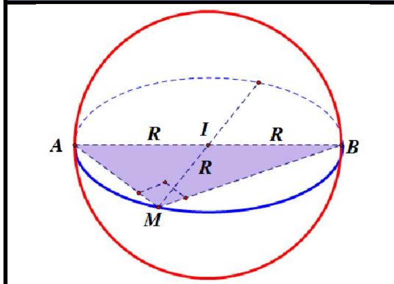
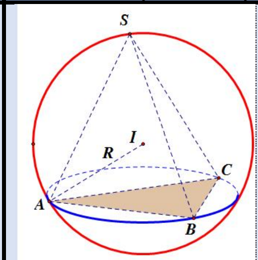
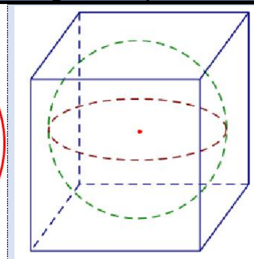
Chuyên đề 23 MẶT CẦU - KHỐI CẦU

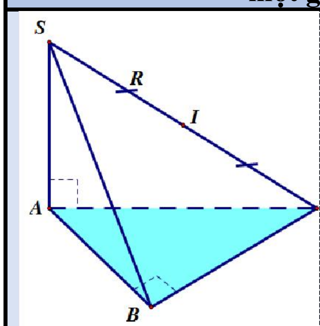
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

MẶT CẦU	Một số công thức:	Mặt cầu ngoại tiếp đa diện Mặt cầu nội tiếp đa diện
 ☞**Hình thành:** Quay đường tròn tâm I, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$ quanh trục AB, ta có mặt cầu như hình vẽ.	▪ **Tâm** I, **bán kính** $R=IA=IB=IM$. ▪ **Đường kính** $AB=2R$. ▪ **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm I, bán kính R. ▪ **Diện tích** mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$. ▪ **Thể tích** khối cầu: $\boxed{V=\dfrac{4\pi R^3}{3}}$.	 **Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.  **Mặt cầu nội tiếp đa diện** là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

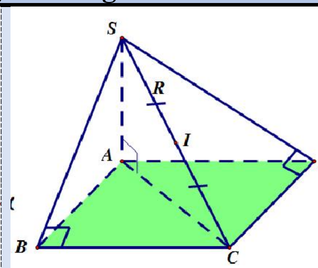
CÁCH TÌM BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP THƯỜNG GẶP

1. Hình chóp có các đỉnh nhìn một cạnh dưới một góc vuông.



▪ Xét hình chóp có $SA\perp(ABC)$ và $\widehat{ABC}=90^0$.

▪ Ta có $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^0$ $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^0$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R=\dfrac{SC}{2}}$.

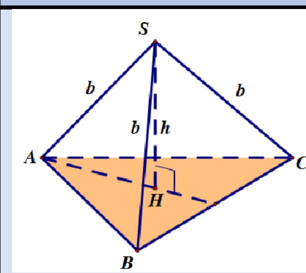


▪ Xét hình chóp có $SA\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật hoặc hình vuông.

▪ Ta có: $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=\widehat{SDC}=90^0$

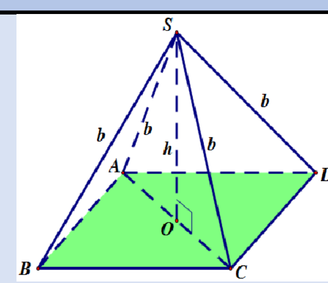
Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R=\dfrac{SC}{2}}$.

2. Hình chóp đều.



▪ Xét hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và đường cao $SH=h$.

▪ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R=\dfrac{b^2}{2h}}$.

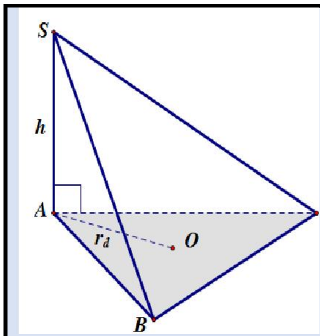


▪ Xét hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao $SO=h$.

▪ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R=\dfrac{b^2}{2h}}$.

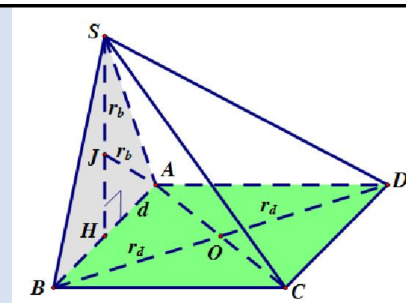
3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy.



- Xét hình chóp có $SA \perp$ (đáy) và $SA = h$; bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là r_d.

- Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $\boxed{R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_d^{\,2}}}$.
- Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Nếu đáy là hình vuông cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Nếu đáy là hình chữ nhật cạnh a, b thì $r_d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.



- Xét hình chóp có mặt bên $(SAB) \perp$ (đáy), bán kính ngoại tiếp đáy là r_d, bán kính ngoại tiếp ΔSAB là r_b, $d = AB = (SAB) \cap$ (đáy). (đoạn giao tuyến)
- Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $\boxed{R = \sqrt{r_d^{\,2} + r_b^{\,2} - \frac{d^2}{4}}}$.

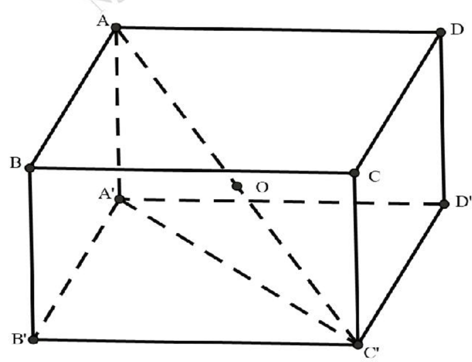
Dạng 1. Khối cầu ngoại tiếp khối lăng trụ

Câu 1. **(THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019)** Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c nội tiếp một mặt cầu. Tính diện tích S của mặt cầu đó

A. $S = 16\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi$.
B. $S = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi$.
C. $S = 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi$.
D. $S = 8\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi$.

Lời giải

Chọn B



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $r = OA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$.

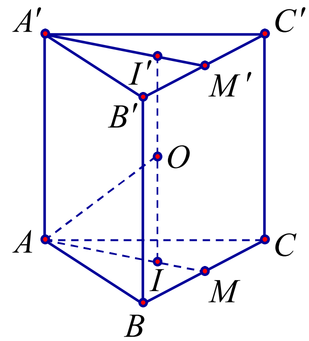
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là

$$S = 4\pi r^2 = 4\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}\right)^2 \pi = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi.$$

Câu 2. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối cầu đi qua các đỉnh của lăng trụ.

A. $\frac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$.
B. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$.
C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + b^2\right)^3}$.
D. $\frac{\pi}{18\sqrt{2}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là tâm hai đáy, O là trung điểm của II'. Khi đó ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Ta có: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, IO = \dfrac{b}{2}$ suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là

$R = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{b^2}{4}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{4a^2 + 3b^2}$

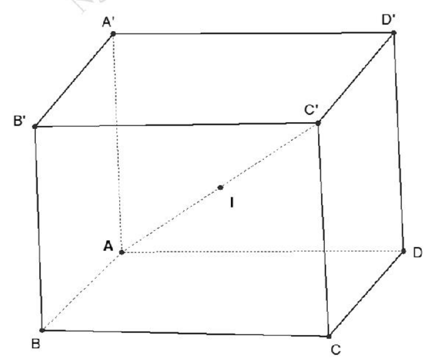
Vậy $V_{(O;R)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$.

Câu 3. Một mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 4a$, $AD = 5a$, $AA' = 3a$. Mặt cầu trên có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $6a$. **C.** $2\sqrt{3}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



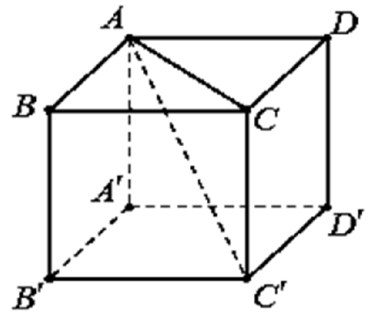
Gọi I là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp này là $R = IA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chữ nhật có ba kích thước $1, 2, 3$ là

A. $\dfrac{9\pi}{8}$. **B.** $\dfrac{9\pi}{2}$. **C.** 36π. **D.** $\dfrac{7\sqrt{14}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AC' = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2} = \sqrt{14}$.

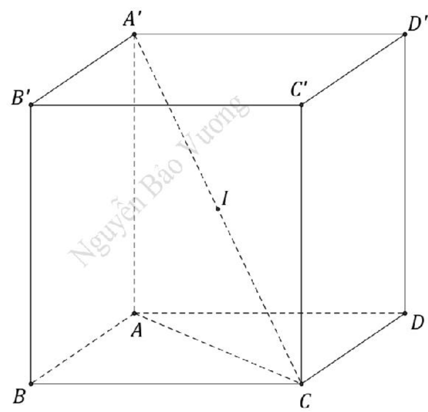
Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật nhận đường chéo AC' là đường kính, do đó bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}AC' = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{14\sqrt{14}}{8} = \frac{7\sqrt{14}\pi}{3}$.

Câu 5. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp của một hình lập phương có cạnh bằng $2a$

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = 2a\sqrt{3}$. **D.** $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. I là tâm của hình lập phương. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình lập phương.

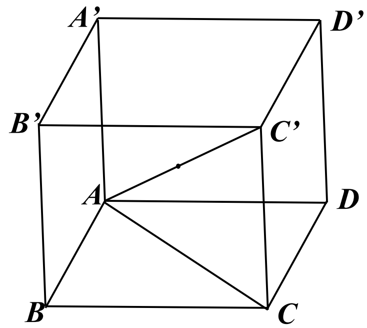
Ta có $R = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 6. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a, $a\sqrt{3}$ và $2a$.

A. $8a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Xét khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O, với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$ và $AA'=2a$. Dễ thấy O cách đều các đỉnh của khối hộp này nên mặt cầu ngoại tiếp khối hộp có tâm O, bán kính $R=\frac{AC'}{2}$.

Ta có

$AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a$, $AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=2a\sqrt{2} \Rightarrow R=\frac{AC'}{2}=a\sqrt{2}$.

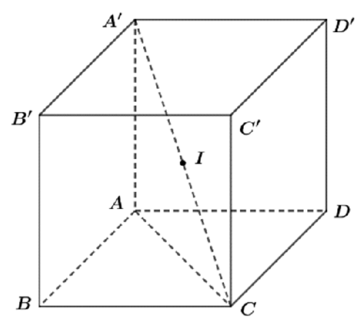
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp này là $S=4\pi R^2=8\pi a^2$.

Câu 7. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=AA'=2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng

A. $9\pi a^2$. **B.** $\frac{3\pi a^2}{4}$. **C.** $\frac{9\pi a^2}{4}$. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ cũng là trung điểm của một đường chéo $A'C$ (giao các đường chéo) của hình hộp.

Hình hộp chữ nhật có độ dài 3 cạnh dài, rộng, cao là: $AD=2a$, $AB=a$, $AA'=2a$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là: $R=\frac{A'C}{2}=\frac{\sqrt{AD^2+AB^2+AA'^2}}{2}=\frac{3a}{2}$.

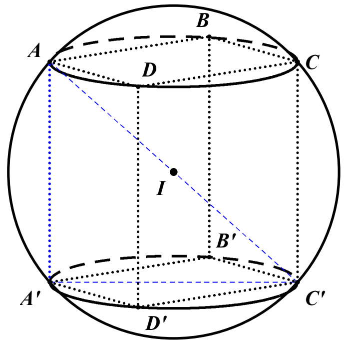
$\Rightarrow S_{mc}=4\pi R^2=4\pi.\left(\frac{3a}{2}\right)^2=9\pi a^2$.

Câu 8. Cho hình lập phương có cạnh bằng a. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

A. $V=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **B.** $V=4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là trung điểm của đường chéo AC' và $R = IA = \dfrac{AC'}{2}$

Khối lập phương cạnh a nên:

$AA' = a,\ A'C' = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu cần tính là:

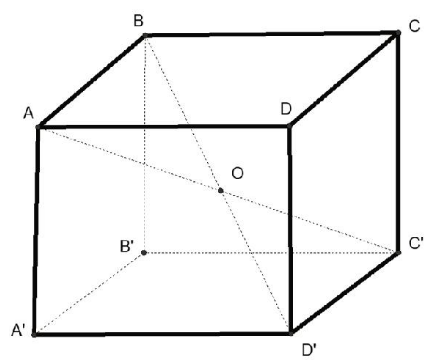
$V = \dfrac{4}{3}.\pi.R^3 = \dfrac{4}{3}.\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{4}{3}\pi.a^3\dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\pi.a^3\sqrt{3}}{2}$ *(đvtt)*.

Câu 9. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $3\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



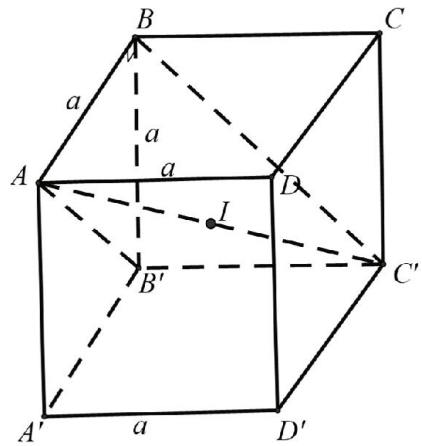
Gọi O là tâm của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $R = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.

Câu 10. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R = a\sqrt{3}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AC'.

Ta có $\Delta ABC'$ vuông tại B (vì $AB \perp (BB'C'C)$) và $\Delta AB'C'$ vuông tại B' (vì $B'C' \perp (ABB'A')$).

Khi đó $IA = IB = IB' = IC'$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

$AC' = \sqrt{AB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{AB^2 + BB'^2 + B'C'^2} = a\sqrt{3}.$ Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách khác: Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Bán kính mặt cầu là nửa đường chéo hình lập phương cạnh a, tức là bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

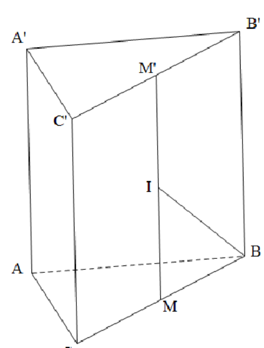
Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình lăng trụ theo a.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{a}{2}$. **C.** $R = 2a$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hình vẽ.



Gọi M là trung điểm BC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M' là trung điểm $B'C'$, suy ra M' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Gọi I là trung điểm MM', khi đó I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp lăng trụ.

Theo đề ta có $MB=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $IM=\dfrac{MM'}{2}=\dfrac{AA'}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

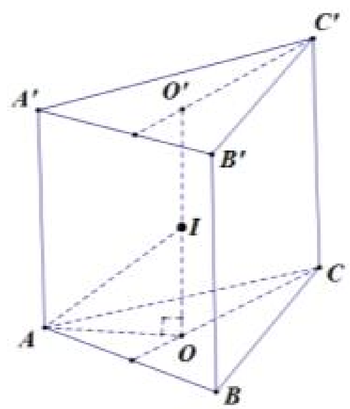
Tam giác MIB vuông tại M nên ta tính được $R=IB=\sqrt{IM^2+MB^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 12. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **C.** πa^2. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O, O’ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC, A’B’C’.
Trên OO’ lấy trung điểm I. Suy ra IA = IB = IC = IA’= IB’ = IC’.
Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Suy ra bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{OI^2+OA^2}=\sqrt{OI^2+OA^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

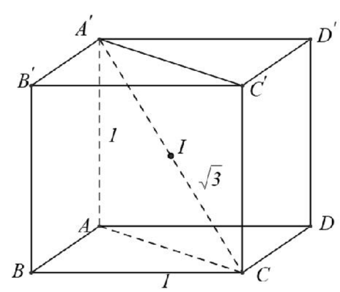
Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=4\pi\dfrac{7a^2}{12}=\dfrac{7\pi a^2}{3}$

Câu 13. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Thể tích mặt cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương là

A. $\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu qua các đỉnh của hình lập phương có đường kính là $A'C$.

Bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{A'C}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

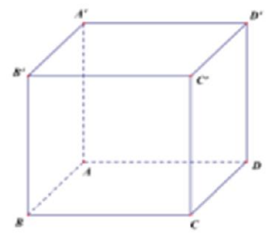
Thể tích khối cầu là $v = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



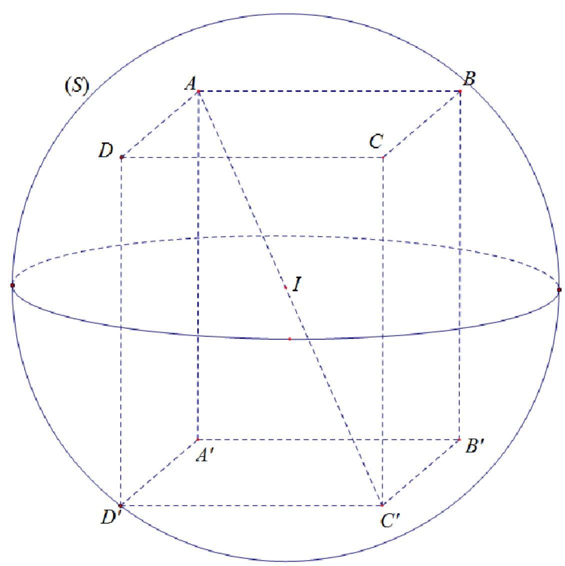
Độ dài đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương bằng độ dài đường chéo của hình lập phương bằng AC'. Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$. Xét tam giác $A'AC$ vuông tại $A \Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$.

Câu 15. Tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$ nội tiếp trong mặt cầu (S).

Khi ấy, khối lập phương có thể tích $V_1 = (2a)^3 = 8a^3$ và bán kính mặt cầu (S) là $R = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối cầu (S): $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^3 = 4\pi a^3\sqrt{3}$.

Vậy tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương bằng

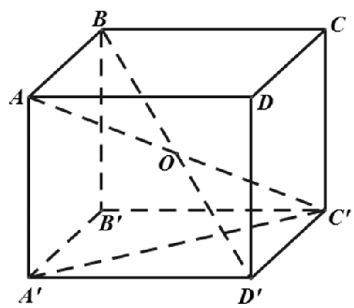
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{8a^3}{4\pi a^3\sqrt{3}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\frac{28\sqrt{14}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{14}\pi a^3}{3}$. **D.** $4\sqrt{6}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Tứ giác $ABC'D'$ là hình chữ nhật có tâm O nên $OA = OB = OC' = OD'$ (1).

Tương tự ta có các tứ giác $CDB'A'$, $BDD'B'$ là các hình chữ nhật tâm O nên $OC = OD = OA' = OB'$, $OB = OD = OB' = OD'$(2).

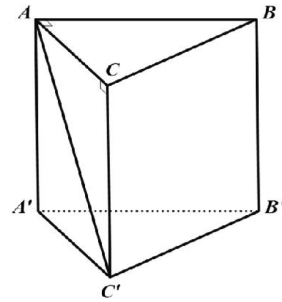
Từ (1) và (2) ta có điểm O cách đều các đỉnh của hình hộp nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp.

Bán kính mặt cầu là: $R = OA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + A'C'^2}}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + A'B'^2 + A'D'^2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{9a^2 + a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)^3 = \frac{7\sqrt{14}\pi a^3}{3}$.

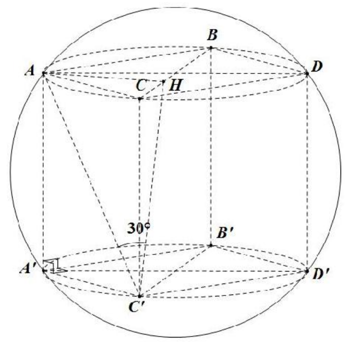
Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho?



A. $S=24\pi a^2$. **B.** $S=6\pi a^2$. **C.** $S=4\pi a^2$. **D.** $S=3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH\perp BC\ (H\in BC)$ thì $AH\perp(BCC'B')$ (vì (ABC) và $(BCC'B')$ vuông góc với nhau theo giao tuyến BC). Suy ra: $\widehat{AC'H}=30°$.

ΔABC vuông tại A có đường cao AH nên $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a$ và $AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Delta AHC'$ vuông tại $H\Rightarrow AC'=\dfrac{AH}{\sin 30°}=a\sqrt{3}$. Suy ra $AA'=\sqrt{AC'^2-AB^2}=a\sqrt{2}$.

Ta có thể xem hình lăng trụ đã cho là một phần của hình hộp chữ nhật có các kích thước lần lượt là $AB=a\sqrt{3}$, $AC=a$ và $A'A=a\sqrt{2}$.

Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

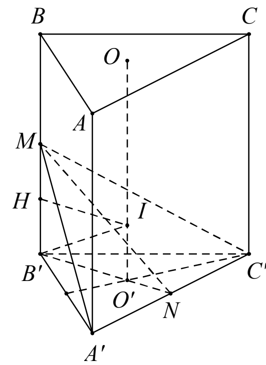
Diện tích mặt cầu cần tìm: $S=4\pi R^2=6\pi a^2$.

Câu 18. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA'=2a$, $BC=a$. Gọi M là trung điểm của BB'. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}a}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O; O' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow \begin{cases} OO' = AA' = BB' = 2a \\ OO' \perp (ABC); OO' \perp (A'B'C') \\ BC = B'C' = a \end{cases}$.

Như vậy OO' là trục đường tròn ngoại tiếp 2 mặt đáy.

$\Rightarrow$ tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ nằm trên OO'.

Trong mặt phẳng $(OBB'O')$, từ trung điểm H của MB', kẻ đường thẳng vuông góc với MB' cắt OO' tại I.

Suy ra $IA' = IC' = IB' = IM \Rightarrow$ khối chóp $M.A'B'C'$ nội tiếp mặt cầu tâm I, bán kính $R = IB'$.

Gọi N là trung điểm của $A'C'$.

Dễ dàng chứng minh được $HIO'B'$ là hình chữ nhật.

Suy ra $IB' = \sqrt{IO'^2 + B'O'^2} = \sqrt{HB'^2 + \left(\frac{2}{3}B'N\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{BB'}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{BC\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

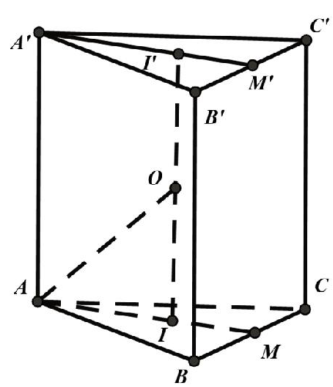
$\Rightarrow IB' = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Câu 19. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = 2$; $\widehat{BAC} = 120°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ trên

A. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Khi đó, II' là trục đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, suy ra tâm mặt cầu là trung điểm O của II'.

Ta có $BM = AB.\sin 60° = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$.

$\dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2.IA \Rightarrow IA = \dfrac{2\sqrt{3}}{2.\sin 120°} = 2$; $OI = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = 2\sqrt{2}$.

Bán kính mặt cầu $R = OA = 2\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 32\pi$.

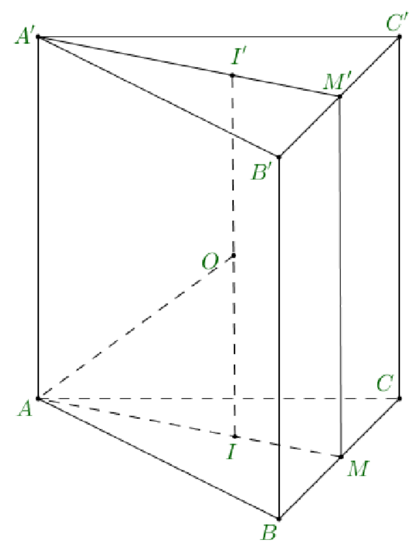
Phương án C được chọn.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S = \dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $S = \dfrac{7a^2}{3}$. **C.** $S = \dfrac{49\pi a^2}{144}$. **D.** $S = \dfrac{49a^2}{114}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$, O là trung điểm của II'. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ta có $AI = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI = \dfrac{a}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\dfrac{7a^2}{12} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Dạng 2. Khối cầu ngoại tiếp khối chóp

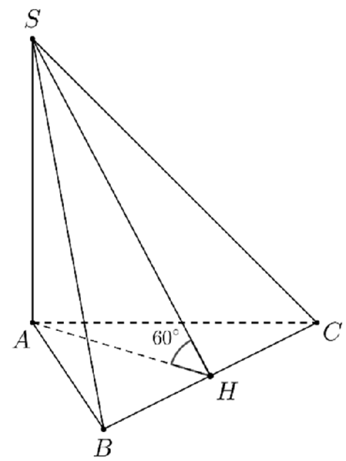
Dạng 2.1 Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{172\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{76\pi a^2}{3}$. **C.** $84\pi a^2$. **D.** $\frac{172\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn A.



Ta có tâm của đáy cũng là giao điểm ba đường cao (ba đường trung tuyến) của tam giác đều ABC nên bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $r = 4a.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Đường cao AH của tam giác đều ABC là $AH = \frac{4a.\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a$.

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$ suy ra $\widehat{SHA} = 60°$.

Suy ra $\tan SHA = \frac{SA}{AH} = \frac{SA}{2\sqrt{3}a} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = 6a$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R_{mc} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{16}{3}a^2} = \frac{\sqrt{129}}{3}a$.

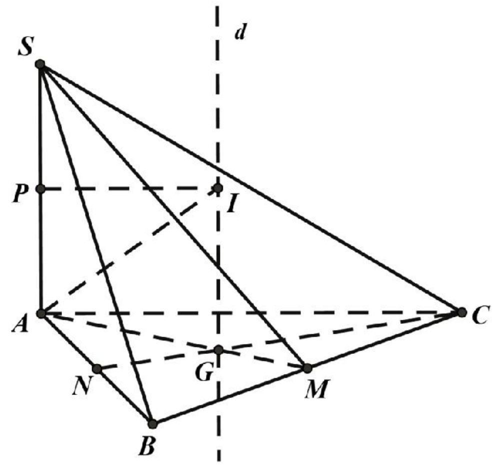
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ là $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{\sqrt{129}}{3}a\right)^2 = \frac{172\pi a^2}{3}$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $52\pi a^2$. **B.** $\frac{172\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{76\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{76\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,AB,SA

Gọi G là trọng tâm tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua G ta dựng đường thẳng d vuông góc mặt đáy.

Kẻ đường trung trực SA cắt đường thẳng d tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $\left((SBC),(ABC)\right)=SMA=30°$,

$\Rightarrow SA=AM.\tan 30°=4a.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}=2a\Rightarrow AP=\frac{SA}{2}=a$

$AG=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.4a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow PI=AG=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác API vuông tại P có $AI=\sqrt{AP^2+PI^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{57}}{3}$.

Bán kính $R=AI=\frac{a\sqrt{57}}{3}$.

Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=\frac{76\pi a^2}{3}$

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^o. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{43\pi a^2}{9}$. **D.** $21\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BC,SA. Ta có $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SIA}=60°.$,

$\Rightarrow SA=AI.\tan 60°=3a\Rightarrow KG=\frac{SA}{2}=\frac{3a}{2}$

Gọi G trọng tâm tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua G ta dựng đường thẳng $\Delta\perp(ABC)$.

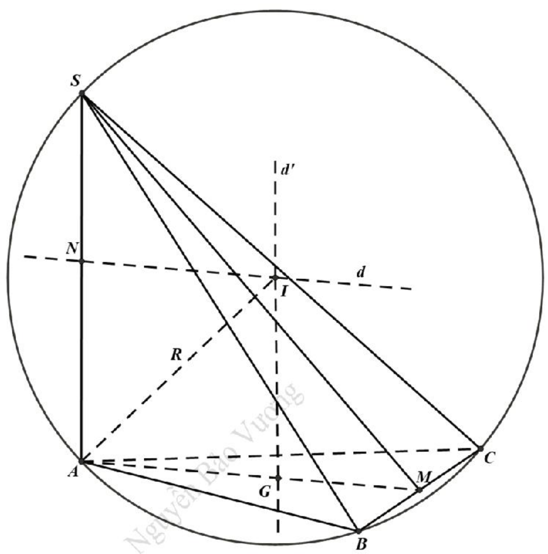
Dựng trung trực SA cắt đường thẳng Δ tại K, khi đó $KS = KA = KB = KC$ nên K là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $R = KA = \sqrt{KG^2 + AG^2} = a.\sqrt{\frac{43}{12}}$.Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = \frac{43\pi a^2}{3}$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{19\pi a^2}{9}$. **D.** $13\pi a^2$.

Lời giải



Chọn B

Gọi M là trung điểm của đoạn BC.

N là trung điểm của đoạn SA.

G là trọng tâm ΔABC.

Gọi d' là đường thẳng đi qua trọng tâm G của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng đáy.

d là đường trung trực của đoạn thẳng SA.

Từ đó suy ra tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là giao điểm của hai đường thẳng d và d'.

Suy ra: bán kính mặt cầu $R = AI$.

Ta có: ΔABC đều cạnh $2a$ $\Rightarrow AM = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và $AG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SMA} = 30^0$

$\tan\widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} \Rightarrow SA = AM.\tan 30^0 = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = a$.

Suy ra: $AN = \frac{a}{2}$.

Do đó: $R = AI = \sqrt{AN^2 + NI^2} = \sqrt{AN^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{57}}{6}$

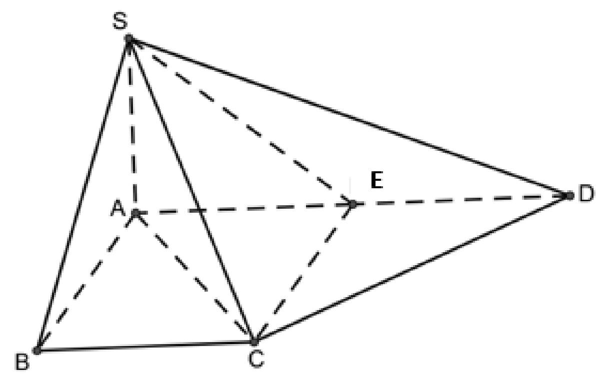
Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S=4\pi.R^2=4\pi.\left(\frac{\sqrt{57}}{6}\right)^2=\frac{19\pi a^2}{3}$.

Câu 5. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D. Biết SA vuông góc với $ABCD$, $AB=BC=a$, $AD=2a, SA=a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm S,A,B,C,E bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn D



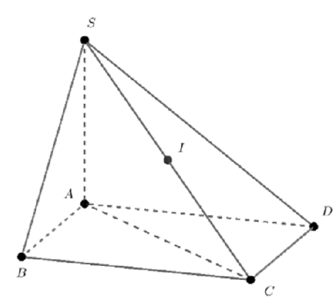
Ta thấy các tam giác $\Delta SAC;\Delta SBC;\Delta SEC$ vuông tại A,C,E. Vậy các điểm S,A,B,C,E nằm trên mặt cầu đường kính $SC\Rightarrow R=\frac{SC}{2}=\frac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=a.$

Câu 6. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết, $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AC$ nên ΔSAC vuông ta A.

Mặt khác

$\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$. Suy ra ΔSBC vuông ta B.

Tương tự, ta cũng có ΔSCD vuông ta D.

Gọi I là trung điểm của SC. Suy ra $IS=IA=IB=IC=ID$.

Do đó, I là tâm của mặt cầu goại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính $R=\frac{SC}{2}$..

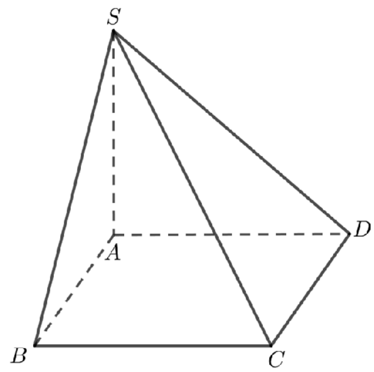
Ta có $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{(2a)^2+(a\sqrt{2})^2}=a\sqrt{6}\Rightarrow R=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 7. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh bằng x. Cạnh bên $SA=x\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo x diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi x^2$. **B.** $x^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi x^2$. **D.** $2x^2$.

Lời giải

Chọn A



+ Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AC,\ SA\perp BC,\ SA\perp CD$.

$\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$, $\begin{cases}CD\perp SA\\CD\perp AD\end{cases}\Rightarrow CD\perp SD$.

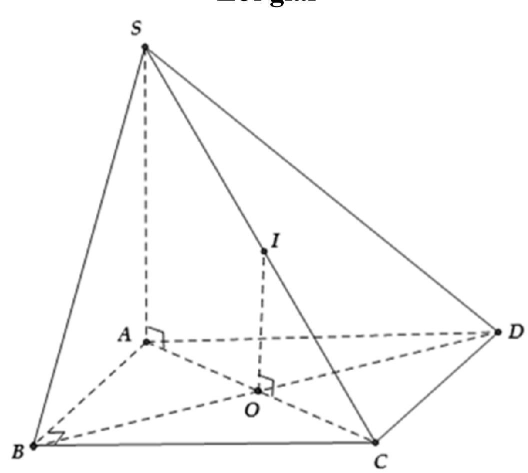
Vậy $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=\widehat{SDC}=90^\circ$ do đó A, B, D, S, C thuộc mặt cầu đường kính SC.

+ Ta có $AC=\sqrt{2}x$, $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2\sqrt{2}x$. R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ khi đó $R=\dfrac{SC}{2}=\sqrt{2}x$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ bằng $S=4\pi R^2=4\pi\left(\sqrt{2}x\right)^2=8\pi x^2$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $2a^2$.

Lời giải



Gọi $O=AC\cap BD$, đường chéo $AC=a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của SC.

Suy ra OI là đường trung bình của tam giác SAC. Suy ra $OI // SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Hay OI là trục đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$.

Mà $IS = IC \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.

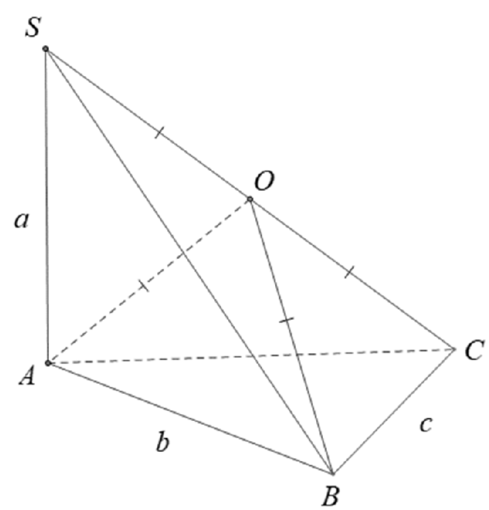
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$: $R = SI = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.

Câu 9. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, AB = b, BC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC.$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Gọi O là trung điểm SC, ta có tam giác SAC, SBC vuông lần lượt tại A và B nên:

$OA = OB = OC = OS = \frac{SC}{2}$. Do đó mặt cầu đi qua S, A, B, C có tâm O và bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

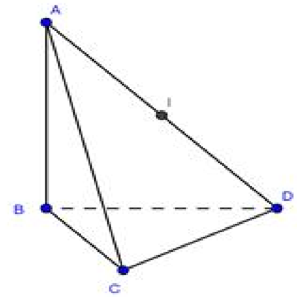
Ta có: $SC^2 = SB^2 + BC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$. suy ra $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 10. **(Mã 105 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn C



Tam giác BCD vuông tại C nên áp dụng định lí Pitago, ta được $BD = 5a$.

Tam giác ABD vuông tại B nên áp dụng định lí Pitago, ta được $AD = 5a\sqrt{2}$.

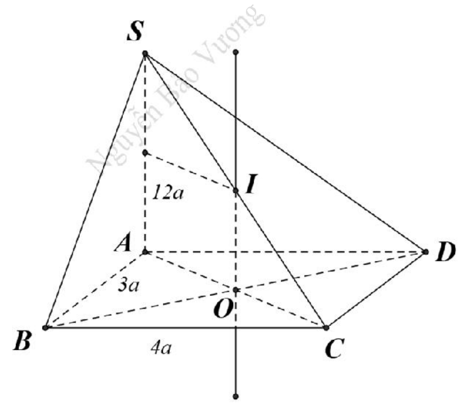
Vì B và C cùng nhìn AD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm I của AD. Bán kính mặt cầu này là: $R = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11. **(Mã 104 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \dfrac{13a}{2}$ **B.** $R = 6a$ **C.** $R = \dfrac{5a}{2}$ **D.** $R = \dfrac{17a}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$

Vì $SA \perp AC$ nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 13a$

Nhận thấy: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$. Tương tự: $CD \perp SD$

Do các điểm A, B, D đều nhìn đoạn thẳng SC dưới một góc vuông nên gọi I là trung điểm của đoạn thẳng SC thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

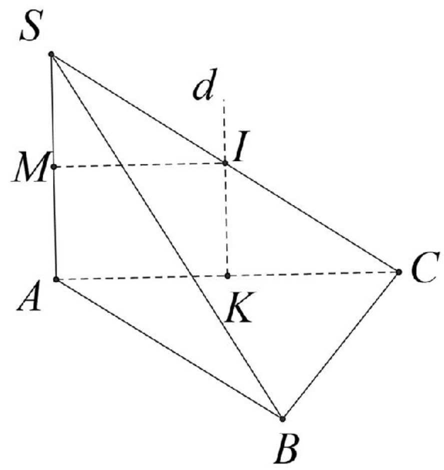
Vậy $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{13a}{2}$.

Câu 12. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = 5$, $AB = 3$, $BC = 4$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

A. $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $R=5$. **C.** $R=\dfrac{5}{2}$. **D.** $R=5\sqrt{2}$.

Lời giải 1

Chọn A



Gọi K là trung điểm AC. Gọi M là trung điểm SA.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ K dựng đường thẳng d vuông góc với $mp\left(ABC\right)$.

Trong $mp\left(SAC\right)$ dựng MI là đường trung trực đoạn SA cắt d tại I.

Khi đó điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính mặt cầu là $R=AI$.

Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5\Rightarrow AK=\dfrac{5}{2}$. Có $IK=MA=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $R=AI=\sqrt{AK^2+IK^2}=\sqrt{\dfrac{25}{4}+\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải 2

Gọi I là trung điểm của SC. Tam giác SAC vuông tại A nên $IS=IC=IA$ (1)

Ta có $BC\perp AB; BC\perp SA\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow\Delta SBC$ vuông tại **B.**

Nên $IS=IC=IB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}SC$.

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$; $SC=\sqrt{AS^2+AC^2}=5\sqrt{2}$

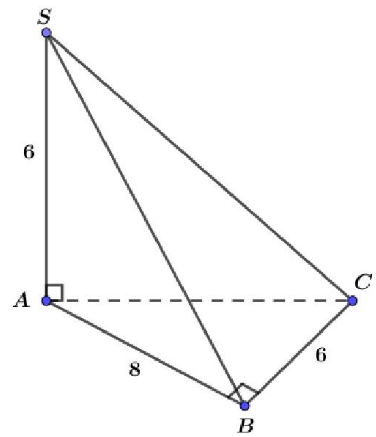
Vậy $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=8$, $BC=6$. Biết $SA=6$ và $SA\perp(ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng của hình chóp $SABC$.

A. $\dfrac{16\pi}{9}$ **B.** $\dfrac{625\pi}{81}$ **C.** $\dfrac{256\pi}{81}$ **D.** $\dfrac{25\pi}{9}$

Lời giải

Chọn C



Gọi r là bán kính khối cầu nội tiếp chóp $S.ABC$, ta có $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{tp}.r\Rightarrow r=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{tp}}$

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=48$

Ta dễ dàng có ΔSAB, ΔSAC vuông tại S

Tính được $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$

$S_{tp}=S_{SAB}+S_{SAC}+S_{ABC}=108$ (đvdt) $\Rightarrow r=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{tp}}=\frac{4}{3}$

Vậy thể tích khối cầu nội tiếp chóp $S.ABC$ là $V=\frac{4}{3}\pi.r^3=\frac{256\pi}{81}$.

Câu 14. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $SA=6a, AB=2a, AC=4a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

A. $R=2a\sqrt{7}$. **B.** $R=a\sqrt{14}$. **C.** $R=2a\sqrt{3}$. **D.** $r=2a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{4a^2+16a^2}=2a\sqrt{5}$

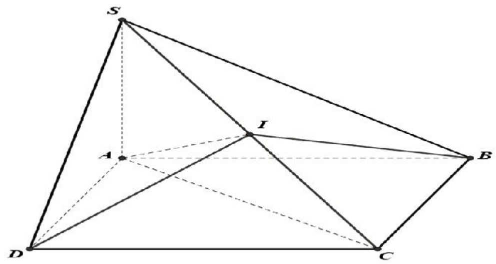
$R_d=a\sqrt{5}$

$R=\sqrt{R_d^2+\frac{SA^2}{4}}=\sqrt{5a^2+9a^2}=a\sqrt{14}$.

Câu 15. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{2}a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải



*) Ta có ΔSAC vuông tại A (1).

*) CM ΔSDC vuông tại ***D***. Ta có:

$AD \perp CD$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật).

$SA \perp CD$ (vì cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy).

Ta suy ra: $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SDC$ vuông tại D (2).

*) Chứng minh tương tự, ta được ΔSBC vuông tại B (3).

Từ (1), (2), (3): Ta suy ra: mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có đường kính SC.

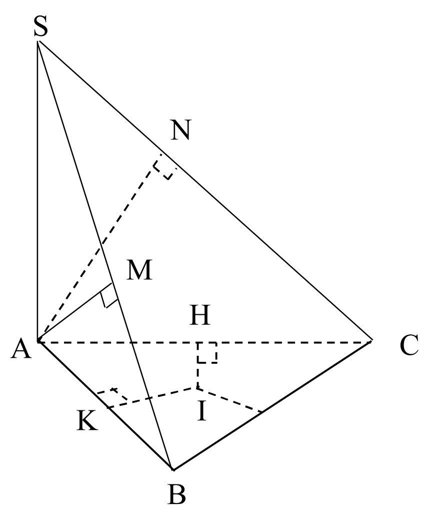
Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}$.

Vậy mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 60°$, $BC = a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** a **D.** $2a$

Lời giải



• Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow IA = IB = IC$ (1).

• Kẻ IH là trung trực của AC.

$$\left.\begin{array}{l} IH \perp AC \\ IH \perp SA \end{array}\right\} \Leftrightarrow IH \perp (SAC) \Leftrightarrow IH \perp (ANC).$$

Mà ΔANC vuông tại N có AC là cạnh huyền và H là trung điểm $AC \Rightarrow IH$ là trục của $\Delta ANC \Rightarrow IA = IC = IN$ (2).

• Tương tự kẻ IK là trung trực của $AB \Rightarrow IK$ là trục của $\Delta AMB \Rightarrow IA = IB = IM$ (3).

$(1),(2),(3) \Rightarrow IA = IB = IC = IM = IN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp chóp $A.BCMN$.

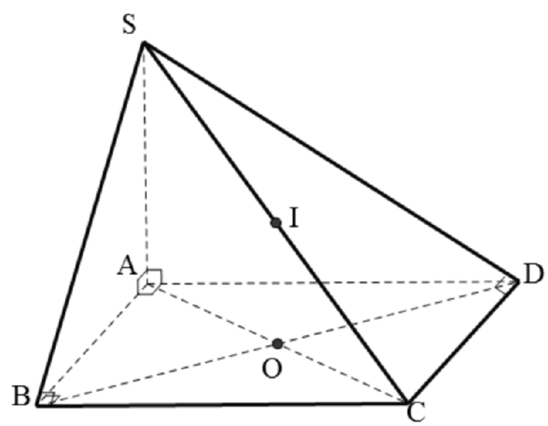
Định lí hàm sin trong ΔABC: $IA = \dfrac{BC}{2\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{a}{2\sin 60°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, SA \perp (ABCD)$, SC tạo với mặt đáy một góc 45^0. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$; I là trung điểm đoạn SC.

$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

Các điểm A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông nên I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

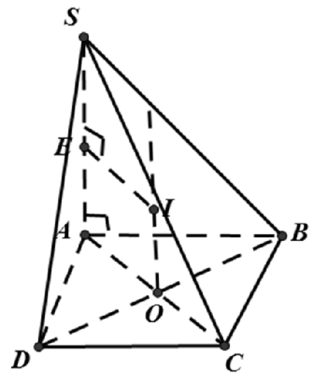
Mặt khác AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng đáy nên góc giữa SC và mặt phẳng đáy là góc ACS bằng 45^0. Do đó tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = 2a$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.2a.a.a\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABCD là hình vuông cạnh bằng a. $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{3}.$ Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp?

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $a\sqrt{7}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Dựng (d) đi qua O và vuông góc với $mp(ABCD)$.

Dựng Δ là đường trung trực của cạnh SA cắt SA tại E.

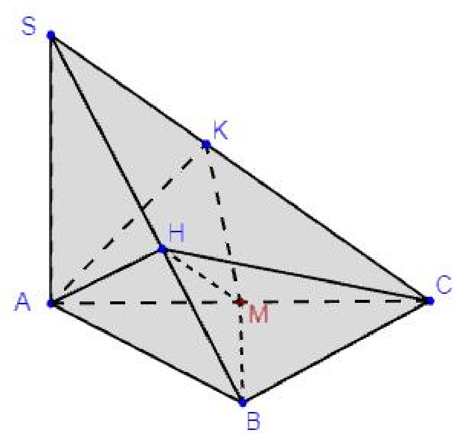
$I = d \cap \Delta \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ => Bán kính là: IA.

Ta có $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. $AI = \sqrt{AO^2 + AE^2} = \sqrt{(\dfrac{a\sqrt{2}}{2})^2 + (\dfrac{a\sqrt{3}}{2})^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 19. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC, khi đó thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$ là

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **<u>D</u>.** $\dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC.

ΔABC vuông cân tại B $\Rightarrow$ $MB = MA = MC = \dfrac{1}{2}AC$. (1)

ΔKAC vuông tại K $\Rightarrow MK = \dfrac{1}{2}AC$. (2)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \\ AH \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC.$$

$\Rightarrow \Delta AHC$ vuông tại H $\Rightarrow MH = \dfrac{1}{2}AC$. (3)

Từ $(1) \to (3)$ $\Rightarrow$ M là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$.

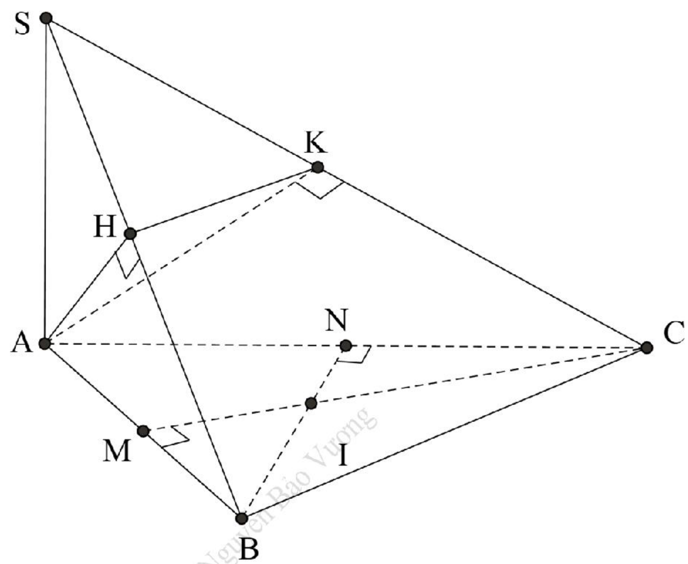
Bán kính khối cầu cần tìm: $R=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$.

Thể tích khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 20. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a; $SA\perp(ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $SB; SC$. Diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm A,B,C,K,H là

A. $\frac{4\pi a^2}{9}$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\frac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải



Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì ABC là tam giác đều cạnh nên ta có: $IA=IB=IC=R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Ta có: $IM\perp AB$ và $IM\perp SA$ (do $SA\perp(ABC)$) suy ra $IM\perp(SAB)$; Mà $AH\perp HB$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB; Do đó IM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AHB \Rightarrow IA=IH=IB$ (1)

Lại có: $IN\perp AC$ và $IN\perp SA$ (do $SA\perp(ABC)$) suy ra $IN\perp(SAC)$; Mà $AK\perp KC$ nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC; Do đó IN là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AKC \Rightarrow IA=IK=IC$ (2)

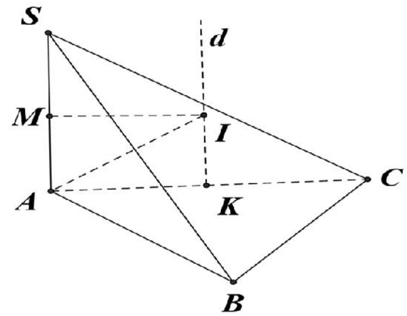
Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu đi qua 5 điểm A,B,C,K,H và bán kính mặt cầu đó là $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow S_{mc}=4\pi R^2=\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 21. (Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $SABC$

A. $8a^2\pi$. **B.** $\frac{32a^2}{3}\pi$. **C.** $\frac{8a^2\pi}{3}$. **D.** $4a^2\pi$.

Lời giải

<u>C</u>họn <u>B</u>



Gọi K, M lần lượt là trung điểm của AC, AS

Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp

Từ K dựng đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (ABC).

Trong (SAC), dựng đường trung trực của SA cắt d tại I

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC và bán kính mặt cầu là $R = IA$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{6} \Rightarrow MA = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

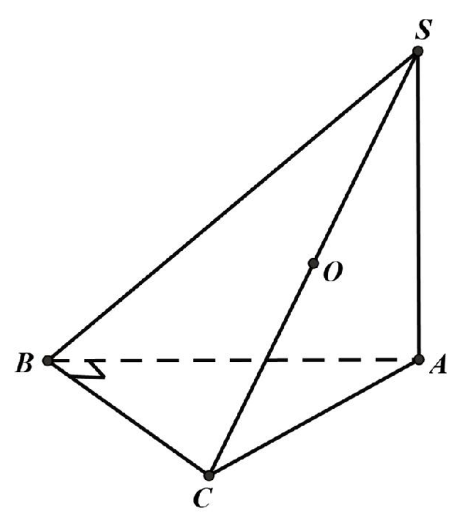
$\Rightarrow R = IA = \sqrt{MA^2 + AK^2} = a\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 8a^2\pi$

Câu 22. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = 2a, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. a. **B.** $2a\sqrt{2}$. **<u>C</u>.** $a\sqrt{2}$. **D.** $x = 3$; $y = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

<u>C</u>họn <u>C</u>



Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$, lại có $CA \perp SA$.

Do đó 2 điểm A, B nhìn đoạn SC dưới một góc vuông. Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S. ABC là mặt cầu đường kính S**C.**

Xét tam giac ABC có $AC=\sqrt{BC^2+BA^2}=2a$ suy ra $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a\sqrt{2}$.

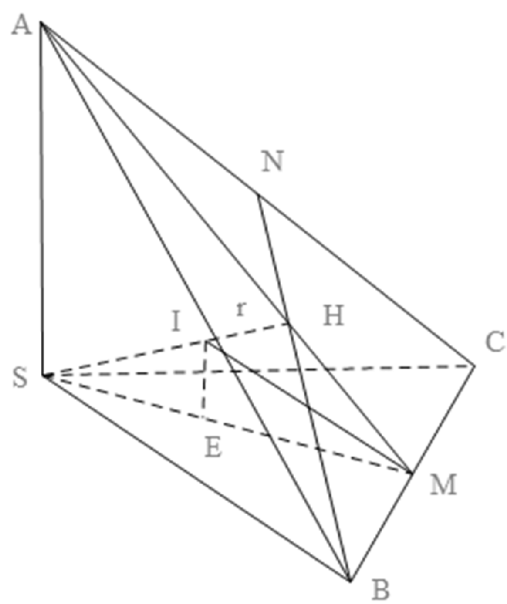
Vậy $R=a\sqrt{2}$.

Câu 23. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết thể tích của khối chóp bằng $\frac{a^3}{6}$. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp của hình chóp $S.ABC$.

A. $r=\frac{a}{3+\sqrt{3}}$. **B.** $r=2a$. **C.** $r=\frac{a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$. **D.** $r=\frac{2a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Áp dụng công thức: $r=\frac{3V}{S_{tp}}$ (*) và tam giác đều cạnh x có diện tích $S=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Từ giả thiết S.ABC đều có $SA=SB=SC$. Lại có SA, SB, SC đôi một vuông góc và thể tích khối chóp S.ABC bằng $\frac{a^3}{6}$ nên ta có $SA=SB=SC=a$.

Suy ra $AB=BC=CA=a\sqrt{2}$ và tam giác ABC đều cạnh có độ dài $a\sqrt{2}$. Do đó diện tích toàn phần của khối chóp $S.ABC$ là

$$S_{tp}=S_{SAB}+S_{SBC}+S_{SCA}+S_{ABC}=3\frac{a^2}{2}+\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Thay vào (*) ta được:

$$r=\frac{3V}{S_{tp}}=\frac{3.\frac{a^3}{6}}{\frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}}=\frac{a}{3+\sqrt{3}}.$$

Cách 2. Xác định tâm và tính bán kính

Từ giả thiết suy ra $SA=SB=SC=a$.

Kẻ $SH\perp(ABC)$, ta có H là trực tâm của tam giác AB**C.**

Gọi $M = AH \cap BC$, dựng tia phân giác trong của góc $\widehat{AMB}$ cắt SH tại I, kẻ $IE \perp (SBC)$ tại E. Dễ thấy $E \in SM$. Khi đó ta có $IH = IE$ hay $d(I, ABC) = d(I, SBC)$ do S.ABC la chóp tam giác đều nên hoàn toàn có $d(I, ABC) = d(I, SAB) = d(I, SAC)$ tức là I là tâm mặt cầu nội tiếp khối chóp S.AB**C.**

Ta có $r = IH = IE$.

Xét ΔSAM vuông tại S, đường cao SH, tính được $SM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$; $MH = \frac{SM^2}{AM} = \frac{a^2}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có

$\frac{IH}{IS} = \frac{MH}{MS} \Rightarrow \frac{IH}{IH + IS} = \frac{MH}{MH + MS} \Leftrightarrow \frac{IH}{SH} = \frac{MH}{MH + MS}$

$\Rightarrow IH = \frac{MH.SH}{MH + MS} = \frac{a}{\sqrt{6}} . \frac{a}{\sqrt{3}} : (\frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{a}{\sqrt{2}}) = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}$

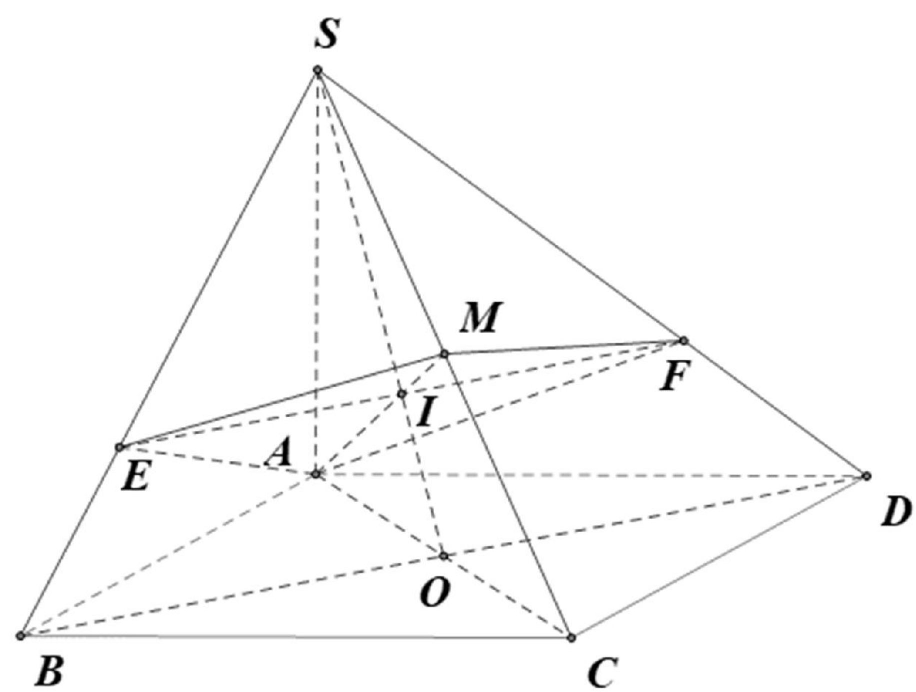
Vậy $r = IH = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}$.

Câu 24. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\parallel BD\\(SBD)\cap(\alpha)=FE\end{cases}\Rightarrow BD//EF$. Gọi I là giao điểm của AM và SO

Dễ thấy I là trong tâm tam giác SAC

$\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow SF=\frac{2}{3}SD\Rightarrow SF.SD=\frac{2}{3}SD^2=\frac{2}{3}\left(SA^2+AD^2\right)=2a^2\Rightarrow SF.SD=SA^2$

Xét tam giác vuông SAD và $SF.SD=SA^2\Rightarrow AF$ là đường cao của tam giác $\Rightarrow AF\perp SF$, chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow AE\perp SB$

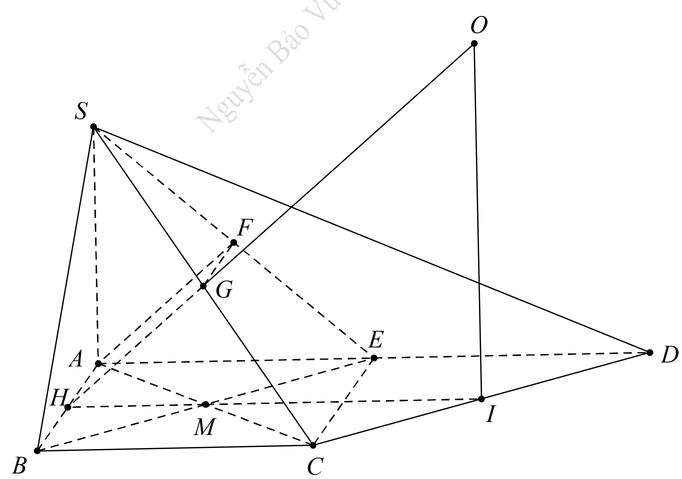
Tam giác $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao của tam giác $SAC\Rightarrow AM\perp SM$

Ta có $\begin{cases}AF\perp SF\\AE\perp SE\\AM\perp SM\end{cases}$ nên mặt cầu đi qua năm điểm S,A,E,M,F có tâm là trung điểm của SA và bán kính bằng $\frac{SA}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 25. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=1, AD=2$, cạnh bên $SA=1$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm AD. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A. $S_{mc}=11\pi$. **B.** $S_{mc}=5\pi$. **C.** $S_{mc}=2\pi$. **D.** $S_{mc}=3\pi$.

Lời giải



Gọi H,G,F lần lượt là trung điểm AB, SC, SE; $M=AC\cap BD$.

Dễ thấy $AFGH$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases}AF\perp SE(SA=AE)\\GF\perp SE(GF//AB//CE, AB\perp SE)\end{cases}$

Khi đó, $(AFGH)$ là mặt phẳng trung trực của SE.

Theo giả thiết: tứ giác ABCE là hình vuông $\Rightarrow CE\perp AD\Rightarrow \Delta CED$ vuông tại E.

Gọi I là trung điểm của CD, ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Đường thẳng d đi qua I và song song SA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

GH cắt d tại O, ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$, bán kính: $R=OC$

Vì $\begin{cases}O\in d\Rightarrow OE=OC=OD\\O\in GH\subset(AFGH)\Rightarrow OS=OE\end{cases}\Rightarrow OS=OC=OD=OE$

$IC = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ΔOIH đồng dạng ΔGMH nên $\frac{GM}{MH} = \frac{OI}{IH} \Rightarrow OI = \frac{3}{2}$.

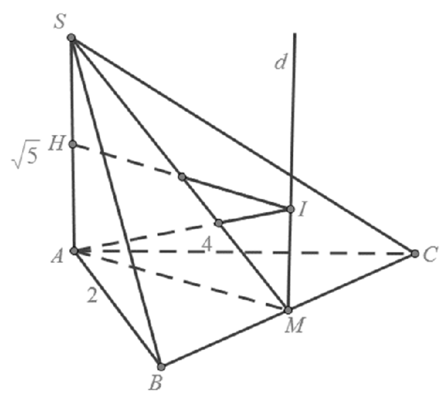
Áp dụng định lý Pitago vào tam giác OIC, suy ra $R = OC = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ là $S_{mc} = 4\pi R^2 = 11\pi$.

Câu 26. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2,\ AC = 4,\ SA = \sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là:

A. $R = \frac{25}{2}$. **B.** $R = \frac{5}{2}$. **C.** $R = 5$. **D.** $R = \frac{10}{3}$.

Lời giải



Cách 1.

Gọi M, H lần lượt là trung điểm BC,SA.

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SAM) kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA, cắt d tại I

$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- $\begin{cases} HA \perp (ABC) \\ IM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HA \perp AM \\ HA // IM \end{cases}$.

- $\begin{cases} HI \perp SA \\ AM \perp SA \\ HI, SA, AM \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow HI // AM$.

Suy ra tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

Ta có $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5}$, $IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}$.

Cách 2. Sử dụng kết quả: Nếu $SABC$ là một tứ diện vuông đỉnh A thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ được tính bởi công thức: $R = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 + AB^2 + AC^2}$

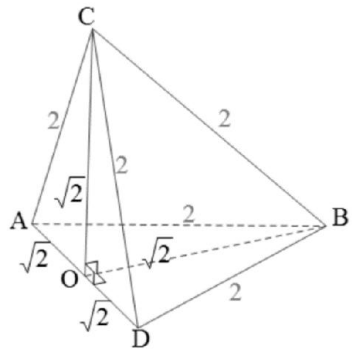
Áp dụng công thức trên, ta có $R=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2+4^2}=\frac{5}{2}$.

Dạng 2.2 Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2; hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm AD.

$$\begin{cases}(ABD)\perp(ACD)\\(ABD)\cap(ACD)=AD\\CO\perp AD\end{cases}\Rightarrow CO\perp(ABD)$$

ΔCOB vuông cân tại O và $CB=2$ suy ra $OB=OC=\sqrt{2}$.

$OD=OA=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{2}$.

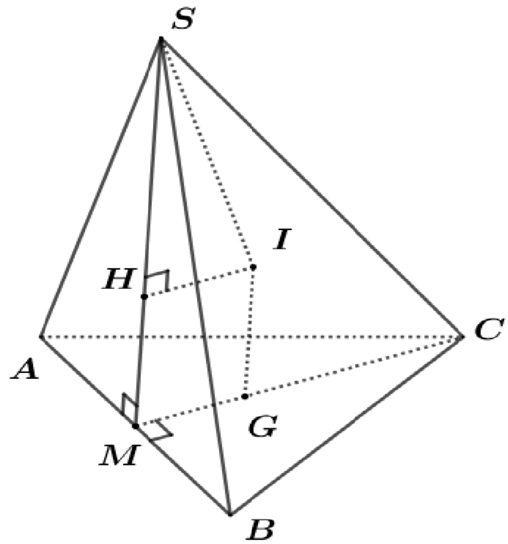
Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 2. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V=\frac{5\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M,G,H lần lượt là trung điểm của AB, trọng tâm $\Delta ABC,\Delta SAB$.

Vì $\Delta ABC,\Delta SAB$ là hai tam giác đều nên $CM\perp AB;SM\perp AB$.

Mà $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\CM\perp AB;SM\perp AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}CM\perp(SAB)\\SM\perp(ABC)\end{cases}$

Trong (SMC) từ G,H lần lượt kẻ các đường thẳng song song với SM,MC và cắt nhau tại I.

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có

$$SI^2=SH^2+HI^2=SH^2+MG^2=\left(\frac{2}{3}SM\right)^2+\left(\frac{1}{3}SM\right)^2$$

$$=\frac{5}{9}SM^2=\frac{5}{9}.\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.SI^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$$

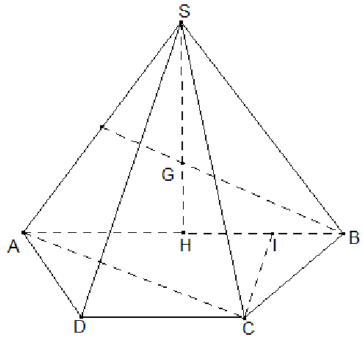
(Với V là thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$)

Câu 3. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB=2a$, $CD=a$, $\widehat{ABC}=60^0$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $R=a$ **C.** $R=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $R=\frac{2a}{3}$

Lời giải

Chọn C



Do AB và CD không bằng nhau nên hai đáy của hình thang là AB và CD. Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó SH vuông góc với AB nên SH vuông góc với $(ABCD)$.

Gọi I là chân đường cao của hình thang $ABCD$ từ đỉnh C của hình thang $ABCD$.

Ta có $BI = \dfrac{AB - CD}{2} = \dfrac{a}{2}$

Do $\widehat{ABC} = 60^0$ nên $BC = a$. Từ đó ta có tam giác ABC vuông tại C.

Do đó SH chính là trục của tam giác ABC.

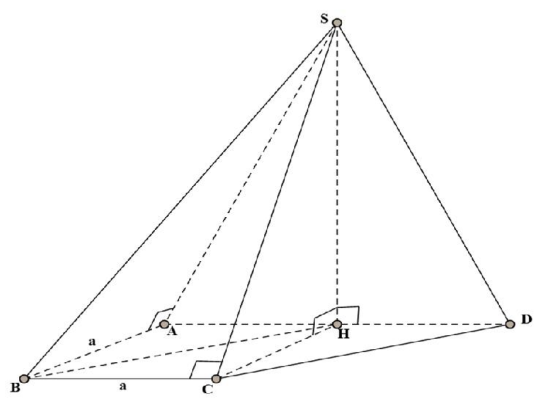
Mặt khác do tam giác SAB đều nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ chính là trọng tâm G của tam giác SAB.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Câu 4. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $6\pi a^2$. **B.** $10\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AD. Tam giác SAD đều và $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $AH = a, SH = a\sqrt{3}$ và tứ giác $ABCH$ là hình vuông cạnh a $\Rightarrow BH = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp S \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SA$ hay $\widehat{SAB} = 90^0$ (1).

Chứng minh tương tự ta có $BC \perp SC$ hay $\widehat{SCB} = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) ta thấy hai đỉnh A và C của hình chóp $S.ABC$ cùng nhìn SB dưới một góc vuông. Do đó bốn điểm S, A, B, C cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB.

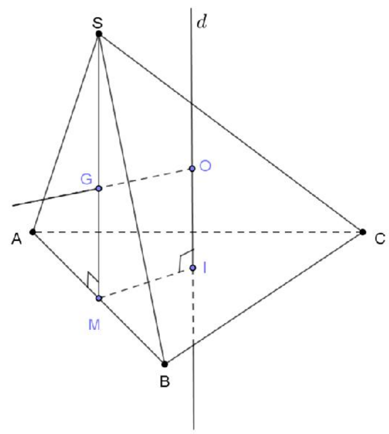
Xét tam giác vuông SHB, ta có $SB=\sqrt{BH^2+SH^2}=a\sqrt{5}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S=4\pi\left(\frac{SB}{2}\right)^2=5\pi a^2$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a,\widehat{ACB}=30^0$. Biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{mc}=\frac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $S_{mc}=\frac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{mc}=\frac{7\pi a^2}{12}$. **D.** $S_{mc}=4\pi a^2$.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow IA=IB=IC=R=\frac{AB}{2\sin 30^0}=a$.

Dựng đường thẳng d qua I và vuông góc với (ABC).

Gọi M là trung điểm của AB.

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow GA=GB=GC$

Kẽ đường thẳng đi qua G và vuông góc với (SAB) cắt d tại $O \Rightarrow OA=OB=OC=OS$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính là $r=OA=OB=OC=OS$.

Khi đó $SM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow GM=\frac{1}{3}SM=\frac{a\sqrt{3}}{6}=OI$.

$r^2=OB^2=OI^2+IB^2=\frac{a^2}{12}+a^2=\frac{13a^2}{12}$.

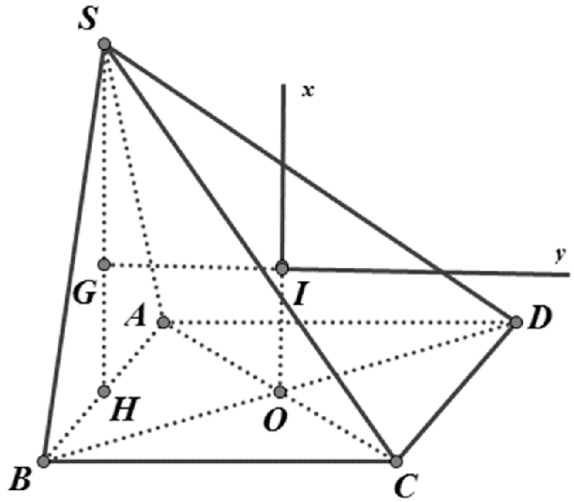
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S_{mc}=4.\pi.r^2=4\pi\frac{13a^2}{12}=\frac{13\pi a^2}{3}$.

Câu 6. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. $S=3\pi a^2$. **B.** $S=\frac{4\pi a^2}{3}$. **C.** $S=\frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $S=7\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C.



+) Xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Gọi *SH* là đường cao của tam giác *SA**B.*** Vì *SAB* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên *SH* là đường cao của hình chóp *S.ABC**D.***

Gọi *O* là tâm của hình vuông *ABCD*, từ *O* dựng $Ox \perp (ABCD)$.

Từ trọng tâm *G* của tam giác *SAB* dựng $Gy \perp (SAB)$.

Gọi $I = Ox \cap Gy$. Vậy *I* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

+) Chứng minh *I* là tâm mặt cầu cần tìm

Vì $I \in Ox$, mà $Ox \perp (ABCD)$, *O* là tâm hình vuông *ABCD* nên *I* cách đều *A, B, C, D* (1).

Mặt khác *G* là trọng tâm của tam giác đều *SAB*, $I \in Gy$, mà $Gy \perp (SAB)$ nên *I* cách đều *S, A, B* (2).

Từ (1) và (2) suy ra *I* cách đều *S, A, B, C,* ***D.*** Nên *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD*, bán kính *R=IB*

+) Tìm độ dài bán kính mặt cầu

Vì $OI \perp (ABCD)$, $SH \perp (ABCD)$ nên $OI // GH$ vì $G \in SH$ (3)

Mặt khác $Gy \perp (SAB)$, $I \in Gy$ mà $OH \perp (SAB)$ (vì $OH \perp AB, OH \perp SH$) nên $GI // OH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra *GHOI* là hình bình hành $OI = GH = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OB \Rightarrow \triangle BOI$ vuông tại *B*

Xét $\triangle BOI$ vuông tại *B* ta có

$$IB^2 = IO^2 + OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2 \Rightarrow IB = \frac{\sqrt{21}}{6}a = R.$$

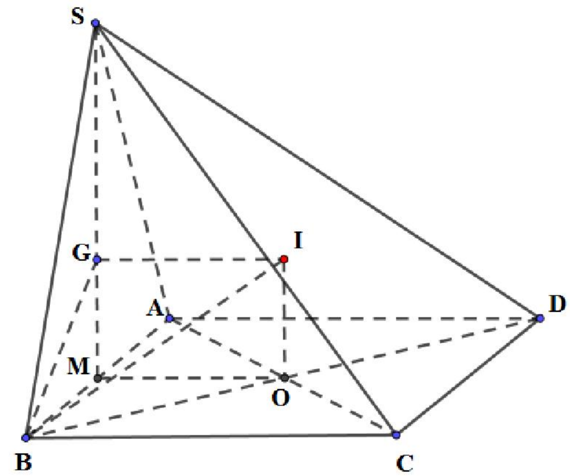
$\Rightarrow$ Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$. **B.** $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A



***) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp** $S.ABCD$:

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của AB.

Do ΔSAB đều $\Rightarrow SM \perp AB$

Mà $(SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp OM$

OM là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow OM // AD \Rightarrow OM \perp AB$ (do $AD \perp AB$)

$\Rightarrow OM \perp (SAB)$.

Dựng các đường thẳng qua G, O lần lượt song song với MO, SM, hai đường thẳng này cắt nhau tại I

Ta có: $IO//SM,\ SM \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp (ABCD)$, mà O là tâm của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID$ (1)

Ta có: $GI//OM,\ \ MO \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp (SAB)$, mà G là trọng tâm tam giác đều SAB

$\Rightarrow IS = IA = IB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

***) Tính bán kính, thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp** $S.ABCD$:

Ta có: $OM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a}{2} \Rightarrow GI = OM = \dfrac{a}{2}$ (do tứ giác $OMIG$ là hình chữ nhật)

ΔSAB đều cạnh bằng a có G là trọng tâm $\Rightarrow BG = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Do $GI \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp BG \Rightarrow \Delta BGI$ vuông tại G

$$\Rightarrow IB = \sqrt{IG^2 + GB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

Bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $R = IB = a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

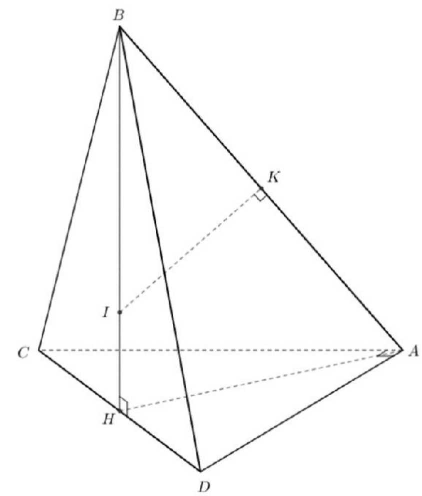
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(a\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^3 = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}.$$

Câu 8. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a, AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{64\pi a^2}{27}$ **B.** $\frac{4\pi a^2}{27}$ **C.** $\frac{16\pi a^2}{9}$ **D.** $\frac{64\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm CD $\Rightarrow BH \perp (ACD)$ và tam giác ACD vuông tại **A.**

$\Rightarrow CD = \sqrt{CA^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$ và $BH = \sqrt{BD^2 - HD^2} = \frac{3}{2}a.$

Trong mặt phẳng (BHA) kẻ đường trung trực Δ của cạnh BA và gọi $I = \Delta \cap SH$

Khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có

$$\Delta BIK \sim \Delta BAH \Rightarrow BI = \frac{BK.BA}{BH} = \frac{BA^2}{2BH} = \frac{4}{3}a.$$

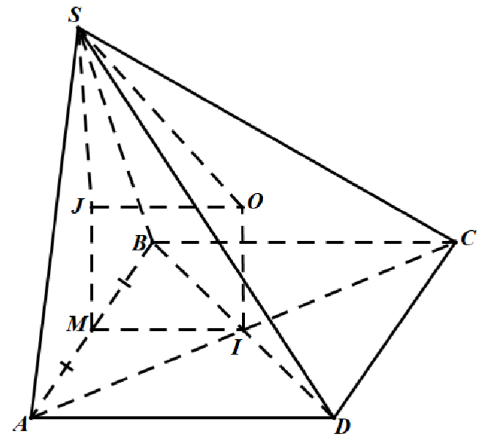
Suy ra bán kính mặt cầu là $R = BI = \frac{4}{3}a.$

Vậy diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \frac{64\pi a^2}{9}$.

Câu 9. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a, AD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB} = 60°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $S = \frac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $S = \frac{11\pi a^2}{3}$.

Lời giải



Gọi *I, J* là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác *ABCD* và tam giác *SA**B***. *M* là trung điểm của *AB* và *O* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $JM \perp AB$ và $IM \perp AB$ và $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$ nên $IM \perp JM$, ngoài ra *O* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp IM$; $OJ \perp (SAB) \Rightarrow OJ \perp JM$.

Do đó O, J, M, I đồng phẳng và tứ giác $OJMI$ là hình chữ nhật (do có 3 góc ở đỉnh vuông).

Gọi R, R_b lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Ta có: $R = SO = \sqrt{SJ^2 + OJ^2} = \sqrt{R_b^2 + IM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - AM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - \frac{AB^2}{4}}$

Áp dụng định lý Pytago: $IA^2 = \frac{BD^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow IA = a$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác SAB: $R_b = \frac{AB}{2\sin \widehat{ASB}} = \frac{a}{2.\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Do đó: $R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{13}{12}a^2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{13}{3}\pi a^2$.

Nhận xét: Bài toán này áp dụng một bổ đề quan trọng sau:

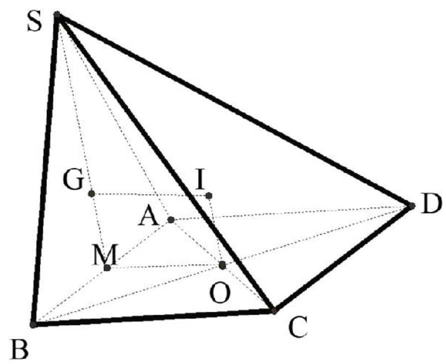
Xét hình chóp đỉnh S, có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng đáy nội tiếp trong đường tròn bán kính R_d, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tam giác SAB là R_b. Khi đó hình chóp này nội tiếp trong 1 mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{AB^2}{4}}$

Câu 10. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{57}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{19}}{4}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của đáy, M là trung điểm của AB và G là tâm của tam giác đều SAB.

Gọi d,Δ lần lượt là trục của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tam giác SAB.

Do $(SAB)\perp(ABCD),(SAB)\cap(ABCD)=AB,SM\perp AB$ nên $SM\perp(ABCD)$.

Mặt khác $d\perp(ABCD)$ nên $d\,//\,SM$ hay $\Delta\subset mp(d,SM)$, Δ và d cắt nhau tại I.

Ta có I cách đều S,A,B,C,D nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Tứ giác $GMOI$ có $GM\perp MO,IG\perp GM,SM\,//\,IO$ nên $GMOI$ là hình chữ nhật. $SM=a\sqrt{3},GM=\frac{1}{3}SM=\frac{a\sqrt{3}}{3},AO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

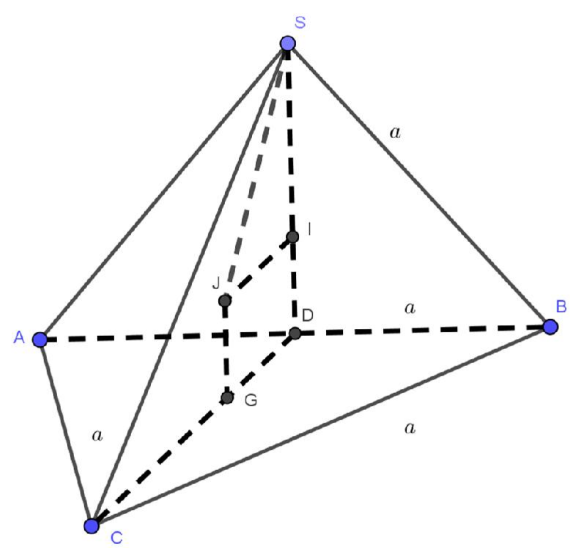
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R=IA=\sqrt{IO^2+AO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{5a^2}{4}}=\frac{\sqrt{57}a}{6}$.

Câu 11. **(Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{5a^2\pi}{12}$. **B.** $\frac{5a^2\pi}{3}$. **C.** $\frac{5a^2}{3}$. **D.** $\frac{5a^2}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G,I là lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB.

Trục của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB cắt nhau tại J nên J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính mặt cầu là $R=SJ$

Ta có $IJ = GD = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $R = SJ = \sqrt{SI^2 + JI^2} = \frac{\sqrt{15}a}{6}$

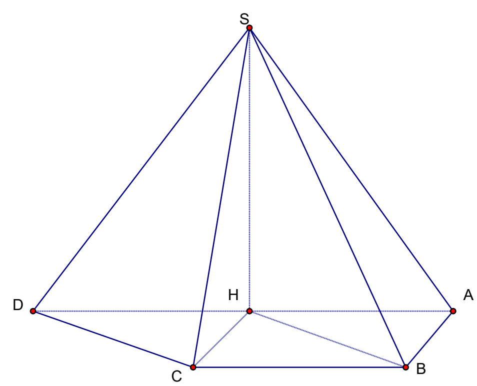
Vậy Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = \frac{5\pi a^2}{3}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $6\pi a^2$. **B.** $10\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AD thì $SH \perp AD$ và $SH = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ (vì ΔSAD đều).

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ (vì (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nhau theo giao tuyến AD)

Ta có thể xem hình chóp $S.ABC$ là một phần của hình hộp chữ nhật có một đáy là hình vuông $ABCH$ và một cạnh bên là SH (lúc này SB là một đường chéo của hình hộp).

Do đó bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

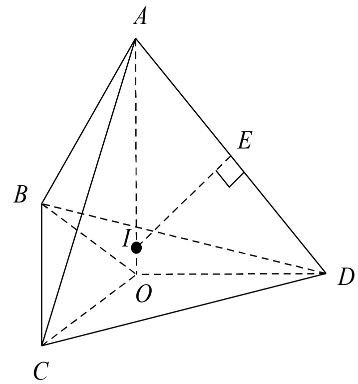
Diện tích mặt cầu cần tìm là $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$.

Dạng 2.3 Khối chóp đều

Câu 1. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Gọi tứ diện đều là $ABCD$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD thì ta có $AO\perp(BCD)$.

Trong mặt phẳng (AOD) dựng đường trung trực của AD cắt AO tại I, vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ với AI là bán kính.

Gọi E là trung điểm AD. Ta có $\Delta AEI\sim\Delta AOD\Rightarrow\dfrac{AO}{AE}=\dfrac{AD}{AI}\Rightarrow R=AI=\dfrac{AD.AE}{AO}=\dfrac{AD^2}{2AO}$.

$$AO=\sqrt{AD^2-DO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow R=\frac{a^2}{2.\frac{a\sqrt{6}}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

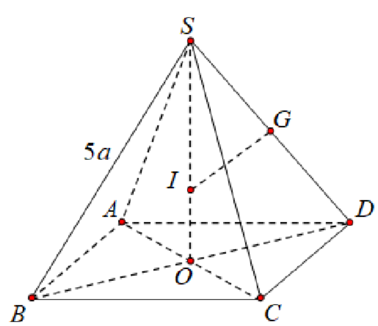
***Công thức tính nhanh*:** Tứ diện đều $ABCD$ có: độ dài cạnh bên $AB=AC=AD=x$ và chiều cao h. Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R=\dfrac{x^2}{2h}$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a,$ cạnh bên bằng $5a.$ Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD.$

A. $R=\sqrt{3}a$. **B.** $R=\sqrt{2}a$. **C.** $R=\dfrac{25a}{8}$. **D.** $R=2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD, $GI\perp SD, I\in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD=3\sqrt{2}a.\sqrt{2}=6a$, $OD=3a$.

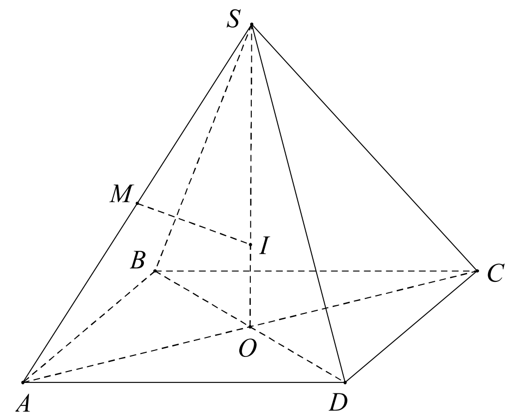
Xét ΔSOD vuông tại O ta có: $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=4a$

Ta có $\Delta SOD\sim\Delta SGI$, suy ra $\dfrac{SO}{SG}=\dfrac{SD}{SI}\Rightarrow 4a.R=\dfrac{1}{2}(5a)^2\Rightarrow R=\dfrac{25a}{8}$

Câu 3. Hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $4\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\sqrt{2}\pi a^2$ **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$; M là trung điểm SA.

Trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của trung trực đoạn SA với SO.

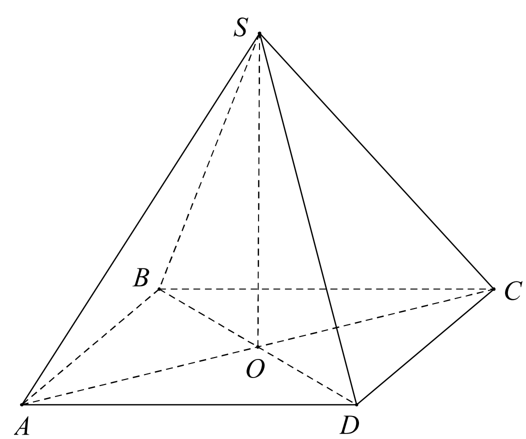
Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Tam giác SAO đồng dạng với tam giác SIM.

$$\Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{AO} \Rightarrow R = SI = \frac{SM.SA}{AO} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi a^2$.

Cách 2:



Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $\Delta SBD = \Delta ABD$ nên $OS = OA$.

Mà $OA = OB = OC = OD \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

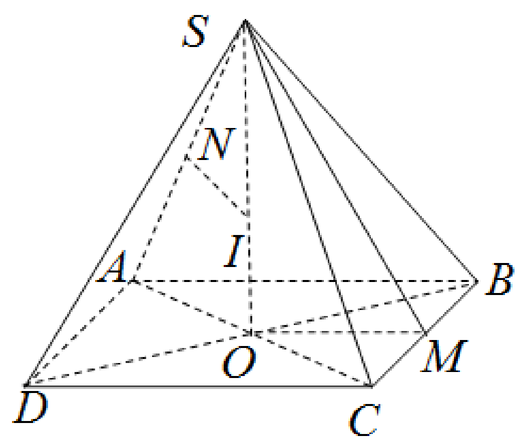
Bán kính mặt cầu $R = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$.

Câu 4. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\dfrac{12}{5}a$ **B.** $2a$ **C.** $\dfrac{3}{2}a$ **D.** $\dfrac{9}{4}a$

Lờigiải



Gọi các điểm như hình vẽ.

Ta có $SI = a\sqrt{3}$. Góc $SMO = 60^0$.

Gọi cạnh đáy bằng x thì $SO = OM.\tan 60^0 = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

$SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

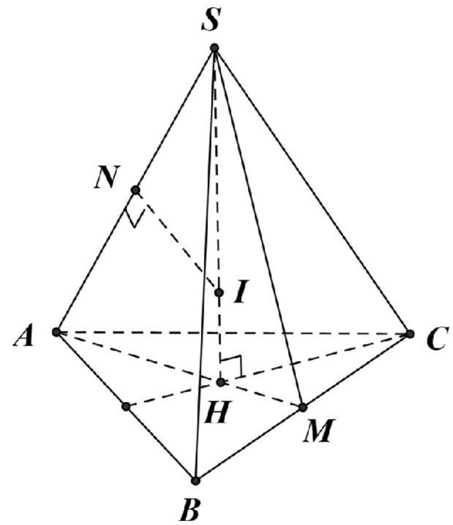
$\Delta SNI \sim \Delta SOA$ nên $\dfrac{SN}{SI} = \dfrac{SO}{SA} \Leftrightarrow \dfrac{5x^2}{8} = \dfrac{3a.x}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{12}{5}a\,(x > 0)$

Câu 5. **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB = a$, góc giữa mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính bán kính mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $S.ABC$

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{7a}{12}$. **C.** $\dfrac{7a}{16}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC, H là trọng tâm tam giác ABC

Khi đó $SH \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMA} = 60^0$

Gọi N là trung điểm của SA, kẻ $NI \perp SA (I \in SH)$

Khi đó ta có $IS = IA = IB = IC$, nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

ΔABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}a$

$SA^2 = SH^2 + AH^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{7a^2}{12}$

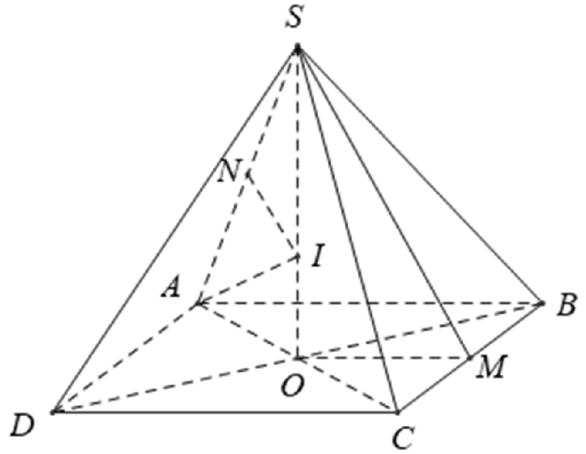
$\Delta SAH \sim \Delta SIN \Rightarrow \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{SH}{SN} \Rightarrow SI = \dfrac{SA.SN}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{7a^2}{12.2.\frac{1}{2}a} = \dfrac{7a}{12}$.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\dfrac{12}{5}a$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{3}{2}a$. **D.** $\dfrac{9}{4}a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow \left(\left(SBC\right),\left(ABCD\right)\right)=\widehat{SMO}=60^\circ$.

Gọi N là trung điểm SA, dựng mp trung trực của SA, cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$\Rightarrow R=IA=IS=a\sqrt{3}$

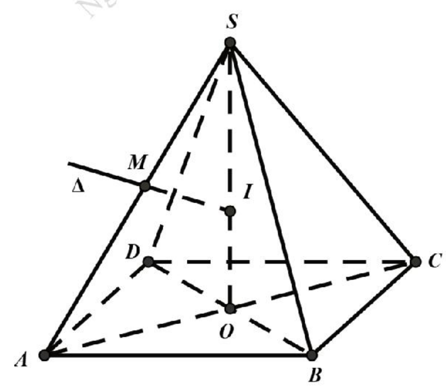
Gọi $AB=x$

Có $SO=OM.\tan 60^\circ=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $OA=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

ΔSNI đồng dạng $\Delta SOA \Rightarrow SN.SA=SO.SI$

$\Leftrightarrow \dfrac{x\sqrt{5}}{4}.\dfrac{x\sqrt{5}}{2}=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{12a}{5}$.

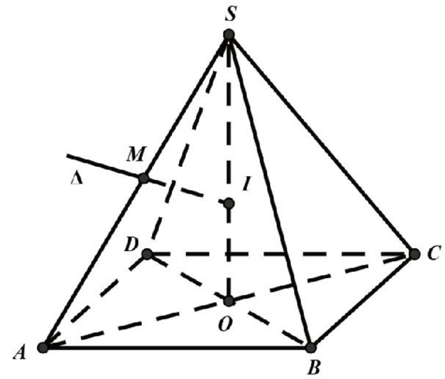
Câu 7. **(Gia Lai 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



A. $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BC$. Khi đó SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.
Gọi Δ là đường trung trực của cạnh SA và $I = \Delta \cap SO$ thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Theo giả thiết ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Mà góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$ hay $\widehat{SAO} = 60° \Rightarrow \tan 60° = \dfrac{SO}{AO}$, $\Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có ΔSMI và ΔSOA đồng dạng nên $\dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \dfrac{SM.SA}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{2.SO}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = IS = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. là

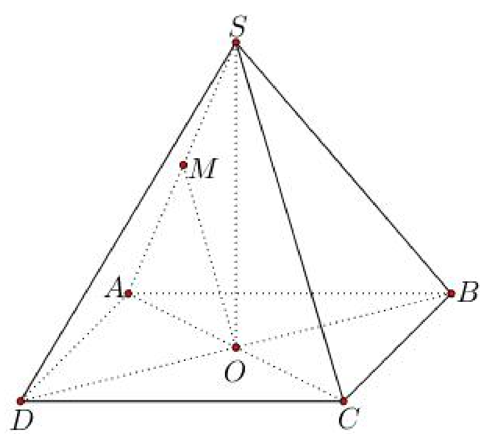
$S_{xq} = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \dfrac{8\pi a^2}{3}$.

Câu 8. **(Vũng Tàu - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\dfrac{2}{3}\pi a^2$. **D.** $\dfrac{1}{2}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm SA.

Ta có SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực cạnh SA, (P) cắt SO tại I.

Ta có $IA = IS$.

Suy ra $IS = IA = IB = IC = ID$.

Mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ có tâm I, bán kính IS.

Ta có $SM = \frac{a}{2}$, $SO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\Delta SMI \sim \Delta SOA(\text{g.g}) \Rightarrow \frac{IS}{SA} = \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $I \equiv O$.

Vậy $S = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$.

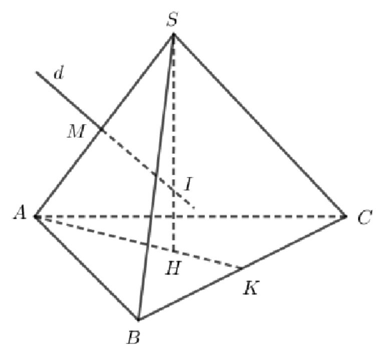
Câu 9. Cho tứ diện đều có thể tích bằng $\frac{1}{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

A. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử tứ diện đều là $S.ABC$ có cạnh a



Gọi K là trung điểm của BC, H là hình chiếu của S trên (ABC).

Khi đó SH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $AH = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AK.BC.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Theo đề bài ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng (SAK) gọi d là đường trung trực của cạnh SA và $\begin{cases} d \cap SA = M \\ d \cap SH = I \end{cases}$ thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ co bán kính $R = SI$.

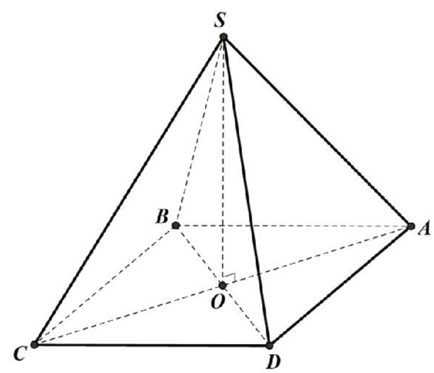
Trong tam giác SAH ta có: $SI.SH = SM.SA \Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SH} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}.\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $V = 3\pi a^3\sqrt{6}$. **B.** $V = \pi a^3\sqrt{6}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD ta có $OA = OB = OC = OD$

Ta lại có $\triangle ABC = \triangle ASC$ (c-c-c) $\Rightarrow$ $BO = SO$ (trung tuyến tương ứng)

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = SO$

Suy ra O là tâm của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có $r = OA = \dfrac{a\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

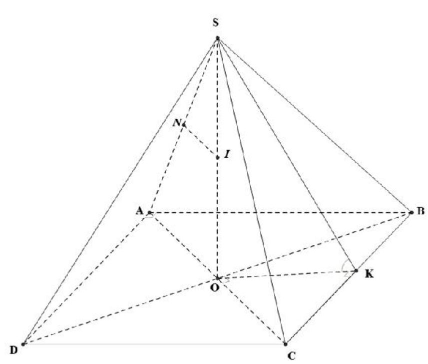
Vậy. $V = \dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \pi a^3\sqrt{6}$

Câu 11. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{4\pi a^2}{3}$ **B.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$ **C.** $\dfrac{2\pi a^2}{3}$ **D.** $\dfrac{9\pi a^2}{4}$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của đáy suy ra SO là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy đa giác.

Từ O dựng OK vuông góc với BC, suy ra K là trung điểm BC.

Xét tam giác SBC cân tại S có $SK \perp BC$

Từ đó ta có $\begin{cases} SK \perp BC \\ OK \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy $ABCD$ là góc $\widehat{SKO}$

Xét tam giác OBC vuông cân tại O có $OK = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$

Xét tam giác SKO vuông tại O có $SO = OK.\tan\left(\widehat{SKO}\right) = \dfrac{a}{2}.\tan 45° = \dfrac{a}{2}$

Mặt khác $SA^2 = SO^2 + OA^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi N là trung điểm SA. Trong mặt phẳng (SAO) vẽ đường trung trực của cạnh SA cắt SO tại I, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Xét hai tam giác đồng dạng SNI và SOA có $\dfrac{SN}{SO} = \dfrac{SI}{SA}$

$$R = SI = \frac{SN.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\frac{a}{2}} = \frac{3a}{4}$$

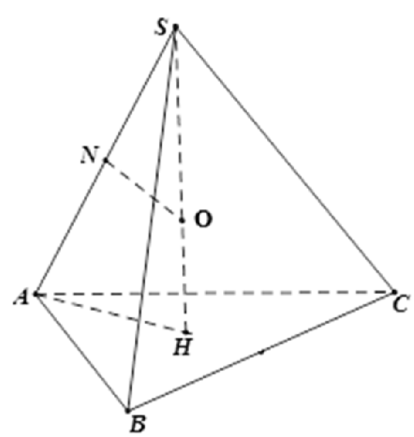
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 = \dfrac{9\pi a^2}{4}$

Dạng 2.4 Khối chóp khác

Câu 1. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $\widehat{BAC} = 30^0$ và $BC = a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không thuộc mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$ **<u>B</u>.** $V = \dfrac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$ **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$ **D.** $V = \dfrac{15\sqrt{3}}{27}\pi a^3$

Lời giải



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $SH \perp (ABC)$ và SH là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAH} = 60^0$.

Gọi N là trung điểm SA, mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại O. Khi đó $OS = OA = OB = OC$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$AH = \dfrac{BC}{2\sin 30^0} = a$. $SH = AH.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$, $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = 2a$.

Bán kính mặt cầu là $R = SO = \dfrac{SN.SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

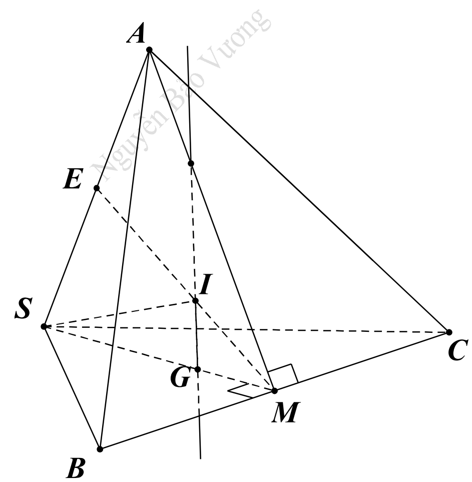
Thể tích của khối cầu tâm O là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Câu 2. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$ **B.** $R = \dfrac{a}{3}$ **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$ **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $SM = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, do đó tam giác SAM đều.

Gọi M là trung điểm đoạn BC. Ta có (SAM) là mặt phẳng trung trực đoạn BC.

Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Gọi E là trung điểm SA, ta có $I = \Delta \cap EM$, khi đó I là tâm đường mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$.

$IG = GM.\tan 30^\circ = \dfrac{a}{6}$, $SG = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $R = SI = \sqrt{IG^2 + GS^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{36}} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$.

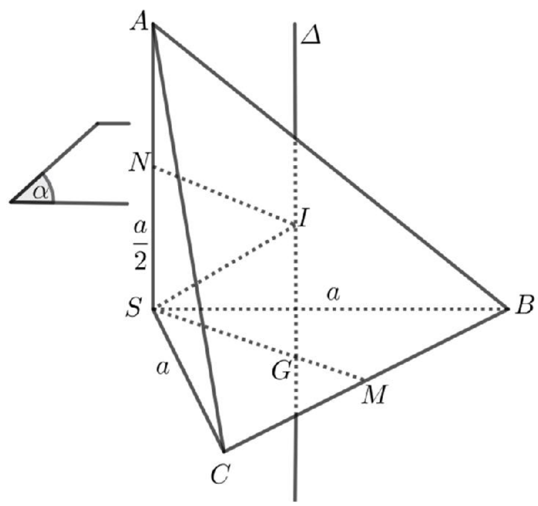
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{7\pi a^2}{18}$ **B.** $\frac{7\pi a^2}{12}$ **C.** $\frac{7\pi a^2}{3}$ **D.** $\frac{7\pi a^2}{6}$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$; ΔSBC có $SB = SC = a$, $\widehat{BSC} = 60° \Rightarrow \Delta SBC$ đều.



Gọi M là trung điểm của BC.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $SBC \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

+ Dựng đường thẳng Δ đi qua G và vuông góc với (SBC) thì Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

+ Dựng mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của cạnh bên SA.

+ Gọi I là giao điểm của Δ và (α). Khi đó: $\begin{cases} I \in \Delta \Rightarrow IB = IS = IC \\ I \in (\alpha) \Rightarrow IS = IA \end{cases} \Rightarrow IA = IS = IB = IC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.SBC$ và bán kính của mặt cầu này là $R = IS$.

Ta có tứ giác $SNIG$ là hình chữ nhật nên $IG = NS = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

Lại có: $SG = \frac{2}{3}.SM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

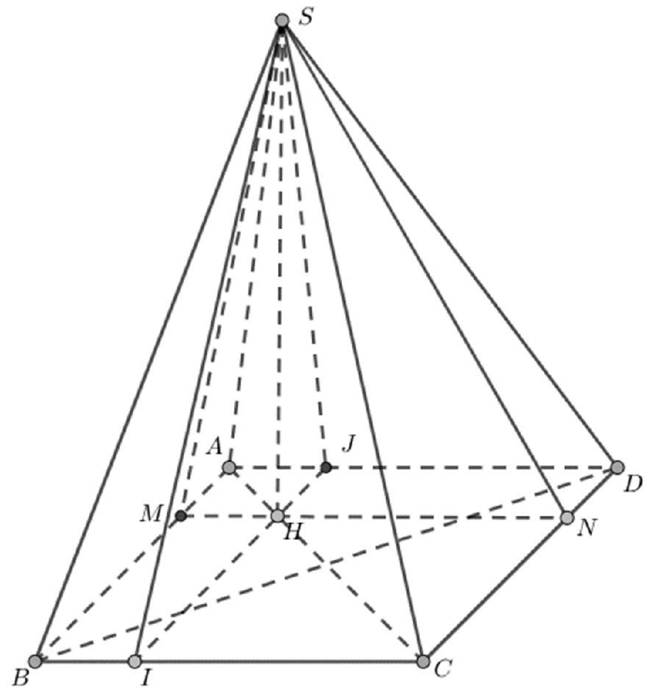
Xét ΔSGI vuông tại G ta có: $R^2 = IS^2 = IG^2 + SG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21a^2}{36}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi.\frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 4. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC thoả mãn $AC = 4AH$ và $SH = a$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ (mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp)

A. $\frac{4a}{9+\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{4a}{5+\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{4a}{5+\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{4a}{9+\sqrt{17}}$.

Lời giải



Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ và r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $d\left(I,\left(ABCD\right)\right)=d\left(I,\left(SAD\right)\right)=d\left(I,\left(SAB\right)\right)=d\left(I,\left(SBC\right)\right)=d\left(I,\left(SCD\right)\right)=r$

Mặt khác, ta lại có: $V_{S.ABCD}=V_{I.ABCD}+V_{I.SAD}+V_{I.SAB}+V_{I.SBC}+V_{I.SCD}$ (*)

$V_{S.ABCD}=r.S_{ABCD}+r.S_{\Delta SAD}+r.S_{\Delta SAB}+r.S_{\Delta SBC}+r.S_{\Delta SCD}$ (*)

Suy ra $r=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}+S_{\Delta SAD}+S_{\Delta SAB}+S_{\Delta SBC}+S_{\Delta SCD}}$.

Ta tính được thể tích khối tứ diện đều là $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$.

Từ H ta dựng đường thẳng song song với AB cắt BC,AD lần lượt tại I và J

Từ H ta dựng đường thẳng song song với AD cắt AB,CD lần lượt tại M và N.

Ta có $HI=HN=\dfrac{3a}{4}$ và $HM=HJ=\dfrac{a}{4}$

Suy ra $SI=SN=\dfrac{5a}{4}$ và $SM=SI=\dfrac{\sqrt{17}a}{4}$

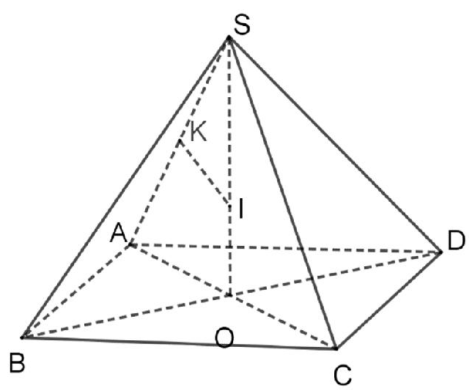
Do đó $S_{\Delta SBC}=S_{\Delta SCD}=\dfrac{5a^2}{8}$ và $S_{\Delta SAD}=S_{\Delta SAB}=\dfrac{\sqrt{17}a^2}{8}$

Do đó, từ (*) ta suy ra: $r=\dfrac{9-\sqrt{17}}{16}a=\dfrac{4a}{9+\sqrt{17}}$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3, AD=4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V=\dfrac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V=\dfrac{50\sqrt{3}}{3}\pi$. **D.** $V=\dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải



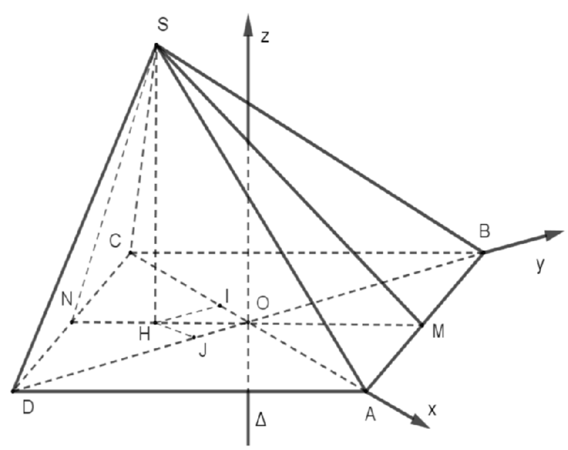
Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm S xuống mặt phẳng đáy. Ta có $\Delta SBO=\Delta SDO$ nên $SD=SB$. Chứng minh tương tự, $SC=SA,$ hay O là tâm của hình chữ nhật $ABCD.$ Do tam giác SAC đều nên $SA=SC=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=5.$ Trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường trung trực của cạnh SA đi qua trung điểm K và cắt SO tại điểm $I.$ Suy ra $R=SI=\dfrac{SA^2}{2.SO}=\dfrac{25}{5\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}.$

Suy ra, $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3=\dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi.$

Câu 6. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và tam giác SCD vuông cân tại S. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{5\pi a^2}{3}$. **D.** πa^2

Lời giải



+ Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,CD. Kẻ $SH\perp MN$ tại $H\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SN=\dfrac{a}{2}$; $MN=a$ $\Rightarrow\Delta SMN$ vuông tại S $\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $OH=\dfrac{a}{4}$.

+ Gọi I, J là hình chiếu vuông góc của H lên OC, OD $\Rightarrow OI = OJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{8}$.

+ Gọi $O = AC \cap BD$. Qua O dựng đường thẳng $\Delta \perp (ABCD)$.

Cách 1:

+ Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho: $A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right) \in Ox$, $B\left(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right) \in Oy$ và $\Delta \equiv Oz$.

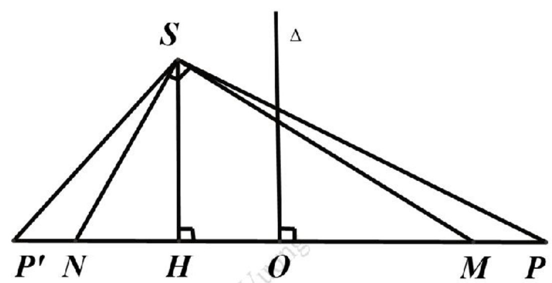
$\Rightarrow C\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S\left(\dfrac{-a\sqrt{2}}{8};\dfrac{-a\sqrt{2}}{8};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

+ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là mặt cầu đi qua 4 điểm S, A, B, C

Suy ra phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{\sqrt{3}a}{3}z - \dfrac{a^2}{2} = 0$.

$\Rightarrow r = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ $\Rightarrow S = 4\pi r^2 = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Cách 2:



Trên 2 tia OM, ON lấy hai điểm P, P' sao cho $OP = OP' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow PP' = a\sqrt{2}$.

+ $SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = \dfrac{a\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}$; $SP' = \sqrt{SH^2 + HP'^2} = \dfrac{a\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}$.

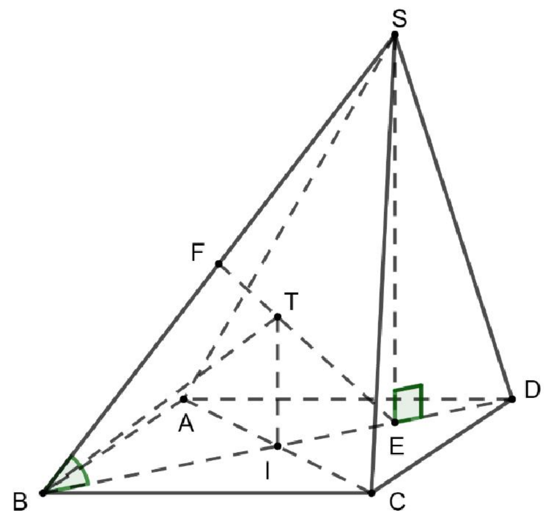
+ Trong tam giác SPP' có: $S_{\Delta SPP'} = \dfrac{1}{2}PP'.SH = \dfrac{SP.SP'.PP'}{4.R}$ $\Rightarrow R = \dfrac{SP.SP'}{2.SH} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{7\pi a^2}{3}$

Câu 7. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID. Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{25\pi}{2}a^2$. **B.** $\dfrac{125\pi}{4}a^2$. **C.** $\dfrac{125\pi}{2}a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của ID, F là trung điểm của SB. Trong mặt phẳng (SBD), vẽ IT song song với SE và cắt EF tại T.

Ta có $SE \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{SBE} = [SB;(ABCD)] = 45°$. Suy ra $\triangle SBE$ vuông cân tại E. Suy ra EF là trung trực của SB. Suy ra $TS = TB$. (1)

Ta có $IT \parallel SE$, suy ra $IT \perp (ABCD)$. Suy ra IT là trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Suy ra $TA = TB = TC = TD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra T là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, suy ra $IB = ID = \dfrac{5}{2}a$.

Do E là trung điểm của ID nên $IE = \dfrac{1}{2}ID = \dfrac{5}{4}a$.

$\triangle BEF$ vuông tại F có $\widehat{EBF} = 45°$ nên $\triangle BEF$ vuông cân tại F.

$\triangle EIT$ vuông tại I có $\widehat{IET} = 45°$ nên $\triangle EIT$ vuông cân tại I. Suy ra $IT = IE = \dfrac{5}{4}a$.

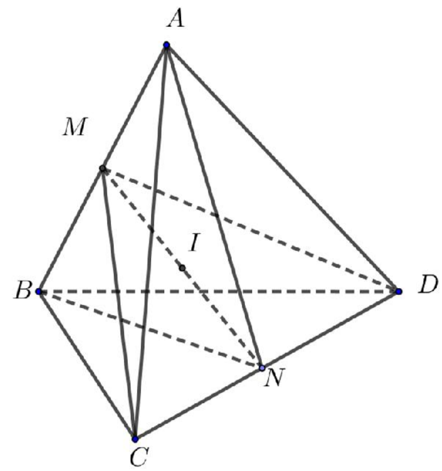
Do $\triangle BIT$ vuông tại I nên $TB = \sqrt{IB^2 + IT^2} = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi TB^2 = \dfrac{125\pi}{4}a^2$.

Câu 8. **(Chuyên Hạ Long -2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$, $AD = BC = 5$, $AC = BD = 6$. Tính thê tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. 35π (đvtt). **B.** 35 (đvtt). **C.** $\dfrac{35\sqrt{35}}{6}\pi$ (đvtt). **D.** $35\sqrt{35}\pi$ (đvtt).

Lời giải



Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD và MN.

Ta có $\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow AN = BN \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại N, mà AM là đường trung tuyến

$\Rightarrow AM$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow IA = IB = \frac{MN}{2}$ (1).

Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow IC = ID = \frac{MN}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Áp dụng công thức trung tuyến cho tam giác ACD ta có $AN^2 = \frac{36+25}{2} - \frac{9}{4} = \frac{113}{4}$.

Xét tam giác vuông AMI có: $AI^2 = AM^2 + MI^2$

$$= AM^2 + \frac{MN^2}{4} = AN^2 - MN^2 + \frac{MN^2}{4} = AN^2 - \frac{3MN^2}{4} = AN^2 - \frac{3}{4}\left(AN^2 - AM^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(AN^2 + 3AM^2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{113}{4} + 3.\frac{9}{4}\right) = \frac{35}{4}.$$

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = AI = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

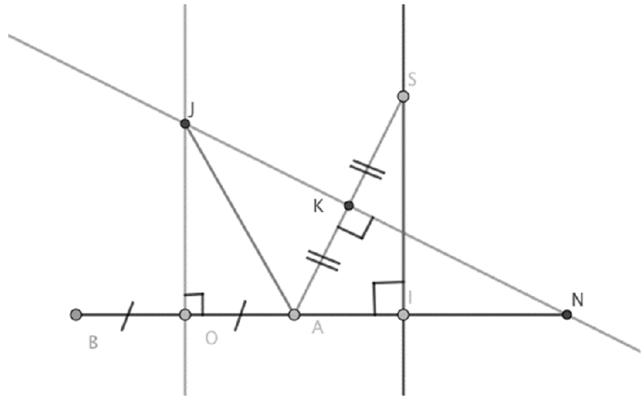
Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{35\sqrt{35}}{6}\pi$.

Câu 9. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2a$ nằm trong mặt phẳng (P). Gọi I là điểm đối xứng với O qua A. Lấy điểm S sao cho SI vuông góc với mặt phẳng (P) và $SI = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm S.

A. $R = \frac{a\sqrt{65}}{4}$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{65}}{16}$. **C.** $R = a\sqrt{5}$. **D.** $R = \frac{7a}{4}$.

Lời giải

Chọn A



* Gọi J là tâm mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm $S \Rightarrow J$ nằm trên đường trung trực của AB và SA.

* ΔSIA vuông tại $I \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ \sin S = \dfrac{AI}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}};\ \tan S = \dfrac{AI}{SI} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

*Ta có: Góc N và S bằng nhau vì cùng phụ với góc $\widehat{SAN}$.

* ΔAKN vuông tại $K \Rightarrow \sin N = \dfrac{AK}{AN} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{AN} = \sin S = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AN = \dfrac{5a}{2} \Rightarrow ON = \dfrac{7a}{2}$.

* ΔOJN vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{OJ}{ON} = \tan N = \tan S = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OJ = \dfrac{7a}{4}$.

* ΔOAJ vuông tại $O \Rightarrow R = JA = \sqrt{OJ^2 + OA^2} = \dfrac{a\sqrt{65}}{4}$.

Cách 2

Gắn hệ trục toạ độ Ixy sao cho A, B, O thuộc tia Ix, S thuộc tia Iy và giả sử a = 1.

Khi đó: $A(1;0)$; $S(0;2)$; $B(3;0)$.

Gọi $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là đường tròn tâm J qua 3 điểm A, S, B

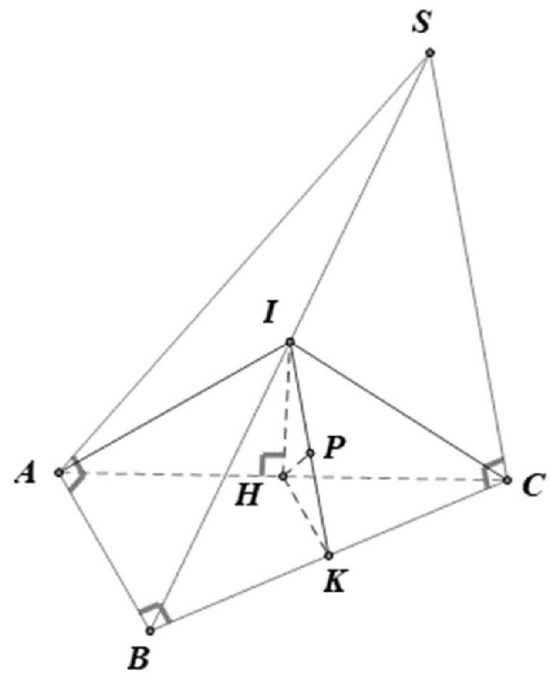
$\Rightarrow \begin{cases} -2a + c = -1 \\ -6a + c = -9 \\ -4b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \dfrac{7}{4} \\ c = 3 \end{cases}$.

Suy ra: $J\left(2; \dfrac{7}{4}\right) \Rightarrow R = JA = \dfrac{\sqrt{65}}{4}$ Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{65}}{4}$.

Câu 10. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 3a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $72\sqrt{18}\pi a^3$. **B.** $18\sqrt{18}\pi a^3$. **C.** $6\sqrt{18}\pi a^3$. **D.** $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Lời giải



Gọi I,H lần lượt là trung điểm của cạnh SB và AC

Mặt khác, theo giả thiết ta có $\Delta SAB,\Delta SCB$ lần lượt là các tam giác vuông tại A và C

$\Rightarrow IA=IB=IC=IS$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Mặt khác: ΔABC vuông tại B $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow IH\perp(ABC)$

Ta có: $\dfrac{d(A;(SBC))}{d(H;(SBC))}=\dfrac{AC}{HC}=2\Rightarrow d(H;(SBC))=a\sqrt{3}$

Gọi K là trung điểm của cạnh BC $\Rightarrow HK\perp BC\,(HK//AB,AB\perp BC)$

Lại có: $BC\perp IH\,(IH\perp(ABC))\Rightarrow BC\perp(IHK)$

Mặt khác: $BC\subset(SBC)\Rightarrow(SBC)\perp(IHK)$ theo giao tuyến IK

Trong (IHK), gọi $HP\perp IK\Rightarrow HP\perp(SBC)$ tại P $\Rightarrow HP=d(H;(SBC))=a\sqrt{3}$

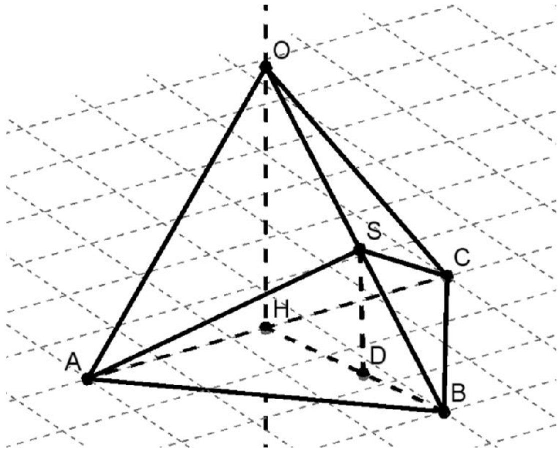
Xét $\Delta IHK:\dfrac{1}{HP^2}=\dfrac{1}{HI^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HI^2}+\dfrac{1}{\frac{AB^2}{4}}\Rightarrow HI=3a$

Xét $\Delta IHB: IB=\sqrt{IH^2+HB^2}=3a\sqrt{2}=R$. Vậy $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=24\sqrt{18}\pi a^3$

Câu 11. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA=OB=OC=a$, $\widehat{AOB}=60^\circ$, $\widehat{BOC}=90^\circ$, $\widehat{AOC}=120^\circ$. Gọi S là trung điểm cạnh OB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{2}$

Lời giải



Xét ΔAOB đều nên cạnh $AB = a$.

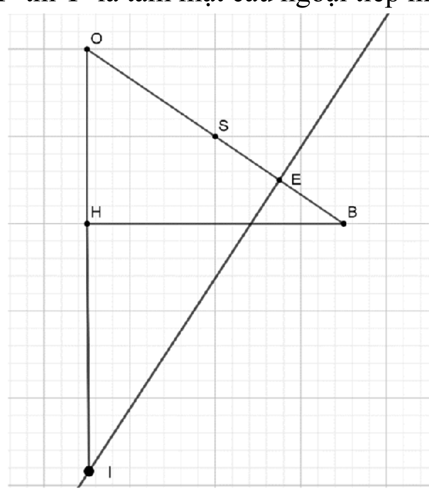
Xét $\triangle BOC$ vuông tại O nên $BC = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle AOC$ có. $AC = \sqrt{AO^2 + CO^2 - 2.AO.CO.\cos 120^0} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle ABC$ có $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm H của cạnh AC.

Lại có hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$ nên $OH \perp (ABC)$.

Xét hình chóp $S.ABC$ có OH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy, trong tam giác OHB kẻ trung trực của cạnh SB cắt OH tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính $R = IS$.



Xét $\triangle OHB$ có $\widehat{HOB} = 60°$,cạnh $OB = a \Rightarrow OE = \dfrac{3a}{4}$.

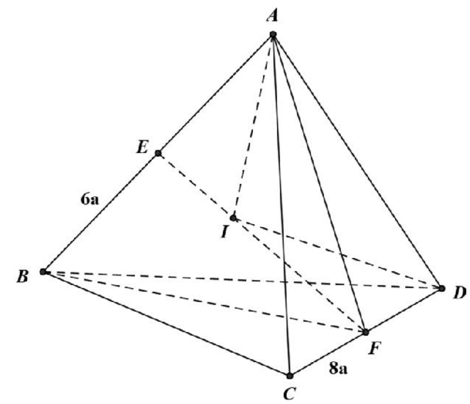
$\Rightarrow IE = OE.\tan 60° = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle IES$ vuông tại E: $IS = \sqrt{IE^2 + ES^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 12. **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6a$, $CD = 8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S = 25\pi a^2$. **B.** $S = 100\pi a^2$. **C.** $S = \dfrac{100}{3}\pi a^2$. **D.** $S = 96\pi a^2$.

Lời giải



Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD. Coi $a=1$, từ giả thiết ta có $AC=AD=BC=BD=\sqrt{74}$ nên $AF\perp CD, BF\perp CD \Rightarrow (ABF)\perp CD \Rightarrow EF\perp CD.$ Chứng minh tương tự $EF\perp AB.$

Khi đó EF là đường trung trực của CD và $AB.$ Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IA=IB=IC=ID=R$ nên I thuộc đoạn thẳng EF.

$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{AD^2-DF^2-AE^2}=\sqrt{74-16-9}=7.$

Đặt $EI=x\Rightarrow FI=7-x$ (với $0<x<7$).

$$\begin{cases} IA=\sqrt{EA^2+EI^2}=\sqrt{x^2+9} \\ ID=\sqrt{FI^2+FD^2}=\sqrt{16+(7-x)^2}=\sqrt{x^2-14x+65} \end{cases}.$$

Ta có $IA=ID \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=\sqrt{x^2-14x+65} \Leftrightarrow 9=-14x+65 \Leftrightarrow x=4$

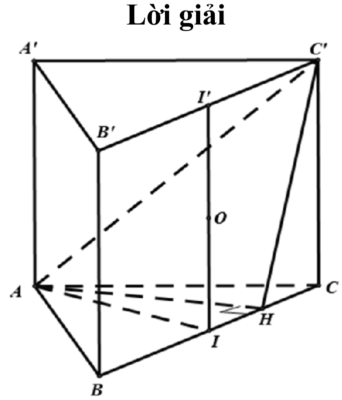
Khi đó $IA=\sqrt{x^2+9}=5$. Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R=5a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $S=4\pi R^2=4\pi.25a^2 =100\pi a^2$.

Câu 13. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

A. $3\pi a^2$. **B.** $6\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $24\pi a^2$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC

$\Rightarrow AH\perp(BCC'B').\Rightarrow \widehat{(AC',(BCC'B'))}=\widehat{HC'A}=30°$.

ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$ suy ra $AC=a$.

Ta có: $AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AC'=2AH=a\sqrt{3}\Rightarrow AA'==\sqrt{AC'^2-AC^2}=a\sqrt{2}$.

Gọi I, I' lần lượt là trung điểm BC, $B'C'$. Dễ thấy I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, $\Delta A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

Bán kính mặt cầu là : $R = OB = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

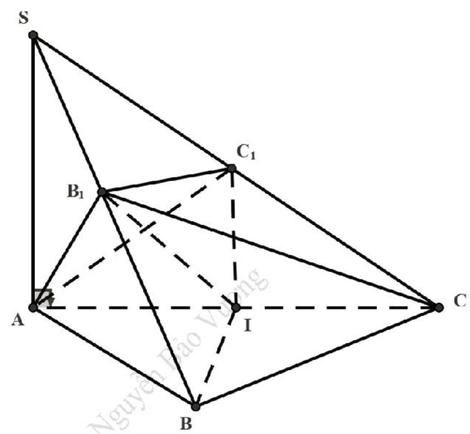
Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng: $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), $AB = a, AC = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45^0$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow IA = IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 \Rightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2$.

Suy ra ΔABC vuông tại $B \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp CB_1$.

Các tam giác ABC, AB_1C, AC_1C là các tam giác vuông có chung cạnh huyền AC.

Do đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ và có bán kính $R = IA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

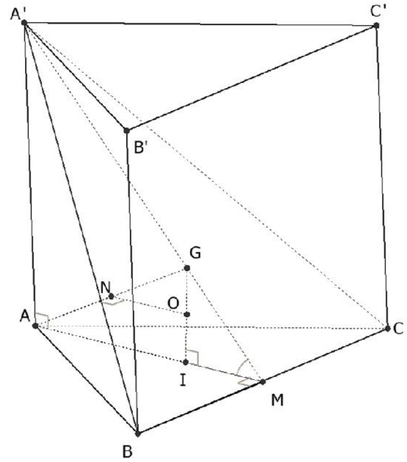
Thể tích khối cầu đó là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $G.ABC$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. **B.** a. **C.** $\frac{7a}{12}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC và I là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có

$$\begin{cases}(A'BC)\cap(ABC)=BC\\(ABC): AM\perp BC\\(A'BC): A'M\perp BC\end{cases}\Rightarrow((ABC),(A'BC))=\widehat{A'MA}=60^0.$$

Do tam giác ABC đều nên $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$

Xét tam giác $A'AM$ vuông tại A: $\tan 60^0=\dfrac{AA'}{AM}\Rightarrow AA'=\dfrac{3a}{2}$.

Vì G là trọng tâm tam giác $A'BC$, I là trọng tâm tam giác ABC và $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $GI\perp(ABC)$ và $IG=\dfrac{1}{3}\cdot AA'=\dfrac{a}{2}$.

Từ đó suy ra hình chóp $G.ABC$ là hình chóp đều.

Xét tam giác GAI vuông tại I: $AG=\sqrt{AI^2+IG^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ với $AI=\dfrac{2}{3}\cdot AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $G.ABC$ và N là trung điểm GA.

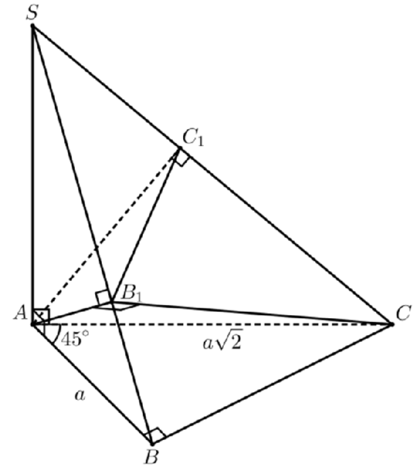
Ta có: O thuộc GI và $\Delta GNO\sim\Delta GIA$ nên $R=GO=\dfrac{GA^2}{2.GI}=\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2}{2\cdot\dfrac{a}{2}}=\dfrac{7a}{12}\cdot$

Câu 16. **(Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AB=a$, $AC=a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC}=45°$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trước hết, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC = a^2$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$.

Vì $\begin{cases} AB_1 \perp BC \\ AB_1 \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp B_1C \Rightarrow \Delta AB_1C$ vuông tại B_1.

Như vậy, 3 điểm B, B_1, C_1 cùng nhìn cạnh AC dưới một góc vuông nên cùng thuộc mặt cầu đường kính AC hay mặt cầu đường kính AC ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu: $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

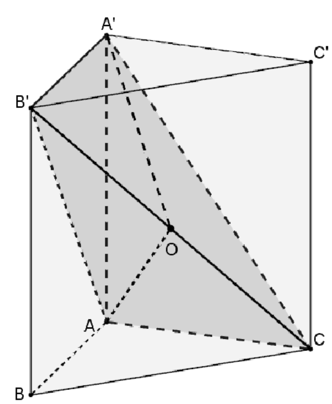
Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB = AC = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là:

A. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A nên trục của 2 đáy trùng nhau và là đường thẳng đi qua trung điểm của BC và $B'C'$. Đồng thời $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật. Do vậy điểm O (trung điểm $B'C$) chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đúng $ABC.A'B'C'$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$.

Vì ΔABC vuông cân tại A nên $BC = AB\sqrt{2} = 2a$.

Vì $BCC'B'$ là hình chữ nhật nên $B'C = \sqrt{BB'^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là $R = OB' = \dfrac{1}{2}B'C = a\sqrt{2}$.

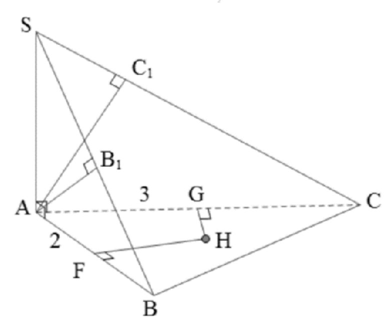
Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác với $AB = 2\text{cm}, AC = 3\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 60^0$, $SA \perp (ABC)$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính thể tích khối cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

A. $\dfrac{28\sqrt{21}\pi}{27}\text{cm}^3$. **B.** $\dfrac{76\sqrt{57}\pi}{27}\text{cm}^3$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{7}\pi}{6}\text{cm}^3$. **D.** $\dfrac{27\pi}{6}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi F, G lần lượt là trung điểm của AB, AC.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Gọi d là trung trực của đoạn $AB \Rightarrow d \perp (SAB)$. Do đó mọi điểm thuộc d thì cách đều các điểm A, B, B_1.

Gọi d' là trung trực của đoạn $AC \Rightarrow d' \perp (SAC)$. Do đó mọi điểm thuộc d' thì cách đều các điểm A, C, C_1.

$H = d \cap d' \Rightarrow H$ là tâm mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

H cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$R = \dfrac{BC}{2\sin\hat{A}} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\hat{A}}}{2.\sin\hat{A}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}cm$.

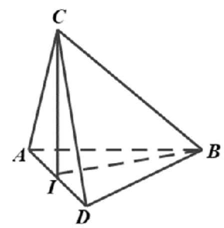
Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{28\sqrt{21}\pi}{27}cm^3$

Câu 19. **(Trường THPT Thăng Long 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: ΔABC, ΔBCD đều cạnh bằng 2 (gt) nên $AC = CD = 2 \Rightarrow \Delta ACD$ cân tại C.
Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow CI \perp AD$.
Ta có:

$$\begin{cases}(ACD)\perp(ADB)(gt)\\(ACD)\cap(ADB)=AD\Rightarrow CI\perp(ABD)\Rightarrow CI\perp IB\ (do\ IB\subset(ABD))\ (1).\\IC\perp AD(cmt)\end{cases}$$

Ta có: $\Delta ACD = \Delta ABD(c.c.c) \Rightarrow CI = IB\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có ΔCIB vuông cân tại $I \Rightarrow CB = IB\sqrt{2} \Rightarrow IB = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IC$.

ΔDIB vuông tại $I \Rightarrow ID = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AD = 2ID = 2\sqrt{2}$.

Xét ΔADB có: $AB = DB = 2; AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^0$

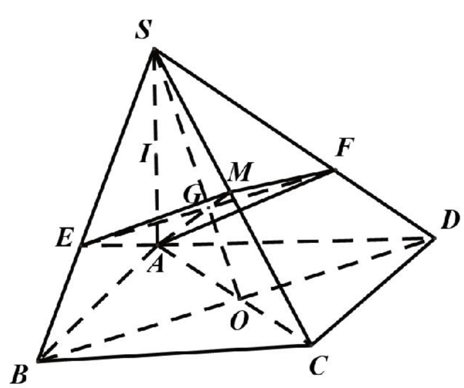
Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có đường kính là AD nên bán kính là: $R = ID = \sqrt{2}$.

Câu 20. **(Cụm liên trường Hải Phòng -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (α) đi qua điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $\{O\} = AC \cap BD$ .Gọi G là trọng tâm tam giác SAC .

Vì (α) chứa A, M nên (α) qua G và song song với BD và $EF // BD$.

Ta có: $SB = SD = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} SE = \frac{2}{3}SB \\ SF = \frac{2}{3}SD \end{cases}$.

Ta lại có: $SA^2 = SB.SE; SA^2 = SD.SF \Rightarrow \begin{cases} AE \perp SB \\ AF \perp SD \end{cases}$.

Gọi I là trung điểm cạnh SA .

Ta có: ΔSAC vuông cân tại $A \Rightarrow AM \perp SC \Rightarrow \Delta SAM$ vuông tại $M \Rightarrow IA = IS = IM$

Ta lại có: ΔSAE vuông tại $E \Rightarrow IA = IS = IE$.

ΔSAF vuông tại $F \Rightarrow IA = IS = IF$.

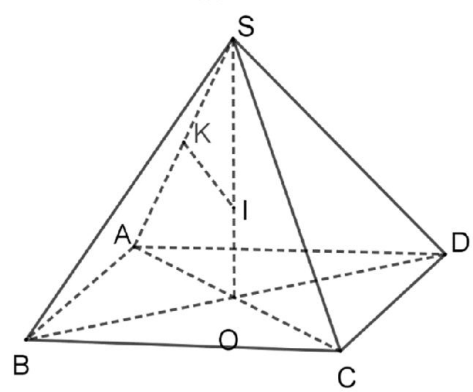
Từ,, $\Rightarrow IA = IS = IM = IE = IE \Rightarrow$ Mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F có tâm là I và bán kính $R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3, AD = 4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V = \frac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V = \frac{50\sqrt{3}}{3}\pi$. **D.** $V = \frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm S xuống mặt phẳng đáy. Ta có $\Delta SBO = \Delta SDO$ nên $SD = SB$. Chứng minh tương tự, $SC = SA$, hay O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Do tam giác SAC đều nên $SA = SC = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường trung trực của cạnh SA đi qua trung điểm K và cắt SO tại điểm I. Suy ra $R = SI = \frac{SA^2}{2.SO} = \frac{25}{5\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

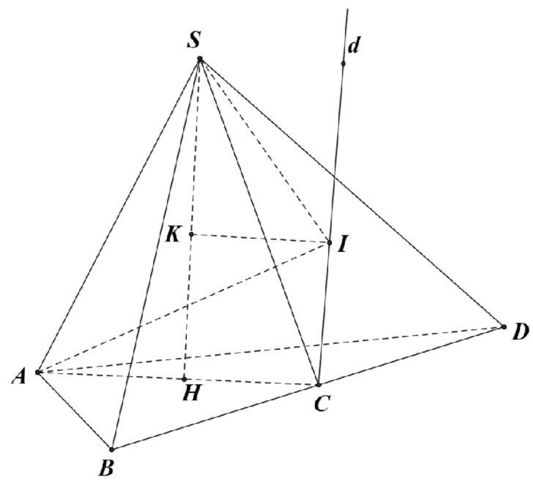
Suy ra, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Câu 22. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Mặt bên (SAC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA=SC=\frac{3}{2}$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua C. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A. $\frac{\sqrt{34}}{8}$. **B.** $\frac{3\sqrt{34}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{34}}{16}$. **D.** $\frac{3\sqrt{34}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AC, do SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH\perp AC\Rightarrow SH\perp(ABC)$ và $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$.

Tam giác ABD có AC là đường trung tuyến và $AC=\frac{1}{2}BD$ nên ABD là tam giác vuông tại A, suy ra C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB**D.**

Dựng trục (d) của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB**D.** Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABD\Rightarrow I\in d$ và $IA=\text{IS}=ID=IB=R$.

Kẻ $IK\perp SH\Rightarrow IK=CH=\frac{1}{2}$

Giả sử $HK=x\Rightarrow SK=\sqrt{2}-x\Rightarrow \text{IS}=\sqrt{SK^2+HC^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2+\frac{1}{4}}=R$

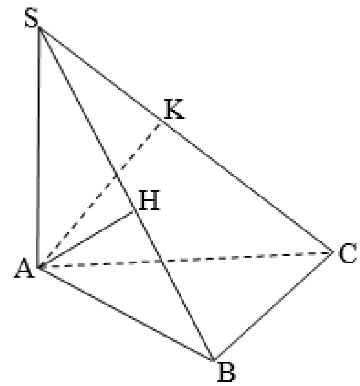
Mặt khác: $R=IA=\sqrt{AC^2+IC^2}=\sqrt{1+x^2}$.

Ta có phương trình: $\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow x=\frac{5\sqrt{2}}{16}$

Suy ra: $R=\frac{3\sqrt{2}}{16}+1$ $R=\sqrt{x^2+1}=\frac{3\sqrt{34}}{16}$.

Vậy phương án C đúng.

Câu 23. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy là tam giác đều, $SA = a\sqrt{3}$ và góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K.

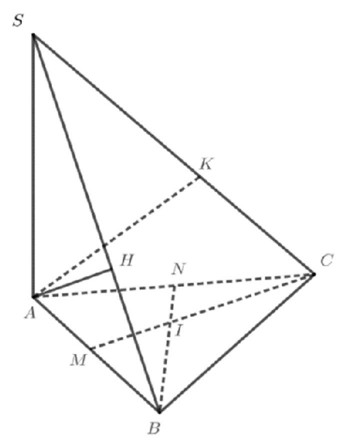


A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng $60^0 \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow AB = \frac{SA}{\tan 60^0} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$.

Gọi BN, CM lần lượt là hai đường cao của tam giác ABC và I là trọng tâm của ΔABC.

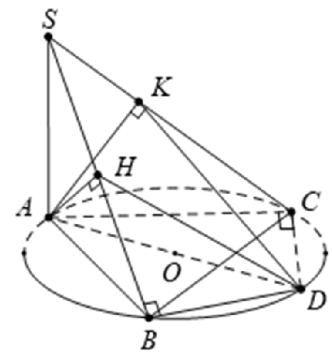
Do tam giác ABC đều nên M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC.

Tam giác ABH vuông tại H nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH,

mặt khác $\left.\begin{matrix} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CM \perp (SAB)$, ta suy ra CM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH. Hoàn toàn tương tự ta có BN là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK. Từ đó suy ra $IA = IB = IH = IC = IK$ hay I là tâm mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K bán kính mặt cầu là $R = IA = \frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $R = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Cách 2:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và D là điểm đối xứng của A qua điểm O.

Ta có $BD \perp AB$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AH$.

Từ giả thuyết $\Rightarrow AH \perp SB$

$\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH \perp HD$.

Tương tự $AK \perp KD$.

Do các điểm B, H, K nhìn AD dưới một góc vuông nên B, H, K nằm trên mặt cầu đường kính AD.

$\left(\widehat{SB;(ABC)}\right) = \widehat{SBA} = 60^0$

$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{SA}{\tan 60^0} = a$. Tam giác ABC đều cạnh a ta có $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

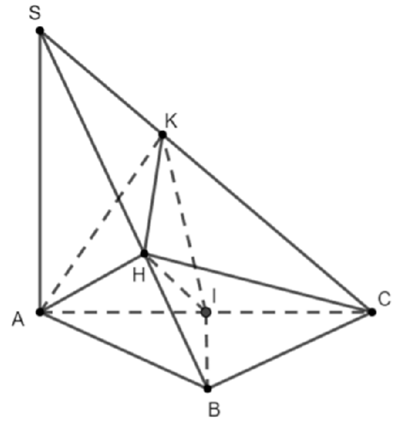
Vậy mặt cầu qua A, B, H, K có bán kính $R = \dfrac{AD}{2} = AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ bằng

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AC. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $IA = IB = IC = \frac{1}{2}AC$.

Do $AK \perp SC$ nên ΔAKC vuông tại K, khi đó $IA = IK = IC = \frac{1}{2}AC$.

Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$, mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp HC$ hay ΔAHC vuông tại $H \Rightarrow IH = IA = IC = \frac{1}{2}AC$.

Như vậy $IA = IB = IC = IH = IK = \frac{1}{2}AC$ hay mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ có tâm I là trung điểm AC, bán kính $R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.BC\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

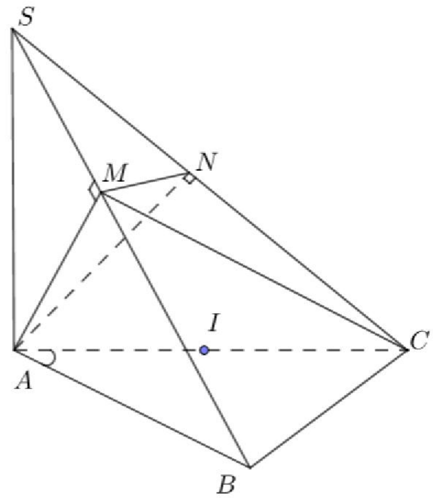
Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 25. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 30°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là

A. $R = 2$. **B.** $R = \sqrt{13}$. **C.** $R = 1$. **D.** $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos B = 3 + 2^2 - 2.\sqrt{3}.2\cos 30° = 1$.

Suy ra: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4$ hay tam giác ABC vuông tại B.

Gọi I là trung điểm AC suy ra $IA = IC = IB$. (1)

Tương tự tam giác ANC vuông tại N ta được $IA = IC = IN$. (2)

Xét BC và (SAB) có

$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB\ (cmt) \\ BC \perp SA\ (gt) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp BC$.

Ta được

$\left.\begin{array}{l} AM \perp BC \\ AM \perp SB(gt) \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBC)$ mà $MC \subset (SBC) \Rightarrow AM \perp MC$.

Suy ta tam giác AMC vuông tại M ta được $IA = IB = IM$. (3)

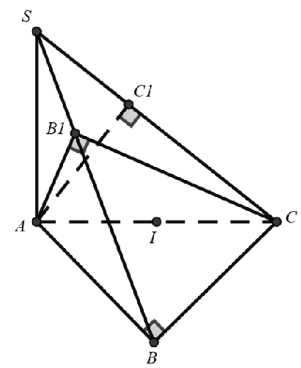
Từ (1), (2) và (3) suy ta I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ có bán kính $R = AI = \dfrac{AB}{2} = 1$.

Câu 26. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB = a, AC = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45°$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 + 2a^2 - 2a.a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = a^2$

$\Rightarrow BC = a$

Tam giác ABC có $BA = BC = a, \widehat{BAC} = 45^\circ$ là tam giác vuông cân tại B

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$

Khi đó $\begin{cases} AB_1 \perp SB \\ AB_1 \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp CB_1 \Rightarrow \Delta AB_1C$ vuông tại B_1

Gọi I là trung điểm của AC

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $IA = IB = IC$

Vì tam giác AB_1C vuông tại B_1 nên $IA = IC = IB_1$

Vì tam giác ACC_1 vuông tại C_1 nên $IA = IC = IC_1$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ với bán kính $R = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Thể tích khối cầu đó là: $V = \frac{4}{3}\pi R^2 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$