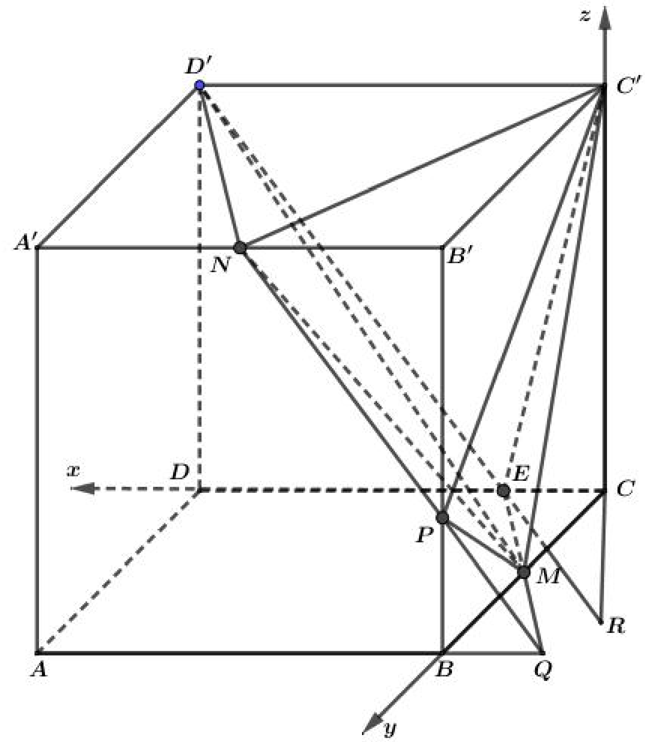
$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right] = (-ab;-ab;-b^2)$ nên $V_{BDA'M} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right| = \dfrac{a^2b}{4}$.

Ta có: $a.a.(2b) \leq \left(\dfrac{a+a+2b}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27} \Rightarrow a^2b \leq \dfrac{32}{27} \Rightarrow V_{BDA'M} \leq \dfrac{8}{27}$.

Câu 34. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (MND') chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm C gọi là (H). Tính thể tích khối (H).

A. $\dfrac{55a^3}{72}$. **B.** $\dfrac{55a^3}{144}$. **C.** $\dfrac{181a^3}{486}$. **D.** $\dfrac{55a^3}{48}$.

Lời giải



Thể tích khối lập phương bằng a^3.

Mặt phẳng (MND') cắt cạnh DC tại E thỏa $EC=\frac{1}{4}DC$; cắt BB' tại P sao cho $BP=\frac{1}{3}BB'$.

Khi đó $V_{(H)}=V_{C'.D'NPME}+V_{C'.CEM}+V_{C'.B'PN}$.

Có $V_{B'.C'NP}=\frac{1}{6}a.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}=\frac{a^3}{18}$

$V_{C.C'ME}=\frac{1}{6}a.\frac{a}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{48}$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ; lấy đơn vị trên trục 1 đơn vị bằng a.

Ta có $C(0;0;0)$, $C'(0;0;1)$, $E\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $M\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $R\left(0;0;-\frac{1}{3}\right)$, $Q\left(-\frac{1}{4};1;0\right)$, $D'(1;0;1)$.

Mặt phẳng $(MND'):\frac{x}{\frac{1}{4}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{-\frac{1}{3}}=1\Leftrightarrow 4x+2y-3z-1=0\Rightarrow d\left(C',(MND')\right)=\frac{4\sqrt{29}}{29}$

$S_{MPND'E}=S_{EQND'}-S_{PMQ}=\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{29}}{4}=\frac{11\sqrt{29}}{48}$

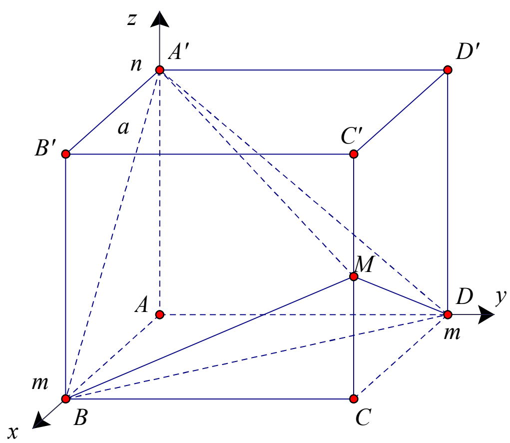
$V_{C'.D'NPME}=\frac{1}{3}d\left(C',(MND')\right).S_{D'NPME}=\frac{11}{36}a^3$.

Vậy $V_{(H)}=\frac{55}{144}a^3$.

Câu 35. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O các đỉnh $B(m;0;0), D(0;m;0), A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{64}{27}$. **C.** $\frac{75}{32}$. **D.** $\frac{245}{108}$.

Lời giải



$M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$

$\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n)$

Ta có $\overrightarrow{BD}=(-m;m;0)$

$\overrightarrow{BM}=\left(0;m;\frac{n}{2}\right)$

$\left[\overrightarrow{BA'};\overrightarrow{BD}\right]=\left(-mn;-mn;-m^2\right)$

$\left[\overrightarrow{BA'};\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}=-m^2n-m^2.\frac{n}{2}=-\frac{3}{2}m^2n$

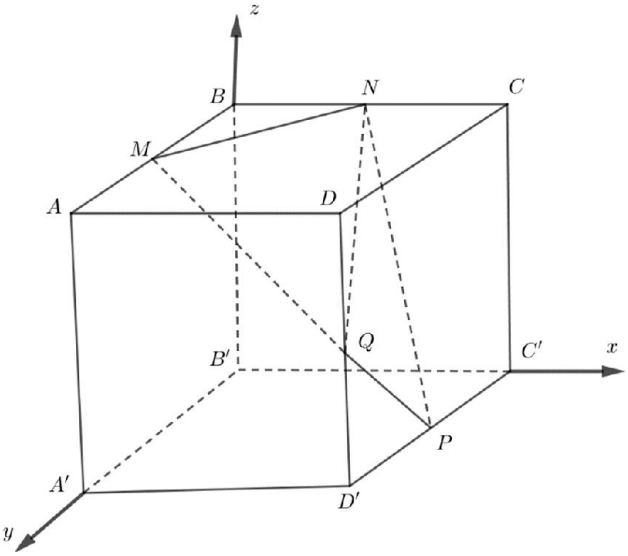
$V_{BA'DM}=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{BA'};\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{1}{4}m^2n=\frac{1}{4}m^2(4-m)=\frac{1}{8}m.m(8-2m)\le\frac{1}{8}.\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{64}{27}.$

Câu 36. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của $AB,BC,C'D',DD'$. Gọi thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $a+b$.

A. 9. **B.** 25. **C.** 13. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C



Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc $O \equiv B'$. Khi đó:

$M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $P\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\,0\right)$, $\overrightarrow{MP}=(1;0;-1)$, $\overrightarrow{MQ}=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

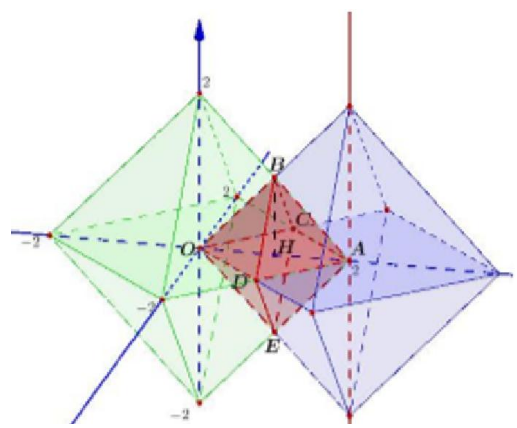
Suy ra $V_{MNPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right|=\frac{1}{12}\Rightarrow a=1;b=12\Rightarrow a+b=13$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$,tập hợp tất cả các điểm thỏa mãn $|x|+|y|+|z|\le 2$ và $|x-2|+|y|+|z|\le 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Tập các điểm $M(x;y;z)$ có tọa độ thỏa $|x|+|y|+|z|\le 2$ là bát diện đều tâm O, các đỉnh có tọa độ $(2;0;0),(-2;0;0),(0;2;0),(0;-2;0),(0;0;2),(0;0;-2)$.

Tập các điểm $M(x;y;z)$ có tọa độ thỏa $|x-2|+|y|+|z|\le 2$ là bát diện đều tâm $A(2;0;0)$, các đỉnh có tọa độ $(0;0;0),(4;0;0),(2;2;0),(2;-2;0),(2;0;2),(2;0;-2)$

Giao của hai bát diện đều trên là một bát diện đều có tâm $H(1;0;0)$, các đỉnh là:

$O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(1;0;1)$, $C(1;-1;0)$, $D(1;1;0)$, $E(1;0;-1)$.

Ta có $AD=\sqrt{2}, BH=1$.

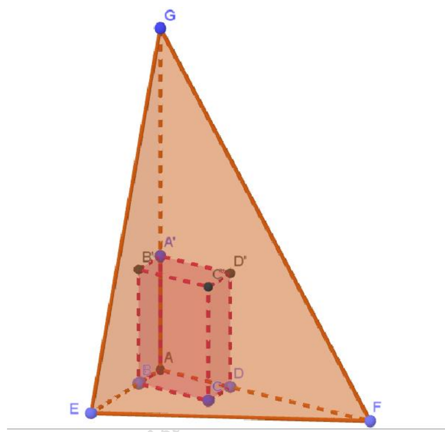
Thể tích khối đa diện: $V=2.\dfrac{1}{3}.BH.AD^2=\dfrac{4}{3}$.

Câu 38. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1; AD=2; AA'=3$. Mặt phẳng (P) đi qua C' và cắt các tia $AB; AD; AA'$ lần lượt tại $E; F; G$ (khác A) sao cho thể tích khối tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất. Tổng của $AE+AF+AG$ bằng.

A. 18. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A



Trong không gian xây dựng hệ toạ độ $Oxyz$ sao cho $A\equiv O; B(1;0;0); D(0;2;0); A'(0;0;3)$

Khi đó ta có $C'(1;2;3)$

Giả sử mặt phẳng (P) cắt các trục $Ox; Oy; Oz$ lần lượt tại $E(a;0;0); F(0;b;0); G(0;0;c)$, với $a>0; b>0; c>0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,

Do mặt phẳng (P) đi qua $C'(1;2;3)$.

Nên ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$ hay $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{6}{abc}} \Leftrightarrow abc\ge 162$.

Mặt khác thể tích khối tứ diện $AEFG$ là $V=\dfrac{1}{6}abc\ge 27$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{3}{c}\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1\end{cases}$.

Tức là $a=3; b=6; c=9$.

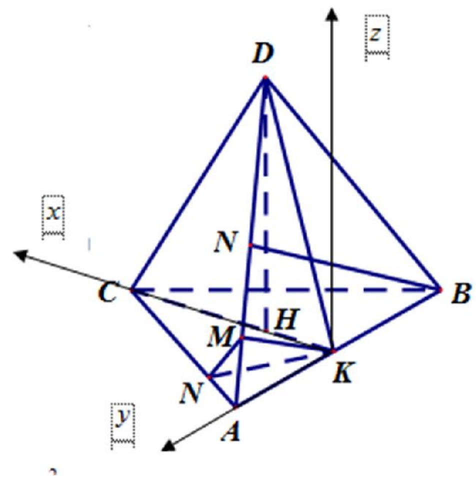
Vậy tổng $AE+AF+AG=18$.

Câu 39. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi K là trung điểm AB, gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Coi $a=1$, ta có: $KC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, DH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}; AN=\dfrac{1}{4}AC; HK=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $K\equiv O(0;0;0), A\left(0;\dfrac{1}{2};0\right), C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;0\right), D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6};0;\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8};\dfrac{3}{8};0\right)$.

Ta có: Tứ giác $CDMN$ là hình thang cân. Do đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $KCDN$.

Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $KCDN$ có phương trình:

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.(1)

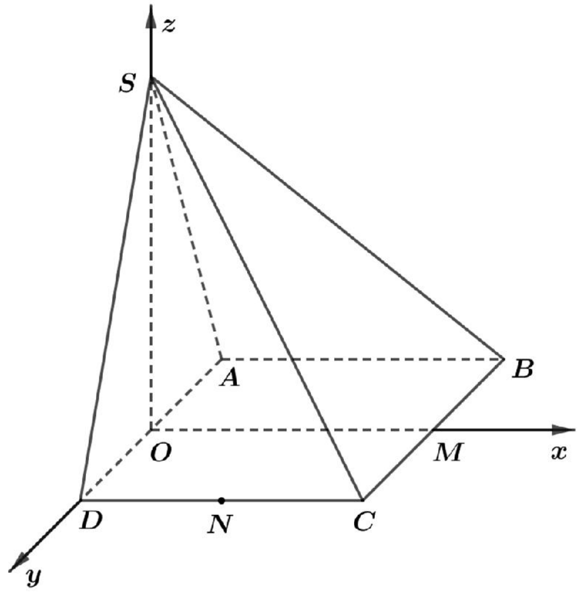
Vì $K,C,D,N\in(S)\Rightarrow\begin{cases}d=0\\ \sqrt{3}a=-\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}a+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}c=-\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}a+\dfrac{3}{4}b=-\dfrac{3}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ b=0\\ c=-\dfrac{\sqrt{6}}{8}\\ d=0\end{cases}\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

Vậy $R=\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Câu 40. **(Chuyên Thái Bình -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{93}}{12}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{29}}{8}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{37}}{6}$.

Lời giải



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$M(1;0;0)$, $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN \Rightarrow MI = NI = CI = SI$.

Ta có: $\overrightarrow{MI} = (x-1;y;z)$, $\overrightarrow{NI} = \left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2};z\right)$, $\overrightarrow{CI} = \left(x-1;y-\frac{1}{2};z\right)$, $\overrightarrow{SI} = \left(x;y;z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ $MI = NI = CI = SI$ ta có hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{5\sqrt{3}}{12} \end{cases}.$$

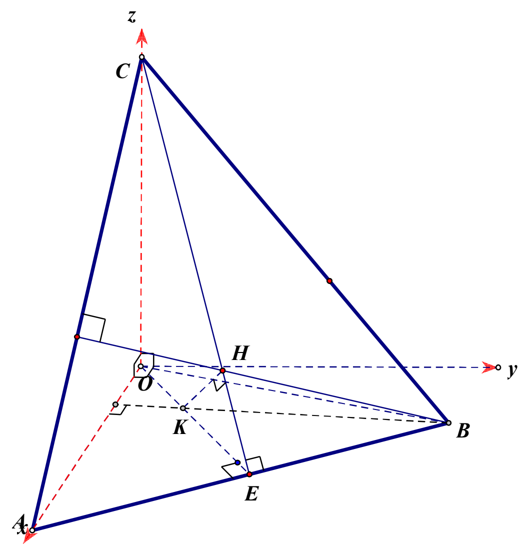
$\Rightarrow I\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ là: $R = IM = \frac{\sqrt{93}}{12}$.

Câu 41. **(Chuyên KHTN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz, gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có $C(0;0;c)$. Dễ thấy tam giác ABC cân tại C. Gọi $E=(4;2;0)$ là trung điểm của AB. Ta có mặt phẳng (OCE) vuông góc với AB (do $\begin{cases} AB\perp OC \\ AB\perp CE\end{cases}$) và là mặt phẳng cố định.

Gọi K là trực tâm tam giác OAB, do A, B và K cùng nằm trong mặt phẳng (Oxy) nên $\begin{cases}\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{OA}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.(-2)+y.4=0\\ x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\\ y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Tìm được $K=\left(3;\dfrac{3}{2};0\right)$.

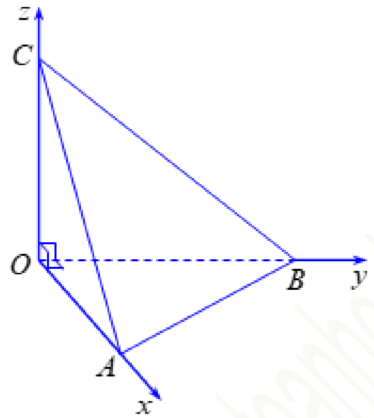
Ta chứng minh được $KH\perp(CAB)$ do $\begin{cases} AB\perp(OEC)\\ CA\perp(BHK)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HK\perp AB\\ HK\perp CA\end{cases}$.

Suy ra $\widehat{KHE}=90°$. Suy ra H thuộc mặt cầu đường kính $KE=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ và $\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(H,(SCD)\right)$ thuộc mặt phẳng (OCE) cố định. Vậy H luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính $R=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Câu 42. **(Chuyên Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\dfrac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải



Ta có $\dfrac{S_{ABC}}{V_{OABC}}=\dfrac{S_{ABC}}{\frac{1}{3}S_{ABC}.d\left(O,\left(ABC\right)\right)}=\dfrac{3}{d\left(O,\left(ABC\right)\right)}$

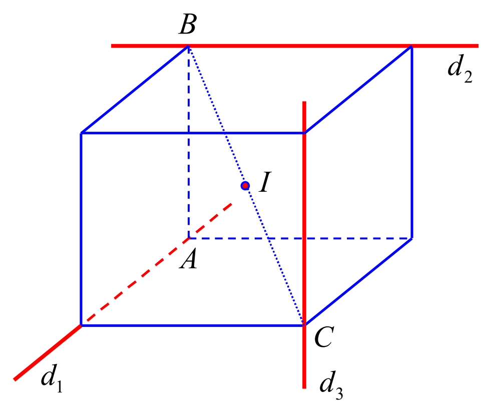
Mà $\dfrac{S_{ABC}}{V_{OABC}}=\dfrac{3}{2}$ nên $d\left(O,\left(ABC\right)\right)=2$.

Vậy mặt phẳng $\left(ABC\right)$ luôn tiếp xúc mặt cầu tâm O, bán kính $R=2$.

Câu 43. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $\left(d_1\right):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$, $\left(d_2\right):\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$, $\left(d_3\right):\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I\left(a;b;c\right)$, tiếp xúc với 3 đường thẳng $\left(d_1\right)$, $\left(d_2\right)$, $\left(d_3\right)$. Tính $S=a+2b+3c$.

A. $S=10$. **B.** $S=11$. **C.** $S=12$. **D.** $S=13$.

Lời giải



$\left(d_1\right)$ đi qua điểm $A\left(1;1;1\right)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=\left(2;1;-2\right)$.

$\left(d_2\right)$ đi qua điểm $B\left(3;-1;2\right)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=\left(1;2;2\right)$.

$\left(d_3\right)$ đi qua điểm $C\left(4;4;1\right)$ có VTCP $\overrightarrow{u_3}=\left(2;-2;1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0$, $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3}=0$, $\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{u_1}=0$

$\Rightarrow\left(d_1\right)$, $\left(d_2\right)$, $\left(d_3\right)$ đôi một vuông góc với nhau.

$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\neq 0$, $\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right].\overrightarrow{BC}\neq 0$, $\left[\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{CA}\neq 0$

$\Rightarrow\left(d_1\right)$, $\left(d_2\right)$, $\left(d_3\right)$ đôi một chéo nhau.

Lại có: $\overrightarrow{AB}=\left(2;-2;1\right)$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0$ nên $\left(d_1\right)$, $\left(d_2\right)$, $\left(d_3\right)$ chứa 3 cạnh của hình hộp chữ nhật như hình vẽ.

Vì mặt cầu tâm $I\left(a;b;c\right)$ tiếp xúc với 3 đường thẳng $\left(d_1\right)$, $\left(d_2\right)$, $\left(d_3\right)$ nên bán kính

$R=d\left(I,d_1\right)=d\left(I,d_2\right)=d\left(I,d_3\right)\Leftrightarrow R^2=d^2\left(I,d_1\right)=d^2\left(I,d_2\right)=d^2\left(I,d_3\right)$

$\Leftrightarrow R^2=\left(\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}\right)^2=\left(\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}\right)^2=\left(\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_3}\right|}\right)^2$, với $\left|\overrightarrow{u_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{u_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{u_3}\right|^2=9$,

$\overrightarrow{AI}=\left(a-1;b-1;c-1\right)$, $\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]=\left(-2b-c+1;2a+2c-4;a-2b+1\right)$.

$\overrightarrow{BI}=\left(a-3;b+1;c-2\right)$, $\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]=\left(2b-2c+6;-2a+c+4;2a-b-7\right)$.

$\overrightarrow{CI}=(a-4;b-4;c-1)$, $\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]=(b+2c-6;-a+2c+2;-2a-2b+16)$.

$$\begin{cases} 9R^2=\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|^2 \\ 9R^2=\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|^2 \\ 9R^2=\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|^2 \end{cases} \Leftrightarrow 27R^2=\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|^2+\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|^2+\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|^2$$

$$\Leftrightarrow 27R^2=18\left(a^2+b^2+c^2\right)-126a-54b-54c+423$$

$$\Leftrightarrow 27R^2=18\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+18\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+18\left(c-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{243}{2}\geq\frac{243}{2}$$

$$\Rightarrow R_{\min}=\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ khi } a=\frac{7}{2},\ b=c=\frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right).$$

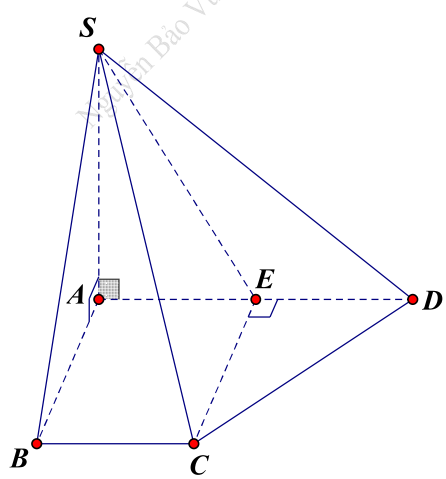
Khi đó $S=a+2b+3c=11$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ cs đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD=2AB=2BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=2a$. Gọi E là trung điểm cạnh AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.   **B.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.   **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.   **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Dễ tính được $AB=BC=AE=a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O\equiv A$, $\overrightarrow{AB}=\vec{i}, \overrightarrow{AE}=\vec{j}, \overrightarrow{AS}=2\vec{k}$

Khi đó ta có $E(0;1;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;2)$

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta có:

$$IE=IC\Leftrightarrow\sqrt{a^2+(b-1)^2+c^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+c^2}\Leftrightarrow 2a-1=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

$IE = ID \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2+c^2} = \sqrt{a^2+(b-2)^2+c^2} \Leftrightarrow 2b-3=0 \Leftrightarrow b=\frac{3}{2}$

$IE = IS \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2+c^2} = \sqrt{a^2+b^2+(c-2)^2} \Leftrightarrow 4c-2b-3=0 \Rightarrow c=\frac{2b+3}{4}=\frac{3}{2}$

Vậy $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ suy ra bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IE = \frac{\sqrt{11}}{2}$