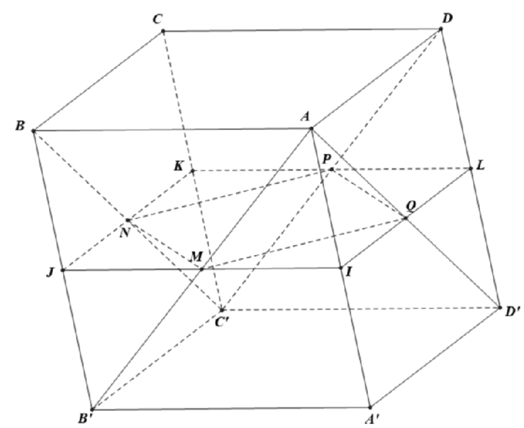
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. 27. **B.** 30. **C.** 18. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B



Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 9.8 = 72$.

Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm các cạnh AA', BB', CC', DD' suy ra $V_{ABCD.IJKL} = 36$.

Do hình chóp $A.MIQ$ đồng dạng với hình chóp $A.B'A'D'$ theo tỉ số $\dfrac{1}{2}$ nên

$V_{A.MQI} = \dfrac{1}{8}V_{A.B'A'D'} = \dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{3}.8.\dfrac{9}{2} = \dfrac{3}{2}$.

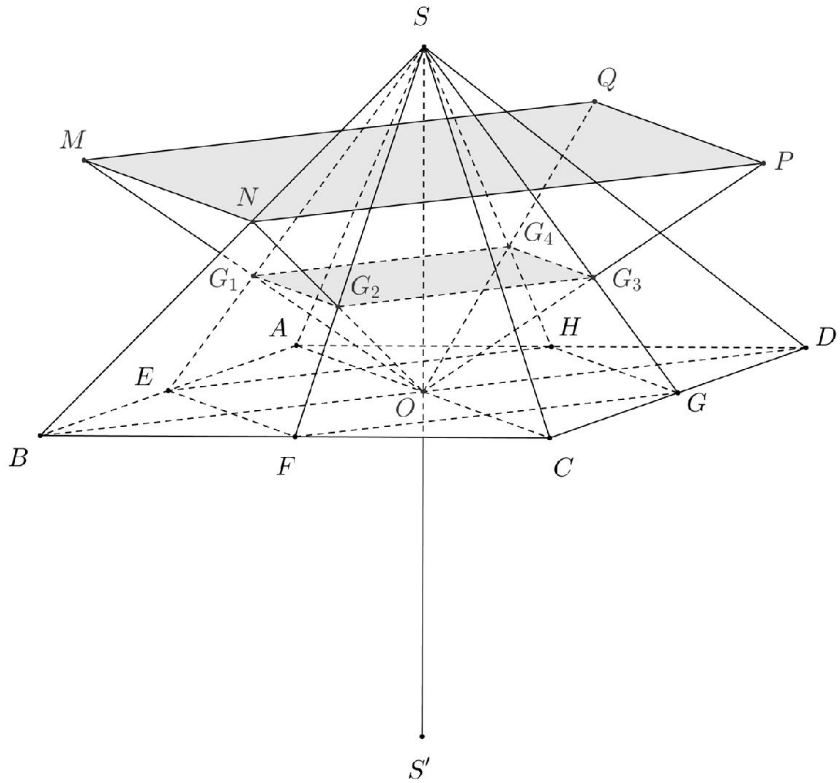
$V_{ABCD.MNPQ} = V_{ABCD.IJKL} - 4V_{A.MIQ} = 36 - 4.\dfrac{3}{2} = 30$.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. **B.** $\dfrac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SDA$.

E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Ta có $S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4.\frac{4}{9}S_{EFGH} = 4.\frac{4}{9}.\frac{1}{2}EG.HF = \frac{8a^2}{9}$.

$$\begin{aligned} d\left(S',(MNPQ)\right) &= d\left(S',(ABCD)\right) + d\left(O,(MNPQ)\right) \\ &= d\left(S,(ABCD)\right) + 2d\left(O,(G_1G_2G_3G_4)\right) \\ &= d\left(S,(ABCD)\right) + \frac{2}{3}d\left(S,(ABCD)\right) \\ &= \frac{5}{3}d\left(S,(ABCD)\right) = \frac{5a\sqrt{14}}{6} \end{aligned}$$

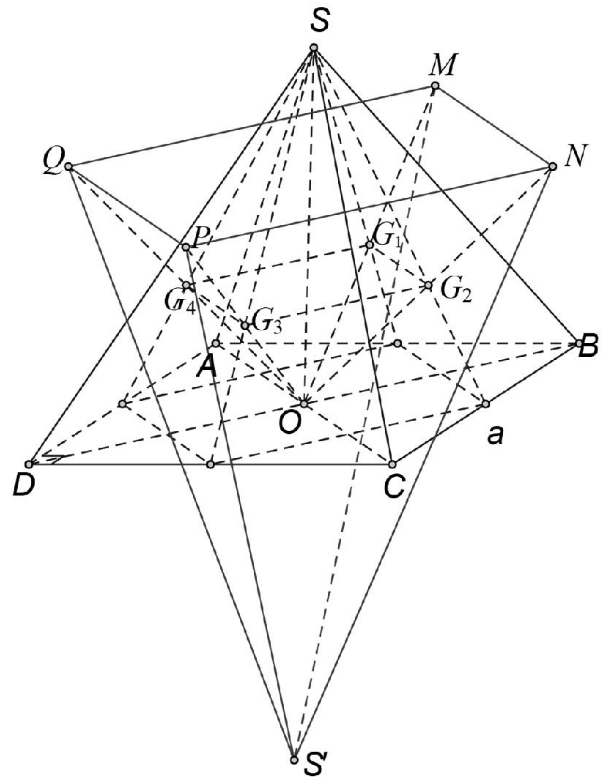
Vậy $V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5a\sqrt{14}}{6}\cdot\frac{8a^2}{9} = \frac{20a^3\sqrt{14}}{81}$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. **B.** $\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. **C.** $\frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Ta gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SBC, SCD, SDA thì

$$d\left(S',\left(MNPQ\right)\right)=\frac{5}{2}d\left(O,\left(MNPQ\right)\right)\Rightarrow V_{S'.MNPQ}=\frac{5}{2}V_{O.MNPQ}=\frac{5}{2}.8V_{O.G_1G_2G_3G_4}$$

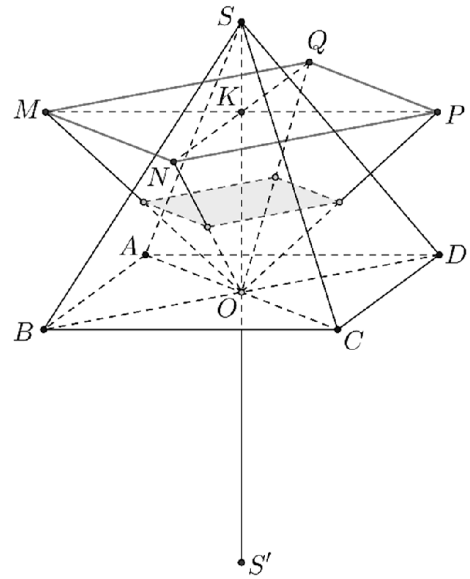
$$=10V_{S.G_1G_2G_3G_4}=10.\frac{2}{27}V_{S.ABCD}=\frac{20}{27}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{10}}{2}.a^2=\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}.$$

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\sqrt{2}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ bằng.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. **B.** $\frac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. **D.** $\frac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $S'K = S'O + OK = SO + \frac{2}{3}SO = \frac{5a\sqrt{6}}{6}$.

$,S_{MNPQ} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{8}{9}a^2$.

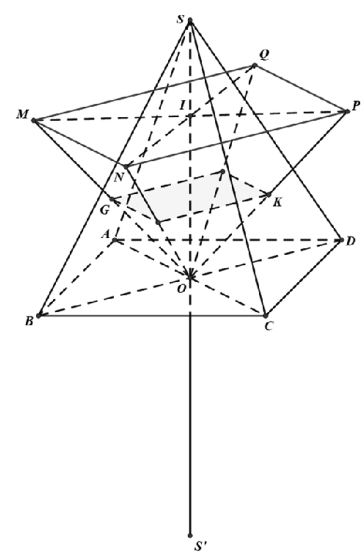
Vậy: $V_{S'.MNPQ} = \frac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'MNPQ$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. **B.** $\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\frac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. **D.** $\frac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và tam giác SCD.

Suy ra $MP = 2GK = \frac{4}{3}a$, tương tự $NQ = \frac{4}{3}a$.

$\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{8}{9}a^2$.

Ta có $(MNPQ)//(ABCD)$

$d(M,(ABCD))=2d(G,(ABCD))=\frac{2}{3}SO=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

$\Rightarrow d((MNPQ),(ABCD))=\frac{a\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow d(S',(MNPQ))=S'O+\frac{a\sqrt{2}}{3}=\frac{5a\sqrt{2}}{6}$

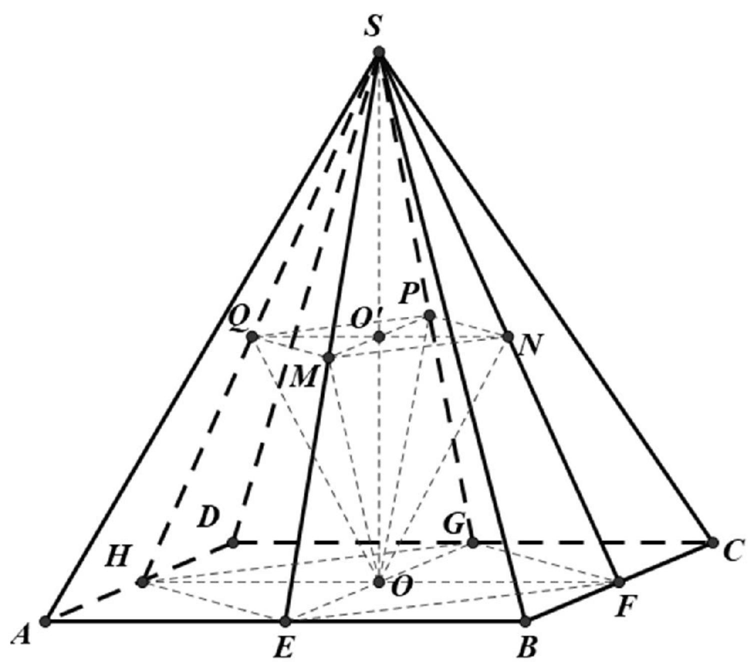
$\Rightarrow V_{S'MNPQ}=\frac{1}{3}.\frac{5a\sqrt{2}}{6}.\frac{8a^2}{9}=\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$.

Câu 6. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{4a^3}{3}$. **B.** $\frac{64a^3}{81}$. **C.** $\frac{128a^3}{81}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD và DA. Gọi M,N,P,Q lần lượt hình chiếu vuông góc của O lên các đường thẳng SE,SF,SG,SH ta suy ra M,N,P,Q lần lượt hình chiếu vuông góc của O mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD)$ và (SDA).

Ta có $EFGH$ là hình vuông và $S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ suy ra $V_{S.EFGH}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Các độ dài $SO=\sqrt{SA^2-\frac{1}{4}AC^2}=\sqrt{(2a\sqrt{3})^2-\frac{1}{4}(4a\sqrt{2})^2}=2a$ và $SE=\sqrt{SO^2+OE^2}=2a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SOE ta có $\frac{SM}{SE}=\frac{SO^2}{SE^2}=\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{SN}{SF}=\frac{SP}{SG}=\frac{SQ}{SH}=\frac{1}{2}$.

Xét hai hình chóp $S.EFGH$ và $O.MNPQ$ ta có hai đường cao OO' và SO tương ứng tỷ lệ $\dfrac{OO'}{SO}=\dfrac{1}{2}$, đồng thời diện tích đáy $\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{EFGH}}=\left(\dfrac{MN}{EF}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

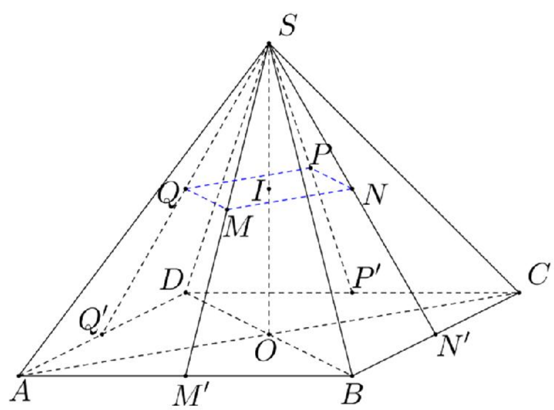
Do vậy $\dfrac{V_{O.MNPQ}}{V_{S.EFGH}}=\dfrac{1}{8}$ hay $V_{O.MNPQ}=\dfrac{1}{8}V_{S.EFGH}=\dfrac{1}{16}V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{16}.\dfrac{1}{3}.2a.(4a)^2=\dfrac{2}{3}a^3$.

Câu 7. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{48}$. **B.** $\dfrac{2a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{a^3}{96}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M',N',P',Q' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA.

Ta có $AB\perp OM'$ và $AB\perp SO$ nên $AB\perp(SOM')$.

Suy ra $(SAB)\perp(SOM')$ theo giao tuyến SM'.

Theo giả thiết ta có $OM\perp(SAB)$ nên $OM\perp SM'$, do đó M là hình chiếu vuông góc của O trên SM'.

Tương tự như vậy: N,P,Q là hình chiếu vuông góc của O lần lượt trên SN',SP',SQ'.

Ta có $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{2a^2}{4}}=\dfrac{a}{2}=OM'$.

Suy ra tam giác SOM' vuông cân tại O nên M là trung điểm của SM'.

Từ đó dễ chứng minh được $MNPQ$ là hình vuông có tâm I thuộc SO và nằm trong mặt phẳng song song với $(ABCD)$, với I là trung điểm của SO.

Suy ra $OI=\dfrac{1}{2}OS=\dfrac{a}{4}$.

Do đó $MN=\dfrac{1}{2}M'N'=\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.

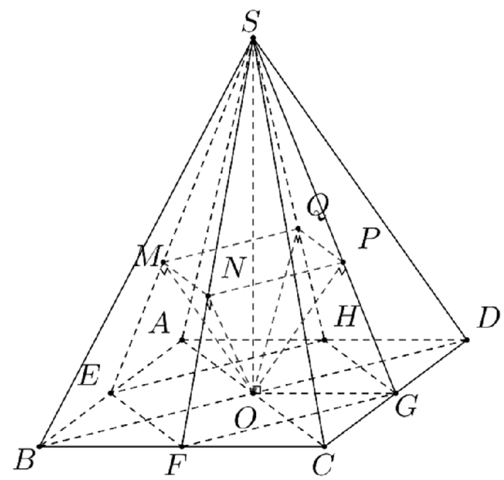
Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng $\dfrac{1}{3}S_{MNPQ}.OI=\dfrac{1}{3}.MN^2.OI=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2}{8}.\dfrac{a}{4}=\dfrac{a^3}{96}$.

Câu 8. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SAD). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{9a^3}{16}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{9a^3}{32}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm của SM với AB, SN với BC, SP với CD, SQ với DA thì E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA thì

Ta có $\frac{SP}{SG} = \frac{SP.SG}{SG^2} = \frac{SO^2}{SG^2} = \frac{\frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow P$ là trung điểm SG.

Chứng minh tương tự ta cũng có M, N, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, DA.

Khi đó $\mathrm{d}(O,(MNPQ)) = \frac{1}{2}SO = \frac{3a}{4}$.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{4}S_{EFGH} = \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{9a^2}{8}$.

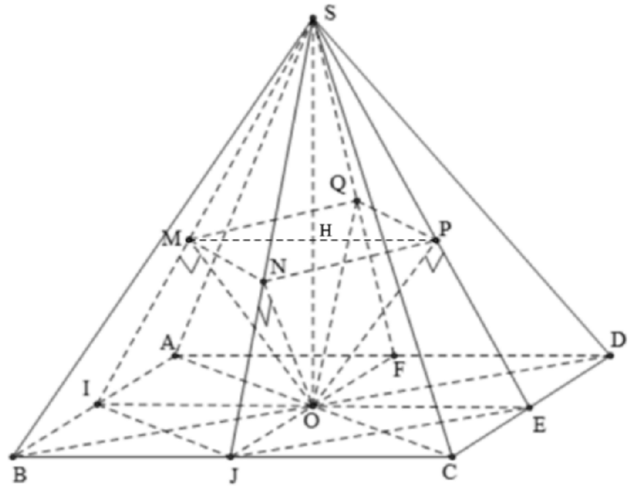
Vậy $V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{9a^2}{8} = \frac{9a^3}{32}$.

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng:

A. $\frac{8a^3}{81}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{16a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I, J, E và F lần lượt là trung điểm AB, BC, CD và DA.

ΔSIA vuông tại I $\Rightarrow SI=\sqrt{SA^2-AI^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}.$

ΔSOI vuông tại O $\Rightarrow SO=\sqrt{SI^2-OI^2}=\sqrt{2a^2-a^2}=a.$

$\Rightarrow \Delta SOI$ vuông cân tại O.

$\Rightarrow$ M là trung điểm SI.

MN là đường trung bình $\Delta SIJ \Rightarrow MN=\frac{1}{2}IJ=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}AC=\frac{1}{4}2a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$S_{MNPQ}=MN^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}.$

Gọi $H=MP\cap SO\Rightarrow H$ là trung điểm SO.

$\Rightarrow d\left(O,\left(MNPQ\right)\right)=SH=\frac{1}{2}SO=\frac{a}{2}.$

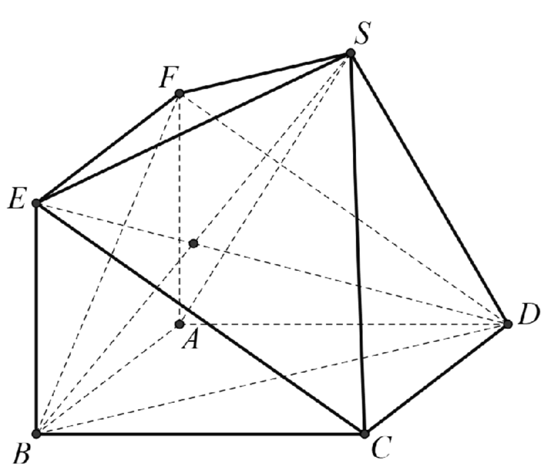
$V_{O.MNPQ}=\frac{1}{3}SH.S_{MNPQ}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{12}.$

Câu 10. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{11}{12}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Lời giải

Chọn D



Ta có:ADF.BCE là hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông cân

Dựa vào hình vẽ ta có:

$V_{ABCDSEF} = V_{ADF.BCE} + V_{S.CDFE} = V_{ADF.BCE} + V_{B.CDFE} = 2V_{ADF.BCE} - V_{BADE}$

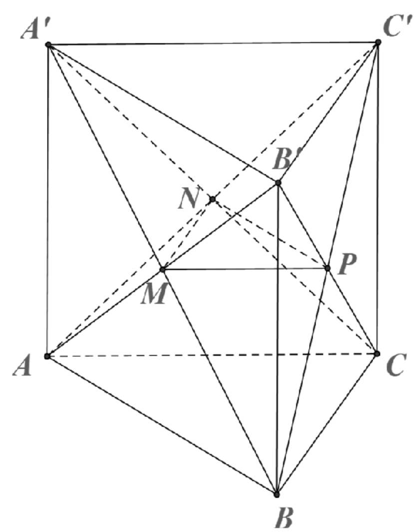
$V_{ADF.BCE} = AB.S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}; V_{BADE} = \frac{1}{3}AD.S_{\Delta ABE} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{ABCDSEF} = 2.\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Câu 11. **(Mã đề 104 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M,N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $8\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = 4.\frac{4^2.\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P là V_1.

Ta có: $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC}$.

Dễ thấy $V_{A'ABC} = \frac{1}{3}V$ và $V_{AMNCB} = \frac{3}{4}V_{A'ABC}$ nên $V_{AMNCB} = \frac{1}{4}V$.

$V_{BA'B'C'} = \frac{1}{3}V$ và $V_{BMNP} = \frac{1}{8}V_{BA'B'C'}$ nên $V_{BMNP} = \frac{1}{24}V$.

$V_{A'BCB'} = V_{A'B'CC'} = \frac{1}{3}V$ và $V_{BNPC} = \frac{1}{4}V_{BA'B'C}$ nên $V_{BNPC} = \frac{1}{12}V$.

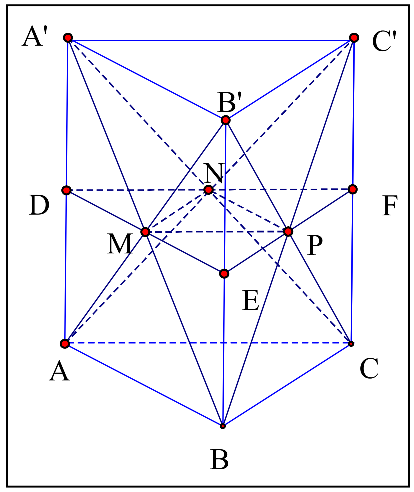
Vậy $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC} = \frac{3}{8}V = 6\sqrt{3}$.

Câu 12. **(Mã 103 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi DEF là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Dễ chứng minh được $(DEF)//(ABC)$ và D,E,F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA', BB', CC' suy ra $V_{ABC.DEF}=\frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}=12\sqrt{3}$.

Ta có $V_{ABCPNM}=V_{ABC.DEF}-V_{ADMN}-V_{BMPE}-V_{CPMF}$.

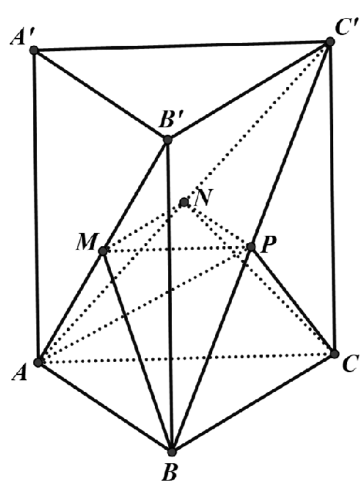
Mặt khác $V_{ADMN}=V_{BMPE}=V_{CPMF}=\frac{1}{12}V_{ABC.DEF}\Rightarrow V_{ABCPNM}=\frac{3}{4}V_{ABC.DEF}=9\sqrt{3}$.

Câu 13. **(Mã 102 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M,N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $V_{ABC.A'B'C'}=8.\frac{\sqrt{3}}{4}.4^2=32\sqrt{3}$; $V_{C'.ABC}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{A.BC'B'}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

Khối đa diện cần tìm $V=V_{C.ABPN}+V_{P.AMN}+V_{P.ABM}$

Ta có $V_{C.ABPN}=\frac{3}{4}V_{C'.ABC}=\frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}$

Ta có $V_{PAMN}=\frac{1}{8}V_{ABC'B'}=\frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$

Ta có $V_{PABM}=\frac{1}{4}V_{ABC'B'}=\frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}$

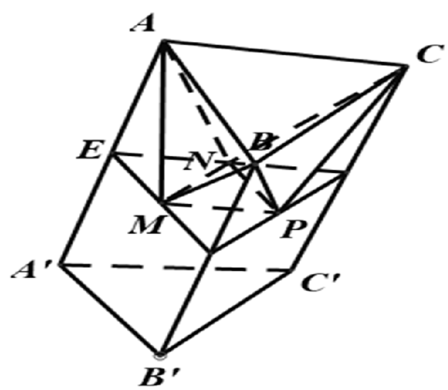
Vậy thể tích khối cần tìm $V=\frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}+\frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}+\frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'}=12\sqrt{3}$.

Câu 14. **(Mã đề 101 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $30\sqrt{3}$. **B.** $36\sqrt{3}$. **C.** $27\sqrt{3}$. **D.** $21\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Vì ΔABC đều có độ dài cạnh bằng 6 nên $S_{\Delta ABC}=6^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$.

Thể tích lặng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=h.S_{\Delta ABC}=8.9\sqrt{3}=72\sqrt{3}$.

Gọi E là trung điểm của cạnh AA'.

Thể tích khối chóp $A.EMN$ là $V_{A.EMN}=\frac{1}{3}d\left(A,(EMN)\right).S_{\Delta EMN}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}h.\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{24}V$.

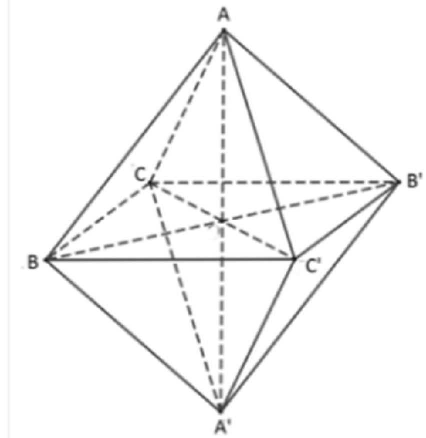
Thể tích khối đa diện $ABCMNP$ là:

$V_{ABCMNP}=\frac{1}{2}V-3V_{A.EMN}=\frac{1}{2}V-3.\frac{1}{24}V=\frac{3}{8}V=27\sqrt{3}$.

Câu 15. **(Chuyên Hạ Long -2019)** thể tích của bát diện đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ là.

a. $6a^3$. **B.** $\sqrt{6}a^3$. **C.** $\frac{4}{3}a^3$. **D.** a^3.

Lời giải



Ta có khối bát diện đều cạnh $a\sqrt{3}$ được tạo từ 2 khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$.

Chiều cao của khối chóp là: $h=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối chóp: $V_{chop}=\frac{1}{3}\left(a\sqrt{3}\right)^2.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ (đvtt).

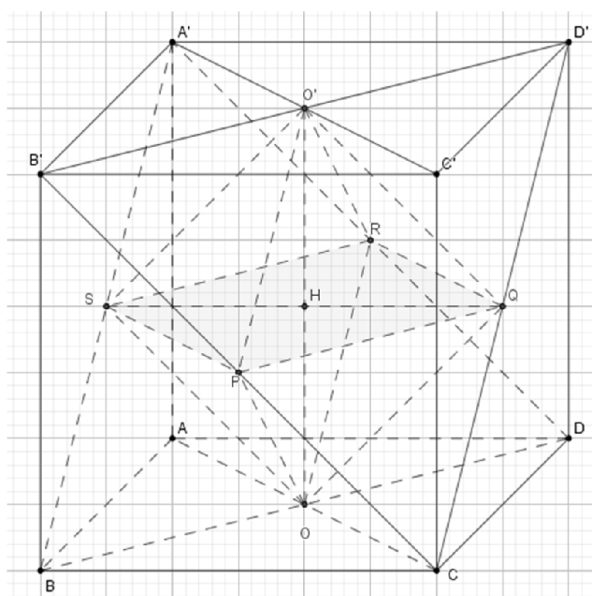
Vậy thể tích khối bát diện là: $V=2V_{chop}=a^3\sqrt{6}$ (đvtt).

Câu 16. Cho một hình lập phương có cạnh bằng a. Tính theo a thể tích của khối bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương.

A. $\frac{1}{4}a^3$. **B.** $\frac{1}{6}a^3$. **C.** $\frac{1}{12}a^3$. **D.** $\frac{1}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và tâm các mặt là P,Q,R,S,O,O' như hình vẽ.

Ta có PQ là đường trung bình của tam giác đều $B'CD'$ cạnh $a\sqrt{2}$ nên $PQ=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

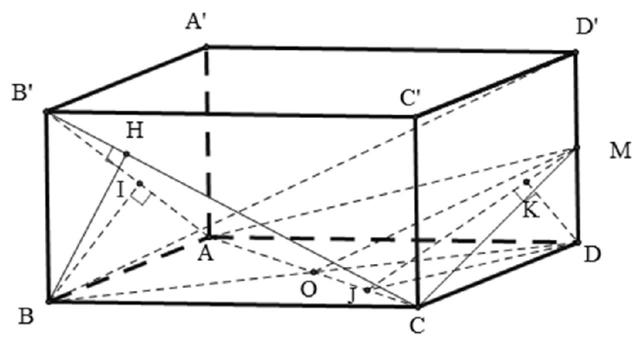
Do đó $S_{PQRS}=PQ^2=\frac{1}{2}a^2$ và $OO'=a$.

Vậy thể tích bát diện cần tìm là $V=\frac{1}{3}S_{PQRS}.OO'=\frac{1}{6}a^3$ (đvtt).

Câu 17. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối hộp đó là

A. $8a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải



Đặt $AB=x$, $AD=y$, $AA'=z$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên $B'C$, ta có BH là đoạn vuông góc chung của AB và $B'C$ nên $d\left(AB,B'C\right)=BH=\frac{2a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4a^2}$. (1)

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B trên AB', ta có BI là đoạn vuông góc chung của BC và AB' nên $d\left(BC,AB'\right)=BI\Rightarrow\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{5}{4a^2}$. (2)

Gọi M là trung điểm của DD', O là giao điểm của AC và BD, ta có mặt phẳng $\left(ACM\right)$ chứa AC và song song với BD' nên $d\left(AC,BD'\right)=d\left(BD',\left(ACM\right)\right)=d\left(D',\left(ACM\right)\right)$.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của D trên MJ, ta có $d\left(D',\left(ACM\right)\right)=d\left(D,\left(ACM\right)\right)=DK\Rightarrow\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{4}{z^2}=\frac{3}{a^2}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{2}{z^2}=\frac{1}{2a^2}\Leftrightarrow z=2a\Rightarrow x=y=a$.

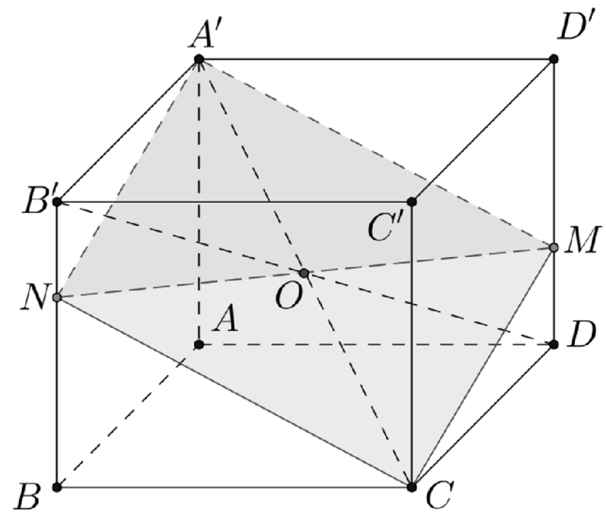
Thể tích khối hộp là $V=xyz=2a^3$.

Câu 18. **(THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a,BC=2a,AC'=3a$. Điểm N thuộc cạnh BB' sao cho $BN=2NB'$, điểm M thuộc cạnh DD' sao cho $D'M=2MD$. Mặt phẳng $\left(A'MN\right)$ chia hình hộp chữ nhật làm hai phần, tính thể tích phần chứa điểm C'.

A. $4a^3$. **B.** a^3. **C.** $2a^3$. **D.** $3a^3$.

Lời giải

Chọn C



Nhận xét: $B'NDM$ là hình bình hành $\left(B'N = DM, B'N // DM\right)$

$\Rightarrow MN \cap B'D = O$ là trung điểm của mỗi đoạn nên O cũng là trung điểm của đường chéo $A'C$.

Vậy thiết diện tạo bởi mặt $\left(A'MN\right)$ và hình chóp là hình bình hành $A'NCM$.

Ta có: $C'A^2 = B'B^2 + BA^2 + BC^2 \Rightarrow B'B = 2a$.

Cách 1:

Thể tích phần chứa C' là

$$V = V_{A'.B'C'CN} + V_{A'.C'CMD} = \frac{1}{3}.A'B'.S_{B'C'CN} + \frac{1}{3}.A'D'.S_{C'D'MC}$$

$$= \frac{1}{3}.a.2a\frac{\frac{2a}{3}+2a}{2} + \frac{1}{3}.2a.a\frac{\frac{4a}{3}+2a}{2} = 2a^3.$$

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh

Gọi thể tích phần chứa C' là V'.

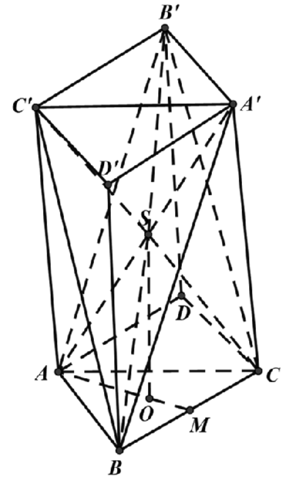
Ta có: $\dfrac{V'}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{\frac{B'N}{B'B} + \frac{D'M}{D'D}}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V' = \dfrac{1}{2}.4a^3 = 2a^3$.

Cách 3: Nhận xét nhanh do đa diện chứa C' đối xứng với đa diện không chứa C' qua O nên thể tích của hai phần này bằng nhau, suy ra $V' = \dfrac{1}{2}.V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^3$.

Câu 19. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích V của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $V = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi D, D' theo thứ tự là đỉnh thứ tư của hình thoi $ABCD$, $A'B'C'D'$.

Thể tích của bát diện cần tìm:

$$V = V_{ABCD.C'D'A'B'} - V_{BC'D'A'} - V_{B'ACD} = V_{ABCD.C'D'A'B'} - \frac{1}{6}V_{ABCD.C'D'A'B'} - \frac{1}{6}V_{ABCD.C'D'A'B'}$$

$$= \frac{2}{3}V_{ABCD.C'D'A'B'}{}' = \frac{2}{3}.2SO.2S_{\Delta ABC}.(*)$$

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có: $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAO} = 60° \Rightarrow SO = OA.\tan 60° = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = a$.

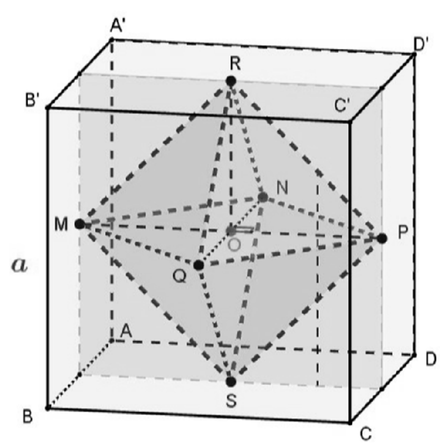
Do đó: $V = \dfrac{8}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P,Q,R,S là tâm các mặt của hình lập phương. Thể tích khối bát diện đều tạo bởi sáu đỉnh M,N,P,Q,R,S bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$ **B.** $\dfrac{a^3}{4}$ **C.** $\dfrac{a^3}{12}$ **D.** $\dfrac{a^3}{6}$

Lời giải

Chọn D



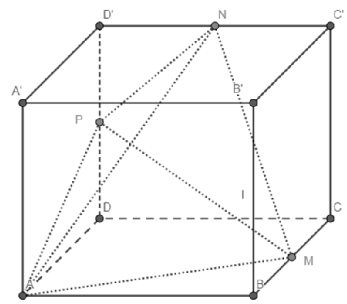
Ta có: dễ thấy $MNPQRS$ là bát giác đều nên $V = V_{R.MNPQ} + V_{S.MNPQ} = 2V_{R.MNPQ}$

Dễ thấy: $RO=\dfrac{a}{2}$

Lại có hình chóp đều $R.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng nhau nên: $MR=OR\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow 2V_{R.MNPQ}=2.\dfrac{1}{3}.MN^2.OR=\dfrac{a^3}{6}$

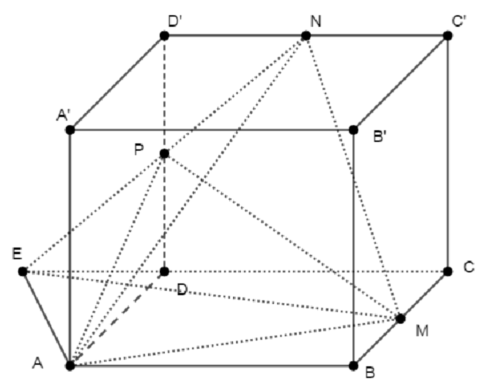
Câu 21. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, $C'D'$, DD' (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối hộp bằng 144, thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng



A. 15. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A



$NP\cap CD=E$. Đặt $DC=2d$, $BC=2r$.

$S_{EMA}=S_{ECBA}-S_{EMC}-S_{ABM}=5dr-\dfrac{3}{2}dr-dr=\dfrac{5}{2}dr.$

$V_{NEAM}=\dfrac{1}{3}S_{EMA}.d(N,(EMA))=\dfrac{1}{3}S_{EMA}.CC'=\dfrac{5}{24}.4dr.CC'=\dfrac{5}{24}V_{ABCD.A'B'C'D'}=30.$

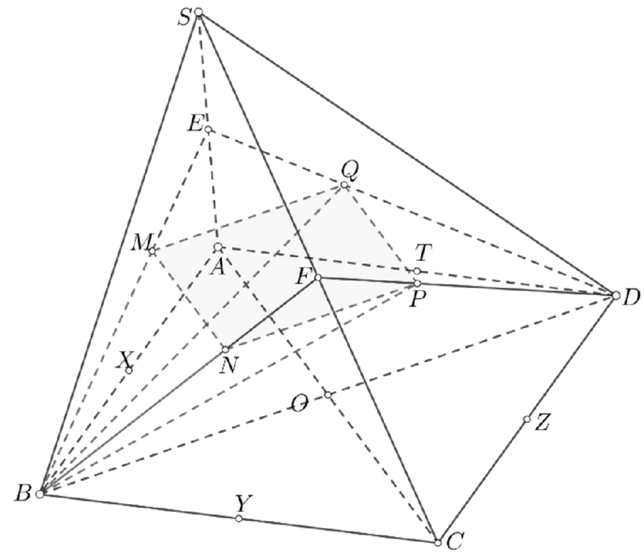
$V_{NPAM}=\dfrac{1}{2}V_{NEAM}=15.$

Câu 22. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 9 và đáy là hình bình hành có diện tích bằng 10. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trọng tâm của các mặt bên SAB, SBC, SCD và SDA. Thể tích của khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, B và D là

A. 9. **B.** $\dfrac{50}{9}$. **C.** 30. **D.** $\dfrac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có các đường thẳng BM, DQ, SA đồng quy tại trung điểm E của SA. Tương tự, các đường thẳng BN, DP, SC đồng quy tại trung điểm F của SC.
Ta phân chia khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, B và D thành khối chóp $B.MNPQ$ và khối tứ diện $BDPQ$.

Cũng theo tính chất trọng tâm, ta có mặt phẳng $(MNPQ)$ song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và $S_{MNPQ}=\frac{4}{9}S_{XYZT}=\frac{4}{9}.\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{2}{9}S_{ABCD}$ (trong đó X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA).

Hơn nữa,

$$d\left[B,(MNPQ)\right]=d\left[X,(MNPQ)\right]=\frac{1}{2}d\left[S,(MNPQ)\right]=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}d\left[S,(ABCD)\right]=\frac{1}{3}d\left[S,(ABCD)\right].$$

Do đó, $V_{B.MNPQ}=\frac{1}{3}.\frac{2}{9}V_{S.ABCD}=\frac{2}{27}V_{S.ABCD}\quad(1)$.

Lại có

$$\begin{aligned}V_{BDPQ}&=\frac{4}{9}V_{BDEF}\left(\text{do } S_{DPQ}=\frac{4}{9}S_{DEF}\right)\\&=\frac{4}{9}.2V_{ODEF}\left(\text{do } d\left[B,(DEF)\right]=2d\left[O,(DEF)\right]\right)\\&=\frac{4}{9}.2.\frac{1}{4}V_{SACD}\left(\text{do } S_{OEF}=\frac{1}{4}S_{SAC}\right)\\&=\frac{4}{9}.2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{9}V_{S.ABCD}\quad(2)\end{aligned}$$

trong đó, O là tâm của hình bình hành $ABCD$.

Từ (1) và (2), ta được $V_{MNPQBD}=\left(\frac{2}{27}+\frac{1}{9}\right)V_{S.ABCD}=\left(\frac{2}{27}+\frac{1}{9}\right).\frac{1}{3}.9.10=\frac{50}{9}$ (đvtt).

Câu 23. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=2$, đáy $ABCD$ là hình thoi với ABC là tam giác đều cạnh 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'D'$, DD' và Q thuộc cạnh BC sao cho $QC=3QB$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$.

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

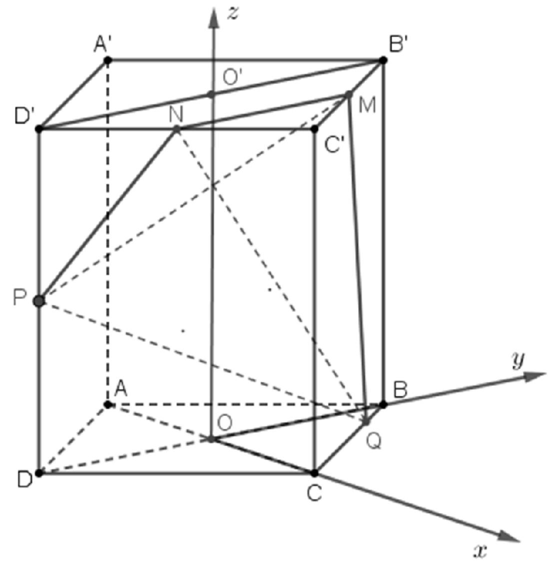
Lời giải

Chọn D

Gọi O và O' lần lượt là tâm đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

ΔABC đều cạnh 4, O là trung điểm $BC \Rightarrow OB = 2\sqrt{3}$, $OC = 2$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$, tia Ox trùng tia OC, tia Oy trùng tia OB, tia Oz trùng tia OO'.



Khi đó: $C(2;0;0)$, $B\left(0;2\sqrt{3};0\right)$, $B'\left(0;2\sqrt{3};2\right)$, $C'(2;0;2)$, $D\left(0;-2\sqrt{3};0\right)$, $D'\left(0;-2\sqrt{3};2\right)$

M là trung điểm $B'C' \Rightarrow M\left(1;\sqrt{3};2\right)$.

N là trung điểm $C'D' \Rightarrow N\left(1;-\sqrt{3};2\right)$.

P là trung điểm $DD' \Rightarrow P\left(0;-2\sqrt{3};1\right)$.

Q thuộc cạnh BC sao cho $QC = 3QB \Rightarrow \overrightarrow{CQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \begin{cases} x_Q - 2 = \frac{3}{4}(0-2) \\ y_Q - 0 = \frac{3}{4}\left(2\sqrt{3}-0\right) \\ z_Q - 0 = \frac{3}{4}(0-0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{1}{2} \\ y_Q = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z_Q = 0 \end{cases}$

Suy ra $Q\left(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Ta có: $V_{MNPQ} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right|$

$\overrightarrow{MN} = \left(0;-2\sqrt{3};0\right)$, $\overrightarrow{MP} = \left(-1;-3\sqrt{3};-1\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right] = \left(2\sqrt{3};0;-2\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{MQ} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-2\right)$.

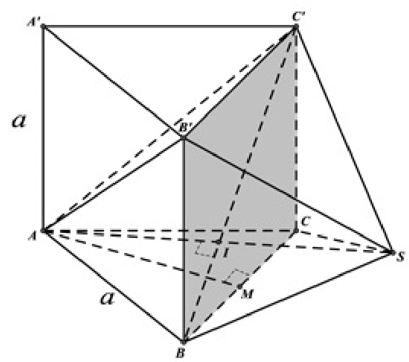
$\Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6}\left|2\sqrt{3}.\left(-\frac{1}{2}\right) + 0.\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-2\sqrt{3}\right).(-2)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi S là điểm đối xứng của A qua BC'. Thể tích khối đa diện $ABCSB'C'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Chia khối đa diện $ABCSB'C'$ thành 2 khối là khối chóp $A.BCC'B'$ và khối chóp $S.BCC'B'$

$V_{ABCSB'C'} = V_{ABCC'B'} + V_{S.BCC'B'}$

Gọi M là trung điểm BC.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$. Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ là:

$$V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{3}AM.S_{BCC'B'} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Thể tích khối chóp $S.BCC'B'$ là:

$$\frac{V_{S.BCC'B'}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{\frac{1}{3}d\left(S;(BCC'B')\right).S_{BCC'B'}}{\frac{1}{3}d\left(A;(BCC'B')\right).S_{BCC'B'}}$$

$$= \frac{d\left(S;(BCC'B')\right)}{d\left(A;(BCC'B')\right)} = \frac{SI}{AI} = 1.$$

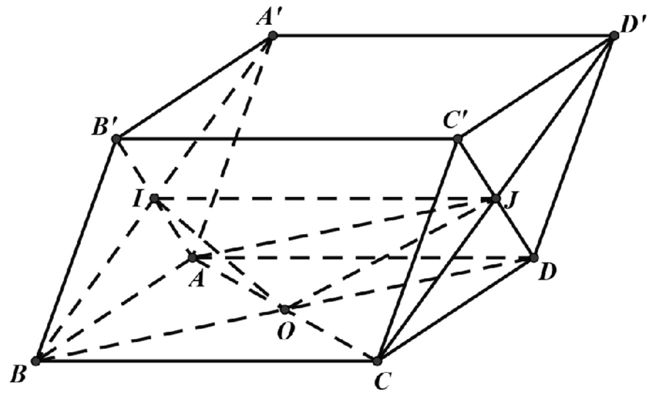
$$\Rightarrow V_{S.BCC'B'} = V_{A.BCC'B'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{ABCSB'C'} = V_{A.BCC'B'} + V_{S.BCC'B'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} + \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Câu 25. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', CDD'C'$. Biết $AI = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$, $AA' = 2a$ và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'), (A'B'C'D')$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

A. $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{64}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{32}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{192}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AI^2 = \dfrac{AA'^2 + AB^2}{2} - \dfrac{A'B^2}{4} \Rightarrow A'B^2 = 2\left(AA'^2 + AB^2\right) - 4AI^2 = 3a^2 \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$

Do $A'B^2 + AB^2 = AA'^2$ nên tam giác $A'AB$ vuông tại B $\Rightarrow S_{A'AB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

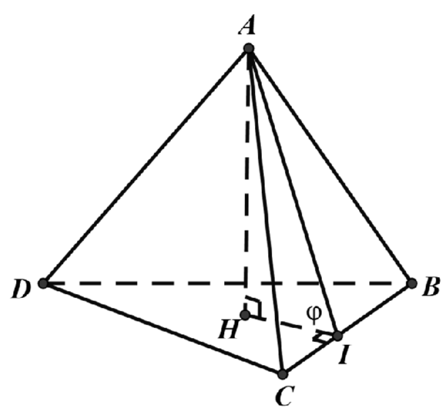
Theo đề góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABB'A'\right),\left(A'B'C'D'\right)$ bằng 60°, nên suy ra

$V_{A'ABC} = \dfrac{2S_{A'AB}.S_{ABC}\sin 60^\circ}{3AB} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

$V_{AOIJ} = \dfrac{1}{3}d\left(O;\left(IAJ\right)\right).S_{IAJ} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}d\left(B;\left(B'AD\right)\right).\dfrac{1}{2}S_{B'AD} = \dfrac{1}{4}V_{B'ABD} = \dfrac{1}{4}V_{A'ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$

Bổ sung: *Công thức tính nhanh thể tích tứ diện theo góc giữa hai mặt phẳng*

Cho tứ diện ABCD có diện tích tam giác ABC bằng S_1, diện tích tam giác BCD là S_2 và góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) là φ. Khi đó ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{2S_1S_2.\sin\varphi}{3BC}$

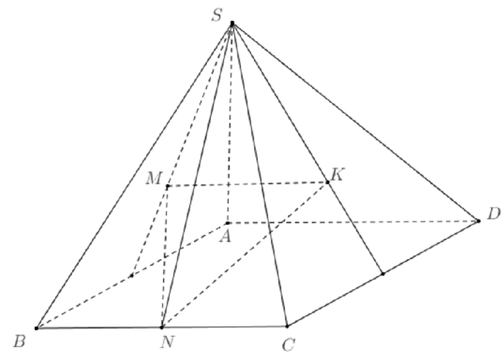


Chứng minh: Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD), kẻ HI ⊥BC tại I thì AI⊥BC và

$\left(\left(ABC\right);\left(DBC\right)\right) = \left(AI;HI\right) = \widehat{AIH} = \varphi$; $AH = AI\sin\varphi$

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AH.S_{DBC} = \dfrac{1}{3}AI\sin\varphi.S_2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{2S_{ABC}}{BC}.\sin\varphi.S_2 = \dfrac{2S_1S_2\sin\varphi}{3BC}$

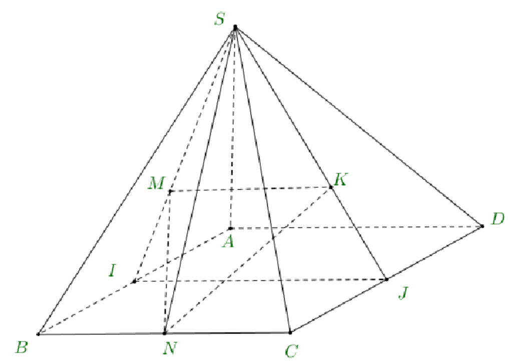
Câu 26. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, $SA = a$. M,K tương ứng là trọng tâm tam giác SAB,SCD; N là trung điểm BC. Thể tích khối tứ diện $SMNK$ bằng $\frac{m}{n}.a^3$ với $m,n\in\mathbb{N},(m,n)=1$. Giá trị $m+n$ bằng:



A. 28 . **B** 12 . **C.** 19 . **D.** 32 .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}$.

Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD. Ta có: ΔSMN đồng dạng với ΔSIJ theo tỉ số $\frac{2}{3}$. Do đó $V_{SMNK}=V_{P.SMN}=\left(\frac{2}{3}\right)^2V_{P.SIJ}=\frac{4}{9}V_{P.SIJ}$.

Mặt khác $S_{\Delta PIJ}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Do đo $V_{P.SIJ}=V_{S.PIJ}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{12}$

Nên $V_{SMNK}=\frac{4}{9}.\frac{a^3}{12}=\frac{a^3}{27}$.

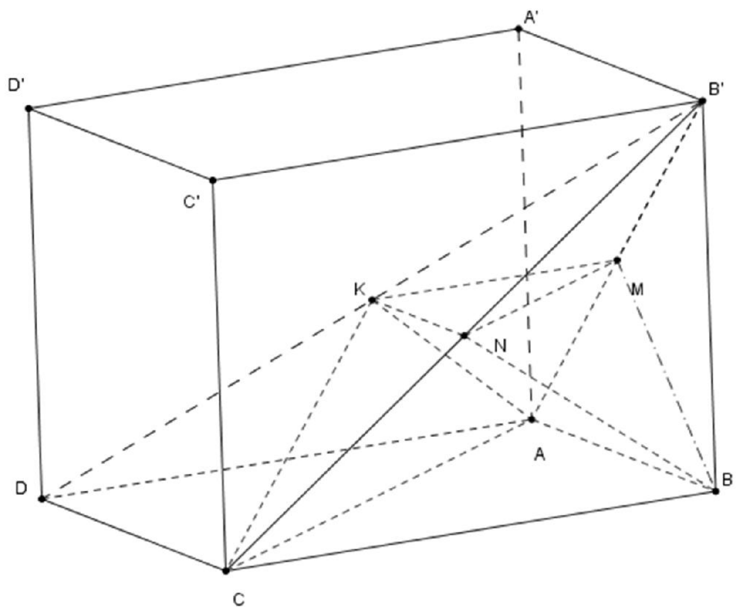
Vậy $m=1,n=27\Rightarrow m+n=28$.

Câu 27. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có cạnh $4a$, $A'A=8a$, $\widehat{BAD}=120^\circ$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm cạnh $AB',B'C,BD'$. Thể tích khối da diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,K là:

A. $12\sqrt{3}\,a^3$ **B.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}a^3$ **C.** $16\sqrt{3}\,a^3$ **D.** $\frac{40\sqrt{3}}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A



$MN//AC; MN=\frac{1}{2}AC$, $MNCA$ là hình thang.

$V_{MNKABC}=V_{K.MNCA}+V_{B.MNCA}$

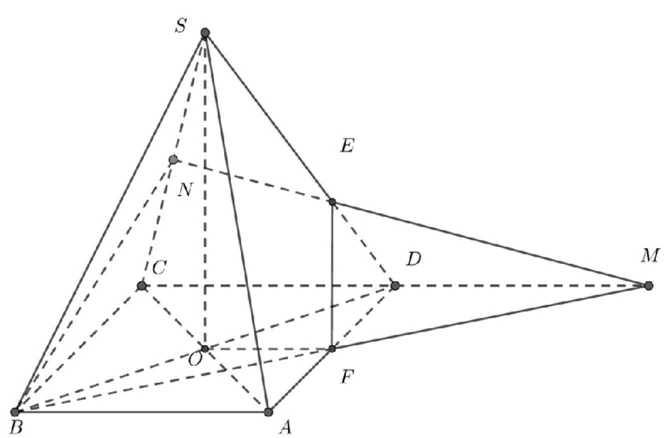
DK cắt (B'AC) tại B', $\frac{B'K}{B'D}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{d\left(K;(MNCA)\right)}{d\left(D;(MNCA)\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{K.MNCA}=\frac{1}{2}V_{D.MNCA}$

Mà: $V_{B.MNCA}=V_{D.MNCA}$ nên ta có: $V_{MNKABC}=\frac{1}{2}V_{B.MNCA}+V_{B.MNCA}=\frac{3}{2}V_{B.MNCA}$

Mặt khác: $S_{MNCA}=\frac{3}{4}S_{B'AC}\Rightarrow V_{B.MNCA}=\frac{3}{4}V_{B.B'AC}=\frac{3}{4}V_{B'.ABC}=\frac{3}{4}.\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}=8\sqrt{3}a^3$

$V_{MNKABC}=\frac{3}{2}V_{B.MNCA}=\frac{3}{2}8\sqrt{3}\,a^3=12\sqrt{3}\,a^3$

Câu 28. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên hợp với đáy một góc 60°. Gọi *M* là điểm đối xứng của *C* qua *D*, *N* là trung điểm ***SC.*** Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần (như hình vẽ bên). Tỉ số thể tích giữa hai phần $\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}$ bằng



A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có N là trung điểm của SO, D là trung điểm của CM nên E là trọng tâm tam giác SCM.

Ký hiệu h, S, V tương ứng là chiều cao, diện tích đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta có

$$S_{BCM} = S \Rightarrow V_{N.BCM} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S = \frac{V}{2}.$$

Khi đó $\frac{V_{M.EDF}}{V_{M.NCB}} = \frac{ME}{MN}.\frac{MD}{MC}.\frac{MF}{MB} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow V_{M.EDF} = \frac{V}{2}.\frac{1}{6} = \frac{V}{12}$.

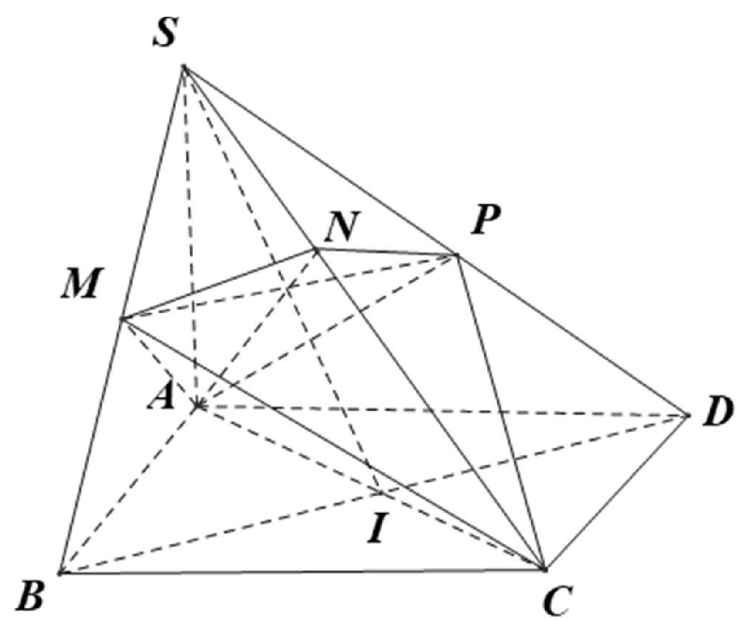
Như vậy $V_{BFDCNE} = \frac{V}{2} - \frac{V}{12} = \frac{5V}{12} \Rightarrow V_{SABFEN} = \frac{7V}{12} \Rightarrow \frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \frac{7}{5}$.

Câu 29. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại M, N, P. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $\frac{108\pi}{3}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp MA.$.

Lại có $MA \perp SC \Rightarrow MA \perp (SBC) \Rightarrow MA \perp MC \quad (1)$.

Tương tự: $AP \perp PC \quad (2)$.

Mặt khác $AN \perp NC \quad (3)$.

Gọi I là trung điểm của AC, từ $(1)(2)(3)$ ta có $IN = IM = IC = IP (= IA)$. Mặt cầu ngoại tiếp $CMNP$ là mặt cầu tâm I, bán kính IA.

$$IA = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}}{2} = 2.$$

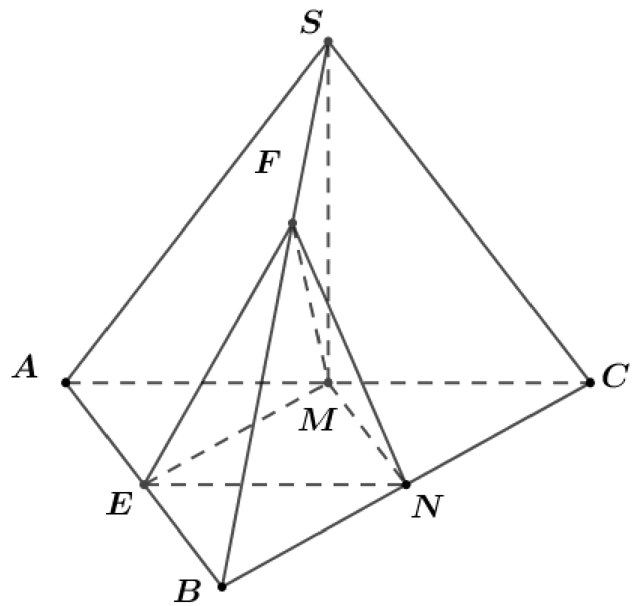
Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là: $V=\frac{4}{3}\pi .2^3=\frac{32\pi}{3}$.

Câu 30. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, $AB=4$, $SA=SB=SC=12$. Gọi M,N,E lần lượt là trung điểm của AC,BC,AB. Trên cạnh SB lấy điểm F sao cho $\frac{BF}{BS}=\frac{2}{3}$. Thể tích khối tứ diện $MNEF$ bằng

A. $\frac{8\sqrt{34}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{34}}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{34}}{9}$. **D.** $\frac{16\sqrt{34}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA=SB=SC$ nên hình chiếu của S lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC, suy ra $SM\perp (ABC)$.

Từ $AB=4\Rightarrow AC=4\sqrt{2}$.

Tam giác SAM vuông tại M nên $SM=\sqrt{SA^2-AM^2}=\sqrt{12^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{34}$.

Thể tích $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SM=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB^2\cdot SM=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot 2\sqrt{34}=\frac{16\sqrt{34}}{3}$.

Suy ra thể tích

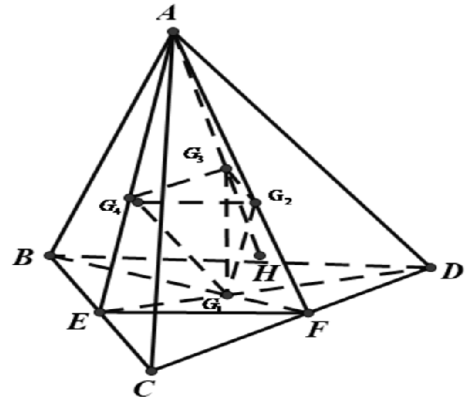
$V_{MNEF}=\frac{1}{3}\cdot S_{MNE}\cdot d\left(F,(MNE)\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot S_{ABC}\cdot\frac{2}{3}\cdot SM=\frac{1}{12}\cdot V_{S.ABC}=\frac{1}{12}\cdot\frac{32\sqrt{34}}{3}=\frac{8\sqrt{34}}{9}$.

Câu 31. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi G_1,G_2,G_3,G_4 là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện $ABCD$. Thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ là:

A. $\frac{V}{12}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{27}$. **D.** $\frac{V}{18}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H,E,F lần lượt là trung điểm BD,BC,CD

Ta có $\frac{AG_4}{AE}=\frac{AG_3}{AH}=\frac{2}{3}\Rightarrow G_3G_4//\text{HE}\quad(1)$

Tương tự $\frac{AG_3}{AF}=\frac{AG_2}{AH}=\frac{2}{3}\Rightarrow G_2G_3//\text{HF}(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow(G_4G_2G_3)//(DBC)$

$\Rightarrow d\left(G_1;(G_2G_3G_4)\right)=d\left(\text{G}_2;(BCD)\right)=\frac{1}{3}d\left(A;(BCD)\right)$

Tam giác $\text{G}_2G_3G_4$ đồng dạng tam giác HEF là $\frac{G_2G_3}{HF}=\frac{AG_2}{AF}=\frac{2}{3}$

$S_{G_2G_3G_4}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.S_{HEF}=\frac{4}{9}.\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{1}{9}S_{ABC}.$

Thể tích khối tứ diện $G_1\text{G}_2G_3G_4$ là:

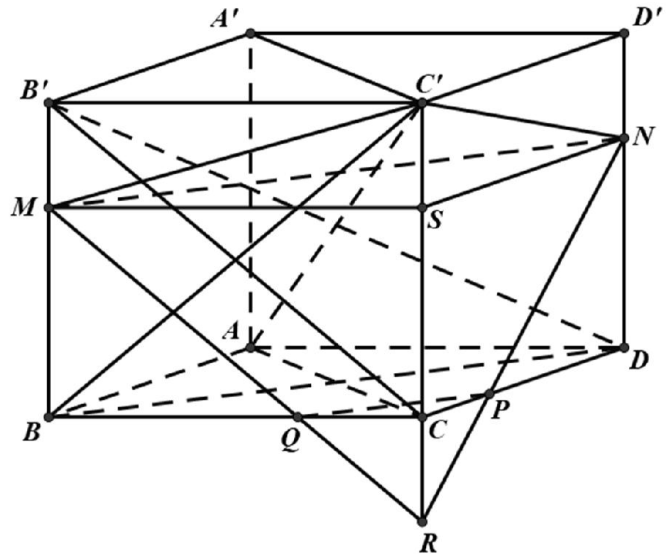
$V=\frac{1}{3}d\left(G_1;(G_2G_3G_4)\right).S_{G_2G_3G_4}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}d\left(A;(BCD)\right)\frac{1}{9}S_{ABC}=\frac{1}{27}V_{ABCD}=\frac{V}{27}.$

Câu 32. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' sao cho $BM=2MB'$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AC' cắt các cạnh DD',DC,BC lần lượt tại N,P,Q. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện $CPQMNC'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{31}{162}$. **B.** $\frac{35}{162}$. **C.** $\frac{34}{162}$. **D.** $\frac{13}{162}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết $(\alpha)\cap DD'=N,(\alpha)\cap CD=P,(\alpha)\cap BC=Q$. Từ tính chất của hình lập phương ta có $(ACC')\perp BD$ suy ra $BD\perp AC'$ do đó $BD//(\alpha)$, từ đây ta suy ra $MN//BD;PQ//BD$ do vậy ta có $DN=2ND'$.

Ta xác định vị trí P, Q như sau: Ta có $\begin{cases}AB\perp B'C\\BC'\perp B'C\end{cases}\Rightarrow B'C\perp(ABC')\Rightarrow B'C\perp AC'$ vì vậy $(\alpha)//B'C$ do đó $MQ//B'C$, vậy ta được $BQ=2QC$, và theo trên $PQ//BD$ ta lại có $DP=2PC$.

Vậy các điểm M,N,P,Q hoàn toàn được xác định.

Gọi S là điểm trên cạnh CC' thỏa mãn $CS=2SC'$ và R là điểm trên đường thẳng CC' thỏa mãn $MB'CR$ là hình bình hành. Khi đó ta có R nằm trên mặt phẳng (α) và $(MNS)//(A'B'C'D')$

Đặt $V_0=V_{RCPQ};V_2=V_{C'MSN}$ khi đó $V_1=V_{RMNS}+V_{C'MSN}-V_{RCPQ}$

Đặt cạnh của hình lập phương là $AB=3x$ ta có

$$\begin{cases}V=(3x)^3=27x^3\\V_{RMNS}=\dfrac{1}{6}SN.SM.SR=\dfrac{9}{2}x^3\\V_{C'MSN}=\dfrac{1}{6}SM.SN.SC'=\dfrac{3x^3}{2}\\V_{RCPQ}=\dfrac{1}{6}CP.CQ.CR=\dfrac{x^3}{6}\end{cases}\text{ do đó }\frac{V_1}{V}=\frac{\frac{9}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{6}}{27x^3}=\frac{35}{162}$$

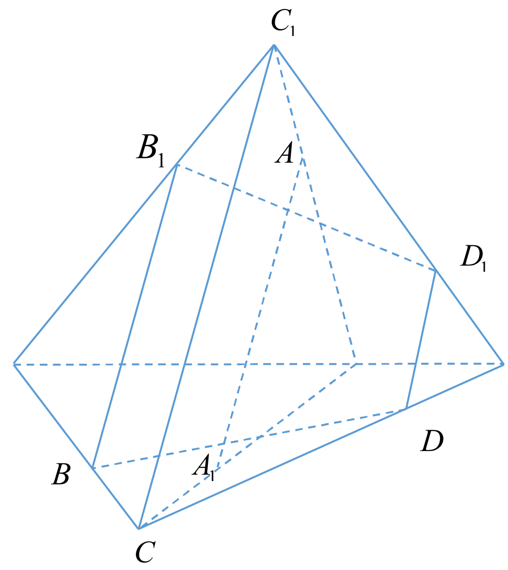
Vậy $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{35}{162}$.

Câu 33. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 18. Gọi A_1 là trọng tâm của tam giác BCD; (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa (P) và mặt phẳng (BCD) bằng 60^0. Các đường thẳng qua $B;C;D$ song song với AA_1 cắt (P) lần lượt tại $B_1;C_1;D_1$. Thể tích khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng?

A. $12\sqrt{3}$ **B.** 18 **C.** $9\sqrt{3}$ **D.** 12

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết A_1 là trọng tâm tam giác BCD nên ta suy ra A cũng là trọng tâm tam giác $B_1C_1D_1$.

Do đó $V_{A.BCD}=3V_{A.A_1BC}=3V_{B.AA_1C}$ và $V_{A_1.B_1C_1D_1}=3V_{A_1.AB_1C_1}=3V_{B_1.AA_1C_1}$.

Mặt khác do quan hệ song song nên $\begin{cases} d_{[B;(AA_1CC_1)]}=d_{[B_1;(AA_1CC_1)]} \\ S_{\Delta AA_1C}=S_{\Delta AA_1C_1} \end{cases} \Rightarrow V_{B.AA_1C}=V_{B_1.AA_1C_1}$

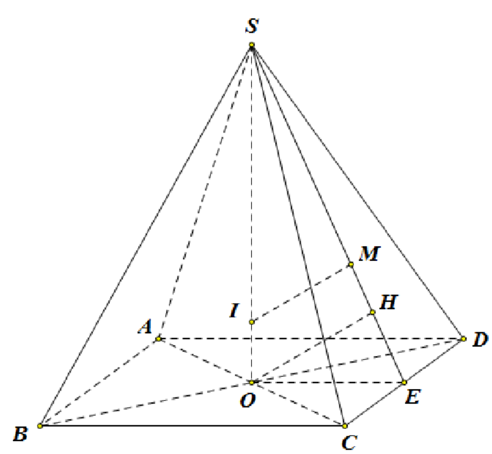
Vậy nên $V_{A_1.B_1C_1D_1}=V_{A.BCD}=18$

Câu 34. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (SCD) sao cho tổng $Q=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2+MS^2$ nhỏ nhất. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và V_2 là thể tích của khối chóp $M.ACD$. Tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\dfrac{11}{140}$. **B.** $\dfrac{22}{35}$. **C.** $\dfrac{11}{70}$. **D.** $\dfrac{11}{35}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và I là điểm trên đoạn thẳng SO sao cho $4\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IS}=\vec{0}$

Ta có: $Q=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)^2+\overrightarrow{MS}^2$

$=4\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MS}^2+4OA^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IO}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)^2+4OA^2=5MI^2+4IO^2+IS^2+4OA^2.$

Vì $4IO^2+IS^2+4OA^2=const$ nên Q nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (SCD).

Gọi E là trung điểm CD, H là hình chiếu của O trên $(SCD)\Rightarrow M,H\in SE$.

Ta có $SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{2},SE=\dfrac{a\sqrt{7}}{2},SH=\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.

Vì $\dfrac{SM}{SH}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow SM=\dfrac{12a}{5\sqrt{7}}\Rightarrow ME=SE-SM=\dfrac{11a}{10\sqrt{7}}$.

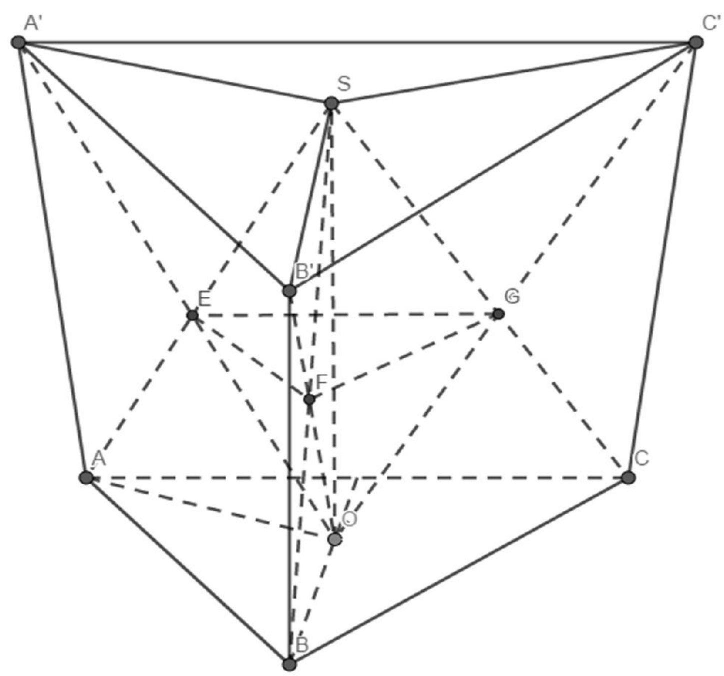
Ta có $\dfrac{d\left(M,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\dfrac{ME}{SE}=\dfrac{11}{35}\Rightarrow\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\frac{1}{3}d\left(M,(ABCD)\right).S_{ACD}}{\frac{1}{3}d\left(S,(ABCD)\right).S_{ABCD}}=\dfrac{11}{35}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{70}$..

Câu 35. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30^o, O là trọng tâm tam giác ABC. Một hình chóp đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60^o sao cho mỗi cạnh bên SA,SB,SC lần lượt cắt các cạnh bên OA',OB',OC'. Gọi V_1 là phần thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$, V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{9}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{27}{64}$. **D.** $\dfrac{9}{64}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $E=OA'\cap SA;F=OB'\cap SB;G=OC'\cap SC$

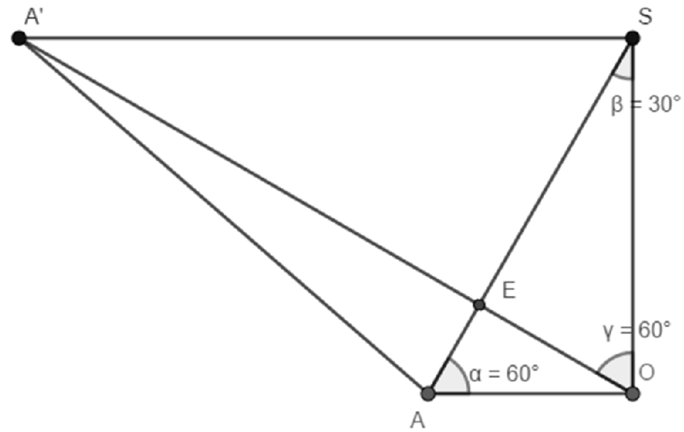
Theo hình vẽ thể tích $V_1=V_{SEFGO};V_2=V_{S.ABC}$

Đặt $SO=x$

Do $S.ABC$ là hình chóp đều và O là tâm tam giác ABC nên $SO\perp\left(ABC\right)$

Do $O.A'B'C'$ là hình chóp đều và S là tâm tam giác $A'B'C'$ nên $OS \perp (A'B'C')$

Từ đó ta có $(ABC)//(A'B'C') \Rightarrow OA//SA'$ và $SO \perp OA; OS \perp SA'$



Ta có theo dữ kiện bài toán ta có $\widehat{ASO} = 30^o; \widehat{A'OS} = 60^o$

Ta có

$$\frac{SE}{SO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SE = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OE = \frac{x}{2}$$

$$\frac{SO}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{SO}{OA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA' = 2x$$

$$\frac{OA}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = \frac{SA}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{SA'}{SO} = \sqrt{3} \Rightarrow SA' = x\sqrt{3}$$

Ta có:

$$AB.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = OA \Rightarrow AB = OA.\sqrt{3} = x$$

$$A'B'.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = SA' \Rightarrow A'B' = SA'.\sqrt{3} = 3x$$

Ta có:

$$V_2 = V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.x.\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^3\sqrt{3}}{12}$$

$$V_{O.A'B'C'} = \frac{1}{3}.x.\frac{(3x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^3.3\sqrt{3}}{4}$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.EFG}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SA}.\frac{SF}{SB}.\frac{SG}{SC} = \left(\frac{SE}{SA}\right)^3 = \left(\frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{2x\sqrt{3}}{3}}\right)^3 = \frac{27}{64} \Rightarrow V_{S.EFG} = \frac{27}{64}.\frac{x^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{V_{O.EFG}}{V_{O.A'B'C'}} = \frac{OE}{OA'}.\frac{OF}{OB'}.\frac{OG}{OC'} = \left(\frac{OE}{OA'}\right)^3 = \left(\frac{\frac{x}{2}}{2x}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow V_{O.EFG} = \frac{1}{64}V_{O.A'B'C'} = \frac{1}{64}.\frac{x^3.3\sqrt{3}}{4}$$

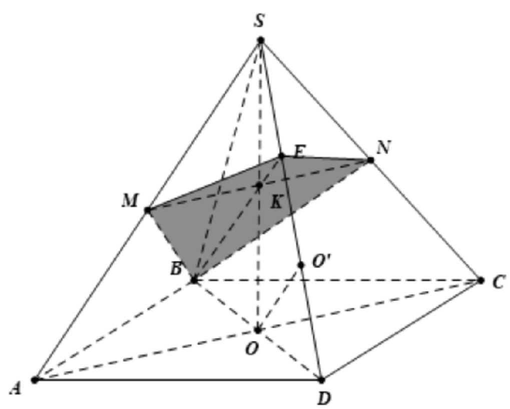
$$V_1 = V_{S.EFG} + V_{O.EFG} = \frac{3\sqrt{3}x^3}{64} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^3}{64}}{\frac{x^3\sqrt{3}}{12}} = \frac{9}{16}$$

Câu 36. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SC. Gọi E là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMN). Tính thể tích V của khối chóp $O.BMEN$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $K = MN \cap SO$, khi đó BK cắt SD tại E. Kẻ $OO' // BE$.

Do MN là đường trung bình của ΔSAC nên K là trung điểm của SO.

Suy ra $V_{O.BMEN} = V_{S.BMEN}$.

Ta có: $\frac{V_{S.BME}}{V_{S.BAD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SE}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{SE}{SD}$ và $\frac{V_{S.BNE}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SC}.\frac{SE}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{SE}{SD}$.

Suy ra $V_{S.BMEN} = V_{S.BME} + V_{S.BNE} = \frac{1}{2}.\frac{SE}{SD}.V_{S.ABCD}$.

Vì $OO' // BE \Rightarrow O'$ là trung điểm của ED.

Mặt khác: $KE // OO' \Rightarrow E$ là trung điểm của SO'.

Do đó $SE = EO' = O'D \Rightarrow \frac{SE}{SD} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $V_{S.BMEN} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$

Ta có: $S_{ABCD} = a^2$.

Xét ΔSOA vuông tại O có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $V_{S.BMEN} = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

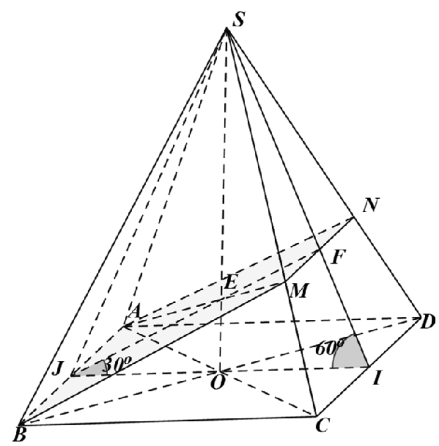
Câu 37. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Mặt bên tạo với đáy góc 60^o. Mặt phẳng (P) chứa AB và tạo với đáy góc 30^o và cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABMN$ theo a.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$ (vì $S.ABCD$ là hình chóp đều)



Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên DC, AB và gọi $SO\cap(P)=\{E\}\Rightarrow((SDC),(ABCD))=SOI=60^o$ và $((P),(ABCD))=EJO=30^o$.

Khi đó tam giác SIJ đều. Mà $EJO=30^o=\dfrac{1}{2}SJI\Rightarrow JE$ là phân giác của góc $SJI\Rightarrow F$ là trung điểm của SI (1) (với $JE\cap SI=\{F\}$). Mặt khác

$CD//AB\Rightarrow CD//(P)\Rightarrow CD//MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN là đường trung bình trong tam giác $SBC\Rightarrow\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}$

Khi đó ta có $\begin{cases}\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{S.ABM}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}\\ \dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{S.AMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.ACD}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}\end{cases}$

$\Rightarrow V_{S.ABMN}=V_{S.ABM}+V_{S.AMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}+\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}=\dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}\ (*)$

Tam giác SIJ đều cạnh $a\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}\ (2*)$

Thay $(2*)$ vào $(*)$ ta được $V_{S.ABMN}=\dfrac{3}{8}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$

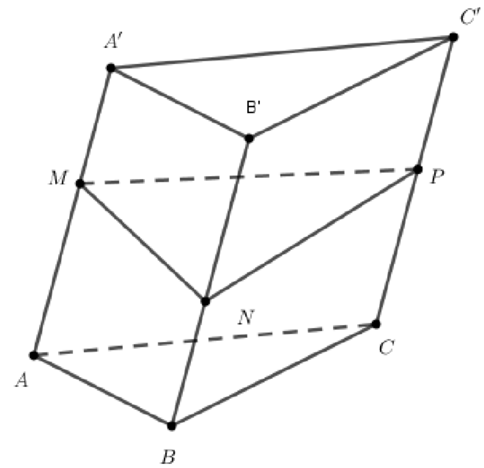
Câu 38. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao 8 và diện tích đáy bằng 11. Gọi M là trung điểm của AA', N là điểm trên cạnh BB' sao cho $BN=3B'N$ và P là điểm trên cạnh CC' sao cho $6CP=5C'P$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. $\dfrac{88}{3}$. **B.** 42. **C.** 44. **D.** $\dfrac{220}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:



Cho hình lăng trụ như hình vẽ, $V_{ABC.MNP}=\frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right).V_{ABC.A'B'C'}$.

Chứng minh:

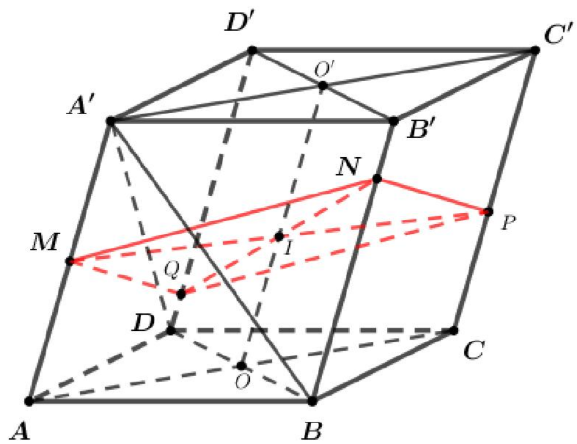
$V_{ABC.MNP}=V_{N.ACB}+V_{N.ACPM}$

$V_{N.ACB}=\frac{BN}{BB'}.V_{B'.ACB}=\frac{BN}{BB'}.\frac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$

$\frac{V_{N.ACPM}}{V_{B'.ACC'A'}}=\frac{S_{ACPM}}{S_{ACC'A'}}=\frac{\frac{1}{2}.(CP+AM)}{AA'}=\frac{1}{2}.\left(\frac{CP}{CC'}+\frac{AM}{AA'}\right)$

$\Rightarrow V_{N.ACPM}=\frac{1}{2}.\left(\frac{CP}{CC'}+\frac{AM}{AA'}\right).\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.
Bây giờ ta áp dụng vào giải bài toán.



Ta có: $\begin{cases}(ADD'A')//(BCC'B')\\MQ\subset(MNP)\cap(ADD'A')\Rightarrow NP//MQ\\NP\subset(MNP)\cap(BCC'B')\end{cases}$, tương tự ta cũng có $MN//PQ$. Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có OI là đường trung bình của hai hình thang $AMPC$ và $BNQD$ suy ra

$2OI=MA+PC=DQ+NB\Rightarrow\frac{MA}{AA'}+\frac{PC}{CC'}=\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{DD'}$

Dựa vào hình vẽ ta chia khối lăng trụ làm hai phần khi cắt bởi mặt phẳng $(BDD'B')$. Do đó $V_{A'D'B'.ADB}=V_{BD'C'.BDC}=44$.

$V_{ABCD.MNPQ}=V_{ABD.MNQ}+V_{BCD.NPQ}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{MA}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{DD'}\right).V_{ABD.A'B'D'}+\frac{1}{3}\left(\frac{CP}{CC'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{DD'}\right).V_{BCD.B'C'D'}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{MA}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{DD'}+\frac{CP}{CC'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{DD'}\right).\frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$

$=\frac{1}{3.2}\left[3.\left(\frac{MA}{AA'}+\frac{CP}{CC'}\right)\right].V_{ABC.A'B'C'}$

$=\frac{1}{2}.\left(\frac{MA}{AA'}+\frac{CP}{CC'}\right).V_{ABC.A'B'C'}$

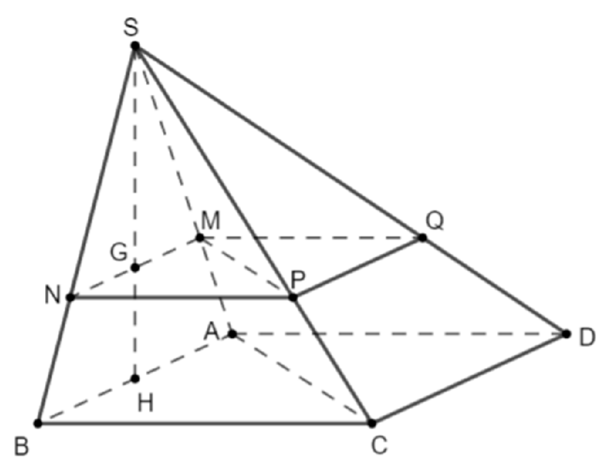
$=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{11}\right).88=42$

Câu 39. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác SAB và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, tính thể tích V của phần chứa điểm S.

A. $V=8$. **B.** $V=24$. **C.** $V=36$. **D.** $V=12$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB. Do ΔSAB đều và $(SAB)\perp(ABCD)$ nên $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $S_{\Delta SAB}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{4}\Rightarrow AB=3\sqrt{3}\Rightarrow SH=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.AB^2.SH=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}\right)^2.\frac{9}{2}=\frac{81}{2}$ (đvtt).

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, qua G kẻ đường thẳng song song với AB, cắt SA và SB lần lượt tại M, N. Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P, qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại Q. Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng đi qua G và song song với $(ABCD)$.

Khi đó $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{SQ}{SD}=\frac{SG}{SH}=\frac{2}{3}$.

Có $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{8}{27}V_{S.ABC}=\frac{8}{27}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{4}{27}V_{S.ABCD}$.

Có $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{S.MPQ}=\frac{8}{27}V_{S.ACD}=\frac{8}{27}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{4}{27}V_{S.ABCD}$.

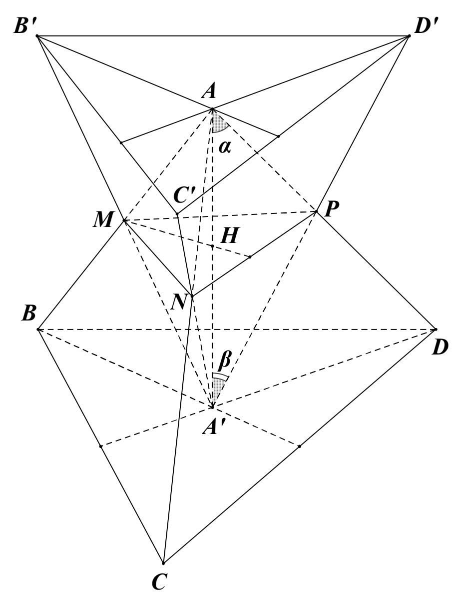
Vậy $V_{S.MNPQ}=V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}=\frac{4}{27}V_{S.ABCD}+\frac{4}{27}V_{S.ABCD}=\frac{8}{27}V_{S.ABCD}=\frac{8}{27}.\frac{81}{2}=12$ (đvtt).

Câu 40. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hai hình chóp tam giác đều có cùng chiều cao. Biết đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài bằng a của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc 30^0, cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc 45^0. Tính thể tích phần chung của hai hình chóp đã cho?

A. $\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$. **B.** $\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. **C.** $\frac{9\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$. **D.** $\frac{27\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$.

Lời giải

Chọn C



Hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.B'C'D'$ là hai hình chóp đều, có chung đường cao AA', A là tâm của tam giác $B'C'D'$ và A' là tâm của tam giác BCD.

Ta có: $(BCD)//(B'C'D')$; $AB=AC=AD=a$; $\widehat{BAA'}=\alpha$; $\widehat{AA'B'}=\beta$.

Do AB cắt $A'B'$ tại M nên $AB'//A'B$.

Gọi N là giao điểm của AC và $A'C'$; P là giao điểm của AD và $A'D'$.

Tương tự ta có: $AC'//A'C$, $AD'//A'D$.

Từ đó suy ra các cạnh của ΔBCD và $\Delta B'C'D'$ song song với nhau từng đôi một.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{A'B}{AB'} \\ \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{A'C}{AC'} \\ AB' = AC';\, A'B = A'C \end{cases} \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{NC}{NA} \Rightarrow MN // BC$.

Tương tự ta có: $NP // CD$ và $MP // BD$.

Suy ra: ΔMNP là tam giác đều. Gọi H là giao điểm của OO' và (MNP), H là tâm của tam giác MNP.

Trong tam giác $AA'D$ có: $AA' = AD.\cos\alpha = a.\cos\alpha \ (1)$.

Đặt $x = MH$. Hai tam giác AHM và tam giác $A'HM$ vuông tại H cho:

$\begin{cases} AH = MH.\cot\alpha = x.\cot\alpha \\ A'H = MH.\cot\beta = x.\cot\beta \end{cases} \Rightarrow AA' = x(\cot\alpha + \cot\beta) \ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $a.\cos\alpha = x(\cot\alpha + \cot\beta) \Leftrightarrow x = \dfrac{a.\cos\alpha}{\cot\alpha + \cot\beta}$.

Tam giác MNP đều có cạnh $MN = x\sqrt{3}$ nên:

$$S_{\Delta MNP} = \frac{MN^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2\cos^2\alpha}{(\cot\alpha + \cot\beta)^2}$$

Phần chung của hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.B'C'D'$ là hai hình chóp đỉnh A và A' có chung nhau mặt đáy là tam giác MNP. Do đó thể tích của nó là:

$$V = \frac{1}{3}.S_{\Delta MNP}.(AH + A'H) = \frac{1}{3}.S_{\Delta MNP}.AA' = \frac{a^3.\sqrt{3}.\cos^3\alpha}{4(\cot\alpha + \cot\beta)^2}$$

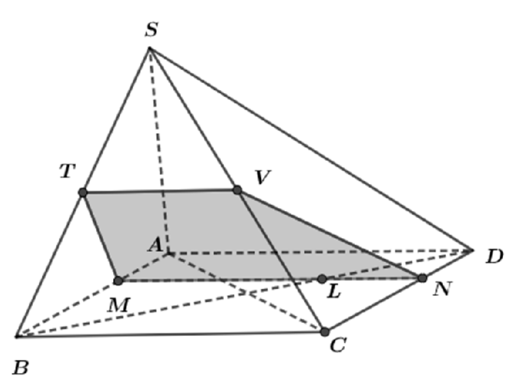
Với $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 45^\circ$ thì $V = \dfrac{9a^3}{32(\sqrt{3}+1)^2} = \dfrac{9(2-\sqrt{3})a^3}{64}$.

Câu 41. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $12a^2$; khoảng cách từ S tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $4a$. Gọi L là trọng tâm tam giác ACD ; gọi T và V lần lượt là trung điểm các cạnh SB và SC**.** Mặt phẳng (LTV) chia hình chóp thành hai khối đa diện, hãy tính thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S.

A. $\dfrac{20a^3}{3}$. **B.** $8a^3$. **C.** $\dfrac{28a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{32a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



$V=V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}12a^2.4a=16a^3$.

Mặt phẳng (LTV) cắt AB, CD ở M và N sao cho $MN//BC//TV$.

Đặt $V'=V_{S.ADNMTV}=V_{S.ABMN}+V_{S.TVMN}$

Ta có : $V_{S.ADNM}=\frac{1}{3}V$

Xét khối chóp $S.MNCB$ có đáy là hình bình hành :

$a=\frac{SM}{SM}=1;\ b=\frac{SN}{SN}=1;\ c=\frac{SB}{ST}=2;\ d=\frac{SC}{SV}=2$

Khi đó $\frac{V_{S.TVMN}}{V_{S.MNBC}}=\frac{a+b+c+d}{4abcd}=\frac{3}{8}\Rightarrow V_{S.TVMN}=\frac{2}{3}V.\frac{3}{8}=\frac{1}{4}V$.

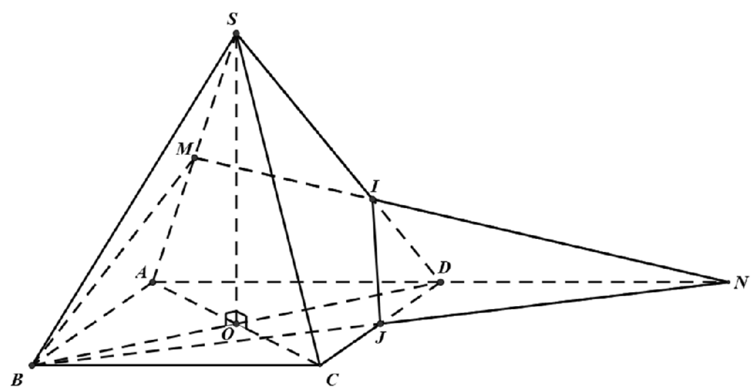
Do đó $V'=\frac{1}{3}V+\frac{1}{4}V=\frac{7}{12}V=\frac{7}{12}.16a^3=\frac{28}{3}a^3$.

Câu 42. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm đối xứng của của A qua D. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện có chứa đỉnh. Thể tích của khối đa diện (H) bằng

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{4}{7}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ ta có SO là chiều cao của hình chóp.

Trong mặt phẳng (SAD) gọi I là giao điểm của MN và SD ta suy ra I là trọng tâm của tam giác SAN do đó $\frac{SI}{SD}=\frac{NI}{NM}=\frac{2}{3}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi J là giao điểm của BN và CD ta suy ra J là trung điểm của CD và BN.

Ta có $S_{\Delta ABN}=S_{ABCD}$ và $d(M,(ABCD))=\frac{1}{2}SO$ suy ra $V_{MABN}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ (1)

Từ giả thiết ta có $V_{(H)}=V_{S.ABCD}-V_{ABM.DJI}$. (2)

Xét trong khối chóp $N.ABM$ áp dụng công thức tính tỷ số thể tích ta có

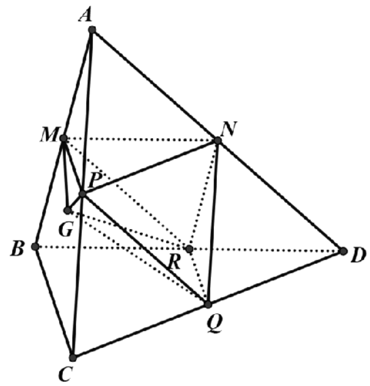
$\frac{V_{NDJI}}{V_{NABM}}=\frac{NI}{NM}.\frac{ND}{NA}.\frac{NJ}{NB}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow V_{NDJI}=\frac{1}{6}V_{NABM}$ do vậy $V_{ABM.DJI}=\frac{5}{6}V_{NABM}=\frac{5}{6}V_{MABN}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có thể tích của (H) là

$$V_{(H)} = V_{S.ABCD} - \frac{5}{6}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{7}{12}.$$

Vậy thể tích của khối đa diện (H) bằng $\frac{7}{12}$.

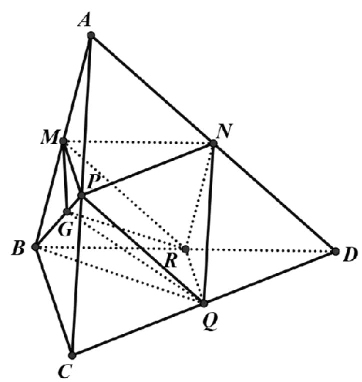
Câu 43. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là trọng tâm tam giác ABC (như hình vẽ). Tính thể tích khối đa diện lồi $MNPQRG$ theo V.



A. $\frac{V}{2}$. **B.** $\frac{V}{6}$. **C.** $\frac{V}{3}$. **D.** $\frac{2V}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{MNPQRG} = V_{G.MPQR} + V_{N.MPQR}$

$$V_{G.MPQR} = \frac{1}{3}V_{B.MPQR} = \frac{2}{3}V_{B.PQR}$$

$$= \frac{2}{3}V_{P.BQR} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}V_{A.BQR}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{4}V_{A.BCD} = \frac{1}{12}V$$

$$V_{N.MPQR} = 2V_{N.MPR} = 2.V_{P.MNR}$$

$$= 2.\frac{1}{2}V_{C.MNR} = \frac{1}{4}V_{C.ABD}$$

$$= \frac{1}{4}V.$$

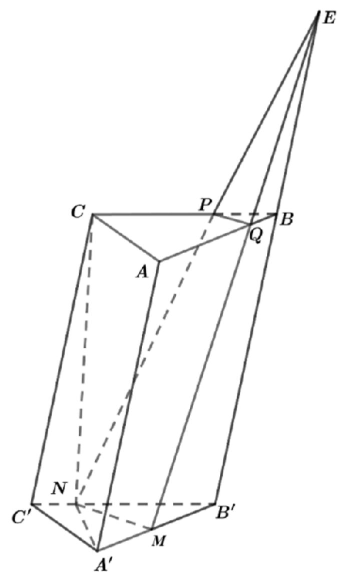
Vậy $V_{MNPQRG} = \frac{1}{12}V + \frac{1}{4}V = \frac{V}{3}$.

Câu 44. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N và P là các điểm nằm trên cạnh $A'B', B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$, $B'N=\frac{3}{4}B'C'$ và $BP=\frac{1}{4}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $AQPCA'MNC'$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{59}{12}$. **D.** $\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{EB}{EB'}=\frac{EQ}{EM}=\frac{EP}{EN}=\frac{BP}{B'N}=\frac{1}{3}$.

Suy ra $d\left(E,\left(A'B'C'\right)\right)=\frac{3}{2}d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right)$.

Mà ta lại có $\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}}=\frac{B'N}{B'C'}.\frac{B'M}{B'A'}=\frac{3}{8}$.

Và $V_{E.MB'N}=\frac{1}{3}d\left(E,\left(MB'N\right)\right).S_{MB'N}=\frac{3}{16}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{9}{8}$.

Ta lại có $\frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MNB'}}=\frac{EQ}{EM}.\frac{EP}{EN}.\frac{EB}{EB'}=\left(\frac{EB}{EB'}\right)^3=\frac{1}{27}$.

Suy ra $V_{BQP.B'MN}=V_{E.MB'N}-V_{EBQP}=\frac{26}{27}V_{E.MB'N}$.

Vậy $V_{AQPCA'MNC'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{BQP.B'MN}=6-\frac{26}{27}.\frac{9}{8}=\frac{59}{12}$.

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI
☞https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing

Theo dõi Fanpage: Nguyễn Bảo Vương ☞ https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Hoặc Facebook: Nguyễn Vương ☞ https://www.facebook.com/phong.baovuong