

## TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI – XUẤT SẮC MỨC 8-9-10 ĐIỂM

**Dạng 1. Tích phân Hàm ẩn****Dạng 1.1 Giải bằng phương pháp đổi biến**

Thông thường nếu trong bài toán xuất hiện  $\int_a^b f[u(x)]dx$  thì ta sẽ đặt  $u(x) = t$

**Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$\int_{-5}^1 f(x)dx = 9. \text{ Tính phân } \int_0^2 [f(1-3x)+9]dx \text{ bằng}$$

- A. 15.                      B. 27.                      C. 75.                      D. 21.

**Câu 2. (Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  thỏa mãn

$$\int_0^{10} f(x)dx = 7, \int_2^{10} f(x)dx = 1. \text{ Tính } P = \int_0^1 f(2x)dx.$$

- A.  $P = 6$ .                      B.  $P = -6$ .                      C.  $P = 3$ .                      D.  $P = 12$ .

**Câu 3. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho  $I = \int_1^5 f(x)dx = 26$ . Khi đó  $J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1]dx$  bằng

- A. 15.                      B. 13.                      C. 54.                      D. 52.

**Câu 4. (Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4$  và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos xdx = 2. \text{ Tính phân } I = \int_0^3 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A.  $I = 8$ .                      B.  $I = 6$ .                      C.  $I = 4$ .                      D.  $I = 10$ .

**Câu 5. (THPT Cẩm Giàng 2019)** Cho biết  $\int_{-1}^5 f(x)dx = 15$ . Tính giá trị của  $P = \int_0^2 [f(5-3x)+7]dx$ .

- A.  $P = 15$ .                      B.  $P = 37$ .                      C.  $P = 27$ .                      D.  $P = 19$ .

**Câu 6. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho  $\int_0^4 f(x)dx = 2018$ . Tính tích phân

$$I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)]dx.$$

- A.  $I = 0$ .                      B.  $I = 2018$ .                      C.  $I = 4036$ .                      D.  $I = 1009$ .

**Câu 7.** Cho  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên  $[-6;6]$ . Biết rằng  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8$ ;  $\int_1^3 f(-2x)dx = 3$ .

Giá trị của  $I = \int_{-1}^6 f(x)dx$  là

- A.  $I = 5$ .                      B.  $I = 2$ .                      C.  $I = 14$ .                      D.  $I = 11$ .

**Câu 8. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và

$$\int_0^{\pi^2} f(x) dx = 2018, \text{ tính } I = \int_0^{\pi} xf(x^2) dx.$$

- A.  $I = 1008$ .      B.  $I = 2019$ .      C.  $I = 2017$ .      D.  $I = 1009$ .

**Câu 9. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = 2$ . Khi đó  $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$  bằng

- A. 1.      B. 4.      C. 2.      D. 8.

**Câu 10. (Sở Hà Nội 2019)** Cho  $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$ . Khi đó  $I = \int_2^5 f(x) dx$  bằng

- A. 2.      B. 1.      C. 4.      D. -1.

**Câu 11.** Cho  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[1; 3]$  thỏa mãn điều kiện  $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$  đồng thời

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 f(4-x) dx + 2 \int_1^2 g(2x-1) dx$$

- A. 9.      B. 6.      C. 7.      D. 8.

**Câu 12.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^2 f(3x+1) dx = 6$ . Tính  $I = \int_0^7 f(x) dx$ .

- A.  $I = 16$ .      B.  $I = 18$ .      C.  $I = 8$ .      D.  $I = 20$ .

**Câu 13. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) = f(10-x)$  và

$$\int_3^7 f(x) dx = 4. \text{ Tính } I = \int_3^7 xf'(x) dx.$$

- A. 80.      B. 60.      C. 40.      D. 20.

**Câu 14. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 9$ . Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx.$$

- A.  $I = 5$ .      B.  $I = 9$ .      C.  $I = 3$ .      D.  $I = 2$ .

**Câu 15. (Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Cho tích phân  $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$ . Tính tích

$$\text{phân } J = \int_0^2 f(2x) dx.$$

- A.  $J = 32$       B.  $J = 64$       C.  $J = 8$       D.  $J = 16$

**Câu 16. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Biết  $f(x)$  là hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^9 f(x) dx = 9$ . Khi đó giá trị của

$$\int_1^4 f(3x-3) dx \text{ là}$$

- A. 0.      B. 24.      C. 27.      D. 3.

- Câu 17. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ . Tích phân  $\int_0^2 f(x)dx$  bằng
- A. 8.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 4.
- Câu 18.** Cho hàm  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^{2017} f(x)dx = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(2017x)dx$ .
- A.  $I = \frac{1}{2017}$ .                      B.  $I = 0$ .                      C.  $I = 2017$ .                      D.  $I = 1$ .
- Câu 19.** Cho tích phân  $\int_1^2 f(x)dx = a$ . Hãy tính tích phân  $I = \int_0^1 xf(x^2 + 1)dx$  theo  $a$ .
- A.  $I = 4a$ .                      B.  $I = \frac{a}{4}$ .                      C.  $I = \frac{a}{2}$ .                      D.  $I = 2a$ .
- Câu 20. (Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x)dx = 2$  và  $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$ . Tính  $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$ .
- A. 0.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 8.
- Câu 21. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2; x \geq 1 \\ 5 - x; x < 1 \end{cases}$ . Tính  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx$ .
- A.  $I = \frac{71}{6}$ .                      B.  $I = 31$ .                      C.  $I = 32$ .                      D.  $I = \frac{32}{3}$ .
- Câu 22. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình- 2019)** Cho  $I = \int_1^2 f(x)dx = 2$ . Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xf(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx$  bằng
- A. 2.                      B.  $-\frac{4}{3}$ .                      C.  $\frac{4}{3}$ .                      D. -2.
- Câu 23. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết  $\int_1^4 f(x)dx = 5$  và  $\int_4^5 f(x)dx = 20$ . Tính  $\int_1^2 f(4x - 3)dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x})e^{2x}dx$ .
- A.  $I = \frac{15}{4}$ .                      B.  $I = 15$ .                      C.  $I = \frac{5}{2}$ .                      D.  $I = 25$ .

**Câu 24. (Chuyên Thái Bình 2019)** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(x) + f(2-x) = x.e^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A.  $I = \frac{e^4 - 1}{4}$ .      B.  $I = \frac{2e - 1}{2}$ .      C.  $I = e^4 - 2$ .      D.  $I = e^4 - 1$ .

**Câu 25. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(2x) = 3f(x)$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết rằng } \int_0^1 f(x) dx = 1. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

A.  $I = 5$       B.  $I = 6$       C.  $I = 3$       D.  $I = 2$

**Câu 26.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$  và  $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$ .

$$\text{Tính } \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx.$$

A. 0.      B. 1.      C. 4.      D. 8.

**Câu 27. (Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6. \text{ Tính tích phân } \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$$

A. 4      B. 6      C. 7      D. 10

**Câu 28. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa

$$\int_0^{2018} f(x) dx = 2. \text{ Khi đó tích phân } \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx \text{ bằng}$$

A. 4.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Câu 29. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$  và

$$\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 1. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A.  $I = 2$ .      B.  $I = 6$ .      C.  $I = 3$ .      D.  $I = 4$ .

**Câu 30. (SGD Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1. \text{ Tính tích phân } \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

A.  $I = 3$ .      B.  $I = \frac{3}{2}$ .      C.  $I = 2$ .      D.  $I = \frac{5}{2}$ .

**Câu 31. (SGD - Nam Định - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[1; 4]$  và thỏa mãn

$$f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}. \text{ Tính tích phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$

A.  $I = 3 + 2 \ln^2 2$ .      B.  $I = 2 \ln^2 2$ .      C.  $I = \ln^2 2$ .      D.  $I = 2 \ln 2$ .

**Câu 32. (Nam Định - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[1; 4]$  và thỏa mãn

$$f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}. \text{ Tính tích phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$

A.  $I = 3 + 2 \ln^2 2$ .      B.  $I = 2 \ln^2 2$ .      C.  $I = \ln^2 2$ .      D.  $I = 2 \ln 2$ .

**Câu 33. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và là hàm số lẻ trên

đoạn  $[-2; 2]$ . Biết rằng  $\int_{-1}^0 f(x) dx = -1$ ,  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x) dx = 2$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$ .      B.  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -4$ .

C.  $\int_0^1 f(x) dx = -1$ .      D.  $\int_0^2 f(x) dx = -3$ .

**Câu 34. (Chuyên Sơn La - 2020)** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $f(1) = 1$  và  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$ .

Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$$

A.  $I = \frac{4}{3}$ .      B.  $I = \frac{2}{3}$ .      C.  $I = -\frac{2}{3}$ .      D.  $I = \frac{1}{3}$ .

**Câu 35. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và

$$\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^3 f(x) dx.$$

A.  $I = 6$ .      B.  $I = 4$ .      C.  $I = 10$ .      D.  $I = 2$ .

**Câu 36. (Sở Hưng Yên - 2020)** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) = f(2020 - x)$  và

$$\int_3^{2017} f(x) dx = 4. \text{ Khi đó } \int_3^{2017} xf(x) dx \text{ bằng}$$

A. 16160.      B. 4040.      C. 2020.      D. 8080.

**Câu 37. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và xác định trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(1) = 2$  và

$$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 1.      B.  $\frac{5}{7}$ .      C.  $\frac{3}{7}$ .      D.  $\frac{1}{7}$ .

**Câu 38. (Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4. \text{ Giá trị } \int_0^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

A.  $\frac{52}{25}$ .      B. 52.      C.  $\frac{48}{25}$ .      D. 48.

**Câu 39. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$f(2) = 16, \int_0^1 f(2x) dx = 2. \text{ Tính phân } \int_0^2 xf'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 30. B. 28. C. 36. D. 16.

**Câu 40. (Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 5$ .

$$\text{Tính } I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx$$

- A.  $I = \frac{5}{2}\pi$ . B.  $I = 10\pi$ . C.  $I = 5$ . D.  $I = 5\pi$ .

**Câu 41. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2 \text{ và } \int_e^{e^2} \frac{f(\ln x^2)}{x \ln x} dx = 2. \text{ Tính } \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx.$$

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 8.

**Câu 42. (Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$  thỏa

$$\text{mãn } f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x. \text{ Giá trị tích phân } I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx \text{ bằng:}$$

- A.  $\frac{8}{9}$ . B.  $\frac{16}{9}$ . C.  $\frac{2}{3}$ . D.  $\frac{3}{4}$ .

### Dạng 1.2 Giải bằng phương pháp từng phần

Thông thường nếu bài toán xuất hiện  $\int_a^b g(x)f'(x) dx$  ta sẽ đặt  $\begin{cases} u = g(x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases}$

**Câu 43. (Đề tham khảo 2017)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 10$  và  $2f(1) - f(0) = 2$ .

$$\text{Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

- A.  $I = -12$  B.  $I = 8$  C.  $I = 1$  D.  $I = -8$

**Câu 44. (Mã 104 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(3) = 1$

$$\text{và } \int_0^1 xf(3x) dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^3 x^2 f'(x) dx \text{ bằng}$$

- A.  $\frac{25}{3}$ . B. 3. C. 7. D. -9.

**Câu 45. (Mã 101 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(4) = 1$  và

$$\int_0^1 xf(4x) dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^4 x^2 f'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 8.                                      B. 14.                                      C.  $\frac{31}{2}$ .                                      D. -16.

**Câu 46. (Mã 103 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(6)=1$  và  $\int_0^1 xf'(6x)dx = 1$ , khi đó  $\int_0^6 x^2 f'(x)dx$  bằng

- A.  $\frac{107}{3}$ .                                      B. 34.                                      C. 24.                                      D. -36.

**Câu 47. (Mã 102 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(5)=1$  và  $\int_0^1 xf'(5x)dx = 1$ , khi đó  $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$  bằng

- A. 15                                      B. 23                                      C.  $\frac{123}{5}$                                       D. -25

**Câu 48. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho  $f(x)$  là hàm số có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  và  $f(1) = -\frac{1}{18}$ ,  $\int_0^1 x.f'(x)dx = \frac{1}{36}$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

- A.  $-\frac{1}{12}$ .                                      B.  $\frac{1}{36}$ .                                      C.  $\frac{1}{12}$ .                                      D.  $-\frac{1}{36}$ .

**Câu 49. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1)=e^2$  và  $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$  với mọi  $x$  khác 0.

Khi đó  $\int_1^{\ln 3} xf'(x)dx$  bằng

- A.  $6-e^2$ .                                      B.  $\frac{6-e^2}{2}$ .                                      C.  $9-e^2$ .                                      D.  $\frac{9-e^2}{2}$ .

**Câu 50. (HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(2)=16, \int_0^2 f(x)dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^1 xf'(2x)dx$ .

- A.  $I = 20$                                       B.  $I = 7$                                       C.  $I = 12$                                       D.  $I = 13$

**Câu 51. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $\int_0^1 x^2 f(x)dx = -\frac{1}{21}$ ,  $f(1)=0$  và  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

- A.  $\frac{5}{12}$ .                                      B.  $-\frac{1}{5}$ .                                      C.  $\frac{4}{5}$ .                                      D.  $-\frac{7}{10}$ .

**Câu 52. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$\int_0^1 f(x)dx = 1, f(1) = \cot 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 [f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x]dx$ .

- A. -1.                                      B.  $1 - \ln(\cos 1)$ .                                      C. 0.                                      D.  $1 - \cot 1$ .

- Câu 53. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0, \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tính  $\int_0^1 x^3 f'(x) dx$ .
- A. -1                      B. 1                      C. 3                      D. -3
- Câu 54.** Biết  $m$  là số thực thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $m \leq 0$ .                      B.  $0 < m \leq 3$ .                      C.  $3 < m \leq 6$ .                      D.  $m > 6$ .
- Câu 55. (Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tính tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$
- A. 4                      B.  $\frac{7}{5}$                       C. 1                      D.  $\frac{7}{4}$
- Câu 56. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và  $f(0) + f(1) = 0$ . Biết  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- A.  $\pi$ .                      B.  $\frac{3\pi}{2}$ .                      C.  $\frac{2}{\pi}$ .                      D.  $\frac{1}{\pi}$ .
- Câu 57. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{7}{5}$                       B. 1                      C.  $\frac{7}{4}$                       D. 4
- Câu 58. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 4, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36$  và  $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{5}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{5}{6}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C. 4                      D.  $\frac{2}{3}$
- Câu 59. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;2]$  thỏa mãn  $f(2) = 3, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4$  và  $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tích phân  $\int_0^2 f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{2}{115}$                       B.  $\frac{297}{115}$                       C.  $\frac{562}{115}$                       D.  $\frac{266}{115}$
- Câu 60. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 4, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 5$  và  $\int_0^1 x f(x) dx = -\frac{1}{2}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{15}{19}$                       B.  $\frac{17}{4}$                       C.  $\frac{17}{18}$                       D.  $\frac{15}{4}$



**Câu 61. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;2]$  thỏa mãn

$$f(2)=6, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^2 x.f(x)dx = \frac{17}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^2 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A. 8                                      B. 6                                      C. 7                                      D. 5

**Câu 62. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;3]$  thỏa mãn

$$f(3)=6, \int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 2 \text{ và } \int_0^3 x^2.f(x)dx = \frac{154}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^3 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A.  $\frac{53}{5}$                                       B.  $\frac{117}{20}$                                       C.  $\frac{153}{5}$                                       D.  $\frac{13}{5}$

**Câu 63. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa

$$\text{mãn } f(1)=2, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 8 \text{ và } \int_0^1 x^3.f(x)dx = 10. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A.  $-\frac{2}{285}$                                       B.  $\frac{194}{95}$                                       C.  $\frac{116}{57}$                                       D.  $\frac{584}{285}$

**Câu 64. (Bắc Giang - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=0$  và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)dx = \frac{e^2-1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x)dx.$$

- A.  $I = 2 - e.$                                       B.  $I = e - 2.$                                       C.  $I = \frac{e}{2}.$                                       D.  $I = \frac{e-1}{2}.$

**Câu 65. (Nam Định - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  và  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

$$\text{Biết } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \frac{\pi}{8}, \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)dx$$

- A.  $I = 1.$                                       B.  $I = \frac{1}{2}.$                                       C.  $I = 2.$                                       D.  $I = \frac{1}{4}.$

**Câu 66. (Chuyên Vĩnh - 2018).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và

$$f(0)+f(1)=0. \text{ Biết } \int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x)dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x)dx.$$

- A.  $\pi.$                                       B.  $\frac{1}{\pi}.$                                       C.  $\frac{2}{\pi}.$                                       D.  $\frac{3\pi}{2}.$

**Câu 67. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\text{thỏa mãn } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1 \text{ và } \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx \text{ bằng:}$$

- A. 4.                                      B.  $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}.$                                       C.  $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}.$                                       D. 6.

- Câu 68.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa  $f(1)=0$ ,  $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$  và  $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- A.  $\frac{\pi}{2}$ .                      B.  $\pi$ .                      C.  $\frac{1}{\pi}$ .                      D.  $\frac{2}{\pi}$ .
- Câu 69.** (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=1$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$  và  $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng:
- A.  $\frac{2}{3}$ .                      B.  $\frac{5}{2}$ .                      C.  $\frac{7}{4}$ .                      D.  $\frac{6}{5}$ .
- Câu 70.** (THPT Phan Chu Trinh - Đắk Lắk - 2018) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$  và  $f(1)=0$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$
- A.  $\frac{e-1}{2}$ .                      B.  $\frac{e^2}{4}$ .                      C.  $e-2$ .                      D.  $\frac{e}{2}$ .
- Câu 71.** (Sở Phú Thọ - 2018) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1;2]$  thỏa mãn  $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$ ,  $f(2)=0$  và  $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$ . Tính tích phân  $I = \int_1^2 f(x) dx$ .
- A.  $I = \frac{7}{5}$ .                      B.  $I = -\frac{7}{5}$ .                      C.  $I = -\frac{7}{20}$ .                      D.  $I = \frac{7}{20}$ .
- Câu 72.** (THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn:  $f(1)=0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .
- A.  $I = 1$ .                      B.  $I = \frac{7}{5}$ .                      C.  $I = 4$ .                      D.  $I = \frac{7}{4}$ .
- Câu 73.** (Yên Phong 1 - 2018) Cho hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=3$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11}$  và  $\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x) dx$  là
- A.  $\frac{35}{11}$ .                      B.  $\frac{65}{21}$ .                      C.  $\frac{23}{7}$ .                      D.  $\frac{9}{4}$ .
- Câu 74.** (THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;2]$  và thỏa mãn  $f(2)=0$ ,  $\int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3}$  và  $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$ . Tính tích phân  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- A.  $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}$ .                      B.  $\ln \frac{3}{2}$ .                      C.  $\frac{3}{4} - 2 \ln \frac{3}{2}$ .                      D.  $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{3}{2}$ .

- Câu 75. (Sở Bạc Liêu - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{3} - \ln 3$  và  $\int_0^1 \frac{4f(x)}{(2x+1)^2} dx = 2\ln 3 - \frac{8}{3}$ . Tính tích phân  $\int_0^1 \frac{f(x)}{4} dx$  bằng.
- A.  $\frac{1-3\ln 3}{3}$ .      B.  $\frac{4-\ln 3}{3}$ .      C.  $\frac{-\ln 3}{16}$ .      D.  $-\ln \frac{3}{16}$ .
- Câu 76. (Sở Hưng Yên - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(0)=1$ ;  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30}$  và  $\int_0^1 (2x-1)f(x) dx = -\frac{1}{30}$ . Tính tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{11}{30}$ .      B.  $\frac{11}{12}$ .      C.  $\frac{11}{4}$ .      D.  $\frac{1}{30}$ .
- Câu 77. (Sở Nam Định - 2018)** Cho hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  và  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ . Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$ .
- A.  $I=1$ .      B.  $I=\frac{1}{2}$ .      C.  $I=2$ .      D.  $I=\frac{1}{4}$ .
- Câu 78.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(2)=16$  và  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Tính phân  $\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right) dx$  bằng
- A. 112.      B. 12.      C. 56.      D. 144.
- Câu 79. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2)=16$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^1 x.f'(2x) dx$ .
- A. 7.      B. 12.      C. 20.      D. 13.
- Câu 80. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = 10$ ,  $f(1) = \cot 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx$ .
- A.  $1 - \ln(\cos 1)$ .      B.  $-1$ .      C.  $-9$ .      D.  $1 - \cot 1$ .
- Câu 81. (Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;3]$  thỏa mãn  $f(3)=0$ ,  $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6}$  và  $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = -\frac{7}{3}$ . Tính phân  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng:
- A.  $-\frac{7}{3}$ .      B.  $-\frac{97}{30}$ .      C.  $\frac{7}{6}$ .      D.  $-\frac{7}{6}$ .
- Câu 82. (Chuyên - Vĩnh Phúc - lần 3 - 2019)** Cho hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $(0; 1)$  thỏa mãn  $f(0)=0$  và  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2}$ ;  $\int_0^1 f'(x) \cdot \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng:

- A.  $\frac{2}{\pi}$ .      B.  $\frac{1}{\pi}$ .      C.  $\frac{6}{\pi}$ .      D.  $\frac{4}{\pi}$ .

**Câu 83. (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  sao cho  $f(1)=1$  và  $f(x) \cdot f(1-x) = e^{x^2-x}$ ,  $\forall x \in [0;1]$ . Tính

$$I = \int_0^1 \frac{(2x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx.$$

- A.  $I = -\frac{1}{60}$ .      B.  $I = \frac{1}{10}$ .      C.  $I = -\frac{1}{10}$ .      D.  $I = \frac{1}{10}$ .

**Câu 84. (Sở Nam Định-2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;2]$  và thỏa mãn:

$$f(2)=0, \int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3} \text{ và } \int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}. \text{ Tính tích phân } \int_1^2 f(x) dx.$$

- A.  $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{3}{2}$ .      B.  $\ln \frac{2}{3}$ .      C.  $\frac{3}{4} - 2 \ln \frac{2}{3}$ .      D.  $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}$ .

**Câu 85.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=3, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11}$  và

$$\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ là:}$$

- A.  $\frac{35}{11}$ .      B.  $\frac{65}{21}$ .      C.  $\frac{23}{7}$ .      D.  $\frac{9}{4}$ .

**Câu 86.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1;2]$  và thỏa mãn  $\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}$ ,

$$f(1)=0, \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}. \text{ Tính } \int_1^2 xf(x) dx.$$

- A.  $-\frac{19}{60}$ .      B.  $\frac{7}{120}$ .      C.  $-\frac{1}{5}$ .      D.  $\frac{13}{30}$ .

**Câu 87. (Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Giả sử hàm số  $f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(1)=f'(1)=1 \text{ và } f(1-x) + x^2 \cdot f''(x) = 2x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 xf''(x) dx.$$

- A.  $I = 1$ .      B.  $I = 2$ .      C.  $I = \frac{1}{3}$ .      D.  $I = \frac{2}{3}$ .

### Dạng 1.3 Biến đổi

**Dạng 1.** Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Để dàng thấy rằng  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra  $u(x)f(x) = \int h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 2.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^x$  ta được  $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra  $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 3.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) - f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^{-x}$  ta được  $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra  $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 4.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

(Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1)

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^{\int p(x) dx}$  ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \Leftrightarrow \left[ f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

Suy ra  $f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^{\int p(x) dx} h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 5.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

**Phương pháp:**

Chia hai vế với  $f(x)$  ta được  $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 6.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

**Phương pháp:**

Chia hai vế với  $[f(x)]^n$  ta được  $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra  $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$

**Câu 88. (Mã 102 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{3}$  và  $f'(x) = x[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

A.  $-\frac{2}{3}$

B.  $-\frac{2}{9}$

C.  $-\frac{7}{6}$

D.  $-\frac{11}{6}$

**Câu 89. (Mã 104 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{5}$  và  $f'(x) = x^3[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Giá trị của  $f(1)$  bằng

A.  $-\frac{4}{35}$

B.  $-\frac{71}{20}$

C.  $-\frac{79}{20}$

D.  $-\frac{4}{5}$

**Câu 90. (Minh họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-1}^0 f(x) dx = ?$$

A.  $\frac{-17}{20}$ .      B.  $\frac{-13}{4}$ .      C.  $\frac{17}{4}$ .      D.  $-1$ .

**Câu 91.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1-x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A. 4.      B.  $-1$ .      C. 2.      D. 6.

**Câu 92.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  thỏa mãn  $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ , với mọi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  đồng thời thỏa  $f(1) = -2$ . Tính  $\int_1^2 f(x) dx$

A.  $-\frac{\ln 2}{2} - 1$ .      B.  $-\ln 2 - \frac{1}{2}$ .      C.  $-\ln 2 - \frac{3}{2}$ .      D.  $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$ .

**Câu 93.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tích phân  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{1}{7}$ .      B.  $\frac{1}{3}$ .      C. 7.      D.  $-\frac{19}{3}$ .

**Câu 94.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 1$  và

$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1)f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng?

A.  $\frac{23}{15}$ .      B.  $\frac{13}{15}$ .      C.  $-\frac{17}{15}$ .      D.  $-\frac{7}{15}$ .

**Câu 95.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(0) = 3$  và

$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tích phân  $\int_0^2 xf'(x) dx$  bằng

A.  $-\frac{4}{3}$ .      B.  $\frac{2}{3}$ .      C.  $\frac{5}{3}$ .      D.  $-\frac{10}{3}$ .

**Câu 96.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[2;4]$  và  $f'(x) > 0, \forall x \in [2;4]$ . Biết

$4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2;4], f(2) = \frac{7}{4}$ . Giá trị của  $f(4)$  bằng

A.  $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$ .      B.  $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$ .      C.  $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$ .      D.  $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$ .

**Câu 97.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;2]$  và thỏa  $f(1) = 0$ ,

$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 - 32x + 28$  với mọi  $x$  thuộc  $[0;2]$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $-\frac{5}{3}$ .      B.  $\frac{4}{3}$ .      C.  $-\frac{2}{3}$ .      D.  $-\frac{14}{3}$ .

**Câu 98.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  và  $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0;1]$ . Tính

$\int_0^1 f(x) dx$

A.  $\frac{3}{4} + 2 \ln 2$ .      B.  $3 + \ln 2$ .      C.  $\frac{3}{4} + \ln 2$ .      D.  $\frac{3}{2} + 2 \ln 2$ .

**Câu 99.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 f(x) dx$  ta được kết quả:

A.  $I = e + 4$ .      B.  $I = 8$ .      C.  $I = 2$ .      D.  $I = e + 2$ .

**Câu 100.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $xf(x^5) + f(1-x^4) = x^{11} + x^8 + x^6 - 3x^4 + x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_{-1}^0 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{35}{6}$ .      B.  $-\frac{15}{4}$ .      C.  $-\frac{7}{24}$ .      D.  $\frac{5}{6}$ .

**Câu 101.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\left[\frac{2}{5}; 1\right]$  và thỏa mãn  $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$ . Khi đó

$I = \int_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x \cdot f'(3x) dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5} + \frac{3}{35}$ .      B.  $\frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$ .      C.  $-\frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$ .      D.  $-\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5} + \frac{3}{35}$ .

**Câu 102.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1$  với  $x \in \mathbb{R}$ .

Tính tích phân  $\int_0^1 xf'(x) dx$ .

A.  $\frac{1}{4}$ .      B.  $\frac{5}{4}$ .      C.  $\frac{3}{4}$ .      D.  $-\frac{1}{2}$ .

**Câu 103.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$ . Khi đó  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  có giá trị là

A. 0.      B. 1.      C.  $\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 104.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tính phân  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{1}{7}$ .      B.  $\frac{1}{3}$ .      C. 7.      D.  $-\frac{19}{3}$ .

**Câu 105. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[-1; 2]$  và thỏa mãn điều kiện  $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$ .

Tích phân  $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$  bằng

A.  $I = \frac{14}{3}$ .      B.  $I = \frac{28}{3}$ .      C.  $I = \frac{4}{3}$ .      D.  $I = 2$ .

**Câu 106. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên đoạn  $[0;1]$  đồng thời thỏa mãn các điều kiện  $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0;1]$ . Giá trị  $f(0) - f(1)$  thuộc khoảng

A.  $(1;2)$ .                      B.  $(-1;0)$ .                      C.  $(0;1)$ .                      D.  $(-2;-1)$ .

**Câu 107. (Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 2$ . Tính giá trị của  $T = f^2(2)$

A.  $\frac{160}{15}$                       B.  $\frac{268}{15}$                       C.  $\frac{4}{15}$                       D.  $\frac{268}{30}$

**Câu 108. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên tập xác định  $\mathbb{R}^+$  và thỏa mãn  $f(x^2 + 3x + 1) = x + 2$ . Tính  $I = \int_1^5 f(x) dx$

A.  $\frac{37}{6}$ .                      B.  $\frac{527}{3}$ .                      C.  $\frac{61}{6}$ .                      D.  $\frac{464}{3}$ .

**Câu 109. (Chuyên Chu Văn An - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện  $f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R}$  và  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x) dx$

A. 0.                      B.  $\frac{\pi}{2}$ .                      C. 1.                      D.  $\pi$ .

**Câu 110. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = \frac{2}{3}$  và  $(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})f'(x) = 1, \forall x \geq -1$ . Biết rằng  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{a\sqrt{2} + b}{15}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính  $T = a + b$ .

A. -8.                      B. -24.                      C. 24.                      D. 8.

**Câu 111. (Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ . Tính  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

A.  $\frac{\pi}{4}$ .                      B.  $\frac{\pi}{16}$ .                      C.  $\frac{\pi}{20}$ .                      D.  $\frac{\pi}{6}$ .

**Câu 112. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Biết  $f(3) = 3$  và  $xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3, \forall x \in (0; +\infty)$ . Giá trị của  $\int_3^5 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{914}{3}$ .                      B.  $\frac{59}{3}$ .                      C.  $\frac{45}{4}$ .                      D. 88.

**Câu 113. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và đồng biến trên  $[1;4]$ , thỏa mãn  $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2$  với mọi  $x \in [1;4]$ . Biết  $f(1) = \frac{3}{2}$ , tính  $I = \int_1^4 f(x) dx$



A.  $\frac{1188}{45}$ .      B.  $\frac{1187}{45}$ .      C.  $\frac{1186}{45}$ .      D.  $\frac{9}{2}$ .

**Câu 114. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn:

$$7f(x) + 4f(4-x) = 2018x\sqrt{x^2+9}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_0^4 f(x)dx.$$

A.  $\frac{2018}{11}$ .      B.  $\frac{7063}{3}$ .      C.  $\frac{98}{3}$ .      D.  $\frac{197764}{33}$ .

**Câu 115. (THPT Ba Đình 2019)** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm đến cấp hai trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn:

$$f^2(1-x) = (x^2+3)f(x+1). \text{ Biết rằng } f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ tính } I = \int_0^2 (2x-1)f''(x)dx.$$

A. 8.      B. 0.      C. -4.      D. 4.

**Câu 116.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$  và

có  $f(2) = 1$ . Tích phân  $\int_0^2 f^2(x)dx$

A.  $\frac{3}{2}$       B.  $\frac{4}{3}$       C. 2      D. 4

**Câu 117. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị không âm và có đạo hàm

liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = -1$ . Giá trị của tích phân

$\int_0^1 f(x)dx$  bằng

A.  $-\frac{1}{6}$ .      B.  $-\ln 2$ .      C.  $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ .      D.  $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ .

**Câu 118.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$  và thỏa mãn hệ

thức  $f(x).f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x+1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}$ .

Biết  $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$ . Giá trị của  $a-b$  bằng

A. 1.      B. 2.      C. 0.      D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 119. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(x) > 0$  và

$$f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{e^x \cdot x \sqrt{x-x^2}} \quad \forall x \in (0;1). \text{ Biết } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \text{ khẳng định nào sau đây đúng?}$$

A.  $f\left(\frac{1}{5}\right) \geq \frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{6} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{5}$       C.  $\frac{1}{5} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{4}$       D.  $f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{6}$

**Câu 120.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn  $[0;1]$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu

thức  $M = \int_0^1 [2f(x) + 3x]f(x)dx - \int_0^1 [4f(x) + x]\sqrt{xf(x)}dx$  bằng

A.  $-\frac{1}{24}$       B.  $-\frac{1}{8}$       C.  $-\frac{1}{12}$       D.  $-\frac{1}{6}$

**Câu 121. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(0)=0, f'(0) \neq 0$  và thỏa mãn hệ thức

$$f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Biết  $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = a.e^2 + b$ , với  $a; b \in \mathbb{Q}$ . Giá trị của  $a-b$  bằng.

A. 1.      B. 2.      C. 0.      D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 122. (Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và có đạo hàm trên  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  thỏa mãn

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x).(3-x)] dx = -\frac{109}{12}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1} dx.$$

A.  $\ln \frac{7}{9}$ .      B.  $\ln \frac{2}{9}$ .      C.  $\ln \frac{5}{9}$ .      D.  $\ln \frac{8}{9}$ .

**Câu 123. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A.  $\frac{\pi}{4}$ .      B. 0.      C. 1.      D.  $\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 124. (THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018)** Cho số thực  $a > 0$ . Giả sử hàm số  $f(x)$  liên tục và luôn dương trên đoạn  $[0; a]$  thỏa mãn  $f(x).f(a-x)=1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$ ?

A.  $I = \frac{2a}{3}$ .      B.  $I = \frac{a}{2}$ .      C.  $I = \frac{a}{3}$ .      D.  $I = a$ .

**Câu 125. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Xét hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và thỏa mãn  $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{2}{3}$ .      B.  $\frac{1}{6}$ .      C.  $\frac{2}{15}$ .      D.  $\frac{3}{5}$ .

**Câu 126. (Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn  $[0;2]$  và thỏa mãn  $[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ . Biết  $f(0)=1, f(2)=e^6$ . Khi đó  $f(1)$  bằng

A.  $e^2$ .      B.  $e^{\frac{3}{2}}$ .      C.  $e^3$ .      D.  $e^{\frac{5}{2}}$ .

**Câu 127. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $[0; 3]$ ;

$f(3-x) \cdot f(x) = 1, f(x) \neq -1$  với mọi  $x \in [0; 3]$  và  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Tính tích phân:

$$\int_0^3 \frac{x \cdot f'(x)}{[1 + f(3-x)]^2 \cdot f^2(x)} dx.$$

- A. 1.                                      B.  $\frac{5}{2}$ .                                      C.  $\frac{1}{2}$ .                                      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 128. (Sở Bình Phước - 2018)** Cho số thực  $a > 0$ . Giả sử hàm số  $f(x)$  liên tục và luôn dương trên

đoạn  $[0; a]$  thỏa mãn  $f(x) \cdot f(a-x) = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$ ?

- A.  $I = \frac{a}{3}$ .                                      B.  $I = \frac{a}{2}$ .                                      C.  $I = a$ .                                      D.  $I = \frac{2a}{3}$ .

**Câu 129. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số lẻ trên

$\mathbb{R}$  và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện  $f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}, \forall x \neq 0$ .

Gọi  $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1} dx$ . Hãy chọn khẳng định đúng về giá trị của  $I$ .

- A.  $I \in (-1; 0)$ .                                      B.  $I \in (1; 2)$ .                                      C.  $I \in (0; 1)$ .                                      D.  $I \in (-2; -1)$ .

**Câu 130. (ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thỏa mãn điều kiện

$\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^1 xf(x) dx = \frac{3}{2}$ . Hỏi giá trị nhỏ nhất của  $\int_0^1 f^2(x) dx$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{27}{4}$ .                                      B.  $\frac{34}{5}$ .                                      C. 7.                                      D. 8.

**Câu 131. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số  $f(x) > 0$  và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn

$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$  và  $f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$ . Giá trị  $f(3)$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$ .                                      B.  $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$ .                                      C.  $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$ .                                      D.  $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$ .

**Câu 132. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn

$f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \ln(x+1)$ . Biết  $\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $a+b+2c$  bằng

- A.  $\frac{29}{2}$ .                                      B. 5.                                      C. 7.                                      D. 37.

**Câu 133. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thỏa mãn

$6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .

- A.  $\frac{\pi}{8}$ .      B.  $\frac{\pi}{20}$ .      C.  $\frac{\pi}{16}$ .      D.  $\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 134. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết

$$f(4x)=f(x)+4x^3+2x \text{ và } f(0)=2. \text{ Tính } I=\int_0^2 f(x)dx.$$

- A.  $\frac{147}{63}$ .      B.  $\frac{149}{63}$ .      C.  $\frac{148}{63}$ .      D.  $\frac{352}{63}$ .

**Câu 135. (Kim Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;2]$  thỏa mãn

$$\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}, f(2)=0 \text{ và } \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 f(x)dx.$$

- A.  $I = \frac{7}{5}$ .      B.  $I = -\frac{7}{5}$ .      C.  $I = -\frac{7}{20}$ .      D.  $I = \frac{7}{20}$ .

**Câu 136. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A.  $\frac{1}{6}$ .      B. 1.      C.  $\frac{7}{18}$ .      D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 137. (Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;\pi]$ . Biết  $f(0)=2e$  và

$$f(x) \text{ thỏa mãn hệ thức } f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \cos x \cdot e^{\cos x}, \forall x \in [0;\pi]. \text{ Tính } I = \int_0^{\pi} f(x)dx \text{ (làm tròn đến hàng phần trăm).}$$

- A.  $I \approx 6,55$ .      B.  $I \approx 17,30$ .      C.  $I \approx 10,31$ .      D.  $I \approx 16,91$ .

**Câu 138. (Chuyên Thái Bình - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và nhận giá trị dương trên  $[0;1]$ . Biết

$$f(x) \cdot f(1-x) = 1 \text{ với } \forall x \in [0;1]. \text{ Tính giá trị } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$$

- A.  $\frac{3}{2}$ .      B.  $\frac{1}{2}$ .      C. 1.      D. 2.

**Câu 139. (THPT Cẩm Bình 2019)** Cho hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(0;+\infty)$  thỏa mãn

$$f(x) = x \cdot \ln \left( \frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \right) \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^5 f(x)dx.$$

- A.  $12 \ln 13 - 13$ .      B.  $13 \ln 13 - 12$ .      C.  $12 \ln 13 + 13$ .      D.  $13 \ln 13 + 12$ .

**Câu 140.** Cho hàm số  $f(x)$  không âm, có đạo hàm trên đoạn  $[0;1]$  và thỏa mãn  $f(1)=1$ ,

$$[2f(x)+1-x^2]f'(x) = 2x[1+f(x)], \forall x \in [0;1]. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A. 1.      B. 2.      C.  $\frac{1}{3}$ .      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 141. (Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(1) = -2 \ln 2$  và  $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$  (1). Biết  $f(2) = a + b \ln 3$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $2(a^2 + b^2)$  là:

- A.  $\frac{27}{4}$ .                      B. 9.                      C.  $\frac{3}{4}$ .                      D.  $\frac{9}{2}$ .

**Câu 142. (Sở Cần Thơ - 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $[1; 3]$ ;  $f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]$ ;  $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4$  và  $f(1) = -1$ . Biết rằng  $\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ), giá trị của  $a + b^2$  bằng

- A. 4.                      B. 0.                      C. 2.                      D. -1.

**Câu 143. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương và thỏa mãn  $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Tính  $f(3)$

- A.  $f(3) = 1$ .                      B.  $f(3) = e^2$ .                      C.  $f(3) = e^3$ .                      D.  $f(3) = e$ .

**Câu 144.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn:  $f^2(1-x) = (x^2 + 3) \cdot f(x+1) \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết  $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , tính  $I = \int_0^2 (2x-1) f''(x) dx$ .

- A. 4.                      B. 0.                      C. 8.                      D. -4.

**Câu 145. (Sở Nam Định - 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$ , thỏa mãn  $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0; 1]$  và  $f(1) = 2$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .

- A.  $\frac{1}{3}$ .                      B. 2.                      C.  $\frac{4}{3}$ .                      D.  $\frac{21}{4}$ .

**Câu 146.** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương thỏa mãn  $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + 2x^3, \forall x \in (0; +\infty)$  và

$\int_2^3 \frac{x^5}{f^2(x)} dx = \frac{1}{20}$ . Giá trị của biểu thức  $f(2) + f(3)$  bằng

- A. 110.                      B. 90.                      C. 20.                      D. 25.

**Câu 147.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$  thỏa mãn  $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0; 1]$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $\int_0^1 f(x) dx$ .

- A.  $\frac{1}{2018 \cdot 2020}$ .                      B.  $\frac{1}{2019 \cdot 2020}$ .                      C.  $\frac{1}{2020 \cdot 2021}$ .                      D.  $\frac{1}{2019 \cdot 2021}$ .

**Câu 148.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(1) = 2 \ln 2$  và  $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + 3x + 2$ . Giá trị  $f(2) = a + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $a^2 + b^2$ .

- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B.  $\frac{13}{4}$ .                      C.  $\frac{25}{4}$ .                      D.  $\frac{9}{2}$ .

**Câu 149. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn:

$$3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính giá trị của tích phân } I = \int_0^2 f(x)dx.$$

- A.  $I = e + 2$ .                      B.  $I = 2e + 4$ .                      C.  $I = 2$ .                      D.  $I = 8$ .

**Câu 150. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[2; 4]$  và  $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ . Biết rằng

$$f(2) = \frac{7}{4} \text{ và } 4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4]. \text{ Giá trị của } f(4) \text{ bằng}$$

- A.  $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$ .                      B.  $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$ .                      C.  $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$ .                      D.  $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$ .

**Câu 151.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[e; e^2]$ . Biết  $x^2 f'(x) \cdot \ln x - xf(x) + \ln^2 x = 0, \forall x \in [e; e^2]$

$$\text{và } f(e) = \frac{1}{e}. \text{ Tính tích phân } I = \int_e^{e^2} f(x)dx.$$

- A.  $I = 2$ .                      B.  $I = \frac{3}{2}$ .                      C.  $I = 3$ .                      D.  $I = \ln 2$ .

## Dạng 2. Tích phân một số hàm đặc biệt

### Dạng 2.1 Tích phân của hàm số lẻ và hàm số chẵn

Nhắc lại kiến thức về hàm số lẻ và hàm số chẵn:

Hàm số  $y = f(x)$  có miền xác định trên tập đối xứng D và

Nếu  $f(-x) = f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$ : là hàm số chẵn.

Nếu  $f(-x) = -f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$ : là hàm số lẻ.

(thay thế chỗ nào có x bằng  $-x$  sẽ tính được  $f(-x)$  và so sánh với  $f(x)$ ).

Thường gặp cung góc đối nhau của  $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$ .

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và lẻ trên  $[-a; a]$  thì  $\int_{-a}^a f(x).dx = 0$ .

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và chẵn trên  $[-a; a]$  thì  $\begin{cases} \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \\ \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x+1} dx = \int_0^a f(x)dx \end{cases}$ .

Do những kết quả này không có trong SGK nên về mặt thực hành, ta làm theo các bước sau (sau khi nhận định đó là hàm chẵn hoặc lẻ và **bài toán thường có cận đối nhau dạng  $-a \rightarrow a$** ):

□ Bước 1. Phân tích:  $I = \int_{-a}^a f(x).dx = \int_{-a}^0 f(x).dx + \int_0^a f(x).dx = A + B$ .

- Bước 2. Tính  $A = \int_{-a}^0 f(x) \cdot dx$  ? bằng cách đổi biến  $t = -x$  và cần nhớ rằng: tích phân không phụ thuộc vào biến, mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hai cận, chẳng hạn luôn có:

$$\int_{-2014}^0 \frac{3t^2 \cos t}{1 + \sin^2 t} dt = \int_{-2014}^0 \frac{3x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

## 2. Tích phân của hàm số liên tục

- Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ .

- Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$  thì

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

$$+ \int_a^{\pi-a} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_a^{\pi-a} f(\sin x) dx \text{ và } \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

$$+ \int_a^{2\pi-a} xf(\cos x) dx = \pi \int_a^{2\pi-a} f(\cos x) dx \text{ và } \int_0^{2\pi} x \cdot f(\cos x) dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos x) dx$$

—→ Về mặt thực hành, sẽ đặt  $x =$  cận trên + cận dưới  $- t$  ( $x = a + b - t$ ). Từ đó tạo tích phân xoay vòng (tạo ra I), rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

- Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \text{ và } \int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx.$$

**Lưu ý:** Hàm số  $f(x)$  có chu kỳ T thì  $f(x+T) = f(x)$ .

—→ Về mặt thực hành, ta sẽ làm theo các bước sau:

**Bước 1.** Tách:  $I = \int_a^{a+T} f(x) dx = \underbrace{\int_a^0 f(x) dx}_A + \underbrace{\int_0^T f(x) dx}_B + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x) dx}_C$  (i)

**Bước 2.** Tính  $C = \int_T^{a+T} f(x) dx$  ?

Đặt  $x = t + T \Rightarrow dx = dt$ . Đổi cận:  $\begin{cases} x = a+T \\ x = T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = 0 \end{cases}$ . Khi đó:

$$C = \int_0^a f(t+T) dt = - \int_a^0 f(t) dt = - \int_a^0 f(x) dx = -A \text{ (ii)}$$

Thế (i) vào (ii) ta được:  $I = B = \int_0^T f(x) dx$ .

**Câu 1. (Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

- A.  $I = -6$                       B.  $I = 0$                       C.  $I = -2$                       D.  $I = 6$

**Câu 2. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2+x}} dx = \pi\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{c}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,

$b < 15$ . Khi đó  $a + b + c$  bằng:

- A. 10.                      B. 9.                      C. 11.                      D. 12.

**Câu 3. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn trên đoạn  $[-a; a]$  và  $k > 0$ .

Giá trị tích phân  $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx$  bằng

- A.  $\int_0^a f(x) dx$ .                      B.  $\int_{-a}^a f(x) dx$ .                      C.  $2 \int_{-a}^a f(x) dx$ .                      D.  $2 \int_0^a f(x) dx$ .

**Câu 4. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho  $f(x), f(-x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}. \text{ Biết } I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m}. \text{ Khi đó giá trị của } m \text{ là}$$

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m = 20$ .                      C.  $m = 5$ .                      D.  $m = 10$ .

**Câu 5. (THPT Hàm Rồng Thanh Hóa -2019)** Cho hàm số  $f(x), f(-x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}. \text{ Tính } I = \int_{-2}^2 f(x) dx.$$

- A.  $I = \frac{\pi}{20}$ .                      B.  $I = \frac{\pi}{10}$ .                      C.  $I = \frac{-\pi}{20}$ .                      D.  $I = \frac{-\pi}{10}$ .

**Câu 6. (Hà Nội - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm lẻ và liên tục trên  $[-4; 4]$  biết

$$\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2 \text{ và } \int_1^2 f(-2x) dx = 4. \text{ Tính } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

- A.  $I = -10$ .                      B.  $I = -6$ .                      C.  $I = 6$ .                      D.  $I = 10$ .

**Câu 7. (Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-\ln 2; \ln 2]$  và thỏa

$$\text{mãn } f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}. \text{ Biết } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3 \text{ (} a, b \in \mathbb{Q} \text{)}. \text{ Tính } P = a + b.$$

- A.  $P = \frac{1}{2}$ .                      B.  $P = -2$ .                      C.  $P = -1$ .                      D.  $P = 2$ .

**Câu 8. (Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Cho  $y = f(x)$  là hàm số chẵn và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1. \text{ Giá trị của } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ bằng}$$

- A. 1.                      B. 6.                      C. 4.                      D. 3.



**Câu 9. (SGD&ĐT BRVT - 2018)** Hàm số  $f(x)$  là hàm số chẵn liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^2 f(x)dx = 10$ . Tính

$$I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx.$$

- A.  $I = 10$ .                      B.  $I = \frac{10}{3}$ .                      C.  $I = 20$ .                      D.  $I = 5$ .

**Câu 10. (Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$  và

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 6. \text{ Kết quả của } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx \text{ bằng}$$

- A. 2.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 5.

**Câu 11. (Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho  $f(x)$  là hàm liên tục trên đoạn  $[0; a]$  thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases} \text{ và } \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}, \text{ trong đó } b, c \text{ là hai số nguyên dương và } \frac{b}{c} \text{ là phân số}$$

tối giản. Khi đó  $b+c$  có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.  $(11; 22)$ .                      B.  $(0; 9)$ .                      C.  $(7; 21)$ .                      D.  $(2017; 2020)$ .

**Câu 12. (Chuyên Sơn La - 2020)** Tích phân  $\int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx = \frac{2^a}{b}$ . Tính tổng  $S = a + b$ .

- A.  $S = 0$ .                      B.  $S = 2021$ .                      C.  $S = 2020$ .                      D.  $S = 4042$ .

**Câu 13. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-\ln 2; \ln 2]$  và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}. \text{ Biết } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx = a \ln 2 + b \ln 3, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

- A.  $P = -2$ .                      B.  $P = \frac{1}{2}$ .                      C.  $P = -1$ .                      D.  $P = 2$ .

**Câu 14. (Đại học Hồng Đức – Thanh Hóa 2019)** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn và  $\int_0^1 f(x)dx = 2$ . Giá trị của

$$\text{tích phân } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2019^x} dx \text{ là}$$





- A.  $\frac{2}{2019}$ .                      B. 2.                      C. 4.                      D. 0.

### Dạng 2.2 Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_a^b |f(x)| dx ?$$

**Bước 1.** Xét dấu  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử trên đoạn  $[a; b]$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm

$x_0 \in [a; b]$  và có bảng xét dấu sau:

$x$		$a$	$x_0$	$b$	
$f(x)$		+	0	-	

**Bước 2.** Dựa vào công thức phân đoạn và dấu của trên  $[a; x_0], [x_0; b]$  ta được:

$$I = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b [-f(x)] dx = A + B.$$

Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học tính  $A, B \Rightarrow I$ .

**Câu 15.** Cho  $a$  là số thực dương, tính tích phân  $I = \int_{-1}^a |x| dx$  theo  $a$ .

A.  $I = \frac{a^2 + 1}{2}$ .      B.  $I = \frac{a^2 + 2}{2}$ .      C.  $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$ .      D.  $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$ .

**Câu 16.** (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho số thực  $m > 1$  thỏa mãn  $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $m \in (4; 6)$ .      B.  $m \in (2; 4)$ .      C.  $m \in (3; 5)$ .      D.  $m \in (1; 3)$ .

**Câu 17.** (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$ .      B.  $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$ .  
C.  $\int_{-2}^3 |e^x (x + 1)| dx = \int_{-2}^3 e^x (x + 1) dx$ .      D.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ .

**Câu 18.** (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho tích phân  $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $P = abc$ .

A.  $P = -36$       B.  $P = 0$       C.  $P = -18$       D.  $P = 18$

**Câu 19.** (Chuyên Hạ Long 2019) Có bao nhiêu số tự nhiên  $m$  để  $\int_0^2 |x^2 - 2m^2| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 2m^2) dx \right|$ .

A. Vô số.      B. 0.      C. Duy nhất.      D. 2.

**Câu 20.** (Chu Văn An - Thái Nguyên - 2018) Tính tích phân  $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$ .

A.  $\frac{1}{\ln 2}$ .      B.  $\ln 2$ .      C.  $2 \ln 2$ .      D.  $\frac{2}{\ln 2}$ .

**Câu 21.** (KTNL Gia Bình 2019) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\int_0^1 f(x) dx = 2$ ;

$\int_0^3 f(x) dx = 6$ . Tính  $I = \int_{-1}^1 f(|2x - 1|) dx$

A.  $I = 8$       B.  $I = 6$       C.  $I = \frac{3}{2}$       D.  $I = 4$

**Câu 22.** (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\int_0^3 f(x) dx = 8$  và

$\int_0^5 f(x) dx = 4$ . Tính  $\int_{-1}^1 f(|4x - 1|) dx$ .

A.  $\frac{9}{4}$ .

B.  $\frac{11}{4}$ .

C. 3.

D. 6.

**Câu 23.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^1 f(2x)dx = 2$  và  $\int_0^2 f(6x)dx = 14$ . Tính  $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx$ .

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

**Câu 24.** (Phong 1 - 2018) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $(0;3)$  và  $\int_0^1 f(x)dx = 2$ ;  $\int_0^3 f(x)dx = 8$ . Giá trị của tích phân  $\int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx = ?$

A. 6

B. 3

C. 4

D. 5

**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\int_0^3 f(x)dx = 8$  và  $\int_0^5 f(x)dx = 4$ . Tính  $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx$

A.  $\frac{9}{4}$ .

B.  $\frac{11}{4}$ .

C. 3.

D. 6.

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f'(x) + 2f'(-x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$  với mọi số thực  $x$ . Giả sử  $f(2) = m$ ,  $f(-3) = n$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = f(-2) - f(3)$ .

A.  $T = m + n$ .

B.  $T = n - m$ .

C.  $T = m - n$ .

D.  $T = -m - n$ .

### Dạng 2.3 Tích phân nhiều hàm

**Câu 27.** Cho số thực  $a$  và hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ . Tính tích phân  $\int_{-1}^1 f(x)dx$  bằng:

A.  $\frac{a}{6} - 1$ .

B.  $\frac{2a}{3} + 1$ .

C.  $\frac{a}{6} + 1$ .

D.  $\frac{2a}{3} - 1$ .

**Câu 28.** (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  liên tục trên

$\mathbb{R}$  và

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = ae + b\sqrt{3} + c, (a, b, c \in \mathbb{Q}). \text{ Tổng } a + b + 3c \text{ bằng}$$

A. 15.

B. -10.

C. -19.

D. -17.

**Câu 29.** (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Tính tích phân  $\int_0^1 \max\{e^x, e^{1-2x}\}dx$

A.  $e - 1$ .

B.  $\frac{3}{2}(e - \sqrt[3]{e})$ .

C.  $e - \sqrt[3]{e}$ .

D.  $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$ .

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Tính  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x)dx$

A.  $I = \frac{71}{6}$ .

B.  $I = 31$ .

C.  $I = 32$ .

D.  $I = \frac{32}{3}$ .

**BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI**

**<https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing>**

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

**Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương**

[https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view\\_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber)

**Tải nhiều tài liệu hơn tại: <http://diendangiaovientoan.vn/>**

**ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!**

Nguyễn Bảo Vương