Dạng 1. Bài toán chia hết

Bài 1. Từ các chữ số 1, 3, 4, 8 lập các số tự nhiên có sáu chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần./ Trong các số được tạo thành nói trên, chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 4? **ĐS:** P = 1/15

P(A) = n(A) / n(Ω) 333148

Số phần tử của không gian mẫu: n(Ω) = 6!/3! = 4.5.6

Gọi A là biến cố mà số được chọn chia hết cho 4

2 chữ số cuối có dạng: 48hoặc 84: 2 cách

4 chữ số đầu lập từ 3chữ số 3 và 1 chữ số 1: 4!/3! Cách chọn

QTN: (2.4!)/3! = 8 = n(A)

P(A) = n(A) / n(Ω) = 1/15

Bài 2. Gọi *A* là tập hợp các số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập *A*. Tính xác suất để chọn được một số thuộc *A* và số đó chia hết cho 3. **ĐS:** P = 11/27

Lời giải.
Trước hết ta tính $n(A)$. Với số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có 9 cách chọn và có A_9^8 cho 8 vị trí còn lại. Vậy $n(A) = 9 \times \mathrm{A}_9^8$.

Giả sử $B = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ ta thấy tổng các phần tử của B bằng $45 \vdots 3$ nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3 sẽ được tạo thành từ 9 chữ số của các tập $B \setminus \{0\}$, $B \setminus \{3\}$, $B \setminus \{6\}$, $B \setminus \{9\}$ nên số các số loại này là $\mathrm{A}_9^9 + 3 \times 8 \times \mathrm{A}_8^8$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{\mathrm{A}_9^9 + 3 \times 8 \times \mathrm{A}_8^8}{9 \times \mathrm{A}_9^8} = \dfrac{11}{27}$. □

Bài 3. Gọi *S* là tập hợp các ước số nguyên dương của số 43200. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử thuộc *S*. Tính xác suất lấy được hai phần tử là hai số không chia hết cho 5. **ĐS:** P = 9/23

Bài 4. Từ tập *A* = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau đôi một sao cho các số này là số lẻ và chữ số đứng ở vị trí thứ 3 luôn chia hết cho 6? **ĐS:** 640.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là: $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Ta có hai trường hợp là

— **TH1:** $a_3 = 0$.
Do n lẻ nên a_6 có 4 cách chọn, a_1 có 6 cách. Chọn 3 chữ số còn lại có A_5^3 cách.

— **TH2:** $a_3 = 6$.
Do n lẻ nên a_6 có 4 cách chọn, a_1 có 5 cách. Chọn 3 chữ số còn lại có A_5^3 cách.

Vậy có $S = 4 \times 6 \times \mathrm{A}_5^3 + 4 \times 5 \times \mathrm{A}_5^3 = 2640$ số.

Bài 5. Trong tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số ta chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để chọn
được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1. **ĐS:** P = 43/3000

Lời giải.
Số các số tự nhiên có 4 chữ số là $9999 - 1000 + 1 = 9000$.
Giả sử số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là $\overline{abc1}$.
Ta có $\overline{abc1} = 10\overline{abc} + 1 = 3\overline{abc} + 7\overline{abc} + 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3\overline{abc} + 1$ chia hết cho 7. Đặt $3\overline{abc} + 1 = 7h \Leftrightarrow \overline{abc} = 2h + \dfrac{h-1}{3}$ là số nguyên khi và chỉ khi $h = 3t + 1$.
Khi đó ta được $\overline{abc} = 7t + 2 \Rightarrow 100 \leq 7t + 2 \leq 999 \Leftrightarrow \dfrac{98}{7} \leq t \leq \dfrac{997}{7} \Leftrightarrow t \in \{14; 15; \ldots; 142\}$, suy ra số cách chọn ra t sao cho số $\overline{abc1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 129.
Vậy xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{129}{9000} = \dfrac{43}{3000}$. □

Bài 6. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A, tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1. **ĐS:** P ≈ 0 ,015.

Lời giải.
Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $99999 - 10000 + 1 = 90000$.
Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là $\overline{abcd1}$.
Ta có $\overline{abcd1} = 10\overline{abcd} + 1 = 3\overline{abcd} + 7\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7. Đặt $3\overline{abcd} + 1 = 7h \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2h + \dfrac{h-1}{3}$ là số nguyên khi và chỉ khi $h = 3t + 1$.
Khi đó ta được $\overline{abcd} = 7t + 2 \Rightarrow 1000 \leq 7t + 2 \leq 9999 \Leftrightarrow \dfrac{998}{7} \leq t \leq \dfrac{9997}{7} \Leftrightarrow t \in \{143; 144; \ldots; 1428\}$, suy ra số cách chọn ra t sao cho số $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 1286.
Vậy xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{1286}{90000} = \dfrac{643}{45000} \approx 0{,}015$. □

Bài 7. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số không chia hết cho 3. **ĐS:** P = 0,6.

Lời giải.

— Tìm số có ba chữ số khác nhau lập từ tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$, chọn a có 5 cách, chọn 2 số trong 5 số còn lại của E để xếp vào hai vị trí b, c có A_5^2 cách. Vậy có $5 \times \mathrm{A}_5^2 = 100$ số.

— Tính số lập được chia hết cho 3. Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$, với $a + b + c \,\vdots\, 3$.
Xét các tập con gồm 3 phần tử của tập E, ta thấy chỉ có các tập sau thỏa mãn điều kiện tổng các chữ số chia hết cho 3 là $A_1 = \{0; 1; 2\}$, $A_2 = \{0; 1; 5\}$, $A_3 = \{0; 2; 4\}$, $A_4 = \{0; 4; 5\}$, $A_5 = \{1; 2; 3\}$, $A_6 = \{1; 3; 5\}$, $A_7 = \{2; 3; 4\}$, $A_8 = \{3; 4; 5\}$.
Khi $a, b, c \in A_1, A_2, A_3, A_4$ mỗi trường hợp lập được 4 số thỏa mãn yêu cầu.
Khi $a, b, c \in A_5, A_6, A_7, A_8$ mỗi trường hợp lập được 6 số thỏa mãn yêu cầu.
Vậy có $4 \times 4 + 4 \times 6 = 40$ số. Suy ra số không chia hết cho 3 là $100 - 40 = 60$ số.

Xác suất cần tính là $P = \dfrac{60}{100} = 0,6$. □

Bài 8. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số chia hết cho 1111. **ĐS:** P = 1/105

Lời giải.
Ta có số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 8!$.
Giả sử số tự nhiên $n = \overline{a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}$ chia hết cho 1111 trong đó a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 thuộc $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Ta có $1+2+3+\cdots+8 = 36 \vdots 9 \Rightarrow \begin{cases} n \vdots 9 \\ n \vdots 1111 \end{cases} \Rightarrow n \vdots 9999$. Đặt $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$, $y = \overline{b_1b_2b_3b_4} \Rightarrow$ $n = 10^4x + y = 9999x + x + y$.
$n \vdots 9999 \Rightarrow x + y \vdots 9999$, vì $0 < x + y < 2 \times 9999$ nên $x + y = 9999$.
Suy ra $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = a_4 + b_4 = 9$. Có 4 cặp số có tổng bằng 9 là $(1; 8)$, $(2; 7)$, $(3; 6)$, $(4; 5)$.
Có 4! cách chọn cặp số trên, mỗi cặp số có 2 hoán vị nên có $4! \times 2^4$ số chia hết cho 1111.
Gọi A là biến cố "Số tự nhiên được lấy chia hết cho 1111", suy ra $n(A) = 4! \times 2^4$. Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{105}$. □

Bài 9. Một hộp đựng 20 viên bi khác nhau được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ba viên bi từ hộp trên rồi cộng số ghi trên đó lại. Hỏi có bao nhiêu cách lấy để kết quả thu được là một số chia hết cho 3. **ĐS:** 384.

Lời giải.
Ta chia 20 số từ 1 đến 20 thành ba nhóm sau:

— $A = \{3; 6; 9; 11; 15; 18\}$. Nhóm chia hết cho 3, $n(A) = 6$.

— $B = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\}$. Nhóm chia cho 3 dư 1, $n(B) = 7$.

— $C = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20\}$. Nhóm chia cho 3 dư 2, $n(C) = 7$.

Tổng 3 số đã cho chia hết cho 3 có bốn trường hợp sau:

TH1. 3 số thuộc A. Có $\mathrm{C}_6^3 = 20$ cách chọn.

TH2. 3 số thuộc B. Có $\mathrm{C}_7^3 = 35$ cách chọn.

TH3. 3 số thuộc C. Có $\mathrm{C}_7^3 = 35$ cách chọn.

TH4. 1 số thuộc A, 1 số thuộc B, 1 số thuộc C. Có $\mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_7^1 \times \mathrm{C}_7^1 = 294$ cách chọn.

Vậy tất cả có $20 + 35 + 35 + 294 = 384$ cách chọn số thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 10. Gọi *S* là tập hợp các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập *S*. Tính xác suất để chọn được một số thuộc *S* và số đó chia hết cho 9. **ĐS:** P = 1/9

Lời giải.

Gọi số có 8 chữ số phân biệt có dạng là: $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$. Có $n(\Omega) = \mathrm{A}_{10}^8 - \mathrm{A}_9^7$.
Gọi A là biến cố "x chia hết cho 9".
Các số $a_1, a_2, \ldots, a_8$ được lập từ 4 trong 5 cặp $(0;9)$, $(1;8)$, $(2;7)$, $(3;6)$, $(4;5)$. Xét hai trường hợp sau

— **TH1:** Trong x không có chữ số 0 và 9. Có 8! số.

— **TH2:** Trong x có chứa chữ số 0 và 9.

  - Chọn 3 trong 4 cặp còn lại có C_4^3.
  - Xếp 8 số chọn được thành số có 8 chữ số có $8! - 7!$.

Vậy có $8! + \mathrm{C}_4^3 \times (8! - 7!)$ số, suy ra xác suất là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{8! + \mathrm{C}_4^3 \times (8! - 7!)}{\mathrm{A}_{10}^8 - \mathrm{A}_9^7} = \dfrac{1}{9}$. □

Dạng 2. Số lần xuất hiện của chữ số

Bài 1 (Thi HSG Quảng Nam lớp 11, 2016- 2017). Từ 10 chữ số *{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}* lập được bao nhiêu số tự nhiên thỏa điều kiện là số có 8 chữ số, trong đó có 2 chữ số lẻ khác nhau và 3 chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần. **ĐS:** 428400

9^5

Bài 1: $\{0; \ldots ; 9\}$

Có thể lập được số tự nhiên 8 chữ số mà 2 chữ số lẻ khác nhau và 3 chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần

$C_5^3 C_8^2 C_6^2 C_4^2 . 5 . 4 - 3 C_4^2 C_7^2 . C_5^2 . 5 . 4$

Bài 2 (Thi HSG Thanh Hóa lớp 12, 2013-2014). Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau. **ĐS:** 12600/5904

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số đều khác 0 là 9^5.
Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác 0 mà chỉ có 3 chữ số khác nhau là $\mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \dfrac{5!}{3!} + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_3^2 \cdot \dfrac{5!}{2! \cdot 2!}$ (do 3 số mà tạo ra số có 5 chữ số nên chỉ có hai trường hợp hoặc có 1 số lặp 3 lần hoặc có 2 số mỗi số lặp 2 lần).

Vậy xác suất $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \dfrac{5!}{3!} + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_3^2 \cdot \dfrac{5!}{2! \cdot 2!}}{9^5} = \dfrac{12600}{59049}$. □

X **Bài 3 (Thi HSG Bắc Giang lớp 11, 2012-2013).** Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó có một chữ số xuất hiện hai lần, các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần? **ĐS:**3888.

Bài này chính xác là chỉnh hợp lặp.

Lời giải.
Ta xét các trường hợp sau
• **Trường hợp 1.** Chữ số 0 xuất hiện hai lần.
Có C_3^2 cách chọn vị trí cho hai chữ số 0.
Có A_9^2 cách sắp xếp hai chữ số trong 9 chữ số vào hai vị trí còn lại.
Suy ra trường hợp này có $C_3^2 \cdot A_9^2 = 216$ số thỏa mãn.
• **Trường hợp 2.** Chữ số x (khác 0) xuất hiện hai lần và x ở vị trí đầu tiên.
Có 9 cách chọn x.
Có 3 cách chọn thêm một vị trí cho x còn lại.
Có A_9^2 cách xếp 2 chữ số trong 9 chữ số vào 2 vị trí còn lại.
Suy ra có $9 \cdot 3 \cdot A_9^2 = 1944$.
• **Trường hợp 3.** Chữ số x (khác 0) xuất hiện hai lần và x không nằm ở vị trí đầu.
Có 9 cách chọn x.
Có C_3^2 cách chọn vị trí cho chữ số x.
Có 8 cách chọn cho số ở vị trí đầu và 8 cách chọn cho vị trí còn lại.
Suy ra có $8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot C_3^2 = 1728$.
Vậy ta có $216 + 1944 + 1728 = 3888$ số thỏa yêu cầu đề. □

Bài 4 (Thi HSG Nam Định lớp 11, 2012-2013). Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập hợp $A = \{1; 2; 3; \ldots; 20\}$. Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số tự nhiên liên tiếp.**ĐS:** 68/95

Lời giải.
Số cách chọn ba số đôi một khác nhau từ tập A là $C_{20}^3 = 1140$ cách.
Số cách chọn ra ba số liên tiếp là 18 cách
Số cách chọn ra ba số mà có đúng hai số liên tiếp là $17 + 17 = 306$ cách.
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1140 - 18 - 306}{1140} = \dfrac{68}{95}$. □

X **Bài 5 (Thi HSG Thanh Hóa lớp 12, 2008-2009).** Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau mà trong đó có đúng một chữ số lẻ? **ĐS:** 3000.

Lời giải.
Ta kí hiệu số có dạng là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_5a_6}$.
Có 5 cách chọn một chữ số lẻ.
Mỗi cách chọn ra một số lẻ và 5 số chẵn ta có thể viết được 6! số (kể cả $a_1 = 0$).
Suy ra có $5 \cdot 6!$ số (kể cả $a_1 = 0$).
Ta tìm số cách làm như trên nhưng $a_1 = 0$.
Vì $a_1 = 0$ nên số cách viết 5 số còn lại là $5 \cdot 5!$.
Vậy có $5 \cdot 6! - 5 \cdot 5! = 3000$ số. □

X**Bài 6 (Thi HSG Nam Định lớp 12, 2013-2014).** Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó luôn có mặt chữ số 6. **ĐS:** 1560.

Lời giải.
Có 5 cách chọn vị trí cho số 6.
Điền vào 4 vị trí còn lại bởi 6 số còn lại ta có A_6^4 cách điền.
Suy ra số các số vừa tìm được là $5 \cdot \mathrm{A}_6^4$ (kể cả số 0 đứng đầu).

Trong đó số cách làm mà số 0 đứng vị trí đầu tiên là $4 \cdot \mathrm{A}_5^3$.
Vậy có $5 \cdot \mathrm{A}_6^4 - 4 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 1560$ số thỏa yêu cầu bài. □

Bài 8 (Thi HSG Diễn Châu-Nghệ An lớp 11, 2016-2017). Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn một số ngẫu nhiên từ X tính xác suất để số đó có đúng ba chữ số lẻ. **ĐS:** 10/21

Lời giải.
Ta có số phần tử của X là A_9^6.
Số cách số mà trong đó có đúng ba chữ số lẻ là $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 6!$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 6!}{\mathrm{A}_9^6} = \dfrac{10}{21}$. □

Bài 9 (Thi HSG Đà Nẵng lớp 11, 2010- 2011). Từ tập hợp các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy chỉ có mặt ba chữ số khác nhau. **ĐS:** 12600

Lời giải.
Số các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0 là 9^5.
Số các số tự nhiên có năm chữ số mà chỉ có mặt ba chữ số khác nhau là $\mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \dfrac{5!}{3!} + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_3^2 \cdot \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = 12600$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{12600}{9^5}$. □

Dạng 3. Liên quan đến vị trí

Bài 1 (Thi HSG Vĩnh Phúc lớp 12, 2017-2018). Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau trong đó hai số đứng kề nhau không là số lẻ? **ĐS:** 37800.

Lời giải.
Gọi số đó là $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_5a_6}$.
Theo đề bài ta thấy A có nhiều nhất là ba số lẻ.
• **Trường hợp 1.** A có một số lẻ.
Nếu a_1 là số lẻ thì số các số A là $\mathrm{C}_5^1 \cdot 5!$.
Nếu a_1 là số chẵn thì số các số A là $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 4!$.
Suy ra có $\mathrm{C}_5^1 \cdot 5! + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 4!$ số trong trường hợp này.
• **Trường hợp 2.** A có hai chữ số lẻ.
Nếu a_1 lẻ, suy ra a_2 chẵn thì số các số A là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 4!$.
Nếu a_1 chẵn thì số các số A là $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot 6 \cdot 2! \cdot \mathrm{A}_4^3$.
• **Trường hợp 3.** A có ba chữ số lẻ.
Nếu a_1 lẻ suy ra a_2 chẵn thì số các số A là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot 3 \cdot 2! \cdot \mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_4^2$.
Nếu a_1 chẵn thì có một cách chọn để hai số lẻ không đứng liền kề nên số các số A là $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 1 \cdot 3! \cdot \mathrm{A}_4^2$.
Vậy số các số A là 37800. □

Bài 2 (Thi HSG Thái Nguyên lớp 12, 2011-2012). Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được thành lập từ các số đã cho, trong đó hai chữ số 0 và 1 không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 240.

Lời giải.
Số các số có bốn chữ số khác nhau được thành lập từ các số đã cho là $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.
Ta tìm số các số có bốn chữ số khác nhau mà số 0 và số 1 đứng kề.
Nếu $1, 0$ đứng ở hai vị trí đầu thì số các số là $1 \cdot A_4^2$.
Nếu $1, 0$ không ở hai vị trí đầu thì số các số là $2 \cdot 2! \cdot A_4^2$.
Vậy có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2! \cdot A_4^2 = 240$ số thỏa yêu cầu bài. □

Bài 3 (Thi HSG Vĩnh Long lớp 11, 2015- 2016). Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số sao cho trong mỗi số đó có đúng ba chữ số 1, các chữ số còn lại đôi một khác nhau và hai chữ số chẵn không đứng cạnh nhau. **ĐS:** 2400.

Hoán vị lặp

Cách nhận diện: cho 6 chữ số mà yêu cầu số tự nhiên có 8 chữ số và chữ số 1 xuất hiện 3 lần

TH1: 2, 4 6 đứng tùy ý: 111 2 3 4 5 6 số cách là 8!/3!

TH2: (246) đứng cạnh nhau xem 3 số cạnh nhau là 1 phần tử: 111 (246) 3 5: 6 phần tử : (6!/3!).3! = 6!

TH3: chỉ có 2 chữ số chẵn đứng cạnh nhau (24)6

KHÔNG ĐỨNG CẠNH NHAU: dàn các bạn không khó tinh ra trước rồi nhét các bạn khó tính vào các chỗ xen kẽ

X   1   X   1   X   1   X   3   X   5   X

CÁCH GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ:

+ B1: sắp xếp 3 chữ số 1 và chữ số 3 và 5: 5!/3!

+ B2: Xếp 3 chữ số 2, 4, 6 vào các vị trí X: chọn 3 trong 6 vị trí X để xếp 3 chữ số chẵn: 6A3

Quy tắc nhân: (5!/3!).6! = 2400 gud gud

Bài 4 (Thi HSG Lào Cai lớp 11, 2017-2018). Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số khác nhau sao cho ba số chẵn không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 1440

Sắp 4 chữ số lẻ: 4!

x   1   x   3   x   5   x   7   x

Chọn 3 trong 5 vị trí để xếp 3 chữ số chẵn: 5A3

4!.5A3=

Bài 5 (Thi HSG Đông Anh-Hà Nội lớp 11, 2017-2018). Từ hai số 1 và 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số sao cho số tạo thành không có số nào có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau?**ĐS:** 143.

Th1: 1 chữ 1 và 9 chữ số 4: 10 số

Th2: 2 chữ số 1 và 8 chữ số 4: 9C2

Th3: 3 chữ số 1 và 7 chữ số 4: 8C3

Th4: 4 chữ số 1 và 6 chữ số 4: 7C4

Th5: 5 chữ số 1 và 5 chữ số 4: 6C5

Tổng cộng: 10+ 36 + 56 + 35+ 6 = 143

Bài 7. Trong hộp chứa các thẻ được ghi dãy số gồm sáu chữ số khác nhau. Tính xác suất để rút được một thẻ có ghi các chữ số 1, 2, 3, 4, trong đó các chữ số 1, 2 không đứng cạnh nhau và các chữ số 3, 4 không đứng cạnh nhau. **ĐS:** 242/315

Lời giải.

— Số cách lập dãy số có sáu chữ số khác nhau là $n(\Omega) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

— Số cách lập dãy số có sáu chữ số khác nhau mà các chữ số 1, 2 đứng cạnh nhau và các chữ số 3, 4 đứng cạnh nhau là $n(A) = 2! \cdot 2! \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot 4! = 1440$.

— Số cách lập dãy số có sáu chữ số khác nhau mà các chữ số 1, 2 đứng cạnh nhau là $n(B) = 2! \cdot \mathrm{C}_8^4 \cdot 5! = 16800$.

— Số cách lập dãy số có sáu chữ số khác nhau mà các chữ số 3, 4 đứng cạnh nhau là $n(C) = 2! \cdot \mathrm{C}_8^4 \cdot 5! = 16800$.

Vậy xác suất để rút được một thẻ có sáu chữ số khác nhau mà các chữ số 1, 2 không đứng cạnh nhau và các chữ số 3, 4 không đứng cạnh nhau là

$$\mathrm{P} = \frac{n(\Omega) - n(B) - n(C) - n(A)}{n(\Omega)} = \frac{242}{315}.$$

Bài 8. Gọi E là tập các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập E. Tính xác suất để số được chọn là số chẵn, có đúng hai chữ số 0 và không đứng cạnh nhau, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần. **ĐS:** 1/45

Lời giải.
Ta có $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \overline{a_1a_2\ldots a_5}$ (a_5 chẵn; đúng 2 chữ số 0, không cạnh nhau).

— **Trường hợp 1:** $a_5 = 0$

- Chọn vị trí xếp số 0 còn lại có 2 cách (loại a_1, a_4).
- Còn 3 vị trí, xếp bởi 5 chữ số nên có A_5^3 cách.
  Trường hợp này có $2 \cdot \mathrm{A}_5^3$ số.

— **Trường hợp 2:** $a_5 \neq 0$ suy ra a_5 có hai cách chọn

- Chọn ra 2 vị trí không cạnh nhau từ $\overline{a_2a_3a_4}$ để xếp số 0 có 1 cách (vào a_2 và a_4).
- Còn 2 vị trí, xếp bởi 4 chữ số nên có A_4^2 cách.
  Trường hợp này có $2 \cdot \mathrm{A}_4^2$ số.

Do đó xác suất cần tìm là: $\mathrm{P} = \dfrac{2 \cdot A_5^3 + 2 \cdot A_4^2}{5 \cdot 6^4} = \dfrac{144}{6480} = \dfrac{1}{45}$. □

Dạng 4. Liên quan đến lớn hơn nhỏ hơn

Bài 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $a \le b \le c < d$? **ĐS:** 330

Lời giải.

— **Trường hợp 1:** $a = b = c < d$ thì có $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ số thỏa mãn.

— **Trường hợp 2:** $a = b < c < d$ thì có $\mathrm{C}_8^2 + \mathrm{C}_7^2 + \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_2^2 = 84$ số thỏa mãn.

— **Trường hợp 3:** $a < b = c < d$ thì có $1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 84$ số thỏa mãn.

— **Trường hợp 4:** $a < b < c < d$ thì có $\mathrm{C}_9^4 = 126$ số thỏa mãn.

Vậy có 330 số thỏa mãn. □

Bài 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không lớn hơn 2503. **ĐS:** 202

Lời giải.
Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 là $\overline{abcd}$.
Số $\overline{abcd}$ không lớn hơn 2503 ta có 3 trường hợp

— **Trường hợp 1:** Số có dạng $\overline{250d}$ thì có 2 số: 2501, 2503.

— **Trường hợp 2:** Số có dạng $\overline{2bcd}$ thì $b \in \{0; 1; 3; 4\}$ nên có $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ số.

— **Trường hợp 3:** Số có dạng $\overline{1bcd}$ thì có $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ số.

Vậy có $2 + 80 + 120 = 202$ số thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 3. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 lập các số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được một số lớn hơn 2012. **ĐS:** 7/10

Lời giải.
Gọi số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 là $\overline{abcd}$.

— **Trường hợp 1:** Nếu $d = 0$ thì có $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ số.

— **Trường hợp 2:** Nếu $d \neq 0$ thì có thể là 2 hoặc 4, trường hợp này có $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ số.

Do đó có 60 số chẵn theo giả thiết bài toán.
Trong 60 số trên các số nhỏ hơn 2012 phải có dạng $\overline{1bcd}$.
Vì d chỉ có thể là 0, 2, 4 nên có $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ số như vậy, suy ra các số lớn hơn 2012 là 42.
Từ đó suy ra xác suất cần tìm là $\dfrac{42}{60} = \dfrac{7}{10}$. □

Bài 4. Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau và có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$. **ĐS:** 37/34020

Lời giải.
$n(M) = 9 \cdot \mathrm{A}_9^5$ (số có sáu chữ số đôi một khác nhau thì a_1 có 9 cách chọn, $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử nên có A_9^5).
Gọi A là biến cố "chọn ra được một số tự nhiên chẵn từ tập M đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$".
Ta có các trường hợp sau:

— **Trường hợp 1:** $a_6 = 0$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có $\mathrm{C}_9^5 = 126$ cách chọn.

— **Trường hợp 2:** $a_6 = 2$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có $\mathrm{C}_7^5 = 21$ cách chọn.

— **Trường hợp 3:** $a_6 = 4$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có $\mathrm{C}_5^5 = 1$ cách chọn.

$\Rightarrow n(A) = 126 + 21 + 1 = 148$.
Do đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(M)} = \dfrac{148}{9 \cdot A_9^5} = \dfrac{37}{34020}$. □

Bài 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập ra tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên hai số trong các số được lập. Tính xác suất để trong hai số được chọn có ít nhất một số lớn hơn 2015. **ĐS:** 14299/14950

Lời giải.
Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập ra được $5 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 300$ số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Suy ra $n(\Omega) = \mathrm{C}_{300}^2 = 44850$.
Số các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 nhỏ hơn hoặc bằng 2015 là $1 \cdot \mathrm{A}_5^3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 63$.
Gọi A là biến cố "trong hai số được chọn có ít nhất một số lớn hơn 2015" thì $n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_{63}^2 = 1953$.
Do đó $n(A) = n(\Omega) - n\left(\overline{A}\right) = 44850 - 1953 = 42897$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{42897}{44850} = \dfrac{14299}{14950}$. □

Bài 6. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu cách chọn một bộ 3 số phân biệt của A (không tính thứ tự) để hiệu của 2 số bất kỳ trong 3 số đó có giá trị tuyệt đối không nhỏ hơn 2. **ĐS:** 56

Lời giải.
Đặt $T = \{(a_1; a_2; a_3) \,|a_1, a_2, a_3 \in A; a_1 < a_2 < a_3; a_2 - a_1 \geq 2, a_3 - a_2 \geq 2\}$.
Với mỗi bộ (a_1, a_2, a_3), xét tương ứng với bộ (b_1, b_2, b_3) cho bởi $b_1 = a_1$; $b_2 = a_2 - 1$; $b_3 = a_3 - 2$.
Lúc này ta có: $0 \leq b_1 < b_2 < b_3 \leq 7$ và tương ứng này là tương ứng $1 - 1$ do:

— Với mỗi bộ $(a_1; a_2; a_3)$ cho tương ứng với một bộ (b_1, b_2, b_3) bởi công thức $b_1 = a_1$; $b_2 = a_2 - 1$; $b_3 = a_3 - 2$

— Ngược lại, với mỗi bộ (b_1, b_2, b_3) cho tương ứng với một bộ $(a_1; a_2; a_3)$ bởi công thức $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2 + 1$ $a_3 = b_3 + 2$.

Đặt $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Tập các bộ (b_1, b_2, b_3) là các tập con có 3 phần tử của B.
Vậy số tập con $(a_1; a_2; a_3)$ cần tìm là $C_8^3 = 56$. □

Bài 7. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$,trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$. **ĐS:** $0,055$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.
• **Cách 1:**
Xét các số $x = a$, $y = b + 1$, $z = c + 2$, $t = d + 3$.
Vì $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9 \quad (*) \Rightarrow 1 \leq x < y < z < t \leq 12$.
Và mỗi bộ gồm bốn số (x, y, z, t) được chọn từ tập hợp $\{1; 2; 3; \ldots ; 12\}$ ta đều thu được bộ số thỏa mãn $(*)$.
Do đó, số cách chọn 4 số trong 12 số là $C_{12}^4 = 495$ số.
Xác suất cần tìm là $\dfrac{495}{9000} = 0{,}055$.
• **Cách 2:**
Ta chia các trường hợp:

— **Trường hợp 1:** $1 \leq a < b < c < d \leq 9$ có $C_9^4 = 126$ cách chọn.

— **Trường hợp 2:** $1 \leq a \leq b < c < d \leq 9$ hoặc $1 \leq a < b \leq c < d \leq 9$ hoặc $1 \leq a < b < c \leq d \leq 9$ có $3 \cdot C_{12}^3 = 252$ cách chọn.

— **Trường hợp 3:** $1 \leq a \leq b \leq c < d \leq 9$ hoặc $1 \leq a < b \leq c \leq d \leq 9$ hoặc $1 \leq a \leq b < c \leq d \leq 9$ có $3 \cdot C_9^2 = 108$ cách chọn.

— **Trường hợp 4:** $1 \leq a = b = c = d \leq 9$ có $C_9^1 = 9$ cách chọn.

Vậy có tất cả $126 + 252 + 108 + 9 = 195$ cách chọn. Xác suất cần tìm là $\dfrac{495}{9000} = 0{,}055$. □

Dạng 5. Các bài toán đếm số phương án, tính xác suất liên quan đến người và đồ vật

Bài 1. Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh (trong đó có hai học sinh A và B) mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh A và B nhận được phần thưởng giống nhau.

ĐS: 5/18

Lời giải.
Để một học sinh nhận được 2 quyển sách thể loại khác nhau, ta chia phần thưởng thành ba loại: Toán + Lý ; Toán + Hóa; Lý + Hóa.
Gọi x, y, z $(x, y, z \in \mathbb{N})$ lần lượt là số học sinh nhận được bộ phần thưởng Toán + Lý ; Toán + Hóa; Lý + Hóa. Khi đó, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x+z=6 \\ y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=2. \end{cases}$$

Số cách phát thưởng ngẫu nhiên cho 9 học sinh: $\mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 1$.
Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_5^3$.
Gọi S là biến cố "hai học sinh A và B có phần thưởng giống nhau".

— **Trường hợp 1:** A và B cùng nhận bộ Toán+Lý có $\mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^3$ cách phát.

— **Trường hợp 2:** A và B cùng nhận bộ Toán+Hóa có $\mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^4$ cách phát.

— **Trường hợp 3:** A và B cùng nhận bộ Lý+Hóa có C_7^4 cách phát.

$\Rightarrow n(S) = \mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_7^4$.
Vậy xác suất của biến cố S là: $\mathrm{P}(S) = \dfrac{\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_7^4}{\mathrm{C}_9^4\mathrm{C}_5^3} = \dfrac{5}{18}$. □

Bài 2. Một trường học có 25 giáo viên nam và 15 giáo viên nữ trong đó có đúng hai cặp vợ chồng. Nhà
trường chọn ngẫu nhiên 5 người trong số 40 giáo viên trên đi công tác. Tính xác suất sao cho trong 5
người được chọn có đúng một cặp vợ chồng. ĐS: $\dfrac{2\left(C_{38}^3 - C_{36}^1\right)}{C_{40}^5}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{40}^5$.
Giả sử có hai cặp vợ chồng là (A, B) và (C, D) trong đó A, C là chồng.

— **Trường hợp 1:** Chọn cặp vợ chồng (A, B).
Cần chọn 3 người trong số 38 người còn lại (trừ (A, B)) mà không có cặp (C, D).

- Số cách chọn 3 người bất kì trong 38 người là C_{38}^3.
- Số cách chọn 3 người trong số 38 người mà có cặp (C, D) là C_{36}^1.

Suy ra số cách chọn 3 người trong số 38 người mà không có cặp (C, D) là $\mathrm{C}_{38}^3 - \mathrm{C}_{36}^1$.

— **Trường hợp 2:** Chọn cặp vợ chồng (C, D).
Tương tự ta cũng có số cách chọn là $\mathrm{C}_{38}^3 - \mathrm{C}_{36}^1$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{2\left(\mathrm{C}_{38}^3 - \mathrm{C}_{36}^1\right)}{\mathrm{C}_{40}^5}$. □

Bài 3. Chi đoàn lớp 12A gồm 40 đoàn viên, trong đó có một người tên là An và một người tên là Bình. Ban chấp hành chi đoàn bao gồm một bí thư, một phó bí thư và n ủy viên được bầu từ 40 đoàn viên của chi đoàn.
a) Có thể lập được bao nhiêu ban chấp hành chi đoàn 12A với số ủy viên $n = 7$, còn An và Bình

mỗi người giữ một chức vụ là bí thư hoặc phó bí thư?

b) Một ban chấp hành của chi đoàn $12A$ được gọi là đạt chuẩn $A0$ nếu An và Bình đều là ủy viên ban chấp hành, đồng thời không giữ chức vụ bí thư và phó bí thư. Xác định giá trị n, biết xác suất lấy ngẫu nhiên được một ban chấp hành đạt chuẩn $A0$ là 1/78. ĐS: $2.A_{38}^{7}, n = 5$

Lời giải.

① Số cách chọn An và Bình giữ chức vụ bí thư hoặc phó bí thư là 2 cách.
Số cách chọn 7 ủy viên là A_{38}^{7}.
Vậy có tất cả: $2 \cdot A_{38}^{7}$.

② Số phần tử của không gian mẫu là $A_{40}^{2} \cdot C_{38}^{n}$.
Chọn 2 người từ 38 người để giữ chức vụ bí thư hoặc phó bí thư có A_{38}^{2}.
Chọn thêm ủy viên có C_{36}^{n-2} (trừ bí thư, phó bí thư và An, Bình).
Vậy xác suất để được ban chấp hành đạt chuẩn A_0 là: $\dfrac{A_{38}^{2} \cdot C_{36}^{n-2}}{A_{40}^{2} \cdot C_{38}^{n}} = \dfrac{1}{78} \Rightarrow n = 5$.

□

Bài 4. Một đề thi có 10 câu trắc nghiệm, mỗi câu có bốn phương án trả lời, các phương án trả lời đôi một khác nhau, trong đó có một phương án đúng, ba phương án sai, trả lời đúng mỗi câu được $1,0$ điểm, trả lời sai không được điểm và không bị trừ điểm. Một thí sinh là cả 10 câu, mỗi câu chọn một phương án ngẫu nhiên. Tính xác suất để thí sinh đó đạt từ $7,0$ điểm trở lên. ĐS $\dfrac{3676}{4^{10}}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4^{10}$.
Gọi A là biến cố "Thí sinh đạt từ $7,0$ điểm trở lên".
Thí sinh chọn đúng 7 câu, sai 3 câu có $C_{10}^{7} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3240$ cách.
Thí sinh chọn đúng 8 câu, sai 2 câu có $C_{10}^{8} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 405$ cách.
Thí sinh chọn đúng 9 câu, sai 1 câu có $C_{10}^{9} \cdot 1 \cdot 3 = 30$ cách.
Thí sinh chọn đúng 10 câu có 1 cách.
Vậy $n(A) = 3240 + 405 + 30 + 1 = 3676 \Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3676}{4^{10}}$. □

Bài 5. Một học sinh tham dự kỳ thi môn Toán. Học sinh đó phải làm một đề trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu hỏi. Mỗi câu có 4 đáp án khác nhau, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Học sinh sẽ được chấm đỗ nếu trả lời đúng ít nhất 6 câu. Vì học sinh đó không học bài nên chỉ chọn ngẫu nhiên đáp án trong cả 10 câu hỏi. Tính xác suất để học sinh thi đỗ. ĐS: $\dfrac{20686}{4^{10}}$

Trong một câu xác suất trả lời đúng là $\frac{1}{4}$.
Trong một câu xác suất trả lời sai là $\frac{3}{4}$.
Học sinh đó thi đỗ trong các trường hợp sau:

— **Trường hợp 1:** đúng 6 câu và sai 4 câu.
Số cách chọn 6 câu đúng trong 10 câu là C_{10}^{6}.
Xác suất để trả lời 6 câu đúng đồng thời 4 câu còn lại trả lời sai là: $\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$.
Suy ra trường hợp 1 có xác suất là $P_1 = C_{10}^{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$.
Tương tự:

— **Trường hợp 2:** đúng 7 câu và sai 3 câu có xác suất là: $P_2 = C_{10}^{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$.

— **Trường hợp 3:** đúng 8 câu và sai 2 câu có xác suất là: $P_3 = C_{10}^{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

— **Trường hợp 4:** đúng 9 câu và sai 1 câu có xác suất là: $P_4 = C_{10}^{9} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$.

— **Trường hợp 5:** đúng 10 câu có xác suất là: $P_5 = C_{10}^{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$.

Do mỗi trường hợp trên là 1 biến cố thì các biến cố đó là xung khắc nên xác suất để học sinh thi đỗ là:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = \frac{20686}{4^{10}}.$$

□

Bài 6. Một công ty nhận được 30 hồ sơ của 30 người muốn xin việc vào công ty, trong đó có 15 người biết tiếng Anh, 8 người biết tiếng Pháp và 14 người không biết tiếng Anh và tiếng Pháp. Công ty cần tuyển 5 người biết ít nhất tiếng Anh hoặc tiếng Pháp. Tính xác suất để trong 5 người được chọn có 3 người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp. **ĐS:** 15/52

Lời giải.
Ta có:

— Số người biết ít nhất tiếng Anh hoặc tiếng Pháp là: $30 - 14 = 16$ (người).

— Số người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp là: $15 + 8 - 16 = 7$ (người).

— Số người chỉ biết tiếng Anh hoặc tiếng Pháp là: $16 - 7 = 9$ (người).

Xét phép thử: "5 người được chọn biết ít nhất tiếng Anh hoặc tiếng Pháp", suy ra $n(\Omega) = C_{16}^{5} = 4368$.
Xét biến cố: "Chọn 5 người trong đó có 3 người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp", suy ra $n(A) = C_7^3 \cdot C_9^2 = 1260$.
Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{52}$. □

Bài 7. Thầy X có 15 quyển sách gồm 4 cuốn sách Văn, 5 cuốn sách Sử và 6 cuốn sách Địa. Các cuốn sách đôi một khác nhau. Thầy X chọn ngẫu nhiên 8 cuốn sách để làm phần thưởng cho một học sinh. Tính xác suất để số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn. **ĐS:** 5949/6435

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^{8}$.
Gọi A là biến cố: "Số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn".
Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "7 cuốn sách còn lại của thầy X không có đủ 3 môn"
Xét các khả năng xảy ra:

Khả năng 1: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Văn và Sử. Số cách chọn là: C_{9}^{7}.

Khả năng 2: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Văn và Địa. Số cách chọn là: C_{10}^{7}.

Khả năng 3: 7 cuốn sách còn lại chỉ có Địa và Sử. Số cách chọn là: C_{11}^{7}.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_{9}^{7} + \mathrm{C}_{10}^{7} + \mathrm{C}_{11}^{7}}{\mathrm{C}_{15}^{8}} = \dfrac{5949}{6435}$. □

Bài 8. Một đoàn tàu có 4 toa chở khách với mỗi toa còn ít nhất 5 chỗ trống. Trên sân ga có 5 hành khách chuẩn bị lên tàu. Tính xác suất để trong 5 hành khách lên tàu đó có một toa có 3 khách lên, hai toa có một khách lên và một toa không có khách nào lên tàu. **ĐS:** 15/64

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 4^5$.
Gọi A là biến cố "trong 5 hành khách lên tàu có một toa có 3 khách lên, hai toa có một khách lên và một toa không có khách nào".
Số cách chọn ba khách để xếp lên cùng một toa là: $\mathrm{C}_5^3 = 10$.
Số cách chọn ra một toa tàu để xếp ba người này là: $\mathrm{C}_4^1 = 4$.
Số cách xếp hai người (mỗi người một toa) vào ba toa còn lại là: $\mathrm{A}_3^2 = 6$.
Suy ra $n(A) = 10 \cdot 4 \cdot 6 = 240$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{240}{4^5} = \dfrac{15}{64}$. □

Bài 9. Một dãy phố có 5 cửa hàng bán quần áo. Có 5 người khách đến mua quần áo, mỗi người khách vào ngẫu nhiên một trong năm cửa hàng đó. Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào. **ĐS:** 181/625

Lời giải.
Mỗi người khách có 5 cách chọn một cửa hàng để vào.
Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 5^5 = 3125$.
Gọi A là biến cố: "có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào ".

TH1: Một cửa hàng có 3 khách, một cửa hàng có 2 khách, ba của hàng còn lại không có khách nào.
Trường hợp này có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_2^2 = 200$ khả năng xảy ra.

TH2: Một cửa hàng có 3 khách, hai cửa hàng có 1 khách, ba cửa hàng còn lại không có khách nào.
Trường hợp này có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{P}_2 = 600$ khả năng xảy ra.

TH3: Một cửa hàng có 4 khách, một cửa hàng có 1 khách, ba cửa hàng còn lại không có khách nào.
Trường hợp này có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^4 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 100$ khả năng xảy ra.

TH4: Một cửa hàng có 5 khách, các cửa hàng khác không có khách nào.
Trường hợp này có $\mathrm{C}_5^1 = 5$ khả năng xảy ra.

Suy ra $n(A) = 200 + 600 + 100 + 5 = 905$. Vậy xác suất cần tìm là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{905}{3125} = \dfrac{181}{625}$. □

Bài 10. Một khóa số với mật khẩu là 3 số tăng dần từ 0 đến 9 có tổng bằng 10. Một người không nhớ mật khẩu mà chỉ nhớ tăng dần nên bấm bừa 3 số bất kì tăng dần. Khóa sẽ bị block nếu quá 3 lần bấm sai. Tính xác suất để người này mở được khóa biết rằng người này chỉ nhớ được kết quả bấm của mình ở lần kế trước (trí nhớ ngắn hạn) để tránh kết quả đó cho lần sau.

ĐS: 8/120 + 112/120·8/119+112/120·111/119·8/118

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.
có 8 dãy mã đúng để mở khóa gồm; $\{0;1;9\}$, $\{0;2;8\}$, $\{0;3;7\}$, $\{0;4;6\}$, $\{1;2;7\}$, $\{1;3;6\}$, $\{1;4;5\}$ và $\{2;3;5\}$.
Gọi A là biến cố "người này mở được khóa". Ta có ba trường hợp:

TH1: Khóa được mở ở lần thứ nhất. Xác suất của biến cố này là $\frac{8}{120}$.

TH2: Khóa được mở ở lần thứ hai. Xác suất của biến cố này là $\frac{112}{120} \cdot \frac{8}{119}$.

TH3: Khóa được mở ở lần thứ ba. Xác suất của biến cố này là $\frac{112}{120} \cdot \frac{111}{119} \cdot \frac{8}{118}$.

Vậy xác xuất $P(A) = \frac{8}{120} + \frac{112}{120} \cdot \frac{8}{119} + \frac{112}{120} \cdot \frac{111}{119} \cdot \frac{8}{118}$ □

Dạng 6. Các bài toán đếm số phương án, tính xác suất liên quan đến đa giác

Bài 1. Cho đa giác đều (*H*) có *n* đỉnh ($n \in N,\ n > 4$). Tìm *n* biết rằng số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (*H*) và không có cạnh nào là cạnh của (*H*) gấp 5 lần số tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (*H*) và có đúng một cạnh là cạnh của (*H*). **ĐS:** $n = 35$

Lời giải.
Số tam giác có 3 đỉnh thuộc (H) là C_n^3. Số tam giác có 3 đỉnh thuộc (H) và có hai cạnh là cạnh của (H) là n. Số tam giác có 3 đỉnh thuộc (H) và có đúng một cạnh là cạnh của (H) là $n(n-4)$. Suy ra số các tam giác có ba đỉnh thuộc (H) và không có cạnh nào là cạnh của (H) là $C_n^3 - n - n(n-4)$.
Theo giả thiết ta có $C_n^3 - n - n(n-4) = 5n(n-4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 35 \\ n = 4 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$ □

Bài 2. Cho đa giác lồi 14 đỉnh. Gọi *X* là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong *X* một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho. **ĐS:** 15/26

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{14}^3 = 364$.
Gọi A là biến cố: "Tam giác được chọn trong X không có cạnh nào là cạnh của đa giác ".
Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Tam giác được chọn trong X có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác"

TH1: Nếu tam giác được chọn có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác thì có 14 tam giác thỏa mãn.

TH2: Nếu tam giác được chọn có đúng một cạnh là cạnh của đa giác thì có $14 \cdot 10 = 140$ tam giác thỏa mãn.

Suy ra $n(\overline{A}) = 14 + 140 = 154$. Vậy số phần tử của biến cố A là: $n(A) = n(\Omega) - n(\overline{A}) = 210$.
Suy ra $P(A) = \dfrac{210}{364} = \dfrac{15}{26}$. □

Bài 3. Cho đa giác lồi *A*1*A*2*A*3 . .. *A*10. Gọi *X* là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong *X* một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho. **ĐS:** 5/12

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.
Gọi A là biến cố: "Tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho".
Các tam giác ở tập X có ba loại: Tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác, tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác, tam giác có hai cạnh là cạnh của đa giác.
Ứng với một cạnh của đa giác thì có đúng $10 - 4$ đỉnh của đa giác tạo thành tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác nên số tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác là: $10(10 - 4) = 60$.
Có 10 tam giác có hai cạnh là cạnh của đa giác. Do đó $n(A) = 120 - 60 - 10 = 50$.
Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{50}{120} = \dfrac{5}{12}$. □

Bài 4. Cho (*H*) là đa giác đều 2*n* đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm *O* ($n \in N^*$, $n \geq 2$). Gọi *S* là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác (*H*). Chọn ngẫu nhiên một đa giác thuộc tập *S*, biết rằng xác suất chọn được một tam giác vuông trong tập *S* là 1/13. Tìm *n*. **ĐS:** *n* = 20

Lời giải.
Số phần tử của tập S là: C_{2n}^3. Nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{2n}^3$.
Gọi A là biến cố: "Chọn được tam giác vuông ". Đa giác đều $2n$ đỉnh có n đường chéo qua tâm O.
Mỗi tam giác vuông được tạo bởi hai đỉnh nằm trên cùng một đường chéo qua tâm O và một trong $2n - 2$ đỉnh còn lại.
Suy ra số tam giác vuông là $n(2n - 2)$.
Theo đề bài ta có: $P(A) = \dfrac{n(2n-2)}{C_{2n}^3} = \dfrac{1}{13} \Rightarrow n = 20$. □

Bài 5. Cho đa giác đều có 15 đỉnh. Gọi *M* là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc *M*, tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều. **ĐS:** 18/91

Lời giải.
Số phần tử của tập M là: $C_{15}^3 = 455$. Số phần tử của không gian mẫu: $C_{455}^1 = 455$.
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đều. Xét một đỉnh A bất kì của đa giác: Có 7 cặp đỉnh đối xứng với nhau qua đường thẳng OA, hay có 7 tam giác cân tại đỉnh A. Như vậy với mỗi đỉnh của đa giác có 7 tam giác nhận nó làm đỉnh của tam giác cân.
Số tam giác đều có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác là $\dfrac{15}{3} = 5$ tam giác.
Tuy nhiên, trong các tam giác cân đã xác định ở trên có cả tam giác đều, do mọi tam giác đều thì đều cân tại 3 đỉnh nên các tam giác đều được đếm ba lần.
Suy ra số tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho là: $7 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = 90$.
Vậy xác suất để chọn được một tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều từ tập M là $P = \dfrac{90}{455} = \dfrac{18}{91}$.

Bài 6. Cho đa giác đều *H* có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của hình *H*. Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật không phải là hình vuông. **ĐS:** 1/161.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{24}^4$.
Gọi A là biến cố: "4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật không phải là hình vuông".
Gọi O là tâm của đa giác đều. Vì đa giác đều có số đỉnh là chẵn, nên có 12 cặp điểm đối xứng qua O, tạo thành một đường kính, cứ lấy bất kì 2 đường kính nào chúng cũng là 2 đường chéo của một hình chữ nhật. Do đó số hình chữ nhật là C_{12}^2. Suy ra $n(A) = C_{12}^2$.
Vậy $P(A) = \dfrac{C_{12}^2}{C_{24}^4} = \dfrac{1}{161}$. □

Bài 7. Cho đa giác lồi (*H*) có 22 cạnh. Gọi *X* là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (*H*). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong *X*. Tính xác suất để chọn được một tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác (*H*) và một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (*H*). **ĐS:** 748/1195

Lời giải.
Đầu tiên ta xét các loại tam giác được tạo thành.
Số tam giác có 3 đỉnh lấy từ 3 đỉnh của H là: $C_{22}^3 = 1540$ tam giác, bao gồm 3 loại sau: Loại 1 là tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh của (H), loại 2 là tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của (H), loại 3 là tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H).
Cứ mỗi đỉnh của (H) cùng với 2 đỉnh liên tiếp (kề bên) tạo thành một tam giác loại 1 nên có 22 tam giác loại 1.

Mỗi cạnh của (H) cùng với một đỉnh trong số $22 - 4 = 18$ đỉnh còn lại (trừ hai đầu mút của cạnh đang xét và hai đỉnh kề hai bên của cạnh này) tạo thành một tam giác loại 2. Do đó có $22 \cdot 18 = 396$ tam giác loại 2.
Do đó số tam giác loại 3 là $1540 - (22 + 396) = 1122$ tam giác.
Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{1540}^2 = 1185030$.
Gọi A là biến cố "Chọn được một tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác (H) và một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H)". Suy ra $n(A) = 396 \cdot 1122 = 444312$.
Vậy $P(A) = \dfrac{444312}{1185030} = \dfrac{748}{1195}$. □

Bài 8. Một đa giác đều 24 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi *X* là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ *X* một tam giác, tính xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu. **ĐS:** 190/253

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{24}^{3} = 2024$

Gọi A là biến cố "chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu ". Tức là ba cạnh này cùng màu đỏ.

Mỗi cạnh màu xanh của đa giác cùng với một đỉnh trong $24 - 4 = 20$ đỉnh còn lại (trừ hai đầu mút của cạnh đang xét và hai đỉnh hai bên cạnh này) sẽ tạo thành một tam giác có đúng một cạnh màu xanh. Do đó có $24 \cdot 20 = 480$ tam giác loại này.

Mỗi đỉnh của đa giác cùng với hai cạnh hai bên sẽ tạo thành một tam giác có đúng 2 cạnh màu xanh. Do đó có 24 tam giác loại này.

Do đó số tam giác không có cạnh nào màu xanh là $2024 - 480 - 24 = 1520$. Do đó $n(A) = 1520$.

Vậy xác suất $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1520}{2024} = \dfrac{190}{253}$. □

Bài 9. Cho đa giác đều $2n$ đỉnh, lấy ngẫu nhiên một đường chéo của đa giác này, thì xác suất để đường chéo được chọn có độ dài lớn nhất bằng 1/9. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x} + 2\right)^n$. **ĐS:** 480

Lời giải.

Số đường chéo trong đa giác $2n$ cạnh là $\mathrm{C}_{2n}^{2} - 2n$.

Đường chéo có độ dài lớn nhất là đường chéo đi qua tâm của đa giác đều, có n đường chéo như vậy. Từ giả thiết ta có:

$$\frac{n}{\mathrm{C}_{2n}^{2} - 2n} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{n}{(2n-1)n - 2n} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{2n-3} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow n = 6.$$

Xét khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x} + 2\right)^6$ có số hạng tổng quát là: $\mathrm{C}_6^k \cdot \mathrm{C}_k^i \cdot 2^{6-k}\left(x^3\right)^{k-i} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^i = \mathrm{C}_6^k \cdot \mathrm{C}_k^i \cdot 2^{6-k} \cdot x^{3k-4i}$.

Số hạng chứa x^5 trong khai triển ứng với i, k thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 3k - 4i = 5 \\ 0 \le i \le k \le 6 \\ i, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 1 \\ k = 3. \end{cases}$

Hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot 2^3 = 480$. □

Bài 10. Có năm đoạn thẳng có độ dài 1, 3, 5, 7, 9. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng từ năm đoạn thẳng đó. Tính xác suất để ba đoạn được chọn có thể xếp thành một hình tam giác. **ĐS:** 2/5

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{C}_5^3 = 10$.

Để ba đoạn thẳng có thể xếp thành một tam giác thì có bốn cách chọn như sau: $\{3,5,7\}$; $\{3,7,9\}$, $\{5,7,9\}$, $\{3,5,9\}$.

Gọi A là biến cố: "chọn được ba đoạn thẳng có thể xếp thành một hình tam giác ". Ta có $n(A) = 4$.

Vậy xác suất $\mathrm{P}(A) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$. □

Dạng 7. Các bài toán đếm, sắp xếp liên quan đến vị trí, xếp chỗ

Bài 1 (Đề thi học sinh giỏi Bến Tre lớp 12 năm học 2017 − 2018). Trong một lớp học có $2n + 3$ học sinh gồm An, Bình, Chi cùng $2n$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến $2n + 3$, mỗi học sinh ngồi 1 ghế thì xác suất để số ghế của Bình bằng trung bình cộng số ghế An và số ghế của Chi là 12/575. Tính số học sinh của lớp. **ĐS:** 25

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là số cách sắp xếp $2n+3$ học sinh vào $2n+3$ chỗ ngồi đã được đánh số. Suy ra $n(\Omega) = (2n+3)!$.
Gọi A là biến cố "số ghế của Bình bằng trung bình cộng số ghế của An và số ghế của Chi " thì ta có:

+ Xếp Bình ở ghế số 2 hoặc ghế thứ $2n+2$ thì mỗi cách có $1 \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.

+ Xếp Bình ở ghế số 3 hoặc ghế thứ $2n+1$ thì mỗi cách có $2 \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.

+ Xếp Bình ở ghế số 4 hoặc ghế thứ $2n$ thì mỗi cách có $3 \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.
  ......

+ Xếp Bình ở ghế số $n+1$ hoặc ghế thứ $n+3$ thì mỗi cách có $n \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.

+ Xếp Bình ở ghế số $n+2$ mỗi cách có $(n+1) \cdot 2!$ cách xếp An và Chi.

Suy ra $2(1+2+3+\cdots+n) \cdot 2! + (n+1) \cdot 2! = (n+1)^2 \cdot 2!$ cách xếp để số ghế của Bình bằng trung bình cộng số ghế của An và Chi.
Với mỗi cách xếp trên có $(2n)!$ cách xếp các học sinh còn lại.
Vậy ta có $n(A) = 2(n+1)^2 \cdot (2n)!$.
Theo giả thiết ta có phương trình

$$\frac{2(n+1)^2 \cdot (2n)!}{(2n+3)!} = \frac{12}{575} \Leftrightarrow 48n^2 - 479n - 539 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 11 \\ n = -\dfrac{49}{48} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Suy ra số học sinh là $2 \cdot 11 + 3 = 25$. □

Bài 2 (Đề thi học sinh giỏi Thanh Hóa lớp 11 năm học 2017 − 2018). Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 11A và 3 học sinh lớp 11B và 5 học sinh của lớp 11C thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có học sinh nào của cùng một lớp đứng cạnh nhau. **ĐS:** 1/26

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$.
Gọi D là biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Xếp 5 học sinh lớp $11C$ vào hàng có $5!$ cách. (Sau khi xếp sẽ có 6 vị trí trống (4 giữa và 2 ở hai đầu), chẳng hạn $(1C2C3C4C5C6)$.

+ Nếu xếp xen kẽ 5 học sinh lớp A và B từ phía tận cùng bên trái (12345) có $5!$ cách xếp, tương tự xếp từ phía bên phải (23456) cũng sẽ có $5!$ cách xếp.

Suy ra $n(D) = 5! \cdot 2 \cdot 5! = 28800$. Vậy xác suất của biến cố D là

$$\mathrm{P}(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{28800}{10!} = \frac{1}{126}.$$

Bài 3 (Đề thi học sinh giỏi Bắc G iang lớp 12 năm học 2016 − 2017). Một nhóm học sinh gồm 9 bạn nam, trong đó có bạn Hải và 4 bạn nữ trong đó có bạn Minh xếp vào 13 cái ghế trên một hàng ngang. Tính xác suất để giữa hai bạn nữ có đúng ba bạn nam, đồng thời bạn Hải và bạn Minh nêu ở trên không ngồi cạnh nhau. **ĐS:** 1/858

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 13!$.
Đánh số ghế trên hàng ngang theo thứ tự từ 1 đến 13. Các bạn nữa phải ngồi vào các ghế số 1, 5, 9, 13.
Gọi A là biến cố "Giữa hai bạn nữ ngồi gần nhau có đúng ba bạn nam, đồng thời bạn Hải và bạn Minh không ngồi cạnh nhau ".
Xét các trường hợp sau:

* Bạn Minh ngồi ghế số 1.
  - Số cách xếp ba bạn nữ còn lại là 3!.
  - Có 8 cách xếp vị trí của bạn Hải.
  - Có 8! cách xếp tám bạn nam vào các vị trí còn lại.

  Suy ra số cách sắp xếp là $8 \cdot 3! \cdot 8!$.

* Ban Minh ngồi ghế số 13 cũng có số cách sắp xếp là $8 \cdot 3! \cdot 8!$.

* Bạn Minh ngồi ghế số 5 (tương tự bạn Minh ngồi ghế số 9).
  - Xếp 3 bạn nữ còn lại có 3!.
  - Có 7 cách xếp vị trí của Hải.
  - Có 8! cách xếp 8 bạn nam còn lại.

  Do đó số cách sắp xếp là $7 \cdot 3! \cdot 8!$.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 2 \cdot 3! \cdot 8 \cdot 8! + 2 \cdot 3! \cdot 7 \cdot 8! = 7257600$.
Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{7257600}{13!} = \dfrac{1}{858}$. □

Bài 4 (Đề thi học sinh giỏi Thành phố Hồ Chí Minh lớp 12 năm học 2017 − 2018). Trong một phòng học, có 36 cái bàn rời nhau được đánh số từ 1 đến 36, mỗi bàn dành cho 1 học sinh. Các bàn được xếp thành một hình vuông có kích thước 6 × 6. Cô giáo xếp tùy ý 36 học sinh của lớp trong đó có hai em là Hạnh và Phúc vào các bàn. Tính xác suất để Hạnh và Phúc ngồi ở hai bàn xếp cạnh nhau theo hàng dọc hoặc hàng ngang. **ĐS:** 2/21

Lời giải.
Số cách sắp xếp 36 học sinh vào 36 cái bàn của lớp cũng chính là số phần tử của không gian mẫu nên $n(\Omega) = 36!$.
Gọi A là biến cố "Hạnh và Phúc ngồi ở hai bàn xếp cạnh nhau theo hàng dọc hoặc hàng ngang ".
* Nếu Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau theo hàng ngang.

+ Có 6 cách chọn dãy bàn nằm ngang để hai bạn ngồi cạnh nhau.

+ Coi hai bạn Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau là 1 nhóm X nên có 2 nhóm X khác nhau và có 5 cách xếp chỗ cho nhóm X.

+ Có 34! cách xếp chỗ cho 34 học sinh còn lại vào 34 bàn.

Vậy trong trường hợp này có $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 34! = 60 \cdot 34!$ cách xếp.
* Nếu Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau theo hàng dọc. Tương tự ta có $60 \cdot 34!$ cách xếp.
Số phần tử của A là $n(A) = 120 \cdot 34!$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120 \cdot 34!}{36!} = \dfrac{2}{21}$. □

Bài 5 (Đề thi học sinh giỏi Chu Văn An lớp 11 năm học 2015 − 2016). Trong một cuộc thi chọn học sinh giỏi toán khối 11 trường THPT Chu Văn An, có 52 học sinh đăng ký dự thi trong đó có một em tên Thành và một em tên Đạt. Dự kiến ban tổ chức sắp xếp làm 3 phòng thi (phòng

1 và phòng 2 có 18 thí sinh, phòng 3 có 16 thí sinh). Nếu phòng thi được sắp xếp một cách ngẫu nhiên, hãy tính xác suất để Thành và Đạt ngồi chung một phòng. **ĐS:** 71/221

Lời giải.
Không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \mathrm{C}_{34}^{18}$.
Nếu Thành và Đạt ngồi chung phòng 1 hoặc phòng 2 thì $n(A_1) = 2 \cdot \mathrm{C}_{50}^{16} \cdot \mathrm{C}_{34}^{18}$.
Nếu Thành và Đạt ngồi chung phòng 3 thì $n(A_2) = \mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \mathrm{C}_{32}^{18}$.
Gọi A là biến cố "Thành và Đạt ngồi chung phòng ".

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2 \cdot \mathrm{C}_{50}^{16} \cdot \mathrm{C}_{34}^{18} + \mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \mathrm{C}_{32}^{18}}{\mathrm{C}_{50}^{18} \cdot \mathrm{C}_{34}^{18}} = \frac{71}{221}.$$

Bài 6 (Đề thi học sinh giỏi Chuyên Bắc Ninh lớp 11). Có 6 viên bi gồm 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 viên bi thành một hàng sao cho không có hai viên bi cùng màu xếp cạnh nhau? **ĐS:** 30

Lời giải.
Tổng số cách xếp 6 viên bi thành một hàng là $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 = \dfrac{6!}{2^3} = 90$ (cách).
Kí hiệu: A_1 là tập hợp 2 viên bi xanh cạnh nhau; A_2 là tập hợp hai viên bi đỏ cạnh nhau; A_3 là tập hợp hai viên bi vàng cạnh nhau.
Số cách sắp xếp không hợp lệ (có ít nhất 2 viên bi cùng màu cạnh nhau) là

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - (n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3)) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Với $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_3^2 = \dfrac{5!}{2^2} = 30$.
$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_3) = n(A_2 \cap A_3) = \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 12$ và $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3! = 6$.
Suy ra $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 90 - 3 \cdot 12 + 6 = 60$.
Vậy số cách sắp xếp hợp lí là $n(A_1 A_2 A_3) = 90 - 60 = 30$. □

Bài 7 (Đề thi học sinh giỏi Triệu Sơn lớp 11 năm học 2017 − 2018). Từ 2012 số nguyên dương đầu tiên lấy ra 6 số xếp thành dãy số có dạng $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Hỏi có bao nhiêu dãy số có dạng trên biết u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. **ĐS:** $2012.1005.A^3{}_{2009}$

Lời giải.
u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $u_1 + u_3 = 2u_2$. Do đó u_1, u_3 hoặc cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Số tất cả các cấp số cộng theo thứ tự đó chính là số các cặp số (có thứ tự) (u_1, u_3).
Chọn u_1 có 2012 cách chọn, chọn u_3 chỉ có 1005 cách chọn số cùng chẵn hoặc cùng lẻ với u_1.
Khi đó $u_2 = \dfrac{u_1 + u_3}{2}$ có duy nhất một cách chọn.
Còn lại 2009 số, ta chọn ra 3 số sắp xếp có thứ tự để hoàn tất việc chọn.
Vì vậy số kết quả là $2012 \cdot 1005 \cdot \mathrm{A}_{2009}^3$. □

Bài 8 (Đề thi giữa kì 2 Yên Phong 1 - Bắc Ninh lớp 12 năm học 2017 − 2018). Có 6 xe xếp cạnh nhau thành hàng ngang gồm: 1 xe màu xanh, 2 xe màu vàng và 3 xe màu đỏ. Tính xác suất để hai xe cùng màu không xếp cạnh nhau. **ĐS:** 1/6

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6! = 720$.

Gọi A là biến cố hai xe cùng màu không xếp cạnh nhau. Ta tính $n(A)$.

Xe màu đỏ nhiều nhất nên ta sắp trước để tránh trường hợp chúng cạnh nhau, ta xếp như sau:

+ TH1:

Đ		Đ		Đ	

Có 3! cách sắp xếp các xe màu đỏ, thỏa mái xếp các xe còn lại nên có 3! cách sắp xếp các xe còn lại. Vậy trường hợp này có $3! \cdot 3! = 36$ cách.

+ TH2:

	Đ		Đ		Đ

Có 3! cách sắp xếp các xe màu đỏ, thỏa mái xếp các xe còn lại nên có 3! cách sắp xếp các xe còn lại. Vậy trường hợp này có $3! \cdot 3! = 36$ cách.

+ TH3:

Đ			Đ		Đ

Có 3! cách sắp xếp các xe màu đỏ, có $2 \cdot 2 = 4$ cách sắp xếp 2 xe màu xanh và vàng vào hai ô trống liền kề và ô còn lại xếp xe màu vàng còn lại. Vậy trường hợp này có $3! \cdot 4 = 24$ cách.

+ TH4:

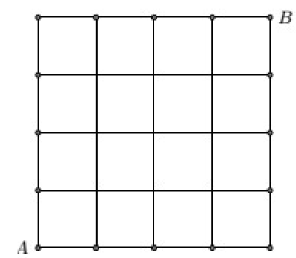
Đ		Đ			Đ

Có 3! cách sắp xếp các xe màu đỏ, có $2 \cdot 2 = 4$ cách sắp xếp 2 xe màu xanh và vàng vào hai ô trống liền kề và ô còn lại xếp xe màu vàng còn lại. Vậy trường hợp này có $3! \cdot 4 = 24$ cách.

Vậy tổng cộng ta có $n(A) = 36 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 120$.

Do đó xác suất của biến cố A là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120}{720} = \dfrac{1}{6}$. □

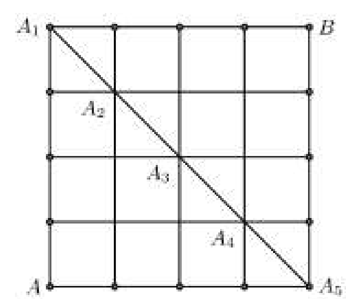
Bài 9 (Đề thi học sinh giỏi Phú Thọ lớp 12 năm học 2017 − 2018).



Cho một lưới ô vuông gồm 16 ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông nhỏ có kích thước 1 × 1 (mét) như hình vẽ bên. Con kiến thứ nhất ở vị trí *A* muốn di chuyển lên vị trí *B*, con kiến thứ hai ở vị trí *B* muốn di chuyển xuống vị trí *A*. Biết rằng con kiến thứ nhất chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên phải hoặc lên trên, con kiến thứ hai chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên trái hoặc xuống dưới (theo cạnh của các hình vuông). Hai con kiến xuất phát cùng một thời điểm và có cùng vận tốc di chuyển là 1 mét/phút. Tính xác suất để hai con kiến gặp nhau trên đường đi.

ĐS: 35/128

Lời giải.



Nhận xét: Để di chuyển đến đích, mỗi con kiến phải có hành trình 8m. Vì hai con kiến xuất phát cùng thời điểm và cùng vận tốc di chuyển nên chúng chỉ có thể gặp nhau khi mỗi con kiến đều di chuyển được 4m (sau 4 phút). Do vậy chúng chỉ có thể gặp nhau tại các giao điểm trên đường chéo chính chạy từ góc trên bên trái đến góc dưới bên phải (A_1A_5).

Xác suất để sau 4 phút, con kiến thứ nhất đi đến vị trí A_1 là $\mathrm{P}_1(A_1) = \dfrac{\mathrm{C}_4^0}{2^4}$;

Xác suất để sau 4 phút, con kiến thứ hai đi đến vị trí A_1 là $\mathrm{P}_2(A_1) = \dfrac{\mathrm{C}_4^0}{2^4}$.

Xác suất để hai con kiến gặp nhau tại vị trí A_1 là

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}_1(A_1) \cdot \mathrm{P}_2(A_1) = \frac{\left(\mathrm{C}_4^0\right)^2}{256}.$$

Tương tự xác suất để hai con kiến gặp nhau tại các vị trí A_2, A_3, A_4, A_5 là

$$\mathrm{P}(A_2) = \frac{\left(\mathrm{C}_4^1\right)^2}{256}, \mathrm{P}(A_3) = \frac{\left(\mathrm{C}_4^2\right)^2}{256}, \mathrm{P}(A_4) = \frac{\left(\mathrm{C}_4^3\right)^2}{256}, \mathrm{P}(A_5) = \frac{\left(\mathrm{C}_4^4\right)^2}{256}.$$

Vậy xác suất hai con kiến gặp nhau là

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) + P(A_5) = \frac{\left(\mathrm{C}_4^0\right)^2 + \left(\mathrm{C}_4^1\right)^2 + \left(\mathrm{C}_4^2\right)^2 + \left(\mathrm{C}_4^3\right)^2 + \left(\mathrm{C}_4^4\right)^2}{256} = \frac{35}{128}.$$

Bài 10 (Đề thi học sinh giỏi Hà Tĩnh lớp 11 năm học 2016 − 2017). Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp. **ĐS:** 397/1728

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 6^3 \cdot 2^3 = 1728$.

Số trường hợp xảy ra để cả 3 lượt tung đó đều thu được súc sắc mặt 1 chấm và đồng xu mặt sấp là 1.

Số trường hợp xảy ra để trong 3 lượt tung đó có đúng 2 lượt được súc sắc mặt 1 chấm và đồng xu sấp là $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 11 = 33$.

Số trường hợp xảy ra để trong 3 lượt tung đó có đúng 1 lượt được súc sắc mặt 1 chấm và đồng xu mặt sấp là $3 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 11 = 363$.

Vậy xác suất cần tìm là: $\mathrm{P} = \dfrac{1 + 33 + 363}{1728} = \dfrac{397}{1728}$. □