TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm tập xác định hàm số mũ - logarit

Hàm số mũ

Dạng: $\left\langle \begin{array}{l} y=a^x \\ y=a^u \end{array} \right.$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Hàm số logarit

Dạng: $\left\langle \begin{array}{l} y=\log_a x \\ y=\log_a u \end{array} \right.$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.

Đặc biệt: $a=e \longrightarrow y=\ln x$; $a=10 \longrightarrow y=\log x=\lg x$.

Điều kiện xác định: $u>0$.

Câu 1. **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\leq 2$ **B.** $m>2$ **C.** $m\geq 0$ **D.** $m<0$

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2-2x-m+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow (-1)^2-1.(-m+1)<0 \Leftrightarrow m<0$.

Câu 2. **(Mã 104 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x+m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $0<m<3$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>0$

C. $m>0$ **D.** $m=0$

Lời giải

Chọn C

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2-2x+m+1>0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 (ld) \\ \Delta'=1-(1+m)<0 \Leftrightarrow m>0 \end{cases}$.

Câu 3. Hàm số $y=\ln\left(x^2+mx+1\right)$ xác định với mọi giá trị của x khi.

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2+mx+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 4. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$

A. $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(1;+\infty)$.

C. $m\in(-4;1)$. **D.** $m\in(1;+\infty)$.

Lời giải

Cách 1

Điều kiện: $x>0$.

Hàm số xác định khi:

$$m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3\neq 0\Leftrightarrow m\left(\log_3^2 x+1\right)\neq 4\log_3 x-3\Leftrightarrow m\neq\frac{4\log_3 x-3}{\log_3^2 x+1},\ \forall x\in(0;+\infty).$$

Để hàm số xác định trên $(0;+\infty)$ thì phương trình $m=\dfrac{4\log_3 x-3}{\log_3^2 x+1}$ vô nghiệm $\forall x\in(0;+\infty)$

Xét hàm số $y=\dfrac{4\log_3 x-3}{\log_3^2 x+1}$.

Đặt $\log_3 x=t$ khi đó ta có $y=\dfrac{4t-3}{t^2+1}$, $y'=\dfrac{-4t^2+6t+4}{\left(t^2+1\right)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-1}{2}\\ t=2\end{array}\right.$.

Ta có BBT:

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'			0	$+$	0		
y	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Để hàm số xác định trên $(0;+\infty)$ thì $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

Cách 2:

Để hàm số xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ thì phương trình $m.\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3=0$ vô nghiệm.

TH1: $m=0$ thì PT trở thành $-4\log_3 x+3=0\Leftrightarrow\log_3 x=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=3^{\frac{3}{4}}$.

Vậy $m=0$ không thỏa mãn.

TH2: $m\neq 0$ thì để PT vô nghiệm $\Delta=(-4)^2-4m(m+3)<0$

$$\Leftrightarrow -4m^2-12m+16<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-4\\ m>1\end{array}\right..$$

Để hàm số xác định trên $(0;+\infty)$ thì $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\ln\left(-x^2+mx+2m+1\right)$ xác định với mọi $x\in(1;2)$.

A. $m\geq-\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\geq\dfrac{3}{4}$. **C.** $m>\dfrac{3}{4}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x\in(1;2)$ khi $-x^2+mx+2m+1>0,\forall x\in(1;2)$.

$\Leftrightarrow f(x)=x^2-mx-2m-1<0,\forall x\in(1;2)$.

$\Rightarrow f(x)=0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1\leq 1<2\leq x_2$.

$\Rightarrow \begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m \le 0 \\ -4m+3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \dfrac{3}{4}$.

Câu 6. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên -2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log(x^2-4x-m+1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m>-4$. **B.** $m<0$. **C.** $m<-4$. **D.** $m<-3$.

Lời giải

Hàm số $y=\log(x^2-4x-m+1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2-4x-m+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Câu 7. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-2018;\ 2018]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 2019 **B.** 2017 **C.** 2018 **D.** 1009

Lời giải

Hàm số $y=\ln\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$x^2-2x-m+1>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 1+m-1<0 \Leftrightarrow m<0$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên thuộc $[-2018;\ 2018]$ ta có 2018 giá trị của m.

Câu 8. **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $-2\le m\le 2$. **B.** $m=2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$. **D.** $-2<m<2$.

Lời giải

$y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$

Điều kiện xác định của hàm số trên: $x^2-2mx+4>0$.

Để tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0, \forall m \\ m^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<2$.

Vậy đáp án đúng là đáp án **D.**

Câu 9. Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\log(mx-m+2)$ xác định trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 4 **B.** 5 **C.** Vô số **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định

$$mx-m+2>0 \Leftrightarrow mx>m-2 \quad (1)$$

Trường hợp 1. $m=0$.

$$(1) \Leftrightarrow 2>0 \text{ (luôn đúng với } \forall x\in\left[\tfrac{1}{2};+\infty\right)\text{)}.$$

Trường hợp 2. $m>0$.

$$(1) \Leftrightarrow x>\frac{m-2}{m}$$

Để hàm số $y=\log(mx-m+2)$ xác định trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ thì

$$\frac{m-2}{m}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<m<4.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3\}$.

Trường hợp 3. $m<0$.

$$(1)\Leftrightarrow x<\frac{m-2}{m}.$$

Suy ra tập xác định của hàm số $y=\log(mx-m+2)$ là $D=\left(-\infty;\frac{m-2}{m}\right)$.

Do đó $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\not\subset D$ suy ra không có giá trị $m<0$ nào thỏa yêu cầu bài toán.

Từ 3 trường hợp trên ta được $m\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 10. **(Gia Bình 2019)** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\log_{2018}\left(2018^x-x-\frac{x^2}{2}-m\right)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $[0;+\infty)$

A. $m>9$ **B.** $m<1$ **C.** $0<m<1$ **D.** $m<2$

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định $\forall x\in[0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2018^x-x-\frac{x^2}{2}-m>0,\ \forall x\in[0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2018^x-x-\frac{x^2}{2}>m,\ \forall x\in[0;+\infty)$.

YCBT $\Leftrightarrow m<\min\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x)$.

Đặt $f(x)=2018^x-x-\frac{x^2}{2}, x\in[0;+\infty)$

$\Rightarrow f'(x)=2018^x\ln(2018)-1-x$

$\Rightarrow f''(x)=2018^x(\ln 2018)^2-1>0,\ \forall x\in[0;+\infty)$

Khi đó $f'(x)$ đồng biến trên $x\in[0;+\infty)$ và $f'(0)=\ln(2018)-1>0$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $x\in[0;+\infty)$ và $f(0)=1$

Vậy $m<1$ thì thỏa YCBT.

Câu 11. Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

A. $m\geq\frac{1}{4}$. **B.** $m>0$. **C.** $m<\frac{1}{4}$. **D.** $m>\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $4^x-2^x+m>0$

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\Leftrightarrow 4^x-2^x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m>-4^x+2^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Đặt $t=2^x,(t>0)$

Khi đó (*) trở thành $m>-t^2+t,\ \forall t>0\ \Leftrightarrow m>\max\limits_{(0;+\infty)} f(t)$ với $f(t)=-t^2+t,\ t>0$

Ta có: $f'(t)=-2t+1$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)=-t^2+t,\ t>0$:

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	-	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ BBT ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} f(t)=\dfrac{1}{4}$ đạt được khi $t=\dfrac{1}{2}$

Vậy $m>\max\limits_{(0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3x+5}{\log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-4m+5\right)}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ là

A. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)\setminus\{2\}$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $[1;3]\setminus\{2\}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\dfrac{3x+5}{\log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-4m+5\right)}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-2x+m^2-4m+5>0 \\ \log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-4m+5\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+m^2-4m+5>0 \\ x^2-2x+m^2-4m+5\neq 1 \end{cases}$.

Nên điều kiện để hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $\begin{cases} x^2-2x+m^2-4m+5>0 \\ x^2-2x+m^2-4m+4\neq 0 \end{cases}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta_1'=1-\left(m^2-4m+5\right)<0 \\ \Delta_2'=1-\left(m^2-4m+4\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-4<0 \\ -m^2+4m-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow -m^2+4m-3<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>3 \end{array}\right..$$

Vậy $m\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\log_{2018}\left(2017^x-x-\dfrac{x^2}{2}-m+1\right)$ xác định với mọi x thuộc $[0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 2018. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $2017^x-x-\dfrac{x^2}{2}-m+1>0,\forall x\in[0;+\infty) \Leftrightarrow 2017^x-x-\dfrac{x^2}{2}>m-1,\forall x\in[0;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=2017^x-x-\dfrac{x^2}{2},\forall x\in[0;+\infty)$ liên tục có

$f'(x)=2017^x\ln 2017-1-x,\forall x\in[0;+\infty)$

$f''(x)=2017^x\ln^2 2017-1>0,\forall x\in[0;+\infty)$

Vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ suy ra $f'(x)\ge f'(0)=\ln 2017-1>0,\forall x\in[0;+\infty)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x)=f(0)=1$.

Mặt khác $m-1<\min\limits_{[0;+\infty)} f(x)=f(0)=1\Leftrightarrow m<2$.

Vậy có vô số giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 14. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2m+1-x}}+\log_3\sqrt{x-m}$ xác định trên khoảng $(2;3)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1-x>0\\x-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2m+1\\x>m\end{cases}\Rightarrow D=(m;2m+1)$.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2;3)$ nên $(2;3)\subset D=(m;2m+1)\Leftrightarrow m\le 2<3\le 2m+1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 2\\2m+1\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m\le 2$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$.

Câu 15. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log_{2020}(mx-m+2)$ xác định trên $[1;+\infty)$.

A. $m\le 0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m\le -1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Điều kiện: $mx-m+2>0\Leftrightarrow mx>m-2\ \ (1)$

• Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow(1)$ trở thành $0>-1$ (luôn thỏa mãn).

• Trường hợp 2: $m>0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x>\dfrac{m-2}{m}\Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $D=\left(\dfrac{m-2}{m};+\infty\right)$.

Khi đó, yêu cầu bài toán trở thành $\dfrac{m-2}{m}<1\Leftrightarrow m-2<m\Leftrightarrow -2<0$ (luôn thỏa mãn).

• Trường hợp 3: $m<0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x<\dfrac{m-2}{m}\Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;\dfrac{m-2}{m}\right)$. Do đó không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm là $m\ge 0$.

Cách 2:

Điều kiện: $mx-m+2>0$, $\forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m(x-1)>-2$, $\forall x\in[1;+\infty)$ (1).

• Với $x=1$, ta được $0m>-2$, đúng với mọi m.

• Với $x>1$, ta được $(1)\Leftrightarrow m>\dfrac{-2}{x-1}$, $\forall x\in(1;+\infty)$ (2).

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{-2}{x-1}$ với $x>1$, ta có: $g'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$, $\forall x>1$.

Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ 0

Từ bảng biến thiên, ta được $(2) \Leftrightarrow m \ge 0$.

Vậy, tất cả các giá trị cần tìm của m là $m \ge 0$.

Câu 16. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Tập xác định của hàm số $y = \log_{2020}\left(\log_{2019}\left(\log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)\right)\right)$ là $D = (a;+\infty)$. Giá trị của a bằng

A. 2018^{2019}. **B.** 2019^{2020}. **C.** 2017^{2018}. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right) > 0 \\ \log_{2019}\left(\log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right) > 0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right) > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2017} x > 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2017^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2017^{2018}.$$

Dạng 2. Tính đạo hàm mũ – logarit

Đạo hàm hàm số mũ

$$\left[\begin{array}{l} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^u \ln a.\boxed{u'} \end{array}\right.$$

Đặc biệt: $\left[\begin{array}{l} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u.\boxed{u'} \end{array}\right.$ với $e \approx 2,71828...$

Đạo hàm hàm số logarit

$$\left[\begin{array}{l} y = \log_a x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \dfrac{\boxed{u'}}{u \ln a} \end{array}\right.$$

Đặc biệt: $\left[\begin{array}{l} (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \\ (\ln u)' = \dfrac{\boxed{u'}}{u} \end{array}\right.$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y' + xy'' = -\dfrac{1}{x^2}$. **B.** $y' + xy'' = \dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y' + xy'' = -\dfrac{1}{x^2}$. **D.** $2y' + xy'' = \dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. $y'=\dfrac{(\ln x)'.x-x'.\ln x}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y''=\dfrac{(1-\ln x)'.x^2-(x^2)'(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-\frac{1}{x}.x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}$

$=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=-\dfrac{1+2(1-\ln x)}{x^3}=-\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$

Suy ra: $2y'+xy''=2.\dfrac{1-\ln x}{x^2}-x\dfrac{3-2\ln x}{x^3}=\dfrac{2-2\ln x-3+2\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

Cách 2. Ta có $xy=\ln x$, lấy đạo hàm hai vế, ta được $y+xy'=\dfrac{1}{x}$.

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế của biểu thức trên, ta được $y'+y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$, hay $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$.

Câu 2. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $f(x)=\ln 2018+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. Tính $S=f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(2017)$.

A. $S=\dfrac{4035}{2018}$ **B.** $S=\dfrac{2017}{2018}$ **C.** $S=\dfrac{2016}{2017}$ **D.** $S=2017$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\ln 2018+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

Do đó $S=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2018}=1-\dfrac{1}{2018}=\dfrac{2017}{2018}$.

Câu 3. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2018)$.

A. $\ln 2018$. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** $\dfrac{2018}{2019}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\left(\ln\dfrac{2018x}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{\frac{2018x}{x+1}}.\left(\dfrac{2018x}{x+1}.\right)'=\dfrac{x+1}{2018x}.\dfrac{2018}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x.(x+1)}$

Vậy $S=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2018)$

$=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{2018.2019}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}$

$=1-\dfrac{1}{2019}=\dfrac{2018}{2019}$.

Câu 4. Cho hàm $y=x\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x^2y''+xy'-2y+4=0$. **B.** $x^2y''-xy'-2xy=0$.

C. $2x^2y'+xy''+2y-5=0$. **D.** $x^2y''-xy'+2y=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x\left[\cos(\ln x) + sin(\ln x)\right]$

$y' = \cos(\ln x) + sin(\ln x) - sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 2\cos(\ln x)$

$y'' = -\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$

Từ đó kiểm tra thấy đáp án D đúng vì :

$x^2y'' - xy' + 2y = y'' = -2x\sin(\ln x) - 2x\cos(\ln x) + 2x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] = 0$.

Câu 5. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2019}|x|, \forall x \neq 0$.

A. $y' = \dfrac{1}{|x|\ln 2019}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{|x|}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{x\ln 2019}$. **D.** $y' = x\ln 2019$.

Lời giải

$$y = \log_{2019}|x| = \begin{cases} \log_{2019} x & ,khi\, x > 0 \\ \log_{2019}(-x) & ,khi\, x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln 2019} & ,khi\, x > 0 \\ \dfrac{-1}{(-x)\ln 2019} & ,khi\, x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x\ln 2019}.$$

Câu 6. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $f(x) = e^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính $x_1.x_2$.

A. $x_1.x_2 = -\dfrac{1}{4}$ **B.** $x_1.x_2 = 1$ **C.** $x_1.x_2 = \dfrac{3}{4}$ **D.** $x_1.x_2 = 0$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = (1-2x)e^{x-x^2}$.

$f''(x) = -2e^{x-x^2} + (1-2x)(1-2x)e^{x-x^2} = \left(-1-4x+4x^2\right)e^{x-x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-1-4x+4x^2\right)e^{x-x^2} = 0 \Leftrightarrow -1-4x+4x^2 = 0$ khi đó $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{4}$.

Câu 7. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$. Tổng $f'(1) + f'(3) + f'(5) + ... + f'(2021)$ bằng

A. $\dfrac{4035}{2021}$.. **B.** $\dfrac{2021}{2022}$. **C.** 2021.. **D.** $\dfrac{2022}{2023}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{x(x+2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}$

Vậy

$$f'(1)+f'(3)+f'(5)+...+f'(2021)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+......+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}$$

$$=1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}.$$

Câu 8. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Phương trình $f'(x)=0$ với $f(x)=\ln\left(x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}>0$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{4x^3-12x^2+8x}{x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta được $x=1$.

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+4}$. Tính giá trị của biểu thức $P=f'(0)+f'(3)+f'(6)+...+f'(2019)$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{2024}{2023}$. **C.** $\frac{2022}{2023}$. **D.** $\frac{2020}{2023}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x\in[0\,;+\infty)$ ta có $x+1>0$ và $x+4>0$ nên $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+4}=\ln(x+1)-\ln(x+4)$.

Từ đó $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}$.

Do đó $P=f'(0)+f'(3)+f'(6)+...+f'(2019)$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+...+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2023}\right)=1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}.$$

Câu 10. **(THPT Minh Khai - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=(2m-1)e^x+3$. Giá trị của m để $f'(-\ln 3)=\frac{5}{3}$ là

A. $m=\frac{7}{9}$. **B.** $m=\frac{2}{9}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=(2m-1)e^x$.

$$\Rightarrow f'(-\ln 3) = (2m-1)e^{-\ln 3} = \frac{2m-1}{e^{\ln 3}} = \frac{2m-1}{3}.$$

$$f'(-\ln 3) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{3} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow m = 3.$$

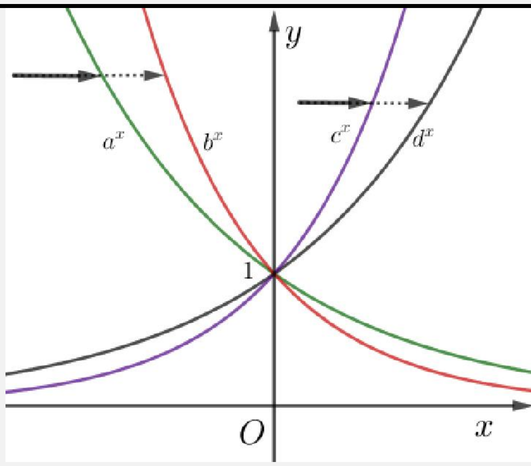
Dạng 3. Khảo sát hàm số mũ, logarit

Sự biến thiên hàm số mũ: $y = a^x$.

Nếu $\boxed{a>1}$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $\boxed{0<a<1}$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên hàm số logarit: $y = \log_a x$. Nếu $\boxed{a>1}$: hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Nếu $\boxed{0<a<1}$: hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

<table>
<tr><th colspan="2">Đồ thị hàm số mũ và logarit</th></tr>
<tr><th>ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ</th><th>ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT</th></tr>
<tr><td>



Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0<a<1$; $b^x \downarrow \Rightarrow 0<b<1$.

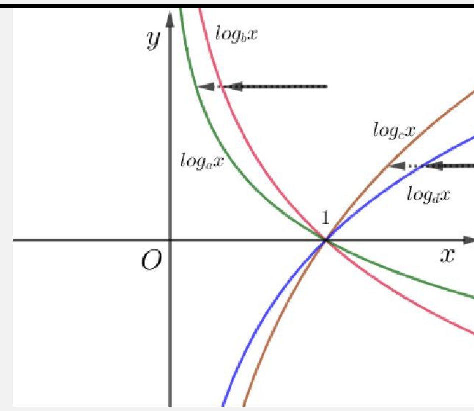
Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c>1$; $d^x \uparrow \Rightarrow d>1$.

So sánh *a* với *b*: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng a^x trước nên $a>b$.

So sánh *c* với *d*: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng c^x trước nên $c>d$.

Vậy $0<b<a<1<d<c$.

</td><td>



Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0<a<1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0<b<1$.

Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c>1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d>1$.

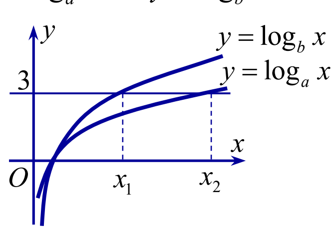
So sánh *a* với *b*: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_b x$ trước: $b>a$.

So sánh *c* với *d*: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_d x$ trước: $d>c$.

Vậy $0<a<b<1<c<d$.

</td></tr>
</table>

Câu 1. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình bên.



Đường thẳng $y=3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1; x_2$. Biết rằng $x_1 = 2x_2$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x = 3 \Leftrightarrow x_1 = a^3$, và $\log_b x = 3 \Leftrightarrow x_2 = b^3$.

Ta có $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow a^3 = 2b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

Câu 2. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln\left(x^2+1\right) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. $[1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $[-1;1]$ **D.** $(-\infty;-1]$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \frac{2x}{x^2+1} - m$.

Hàm số $y = \ln\left(x^2+1\right) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow$ $y' \ge 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$.

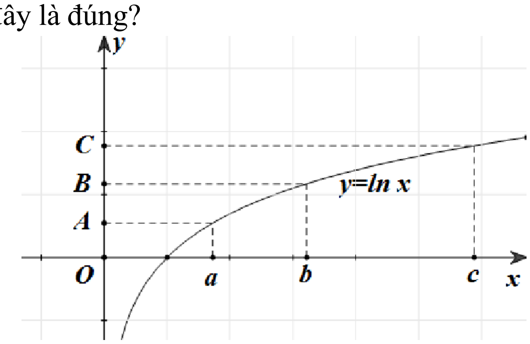
$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ge m, \forall x \in (-\infty;+\infty)$. Ta có $g'(x) = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ge m, \forall x \in (-\infty;+\infty) \Leftrightarrow m \le -1$

Câu 3. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a+c=2b$. **B.** $ac=b^2$. **C.** $ac=2b^2$. **D.** $ac=b$.

Lời giải

Ta có $A(0;\ln a)$, $B(0;\ln b)$, $C(0;\ln c)$ và B là trung điểm của AC nên

$\ln a + \ln c = 2\ln b \Leftrightarrow \ln(ac) = \ln b^2 \Leftrightarrow ac = b^2$.

Vậy $ac = b^2$.

Câu 4. Cho các số thực a,b sao cho $0 < a,b \ne 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $M\left(\sqrt{2018};\sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>1, b>1$ **B.** $a>1, 0<b<1$ **C.** $0<a<1, b>1$ **D.** $0<a<1, 0<b<1$

Lời giải

Chọn C

$M\left(\sqrt{2018};\sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=a^x$ nên ta có:

$a^{\sqrt{2018}}=\sqrt[5]{2019^{-1}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2019}}<1=a^0\Rightarrow 0<a<1$

$M\left(\sqrt{2018};\sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=\log_b x$ nên ta có:

$\log_b\sqrt{2018}=\sqrt[5]{2019^{-1}}\Rightarrow b^{\frac{1}{\sqrt[5]{2019}}}=\sqrt{2018}>1=b^0\Rightarrow b>1$

Vậy $0<a<1, b>1$.

Câu 5. **(Sở Hà Nội 2019)** Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[-1;1]$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1]$.

Lời giải

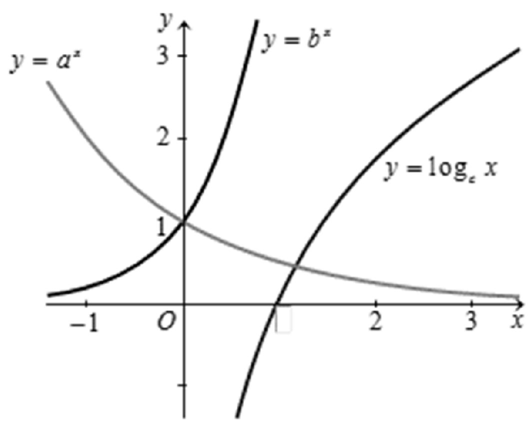
Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}-m=\dfrac{-mx^2+2x-m}{x^2+1}$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện là

$y'\ge 0;\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -mx^2+2x-m\ge 0;\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}-m>0\\ \Delta'=1-m^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1]$.

Câu 6. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong hình vẽ bên có đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_c x$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?



A. $a<c<b$. **B.** $c<a<b$. **C.** $a<b=c$. **D.** $b<c<a$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_c x$,ta có:

Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $0<a<1$. (1)

Các hàm số $y=b^x$, $y=\log_c x$ đồng biến trên tập xác định của nó nên ta có: $\begin{cases}b>1\\ c>1\end{cases}$.(2)

Từ (1),(2)$\Rightarrow\begin{cases}a<b\\ a<c\end{cases}$. Do đó loại hai phương án **B,D.**

Nếu $b=c$ thì ta có đồ thị hai hàm số $y=b^x$, $y=\log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

Tuy nhiên nhìn hình dáng hai đồ thị hàm số $y=b^x$, $y=\log_b x$ không có tính chất đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. Do đó phương án đúng là **A.**

Cách khác:

Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $0<a<1$.

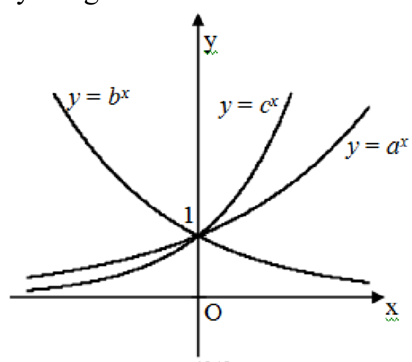
Các hàm số $y=b^x$, $y=\log_c x$ đồng biến biến trên tập xác định của nó nên ta có: $\begin{cases} b>1 \\ c>1 \end{cases}$.

Xét đồ thị hàm số $y=\log_c x$, ta có: $\log_c 2>1 \Leftrightarrow c<2$.

Xét đồ thị hàm số $y=b^x$, ta có: $b^1>2 \Leftrightarrow b>2$.

Do đó: $0<a<c<b$.

Câu 7. **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho đồ thị của ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $b>a>c$. **B.** $a>c>b$. **C.** $c>a>b$. **D.** $c>b>a$.

Lời giải

Chọn C

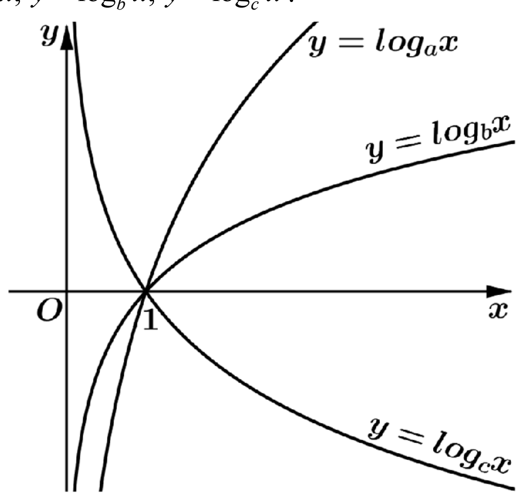
Xét hàm số $y=b^x$: Dựa vào hình dáng đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x=0$, do đó $0<b<1$.

Xét hàm số $y=a^x$: Dựa vào hình dáng đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, do đó $a>1$.

Từ đó suy ra: $a>b$. Loại đáp án A, **D.**

Xét tại $x=1$ đồ thị hàm số $y=c^x$ có tung độ lớn hơn tung độ của đồ thị hàm số $y=a^x$ nên $c>a$. Vậy $c>a>1>b$.

Câu 8. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Cho a,b,c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x,\ y=\log_c x$.

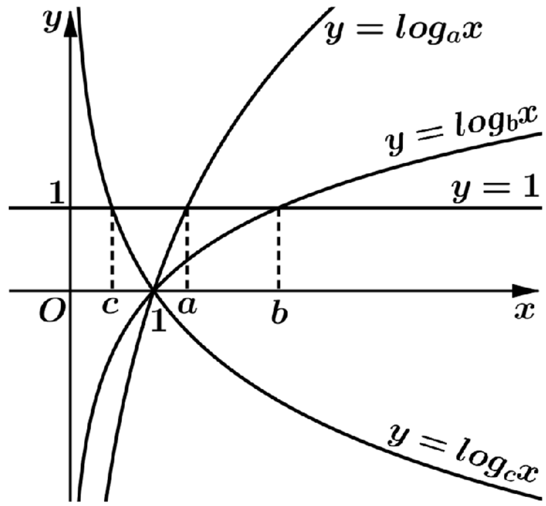


Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a<c<b$. **B.** $a<b<c$. . **C.** $c<b<a$. **D.** $c<a<b$.

Lời giải

Chọn D

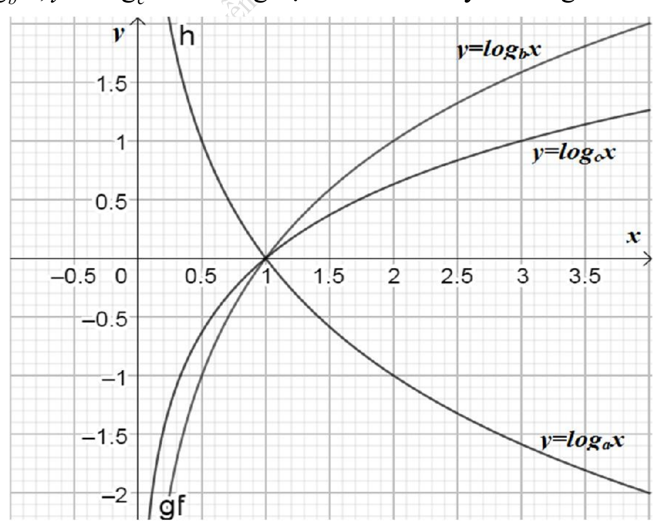


Theo hình dạng của đồ thị ta có $\begin{cases} a,b>1 \\ 0<c<1 \end{cases}$.

Vẽ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hai hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x$ lần lượt tại 2 điểm $M(a;1),\ N(b;1)$. Ta thấy điểm N bên phải điểm M nên $b>a$.

Vậy $c<a<b$.

Câu 9. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho a,b,c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\log_a x, y=y=\log_b x, y=\log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a<b<c$. **B.** $a<c<b$. **C.** $b<a<c$. **D.** $b>a>c$.

Lời giải

Do $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ là hai hàm đồng biến nên $b,c>1$.

Do $y=\log_a x$ nghịch biến nên $0<a<1$. Vậy a bé nhất.

Mặt khác: Lấy $y=m$, khi đó tồn tại $x_1,\ x_2>0$ để $\begin{cases} \log_b x_1 = m \\ \log_c x_2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^m = x_1 \\ c^m = x_2 \end{cases}$.

Dễ thấy $x_1<x_2 \Rightarrow b^m<c^m \Rightarrow b<c$. Vậy $a<b<c$.

Câu 10. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\ln x\neq 2m \Leftrightarrow x\neq \mathrm{e}^{2m}$. Có $y'=\dfrac{6-2m}{x(\ln x-2m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;\mathrm{e}) \Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in(1;\mathrm{e}) \Leftrightarrow \dfrac{6-2m}{x(\ln x-2m)^2}>0\ \forall x\in(1;\mathrm{e})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6-2m>0\\ \mathrm{e}^{2m}\notin(1;\mathrm{e})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6-2m>0\\ \left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^{2m}\le 1\\ \mathrm{e}^{2m}\ge \mathrm{e}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<3\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ \dfrac{1}{2}\le m<3\end{array}\right..$$

Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$. Vậy tập S có 2 phần tử.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\log_2 x-2}{\log_2 x-m-1}$ nghịch biến trên $(4;+\infty)$

A. $m<-2$ hoặc $m>1$. **B.** $m\le -2$ hoặc $m=1$.

C. $m<-2$ hoặc $m=1$. **D.** $m<-2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_2 x$.

Ta có $x\in(4;+\infty)\Leftrightarrow t\in(2;+\infty)$.

Hàm số được viết lại $y=\dfrac{mt-2}{t-m-1}$ (1).

Vì $t=\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) nghịch biến trên $(2;+\infty)$

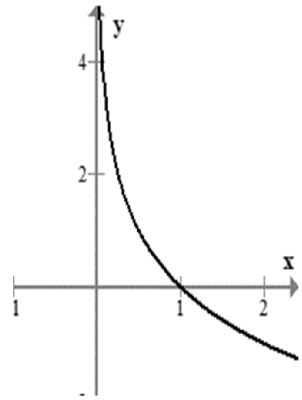
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-m(m+1)+2<0\\ m+1\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>1\end{array}\right.\\ m\le 1\end{cases} \Leftrightarrow m<-2.$$

Câu 12. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_2). Biết (C_1) và (C_2) đối xứng nhanh qua gốc tọa độ. Hỏi hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

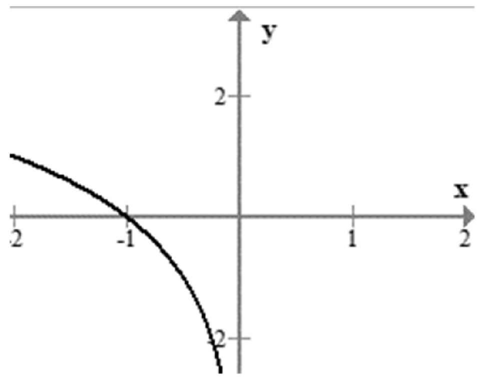
A. $(0;1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(1;+\infty)$

Lời giải

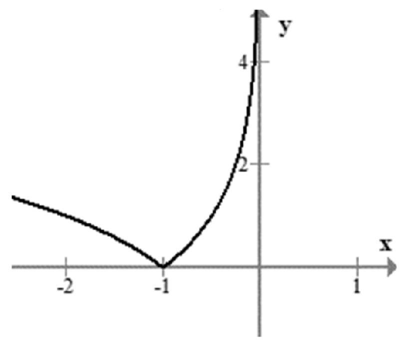
Ta có $y=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ thì $y'=-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{x\ln 2018}<0$ hàm số nghịch biến ta vẽ được đồ thị hàm số (C_1) như hình



Do (C_2) đối xứng với (C_1) qua O nên có dạng như hình dưới



Từ đó đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ là



Dựa vào đồ thị trên ta có hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Câu 13. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e^6)$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Đặt $t=\ln x$.

Khi đó hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e^6)$ thì hàm số $y(t)=\dfrac{t-6}{t-3m}$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$.

Ta có $y'(t)=\dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$

Để hàm số $y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$ thì

$$\begin{cases}-3m+6>0\\3m\notin(0;6)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<2\\\left[\begin{array}{l}m\le 0\\m\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m\le 0\xrightarrow[m\in[-2019;2019]]{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-2019;-2018;...-1;0\}.$$

Vậy có tất cả: 2020 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=f(x)=(x+1)\ln x+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0;e^2)$.

A. 2016. **B.** 2022. **C.** 2014. **D.** 2023.

Lời giải

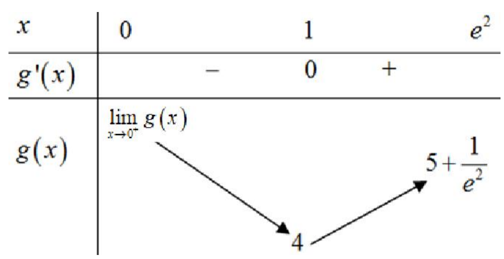
Ta có: $y'=f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}+2-m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+3-m\ge 0\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{1}{x}+3\ge m;\forall x\in(0;e^2)$.

Xét hàm số: $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+3$ với $x\in(0;e^2)$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $g(x)\ge 4$ với mọi $x\in(0;e^2)$.

Từ đó suy ra $-2018\le m\le 4$.

Vậy có 2023 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 15. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e))=2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

A. 10. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $\log(\log e)+\log(\ln 10)=\log 1=0$.

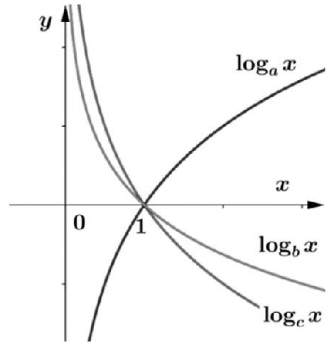
Mặt khác $f(x)+f(-x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6+a\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin(-x)+6$

$=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x-b\sin x+12$

$=a\ln 1+12=12\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó suy ra $f(\log(\log e))+f(\log(\ln 10))=12 \Rightarrow f(\log(\ln 10))=10$.

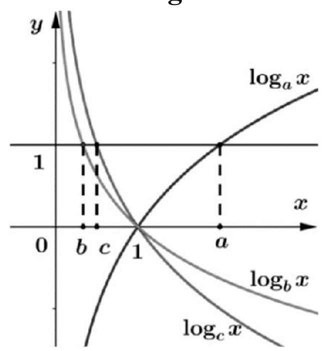
Câu 16. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho a,b,c dương và khác 1. Các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a > c > b$. **B.** $a > b > c$. **C.** $c > b > a$. **D.** $b > c > a$.

Lời giải



Kẻ đường thẳng $(d): y = 1$. Hoành độ giao điểm của (d) với các đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ lần lượt là a, b, c. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $a > c > b$.

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x\,(a > 0, a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B.** -2016. **C.** 2020. **D.** -2020.

Lờigiải

Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = a^x$; (C_1) là đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$M\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}; y_M\right) \in (C_1) \Leftrightarrow y_M = f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$.

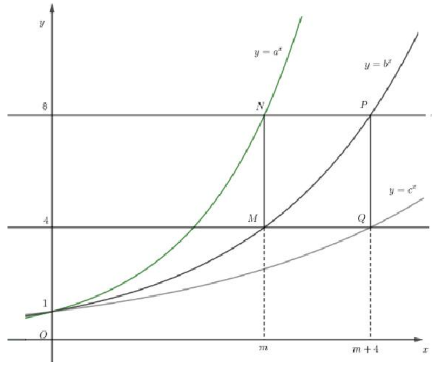
Gọi N đối xứng với M qua $I(1;1) \Rightarrow N\left(-\log_a \dfrac{1}{2018}; 2 - y_M\right)$.

Do đồ thị (C_1) đối xứng (C) qua $I(1;1)$ nên $N\left(-\log_a \dfrac{1}{2018}; 2 - y_M\right) \in (C)$.

$N \in (C) \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{-\log_a \frac{1}{2018}} \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{\log_a 2018} \Leftrightarrow 2 - y_M = 2018 \Leftrightarrow y_M = -2016$.

Vậy $f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right) = -2016$.

Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y = a^x, (C_2): y = b^x, (C_3): y = c^x$ và đường thẳng $y = 4$; $y = 8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4.



Biết rằng $abc = 2^{\frac{x}{y}}$ với $x; y \in \mathbb{Z}^{+}$ và $\dfrac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $x + y$ bằng

A. 34. **B.** 5. **<u>C</u>.** 43. **D.** 19.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

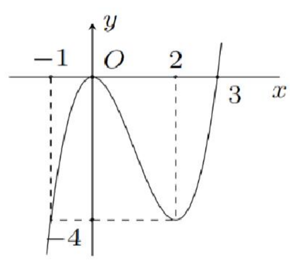
Giả sử hoành độ điểm M là m, ta suy ra $M\left(m;4\right); N\left(m;8\right); P\left(m+4;8\right); \mathrm{Q}\left(m+4;4\right)$.

Từ giả thiết ta có M, P thuộc đường cong $y = b^{x}$ nên $\begin{cases} b^{m} = 4 \\ b^{m+4} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^{m} = 4 \\ b^{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ b = 2^{\frac{1}{4}} \end{cases}$.

N, Q lần lượt thuộc đường cong $y = a^{x}$; $y = c^{x}$ nên $\begin{cases} a^{8} = 8 \\ c^{12} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{8} = 2^{3} \\ c^{12} = 2^{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{3}{8}} \\ c = 2^{\frac{1}{6}} \end{cases}$.

Khi đó $abc = 2^{\frac{3}{8}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{19}{24}}$. Vậy $x = 19;\ y = 24 \Rightarrow x + y = 43$.

Câu 19. **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f\left(2 + \mathrm{e}^{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng



A. $\left(-1;\ 3\right)$. **B.** $\left(-2;\ 1\right)$. **<u>C</u>.** $\left(-\infty;\ 0\right)$. **D.** $\left(0;\ +\infty\right)$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Ta có $y' = \mathrm{e}^{x} f'\left(2 + \mathrm{e}^{x}\right)$. Hàm số $y = f\left(2 + \mathrm{e}^{x}\right)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$y' \le 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} f'\left(2 + \mathrm{e}^{x}\right) \le 0 \Leftrightarrow f'\left(2 + \mathrm{e}^{x}\right) \le 0 \Leftrightarrow 2 + \mathrm{e}^{x} \le 3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} \le 1 \Leftrightarrow x \le 0.$

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in \left[-2019; 2019\right]$ để hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $\left(1; \mathrm{e}^{6}\right)$?

<u>A</u>. 2020. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

<u>Chọn A</u>

Đặt $t = \ln x$.

Khi đó hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $\left(1; e^6\right)$ thì hàm số $y(t) = \dfrac{t-6}{t-3m}$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$.

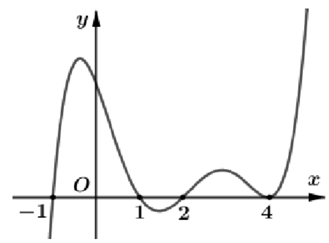
Ta có $y'(t) = \dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$

Để hàm số $y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$ thì

$$\begin{cases} -3m+6>0 \\ 3m \notin (0;6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m \le 0 \xrightarrow[m\in[-2019;2019]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2019;-2018;\ldots-1;0\}.$$

Vậy có tất cả: 2020 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **<u>D</u>.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)} f'(1-2x).(-2).\ln\dfrac{1}{2}$.

Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x<-1 \\ 1<1-2x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ -\dfrac{1}{2}<x<0 \end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 22. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Xét hàm số $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số f tăng trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** Hàm số f tăng trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

<u>C</u>. Hàm số f giảm trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** 3 lựa chọn kia đều sai.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Nhận xét: $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases}\cos x > 0\\ f(x) > 0\end{cases}$.

Ta có: $f(x) = (\cos x)^{\sin x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln(\cos x)^{\sin x} = \sin x.\ln(\cos x)$.

$\Rightarrow \left[\ln f(x)\right]' = \left[\sin x.\ln(\cos x)\right]'$.

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\cos^2 x.\ln\cos x - \sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \left(\dfrac{\cos^2 x.\ln\cos x - \sin^2 x}{\cos x}\right).f(x)$.

Do $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0;1]$. Mặt khác $e > 1 \Rightarrow \ln\cos x \le 0$.

$\Rightarrow \cos^2 x.\ln\cos x - \sin^2 x \le 0, \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow f'(x) = \left(\dfrac{\cos^2 x.\ln\cos x - \sin^2 x}{\cos x}\right).f(x) \le 0, \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ (Dấu "=" xảy ra tại $x = 0$).

$\Rightarrow y = f(x)$ giảm trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2+2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 4038. **D.** 1009.

Lời giải

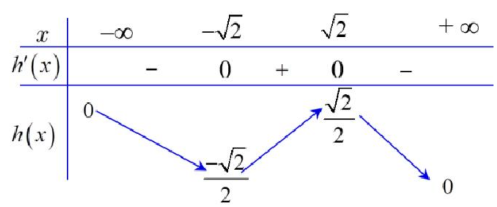
Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+2} - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+2} - m \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{2x}{x^2+2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xét $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ với $x \in \mathbb{R}$. Có $h'(x) = \dfrac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$

Bảng biến thiên:



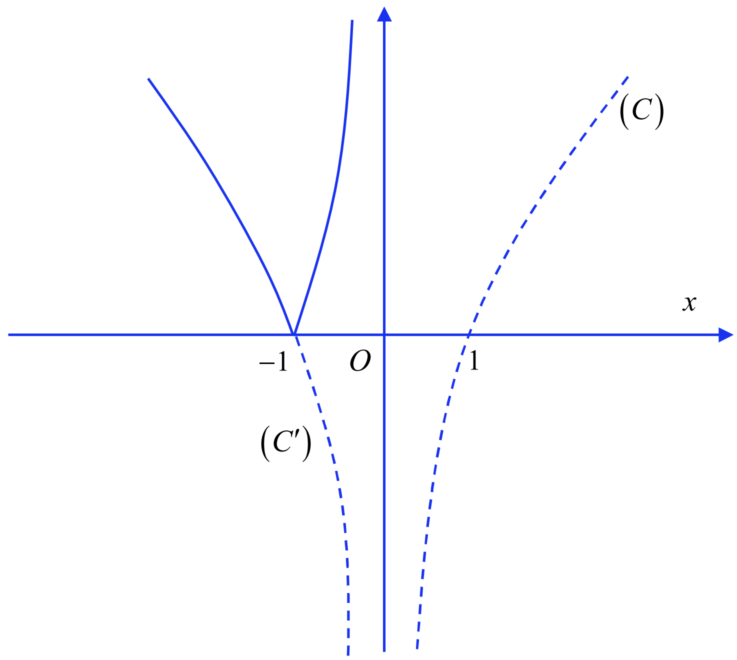
Suy ra $m \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, m là số nguyên trong đoạn $[-2019;2019]$ nên có 2019 số.

Câu 24. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \log_{2018} x$ và (C') là đồ thị hàm số $y = f(x)$, (C') là đối xứng với (C) qua trục tung. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có hàm số $y=\log_{2018} x$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Vì (C') đối xứng với (C) qua trục tung nên hàm số $y=f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Ta có $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & khi \quad f(x)\ge 0 \\ -f(x) & khi \quad f(x)<0 \end{cases}$ nên suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$:

Dựa vào đồ thị $y=|f(x)|$ ta suy ra hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị thực m để hàm số $g(x)=\dfrac{2019^x}{\ln 2019}+\dfrac{6^x}{\ln 6}+\dfrac{m}{2}x^2-2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Duy nhất. **B.** Không tồn tại. **C.** 2019. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2019^x+6^x+mx-2$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(0)=0, \forall m$.

Nếu $m\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} g'(x)=\left(2019^x+6^x-2\right)+mx\ge 0, \forall x\ge 0 \\ g'(x)=\left(2019^x+6^x-2\right)+mx<0, \forall x<0 \end{cases}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow m\ge 0$ (loại).

Nếu $m<0$

Xét $g''(x)=2019^x\ln 2019+6^x\ln 6+m$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2019^x\ln 2019+6^x\ln 6\right)=0\Rightarrow$ phương trình $g''(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$

khi $m<0$ và $g'(x)$ đạt GTNN tại điểm cực tiểu duy nhất tại $x=x_0$.

Do đó, để $g'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì $g'(x_0)\ge 0$.

Mà $g'(0)=0\Rightarrow x_0=0\Rightarrow m=-2019^0\ln 2019-6^0\ln 6$ hay $m=-\ln 2019-\ln 6$.

Do đó có duy nhất một giá trị thực của m thỏa mãn.

Câu 26. Tập các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. $\left[\dfrac{2}{9};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

$y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2\Rightarrow y'=\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}\ge 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3x^2}{1-3x}=g(x),\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Xét $g(x)=\dfrac{3x^2}{1-3x},\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{6x-9x^2}{(1-3x)^2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\dfrac{2}{3}$.

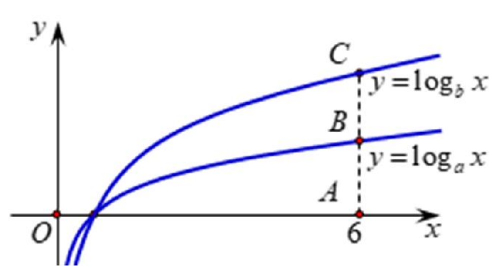
Bảng biến thiên.

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		↗	$-\frac{4}{3}$	↘	

.

Vậy $m\ge-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow m\in\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đường thẳng $x=6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại A,B và C. Nếu $AC=AB\log_2 3$ thì

A. $b^3=a^2$. **B.** $b^2=a^3$. **C.** $\log_3 b=\log_2 a$. **D.** $\log_2 b=\log_3 a$.

Lời giải

Chọn D

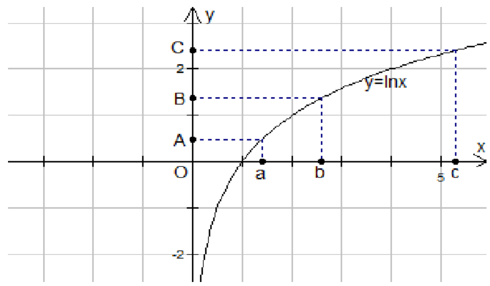
Từ các đồ thị hàm số đã cho trên hình ta có $A(6;0)$, $B(6;\log_a 6)$, $C(6;\log_b 6)$,

$AC=y_C-y_A=\log_b 6$, $AB=y_B-y_A=\log_a 6$.

Vậy $AC=AB\log_2 3 \Leftrightarrow \log_b 6=\log_a 6.\log_2 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_6 b}=\dfrac{1}{\log_6 a}.\dfrac{\log_6 3}{\log_6 2} \Leftrightarrow \dfrac{\log_6 2}{\log_6 b}=\dfrac{\log_6 3}{\log_6 a} \Leftrightarrow \log_2 b=\log_3 a$.

Câu 28. Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+c=2b$. **B.** $ac=b^2$. **C.** $ac=2b^2$. **D.** $ac=b$

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy tọa độ điểm $A(0;\ln a), B(0;\ln b), C(0;\ln c)$

Theo bài ra B là trung điểm của đoạn thẳng AC nên ta có:

$$\begin{cases} x_B=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_B=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=\dfrac{0+0}{2}=0 \\ y_B=\dfrac{\ln a+\ln c}{2}=\ln b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=0 & (1) \\ 2y_B=\ln ac=\ln b^2 & (2)\end{cases}$$

Từ $(2)\Rightarrow ac=b^2$.

Vậy chọn. **B.**

Câu 29. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. -2016. **B.** -2020. **C.** 2016. **D.** 2020.

Lời giải

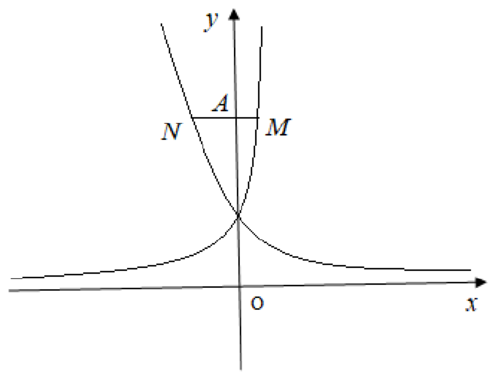
Chọn A

Xét $M\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018};f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Điểm $N\left(-\log_a \frac{1}{2018}; 2-f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right)\right)$ đối xứng với M qua $I(1;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y=a^x$ nên ta có:

$$2-f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right)=a^{-\log_a \frac{1}{2018}} \Rightarrow f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right)=2-a^{\log_a 2018}=2-2018=-2016.$$

Câu 30. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho số thực dương a khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y=4^x, y=a^x$, trục tung lần lượt tại M, N và A thì $AN=2AM$ (hình vẽ bên). Giá trị của a bằng



A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào ĐTHS ta thấy hàm số $y=a^x$ nghịch biến nên $0<a<\frac{1}{2}$.

Mọi đường thẳng $y=m\ (m>0)$ đều cắt các đường $y=4^x, y=a^x$, trục tung lần lượt tại $M(\log_4 m; m), N(\log_a m; m)$ và $A=(0\ ;\ m)$, theo bài ra $AN=2AM \Leftrightarrow |\log_a m|=2|\log_4 m| \Leftrightarrow |\log_a m|=|\log_2 m|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a m=\log_2 m\\ \log_a m=-\log_2 m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_m a=\log_m 2\\ \log_m a=\log_m \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2\\ a=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy $a=\frac{1}{2}$.

Câu 31. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x$, $(0<a\neq 1)$ qua điểm $I(2;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(4-a^{2019}\right)$ bằng

A. 2023. **B.** -2023. **C.** 2017. **D.** -2017.

Lời giải

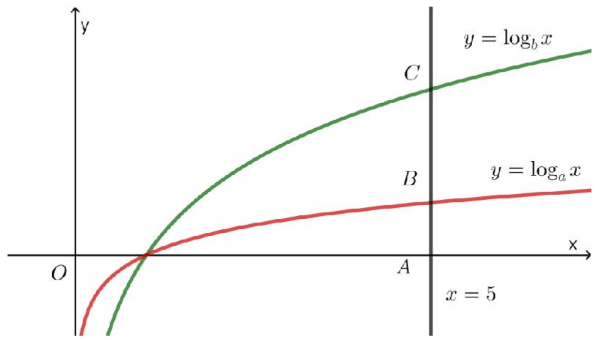
Chọn D

Lấy điểm $A\left(4-a^{2019}; f\left(4-a^{2019}\right)\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và điểm $B(x;\log_a x)$ thuộc đồ thị của hàm số $y=\log_a x$.

Hai điểm A và B đối xứng nhau qua điểm I khi và chỉ khi

$$\begin{cases}4-a^{2019}+x=2.2\\ f\left(4-a^{2019}\right)+\log_a x=2.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a^{2019}\\ f\left(4-a^{2019}\right)+\log_a a^{2019}=2\end{cases}\Rightarrow f\left(4-a^{2019}\right)=-2017.$$

Câu 32. Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại A,B và C. Biết rằng $CB=2AB$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $a=5b$. **B.** $a=b^2$. **C.** $a=b^3$. **D.** $a^3=b$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $A(5;0)$, $B(5;\log_a 5)$, $C(5;\log_b 5)$ và $\log_b 5>\log_a 5>0$.

Do $CB=2AB$ nên ta có $\log_b 5-\log_a 5=2(\log_a 5-0)$.

$\Leftrightarrow \log_b 5=3\log_a 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_5 b}=\dfrac{3}{\log_5 a}$

$\Leftrightarrow \log_5 a=3\log_5 b$

$\Leftrightarrow \log_5 a=\log_5 b^3$

$\Leftrightarrow a=b^3$.

Câu 33. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính giá trị biểu thức $A=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+...+f\left(\dfrac{100}{100}\right)$?

A. 50. **B.** 49. **C.** $\dfrac{149}{3}$. **D.** $\dfrac{301}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hai số dương a và b sao cho $a+b=1$, ta có

$$f(a)+f(b)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^b}{4^b+2}=\frac{4^a\left(4^b+2\right)+4^b\left(4^a+2\right)}{\left(4^a+2\right)\left(4^b+2\right)}$$

$$=\frac{2\left(4^{a+b}+4^a+4^b\right)}{4^{a+b}+2\left(4^a+4^b\right)+4}=\frac{2\left(4+4^a+4^b\right)}{2\left(4+4^a+4^b\right)}=1.$$

Do đó

$$A=\left[f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{100}\right)+f\left(\frac{98}{100}\right)\right]+\ldots+\left[f\left(\frac{49}{100}\right)+f\left(\frac{51}{100}\right)\right]+f\left(\frac{50}{100}\right)+f\left(\frac{100}{100}\right)$$

$$=49+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1\right)=49+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{301}{6}.$$ Vậy $A=\frac{301}{6}$..

Câu 34. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $[-1;1]$. **B.** $(-1;1)$. **<u>C</u>.** $(-\infty;-1]$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

TXĐ: $D=R$. Ta có $y'=\frac{2x}{x^2+1}-m$.

Hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên **R**

khi $y'\ge 0\ \forall x\in R \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}-m\ge 0\ \forall x\in R \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\ge m\ \forall x\in R$.

Xét hàm $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. Ta có $f'(x)=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-1\le f(x)\le 1\ \forall x\in R$.

Từ đó suy ra $m\le -1$.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số sau có tập xác định là $D=\mathbb{R}$?

$$y=x+m+\sqrt{x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4}+\log_2\left(x-m+\sqrt{2x^2+1}\right)$$

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2018. **<u>D</u>.** 2019.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\begin{cases}x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4\ge 0\\ x-m+\sqrt{2x^2+1}>0\end{cases}$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

+) Ta có: $x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4=\left[x+(m+1)\right]^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

+) $x-m+\sqrt{2x^2+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2+1}>m, \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{2x^2+1}$ với $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để $x+\sqrt{2x^2+1}>m, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}>m$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(-2019;2019) \end{cases} \Rightarrow m\in\{-2018,-2017,-2016,...,-1,0\}$.

Kết luận: có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 36. **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m=1 \end{array}\right.$.   **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right.$.   **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m=1 \end{array}\right.$.   **D.** $m<-2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ x\ne e^{m+1} \end{cases}$

Ta có: $y'=\dfrac{\dfrac{m}{x}(\ln x-m-1)-\dfrac{1}{x}(m\ln x-2)}{(\ln x-m-1)^2}=\dfrac{-m^2-m+2}{x(\ln x-m-1)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} -m^2-m+2<0 \\ e^{m+1}\le e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m+1\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m<-2$.

Câu 37. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=2019^{x^3-x^2-mx+1}$ nghịch biến trên $[-1;2]$

A. 2020.   **B.** 2019.   **C.** 2010.   **D.** 2011.

Lời giải

Chọn D

$y'=(3x^2-2x-m).2019^{x^3-x^2-mx+1}.\ln 2019$

Hàm số nghịch biến trên $[-1;2] \Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in[-1;2] \Leftrightarrow 3x^2-2x-m\le 0\ \forall x\in[-1;2]$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x \le m \ \forall x \in [-1;2]$

Đặt $f(x) = 3x^2 - 2x$; $f'(x) = 6x - 2$.

Bảng biến thiên:

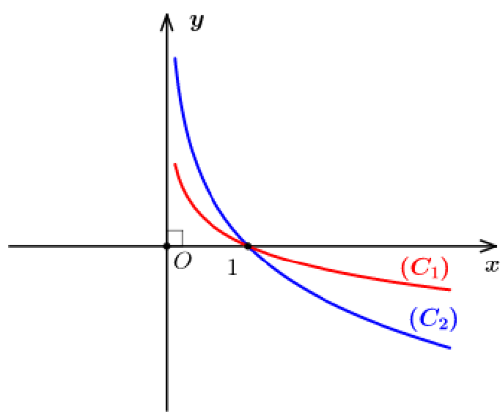
x	-1		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	8

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \le 8 \ \forall x \in [-1;2]$.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow \ m \ge 8$.

Vì m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ nên có 2011 giá trị m thỏa mãn.

Câu 38. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Cho a, b là các số thực dương khác 1, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt là (C_1), (C_2) như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây là đúng

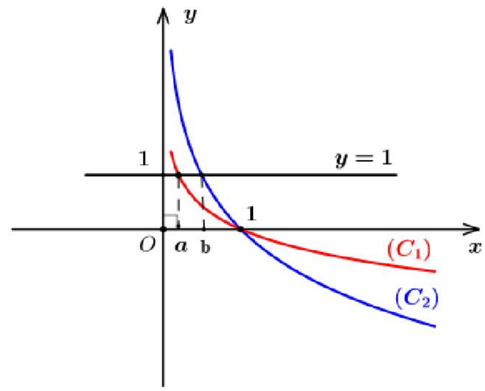
A. $b.e^a < a.e^b$. **B.** $b.e^a > a.e^b$. **C.** $b.e^a = a.e^b$. **D.** $a.e^a < b.e^b$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a x = 1 \Leftrightarrow x = a$ và $\log_b x = 1 \Leftrightarrow x = b$.

Nên kẻ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị (C_1), (C_2) lần lượt tại các điểm có tọa độ $(a;1)$ và $(b;1)$.



Nhìn vào đồ thị ta suy ra $a < b$.

Do a , b, e^a , e^b là các số dương và $e > 1$ nên từ $a < b$ ta suy ra

$$\begin{cases} e^a < e^b \\ a.e^b < b.e^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.e^a < a.e^b \\ a.e^b < b.e^b \end{cases} \Rightarrow a.e^a < b.e^b$$

Dạng 4. Bài toán thực tế

BÀI TOÁN NGÂN HÀNG	
1. Công thức tính lãi đơn	Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức **tiền lãi chỉ được tính dựa vào tiền gốc ban đầu** (tức là tiền lãi của kỳ hạn trước **không gộp vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn kế tiếp**), đây gọi là hình thức **lãi đơn**. Ta có: $\boxed{T = A(1+nr)}$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* **Lưu ý:** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn* ***tính số tiền lời*** *ta lấy* $T - A$.
2. Công thức lãi kép	Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức: **hàng tháng tiền lãi phát sinh sẽ được cộng vào tiền gốc cũ để tạo ra tiền gốc mới** và cứ tính tiếp như thế, đây gọi là hình thức **lãi kép**. Ta có: $\boxed{T = A(1+r)^n}$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* **Lưu ý:** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn* ***tính số tiền lời*** *ta lấy* $T -$ ***A.***
3. Mỗi tháng gởi đúng số tiền giống nhau theo hình thức lãi kép	Nếu đầu mỗi tháng khách hàng luôn gởi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$/tháng thì số tiền họ nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng là: $\boxed{T = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)}$.
4. Gởi tiền vào ngân hàng rồi rút ra hàng tháng số tiền cố định	Nếu khách hàng gởi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Vào ngày ngân hàng tính lãi mỗi tháng thì rút ra X đồng. Số tiền thu được sau n tháng là: $\boxed{T = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}}$
5. Vay vốn và trả góp (tương tự bài toán 4)	Nếu khách hàng vay ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ đúng số tiền X đồng. Số tiền khách hàng còn nợ sau n tháng là: $\boxed{T = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}}$

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 600 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha ?

A. Năm 2028. **B.** Năm 2047. **C.** Năm 2027. **D.** Năm 2046.

Lời giải

Chọn A.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+1$ là $600(1+6\%)^1$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+2$ là $600(1+6\%)^2$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+n$ là $600(1+6\%)^n$.

Ta có $600(1+6\%)^n > 1000 \Leftrightarrow (1+6\%)^n > \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow n > \log_{(1+6\%)}\dfrac{5}{3} \approx 8,76$

Như vậy kể từ năm 2019 thì năm 2028 là năm đầu tiên diện tích rừng trồng mới đạt trên 1000 ha .

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha.

A. 2043. **B.** 2025. **C.** 2024. **D.** 2042.

Lời giải

Chọn B

Ta có sau n năm thì diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là: $1000.(1+0.06)^n$

Khi đó, $1000.(1+0.06)^n > 1400 \Rightarrow 1.06^n > 1.4 \Rightarrow n > 5.774$.

Vậy vào năm 2025 thì diện tích rừng trong mới trong năm đó đạt trên 1400 ha.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2051. **C.** Năm 2030. **D.** Năm 2050.

Lời giải

Chọn C.

Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A=900$ ha.

Trong năm 2020, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A_1 = A + 6\%A = A(1+6\%)$ ha.

Trong năm 2021, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là

$$A_2 = A_1 + 6\%A_1 = A_1(1+6\%) = A(1+6\%)(1+6\%) = A(1+6\%)^2 \text{ ha.}$$

Trong năm 2022, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là

$$A_3 = A_2 + 6\%A_2 = A_2(1+6\%) = A(1+6\%)^2(1+6\%) = A(1+6\%)^3 \text{ ha.}$$

…

Trong năm $2019+n$, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A_n = A(1+6\%)^n$ ha.

Khi đó, diện tích rừng trồng mới đạt trên 1700 ha khi

$A_n > 1700 \Leftrightarrow A(1+6\%)^n > 1700 \Leftrightarrow 900.1,06^n > 1700 \Leftrightarrow 1,06^n > \dfrac{17}{9}$

$\Leftrightarrow n > \log_{1,06}\dfrac{17}{9} \approx 10,9 \Rightarrow n_{\min} = 11.$

Vậy năm 2030 là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800ha$. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên $1400ha$?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2048. **D.** Năm 2049.

Lời giải

Chọn A

Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800ha$. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước nên sau n (năm) diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800.(1+6\%)^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $800.(1+6\%)^n \ge 1400 \Leftrightarrow 1,06^n \ge \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow n \ge \log_{1,06}\dfrac{7}{4} \approx 9,60402$.

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên giá trị nhỏ nhất thỏa mãn là $n = 10$.

Vậy: kể từ sau năm 2019, năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên $1400ha$ là năm 2029.

Câu 5. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Năm 2020 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là $750.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. $677.941.000$ đồng. **B.** $675.000.000$ đồng.
C. $664.382.000$ đồng. **D.** $691.776.000$ đồng.

Lời giải

Chọn A

Giá xe năm 2020 là A

Giá xe năm 2021 là $A_1 = A - A.r = A(1-r)$.

Giá xe năm 2022 là $A_2 = A_1 - A_1.r = A(1-r)^2$.

Giá xe năm 2023 là $A_3 = A_2 - A_2.r = A(1-r)^3$.

Giá xe năm 2024 là $A_4 = A_3 - A_3.r = A(1-r)^4$.

Giá xe năm 2025 là $A_5 = A_4 - A_4.r = A(1-r)^5 = 750.000.000\left(1-\dfrac{2}{100}\right)^5 \approx 677.941.000$ đồng.

Câu 6. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 800.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 708.674.000 đồng. **B.** 737.895.000 đồng. **C.** 723.137.000 đồng. **D.** 720.000.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Giá bán loại xe X năm 2021 là: $800.000.000-800.000.000\times 2\%=800.000.000\times(1-2\%)$

Giá bán loại xe X năm 2022 là: $800.000.000\times(1-2\%)-800.000.000\times(1-2\%)\times 2\%=800.000.000\times(1-2\%)^2$.

Tương tự ta có: giá bán loại xe X năm 2025 sẽ là: $800.000.000\times(1-2\%)^5\approx 723.137.000$ đồng.

Câu 7. **(Đề Tham Khảo 2018)** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

A. $102.16.000$ đồng **B.** $102.017.000$ đồng **C.** $102.424.000$ đồng **D.** $102.423.000$ đồng

Lời giải

Chọn C

Ta có $A_n=A_0(1+r)^n=100.000.000\left(1+\frac{0,4}{100}\right)^6=102.424.128$

Câu 8. **(Mã 104 2018)** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,1\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm **B.** 12 năm **C.** 13 năm **D.** 10 năm

Lời giải

Chọn B

Gọi x số tiền gửi ban đầu.

Theo giả thiết $2x=x\left(1+\frac{6,1}{100}\right)^N\Leftrightarrow 2=\left(1+\frac{6,1}{100}\right)^N$

$\Leftrightarrow 2=\left(1+\frac{6,1}{100}\right)^N\Leftrightarrow N=\log_{(1,061)}2\approx 11,7$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được số tiền thỏa yêu cầu.

Câu 9. Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000đ. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

A. $0,8\,\%$ **B.** $0,6\,\%$ **C.** $0,7\,\%$ **D.** $0,5\,\%$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $A_n=A_0(1+r)^n$ với n là số kỳ hạn, A_0 là số tiền ban đầu, A_n là số tiền có được sau n kỳ hạn, r là lãi suất.

Suy ra $A_9=A_0(1+r)^9\Rightarrow r=\sqrt[9]{\frac{A_9}{A_0}}-1=0,7\%$.

Câu 10. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A. 18 tháng **B.** 16 tháng **C.** 17 tháng **D.** 15 tháng

Lời giải

Chọn B

Sau n tháng, người đó lĩnh được số tiền là: $100.\left(1+0,6\%\right)^{n}$ (triệu đồng).

Sau n tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi)

$\Rightarrow 100.\left(1+0,6\%\right)^{n} \ge 110 \Leftrightarrow n \ge \log_{1+0,6\%}\dfrac{11}{10} \approx 15,9$.

Cu 11. **Một người lần □ầu gửi ṽo ngộn hằng 100 triệu □ồng theo thể thức l̃i kếp (tức l̀ tiền l̃i của kỳ trước □ược cộng ṽo vốn của kỳ kế tiếp) với kì hạn 3 thắng, l̃i suất 2% một quí. Sau □ủng 6 thắng, người □ĩ gửi thốm 100 triệu □ồng với kỳ hạn ṽ l̃i suất như trước □ĩ. Tổng số tiền người □ĩ nhận □ược sau 1 năm gửi tiền ṽo ngộn hằng gần bằng với kết quả ǹo sau □ẩy? Biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền l̃i suất ngộn hằng khơng thay □ổi ṽ người □ĩ khơng ŕt tiền ra.**

A. 212 **triệu □ồng** B. 216 **triệu □ồng** C. 210 **triệu □ồng** D. 220 **triệu □ồng**

Lời giải

Chọn A

Ta cĩ: $r = 2\% = 0,02$

• **Số tiền** 100 **triệu □ồng gửi lần □ầu thì sau 1 năm (4 quí) nhận □ược cả vốn lẫn l̃i l̀:**

$T_1 = 100\left(1+0,02\right)^4 = 108,24$ **triệu □ồng**

• **Số tiền** 100 **triệu □ồng gửi lần thứ hai thì sau 6 thắng (2 quí) nhận □ược cả vốn lẫn l̃i l̀:**

$T_2 = 100\left(1+0,02\right)^2 = 104,04$ **triệu □ồng**

Vậy tổng số tiền nhận được là: $T = T_1 + T_2 = 212,28$ **triệu □ồng.**

Câu 12. **(KTNL Gia Bình 2019)** Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất $8,4\%$ một năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% một năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là: (*làm tròn đến chữ số hàng đơn vị*)

A. 62255910 đồng. **B.** 59895767 đồng. **C.** 59993756 đồng. **C.** 63545193 đồng.

Lời giải

Chọn B

Đợt I, ông An gửi số tiền $P_0 = 50$ triệu, lãi suất $8,4\%$ một năm tức là $2,1\%$ mỗi kỳ hạn. Số tiền cả gốc và lãi ông thu được sau 3 kỳ hạn là: $P_3 = 50000000.\left(1.021\right)^3$.

Đợt II, do ông không rút ra nên số tiền P_3 được xem là số tiền gửi ban đầu của đợt II, lãi suất đợt II là 3% mỗi kỳ hạn. Ông gửi tiếp 12 tháng bằng 4 kỳ hạn nên số tiền thu được cuối cùng là:

$P = P_3\left(1.03\right)^4 = 50000000.\left(1.021\right)^3.\left(1.03\right)^4 \approx 59895767$ đồng.

Câu 13. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Ngày 01 tháng 01năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

A. $800.(1,005)^{11}-72$ (triệu đồng) **B.** $1200-400.(1,005)^{12}$ (triệu đồng)

C. $800.(1,005)^{12}-72$ (triệu đồng) **D.** $1200-400.(1,005)^{11}$ (triệu đồng)

Lời giải

Chọn B

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ ./tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Sô tiền còn lại sau n tháng đươc tính theo công thức:

$$S_n=A(1+r)^n-X\frac{(1+r)^n-1}{r}=800(1,005)^{12}-6.\frac{(1,005)^{12}-1}{0,5\%}=775.3288753=1200-400.(1,005)^{12}$$

Câu 14. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm ngân hàng theo thể thức lãi kép trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là $10\%/1$ năm. Tết năm nay do ông kẹt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?

A. 10 năm **B.** 17 năm **C.** 15 năm **D.** 20 năm

Lời giải

Chọn A

Số tiền ông An tích lũy được gồm cả vốn và lãi là 260 triệu

Công thức tính lãi kép $A_n=A(1+r)^n$

$\Leftrightarrow 260.10^6=100.10^6(1+10\%)^n$

$\Leftrightarrow n=10$

Câu 15. Một học sinh A khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế $200\,000\,000$ VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng B với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $231\,525\,000$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng B là bao nhiêu?

A. 8%/năm. **B.** 7%/năm. **C.** 6%/ năm. **D.** 5%/năm.

Lời giải

Ta có: số tiền nhận được của gốc và lãi là: $200\,000\,000(1+r)^3=231\,525\,000$

$\Leftrightarrow r=5\%$/năm

Câu 16. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Ông Anh gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông An đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay dổi qua các năm ông gửi tiền).

A. $231,815$(triệu đồng). **B.** $197,201$(triệu đồng).

C. $217,695$(triệu đồng). **D.** $190,271$(triệu đồng).

Lời giải

Số tiền ông An nhận được sau 5 năm đầu là: $60(1+8\%)^5=88,160$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được (toàn bộ tiền gốc và tiền lãi) sau 10 năm là:

$(88,16+60)(1+8\%)^5=217,695$ (triệu đồng).

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

A. 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng

Lời giải

Ta có: Số tiền cả lãi lẫn gốc sau 15 tháng gửi: $S_{15}=\frac{T}{r}(1+r)\left[(1+r)^{15}-1\right]$

Vậy: $10.000.000=\frac{T}{0,006}(1+0,006)\left[(1+0,006)^{15}-1\right]\Leftrightarrow T\approx 635.301$

Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó.Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A. $218,64$ triệu đồng. **B.** $208,25$ triệu đồng.

C. $210,45$ triệu đồng. **D.** $209,25$ triệu đồng.

Lời giải

• Số tiền anh Nam nhận được sau 6 tháng (tức 2 quý) là:

$T_1=100\left(1+3^0/_0\right)^2=106,09$ triệu đồng.

• Số tiền anh Nam nhận được sau một năm (tức 2 quý còn lại của năm) là:

$T_2=(106,09+100)\left(1+3^0/_0\right)^2\approx 218,64$ triệu đồng.

Câu 19. **(Chuyên Sơn La 2019)** Ông A gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất $0,5\%$ / tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi, lãi suất ngân hàng không đổi và ông A không rút tiền ra.

A. 36 tháng. **B.** 38 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 40 tháng.

Lời giải

Gọi A là số tiền gửi vào ngân hàng, r là lãi suất, T là số tiền cả gốc lẫn lãi thu được sau n tháng. Ta có $T=A(1+r)^n$.

Theo đề $T=50.(1,005)^n>60\Leftrightarrow n>\log_{1,005}\frac{6}{5}\approx 36,6$.

Vậy sau ít nhất 37 tháng thì ông A thu được số tiền cả gốc lẫn lãi hơn 60 triệu.

Câu 20. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Một người gửi 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 9 năm. **B.** 10 năm. **C.** 11 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là A, lãi suất một kì hạn là m thì số tiền cả gốc và lãi có được sau n kì hạn là $A.(1+m)^n$.

Do đó, số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau n năm là $300.1,07^n$ triệu đồng.

Số tiền cả gốc và lãi nhận được nhiều hơn 600 triệu đồng

$\Leftrightarrow 300.1,07^n > 600 \Leftrightarrow n > \log_{1,07} 2 \approx 10,245$.

Vậy sau ít nhất 11 năm thì người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.

Câu 21. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất $1,85\%$ một quý. Hỏi thời gian tối thiểu bao nhiêu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vỗn lẫn lãi?

A. 16 quý. **B.** 20 quý. **C.** 19 quý. **D.** 15 quý.

Lời giải

Bài toán lãi kép:

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là A, lãi suất một kì hạn là $r\%$ thì số tiền cả gốc và lãi có được sau n kì hạn là $S_n = A.(1+r\%)^n$.

Anh Bảo nhận được số tiền ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn và lãi nên ta có:

$27(1+1,85\%)^n \geq 36 \Leftrightarrow n \geq 15.693$.

Vậy thời gian tối thiểu để anh Bảo nhận được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi là 16 quý.

Câu 22. **(Sở Bắc Giang 2019)** Ông An gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,8%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng ông gửi them vào tài khoản với số tiền 2 triệu đồng. Hỏi sau đúng 2 năm số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông An không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 169.871.000 đồng. **B.** 171.761.000 đồng. **C.** 173.807.000 đồng. **D.** 169.675.000 đồng.

Lời giải

Với 100 triệu ban đầu số tiền cả lãi và gốc thu được sau hai năm là

$T_1 = 100.(1+0,8\%)^{24}.10^6 = 121074524$

Mỗi tháng tiếp theo gửi 2 triệu thì tổng số tiền cả lãi và gốc là

$$T_2 = \frac{2}{0,008}.\left[(1+0,008)^{23} - 1\right].(1+0,008)10^6 = 50686310$$

Vậy tổng số tiền là $T = T_1 + T_2 = 171.761.000$

Câu 23. Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán năm trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bảo nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 810.000.000. **B.** 813.529.000. **C.** 797.258.000. **D.** 830.131.000.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A = 900.000.000, r = \frac{2}{100}$

Năm 2021 giá xe niêm yết là: $T_1 = A - Ar$

Năm 2022 giá xe niêm yết là $T_2 = A - Ar - (A - Ar)r = A(1-r)^2$

.

Năm 2025 giá xe niêm yết là: $T_5 = T_4 - T_4 r = A(1-r)^5$

$$T_5 = 900.000.000\left(1 - \frac{2}{100}\right)^5 \approx 813.529.000$$

Câu 24. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là $850.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. $768.333.000$ đồng. **B.** $765.000.000$ đồng. **C.** $752.966.000$ đồng. **D.** $784.013.000$ đồng.

Lời giải

Chọn A

Giá bán xe năm đầu tiên: $A_1 = 850.000.000$ đồng.

Giá bán xe năm thứ hai: $A_2 = A_1 - A_1.r = A_1\left(1-r\right)$ đồng, với $r = 2\%$.

Giá bán xe năm thứ ba: $A_3 = A_2 - A_2 r = A_2\left(1-r\right) = A_1\left(1-r\right)^2$ đồng.

…

Giá bán xe năm thứ n: $A_n = A_1\left(1-r\right)^{n-1}$ đồng.

Vậy giá bán xe năm thứ 6 là $A_6 = A_1\left(1-r\right)^5 = 850.000.000.\left(1-2\%\right)^5 \approx 768.333.000$ đồng.

Câu 25. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Một ngân hàng X, quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau n năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1+8\%)$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là bao nhiêu để sau ba năm khách hàng đó rút ra được lớn hơn 850 triệu đồng (Kết quả làm tròn đến hàng triệu)?.

A. 675 triệu đồng. **B.** 676 triệu đồng.

C. 677 triệu đồng. **D.** 674 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P(n) = A(1+8\%)^n$.

Sau 3 năm số tiền khách hàng rút về lớn hơn 850 triệu đồng là:

$$850 < A(1+8\%)^3 \Leftrightarrow A > \frac{850}{(1+8\%)^3} \approx 674,8.$$

Vậy số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là 675 triệu đồng.

Câu 26. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Ông tuấn gửi 100 triệu vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nữa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $46,933$ triệu. **B.** $34,480$ triệu. **C.** $81,413$ triệu. **D.** $107,946$ triệu.

Lời giải

Chọn C

Năm năm đầu ông Tuấn có số tiền cả gốc và lãi là $T_1 = 100.\left(1+0.08\right)^5 = 146,933$

Sau khi sửa nhà số tiền còn lại gửi vào ngân hàng trong 5 năm thì số tiền cả gốc và lãi là

$$T_2 = \frac{146,932}{2}\left(1+0.08\right)^5 = 107,946.$$

Số tiền lãi trong 10 năm là $L = \left(146,933-100\right)+\left(107,946-73,466\right) = 81,413$.

Câu 27. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2005 dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng 202.300 người và tỉ lệ tăng dân số là $1,47\%$.

Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn B

Lấy năm 2005 làm mốc, khi đó $A = 202.300$.

Giả sử sau n năm thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người, tức là ta có

$255.000 = 202.300 \cdot e^{\frac{1,47n}{100}} \Leftrightarrow n = 100 \cdot \ln\frac{255000}{202300} \approx 15,75$ năm.

Vậy đến năm 2021 thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người.

Câu 28. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Số ca nhiễm Covid – 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ x trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x) = A.e^{rx}$ trong đó A là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, r là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì r không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tỉnh đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai (kể từ ngày thứ 7 trở đi) tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây nhiễm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?

A. 242. **B.** 16. **C.** 90. **D.** 422.

Lời giải

Chọn A

* Giai đoạn 1:

Ta có: $180 = 9.e^{r6} \Rightarrow r = \frac{1}{6}\ln 20$

* Giai đoạn 2:

Đến ngày thứ 6 số ca mắc bệnh của tỉnh là $f(x) = 180.e^{\frac{r}{10}.6} = 242$

Câu 29. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Anh Việt vay tiền ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất là $0,9\%$ / tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?

A. 65 tháng. **B.** 66 tháng. **C.** 67 tháng. **D.** 68 tháng.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là số tiền vay ngân hàng; r là lãi suất hàng tháng cho số tiền còn nợ; m là số tiền trả nợ hàng tháng; n là thời gian trả hết nợ.

Để trả hết nợ thì $A(1+r)^n - \frac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow 500(1+0,9\%)^n - \frac{10}{0,9\%}\left[(1+0,9\%)^n - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1+0,9\%)^n = \frac{20}{11}$

$\Leftrightarrow n = \log_{(1+0,9\%)}\frac{20}{11} \approx 66,72$

Vậy sau 67 tháng anh Việt trả hết nợ.

Câu 30. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là $95,5$ triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là $1,14\%$. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

A. $94,4$ triệu người. **B.** $85,2$ triệu người. **C.** $86,2$ triệu người. **D.** $83,9$ triệu người.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S = A.e^{ni}$ trong đó: $S = 95,5$ triệu người, $n = 10$ năm, $i = 1,14\%$

Ta có số dân Việt Nam năm 2009 là: $A = \dfrac{S}{e^{ni}} = \dfrac{95,5}{e^{10.1,14\%}} \approx 85,2$ triệu người

Câu 31. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

A. 200. **B.** 190. **C.** 250. **D.** 150.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $P = P_o\left(1+r\right)^n$.

Số tiền ông An có được sau 3 năm là: $P = x\left(1+0,07\right)^3$.

Tiền lãi ông An có được sau 3 năm là: $P - x = x\left(1+0,07\right)^3 - x = x\left(\left(1+0,07\right)^3 - 1\right)$.

Số tiền lãi trên là 45 triệu đồng nên: $x\left(\left(1+0,07\right)^3 - 1\right) = 45 \Leftrightarrow x \simeq 199,96$

Câu 32. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là $93.671.600$ người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

A. $109.256.100$. **B.** $108.374.700$. **C.** $107.500.500$. **D.** $108.311.100$.

Lời giải

Chọn B

Lấy năm 2017 làm mốc, ta có $A = 93.671.600; n = 2035 - 2017 = 18$

$\Rightarrow$ Dân số Việt Nam vào năm 2035 là $S = 93.671.600.e^{18.\frac{0,81}{100}} \approx 108.374.700$

Câu 33. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1+49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

A. 202. **B.** 203. **C.** 206. **D.** 207.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra ta có $\dfrac{1}{1+49e^{-0,015n}} > 0,3$

$\Leftrightarrow 1+49e^{-0,015n} < \dfrac{10}{3}$

$\Leftrightarrow e^{-0,015n} < \dfrac{7}{147}$

$\Leftrightarrow -0,015n < \ln\dfrac{7}{147}$

$\Leftrightarrow n > -\dfrac{1}{0,015}\ln\dfrac{7}{147} \approx 202,97$.

Vậy ít nhất 203 lần quảng cáo.

Câu 34. **(Sở Hà Nội 2019)** Cường độ ánh sáng đi qua môi trường nước biển giảm dần theo công thức $I = I_0 e^{-\mu x}$, với I_0 là cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào môi trường nước biển và x là độ dày của môi trường đó (x tính theo đơn vị mét). Biết rằng môi trường nước biển có hằng số hấp thụ là $\mu = 1,4$. Hỏi ở độ sâu 30 mét thì cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần so với cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào nước biển?

A. e^{-21} lần. **B.** e^{42} lần. **C.** e^{21} lần. **D.** e^{-42} lần

Lời giải:

Khi mới bắt đầu đi vào môi trường nước biển thì $x = 0 \Rightarrow I_1 = I_o.e^o$

Ở độ sâu 30 mét thì $I_2 = I_o.e^{-\mu.30}$

Vậy ta có: $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{I_o.e^{-\mu.30}}{I_o.e^o}$ => $I_2 = e^{-42}.I_1$, vậy I_2 tăng e^{-42} lần so với I_1, nói cách khác, I_2 giảm e^{42} lần so với I_1

Câu 35. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân).

A. 9,1 giờ. **B.** $9,7$ giờ. **C.** $10,9$ giờ. **D.** $11,3$ giờ.

Lời giải

Gọi S là diện tích lá bèo thả ban đầu.

Vì sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó nên sau 12 giờ, tổng diện tích các lá bèo trong chậu là $10^{12}S$.

Theo đề bài: Sau 12 giờ, bèo phủ kín mặt nước trong chậu nên diện tích mặt nước trong chậu là $10^{12}S$. Giả sử sau x giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Ta có: $10^x S = \dfrac{1}{5}.10^{12}S \Leftrightarrow 10^{12-x} = 5 \Leftrightarrow x = 12 - \log 5 \simeq 11,3$.

Vậy sau $11,3$ giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Câu 36. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là $1.038.229$ người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là $1.153.600$ người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm giữ nguyên thì đầu năm 2020 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

A. $(1.281.600;1.281.700)$. **B.** $(1.281.700;1.281.800)$.

C. $(1.281.800;1.281.900)$. **D.** $(1.281.900;1.282.000)$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S = A.e^{Nr}$ từ đầu năm 2010 đến đầu năm 2015 ta có:

$1153600 = 1038229.e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{5}\ln\frac{1153600}{1038229}$.

Đầu năm 2020 dân số của tỉnh Bắc Ninh là $S = 1038229.e^{10.\frac{1}{5}\ln\frac{1153600}{1038229}} \approx 1281792$ người.

Vậy Chọn **B.**

Câu 37. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Anh Dũng đem gửi tiết kiệm số tiền là 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Anh gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $x\%$ một quý. Số tiền còn lại anh gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất $0,25\%$ một tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau một năm số tiền cả gốc và lãi của anh là 416.780.000 đồng. Tính x.

A. $1,2$. **B.** $0,8$. **C.** $0,9$. **D.** $1,5$.

Lời giải

Chọn A

+ Xét bài toán ông B gửi tiết kiệm số tiền A đồng với lãi suất r cho 1 kỳ hạn. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Hỏi sau n kỳ hạn số tiền cả gốc và lãi của ông B là bao nhiêu nếu trong thời gian gửi lãi suất không thay đổi?

- Sau 1 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_1 = A + A.r = A(1+r)$.

- Sau 2 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_2 = T_1 + T_1.r = T_1(1+r) = A(1+r)^2$.

- Tổng quát ông B có số tiền cả gốc và lãi sau n kì hạn là $T_n = A(1+r)^n$ (1).

+ Áp dụng công thức (1) cho bài toán đề cho, gọi S là số tiền cả gốc và lãi anh Dũng có sau một năm gửi, ta có : $S = 250(1+x\%)^4 + 150(1+0,25\%)^{12}$ (triệu đồng).

$S = 416,78$ (triệu đồng) $\Leftrightarrow 250(1+x\%)^4 + 150(1+0,25\%)^{12} = 416,78 \Leftrightarrow x \approx 1,2$.

Vậy $x \approx 1,2$.

Câu 38. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến một chữ số phần thập phân)?

A. 9,1 giờ. **B.** 9,7 giờ. **C.** 10,9 giờ. **D.** 11,3 giờ.

Lời giải

Chọn D

Sau mỗi giờ, lượng lá bèo phủ trên mặt nước là: 10^n $(1 \le n \le 12)$.

$\Rightarrow$ Lượng lá bèo phủ kín mặt nước trong chậu (sau 12 giờ) là:

$$S=1+10+10^2+...+10^{12}=\frac{10^{13}-1}{9}$$

Do đó, lượng lá bèo cần để phủ $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu là $\frac{10^{13}-1}{45}$.

Giả sử sau t giờ, lá bèo phủ kín được $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu, ta có

$$1+10+10^2+...+10^t=\frac{10^{t+1}-1}{9}=\frac{10^{13}-1}{45}$$

$$10^{t+1}=\frac{10^{13}+4}{5}\Leftrightarrow t\approx 11,3.$$

Câu 39. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x lần quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x)=\frac{100}{1+49e^{-0.015x}}$, $x\geq 0$. Hãy tính số lần quảng cáo được phát tối thiểu để số % người xem mua sản phẩm đạt hơn 75%.

A. 323. **B.** 343. **C.** 330. **D.** 333.

Lời giải

Chọn D

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$P(x)=\frac{100}{1+49e^{-0.015x}}>75\Leftrightarrow 1+49e^{-0.015x}<\frac{4}{3}\Leftrightarrow e^{-0.015x}<\frac{1}{147}$$

$$\Leftrightarrow -0.015x<\ln\left(\frac{1}{147}\right)\Leftrightarrow x>\frac{\ln\left(\frac{1}{147}\right)}{-0.015}\approx 332.7$$

Vậy số lần quảng cáo tối tiểu là 333 lần.

Câu 40. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (so với mặt nước biển)(đo bằng mét) theo công thức $P=P_0.e^{xi}$, trong đó $P_0=760\,\text{mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển $(x=0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000\,\text{m}$ thì áp suất của không khí là $672,71\,\text{mmHg}$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3343\,\text{m}$ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $505,45\,\text{mmHg}$. **B.** $530,23\,\text{mmHg}$. **C.** $485,36\,\text{mmHg}$. **D.** $495,34\,\text{mmHg}$.

Lời giải

Chọn A

Ở độ cao $x_1=1000\,\text{m}$ thì áp suất không khí $P_1=672,71\,\text{mmHg}$. Suy ra

$$P_1=P_0.e^{x_1 i}\Leftrightarrow x_1 i=\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\Leftrightarrow i=\frac{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{x_1}=-1,22.10^{-4}.$$

Áp suất không khí P_2 ở độ cao $x_2=3343\,\text{m}$ là: $P_2=P_0.e^{x_2 i}=760.e^{3343.(-1.22.10^{-4})}=505,46\,\text{mmHg}$.

Câu 41. Số lượng loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con.

A. 7 phút. **B.** 12 phút. **C.** 48 phút. **D.** 8 phút.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có: $s(3)=625000 \Leftrightarrow s(0).2^3=625000 \Leftrightarrow s(0)=78125$.

Số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con khi

$$s(t)=20000000 \Leftrightarrow s(0).2^t=20000000 \Leftrightarrow 2^t=\frac{20000000}{s(0)}=\frac{20000000}{78125}=256 \Leftrightarrow t=8.$$

Vậy, sau 8 phút thì số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con.

NHỮNG CÂU HỎI KHÓ HƠN VỀ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m=\frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng) **B.** $m=\frac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng)

C. $m=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng) **D.** $m=\frac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng)

Lời giải

Chọn C

Theo đề ta có: ông A trả hết tiền sau 3 tháng vậy ông A hoàn nợ 3 lần

Với lãi suất 12%/năm suy ra lãi suất một tháng là 1%

Hoàn nợ lần 1:

-Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là : $100.0,01+100=100.1,01$ (triệu đồng)

- Số tiền dư : $100.1,01-m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 2:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi)

là : $(100.1,01-m).0,01+(100.1,01-m)=(100.1,01-m).1,01=100.(1,01)^2-1,01.m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^2-1,01.m-m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 3:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là :

$\left[100.(1,01)^2-1,01.m-m\right].1,01=100.(1,01)^3-(1,01)^2m-1,01m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^3-(1,01)^2m-1,01m-m$ (triệu đồng)

$$\Rightarrow 100.(1,01)^3-(1,01)^2m-1,01m-m=0 \Leftrightarrow m=\frac{100.(1,01)^3}{(1,01)^2+1,01+1}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{100.(1,01)^3.(1,01-1)}{\left[(1,01)^2+1,01+1\right].(1,01-1)}=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$$ (triệu đồng).

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2019)** Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng năm năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngâng hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngâng hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $2,20$ triệu đồng **B.** $2,22$ triệu đồng **C.** $3,03$ triệu đồng **D.** $2,25$ triệu đồng

Lời giải

Chọn B

Ta xây dựng bài toán tổng quát như sau

Gọi số tiền người đó vay ngâng hàng là V_0 triệu đồng

Số tiền hàng tháng người đó phải trả là a triệu đồng

Lãi suất là r %/ tháng

Vậy số tiền nợ ngân hàng sau tháng thứ nhất là $V_0\left(1+0,0r\right)$

Số tiền người đó còn nợ ngân hàng sau khi trả tiền tháng 1 là

$T_1=V_0\left(1+0,0r\right)-a$

Số tiền người đó còn nợ ngân hàng sau khi trả tiền tháng 2 là

$T_2=T_1\left(1+0,0r\right)-a$

$=\left[V_o\left(1+0,0r\right)-a\right]\left(1+0,0r\right)-a$

$=V_o\left(1+0,0r\right)^2-a\left(1+0,0r\right)-a$

Số tiền người đó còn nợ ngâng hàng sau tháng thứ n là

$T_n=V_o\left(1+0,0r\right)^n-a\left(1+0,0r\right)^{n-1}-...-a\left(1+0,0r\right)-a$

Vì sau n tháng thì trả hết tiền nên ta có

$T_n=0\Leftrightarrow V_o\left(1+0,0r\right)^n-a\left(1+0,0r\right)^{n-1}-...-a\left(1+0,0r\right)-a=0$

$\Leftrightarrow V_o\left(1+0,0r\right)^n=a\left[\left(1+0,0r\right)^{n-1}+...+\left(1+0,0r\right)+1\right]$

$$\Leftrightarrow V_o\left(1+0,0r\right)^n=a\frac{\left(1+0,0r\right)^n-1}{\left(1+0,0r\right)-1}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{V_o.0,0r.\left(1+0,0r\right)^n}{\left(1+0,0r\right)^n-1}$$

Áp dụng

$$a=\frac{100.0,01\left(1,01^{60}\right)}{1,01^{60}-1}\approx 2,224444768$$

Câu 3. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là $0,6\%$ mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong qua trình gửi.

A. 31 tháng. **B.** 40 tháng. **C.** 35 tháng. **D.** 30 tháng.

Lời giải

Chọn A

+ Đặt $a=1+r$ và M. Trong đó M là số tiền góp vào hàng tháng, r là lãi suất hàng tháng.

Tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ nhất là: $T_1=M+M.r=M.a$.

Tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ hai là: $T_2=M.a+M+\left(M.a+M\right)r=Ma^2+Ma$

…

Tương tự tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ n là:

$$T_n = Ma^n + Ma^{n-1} + ... + Ma = Ma\left(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1\right) = Ma.\frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{M}{r}(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]$$

+ Sau tháng thứ n anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là $0,6\%$ mỗi tháng và nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu, khi đó ta có:

$$\frac{3}{0,6\%}\left[(1+0,6\%)^n - 1\right](1+0,6\%) > 100 \Leftrightarrow n > 30,3$$

Vậy sau ít nhất 31 tháng thì anh A mới có được số tiền nhiều hơn 100 triệu.

Câu 4. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Một người vay tiền ở một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,7\%$ / tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Mỗi tháng người đó đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Biết rằng đúng 25 tháng thì người đó trả hết gốc và lãi cho ngân hàng. Hỏi số tiền của người đó trả cho ngân hàng ở mỗi tháng gần nhất với số nào sau đây?

A. 43.730.000 đồng. **B.** 43.720.000 đồng.
C. 43.750.000 đồng. **D.** 43.740.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là số tiền vay ban đầu.

Gọi A là số tiền mà hàng tháng người đó trả cho ngân hàng.

Sau tháng 1 dư nợ còn lại là: $M.1,007 - A$

Sau tháng 2 dư nợ còn lại là: $(M.1,007 - A).1,007 - A = M.1,007^2 - A.1,007 - A$

Sau tháng 3 dư nợ còn lại là:

$$(M.1,007^2 - A.1,007 - A).1,007 - A = M.1,007^3 - A.\left[(1,007)^2 + 1,007 + 1\right].$$

Sau tháng thứ n dư nợ còn lại là: $M.1,007^n - A.\left[(1,007)^{n-1} + 1,007^{n-2} + ... + 1,007 + 1\right]$.

Vì đúng 25 tháng thì trả hết nợ nên:

$$1.1,007^{25} - A.\left[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + ... + 1,007 + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1,007^{25} = A.\left[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + ... + 1,007 + 1\right] \Leftrightarrow 1,007^{25} = A.\frac{1,007^{25} - 1}{0,007}.$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1,007^{25}.0,007}{1,007^{25} - 1} \approx 0,04374151341 \text{ tỉ đồng} \approx 43.741.513 \text{ đồng} \approx 43.740.000 \text{ đồng}.$$

Câu 5. **(Sở Bình Phước - 2020)** Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2020 với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 40% lương. Anh ta dự định mua một căn hộ chung cư giá rẻ có giá trị tại thời điểm 1/1/2020 là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị căn hộ tăng thêm 5%. Với a bằng bao nhiêu thì sau đúng 10 năm anh ta mua được căn hộ đó, biết rằng mức lương và mức tăng giá trị ngôi nhà là không đổi (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 11.487.000 đồng. **B.** 14.517.000 đồng. **C.** 55.033.000 đồng. **D.** 21.776.000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $P = P_o(1+r)^n$.

Ta được giá trị ngôi nhà sau 10 năm là: $P = 10^9(1+0,05)^5 = 10^9.(1,05)^5$.

Sau khi chi tiêu hàng tháng thì số tiền Người sinh viên còn lại của mỗi tháng là 60% lương. Trong hai năm 2020 - 2021, Người sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a$.

Trong hai năm 2022 - 2023, anh sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a\left(1+0,1\right)$.

Trong hai năm 2024 - 2025, anh sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^2$.

Trong hai năm 2026 - 2027, anh sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^3$.

Trong hai năm 2028 - 2029, anh sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^4$.

Tổng số tiền anh sinh viên có được sau 10 năm là:

$$24\times 0,6a+24\times 0,6a\left(1+0,1\right)+24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^2+24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^3+24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^4$$

$$=24\times 0,6a\left[1+\left(1+0,1\right)+\left(1+0,1\right)^2+\left(1+0,1\right)^3+\left(1+0,1\right)^4\right]$$

$$=24\times 0,6a\times\frac{1-\left(1+0,1\right)^5}{1-\left(1+0,1\right)}=24\times 0,6a\frac{0,61051}{0,1}=87,91344\times a$$

Số tiền trên bằng giá trị của ngôi nhà sau 10 năm:

$10^9.\left(1,05\right)^5=87,91344\times a\Leftrightarrow a\simeq 14.517.000$

Câu 6. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là $0,7\%$/ tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tháng là n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Đặt $a=5$, $q=1,007$. Đến lần nộp tiền thứ n:

Khoản tiền a đầu tiên trở thành $a.q^{n-1}$. Khoản tiền a thứ hai trở thành $a.q^{n-2}$. … Giả sử khoản tiền cuối cùng vẫn là a thì tổng số tiền đã trả cả vốn lẫn lãi là $a.\frac{q^n-1}{q-1}=5.\frac{1,007^n-1}{0,007}$.

Số tiền 100 triệu đồng với lãi suất là $0,7\%$/ tháng, sau n tháng, sẽ trở thành $100.\,1,007^n$.

Ta có phương trình $5.\frac{1,007^n-1}{0,007}=100.1,007^n\Leftrightarrow n\approx 21,6$.

Theo đề bài, tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu đồng nên số tháng phải làm tròn là 22 tháng.

Câu 7. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) COVID19** là một loại bệnh viêm đường hô hấp cấp do chủng mới của virus corona (nCoV) bắt nguồn từ Trung Quốc (đầu tháng 12/2019) gây ra với tốc độ truyền bệnh rất nhanh (tính đến 7/4/2020 đã có 1 360 039 người nhiễm bệnh). Giả sử ban đầu có 1 người bị nhiễm bệnh và cứ sau 1 ngày sẽ lây sang 4 người khác. Tất cả những người nhiễm bệnh lại tiếp tục lây sang những người khác với tốc độ như trên (1 người lây 4 người). Hỏi sau 7 ngày sẽ có tổng cộng bao nhiêu người nhiễm bệnh? (Biết rằng những người nhiễm bệnh không phát hiện bản thân bị bệnh và không phòng tránh cách li, do trong thời gian ủ bệnh vẫn lây bệnh sang người khác).

A. 77760 người. **B.** 16384 người. **C.** 62500 người. **D.** 78125 người.

Lời giải

Chọn D

Sau 1 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $1+4=5$ người.

Sau 2 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $\left(1+4\right)+\left(1+4\right).4=\left(1+4\right)^2$ người.

Sau 3 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^2+(1+4)^2.4=(1+4)^3$ người.

$\Rightarrow$ Sau 7 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^7=78125$ người.

Ngoài ra chúng ta có thể áp dụng công thức lãi kép để tính nhanh:

$S_n=A(1+r)^n=1.(1+4)^7=78125$, với $A=1$, $r=4$, $n=7$.

Câu 8. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Ông A có số tiền 100000000 đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép, có hai loại kì hạn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất 12%/năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1%/tháng. Ông A muốn gửi 10 năm. Theo anh chị, kết luận nào sau đây đúng (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 16186000 đồng sau 10 năm.

B. Cả hai loại kì hạn đều có cùng số tiền như nhau sau 10 năm.

C. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 19454000 đồng sau 10 năm.

D. Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 15584000 đồng sau 10 năm.

Lời giải

Chọn C

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 12 tháng là:

$$T_1=T_0.(1+r_1)^{n_1}=10^8.1,12^{10}\approx 310585000 \text{ (đồng)}.$$

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 1 tháng là

$$T_2=T_0.(1+r_2)^{n_2}=10^8.1,01^{120}\approx 330039000 \text{ (đồng)}.$$

Như vậy, sau 10 năm, gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là:

$$T=T_2-T_1=330039000-310585000=19454000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 9. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Một người vay vốn ở ngân hàng với số tiền 50 triệu đồng, thời hạn 50 tháng với lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ trả đúng ngày quy định. Hỏi hàng tháng người đó phải trả đều đặn vào ngân hàng một khoản tiền là bao nhiêu để đến cuối tháng thứ 50 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng (làm tròn đến trăm đồng) ?

A. 1.018.500 đồng. **B.** 1.320.800 đồng. **C.** 1.320.500 đồng. **D.** 1.771.300 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi N là số tiền vay ban đầu, r là lãi suất theo tháng, A là số tiền phải trả hàng tháng, ta có:

+ Số dư nợ sau 1 tháng là: $N+Nr-A=N(1+r)-A$.

+ Số dư nợ sau 2 tháng là: $N(1+r)-A+\left[N(1+r)-A\right]r-A=N(1+r)^2-\frac{A}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$.

+ Số dư nợ sau 3 tháng là: $N(1+r)^3-\frac{A}{r}\left[(1+r)^3-1\right]$.

…

+ Số dư nợ sau n tháng là: $N(1+r)^n-\frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$.

Giả sử sau n tháng thì dư nợ bằng 0, ta có $N(1+r)^n-\frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right]=0\Leftrightarrow A=\frac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}$.

Áp dụng với $N=50.000.000$ đồng, $\text{r}=1,15\%$ và $n=50$ tháng ta có: $A\approx 1.320.500$ đồng.

Câu 10. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85%/tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết rằng phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (Tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

A. 68 **B.** 66 **C.** 65 **D.** 67

Lời giải

Chọn B

Giả sử anh An vay số tiền là A với lãi suất r trên tháng và trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là x. Anh An sau các tháng còn nợ ngân hàng với số tiền là:

Tháng thứ 1: $A(1+r)-x$

Tháng thứ 2: $\left[A(1+r)-x\right](1+r)-x=A(1+r)^2-\left[1+(1+r)\right]x=A(1+r)^2-x.\dfrac{(1+r)^2-1}{r}$

Tháng thứ 3 : $A(1+r)^3-x.\dfrac{(1+r)^3-1}{r}$

…

Tháng thứ n: $A(1+r)^n-x.\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$

Áp dụng công thức ta có: $A=500;r=0,0085;x=10$ và sau n tháng trả hết nợ ta có:

$$500.(1+0,0085)^n-10.\frac{(1+0,0085)^n-1}{0,0085}=0$$

$$\Leftrightarrow 50.(1,0085)^n=\frac{(1,0085)^n-1}{0,0085}\Leftrightarrow (1,0085)^n=\frac{40}{23}\Leftrightarrow n=\log_{1,0085}\frac{40}{23}\approx 65,4$$

Câu 11. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Ông Chính gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ 2 trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông Chính không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 1.686.898.000 VNĐ. **B.** 743.585.000 VNĐ.

C. 739.163.000 VNĐ. **D.** 1.335.967.000 VNĐ.

Lời giải

Gọi $a=200$ triệu; $b=20$ triệu; $\alpha=7\%$.

Số tiền sau 1 năm: $a(1+\alpha)$.

Số tiền sau 2 năm: $a(1+\alpha)^2+b(1+\alpha)$.

Số tiền sau 3 năm: $a(1+\alpha)^3+b(1+\alpha)^2+b(1+\alpha)$.

……………………

Số tiền sau 18 năm: $a(1+\alpha)^{18}+b\left[(1+\alpha)^{17}+(1+\alpha)^{16}+...+(1+\alpha)\right]$

$$=a(1+\alpha)^{18}+b\left[(1+\alpha).\frac{(1+\alpha)^{17}-1}{\alpha}\right]$$

Vậy số tiền ông Chính nhận sau 18 năm là: $1.335.967.000$ VNĐ.

Câu 12. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một người gửi tiết kiệm số tiền $80\,000\,000$ đồng với lãi suất $6,9\%$ / năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

A. $105\,370\,000$ đồng **B.** $111\,680\,000$ đồng **C.** $107\,667\,000$ đồng **D.** $116\,570\,000$ đồng

Lời giải

Gọi P_0 là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất / năm.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ nhất: $P_1 = P_0 + P_0.r = P_0(1+r)$.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ hai: $P_2 = P_1 + P_1.r = P_0(1+r)^2$.

….

Số tiền gốc và lãi người đó rút ra được sau 5 năm là

$P_5 = P_0.(1+r)^5 = 80\,000\,000.(1+6,9\%)^5 \approx 111\,680\,799$ (đồng).

Câu 13. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết sau 15 tháng, người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

A. 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng

Lời giải

Chọn C

Số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng đầu tiên là $T(1+0,006)^{15} = T.1,006^{15}$.

Số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng thứ 2 là $T(1+0,006)^{14} = T.1,006^{14}$.

Cứ như vậy, số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng thứ 14 là $T(1+0,006) = T.1,006$.

Vậy tổng số tiền nhận được sau 15 tháng là:

$$T(1,006^{15} + 1,006^{14} + ... + 1,006^2 + 1,006) = T.1,006.\frac{1,006^{15}-1}{0,006}.$$

Theo giả thiết có: $10000000 = T.1,006.\dfrac{1,006^{15}-1}{0,006} \Rightarrow T \simeq 635301,46$.

Câu 14. Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là $7\%/1$ năm (tính từ ngày 01/01 đến ngày 31/12) và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

A. $130\ 650\ 280$ (đồng). **B.** $130\ 650\ 000$ (đồng).

C. $139\ 795\ 799$ (đồng). **D.** $139\ 795\ 800$ (đồng).

Lời giải

Chọn A

Gọi T_0 là số tiền người đó gửi vào ngân hàng vào ngày 01/01 hàng năm, T_n là tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được ở cuối năm thứ n, với $n \in \mathbb{N}^*$, r là lãi suất ngân hàng mỗi năm.

Ta có: $T_1 = T_0 + rT_0 = T_0(1+r)$.

Đầu năm thứ 2, người đó có tổng số tiền là:

$$T_0(1+r) + T_0 = T_0\left[(1+r)+1\right] = \frac{T_0}{\left[(1+r)-1\right]}\left[(1+r)^2 - 1\right] = \frac{T_0}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right].$$

Do đó: $T_2=\frac{T_0}{r}.\left[(1+r)^2-1\right]+\frac{T_0}{r}.\left[(1+r)^2-1\right].r=\frac{T_0}{r}.\left[\left(1+r^2\right)-1\right](1+r)$.

……

Ta có: $T_n=\frac{T_0}{r}.\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$.

Áp dụng vào bài toán, ta có: $10^9=\frac{T_0}{0,07}.\left[(1+0,07)^6-1\right](1+0,07)\Rightarrow T_0\approx 130\ 650\ 280$ đồng.

Câu 15. **(THPT Ba Đình 2019)** Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là $0,7\%$/tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

A. 22. **B.** 23. **C.** 24. **D.** 21.

Lời giải

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn nợ ngân hàng là $M+Mr=M(1+r)$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ nhất, số tiền còn nợ là $M(1+r)-m$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ hai, số tiền còn nợ là

$M(1+r)-m+\left[M(1+r)-m\right]r-m=M(1+r)^2-m(1+r)-m$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ ba, số tiền còn nợ là

$M(1+r)^2-m(1+r)-m+\left[M(1+r)^2-m(1+r)-m\right]r-m$

$=M(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)-m$ (triệu đồng).

Lập luận tương tự, sau khi hoàn nợ lần thứ n, số tiền còn nợ là

$$M(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-m(1+r)^{n-2}-...-m(1+r)-m=M(1+r)^n-\frac{m\left[(1+r)^{n-1}-1\right]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n-\frac{m\left[(1+r)^{n-1}-1\right]}{r}=0\Leftrightarrow m=\frac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

$$\Leftrightarrow m=(m-Mr)(1+r)^n \Leftrightarrow (1+r)^n=\frac{m}{m-Mr} \Leftrightarrow n=\log_{(1+r)}\left(\frac{m}{m-Mr}\right)$$

Thay số với $M=100.000.000$, $r=0,7\%$, $m=5.000.000$ ta tính được $n\approx 21,62$ (tháng).

Vậy sau 22 tháng người đó trả hết nợ ngân hàng.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Vào ngày 15 hàng tháng ông An đều đến gửi tiết kiệm tại ngân hàng SHB số tiền 5 triệu đồng theo hình thức lãi kép với kì hạn một tháng, lãi suất tiết kiệm không đổi trong suốt quá trình gửi là $7,2\%$/năm. Hỏi sau đúng 3 năm kể từ ngày bắt đầu gửi ông An thu được số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng)?.

A. 195251000 (đồng) **B.** 201453000 (đồng) **C.** 195252000 (đồng) **D.** 201452000 (đồng)

Lời giải

Gọi T_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau n tháng, a là số tiền gốc, r là lãi xuất, ta có:

Cuối tháng thứ 1 ông An có số tiền là: $T_1=a(1+r)$

Đầu tháng thứ 2 ông An có số tiền là: $T_2=a(1+r)+a$

Cuối tháng thứ 2 ông An có số tiền là: $T_2 = a(1+r)+a+\left(a(1+r)+a\right)r = a(1+r)+a(1+r)^2$

……………………………………………………………

Cuối tháng thứ n ông An có số tiền là:: $T_n = a(1+r)+a(1+r)^2+...+a(1+r)^n$

$$= a\left((1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^n\right) = a.\frac{(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{1+r-1} = \frac{a(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{r}(1).$$

Với kì hạn một tháng, suy ra 3 năm có 36 kỳ. Lãi xuất của một năm là $7,2\%$, suy ra lãi xuất của 1 tháng là: $\frac{7,2}{12}\% = 0.6\%$. Áp dụng (1) ta có: $a = 5000000; r = 0.6\% = 0.072; n = 36$

$$=> T_{36} = \frac{5000000(1+0.6\%)\left((1+0.6\%)^{36}-1\right)}{0.6\%} \approx 201453000$$

Câu 17. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Anh Bình gửi 200 triệu vào ngân hàng VB với kì hạn cố định 12 tháng và hưởng lãi suất $0,65\%$/ tháng. Tuy nhiên sau khi gửi được tròn 8 tháng anh phải dùng đến 200 triệu trên. Anh đến ngân hàng định rút tiền thì được nhân viên ngân hàng tư vấn: “Nếu rút tiền trước kì hạn, toàn bộ số tiền anh gửi chỉ có lãi suất không kỳ hạn là $0,02\%$/ thángAnh nên thế chấp sổ tiết kiệm đó tại ngân hàng để vay ngân hàng 200 triệu với lãi suất $0,7\%$/ tháng. Khi sổ của anh đến kì hạn, anh có thể rút tiền để trả nợ ngân hàng”. Nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng anh Bình sẽ đỡ thiệt một số tiền gần nhất với con số nào dưới đây (biết ngân hàng tính lãi theo thể thức lãi kép).

A. $10,85$ triệu đồng. **B.** $10,51$ triệu đồng. **C.** $10,03$ triệu đồng. **D.** $10,19$ triệu đồng.

Lời giải

Số tiền trả cho ngân hàng nếu vay 200 triệu trong 4 tháng

$N = 200.(1+0,7\%)^4 - 200 \approx 5,65907$

Tổng số tiền lãi nếu anh Bình gửi đúng kì hạn là

$L_1 = 200.(1+0,65\%)^{12} - 200 \approx 16,16996$

Số tiền lãi nếu anh Bình làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng

$L = 16,16996 - 5,65907 = 10,51089.$

Số tiền lãi nếu gửi 8 tháng theo hình thức lãi suất không kì hạn

$L_2 = 200.(1+0,02\%)^8 - 200 \approx 0,32022.$

Số tiền anh Bình đỡ thiệt nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng

$16,16996 - 5,65907 - 0,32022 \approx 10,19067.$

Câu 18. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một thầy giáo cứ đầu mỗi tháng lại gửi ngân hàng 8 000 000 VNĐ với lãi suất $0,5\%$/ tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng thầy giáo có thể tiết kiệm tiền để mua được một chiếc xe ô tô trị giá

400 000 000 VNĐ?

A. 60. **B.** 50. **C.** 55. **D.** 45.

Lời giải

Đặt $T = 8\ 000\ 000$

Số tiền thầy giáo thu được sau tháng thứ nhất, thứ 2, thứ 3,., thứ n lần lượt là $T_1,\ T_2,\ T_3,...,\ T_n$

Ta có:

$T_1 = T(1+r)$

$T_2 = [T_1 + T](1+r) = T(1+r)^2 + T(1+r)$

$T_3 = [T_2 + T](1+r) = T(1+r)^3 + T(1+r)^2 + T(1+r)$

.

$T_n = T(1+r)^n + T(1+r)^{n-1} + ... + T(1+r) = T(1+r) \times \dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Theo bài ra ta có $T_n = 400\ 000\ 000 \Leftrightarrow T(1+r) \times \dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 400\ 000\ 000$

$\Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{251}{201} \Leftrightarrow n = \log_{1.005} \dfrac{251}{201} \approx 44,54$

Vậy sau 45 tháng thầy giáo sẽ mua được một chiếc xe ô tô trị giá 400 000 000 VNĐ.

Câu 19. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Một người vay ngân hàng số tiền 400 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 10 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 1% mỗi tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Biết lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi, hỏi số tiền còn phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn).

A. $2.921.000$. **B.** $3.387.000$. **C.** $2.944.000$. **D.** $7.084.000$.

Lời giải

Cuối tháng thứ nhất, tiền gốc và lãi là $400 \cdot 1,01$ triệu đồng. Sau khi trả 10 triệu thì số tiền người đó còn nợ ngân hàng là $(400 \cdot 1,01 - 10)$ triệu đồng.

Cuối tháng thứ hai, tiền gốc và lãi là: $(400 \cdot 1,01^2 - 10 \cdot 1,01)$ triệu đồng. Sau khi trả 10 triệu thì số tiền người đó còn nợ ngân hàng là $(400 \cdot 1,01^2 - 10 \cdot 1,01 - 10)$ triệu đồng.

Như vậy ở cuối tháng thứ $n(n \geq 1)$ người đó nếu còn nợ thì số tiền nợ là:

$(400 \cdot 1,01^n - 10 \cdot 1,01^{n-1} - 10 \cdot 1,01^{n-2} - \ldots - 10)$ triệu đồng.

Xét $400 \cdot 1,01^n - 10 \cdot 1,01^{n-1} - 10 \cdot 1,01^{n-2} - \ldots - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 400 \cdot 1,01^n - 10 \cdot \dfrac{1,01^n - 1}{0,01} = 0 \Leftrightarrow 600 \cdot 1,01^n = 1000 \Leftrightarrow n = \log_{1,01} \dfrac{5}{3} \simeq 51,33$

Do vậy kỳ cuối cùng người đó phải trả tiền là tháng thứ 52. Cuối tháng thứ 51, số tiền còn nợ lại là $400 \cdot 1,01^{51} - 10 \cdot \dfrac{1,01^{51} - 1}{0,01} \simeq 3,3531596$ triệu đồng.

Vậy kỳ cuối người đó phải trả số tiền là $3,3531596 \cdot 1,01 = 3,386647$ triệu đồng $\simeq 3387000$ đồng.

Câu 20. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,5\%/$ tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền (tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi ông ta rút hết tiền sau bao nhiêu tháng?

A. 139. **B.** 140. **C.** 100. **D.** 138.

Lời giải

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là A (triệu đồng), lãi suất gửi ngân hàng một tháng là r, S_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Sau 1 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$S_1 = A(1+r)-1$.

Sau 2 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$S_2 = \left[A(1+r)-1\right](1+r)-1 = A(1+r)^2-(1+r)-1$.

…

Sau n tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_n = A(1+r)^n-(1+r)^{n-1}-(1+r)^{n-2}-\cdots-(1+r)-1 = A(1+r)^n-\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Giả sử sau n tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có

$$S_n = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^n-\frac{(1+r)^n-1}{r}=0 \Leftrightarrow (1+r)^n(Ar-1)+1=0$$

$$\Leftrightarrow n=\log_{(1+r)}\frac{1}{1-Ar} \Leftrightarrow n=-\log_{(1+r)}(1-Ar).$$

Câu 21. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên 1 tháng (chuyển vào tài khoản ngân hàng của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2019 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi 1% trên 1 tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2019 mẹ đi rút toàn số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? *(kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).*

A. 50970000 đồng. **B.** 50560000 đồng. **C.** 50670000 đồng. **D.** 50730000 đồng.

Lời giải

Gọi sô tiền mẹ gửi vào ngân hàng vào đầu tháng hàng tháng là A đồng.

Số tiền mẹ lĩnh vào đầu tháng 12 là T đồng.

Lãi suất hàng tháng mẹ gửi tại ngân hàng là $r\,\%$.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 nên thời gian được tính lãi suất là 11 tháng.

Ta có:

+) Đầu tháng 1 mẹ gửi vào A đồng.

$\Rightarrow$ cuối tháng 1 số tiền của mẹ là: $A+Ar=A(1+r)$ đồng.

+) Đầu tháng 2 số tiền của mẹ gửi vào là: $A+A(1+r)$ đồng.

$\Rightarrow$ cuối tháng 2 số tiền của mẹ là: $\left[A+A(1+r)\right](1+r)=A(1+r)+A(1+r)^2$ đồng.

+) Đầu tháng 3 số tiền mẹ gửi vào là: $A+A(1+r)+A(1+r)^2$.

$\Rightarrow$ cuối tháng 3 số tiền của mẹ

là: $\left[A+A(1+r)+A(1+r)^2\right](1+r)=A(1+r)+A(1+r)^2+A(1+r)^3$.

Cứ như vậy đến cuối tháng thứ 11 số tiền của mẹ là:

$A(1+r)+A(1+r)^2+...+A(1+r)^{11}=A\left[(1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^{11}\right]=T_1$.

Ta thấy $\left[(1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^{11}\right]$ là tổng của 1 cấp số nhân với $u_1=1+r, \mathrm{n}=11, \mathrm{q}=1+r$.

$\Rightarrow T_1 = A\dfrac{u_1\left(1-q^{11}\right)}{1-q}$. Ta có:

$A = 4000000$

$r = 1\% = 0.01$

$\Rightarrow T_1 \approx 46730000$ đồng.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 $\Rightarrow T = T_1 + 4000000 = 50730000$ đồng.

Câu 22. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Bạn **H** trúng tuyển vào trường Đại học Ngoại Thương nhưng vì do không đủ tiền nộp học phí nên **H** quyết định vay ngân hàng trong bốn năm mỗi năm 4 triệu đồng để nộp học phí với lãi suất ưu đãi 3%/năm (theo thể thức lãi suất kép) biết rằng tiền vay mỗi năm **H** nhận được từ ngày đầu tiên của năm học và trong suốt bốn năm học **H** không trả tiền cho ngân hàng. Ngay sau khi tốt nghiệp Đại học (tròn 4 năm kể từ khi bạn **H** bắt đầu vay ngân hàng) bạn **H** thực hiện trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền (không đổi và tiền trả vào ngày cuối của tháng) với lãi suất theo cách tính mới là 0,25%/tháng và lãi suất được tính theo dư nợ thực tế, bạn **H** trả đúng 5 năm thì hết nợ. Tính số tiền hàng tháng mà bạn **H** phải trả cho ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 323.582 (đồng). **B.** 398.402 (đồng). **C.** 309.718 (đồng. **D.** 312.518 (đồng).

Lời giải

Xét bài toán 1: Vay nhận vốn định kì lãi suất kép.

Gọi A là số tiền mỗi năm bạn **H** vay ngân hàng, r_1 là lãi suất theo năm.

Cuối năm thứ nhất, **H** nợ ngân hàng với số tiền là $A.(1+r_1)$.

Đầu năm thứ hai, **H** nợ ngân hàng với số tiền là $A + A.(1+r_1)$.

Cuối năm thứ hai, **H** nợ ngân hàng với số tiền là

$$A + A.(1+r_1) + \left[A + A(1+r_1)\right]r_1 = A(1+r_1) + A(1+r_1)^2.$$

Tiếp tục như vậy, cuối năm thứ n số tiền mà **H** nợ ngân hàng là:

$$B = A(1+r_1) + A(1+r_1)^2 + ... + A(1+r_1)^n = \frac{A(1+r_1)\left[(1+r_1)^n - 1\right]}{r_1}.$$

Xét bài toán 2: Vay trả góp, lãi suất dư nợ thực tế.

Gọi a là số tiền mà bạn **H** phải trả hàng tháng sau khi ra trường, r_2 là lãi suất mỗi tháng, số tiền **H** nợ ngân hàng là ***B***.

Cuối tháng thứ nhất bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B + B.r_2 - a = B.(1+r_2) - a.$$

Cuối tháng thứ hai bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B.(1+r_2) - a + \left[B.(1+r_2) - a\right]r_2 - a = B.(1+r_2)^2 - \left[a + a(1+r_2)\right].$$

Cứ tiếp tục như vậy ta có công thức tổng quát.

Cuối tháng thứ m bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là

$$B.(1+r_2)^m - \left[a + (1+r_2)a + (1+r_2)^2 a + ... + (1+r_2)^{m-1} a\right]$$

$$= B.(1+r_2)^m - a\frac{(1+r_2)^m - 1}{r_2}.$$

Áp dụng 2 bài toán trên vào câu 42, ta có phương trình.

$$\frac{4.1,03\left[1,03^4-1\right]}{0,03}1,0025^{60}-a.\frac{1,0025^{60}-1}{0,0025}=0\Leftrightarrow a\approx 0,309718 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy số tiền mà **H** cần phải trả hàng tháng là 309.718 triệu đồng.

Câu 23. **(Sở Phú Thọ 2019)** Ông A muốn mua một chiếc ôtô trị giá 1 tỉ đồng nhưng vì chưa đủ tiền nên chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12% /năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm, kể từ ngày mua xe, ông trả hết nợ, biết kì trả nợ đầu tiên sau ngày mua ôtô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

A. 23 537 000 đồng **B.** 24 443 000 đồng **C.** 22 703 000 đồng **D.** 23 573 000 đồng

Lời giải

Chọn A

Gọi a là số tiền trả hàng tháng.

Sau tháng thứ 1, số tiền còn lại: $P_1=500(1+r)-a$.

Sau tháng thứ 2, số tiền còn lại: $P_2=P_1(1+r)-a=500(1+r)^2-a(1+r)-a$.

.

Sau tháng thứ n, số tiền còn lại: $P_n=500(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-...-a(1+r)-a$.

Vậy sau 24 tháng: $500(1+r)^{24}-a\dfrac{(1+r)^{24}-1}{r}=0\Leftrightarrow a=\dfrac{500(1+r)^{24}.r}{(1+r)^{24}-1}$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{500(1+1\%)^{24}.1\%}{(1+1\%)^{24}-1}\approx 23,537$ triệu đồng.

Câu 24. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Một người vay ngân hàng 50 triệu đồng, mỗi tháng trả ngân hàng 4 triệu đồng và phải trả lãi suất cho số tiền còn nợ là 1,1% một tháng theo hình thức lãi kép. Giả sử sau n tháng người đó trả hết nợ. Khi đó n gần nhất với số nào sau?

A. 14. **B.** 13. **C.** 16. **D.** 15.

Lời giải

Phương pháp:Sử dụng công thức trả góp $P(1+r)^n=\dfrac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$, trong đó:

P: là số tiền phải trả sau n tháng

r: Lãi suất/ tháng

M: số tiền phải trả mỗi tháng

Áp dụng công thức ta có:

$$P(1+r)^n=\frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$$

$$\Leftrightarrow 50(1+1,1\%)^n=\frac{4}{1,1\%}\left[(1+1,1\%)^n-1\right]$$

$$\Leftrightarrow 50(1+1,1\%)^n=\frac{4}{1,1\%}(1+1,1\%)^n-\frac{4}{1,1\%}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1,1\%}=\frac{3450}{11}(1+1,1\%)^n$$

$$\Leftrightarrow (1+1,1\%)^n=\frac{80}{69}\Rightarrow n=\log_{1+1,8}\frac{80}{69}\approx 13,52$$

Câu 25. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% /tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và sau đúng một năm kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng tổng số tiền 50 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 4,95 triệu đồng **B.** 4,42 triệu đồng **C.** 4,5 triệu đồng **D.** 4,94 triệu đồng

Lời giải

Gọi X là số tiền mỗi tháng ông A trả cho ngân hàng.

Số tiền còn nợ sau n kì hạn là $T_n = T.(1+r)^n - X.\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$ (triệu đồng), trong đó $T = 100$ (triệu đồng) là số tiền mà ông A vay.

Sau đúng một năm, số tiền ông còn nợ là 50 triệu đồng nên ta có

$$50 = 100.(1+0,01)^{12} - X.\frac{(1+0,01)^{12} - 1}{0,01} \Leftrightarrow X = \frac{(100.1,01^{12} - 50).0,01}{1,01^{12} - 1} \approx 4,94 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền 4,94 triệu đồng.

Câu 26. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với mức lương khởi điểm của mỗi tháng trong ba năm đầu tiên là 6 triệu đồng/ tháng. Tính từ ngày đầu làm việc, cứ sau đúng ba năm liên tiếp thì tăng lương 10% so với mức lương một tháng người đó đang hưởng. Nếu tính theo hợp đồng thì tháng đầu tiên của năm thứ 16 người đó nhận được mức lương là bao nhiêu?

A. $6.1,1^4$ (triệu đồng). **B.** $6.1,1^6$ (triệu đồng).

C. $6.1,1^5$ (triệu đồng). **D.** $6.1,1^{16}$ (triệu đồng).

Lời giải

Sau 3 năm, bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 4 số tiền lương người đó nhận được sau mỗi tháng là $6 + 6.10\% = 6.1,1$ (triệu đồng).

Sau 6 năm (2.3 năm), bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 7 số tiền lương người đó nhận được sau mỗi tháng là $6.1,1 + 6.1,1.10\% = 6.1,1.(1+10\%) = 6.1,1^2$ (triệu đồng).

Tương tự như vậy sau 15 năm (5.3 năm), bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 16 số tiền người đó nhận được sau mỗi tháng là $6.1,1^5$ (triệu đồng).

Vậy tháng đầu tiên của năm thứ 16, người đó nhận được mức lương là $6.1,1^5$ (triệu đồng).

Câu 27. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 14 năm.

Lời giải

Dạng toán lãi kép:

Bài toán tổng quát: gửi a đồng vào ngân hàng với lãi suất $r\%$ (sau mỗi kì hạn không rút tiền lãi ra).

Gọi A_n là số tiền có được sau n năm.

Sau 1 năm: $A_1 = a + r\%.a = a(1+r\%)$.

Sau 2 năm: $A_2 = a(1+r\%) + a(1+r\%).r\% = a(1+r\%)^2$.

Sau 3 năm: $A_3 = a(1+r\%)^2 + a(1+r\%)^2.r\% = a(1+r\%)^3$.

Sau n năm: $A_n = a(1+r\%)^n$.

Người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu. Suy ra:

$50(1+6\%)^n > 100$

$\Leftrightarrow 50.1,06^n > 100$

$\Leftrightarrow 1,06^n > 2$

$\Leftrightarrow n > \log_{1,06} 2 = 11,9$

Vậy $n = 12$.

Câu 28. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ 2019)** Anh C đi làm với mức lương khởi điểm là x (triệu đồng)/ tháng, và số tiền lương này được nhận vào ngày đầu tháng. Vì làm việc chăm chỉ và có trách nhiệm nên sau 36 tháng kể từ ngày đi làm, anh C được tăng lương thêm 10%. Mỗi tháng, anh ta giữ lại 20% số tiền lương để gửi tiết kiệm ngân hàng với kì hạn 1 tháng và lãi suất là $0,5\%$/tháng, theo hình thức lãi kép (tức tiền lãi của tháng này được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo). Sau 48 tháng kể từ ngày đi làm, anh C nhận được số tiền cả gốc và lãi là 100 triệu đồng. Hỏi mức lương khởi điểm của người đó là bao nhiêu?

A. 8.991.504 đồng. **B.** 9.991.504 đồng. **C.** 8.981.504 đồng. **D.** 9.881.505 đồng.

Lời giải

Gọi số tiền mỗi tháng anh gửi tiết kiệm ngân hàng trong 36 tháng đầu là A; số tiền mỗi tháng anh gửi tiết kiệm sau tháng thứ 36 là B.

Đặt $q = 1 + 0,5\% = 1,005$

Gọi S_n là số tiền sau tháng thứ n ta có

$S_1 = A + A.0,5\% = A.q$

$S_2 = (S_1 + A) + (S_1 + A).0,5\% = (S_1 + A).q = Aq^2 + Aq$.

….

$S_{36} = (S_{35} + A) + (S_{35} + A).0,5\% = (S_{35} + A).q = Aq^{36} + Aq^{35} + \ldots + Aq = Aq.\dfrac{q^{36}-1}{q-1}$.

$S_{37} = (S_{36} + B) + (S_{36} + B).0,5\% = (S_{36} + B).q = S_{36}.q + B.q$.

$S_{38} = (S_{37} + B) + (S_{37} + B).0,5\% = (S_{37} + B).q = S_{36}q^2 + Bq^2 + Bq$.

….

$S_{48} = S_{36}.q^{12} + Bq^{12} + Bq^{11} + \ldots + Bq = Aq^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1} + Bq.\dfrac{q^{12}-1}{q-1}$.

Theo giả thiết ta có $A = 20\%x = 0,2x$; $B = 20\%(x + 10\%x) = 0,22x$; $S_{48} = 10^8$.

Vậy

$0,2xq^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1} + 0,22x.q.\dfrac{q^{12}-1}{q-1} = 10^8 \Leftrightarrow x = 10^8 : \left(0,2q^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1} + 0,22.q.\dfrac{q^{12}-1}{q-1}\right) \Leftrightarrow x \approx 8991504$ đồng.

Câu 29. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Bạn Nam vừa trúng tuyển đại học, vì hoàn cảnh gia đình khó khăn nên được ngân hàng cho vay vốn trong 4 năm học đại học, mỗi năm 10 triệu đồng vào đầu năm học để nạp học phí với lãi suất $7,8\%$/năm (mỗi lần vay cách nhau đúng 1 năm). Sau khi tốt nghiệp đại học đúng 1 tháng, hàng tháng Nam phải trả góp cho ngân hàng số tiền là m đồng/tháng với lãi suất $0,7\%$/tháng trong vòng 4 năm. Số tiền m mỗi tháng Nam cần trả cho ngân hàng gần nhất với số nào sau đây (ngân hàng tính lãi trên số dư nợ thực tế).

A. 1.468.000 (đồng). **B.** 1.398.000 (đồng). **C.** 1.191.000 (đồng). **D.** 1.027.000 (đồng).

Lời giải

Bài toán được chia làm hai giai đoạn

*** Giai đoạn 1:** vay vốn để học đại học trong 4 năm. Đặt $r=\frac{7,8}{100}=0,078$

Ở năm thứ nhất: $M_1=10(1+r)^4$ (triệu đồng)

Ở năm thứ hai: $M_2=10(1+r)^3$ (triệu đồng)

Ở năm thứ ba: $M_3=10(1+r)^2$ (triệu đồng)

Ở năm thứ tư: $M_4=10(1+r)^1$ (triệu đồng)

Như vậy tổng số tiền mà Nam đã vay trong 4 năm là $M_0=\sum_{i=1}^{4}M_i\approx 48,4324$ (triệu đồng)

*** Giai đoạn 2:** trả góp cho ngân hàng số tiền đã vay hàng tháng

Sau tháng thứ nhất, người đó còn số nợ là: $P_1=M_o\left(1+\frac{0,7}{100}\right)-m$. Đặt $y=1+\frac{0,7}{100}$

Sau tháng thứ hai người đó còn nợ:

$$P_2=P_1y-m=\left(M_oy-m\right)y-m=M_oy^2-m(y+1)=M_ay^2-m\frac{y^2-1}{y-1}$$

Sau tháng thứ ba người đó còn nợ:

$$P_3=P_2y-m=M_oy^3-m\left(y^2+y+1\right)=M_oy^3-m\frac{y^3-1}{y-1}$$

Bằng phương pháp quy nạp, sau n tháng số tiền trả hết sẽ là

$$M_oy^n-m\frac{y^n-1}{y-1}=0\Rightarrow m=\frac{M_oy^n(y-1)}{y^n-1}$$

Đồng thời ta có: $n=48$ tháng và $y=1+\frac{0,7}{100}=1,007$ suy ra $m\approx 1,914$ (triệu đồng).

Câu 30. **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Một anh sinh viên nhập học đại học vào tháng 8 năm 2014. Bắt đầu từ tháng 9 năm 2014, cứ vào ngày mồng một hàng tháng anh vay ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất cố định $0,8\%$/tháng. Lãi tháng trước được cộng vào số nợ để tiếp tục tính lãi cho tháng tiếp theo (lãi kép). Vào ngày mồng một hàng tháng kể từ tháng $9/2016$ về sau anh không vay ngân hàng nữa và anh còn trả được cho ngân hàng 2 triệu đồng do việc làm thêm. Hỏi ngay sau khi kết thúc ngày anh ra trường $\left(30/6/2018\right)$ anh còn nợ ngân hàng bao nhiêu tiền (làm tròn đến hàng nghìn đồng)?

A. 49.024.000 đồng **B.** 47.401.000 đồng **C.** 47.024.000 đồng **D.** 45.401.000 đồng

Lời giải

Chọn

Anh sinh viên vay hàng tháng $a=3$ triệu đồng từ $9/2014$ đến $8/2016$, tổng cộng 24 tháng.

Cuối tháng thứ 1: $T_1=a+ar=a\left(1+r\right)$

Cuối tháng thứ 2: $T_2=T_1+a+\left(T_1+a\right).r=a.\left(1+r\right)^2+a.\left(1+r\right)$

….

Cuối tháng n: $T_n = a.(1+r)^n + a.(1+r)^{n-1} + ... + a.(1+r)$

Suy ra $T_n = a.(1+r).\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Vậy tổng số tiền vay đến cuối tháng 8/2016 là $T_{24} = 3.(1+0,8\%).\dfrac{(1+0,8\%)^{24} - 1}{0,8\%} = 79,662$ triệu

Tính từ cuối tháng 8/2016 Anh sinh viên thiếu ngân hàng $A = 79,662$ và bắt đầu trả đầu hàng tháng $m = 2$ triệu từ $9/2016$ đến $6/2018$, tổng cộng được 22 tháng

Đầu tháng $9/2016$: còn nợ $A - m = 79,662 - 2 = 77,662$ triệu

Cuối tháng $9/2016$: tiền nợ có lãi đến cuối tháng: $T_1 = 77,662(r+1)$

Đầu tháng $10/2016$ sau khi trả nợ m thì còn nợ $77,662(r+1) - m$

Cuối tháng $10/2016$: còn nợ $T_2 = \left[(77,662)(r+1) - m\right](1+r) = 77,662(1+r)^2 - m(1+r)$

Cuối tháng $11/2016$: còn nợ $T_3 = 77,662(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r)$

....

Cuối tháng $6/2018$ còn nợ

$T_{22} = 77,662(1+r)^{22} - m(1+r)^{21} - m(1+r)^{20} - ... - m(1+r)$

$= 77,662(1+r)^{22} - m.(1+r)\dfrac{(1+r)^{21} - 1}{r}$

$= 77,662.(1+0,8\%)^{22} - 2.(1+0,8\%).\dfrac{(1+0,8\%)^{21} - 1}{0,8\%} = 46,64$ triệu đồng.