TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Nguyên hàm của hàm ẩn hoặc liên quan đến phương trình f(x),f'(x),f''(x)

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=[u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)\Leftrightarrow[u(x)f(x)]'=h(x)$

Suy ra $u(x)f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta duợc $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

Suy ra $e^x\cdot f(x)=\int e^x\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)-f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế vói e^{-x} ta duợc $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x}\cdot f(x)=\int e^{-x}\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=h(x)$

(Phương trình vi phân tuyên tinh cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+p(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot f(x)=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right]'=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot[f(x)]^n=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}=-p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1}=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ dầy ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$ **B.** $-\frac{1}{40}$ **C.** $-\frac{41}{400}$ **D.** $-\frac{1}{10}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow-\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-4x^3\Rightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=-x^4+C$

Do $f(2)=-\frac{1}{25}$, nên ta có $C=-9$. Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^4+9}\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{10}$.

Câu 2. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2=f(x).e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(9;10)$. **C.** $(11;12)$. **D.** $(13;14)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0)=2$ nên $f'(x)\geq 0$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;+\infty)$.

Từ giả thiết $\left(f'(x)\right)^2=f(x).e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra $f'(x)=\sqrt{f(x)}.e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x\in[0;+\infty)$.

Do đó, $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x\in[0;+\infty)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)}=e^{\frac{x}{2}}+C$, $\forall x\in[0;+\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0)=2$, ta được $C=\sqrt{2}-1$.

Từ đó, tính được $f(2)=\left(e+\sqrt{2}-1\right)^2\approx 9,81$.

Câu 3. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=x^3f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int x^3dx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=\frac{x^4}{4}+C$.

Mà $f(2)=-\frac{4}{19}\Rightarrow\frac{19}{4}=\frac{16}{4}+C\Rightarrow C=\frac{3}{4}$. Suy ra $f(x)=-\frac{4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1)=-1$.

Câu 4. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ (a, $b\in\mathbb{Q}$). Giá trị $2\left(a^2+b^2\right)$ là

A. $\frac{27}{4}$. **<u>B</u>.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Chia cả hai vế của biểu thức $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}.$$

Vậy $\frac{x}{x+1}.f(x)=\int\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C$.

Do $f(1)=-2\ln 2$ nên ta có $\frac{1}{2}.f(1)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow -\ln 2=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.

Khi đó $f(x)=\frac{x+1}{x}\left(x-\ln|x+1|-1\right)$.

Vậy ta có $f(2)=\frac{3}{2}(2-\ln 3-1)=\frac{3}{2}(1-\ln 3)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3\Rightarrow a=\frac{3}{2}, b=-\frac{3}{2}$.

Suy ra $2\left(a^2+b^2\right)=2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]=9$.

Câu 5. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)<0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)+...+f(2020)$ bằng

<u>A</u>. $-\frac{2020}{2021}$. **B.** $-\frac{2015}{2019}$. **C.** $-\frac{2019}{2020}$. **D.** $-\frac{2016}{2021}$.

Lời giải

<u>Chọn A</u>

Ta có:

$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C$.

Mà $f(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

$$\begin{cases} f(1)=\frac{1}{2}-1 \\ f(2)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \\ f(3)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2020)=\frac{1}{2021}-\frac{1}{2020} \end{cases} \Rightarrow f(1)+f(2)+....+f(2020)=-1+\frac{1}{2021}=-\frac{2020}{2021}.$$

Câu 6. **(Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\frac{-3}{16}$. **B.** $T=\frac{21}{16}$. **C.** $T=\frac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$

$$\Leftrightarrow f'(x)+\frac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f'(x)+\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'=\frac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x)=\int\frac{x^2}{x+1}dx \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c\right).$$

Ta có $f(1)=2\ln 2+1 \Leftrightarrow c=1$.

Từ đó $f(x)=\frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+1\right)$, $f(2)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ln 3$. Nên $\begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=\frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $T=a^2-b=-\frac{3}{16}$.

Câu 7. **(THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Cho hs $y=f(x)$ thỏa mãn $y'=xy^2$ và $f(-1)=1$ thì giá trị $f(2)$ là

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** $e+1$. **D.** e^3.

Lời giải

Ta có $y'=xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y}=x^2 \Rightarrow \int\frac{y'}{y}dx=\int x^2dx \Leftrightarrow \ln y=\frac{x^3}{3}+C \Leftrightarrow y=e^{\frac{x^3}{3}+C}$.

Theo giả thiết $f(-1)=1$ nên $e^{-\frac{1}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=\frac{1}{3}$.

Vậy $y=f\left(x\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}}$. Do đó $f\left(2\right)=\mathrm{e}^3$.

Câu 8. **(Sở Hà Nội Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f\left(x\right)\neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f\left(1\right)=-\frac{1}{2}$, $f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)f^2\left(x\right)$ .Biết $f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2019\right)=\frac{a}{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{N},\left(a,b\right)=1$ .Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $a-b=2019$. **B.** $ab>2019$. **C.** $2a+b=2022$. **D.** $b\leq 2020$.

Lời giải

$f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)f^2\left(x\right)\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}dx=\int\left(2x+1\right)dx$

$\Rightarrow\int\frac{d\left(f\left(x\right)\right)}{f^2\left(x\right)}=\int\left(2x+1\right)dx$

$\Rightarrow-\frac{1}{f\left(x\right)}=x^2+x+C$ $\left(1\right)$ (Với C là hằng số thực).

Thay $x=1$ vào $\left(1\right)$ được $2+C=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow C=0$ .Vậy $f\left(x\right)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

$T=f(1)+f(2)+...+f(2019)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}\right)=-1+\frac{1}{2020}$.

Suy ra: $\begin{cases}a=1\\b=2020\end{cases}\Rightarrow a-b=-2019$ (Chọn đáp số sai).

Câu 9. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $2xf'\left(x\right)+f\left(x\right)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f\left(1\right)=\frac{1}{2}$. Tính $f\left(4\right)$?

A. 24. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ ta có: $2xf'\left(x\right)+f\left(x\right)=3x^2\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}f'\left(x\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}x^2$.

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}.f\left(x\right)\right)'=\frac{3}{2}x^2\Rightarrow\int\left(\sqrt{x}.f\left(x\right)\right)'dx=\int\frac{3}{2}x^2dx$.

$\Rightarrow\sqrt{x}.f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^3+C$. $\left(*\right)$

Mà $f\left(1\right)=\frac{1}{2}$ nên từ $\left(*\right)$ có: $\sqrt{1}.f\left(1\right)=\frac{1}{2}.1^3+C\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{x^2\sqrt{x}}{2}$.

Vậy $f\left(4\right)=\frac{4^2\sqrt{4}}{2}=16$.

Câu 10. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f\left(0\right)=1$ và $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}.f'\left(x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f\left(x\right)<2$ **B.** $2<f\left(x\right)<4$ **C.** $f\left(x\right)>6$ **D.** $4<f\left(x\right)<6$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow \int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln\left(f(x)\right)=2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f(0)=1$ nên $C=-2\Rightarrow f(x)=e^{2\sqrt{x+1}-2}\Rightarrow f(3)=e^2>6$

Câu 11. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3,\forall x\in[2;4], f(2)=\dfrac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\dfrac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]$ $\Rightarrow f(x)\ge f(2)$ mà $f(2)=\dfrac{7}{4}$. Do đó: $f(x)>0,\forall x\in[2;4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3\Leftrightarrow x^3\left[4f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3$

$\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{4f(x)+1}=f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=x$.

Suy ra: $\int\dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\int\dfrac{\mathrm{d}\left[4f(x)+1\right]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=\dfrac{x^2}{2}+C\Leftrightarrow \dfrac{3}{8}\sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}=\dfrac{x^2}{2}+C$.

$f(2)=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}=2+C\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy: $f(x)=\dfrac{\sqrt{\left[\dfrac{4}{3}\left(x^2-1\right)\right]^3}-1}{4}\Rightarrow f(4)=\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. **B.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** e. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải

$f(x)+f'(x)=x$ (1).

Nhân 2 vế của (1) với e^x ta được $\mathrm{e}^x.f(x)+\mathrm{e}^x.f'(x)=x.\mathrm{e}^x$.

Hay $\left[\mathrm{e}^x.f(x)\right]'=x.\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{e}^x.f(x)=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Xét $I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow v=\mathrm{e}^x\end{cases}$.

$I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$. Suy ra $\mathrm{e}^xf(x)=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=1$ nên $C=2\Rightarrow f(x)=\dfrac{x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x}\Rightarrow f(1)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Câu 13. **(THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$. **B.** $f^2(2)=2\ln 2+2$.

C. $f^2(2)=\ln 2+1$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

Lời giải

Ta có: $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$; $x>0$

$$\Leftrightarrow x^2.\left[f'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+\frac{1}{x^2}=1-f(x).f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]'=1-\frac{1}{x^2}$$

Do đó: $\int\left[f(x).f'(x)\right]'.dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx\Rightarrow f(x).f'(x)=x+\frac{1}{x}+c_1$.

Vì $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow 1=2+c_1\Leftrightarrow c_1=-1$.

Nên $\int f(x).f'(x).dx=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).dx \Leftrightarrow \int f(x).d\left(f(x)\right)=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).dx$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+c_2$. Vì $f(1)=1\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1+c_2\Leftrightarrow c_2=1$.

Vậy $\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+1\Rightarrow f^2(2)=2\ln 2+2$.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x,\quad \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$

A. $\frac{43}{30}$ **B.** $\frac{16}{15}$ **C.** $\frac{43}{15}$ **D.** $\frac{26}{15}$

Lời giải

Có $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x\Leftrightarrow(f(x).f'(x))'=x^3-2x$

$$\Leftrightarrow f(x).f'(x)=\int(x^3-2x)dx=\frac{1}{4}x^4-x^2+C$$

Từ $f(0)=f'(0)=1$. Suy ra $C=1$. Vậy $f(x).f'(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+1$

Tiếp, có $2f(x).f'(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2\Leftrightarrow(f^2(x))'=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=\int(\frac{1}{2}x^4-2x^2+2)dx=\frac{1}{10}x^5-\frac{2}{3}x^3+2x+C$$

Từ $f(0)=1$. Suy ra $C=1$. Vậy $f^2(x)=\frac{1}{10}x^5-\frac{2}{3}x^3+2x+1$.

Do đó $T=\frac{43}{15}$

Câu 15. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\frac{14}{9}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{7}{9}$ **D.** $-\frac{4}{9}$

Lời giải

Chọn D

$f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow \cos x.f(x)+\sin x.f'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$.

$\Leftrightarrow\left[\sin x.f(x)\right]'=\frac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\int\left[\sin x.f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\Rightarrow \sin x.f(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

Tính $I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$. Khi đó

$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x=x\tan x+\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x=x\tan x+\ln|\cos x|$.

Suy ra $f(x)=\frac{x.\tan x+\ln|\cos x|}{\sin x}=\frac{x}{\cos x}+\frac{\ln|\cos x|}{\sin x}$.

$a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3$. Suy ra $\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}$.

Vậy $P=a+b=-\frac{4}{9}$.

Câu 16. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{4}{9}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1).f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8)=49$. **B.** $f(8)=256$. **C.** $f(8)=\frac{1}{16}$. **D.** $f(8)=\frac{49}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có với $\forall x\in(0;+\infty)$ thì $y=f(x)>0$; $x+1>0$.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

Do đó $\left[f'(x)\right]^2=(x+1)f(x)\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{(x+1)}$.

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{(x+1)}\mathrm{d}x\ \Rightarrow\sqrt{f(x)}=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$.

Vì $f(3)=\dfrac{4}{9}$ nên $C=\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{3}=-2$.

Suy ra $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\right)^2$, suy ra $f(8)=49$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $\left(x^2+1\right)^2f'(x)=\left[f(x)\right]^2\left(x^2-1\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$ **B.** $-\dfrac{2}{5}$ **C.** $-\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{5}{2}$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có: $f'(x)=\left[f(x)\right]^2.\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ với mọi $x\in(1;2]$.

Do đó $f(x)\ge f(1)=1>0$ với mọi $x\in[1;2]$.

Xét với mọi $x\in[1;2]$ ta có:

$$\left(x^2+1\right)f'(x)=\left[f(x)\right]^2\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+C.$$

Mà $f(1)=1\Rightarrow1=1+C\Leftrightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}\Rightarrow f(2)=\dfrac{5}{2}$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+1)f^2(x)=0$, $f(x)>0,\ \forall x>0$ và $f(2)=\dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=f(1)+f(2)+...+f(2019)$.

A. $\dfrac{2021}{2020}$. **B.** $\dfrac{2020}{2019}$. **C.** $\dfrac{2019}{2020}$. **D.** $\dfrac{2018}{2019}$.

Lời giải

TH1: $f(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$ trái giả thiết.

TH2: $f(x)\neq 0 \Rightarrow f'(x)=-(2x+1).f^2(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+1).\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\text{d}x=-\int(2x+1)\text{d}x$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)}=-(x^2+x+C)$.

Ta có: $f(2)=\dfrac{1}{6} \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+.....-\dfrac{1}{2020}=\dfrac{2019}{2020}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

A. $2\sqrt[3]{42}$. **B.** $2\sqrt[3]{15}$. **C.** $\sqrt[3]{42}$. **D.** $\sqrt[3]{15}$.

Lời giải

Ta có: $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$ (*)

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$\int (f(x))^2.f'(x)dx=\int(3x^2+4x+2)dx \Leftrightarrow \int(f(x))^2\,d(f(x))=x^3+2x^2+2x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{(f(x))^3}{3}=x^3+2x^2+2x+C \Leftrightarrow (f(x))^3=3(x^3+2x^2+2x+C)$ (1)

Theo đề bài $f(0)=3$ nên từ (1) ta có $(f(0))^3=3(0^3+2.0^2+2.0+C)\Leftrightarrow 27=3C \Leftrightarrow C=9$

$\Rightarrow (f(x))^3=3(x^3+2x^2+2x+9)\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3(x^3+2x^2+2x+9)}$.

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

CÁCH 1:

Vì $x^3+2x^2+2x+9=x^2(x+2)+2(x+2)+5>0, \forall x\in[-2;1]$ nên $f(x)$ có đạo hàm trên $[-2;1]$

và $f'(x)=\dfrac{3(3x^2+4x+2)}{3\sqrt[3]{\left[3(x^3+2x^2+2x+9)\right]^2}}=\dfrac{3x^2+4x+2}{\sqrt[3]{\left[3(x^3+2x^2+2x+9)\right]^2}}>0,\ \forall x\in[-2;1]$.

$\Rightarrow$Hàm số $y=f(x)$đồng biến trên $[-2;1]\Rightarrow \max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}$.

CÁCH 2:

$f(x)=\sqrt[3]{3(x^3+2x^2+2x+9)}=\sqrt[3]{3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3+2\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{223}{9}}$.

Vì các hàm số $y=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3$, $y=2\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{223}{9}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số

$y=\sqrt[3]{3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3+2\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{223}{9}}$ cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-2;1]$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}$.

Câu 20. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 15.

Lời giải

$f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow \frac{1.f(x)-x.f'(x)}{x^2}=\frac{-2x^3-3x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=2x+3$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2x+3$.

Ta có $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C_1$, (1) với $C_1\in\mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$. Vậy $f(2)=20$.

Câu 21. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn các điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

Lời giải

Ta có $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=(2x+1)$.

Suy ra $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}\left(1+f^2(x)\right)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\int(2x+1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=C\Leftrightarrow C=3$.

Với $C=3$ thì $\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+3\Rightarrow f(x)=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}$. Vậy $f(1)=\sqrt{24}$.

Câu 22. **(Cần Thơ 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=2x^2-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $\left[f(1)\right]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $\left[f(x)f'(x)\right]'=\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $\left[f(x)f'(x)\right]'=2x^2-x+1$.

Suy ra $f(x)f'(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+C$. Hơn nữa $f(0)=f'(0)=3$ suy ra $C=9$.

Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]'=2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]'=2\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+9\right)$. Suy ra

$f^2(x)=\int 2\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^4-\frac{x^3}{3}+x^2+18x+C$, cũng vì $f(0)=3$ suy ra

$f^2(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{x^3}{3}+x^2+18x+9$. Do đó $\left[f(1)\right]^2=28$.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=\frac{\mathrm{e}}{3}$. **B.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}}{6}$. **C.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{3}$. **D.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{6}$.

Lời giải

Ta có

$(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow (x+1)f(x)+f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$

$\Leftrightarrow\left[(x+1)f(x)\right]+\left[(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\left[(x+1)f(x)\right]+\mathrm{e}^x\left[(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow\left[\mathrm{e}^x(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow\int\left[\mathrm{e}^x(x+1)f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{e}^x(x+1)f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$

Mà $f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$

Khi đó $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{6}$.

Câu 24. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x\Leftrightarrow\frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x)=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3\Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 25. (THPT Lê Xoay - 2018) Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $3<f(5)<4$.

Lời giải

Ta có

$$f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$$

Mà $f(1)=1$ nên $e^{\frac{4}{3}+C}=1\Leftrightarrow C=-\dfrac{4}{3}$. Suy ra $f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,794$.

Câu 26. (THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018) Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $\left(a\in\mathbb{Z},\, b\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$

$$\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C.$$

Vì $f(0)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Câu 27. (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Cho hàm số $f(x)\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^2}f^2(x)$ và $f(1)=-\dfrac{1}{3}$. Tính $f(1)+f(2)+...+f(80)$.

A. $-\dfrac{3240}{6481}$. **B.** $\dfrac{6480}{6481}$. **C.** $-\dfrac{6480}{6481}$. **D.** $\dfrac{3240}{6481}$.

Lời giải

$$f'(x)=\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}.$$

$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{3x^4+x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f^2(x)} = \int \frac{3x^4+x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f^2(x)} = \int\left(3x^2+1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^3+x+\frac{1}{x}+C \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x^3+x+\frac{1}{x}}+C$.

Do $f(1) = -\frac{1}{3} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2-x+1}\right)$.

$f(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)$; $f(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right)$; $f(3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{7}\right)$;.; $f(80) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6481}-\frac{1}{6321}\right)$.

$f(1)+f(2)+...+f(80) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{6481} = -\frac{3240}{6481}$.

Câu 28. **(Sở Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0)=1, f(2)=\mathrm{e}^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. **B.** e^3. **C.** $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$. **D.** e^2.

Lời giải

Theo đề bài, ta có $[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Rightarrow \frac{f(x).f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1$

$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + C.x + D$

Mà $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=\mathrm{e}^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=2 \\ D=0 \end{cases}$. Suy ra : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+2x} \Rightarrow f(1) = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = \mathrm{e}^2$. **B.** $f(1) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $f(1) = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **D.** $f(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f'(x)+2x.f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}f'(x) + 2x.\mathrm{e}^{x^2}.f(x) = 1 \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)' = 1$.

Suy ra $\int\left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}.f(x) = x + C \Rightarrow f(x) = \frac{x+C}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Do đó $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$. Vậy $f(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x) = x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\dfrac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\dfrac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\dfrac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\dfrac{323}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x).f(x)\mathrm{d}x=\int(x^4+x^2)\mathrm{d}x+C\Rightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+C$.

Do $f(0)=2$ nên suy ra $C=2$.

Vậy $f^2(2)=2\left(\dfrac{32}{5}+\dfrac{8}{3}+2\right)=\dfrac{332}{15}$.

Câu 31. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $(x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+C$. **B.** $(x+2)\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+C$.

C. $(x-1)\mathrm{e}^x+C$. **D.** $(x+1)\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x+f'(x)\mathrm{e}^x=1\Leftrightarrow\left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'=1\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x=x+C'$.

Vì $f(0)=2$ nên $C'=2$. Do đó $f(x)\mathrm{e}^{2x}=(x+2)\mathrm{e}^x$. Vậy:

$\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int(x+2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(x+2)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=(x+2)\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}(x+2)=(x+2)\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$

$=(x+2)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=(x+1)\mathrm{e}^x+C$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x\ \ \forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

A. $\dfrac{25}{6}$. **B.** $\dfrac{25}{3}$. **C.** $\dfrac{17}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $2xf'(x)+f(x)=2x$ (1) trên $(0;+\infty)$: $(1)\Leftrightarrow f'(x)+\dfrac{1}{2x}\cdot f(x)=1$ (2).

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln x+C=\ln\sqrt{x}+C$. Ta chọn $G(x)=\ln\sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $\mathrm{e}^{G(x)}=\sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x}\cdot f'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)=\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=\sqrt{x}$ (3).

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int_1^4\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\left.\left(\sqrt{x}.f(x)\right)\right|_1^4=\left.\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\right|_1^4\Rightarrow 2f(4)-f(1)=\dfrac{14}{3}\Rightarrow f(4)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{14}{3}+1\right)=\dfrac{17}{6}$ (vì $f(1)=1$).

Vậy $f(4)=\dfrac{17}{6}$.

Câu 33. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 7. **D.** -7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{-3(f(x)-1)\sqrt[3]{f(x)-1}}=\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'=\dfrac{1}{x^2}$.

Do đó $\displaystyle\int\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C$. Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\dfrac{1}{x}+C$.

Có $f(1)=0\Rightarrow C=0$. Do đó $f(x)=1-x^3$.

Khi đó $f(2)=-7$.

Câu 34. **(Bến Tre 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, $\forall x\in\mathbb{R}$: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow f'(x).f'(x)+f(x).f''(x)=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow\left[f(x).f'(x)\right]'=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x)=\displaystyle\int\left(15x^4+12x\right)\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C\ (1)$.

Thay $x=0$ vào (1), ta được: $f(0).f'(0)=C\Leftrightarrow C=1$.

Khi đó, (1) trở thành: $f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1$

$\Rightarrow\displaystyle\int_0^1 f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3x^5+6x^2+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left[\dfrac{1}{2}f^2(x)\right]\Bigg|_0^1=\left(\dfrac{1}{2}x^6+2x^3+x\right)\Bigg|_0^1$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow f^2(1)-1=7\Leftrightarrow f^2(1)=8$.

Vậy $f^2(1)=8$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $\left(xf'(x)-2f(x)\right).\ln x=x^3-f(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$; biết $f\left(\sqrt[3]{\mathrm{e}}\right)=3\mathrm{e}$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\left(xf'(x)-2f(x)\right).\ln x=x^3-f(x)$ (1) trên khoảng $(1;+\infty)$:

$(1)\Leftrightarrow x\ln x.f'(x)+(1-2\ln x).f(x)=x^3\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x\ln x}\cdot f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$ (2).

Đặt $g(x)=\frac{1-2\ln x}{x\ln x}$. Ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1-2\ln x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-2\ln x}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\int\left(\frac{1}{\ln x}-2\right)\mathrm{d}(\ln x)$

$=\ln(\ln x)-2\ln x+C=\ln\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)+C$.

Ta chọn $G(x)=\ln\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $\mathrm{e}^{G(x)}=\frac{\ln x}{x^2}$, ta được: $\frac{\ln x}{x^2}\cdot f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x^3}\cdot f(x)=1$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\ln x}{x^2}\cdot f(x)\right)'=1\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x^2}\cdot f(x)=x+C$ (3).

Theo giả thiết, $f\left(\sqrt[3]{\mathrm{e}}\right)=3\mathrm{e}$ nên thay $x=\sqrt[3]{\mathrm{e}}$ vào (3), ta được:

$\frac{\ln\left(\sqrt[3]{\mathrm{e}}\right)}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}}.f\left(\sqrt[3]{\mathrm{e}}\right)=\sqrt[3]{\mathrm{e}}+C\Leftrightarrow C=\frac{1}{3\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}}\cdot3\mathrm{e}-\sqrt[3]{\mathrm{e}}=0$.

Từ đây, ta tìm được $f(x)=\frac{x^3}{\ln x}\Rightarrow f(2)=\frac{2^3}{\ln 2}$.Vậy $f(2)\in\left(\frac{23}{2};12\right)$.

Câu 36. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow3f^2(x).f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)}=2x.\mathrm{e}^{x^2+1}$

$\Rightarrow\int3f^2(x).f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)}\mathrm{d}x=\int2x.\mathrm{e}^{x^2+1}\mathrm{d}x\Rightarrow\int\mathrm{e}^{f^3(x)}\mathrm{d}\left(f^3(x)\right)=\int\mathrm{e}^{x^2+1}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)\Rightarrow\mathrm{e}^{f^3(x)}=\mathrm{e}^{x^2+1}+C$.

Mặt khác, vì $f(0)=1$ nên $C=0$.

Do đó $\mathrm{e}^{f^3(x)}=\mathrm{e}^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3(x)=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\sqrt{7}} x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}\left(x^2+1\right) = \dfrac{3}{8}\left[\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{7}} = \dfrac{45}{8}$.

Câu 37. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P=2M-m$ có dạng $a\sqrt{11}-b\sqrt{3}+c,(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b+c$

A. $a+b+c=7$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x \Rightarrow \int\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int 2xdx$

$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1}=x^2+C$.

Mà $f(0)=0 \Leftrightarrow C=1 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1}=x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x)=\left(x^2+1\right)^2-1=x^4+2x^2$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}$ (do $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$).

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2x^3+2x}{\sqrt{x^4+2x^2}}>0,\forall x\in[1;3] \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=f(3)=3\sqrt{11};\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=\sqrt{3}$.

Ta có: $P=2M-m=6\sqrt{11}-\sqrt{3} \Rightarrow a=6;b=1;c=0 \Rightarrow a+b+c=7$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a,b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\dfrac{21}{16}$. **B.** $T=\dfrac{3}{2}$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-\dfrac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{(x+1)}f'(x)+\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \left[\dfrac{x^2}{x+1}f(x)\right]'=\dfrac{x^2}{x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \int\dfrac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{x+1}f(x)+C'$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \int\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{x+1}f(x)+C'$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C''=\dfrac{x^2}{x+1}f(x)+C'$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C=\dfrac{x^2}{x+1}f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

Ta có: $f\left(1\right)=2\ln 2+1$ và $f\left(1\right)=-1+2\ln 2+2C\Rightarrow C=1$.

$\Rightarrow \frac{x^2}{2}-x+\ln\left|x+1\right|+1=\frac{x^2}{x+1}f\left(x\right)$.

$\Rightarrow f\left(2\right)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}.\ln\left|3\right|$ và $f\left(2\right)=a+b\ln 3\Rightarrow a=\frac{3}{4}, b=\frac{3}{4}\Rightarrow T=a^2-b=\frac{9}{16}-\frac{3}{4}=\frac{-3}{16}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $3x.f\left(x\right)-x^2.f'\left(x\right)=2f^2\left(x\right)$, với $f\left(x\right)\neq 0, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$ và $f\left(1\right)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[1;2\right]$. Tính $M+m$.

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{21}{10}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3x.f\left(x\right)-x^2.f'\left(x\right)=2f^2\left(x\right)\Rightarrow 3x^2.f\left(x\right)-x^3.f'\left(x\right)=2x.f^2\left(x\right)$

$\Rightarrow \frac{3x^2.f\left(x\right)-x^3.f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=2x$ vì $f\left(x\right)\neq 0, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f\left(x\right)}\right)'=2x\Rightarrow \frac{x^3}{f\left(x\right)}=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

Mà $f\left(1\right)=\frac{1}{3}\Rightarrow C=2\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+2}$.

Ta có: $f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+2}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{x^4+6x^2}{\left(x^2+2\right)^2}>0, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Vậy, hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Mà $\left[1;2\right]\subset\left(0;+\infty\right)$ nên hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên đoạn $\left[1;2\right]$.

Suy ra, $M=f\left(2\right)=\frac{4}{3};m=f\left(1\right)=\frac{1}{3}\Rightarrow M+m=\frac{5}{3}$.

Dạng 2. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm

Câu 1. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{x^2}\left(x^3-4\text{x}\right)$. Hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$

$$\Rightarrow F'\left(x^2+x\right)=f\left(x^2+x\right).\left(x^2+x\right)'=\left(2x+1\right)\left(x^2+x\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left(\left(x^2+x\right)^2-4\right)$$

$$=\left(2x+1\right)x\left(x+1\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+2\right)$$

$$=\left(2x+1\right)x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}=0\Leftrightarrow x\in\left\{-2;-1;\frac{-1}{2};0;1\right\}$$

$F'\left(x^2+x\right)=0$ có 5 nghiệm đơn nên $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $F\left(x\right)=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\left(\sin x+\cot x\right)}{\sin^4 x}dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F\left(x\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $\left(0;4\pi\right)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $\left(6\pi;9\pi\right)$. **B.** $\left(2\pi;4\pi\right)$. **C.** $\left(4\pi;6\pi\right)$. **D.** $\left(0;2\pi\right)$.

Lời giải

Chọn

Ta có: $F\left(x\right)=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\left(\sin x+\cot x\right)}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx+\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx$

Gọi $A=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx$ và $B=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx$

Ta có:

$$A=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\left(1+2\cot^2 x\right)\cot x}{\sin^2 x}dx=-\int\left(\cot x+2\cot^3 x\right).d\left(\cot x\right)$$

$$=-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C_1.$$

$$B=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}dx$$

Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin x.dx$. Khi đó:

$$B=-\int\frac{1+t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-\int\frac{1+t^2}{\left(t-1\right)^2.\left(t+1\right)^2}dt=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{\left(t-1\right)^2}+\frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right]dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)+C_2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)+C_2$$

Do đó:

$$F\left(x\right)=A+B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C$$

Suy ra:

$$F\left(x\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C=C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}-\cot^2 x-\cot^4 x=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}=0$$

Với điều kiện $\sin x\neq 0$,

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2+\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x\left(1-\cos^2 x\right)+\cos^3 x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ -2\cos^2 x+\cos x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

Theo giả thiết $x\in\left(0;4\pi\right)$ nên $x=\dfrac{\pi}{2};x=\dfrac{3\pi}{2};x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi;x=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi$;

$x=\alpha;x=\alpha+2\pi$;

$x=\beta;x=\beta+2\pi$.

Khi đó tổng các nghiệm này sẽ lớn hơn 9π.

Câu 3. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F\left(x\right)$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}\left(\sin x\right)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$$

Do $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$ nên hàm số $F\left(x\right)$ có công thức dạng $F\left(x\right)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in\left(0;\pi\right)$.

Xét hàm số $F\left(x\right)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $\left(0;\pi\right)$.

$$F'\left(x\right)=f\left(x\right)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$$

Xét $F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Trên khoảng $\left(0;\pi\right)$, phương trình $F'\left(x\right)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{3}+C$	$\searrow$	

$\max\limits_{(0;\pi)} F(x) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$.

Câu 4. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;4\pi)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ trên $(0;4\pi)$.

$F'(x) = f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x\cos x - \sin x = 0$ trên $(0;4\pi)$.

Đặt $g(x) = x\cos x - \sin x$ trên $(0;4\pi)$.

Ta có $g'(x) = -x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = 2\pi \\ x = 3\pi \end{array}\right.$ trên $(0;4\pi)$.

Từ đó có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0		π		x1	2π	x2		3π		x3	4π
g'(x)		-	0	+		0		-	0	+		
g(x)	0		-π		0	2π	0		-3π		0	4π

Vì $g(x)$ liên tục và đồng biến trên $[\pi;2\pi]$ và $g(\pi).g(2\pi) < 0$ nên tồn tại duy nhất $x_1 \in (\pi;2\pi)$ sao cho $g(x_1) = 0$.

Tương tự ta có $g(x_2) = 0$, $g(x_3) = 0$ với $x_2 \in (2\pi;3\pi)$, $x_3 \in (3\pi;4\pi)$.

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy $g(x) < 0$ khi $x \in (0;x_1)$ và $x \in (x_2;x_3)$; $g(x) > 0$ khi $x \in (x_1;x_2)$ và $x \in (x_3;4\pi)$. Dấu của $f(x)$ là dấu của $g(x)$ trên $(0;4\pi)$.

Do đó ta có bảng biến thiên của $F(x)$:

x	0		x_1		x_2		x_3		4π
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Vậy hàm số $y=F(x)$ có ba cực trị.

Câu 5. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** vô số điểm. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Vì $(F(x))'=f(x)$ nên ta xét sự đổi dấu của hàm số $f(x)$ để tìm cực trị hàm số đã cho.

Ta xét hàm số $g(x)=x-\cos x$, ta có $g'(x)=1+\sin x\ge 0\,\forall x$.

Vì vậy $g(x)$ là hàm số đồng biến trên toàn trục số.

Hơn nữa ta có $\begin{cases} g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0 \\ g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}<0 \end{cases}$, do đó $g(x)=0$ có duy nhất nghiệm $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

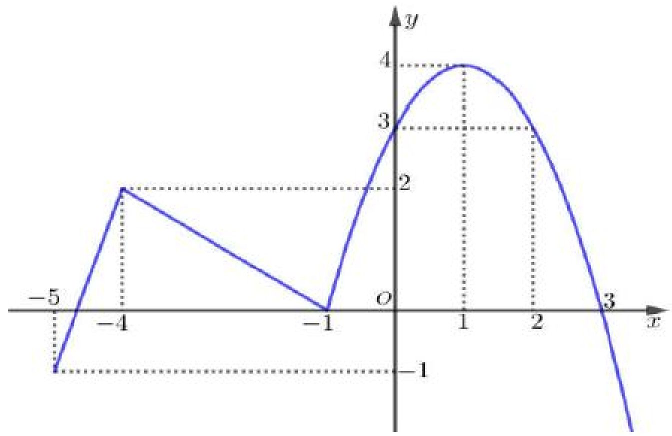
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	

Kết luận hàm số đã cho có một cực trị.

Câu 6. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33. **B.** $\frac{109}{3}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

*)Parabol $y=ax^2+bx+c$ qua các điểm $(2;3),(1;4),(0;3),(-1;0),(3;0)$ nên xác định được

$y=-x^2+2x+3,\forall x\geq -1$ suy ra $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C_1$. Mà

$f(0)=0\Rightarrow C_1=0$, $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x$.

Có $f(-1)=-\frac{5}{3}$; $f(2)=\frac{22}{3}$ (1)

*)Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4;-1]$ qua các điểm $(-4;2),(-1;0)$ nên

$f'(x)=\frac{-2}{3}(x+1)\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+C_2$.

Mà $f(-1)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow C_2=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-2$, hay $f(-4)=\frac{-14}{3}$.

*) Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5;-4]$ qua các điểm $(-4;2),(-5;-1)$ nên

$f'(x)=3x+14\Rightarrow f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+C_3$.

Mà $f(-4)=\frac{-14}{3}\Leftrightarrow \frac{3.(-4)^2}{2}+14.(-4)+C_3=\frac{-14}{3}$ suy ra $C_3=\frac{82}{3}$.

Ta có $f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+\frac{82}{3}\Rightarrow f(-5)=-\frac{31}{6}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $2f(-5)+3f(2)=-\frac{31}{3}+22=\frac{35}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $xf(x)=\int\left(4x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x=x^4+x^3+C$.

Với $x=1$ ta có: $f(1)=2+C$.

Theo bài ra $f(1)=2 \Leftrightarrow 2+C=2 \Leftrightarrow C=0$.

Vậy $xf(x)=x^4+x^3 \Leftrightarrow f(x)=x^3+x^2$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+2x$; $f'(2)=16$; $f(2)=12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là:

$y=16(x-2)+12 \Leftrightarrow y=16x-20$.