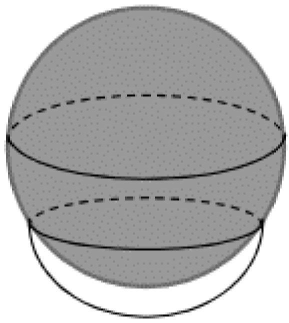
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

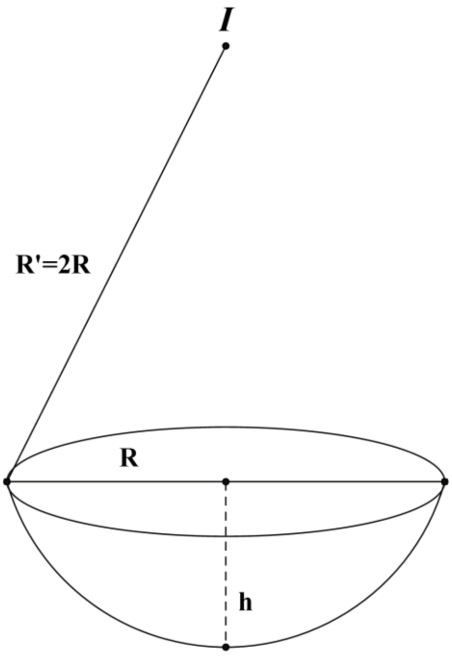
MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU – KHỐI CẦU

Câu 1. Cho một bán cầu đựng đầy nước với bán kính $R=2$. Người ta bỏ vào đó một quả cầu có bán kính bằng $2R$. Tính lượng nước còn lại trong bán cầu ban đầu.



A. $V=\left(24\sqrt{3}-\frac{112}{3}\right)\pi$. **B.** $V=\frac{16\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{8}{3}\pi$. **D.** $V=\left(24\sqrt{3}-40\right)\pi$.

Lời giải



Khi đặt khối cầu có bán kính $R'=2R$ vào khối cầu có bán kính R ta được phần chung của hai khối cầu. phần chung đó gọi là chỏm cầu. Gọi h là chiều cao chỏm cầu. Thể tích khối chỏm cầu là $V_c=\pi h^2\left(R'-\frac{h}{3}\right)$.

với $h=R'-\sqrt{R'^2-R^2}=4-\sqrt{4^2-2^2}=4-2\sqrt{3}$.

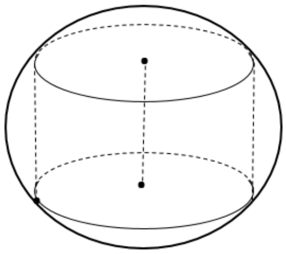
$\Rightarrow V_c=\pi\left(4-2\sqrt{3}\right)^2\left(4-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}\left(64-36\sqrt{3}\right)$.

Thể tích một nửa khối cầu $V=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{16\pi}{3}$.

Thể tích khối nước còn lại trong nửa khối cầu:

$V_n = V - V_c = \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\left(64 - 36\sqrt{3}\right) = \left(24\sqrt{3} - \frac{112}{3}\right)\pi$.

Câu 2. Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích khối trụ lớn nhất.



A. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. **B.** $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **C.** $h = R\sqrt{2}$. **D.** $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h,\ 0 < h < 2R$

$V'_{(h)} = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right);\ V'_{(h)} = 0 \Leftrightarrow h = \pm\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

h	0		$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$		$2R$
$V'_{(h)}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Một cơ sở sản suất đồ gia dụng được đặt hàng làm các chiếc hộp kín hình trụ bằng nhôm để đựng rượu có thể tích là $V = 28\pi a^3$ $(a > 0)$. Để tiết kiệm sản suất và mang lại lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sẽ sản suất những chiếc hộp hình trụ có bán kính là R sao cho diện tích nhôm cần dùng là ít nhất. Tìm R

A. $R = a\sqrt[3]{7}$ **B.** $R = 2a\sqrt[3]{7}$ **C.** $R = 2a\sqrt[3]{14}$ **D.** $R = a\sqrt[3]{14}$

Lời giải

Diện tích nhôm cần dùng để sản suất là diện tích toàn phần S

Ta có $l = h$; mà $V = 28\pi a^3 \Leftrightarrow \pi R^2 h = 28\pi a^3 \Leftrightarrow h = \frac{28a^3}{R^2}$

$S=2\pi Rl+2\pi R^2=2\pi\dfrac{28a^3}{R}+2\pi R^2$ với $R>0$

$S'=2\pi\left(-\dfrac{28a^3}{R^2}+2R\right)=0\Leftrightarrow R=a\sqrt[3]{14}$

Bảng biến thiên

R	0		$a\sqrt[3]{14}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$S_{\min}$	$\nearrow$	

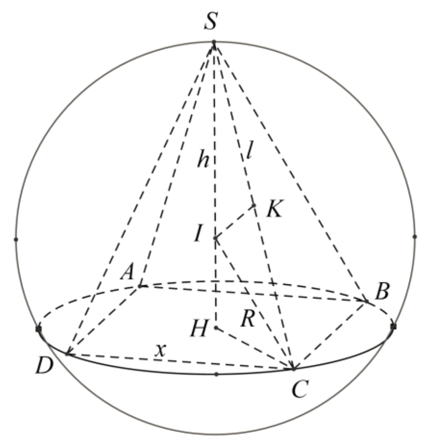
Vậy $S_{\min}\Leftrightarrow\ R=a\sqrt[3]{14}$

Câu 4. **(Mã 104 2017)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V=576\sqrt{2}$ **B.** $V=144\sqrt{6}$ **C.** $V=144$ **D.** $V=576$

Lời giải

Chọn D



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu có tâm I và bán kính $R=9$.

Gọi $H=AC\cap BD$, K là trung điểm SC.

Đặt $AB=x;SH=h$, $(x,h>0)$.

Ta có $HC=\dfrac{x}{\sqrt{2}}\Rightarrow l=SC=\sqrt{h^2+\dfrac{x^2}{2}}$.

Do $\Delta SHI\backsim\Delta SHC\Rightarrow\dfrac{SK}{SH}=\dfrac{SI}{SC}\Rightarrow l^2=2h.R\ \Rightarrow x^2=36h-2h^2$.

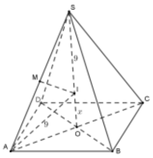
Diện tích đáy của hình chóp $S_{ABCD}=x^2$ nên $V=\dfrac{1}{3}h.x^2=\dfrac{1}{3}h\left(36h-2h^2\right)$.

Ta có $\dfrac{1}{3}h.\left(36h-2h^2\right)=\dfrac{1}{3}.h.h\left(36-2h\right)\le\dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{h+h+36-2h}{3}\right)^3=576\Rightarrow V\le 576$, dấu bằng xảy ra khi $h=h=36-2h\Leftrightarrow h=12,x=12$. Vậy $V_{max}=576$.

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, khối chóp có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. $576\sqrt{2}$. **B.** 144. **C.** 576. **D.** $144\sqrt{6}$.

Lời giải



Giả sử khối chóp $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD)$. M là trung điểm của SA, kẻ MI vuông góc với SA và cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính của mặt cầu là $IA = IS = 9$.

Đặt $IO = x$, $0 \le x \le 9$, do ΔIAO vuông tại O nên $AO = \sqrt{AI^2 - IO^2} = \sqrt{81 - x^2}$, suy ra $AC = 2\sqrt{81 - x^2}$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{81 - x^2}$, suy ra

$S_{\square ABCD} = AB^2 = 2\left(81 - x^2\right)$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{\square ABCD}.SO = \dfrac{2}{3}\left(81 - x^2\right).(9 + x) = \dfrac{2}{3}\left(-x^3 - 9x^2 + 81x + 729\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2}{3}\left(-x^3 - 9x^2 + 81x + 729\right)$ với $x \in [0;9]$.

$f'(x) = 2\left(-x^2 - 6x + 27\right)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -9\,(l) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	0		1		9
f'(x)		+	0	−	
f(x)	486	↗	576	↘	0

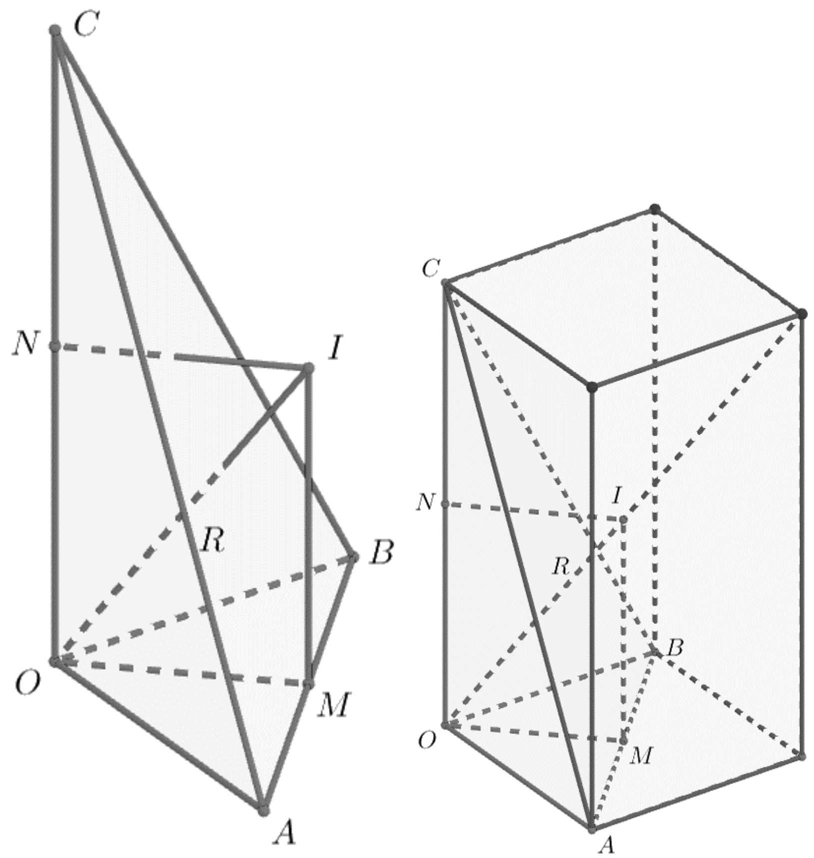
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy : $\max\limits_{x \in [0;9]} f(x) = f(3) = 576$.

Vậy khối chóp có thể tích lớn nhất bằng 576.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC = 1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Lời giải.



Bốn điểm O, A, B, C tạo thành 1 tam diện vuông.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là $R=\dfrac{\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}{2}$.

Đặt $OA=a; OB=b, a,b>0$. Ta có $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$.

Vậy $R=\dfrac{\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+1^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+(1-a)^2+1^2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2\left(\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)}}{2}\geq\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

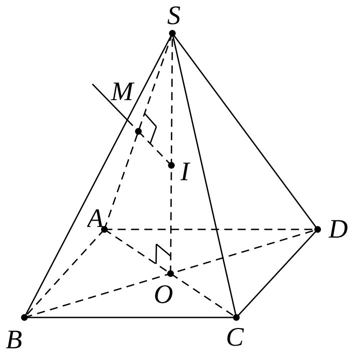
Vậy $R_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, tại $a=b=\dfrac{1}{2}$..

Câu 7. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên của hình chóp bằng $\sqrt{6}\ cm$, $AB=4\ cm$. Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất, tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

A. $12\pi\ cm^2$. **B.** $4\pi\ cm^2$. **C.** $9\pi\ cm^2$. **D.** $36\pi\ cm^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta có ΔSAC cân tại S nên $SO \perp AC$ và ΔSBD cân tại S nên $SO \perp BD$.
Khi đó $SO \perp (ABCD)$.
Ta có: $\Delta SAO = \Delta SBO = \Delta SCO = \Delta SDO \Rightarrow OA = OB = OC = OD$
Vậy hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

Đặt $BC = x \Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + x^2} \Rightarrow AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{16 + x^2}}{2}$.

Xét ΔSAO vuông tại O, ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6 - \dfrac{16 + x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{8 - x^2}}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{8 - x^2}}{2}.4x = \dfrac{2}{3}.\sqrt{8 - x^2}.x$

Áp dụng bất đẳng thức : $ab \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ ta có: $V = \dfrac{2}{3}.\sqrt{8 - x^2}.x \le \dfrac{2}{3}.\dfrac{8 - x^2 + x^2}{2} = \dfrac{8}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{8 - x^2} = x \Leftrightarrow x = 2$. Do đó: $BC = 2, SO = 1$.
Gọi M là trung điểm của SA, trong (SAO) kẻ đường trung trực của SA cắt SO tại I.
Khi đó mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm I và bán kính $R = IS$.

Vì $\Delta SMI \backsim \Delta SOA (g.g)$ nên $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{2.SO} = \dfrac{6}{2.1} = 3 \Rightarrow R = 3(cm)$.

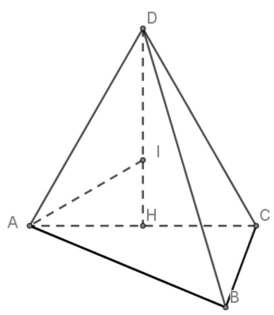
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là: $4\pi R^2 = 4\pi.3^2 = 36\pi (cm^2)$.

Câu 8. Cho mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$. Khối tứ diện $ABCD$ có tất cả các đỉnh thay đổi và cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$. Biết thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ là $\dfrac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản), tính $a + b$.

A. $a + b = 1173$. **<u>B</u>.** $a + b = 4081$. **C.** $a + b = 128$. **D.** $a + b = 5035$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>



Gọi H là trung điểm của AC, Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$ nên $DH \perp (ABC)$ và tâm I của mặt cầu (S) thuộc tia DH. Đặt $DH = x$ và $AH = a$ ($0 < a \le 5, 0 < x < 10$).

Có $ID = IA = 5$ và $IH = |x - 5|$.

Xét tam giác vuông AIH có $a^2 = AH^2 = AI^2 - IH^2 = 25 - (x-5)^2 = 10x - x^2$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}AC.BH = a^2 = 10x - x^2$.

Thể tích khối chóp $ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DH = \frac{1}{3}(10x - x^2)x$.

Xét $f(x) = \frac{1}{3}(10x - x^2)x = \frac{1}{3}(10x^2 - x^3)$ với $0 < x < 10$.

Lập bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ ta được giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $(0;10)$ ta có kết quả là $\frac{4000}{81}$ tại $x = \frac{20}{3}$.

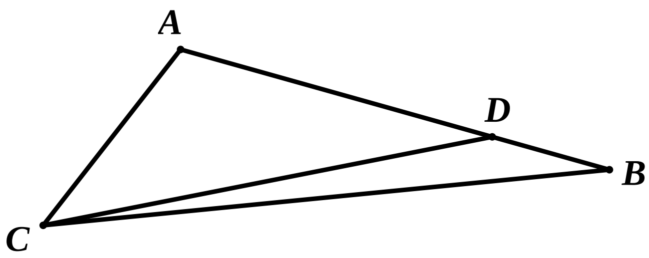
Vậy $a = 4000, b = 81$ nên $a + b = 4081$.

Câu 9. Trong không gian cho tam giác ABC có $AB = 2R, AC = R, CAB = 120^0$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính R. Giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MC$ là

A. $4R$. **B.** $6R$. **C.** $R\sqrt{19}$. **D.** $2R\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $MA^2 = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}^2\right) = \left(\frac{BA}{MB}\overrightarrow{MB} + \frac{MB}{BA}\overrightarrow{BA}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)^2$.

$\Rightarrow MA^2 = \left|2\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right|^2 \Rightarrow MA = 2\left|\overrightarrow{MB} + \frac{\overrightarrow{BA}}{4}\right|$.

Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \frac{\overrightarrow{BA}}{4}$, khi đó $MA = 2\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD}\right| = 2\left|\overrightarrow{MD}\right| = 2MD$.

Do đó $MA + 2MC = 2(MC + MD) \ge 2CD$.

Lại có $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD\cos 120° = \frac{19}{4}R^2 \Rightarrow CD = R\frac{\sqrt{19}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đoạn CD với mặt cầu tâm B bán kính R.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MC$ là $R\sqrt{19}$.

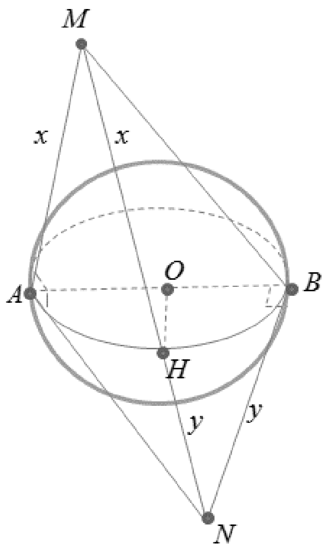
Câu 10. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng $3(m)$, đường kính AB. Qua A và B dựng các tia At_1, Bt_2 tiếp xúc với mặt cầu và vuông góc với nhau. M và N là hai điểm lần lượt di chuyển trên

At_1, Bt_2 sao cho MN cũng tiếp xúc với (S). Biết rằng khối tứ diện $ABMN$ có thể tích $V\left(m^3\right)$ không đổi. V thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(17;21)$. **B.** $(15;17)$. **C.** $(25;28)$. **D.** $(23;25)$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử MN tiếp xúc (S) tại H.

Đặt $MA = MH = x$, $NB = NH = y$. Khi đó $V = \frac{1}{6}.x.2R.y = \frac{1}{3}Rxy$.

Ta có tam giác AMN vuông tại A (Vì $MA \perp AB, MA \perp BN$).

$\Rightarrow AN^2 = (x+y)^2 - x^2$.

Lại có tam giác ABN vuông tại B $\Rightarrow AN^2 = 4R^2 + y^2$.

Suy ra $(x+y)^2 - x^2 = 4R^2 + y^2 \Leftrightarrow xy = 2R^2$.

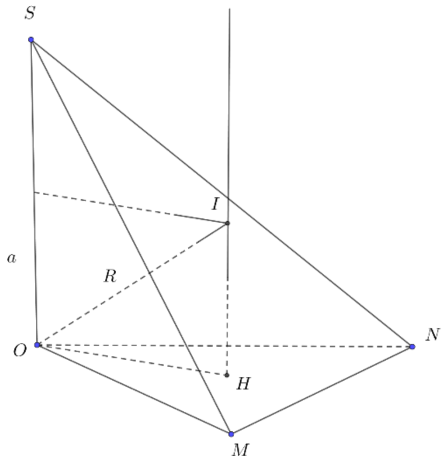
Vậy $V = \frac{1}{3}.R.2R^2 = \frac{2R^3}{3} = 18 \in (17;21)$.

Câu 11. Trên mặt phẳng (P) cho góc $xOy = 60°$. Đoạn $SO = a$ và vuông góc với mặt phẳng (α). Các điểm $M; N$ chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có: $OM + ON = a$. Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$.

A. $\frac{4\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{8\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{16\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN và tâm bán mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN \Rightarrow R^2 = OH^2 + IH^2 = \frac{a^2}{4} + OH^2$.

Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác OMN ta có $\frac{MN}{\sin 60°} = 2OH \Leftrightarrow OH = \frac{MN}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác OMN ta có

$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2.OM.ON\cos MON$

$= OM^2 + ON^2 - OM.ON = (OM + ON)^2 - 3OM.ON \geq a^2 - 3\frac{(OM+ON)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow MN^2 \geq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 3OH^2 \geq \frac{a^2}{4} \Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{4} + OH^2 \geq \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3.4} = \frac{a^2}{3}$

Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN$ bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

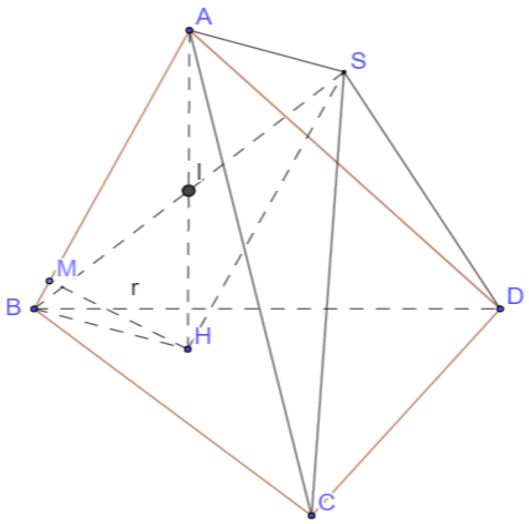
Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$ là $4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{3}$

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là H nằm trong tam giác BCD. Biết rằng H cũng là tâm của một mặt cầu bán kính $\sqrt{3}$ và tiếp xúc các cạnh AB, AC, AD. Dựng hình bình hành $AHBS$. Tính giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$

A. 3. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu của H lên AB,AC,AD ta có

HM=HN=HP=$\sqrt{3}$ ⇒AM=AN=AP ⇒ AH ⊥ (MNP) ⇒ (MNP)□(BCD) ⇒ $AB = AC = AD$

(AH là trục đường tròn ΔMNP)

Vậy A thuộc trục đường tròn ngoại tiếp Δ BCD

AH là trục đường tròn ngoại tiếp Δ BCD .

Gọi I=AH⋂BS ⇒ IB=IC=ID=IS . Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.BCD

$$IH = x \Rightarrow \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HA^2} \Rightarrow HB^2 = \frac{12x^2}{4x^2 - 3}$$

$$\Delta HBI \perp tai\, H : BI^2 = HB^2 + HI^2 = \frac{4x^4 + 9x^2}{4x^2 - 3}$$

$$t = x^2 \Rightarrow f(t) = \frac{4t^2 + 9t}{4t - 3} (t > \frac{3}{4}) \Rightarrow f'(t) = \frac{16t^2 - 24t - 27}{(4t - 3)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{9}{4}(n) \vee t = -\frac{3}{4}(l)$$

x	$\frac{3}{4}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
f'(x)			0		
f(x)		↘	$\frac{27}{4}$	↗	

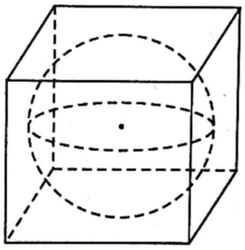
Vẽ bảng biến thiên $R_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 13. **(SGD Điện Biên - 2019)** Một vật thể đựng đầy nước hình lập phương không có nắp. Khi thả một khối cầu kim loại đặc vào trong hình lập phương thì thấy khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương đó. Tính bán kính của khối cầu, biết thể tích nước còn lại trong hình lập phương là 10. Giả sử các mặt của hình lập phương có độ dày không đáng kể

A. $\sqrt[3]{\frac{15}{12 - 2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{9}{24 - 4\pi}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{15}{24 - 4\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{9}{12 - 2\pi}}$.

Lời giải

Chọn A



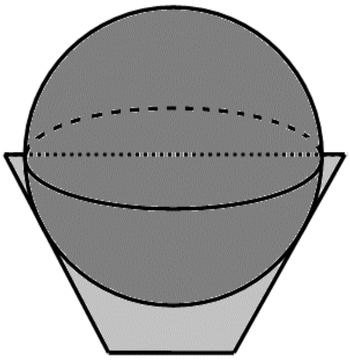
Giả sử hình lập phương có cạnh x. Khi đó thể tích khối lập phương là x^3.

Bán kính khối cầu tiếp xúc với các mặt của khối lập phương là $\frac{x}{2}$. Do đó thể tích khối cầu tiếp xúc với các mặt của hình lập phương là $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{\pi x^3}{6}$.

Theo đề ra ta có $x^3-\frac{\pi x^3}{6}=10 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{60}{6-\pi}}$.

Do đó bán kính của khối cầu là $R=\frac{x}{2}=\sqrt[3]{\frac{15}{12-2\pi}}$

Câu 14. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?

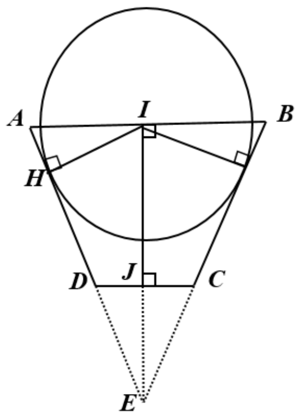


A. $\frac{46}{5}\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **B.** $18\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **C.** $\frac{46}{3}\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **D.** $18\pi\left(dm^3\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét một thiết diện qua trục của hình nón như hình vẽ. Hình thang cân $ABCD$ (IJ là trục đối xứng) là thiết diện của cái thùng nước, hình tròn tâm I bán kính IH là thiết diện của khối cầu. Các đường thẳng AD, BC, IJ đồng qui tại E.



Đặt bán kính của khối cầu là $IH = R$, bán kính mặt đáy của thùng là $JD = r$, chiều cao của thùng là $IJ = h$. Ta có

$\frac{2}{3}\pi R^3 = 54\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R = 3\sqrt{3}$, $\frac{3}{2}h = 2R = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow h = 4\sqrt{3}$.

$\frac{EJ}{EI} = \frac{JC}{IB} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow EJ = 2\sqrt{3}$, $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{27} = \frac{1}{9r^2} + \frac{1}{108} \Leftrightarrow r = 2$.

Suy ra thể tích của thùng nước là $V_1 = \frac{1}{3}\pi IA^2.IE - \frac{1}{3}\pi JD^2.JE = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3}$.

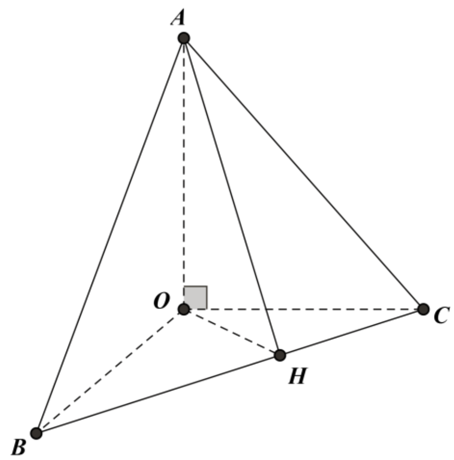
Vậy thể tích nước còn lại trong thùng là $V = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3} - 54\sqrt{3}\pi = \frac{46\sqrt{3}\pi}{3}\left(dm^3\right)$.

Câu 15. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa - 2019)** Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \ge b, a \ge c$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$ là

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.

Dễ thấy $OH \perp BC$ nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

Tam giác AOH vuông tại O có $AH^2 = OA^2 + OH^2 \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Tam giác OBC có $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AH.BC = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

Vậy diện tích toàn phần của hình chóp $O.ABC$ là:

$$S_{tp} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} + S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right).$$

Dễ thấy thể tích khối chóp $O.ABC$ là $V = \dfrac{1}{6}abc = \dfrac{1}{3}S_{tp}.r$.

Suy ra

$$\frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}S_{tp}.r \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{2S_{tp}}{bc} = \frac{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{bc}$$

$$= \frac{a}{c} + 1 + \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + 1 + \frac{a^2}{b^2}} \geq 1 + 1 + 1 + \sqrt{1 + 1 + 1} = 3 + \sqrt{3}.$$

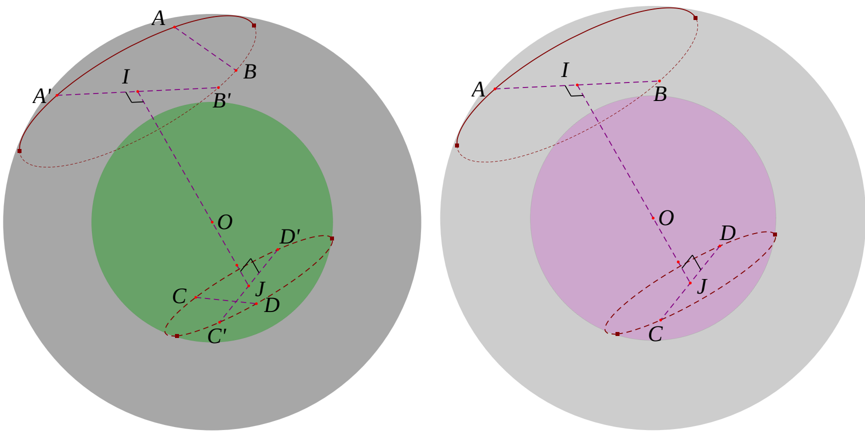
Dấu "=" xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 16. Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) đồng tâm O, có bán kình lần lượt là $R_1 = 2$ và $R_2 = \sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) và hai đỉnh C, D nằm trên (S_2). Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $7\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD, cắt $(O;R_1)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm I.

Dựng mặt phẳng (Q) chứa CD và song song với AB, cắt $(O;R_2)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm J.

Dựng hai đường kính $A'B', C'D'$ lần lượt của hai đườn tròn sao cho $A'B' \perp C'D'$

Khi đó $IJ = d(AB;CD) = d(A'B';C'D')$.

Xét tất cả các tứ diện có cạnh AB nằm trên (P) và CD nằm trên (Q) thì ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.IJ.\sin(AB,CD) \leq \frac{1}{6}A'B'.C'D'.IJ = V_{A'B'C'D'}.$$

Do đó ta chỉ cần xét các tứ diện có cặp cạnh đối $AB \perp CD$ và chúng có trung điểm I, J thẳng hàng với O.

Đặt $IA = x,\left(0 < x \le \sqrt{10}\right), JC = y,\left(0 < y \le 2\right)$, ta có: $OI = \sqrt{10 - x^2}, OJ = \sqrt{4 - y^2}$.

Khi đó: $d\left(AB, CD\right) = IJ = OI + OJ = \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là:

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.IJ = \frac{1}{6}.2x.2y.\left(\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}\right) = \frac{2}{3}xy\left(\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}\right)$

Có $\sqrt{10 - x^2} = \frac{1}{2}.2.\sqrt{10 - x^2} \le \frac{14 - x^2}{4}; \sqrt{4 - y^2} \le \frac{5 - y^2}{2}$

Suy ra $\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} \le \frac{24 - x^2 - 2y^2}{4} \le \frac{24 - 2\sqrt{2}xy}{4} = \frac{12 - \sqrt{2}xy}{2}$.

Ta được: $V_{ABCD} \le \frac{2}{3}xy.\frac{12 - \sqrt{2}xy}{2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}xy\right)\left(12 - \sqrt{2}xy\right) \le \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}xy + 12 - \sqrt{2}xy}{2}\right)^2 = 6\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} 0 < x \le \sqrt{10}, 0 < y \le 2 \\ \sqrt{10 - x^2} = 2 \\ \sqrt{4 - y^2} = 1 \\ x^2 = 2y^2 \\ \sqrt{2}xy = 12 - \sqrt{2}xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

Vậy $\max V_{ABCD} = 6\sqrt{2}$.

Câu 17. Cho tứ diện đều $ABCD$ có mặt cầu nội tiếp là $\left(S_1\right)$ và mặt cầu ngoại tiếp là $\left(S_2\right)$, hình lập phương ngoại tiếp $\left(S_2\right)$ và nội tiếp trong mặt cầu $\left(S_3\right)$. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$, $\left(S_3\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(*Mặt cầu nội tiếp tứ diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của tứ diện, mặt cầu nội tiếp hình lập phương là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương*).

A. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Khi đó, diện tích của mỗi mặt tứ diện đều là $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là tâm của tam giác đều BCD thì AH là đường cao của hình chóp $A.BCD$ và $BH = \frac{2}{3}.\frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó chiều cao của hình chóp là $h = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Suy ra thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V = \frac{1}{3}S_{BCD}.h = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Bán kính mặt cầu $\left(S_1\right)$ nội tiếp diện đều $ABCD$ là $r_1 = \frac{3V}{4S_{BCD}} = \frac{3.\frac{\sqrt{2}}{12}}{4.\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$.

Trong mặt phẳng ABH, đường thẳng trung trực của AB cắt AH tại I thì I là tâm mặt cầu (S_2) ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$.

Gọi M là trung điểm AB, ta có $\frac{AI}{AB}=\frac{AM}{AH}\Rightarrow AI=\frac{AB^2}{2AH}=\frac{1^2}{2.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow r_2=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Độ dài cạnh hình lập phương ngoại tiếp (S_2) bằng $a=2r_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

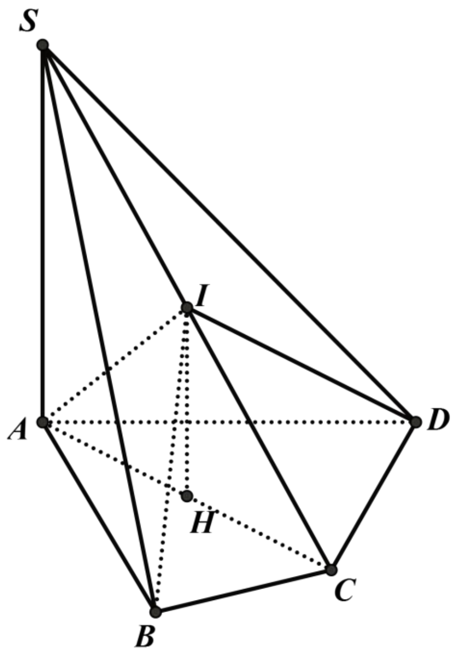
Bán kính mặt cầu (S_3) ngoại tiếp hình lập phương đó là $r_3=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Từ đó ta được $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 18. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABC=ADC=90°$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, góc tạo bởi SC và đáy $ABCD$ bằng $60°$, $CD=a$ và tam giác ADC có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $S_{mc}=16\pi a^2$. **B.** $S_{mc}=4\pi a^2$. **C.** $S_{mc}=32\pi a^2$. **D.** $S_{mc}=8\pi a^2$.

Lời giải



Giả thiết: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow$ AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.

Do đó: $\left(SC,(ABCD)\right)=\left(SC,AC\right)=SCA=60°$.

Xét tam giác ADC vuông tại D, diện tích $S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}AD.DC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow AD=a\sqrt{3}$.

Khi đó: $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}=2a$.

ΔSAC vuông tại A, ta có: $\tan SAC=\frac{SA}{AC}\Rightarrow SA=AC.\tan 60°=2a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm SC (1), H là trung điểm AC.

Khi đó $IH // SA \Rightarrow IH \perp (ABCD)$.

Tứ giác $ABCD$ có $D = B = 90°$, H là trung điểm AC nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Suy ra $IA = IB = IC = ID\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu: $R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 12a^2} = 2a$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.

Câu 19. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho mặt cầu tâm O bán kính $2a$, mặt phẳng (α) cố định cách O một đoạn là a, (α) cắt mặt cầu theo đường tròn (T). Trên (T) lấy điểm A cố định, một đường thẳng qua A vuông góc với (α) cắt mặt cầu tại điểm B khác A. Trong (α) một góc vuông xAy quay quanh A và cắt (T) tại 2 điểm phân biệt C, D không trùng với A. Khi đó chọn khẳng định đúng:

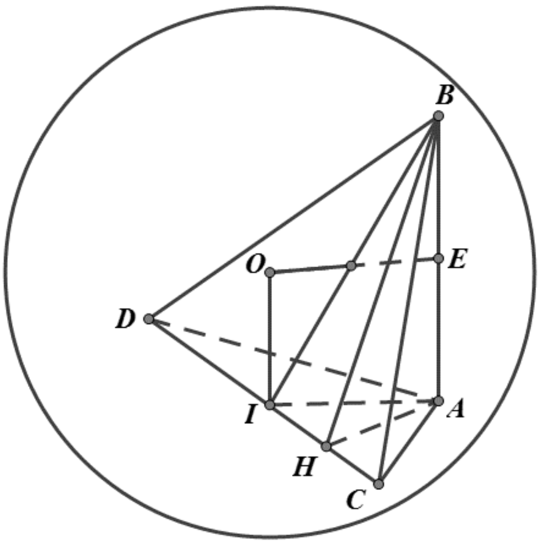
A. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị nhỏ nhất là $a^2\sqrt{21}$

B. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị lớn nhất là $a^2\sqrt{21}$

C. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị nhỏ nhất là $2a^2\sqrt{21}$

D. Do (α) không đi qua O nên không tồn tại giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của diện tích tam giác BCD

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn thiết diện. Ta có $OI=a$, $OI \perp$(α), $IA = a\sqrt{3}$

Do góc CAD vuông nên CD là đường kính của đường tròn tâm I, $CD = 2a\sqrt{3}$

Đặt $AD = x$, AC= y. Ta có $x^2 + y^2 = 12a^2$ ($0 < x, y < 2a\sqrt{3}$)

Gọi H là hình chiếu của A lên CD. Ta có $BH \perp CD$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}CD.BH = BH.a\sqrt{3} = a\sqrt{3}.\sqrt{AB^2 + AH^2}$$

Ta có OI và AB đồng phẳng, gọi E là trung điểm của AB, ta có $OE \perp AB$, tứ giác $OIAE$ là hình chữ nhật, $AB = 2OI = 2a$

$$S_{BCD} = a\sqrt{3}.\sqrt{4a^2 + AH^2}$$

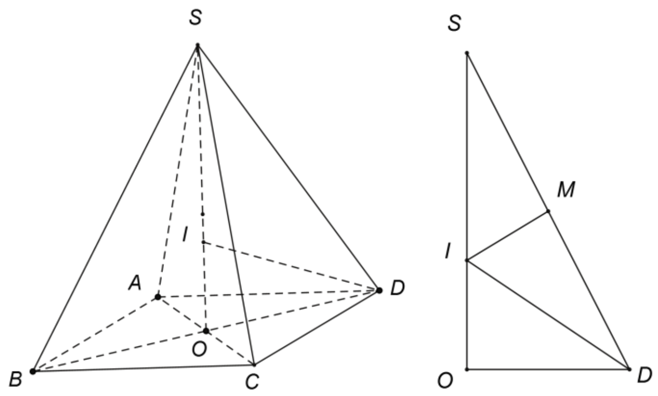
Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{4}{x^2 + y^2} = \frac{4}{12a^2} \Rightarrow AH^2 \leq 3a^2 \Rightarrow S_{BCD} \leq a\sqrt{3}.\sqrt{4a^2 + 3a^2} = a^2\sqrt{21}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

Câu 20. **(THPT Hải An - Hải Phòng - 2018)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V=144$. **B.** $V=576\sqrt{2}$. **C.** $V=576$. **D.** $V=144\sqrt{6}$.

Lời giải



Gọi I là tâm mặt cầu và $S.ABCD$ là hình chóp nội tiếp mặt cầu.

Gọi x là độ dài cạnh SO.

Gọi M là trung điểm của SD.

Ta có $SI.SO=SM.SD=\frac{1}{2}SD^2\Rightarrow SD^2=2SI.SO=18x$.

Suy ra $OD^2=18x-x^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}x.2.OD^2=\frac{2}{3}x\left(18x-x^2\right)=\frac{2}{3}x^2\left(18-x\right)$.

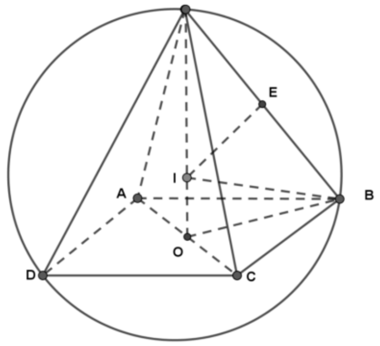
Ta có $x^2\left(18-x\right)=4\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.\left(18-x\right)\le 4\left(\frac{18}{3}\right)^3=864$.

Vậy thể tích của khối chóp cần tìm là $V=576$.

Câu 21. **(THPT Yên Khánh A - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều chiều cao là h nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R. Tìm h theo R để thể tích khối chóp là lớn nhất.

A. $h=\sqrt{3}R$. **B.** $h=\sqrt{2}R$. **C.** $V=\frac{4R}{3}$. **D.** $V=\frac{3R}{2}$.

Lời giải



Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi O,I lần lượt là tâm đáy và tâm cầu ngoai tiếp hình chóp.

Tam giác IBO có $(h-R)^2+\frac{a^2}{2}=R^2 \Rightarrow \frac{a^2}{2}=R^2-(h-R)^2=2Rh-h^2$.

Thể tích của khối chóp là: $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}2\left(2Rh-h^2\right).h$.

Xét hàm số $y=\left(2Rh-h^2\right).h$ với $0<h<2R$, $y'=4Rh-3h^2 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow h=\frac{4R}{3}$.

Trên $(0;2R)$, y' đổi dấu từ "+" sang "-" qua $h=\frac{4R}{3}$ nên thể tích hình chóp đạt lớn nhất tại $h=\frac{4R}{3}$.