Chuyên đề 33 XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

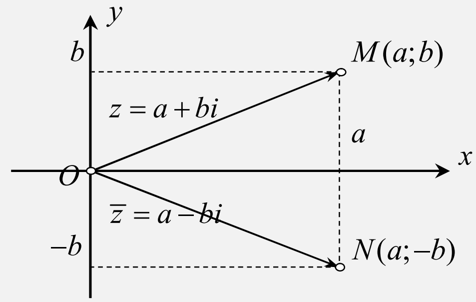
① *Số phức $z=a+bi$ có phần thực là a, phần ảo là b.*

② *Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ và cần nhớ $i^2=-1$.*

③ *Số phức $z=a+bi$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$.*

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ có điểm biểu diễn $N(a;-b)$.

Hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục hoành Ox.



• $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$;

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

• $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$

• $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$ ◆ **Phép trừ hai số phức**

$z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}}=\frac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

<u>Dạng toán</u>. **Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K ?**

— **Bước 1**. Gọi số phức cần tìm là $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

— **Bước 2**. Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z,\overline{z},|z|,\ldots$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình $\Rightarrow x,y$.

✍ **Lưu ý**

Trong trường phức $\mathbb{C}$, cho số phức $z=x+y.i$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x,\ y\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$. Khi đó, ta cần nhớ:

— Mônđun của số phức $z=x+y.i$ là $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\text{thực})^2+(\text{ảo})^2}$.

— Số phức liên hợp của $z=x+y.i$ là $\overline{z}=x-y.i$ (ngược dấu ảo).

— Hai số phức $z_1=x_1+y_1.i$ và $z_2=x_2+y_2.i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$ (hai số phức bằng nhau khi thực = thực và ảo = ảo).

Dạng 1. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=a+bi \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi$

Vì $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2=25 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=4 \\ a=b=-3 \\ b=-a=4 \\ b=-a=-3 \end{array}\right. .$$

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=-4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=4$

Lời giải

Chọn A

Ta có $z+2+i=|z| \Leftrightarrow (a+2)+(b+1)i=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2=\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ b+1=0 & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có: $b=-1$. Thay vào (1): $\sqrt{a^2+1}=a+2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2\ge 0 \\ a^2+1=(a+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{-3}{4}$

Vậy $S=4a+b=-4$

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z+2+i-|z|(1+i)=0 \Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0$

$$\Leftrightarrow a+2-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (1) \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $a-b+1=0 \Leftrightarrow b=a+1$. Thế vào (1) ta được:

$$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0 \Leftrightarrow a+2=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2+4a+4=2a^2+2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ \left[\begin{array}{ll} a=3 & (tm) \\ a=-1 & (tm) \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $a=3 \Rightarrow b=4$; $a=-1 \Rightarrow b=0$.

Vì $|z|>1 \Rightarrow z=3+4i \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow P=a+b=3+4=7$.

Câu 4. **(Mã 110 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

<u>C</u>họn <u>D</u>

Gọi số phức $z = x + yi \ \ (x, y \in \mathbb{R})$, vì $(z-1)^2 = \left[(x-1)^2 - y^2\right] + 2(x-1)yi$ là số thuần ảo nên theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8 & (1) \\ (x-1)^2 = y^2 & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra: $y = \pm\,(x-1)$

• Với $y = x-1$, thay vào (1), ta được: $(x+2)^2 + (x-2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Suy ra: $z = -i$.

• Với $y = -(x-1)$, thay vào (1), ta được:

$(x+2)^2 + (-x)^2 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}.$

Suy ra: $z = \left(-1+\sqrt{3}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right)i$; $z = \left(-1-\sqrt{3}\right) + \left(2+\sqrt{3}\right)i$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 5. **(Mã 104 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i = (6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

<u>C</u>họn <u>B</u>

Ta có $|z|(z-5-i)+2i = (6-i)z \Leftrightarrow (|z|-6+i)z = 5|z| + (|z|-2)i \quad (1)$

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$\sqrt{(|z|-6)^2+1}.|z| = \sqrt{25|z|^2 + (|z|-2)^2}$

Bình phương và rút gọn ta được:

$|z|^4 - 12|z|^3 + 11|z|^2 + 4|z| - 4 = 0 \Leftrightarrow (|z|-1)\left(|z|^3 - 11|z|^2 + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z| = 1 \\ |z|^3 - 11|z|^2 + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z| = 1 \\ |z| = 10,9667... \\ |z| = 0,62... \\ |z| = -0,587... \end{array}\right.$

Do $|z| \geq 0$, nên ta có $|z| = 1$, $|z| = 10,9667...$, $|z| = 0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

Câu 6. **(Mã 103 2018)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i = (7-i)z$?

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

<u>C</u>họn <u>D</u>

Đặt $|z| = a \geq 0, a \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i = (7-i)z \Leftrightarrow a(z-6-i)+2i = (7-i)z \Leftrightarrow (a-7+i)z = 6a + ai - 2i$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z = 6a + (a-2)i \Leftrightarrow |(a-7+i)||z| = |6a + (a-2)i|$

$\Leftrightarrow\left[(a-7)^2+1\right]a^2=36a^2+(a-2)^2 \Leftrightarrow a^4-14a^3+13a^2+4a-4=0$

$\Leftrightarrow(a-1)(a^3-13a^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a^3-12a^2+4=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(a)=a^3-13a^2\,(a\geq 0)$, có bảng biến thiên là

a	0		$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{8788}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng $y=-4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3-12a^2+4=0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1)\neq 0$). Mỗi giá trị của a cho ta một số phức z.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Câu 7. **(Mã 102 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

$|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z \Leftrightarrow (|z|-4+i)z=3|z|+(|z|-2)i$ (*)

$\Rightarrow \sqrt{(|z|-4)^2+1}.|z|=\sqrt{9|z|^2+(|z|-2)^2}$ (1).

Đặt $m=|z|\geq 0$ ta có

$(1)\Leftrightarrow\left((m-4)^2+1\right).m^2=9m^2+(m-2)^2 \Leftrightarrow m^4-8m^3+7m^2+4m-4=0$

$\Leftrightarrow(m-1)(m^3-7m^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m^3-7m^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m\approx 6,91638 \\ m\approx 0.80344 \\ m\approx -0.71982 \quad (\mathrm{L}) \end{array}\right.$.

Từ (*) ta suy ra ứng với mỗi $|z|=m$ sẽ có một số phức $z=\dfrac{3m+(m-2)i}{m-4+i}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. **(Mã 105 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$ **B.** $|z|=\sqrt{17}$ **C.** $|z|=\sqrt{10}$ **D.** $|z|=10$

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$

Theo bài ra ta có $\begin{cases}(x+3)^2+y^2=25 \\ x^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2+y^2=25 \\ -4x+4=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 3 \\ x = 1 \end{cases}$. Vậy $|z| = \sqrt{10}$

Câu 9. **(Mã105 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i| = \sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$

Ta có $|z+3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow |a+bi+3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow a^2 + (b+3)^2 = 13$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 6b - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4 - 6b \,(1)$

$\dfrac{z}{z+2} = 1 - \dfrac{2}{z+2} = 1 - \dfrac{2}{a+2+bi} = 1 - \dfrac{2(a+2-bi)}{(a+2)^2 + b^2}$.

$= \dfrac{(a+2)^2 + b^2 - 2a - 4}{(a+2)^2 + b^2} + \dfrac{2b}{(a+2)^2 + b^2} i = \dfrac{a^2 + b^2 + 2a}{(a+2)^2 + b^2} + \dfrac{2b}{(a+2)^2 + b^2} i$

Do $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo nên $\dfrac{a^2 + b^2 + 2a}{(a+2)^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2a = 0 \,(2) \\ a \neq -2 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta có $4 - 6b + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 3b - 2$ thay vào (1) ta có

$(3b-2)^2 + b^2 - 4 + 6b = 0 \Leftrightarrow 10b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 (L) \\ b = \dfrac{3}{5} \Rightarrow a = \dfrac{-1}{5} \end{array} \right.$

Vậy có một số phức cần tìm.

Câu 10. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z.\bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x;\ y \in \mathbb{R};\ i^2 = -1$).

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} |x^2 + y^2 + x + yi| = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4 + x + yi| = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4+x)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy có 1 số phức thỏa yêu cầu bài toán là $z = -2$.

Câu 11. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R},i^2=-1\right)$

Ta có

$$\begin{cases}\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6\\ |z|=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+\left(b+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{a^2+\left(b-\sqrt{5}\right)^2}=6\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}36a^2+16b^2=144\\ a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{16}{5}\\ b^2=\dfrac{9}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\ b=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn.

Câu 12. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải

Giả sử $z_1=a+bi$, $(a,\ b\in\mathbb{R})$; $z_2=c+di$, $(c,\ d\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}|z_1|=2\\ |z_2|=2\\ |z_1+2z_2|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\ c^2+d^2=4\\ (a+2c)^2+(b+2d)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4 & (1)\\ c^2+d^2=4 & (2)\\ a^2+b^2+4\left(c^2+d^2\right)+4(ac+bd)=16 & (3)\end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $ac+bd=-1$ (4).

Ta có $|2z_1-z_2|=\sqrt{(2a-c)^2+(2b-d)^2}=\sqrt{4\left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)-4(ac+bd)}$ (5).

Thay $(1),(2),(4)$ vào (5) ta có $|2z_1-z_2|=2\sqrt{6}$.

Câu 13. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Môđun của số phức $w=1-z+z^2$ bằng

A. $|w|=\sqrt{445}$. **B.** $|w|=\sqrt{425}$. **C.** $|w|=\sqrt{37}$. **D.** $|w|=\sqrt{457}$

Lời giải

Đặt $z=a+bi$ $\left(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{R}\right)$.

Khi đó: $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-2a+2bi=-7+3i+a+bi$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-3a+7\right)+(b-3)i=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=3\\ a=\dfrac{5}{4}\end{cases}\ (a\geq \dfrac{7}{3}).\\ \begin{cases}b=3\\ a=4\end{cases}\end{array}\right.$$

Do $a\in\mathbb{Z}$ nên $a=4 \Rightarrow z=4+3i \Rightarrow w=4+21i \Rightarrow |w|=\sqrt{457}$

Câu 14. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $|z-4|i+|z-2i|=\sqrt{5}(1+i)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b$.

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Lời giải

$$|z-4|i+|z-2i|=\sqrt{5}(1+i) \Leftrightarrow |a+bi-4|i+|a+bi-2i|=\sqrt{5}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|a-4+bi|=\sqrt{5} & (1)\\ |a+(b-2)i|=\sqrt{5} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có $|a-4+bi|=|a+(b-2)i| \Leftrightarrow (a-4)^2+b^2=a^2+(b-2)^2 \Rightarrow b=2a-3$.

Kết hợp với (1), ta được: $\begin{cases}(a-4)^2+b^2=5\\ b=2a-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

Vậy $T=a+b=3$.

Câu 15. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i|z|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

$$z^3+2i|z|^2=0 \Leftrightarrow z^3+2iz\overline{z}=0 \Leftrightarrow z\left(z^2+2i\overline{z}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=0\\ z^2+2i\overline{z}=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

Gọi $z=x+yi \Rightarrow \overline{z}=x-yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thay vào (2) có:

$$x^2-y^2+2y+2x(y+1)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2y=0\\ 2x(y+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2y=0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ y=-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ -y^2+2y=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=-1\\ x^2-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\ \begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}z=0\\ z=2i\\ z=-\sqrt{3}-i\\ z=\sqrt{3}-i\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm

Câu 16. Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z+1-2i|=|\overline{z}+3+4i|$ và $\dfrac{z-2i}{\overline{z}+i}$ là một số thuần ảo

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$

Theo bài ra ta có

$|x+1+(y-2)i|=|x+3+(4-y)i|$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2\Leftrightarrow y=x+5$

Số phức $w=\dfrac{z-2i}{\overline{z}+i}=\dfrac{x+(y-2)i}{x+(1-y)i}=\dfrac{x^2-(y-2)(y-1)+x(2y-3)i}{x^2+(y-1)^2}$

w là một số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-(y-2)(y-1)=0\\ x^2+(y-1)^2>0\\ y=x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{12}{7}\\ y=\dfrac{23}{7}\end{cases}$

Vậy $z=-\dfrac{12}{7}+\dfrac{23}{7}i$.Vậy chỉ có 1 số phức z thỏa mãn.

Câu 17. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Gọi số phức cần tìm là $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z.\overline{z}=|z|^2=a^2+b^2=25\quad(1)$.

Lại có: $|z-(2+i)|=\sqrt{10}\Leftrightarrow|a-2+(b-1)i|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-1)^2=10$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-4a-2b+5=10\quad(2)$

Thay (1) vào (2) ta được: $25-4a-2b+5=10\Leftrightarrow b=-2a+10$.

Nên $a^2+b^2=25\Leftrightarrow a^2+(-2a+10)^2=25$

$\Leftrightarrow 5a^2-40a+75=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\ a=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=4\end{array}\right.$

Vậy Vậy có 2 số phức z thoả mãn là $z=5$ và $z=3+4i$.

Câu 18. (THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\overline{z}|i+(z+\overline{z})i^{2019}=1$?

A. 4 **B.** **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=a+bi$; $(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Ta có: $|z-1|^2=|a+bi-1|^2=(a-1)^2+b^2$, $|z-\overline{z}|i=|a+bi-a+bi|i=\sqrt{(2b)^2}i=2|b|i$,

$i^{2019}=-i$, $(z+\overline{z})i^{2019}=-i(a+bi+a-bi)=-2ai$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với: $(a-1)^2+b^2+2|b|i-2ai=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+b^2=1\\ 2|b|-2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-2a+b^2=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2|b|^2-2|b|=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}|b|=0\\ |b|=1\end{array}\right.\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Câu 19. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|$ và z^2 là số thuần ảo

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z|^2=|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}| \Leftrightarrow a^2+b^2=|2a|+|2bi|$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=2|a|+2|b|\ (1)$.

Lại có $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ là số thuần ảo, suy ra $a^2-b^2=0\Leftrightarrow a=\pm b$

Trường hợp 1: $a=b$ thay vào (1) ta được:

$$\Leftrightarrow 2a^2=4|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|a|=0\\ |a|=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\pm2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=0\\ a=b=\pm2\end{array}\right..$$

Trường hợp 2: $a=-b$ thay vào (1) ta được:

$$\Leftrightarrow 2a^2=4|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|a|=0\\ |a|=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\pm2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\mp2\end{array}\right..$$

Vậy có 5 số phức thỏa mãn bài toán là $z=0$, $z=2\pm2i$, $z=-2\pm2i$.

Câu 20. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i|z|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

$$z^3+2i|z|^2=0\Leftrightarrow z^3+2iz\overline{z}=0\Leftrightarrow z\left(z^2+2i\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=0\\ z^2+2i\overline{z}=0\quad (2)\end{array}\right.$$

Gọi $z=x+yi\Rightarrow \overline{z}=x-yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thay vào (2) có:

$$x^2-y^2+2y+2x(y+1)i=0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2y=0\\ 2x(y+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2y=0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ y=-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ -y^2+2y=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=-1\\ x^2-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2i \\ z=-\sqrt{3}-i \\ z=\sqrt{3}-i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm

Câu 21. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3|=|z-1|$ và $(z+2)(\overline{z}-i)$ là số thực. Tính $a+b$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

+)

$|z-3|=|z-1| \Leftrightarrow |a-3+bi|=|a-1+bi| \Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+b^2=(a-1)^2+b^2 \Leftrightarrow -4a+8=0 \Leftrightarrow a=2$.

+) $(z+2)(\overline{z}-i)=(a+bi+2)(a-bi-i)=[(a+2)+bi][a-(b+1)i]$

$=a(a+2)+b(b+1)-(a+2b+2)i$.

$(z+2)(\overline{z}-i)$ là số thực $\Leftrightarrow a+2b+2=0$.

Thay $a=2$ tìm được $b=-2$. Vậy $a+b=0$.

Câu 22. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Ta có $z+1+3i-|z|i=0 \Leftrightarrow (a+1)+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{1+b^2}=b+3 \qquad (*) \end{cases}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} b\ge -3 \\ 1+b^2=(b+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\ge -3 \\ b=-\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow b=-\frac{4}{3}.$$

Vậy $\begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S=2a+3b=-6$.

Câu 23. Cho ba số phức $z_1;\ z_2;\ z_3$ thỏa mãn $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính

$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

$$z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=-z_3 \\ z_1+z_3=-z_2 \\ z_3+z_2=-z_1 \end{cases}.$$

$$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|-z_1|^2+|-z_2|^2+|-z_3|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=3.\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{8}{3}.$$

Câu 24. **(THPT Chuyên Hạ Long - Lần 2 - 2018)** Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$ thỏa mãn $|z+2+5i|=5$ và $z.\overline{z}=82$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 10. **B.** -8. **C.** -35. **D.** -7.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \sqrt{(a+2)^2+(b+5)^2}=5 \\ a^2+b^2=82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-5b-43}{2} & (1) \\ a^2+b^2=82 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $29b^2+430b+1521=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-9 \\ b=\dfrac{-169}{29} \end{array}\right.$

Vì $b\in\mathbb{Z}$ nên $b=-9\Rightarrow a=1$. Do đó $P=a+b=-8$.

Câu 25. **(Đồng Tháp - 2018)** Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P=\sqrt{2}$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|2z-i|=|2+iz| \Leftrightarrow |2x+(2y-1)i|=|2-y+xi| \Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là đường tròn $(O;1) \Rightarrow |z_1|=|z_2|=1$.

Ta có: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow P^2=3\Rightarrow P=\sqrt{3}$.

Câu 26. (Chuyên Quang Trung -

2018) Cho số phức z thoả mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán. Khi đó:

A. $m_0\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0\in\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $m_0\in\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $m_0\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Đặt: $w=\frac{1+i}{z}=\frac{1+i}{a+bi}=\frac{1}{a^2+b^2}\left[a+b+(a-b)i\right]=\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b\ (1)$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2=m^2\ (2)$.

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2\Leftrightarrow 2a^2-4a+4-m^2=0\quad(3)$.

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm a duy nhất.

$\Leftrightarrow\Delta'=0\ \Leftrightarrow 4-2\left(4-m^2\right)=0\ \Leftrightarrow m^2=2\Leftrightarrow m=\sqrt{2}\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$ (Vì m là mô-đun).

Trình bày lại

Giả sử $z=a+bi$, vì $z\neq0$ nên $a^2+b^2>0\ (*)$.

Đặt: $w=\frac{1+i}{z}=\frac{1+i}{a+bi}=\frac{1}{a^2+b^2}\left[a+b+(a-b)i\right]=\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b\ (1)$.Kết hợp $(*)$ suy ra $a=b\neq0$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2=m^2\ (2)$.(Vì m là mô-đun nên $m\geq0$).

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2\Leftrightarrow g(a)=2a^2-4a+4-m^2=0\quad(3)$.

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm $a\neq0$ duy nhất.

Có các khả năng sau :

KN1 : PT (3) có nghiệm kép $a\neq0$

ĐK: $\begin{cases}\Delta'=0\\ g(0)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2=0\\ 4-m^2\neq0\end{cases}\Rightarrow m=\sqrt{2}$.

KN2: PT (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $a=0$

ĐK: $\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2>0\\ 4-m^2=0\end{cases}\Rightarrow m=2$.

Từ đó suy ra $\exists m_0=\sqrt{2}\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 27. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có $\frac{z}{z-4}=\frac{x+iy}{x-4+iy}=\frac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4)^2+y^2}=\frac{x(x-4)+y^2-4iy}{(x-4)^2+y^2}$

là số thuần ảo khi $x(x-4)+y^2=0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=4$

Mà $|z-m|=6\Leftrightarrow(x-m)^2+y^2=36$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-m)^2+y^2=36\\(x-2)^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4-2m)x=36-m^2\\y^2=4-(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{36-m^2}{4-2m}\\y^2=4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2\end{cases}$$

Ycbt $\Leftrightarrow 4-\left(\frac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2=0\Leftrightarrow 2=\frac{36-m^2}{4-2m}-2$ hoặc $-2=\frac{36-m^2}{4-2m}-2$

$\Leftrightarrow m=10$ hoặc $m=-2$ hoặc $m=\pm6$

Vậy tổng là $10-2+6-6=8$.

Câu 28. **(Cần Thơ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 16. **D.** 4.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i\Leftrightarrow z(1+3i)-4+4i=(1+i)|z|$

$\Leftrightarrow(a+bi)(1+3i)-4+4i=(1+i)\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a-3b-4+(3a+b+4)i=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2}\\3a+b+4=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2}\\a=-2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5b-8=\sqrt{5b^2+16b+16}\\a=-2b-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5b-8\ge0\\20b^2+64b+48=0\\a=-2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\le-\dfrac{8}{5}\\\left[\begin{array}{l}b=-2\,(N)\\b=-\dfrac{6}{5}\,(L)\end{array}\right.\\a=-2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\a=0\end{cases}.$$

Vậy $|z|=2$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa $z.\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Lời giải

Ta có:

$z.\overline{z}-12|z|+\left(z-\overline{z}\right)=13-10i \Leftrightarrow a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}+2bi=13-10i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}=13 \\ 2b=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+25-12\sqrt{a^2+25}=13 \\ b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2+25}=13 \\ \sqrt{a^2+25}=-1\,(VN) \end{array}\right. \\ b=-5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 12 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=-5 \end{cases}$, vì $a>0$.

Vậy $S=a+b=7$.

Câu 30. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018)** Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. Số phức $w=\dfrac{13}{3}iz$ có môđun bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{26}}{2}$. **D.** 13.

Lời giải

Gọi $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Ta có $\dfrac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2 \Leftrightarrow \dfrac{i(a+bi)-(3i+1)(a-bi)}{1+i}=a^2+b^2$

$\Leftrightarrow ai-b-3ai-3b-a+bi=a^2+b^2+a^2i+b^2i$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+2a-b\right)i+\left(a^2+b^2+4b+a\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2a-b=0 \\ a^2+b^2+a+4b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26b^2+9b=0 \\ a=5b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0, a=0 \\ b=\dfrac{-9}{26}, a=\dfrac{-45}{26} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26} \end{array}\right. \Rightarrow z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26}\ \text{(Vì } z\neq 0\text{)}.$$

Với $z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26} \Rightarrow \text{w}=\dfrac{15}{2}-\dfrac{3}{2}i \Rightarrow |\text{w}|=\dfrac{3\sqrt{26}}{2}$.

Câu 31. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=1$, $|z_2|=2$ và $|z_1+z_2|=3$. Giá trị của $|z_1-z_2|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** một giá trị khác.

Lời giải

Giả sử $z_1=a_1+b_1i,\ \left(a_1,\, b_1\in\mathbb{R}\right),\ z_2=a_2+b_2i,\ \left(a_2,\, b_2\in\mathbb{R}\right)$.

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} |z_1|=1 \\ |z_2|=2 \\ |z_1+z_2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+b_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2=4 \\ (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+b_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2=4 \\ 2a_1a_2+2b_1b_2=4 \end{cases}.$$

Khi đó, ta có:

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) - (2a_1a_2 + 2b_1b_2)} = 1$.

Vậy $|z_1 - z_2| = 1$.

Câu 32. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Cho số phức $z = a + bi\,(a, b \in R)$ thỏa mãn $z + 7 + i - |z|(2 + i) = 0$ và $|z| < 3$. Tính $P = a + b$.

A. 5. **<u>B.</u>** $-\frac{1}{2}$. **C.** 7. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$a + 7 + (b+1)i - 2\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\,i = 0$

$$\begin{cases} a + 7 = 2\sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ \sqrt{a^2 + b^2} = b + 1 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow a + 7 = 2(b+1) \Rightarrow a = 2b - 5$ thế vào (2).

$$\sqrt{(2b-5)^2 + b^2} = b + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge -1 \\ 4b^2 - 22b + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} b = 4 \\ b = \frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

TH1: $b = 4 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow |z| = 5 > 3$. (loại)

TH2: $b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow |z| = \frac{5}{2} < 3$. (nhận).

$P = a + b = -\frac{1}{2}$.

Câu 33. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1| = 2\sqrt{3}$, $|z_2| = 3\sqrt{2}$. Hãy tính giá trị biểu thức $P = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2$.

<u>A.</u> $P = 60$. **B.** $P = 20\sqrt{3}$. **C.** $P = 30\sqrt{2}$. **D.** $P = 50$.

Lời giải

Đặt $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

Theo đề: $\begin{cases} |z_1| = 2\sqrt{3} \\ |z_2| = 3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 12 \\ c^2 + d^2 = 18 \end{cases}$

Vậy

$$P = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2$$
$$= (a-c)^2 + (b-d)^2 + (a+c)^2 + (b+d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 60$$

Câu 34. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018)** Cho số phức $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|w^2 + 4| = 2|w|$. Đặt $P = 8(x^2 - y^2) + 12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P = -\left(|\overline{w}|^2 - 2\right)^2$. **<u>B.</u>** $P = -\left(|w|^2 - 2\right)^2$. **C.** $P = -(|w| - 4)^2$. **D.** $P = -\left(|w|^2 - 4\right)^2$.

Lời giải

Ta có $w^2 + 4 = (x + yi)^2 + 4 = x^2 - y^2 + 2xyi + 4 \Rightarrow |w^2 + 4| = \sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2}$.

Do đó

$|w^2+4|=2|w| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-y^2+4\right)^2+4x^2y^2}=2\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(x^2-y^2+4\right)^2+4x^2y^2=4\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4-2x^2y^2+8\left(x^2-y^2\right)+16+4x^2y^2=4\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2-4\left(x^2+y^2\right)+4+8\left(x^2-y^2\right)+12=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+4+8\left(x^2-y^2\right)+12=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2\right)^2+8\left(x^2-y^2\right)+12=0$

$\Leftrightarrow 8\left(x^2-y^2\right)+12=-\left(x^2+y^2-2\right)^2 \Leftrightarrow P=-\left(|w|^2-2\right)^2$.

Câu 35. Số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-8|i+|z-6i|=5(1+i)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

A. $P=1$. **B.** $P=14$. **C.** $P=2$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z-8|i+|z-6i|=5(1+i) \Leftrightarrow |a+bi-8|i+|a+bi-6i|=5(1+i)$.

$\Leftrightarrow |a-8+bi|i+|a+(b-6)i|=5(1+i)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-8)^2+b^2}.i+\sqrt{a^2+(b-6)^2}=5.i+5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(a-8)^2+b^2}=5\\ \sqrt{a^2+(b-6)^2}=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-16a+64+b^2=25\\ a^2+b^2-12b+36=25\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2-16a=-39\ (1)\\ a^2+b^2-12b=-11\ (2)\end{cases}.$$

Lấy $(1)-(2)$ ta được: $-16a+12b+28=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{3b+7}{4}\ (3)$.

Thế (3) vào (2) ta được: $\left(\dfrac{3b+7}{4}\right)^2+b^2-12b=-11 \Leftrightarrow 25b^2-150b+225=0 \Leftrightarrow b=3 \Rightarrow a=4$.

Vậy $P=a+b=7$.

Câu 36. **(Chuyên Đại học Vinh 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\overline{z}|\mathrm{i}+\left(z+\overline{z}\right)\mathrm{i}^{2019}=1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=a+b\mathrm{i}$ ta được

$|z-1|^2+|z-\overline{z}|\mathrm{i}+\left(z+\overline{z}\right)\mathrm{i}^{2019}=1$

$\Leftrightarrow \left|a+b\mathrm{i}-1\right|^2+\left|a+b\mathrm{i}-a+b\mathrm{i}\right|\mathrm{i}+\left(a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}\right)\mathrm{i}^{2019}=1$ (ta có $\mathrm{i}^{2019}=\mathrm{i}^{2016+3}=\left(\mathrm{i}^4\right)^{504}.\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$).

$\Leftrightarrow (a-1)^2+b^2+2|b|\mathrm{i}-2a\mathrm{i}=1$

$\Leftrightarrow a^2-2a+b^2+2|b|\mathrm{i}-2a\mathrm{i}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=0 \\ 2|b|-2a=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=0 \\ a\ge 0 \\ b^2=a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+a^2=0 \\ a\ge 0 \\ b^2=a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0,\ b=0 \\ a=1,\ \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \end{cases}$

Suy ra có ba số phức thỏa mãn phương trình $z_1=0,\ z_2=1+\mathrm{i},\ z_3=1-\mathrm{i}$.

Câu 37. **(Thpt Hàm Rồng 2019)** Cho số phức $z=a+bi$, $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $z+2+i-|z|(1+i)=0 \Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0$.

$\Leftrightarrow \left(a+2-\sqrt{a^2+b^2}\right)+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (1) \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (2) \end{cases}$.

Lấy $(1)-(2)$ ta được $a-b+1=0 \Leftrightarrow b=a+1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2a^2+2a+1}=a+2 \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ 2a^2+2a+1=(a+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right.$.

+ Với $a=-1 \Rightarrow b=0 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow |z|=1$ (loại)

+ Với $a=3 \Rightarrow b=4 \Rightarrow z=3+4i \Rightarrow |z|=5$ (thỏa mãn).

Vậy $P=a+b=7$.

Câu 38. **(Sở GD Kon Tum - 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=|z+1-i|$ và $|z|^2+2\left(z+\bar{z}\right)=5$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=a+bi$ ($a,b\in R$). Ta có

$|z-2+3i|=|z+1-i| \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+3)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$

$\Leftrightarrow 6a-8b-11=0 \Leftrightarrow b=\dfrac{6a-11}{8}$ (1); $|z|^2+2(z+\bar{z})=5 \Leftrightarrow a^2+b^2+4a=5$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có: $a^2+\dfrac{(6a-11)^2}{64}+4a=5 \Leftrightarrow 100a^2+124a-199=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{-31+4\sqrt{371}}{50} \\ a=\dfrac{-31-4\sqrt{371}}{50} \end{array}\right.$

Suy ra có hai số phức z thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa mãn $z.\bar{z}-12|z|+(z-\bar{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $z.\bar{z}-12|z|+(z-\bar{z})=13-10i \Leftrightarrow a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}+(a+bi-a+bi)=13-10i$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}\right)+2bi=13-10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}=13 & (1) \\ 2b=-10 & (2) \end{cases}$.

Từ (2) suy ra $b=-5$ thay vào (1) ta được $a^2+25-12\sqrt{a^2+25}=13$.

Đặt $t=\sqrt{a^2+25}>0$ khi đó ta có phương trình $t^2-12t-13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \ (\text{loại}) \\ t=13 \ (\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$.

Với $t=13 \Rightarrow \sqrt{a^2+25}=13 \Leftrightarrow a^2=144 \Leftrightarrow a=12$ (vì $a>0$). Vậy $S=a+b=12-5=7$.

Câu 40. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

$|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và $|z+2|^2-|z-i|^2=33$. Module của số phức $z-2-i$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 9. **C.** 25. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết: $\begin{cases}|z-3-4i|=\sqrt{5}\\|z+2|^2-|z-i|^2=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{5}\\(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=33\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=5\\4x+2y+3=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(15-2x-4)^2=5\\y=15-2x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-50x+125=0\\y=15-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}\Leftrightarrow z=5+5i$.

Vậy $|z-2-i|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Câu 41. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(z+1+i)(\overline{z}-i)+3i=9$ và $|\overline{z}|>2$. Tính $P=a+b$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

$z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$; $|\overline{z}|=a^2+b^2$.

Theo bài ra ta có: $|\overline{z}|>2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}>2$ (*).

$(z+1+i)(\overline{z}-i)+3i=9\Leftrightarrow[a+1+(b+1)i][a-(b+1)i]+3i=9$

$\Leftrightarrow a(a+1)+(b+1)^2-(b+1)i=9-3i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a(a+1)+(b+1)^2=9\\-(b+1)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\a^2+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0;b=2.\\a=-1;b=2.\end{array}\right.$

TH $a=0$; $b=2$ loại do không thỏa mãn (*).
TH $a=-1$; $b=2$ thỏa mãn nên $P=a+b=1$.

Câu 42. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ và $|z_1-iz_2|=6$. Biết $|z_2|>|z_1|$, tính $|z_2|$.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left|z_1-z_2\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|z_1-z_2\right|}{\left|z_1\right|}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|1-\frac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{2}$ (1).

Ta lại có: $\left|z_1-iz_2\right|=6 \Leftrightarrow \left|1-i\frac{z_2}{z_1}\right|=2$ (2). Ta gọi $\frac{z_2}{z_1}=x+yi;\ x,\ y\in\mathbb{R}$.

Từ (1), (2) suy ra: $\left|1-\frac{z_2}{z_1}\right|=2 \Leftrightarrow (1-x)^2+y^2=2$.

$\left|1-i\frac{z_2}{z_1}\right|=2 \Leftrightarrow (1+y)^2+x^2=4$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(1-x)^2+y^2=2\\(1+y)^2+x^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1\\x=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}y=-1\\x=2\end{cases}$.

Vậy: $\frac{z_2}{z_1}=0+i \Rightarrow \left|z_2\right|=\left|z_1\right|$ (loại).

$\frac{z_2}{z_1}=2-i \Rightarrow \left|z_2\right|=\left|z_1\right|.\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ (nhận).

Câu 43. Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\left(z+\frac{5}{|z|}\right)i=7-z$.

A. 3. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Theo giả thiết $\left(z+\frac{5}{|z|}\right)i=7-z \Leftrightarrow |z|(a+bi)i+5i-7|z|+(a+bi)|z|=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\,(a-b-7)+\left((a+b)\sqrt{a^2+b^2}+5\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a-b-7=0\\(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+5=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=b+7\\(2b+7)\sqrt{2b^2+14b+49}=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b+7\\(2b+7)^2\left(2b^2+14b+49\right)=25\\2b+7\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=b+7\\2b+7\le 0\\\left(4b^2+28b+98-49\right)\left(2b^2+14b+49\right)-25=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=b+7\\b\le -\frac{7}{2}\\2b^2+14b+49=25\\2b^2+14b+49=-\frac{1}{2}\text{(loai)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-4\\a=3\end{cases}.$$

Vậy có một số phức thỏa mãn điều kiện là $z=3-4i$ có phần thực là 3.

Vậy tổng phần thực của tất cả các số phức z là 3.

Dạng 2. Một số bài toán liên quan đến số phức có lũy thừa bậc cao, chứa tham số

Câu 44. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức $z=\left(1+i\right)^{2019}$. Phần thực của z bằng

A. -2^{1009}. **B.** 2^{2019}. **C.** -2^{2019}. **D.** 2^{1009}.

Lời giải

Cách 1: Phương pháp lượng giác

Xét số phức $z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Ta có số phức $z=z_1{}^{2019}=\left(1+i\right)^{2019}=\sqrt{2}^{2019}\left(cos\frac{2019\pi}{4}+i\sin\frac{2019\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}^{2019}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^{2019}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2^{1009}+2^{1009}i$

Phần thực của z bằng -2^{1009}.

Cách 2:

Ta có $z=\left(1+i\right)^{2019}=\frac{(1+i)^{2020}}{1+i}=\frac{(-4)^{505}}{(1+i)}=(-4)^{505}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)=-2^{1009}+2^{1009}i$

Phần thực của z bằng -2^{1009}.

Câu 45. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Số phức $z=\left(1+i\right)+\left(1+i\right)^2+...+\left(1+i\right)^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009}+1$. **B.** $1-2^{1009}$. **C.** $2^{1009}-1$. **D.** $-\left(2^{1009}+1\right)$.

Lời giải

$z=\left(1+i\right)+\left(1+i\right)^2+...+\left(1+i\right)^{2018}$

$=\left(1+i\right)\frac{\left(1+i\right)^{2018}-1}{\left(1+i\right)-1}=\left(1+i\right)\frac{2^{1009}i-1}{i}$

$=\left(1+i\right)\left(2^{1009}+i\right)=2^{1009}-1+\left(2^{1009}+1\right)i$.

$\Rightarrow z$ có phần ảo bằng $2^{1009}+1$.

Câu 46. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Gọi T là tổng phần thực, phần ảo của số phức $w=i+2i^2+3i^3+...+2018i^{2018}$. Tính giá trị của T.

A. $T=0$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Lời giải

$w=i\left(1+2i+3i^2+...+2018i^{2017}\right)$

Xét $f(x)=x+x^2+x^3+...+x^{2018}=x\frac{x^{2018}-1}{x-1}=\frac{x^{2019}-x}{x-1}$

$f'(x)=1+2x+3x^2+...+2018x^{2017}=\frac{\left(2019x^{2018}-1\right)(x-1)-\left(x^{2019}-x\right)}{(x-1)^2}$

$w=i\left(1+2i+3i^2+...+2018i^{2017}\right)=i.f'(i)=i\frac{\left(2019i^{2018}-1\right)(i-1)-\left(i^{2019}-i\right)}{(i-1)^2}$

$$= i\frac{-2020(i-1)+2i}{-2i} = -1010+1009i$$

$T = -1010+1009 = -1$.

Câu 47. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1+z_2+z_3 = 1 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $S = z_1^{2019} + z_2^{2019} + z_3^{2019}$.

A. $S=-1$. **B.** $S=2^{2019}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2^{-2019}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $(1): |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $(2): z_1+z_2+z_3=1$.

Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3.

Từ $(1) \Rightarrow OA = OB = OC = 1 \Rightarrow$ Đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=1$ ngoại tiếp ΔABC.

Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm ΔABC.

Vì G là điểm biểu diễn số phức $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ mà $\overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OG}$ nên từ $(2) \Rightarrow H(1;0)$.

Dễ thấy $H \in (C)$ nên ΔABC vuông.

Giả sử ΔABC vuông tại $C \Rightarrow C(1;0) \Rightarrow z_3 = 1$.

$\Rightarrow z_1+z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = -z_2 \Rightarrow z_1^{2019} = -z_2^{2019} \Rightarrow z_1^{2019} + z_2^{2019} = 0$.

Vậy $S=1$.

Câu 48. Tính $S = i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2019i^{2019}$

A. $S=-1010-1010i$. **B.** $S=1010-1010i$. **C.** $S=2019i$. **D.** $S=1010+1010i$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} S &= i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2019i^{2019} \\ &= i - 2 - 3i + 4 + ... + 2016 + 2017i - 2018 - 2019i \\ &= (4+8+...+2016) + (-2-6-...-2018) + (i+5i+...+2017i) + (-3i-7i-...-2019i) \end{aligned}$$

$$= (4+8+...+2016) + (-2-6-...-2018) + (i+5i+...+2017i) + (-3i-7i-...-2019i)$$

$$= \frac{4+2016}{2}\left(\frac{2016-4}{4}+1\right) - \frac{2+2018}{2}\left(\frac{2018-2}{4}+1\right)$$

$$+ \frac{1+2017}{2}\left(\frac{2017-1}{4}+1\right)i - \frac{3+2019}{2}\left(\frac{2019-3}{4}+1\right)i$$

$$= -1010-1010i.$$

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $z^2+z+1=0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2 + ... + \left(z^{2019}+\frac{1}{z^{2019}}\right)^2.$$

A. $P=4038$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=673$. **D.** $P=6073$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2+z+1=0 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z^3=1 \Rightarrow \begin{cases} z^{3n}=1 \\ z^{3n+1}=z \\ z^{3n+2}=z^2 \end{cases}$.

Mà $P=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)^2=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^{2k}+\frac{1}{z^{2k}}+2\right)=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^{2k}+\frac{1}{z^{2k}}\right)+2.2019$

Ta có $z^2+z+1=z^2+z^4+z^6=...=z^{4034}+z^{4036}+z^{4038}=0$,

$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}=\frac{z^2+z^4+z^6}{z^6}=\frac{z^2+z+1}{z^6}=0$

Tương tự $\frac{1}{z^8}+\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{z^{12}}=...=\frac{1}{z^{4034}}+\frac{1}{z^{4036}}+\frac{1}{z^{4038}}=0$

Vậy $P=4038$.

Câu 50. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Khai triển của biểu thức $(x^2+x+1)^{2018}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+...-a_{4034}+a_{4036}$ bằng

A. 2^{1009}. **B.** -2^{1009}. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

$(x^2+x+1)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4036}x^{4036}$.

Thay $x=i$ với $i^2=-1$ ta được:

$(-1)^{1009}=a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+...+a_{4034}i^{4034}+a_{4035}i^{4035}+a_{4036}i^{4036}$.

Đối chiếu phần thực ở hai vế ta được: $-1=a_0-a_2+a_4-a_6+...-a_{4034}+a_{4036}$.

Nhận xét: Ngoài cách trên ta có thể thay 2018 bằng 2, 4 để tính trực tiếp S.

Câu 51. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4=|z|$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thì $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ và

$z^4=(a+bi)^4=(a^2-b^2+2abi)^2=(a^2-b^2)^2-4a^2b^2+4ab(a^2-b^2)i$.

Ta có $z^4=|z| \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2-4a^2b^2+4ab(a^2-b^2)i=\sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra $\begin{cases} 4ab(a^2-b^2)=0,(1) \\ (a^2-b^2)^2-4a^2b^2=\sqrt{a^2+b^2},(2) \end{cases}$

Xét $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ a^2=b^2 \end{array}\right.$.

Với $a=0$ thì từ $(2) \Rightarrow b^4=|b| \Rightarrow b=0, b=1, b=-1$ ta được $z=0; z=i; z=-i$.

Với $b=0$ thì từ $(2) \Rightarrow a^4=|a| \Rightarrow a=0, a=1, a=-1$ ta được $z=0; z=1; z=-1$.

Với $a^2=b^2$ thì từ $(2) \Rightarrow -4a^4=\sqrt{2a^2}=|a|\sqrt{2} \Rightarrow a=0, b=0$ $z=0$ ta được $z=0$.

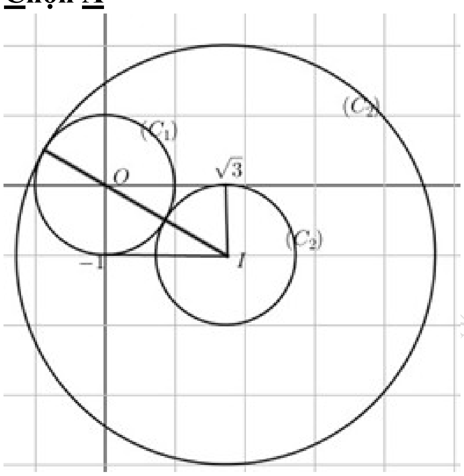
Vậy $S=\{0;1;-1;i;-i\}$.

Câu 52. **(Mã 104 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Gọi $z=x+yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có hệ $\begin{cases} x^2+y^2=1 \ (1) \\ \left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y+1)^2=m^2 \ (m \geq 0) \end{cases}$

Ta thấy $m=0 \Rightarrow z=\sqrt{3}-i$ không thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ suy ra $m>0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0), R_1=1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I\left(\sqrt{3};-1\right), R_2=m$, ta thấy $OI=2>R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1).

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều này xảy ra khi $OI=R_1+R_2 \Leftrightarrow m+1=2 \Leftrightarrow m=1$ hoặc $R_2=R_1+OI \Leftrightarrow m=1+2=3$

Câu 53. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z=\dfrac{m+2i}{m-2i}$ có phần thực dương

A. $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<-2$.

Lời giải

$z=\frac{m+2i}{m-2i}=\frac{(m+2i)(m+2i)}{m^2+4}=\frac{m^2-4}{m^2+4}+\frac{4m}{m^2+4}i$.

Vì z có phần thực dương $\Rightarrow m^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Câu 54. **(Kon Tum - 2019)** Cho hai số phức $z=3-4i$ và $z'=(2+m)+mi\,(m\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z'|=|iz|$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng

A. -1. **B.** $\frac{\sqrt{46}}{2}$. **C.** 0. **D.** -2.

lời giải:

Chọn D

Ta có $|z'|=\sqrt{(2+m)^2+m^2}$ và $|iz|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

vậy ta có phương trình $(2+m)^2+m^2=25 \Leftrightarrow 2m^2+4m-21=0 \Rightarrow m_1+m_2=-\frac{4}{2}=-2$

Câu 55. Biết rằng $z=m^2-3m+3+(m-2)i$, với $m\in\mathbb{R}$, là một số thực. Giá trị của biểu thức $P=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}$ bằng

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=m^2-3m+3+(m-2)i$ là một số thực khi $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$.

Với $m=2 \Rightarrow z=1$, thay vào biểu thức P, ta được: $P=1+1+1^2+1^3+\cdots+1^{2019}=2020$.

Câu 56. (Chuyên Quang Trung - 2018)

Cho số phức z thoả mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán. Khi đó:

A. $m_0\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0\in\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $m_0\in\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $m_0\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$.

Đặt: $w=\frac{1+i}{z}=\frac{1+i}{a+bi}=\frac{1}{a^2+b^2}\left[a+b+(a-b)i\right]=\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b$ (1).

Mặt khác: $|a-2+bi|=m \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=m^2$ (2).

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2 \Leftrightarrow 2a^2-4a+4-m^2=0$ (3).

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm a duy nhất.

$\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow 4-2(4-m^2)=0 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\sqrt{2}\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ (Vì m là mô-đun).

Trình bày lại

Giả sử $z=a+bi$, vì $z\neq 0$ nên $a^2+b^2>0$ $(*)$.

Đặt: $w=\dfrac{1+i}{z}=\dfrac{1+i}{a+bi}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a+b+(a-b)i\right]=\dfrac{a+b}{a^2+b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b$ (1).Kết hợp $(*)$ suy ra $a=b\neq 0$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=m^2$ (2).(Vì m là mô-đun nên $m\geq 0$).

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2 \Leftrightarrow g(a)=2a^2-4a+4-m^2=0$ (3).

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm $a\neq 0$ duy nhất.

Có các khả năng sau :

KN1 : PT (3) có nghiệm kép $a\neq 0$

ĐK: $\begin{cases}\Delta'=0\\ g(0)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2=0\\ 4-m^2\neq 0\end{cases} \Rightarrow m=\sqrt{2}$.

KN2: PT (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $a=0$

ĐK: $\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2>0\\ 4-m^2=0\end{cases} \Rightarrow m=2$.

Từ đó suy ra $\exists m_0=\sqrt{2}\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 57. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{x+iy}{x-4+iy}=\dfrac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4)^2+y^2}=\dfrac{x(x-4)+y^2-4iy}{(x-4)^2+y^2}$

là số thuần ảo khi $x(x-4)+y^2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4$

Mà $|z-m|=6 \Leftrightarrow (x-m)^2+y^2=36$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-m)^2+y^2=36\\ (x-2)^2+y^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4-2m)x=36-m^2\\ y^2=4-(x-2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{36-m^2}{4-2m}\\ y^2=4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2\end{cases}$$

Ycbt $\Leftrightarrow 4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow 2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$ hoặc $-2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$

$\Leftrightarrow m=10$ hoặc $m=-2$ hoặc $m=\pm 6$

Vậy tổng là $10-2+6-6=8$.

Cách 2:

Để có một số phức thỏa mãn ycbt thì hpt $\begin{cases}(x-m)^2+y^2=36\\(x-2)^2+y^2=4\end{cases}$ có đúng một nghiệm

Nghĩa là hai đường tròn $(C_1):(x-m)^2+y^2=36$ và $(C_2):(x-2)^2+y^2=4$ tiếp xúc nhau.

Xét (C_1) có tâm $I_1(2;0)$ bán kính $R_1=2$, (C_2) có tâm $I_2(m;0)$ bán kính $R_2=6$

Cần có: $\left[\begin{array}{l}I_1I_2=|R_1-R_2|\\I_1I_2=R_1+R_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|m-2|=4\\|m-2|=6\end{array}\right. \Rightarrow m\in\{-6;6;10;-2\}$.

Vậy tổng là $10-2+6-6=8$.

Câu 58. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=2$ và $z(\bar{z}+2)-(z+\bar{z})-m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

*) $z=x+yi$, $\forall x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow |z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=2 \Leftrightarrow |2x|+|2yi|=2 \Leftrightarrow |x|+|y|=1$.

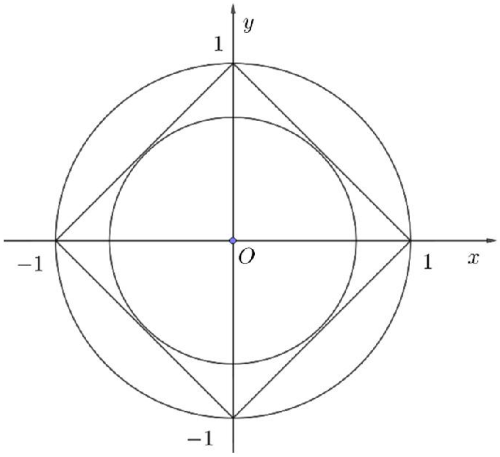
*) $z(\bar{z}+2)-(z+\bar{z})-m=x^2+y^2+2yi-m$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2=m\ (m>0)$.

Để tồn tại 4 số phức z thì hệ phương trình $\begin{cases}|x|+|y|=1\\x^2+y^2=m\end{cases}$ (*) có 4 nghiệm phân biệt.

Hệ (*) có 4 nghiệm thì đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{m}$ phải cắt các đường thẳng $|x|+|y|=1$ tại 4 điểm phân biệt.

Các đường thẳng $|x|+|y|=1$ đôi một cắt nhau tạo thành 1 hình vuông như trên đồ thị.

Để đường tròn (C): $x^2+y^2=m$ cắt các đường thẳng $|x|+|y|=1$ tại 4 điểm thì đường tròn sẽ là đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông với các bán kính tương ứng $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và bán kính $R=1$. Hay $\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\m=1\end{array}\right.$. Suy ra tổng các giá trị m cần tìm là $\dfrac{3}{2}$.


y
1
−1
O
1
x
−1