

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung

	<p>1. Hệ trục tọa độ Oxyz:</p> <ul style="list-style-type: none"> Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau. Trục Ox: trục hoành, có vector đơn vị $\vec{i} = (1;0;0)$. Trục Oy: trục tung, có vector đơn vị $\vec{j} = (0;1;0)$. Trục Oz: trục cao, có vector đơn vị $\vec{k} = (0;0;1)$. Điểm $O(0;0;0)$ là gốc tọa độ. <p>2. Tọa độ vector: Vector $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$.</p> <p>Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:</p>
<ul style="list-style-type: none"> $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$ 	<ul style="list-style-type: none"> \vec{a} cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0).$
<ul style="list-style-type: none"> $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $\vec{a}^2 = \vec{a} ^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
<ul style="list-style-type: none"> $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
<p>3. Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:</p>	
<ul style="list-style-type: none"> $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ 	<ul style="list-style-type: none"> $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
<ul style="list-style-type: none"> Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$. 	<ul style="list-style-type: none"> Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.
<p align="center">QUY TẮC CHIỀU ĐẶC BIỆT</p>	
<p align="center">Chiếu điểm trên trục tọa độ</p> <ul style="list-style-type: none"> Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$ 	<p align="center">Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ</p> <ul style="list-style-type: none"> Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$
<p align="center">Đối xứng điểm qua trục tọa độ</p> <ul style="list-style-type: none"> $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x; \text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y; \text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z; \text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$ 	<p align="center">Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ</p> <ul style="list-style-type: none"> $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y; \text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy} M_1(x_M; y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z; \text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz} M_2(x_M; -y_M; z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z; \text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz} M_3(-x_M; y_M; z_M)$
<p align="center">4. Tích có hướng của hai vector:</p>	

☞ Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của \vec{a} và \vec{b} là: $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$			
☞ Tính chất:	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$ \vec{a}, \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
▪ Điều kiện cùng phương của hai vectơ \vec{a} & \vec{b} là $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0; 0; 0)$.		▪ Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ \vec{a} , \vec{b} và \vec{c} là $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.	
▪ Diện tích hình bình hành $ABCD: S_{\square ABCD} = [\vec{AB}, \vec{AD}] $.		▪ Diện tích tam giác ABC: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\vec{AB}, \vec{AC}] $.	
▪ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} $.		▪ Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} $.	

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ

Dạng 1.1 Một số bài toán liên quan đến vectơ, tọa độ vec tơ

Câu 1. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho ba điểm $A(-1; 2; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(x; y; -2)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng

- A.** $x + y = 1$. **B.** $x + y = 17$. **C.** $x + y = -\frac{11}{5}$. **D.** $x + y = \frac{11}{5}$.

Lời giải

Có $\vec{AB} = (2; -2; 5)$, $\vec{AC} = (x + 1; y - 2; 1)$.

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x + y = 1.$$

Câu 2. (HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m - 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ \vec{a}, \vec{b} cùng hướng.

- A.** $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 4; n = -3$. **C.** $m = 1; n = 0$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } m = 7; n = -\frac{3}{4}$$

Câu 3. (THPT Nguyễn Khuyến -2019) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

- A.** $x = 4; y = 7$ **B.** $x = -4; y = -7$ **C.** $x = 4; y = -7$ **D.** $x = -4; y = 7$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{AB} = (3; -4; 2)$, $\vec{AM} = (x - 2; y + 1; -4)$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}.$$

- Câu 4. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là
A. $M(4; -5; 0)$. **B.** $M(2; -3; 0)$. **C.** $M(0; 0; 1)$. **D.** $M(4; 5; 0)$.

Lời giải

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$; $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$; $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; -1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AM} cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$.

Vậy $M(4; -5; 0)$.

- Câu 5. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

Khi đó $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ và $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$

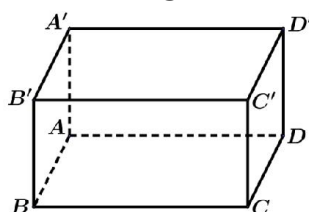
Do đó $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 6. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$; $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

- A.** $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (0; 2a; 0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = (a; 2a; 2a)$.

Suy ra $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

- Câu 7. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

- A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
 C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Đặt: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m(2; 3; 1) + n(-1; 5; 2) + p(4; -1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \quad (I).$$

Giải hệ phương trình (I) ta được: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 8. (Chuyên Thái Bình - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với: $\vec{AB} = (1; -2; 2)$; $\vec{AC} = (3; -4; 6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là:

- A. 29. B. $\sqrt{29}$. C. $\frac{\sqrt{29}}{2}$. D. $2\sqrt{29}$.

Lời giải

Ta có

$$AB^2 = 1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9, AC^2 = 3^2 + (-4)^2 + 6^2 = 61, \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 1 \cdot 3 + (-2)(-4) + 2 \cdot 6 = 23.$$

$$\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 61 + 9 - 2 \cdot 23 = 24.$$

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9 + 61}{2} - \frac{24}{4} = 29.$$

Vậy $AM = \sqrt{29}$.

Câu 9. (Hồng Quang - Hải Dương - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ \vec{a}, \vec{b} cùng hướng.

- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. C. $m = 4; n = -3$. D. $m = 1; n = 0$.

Lời giải

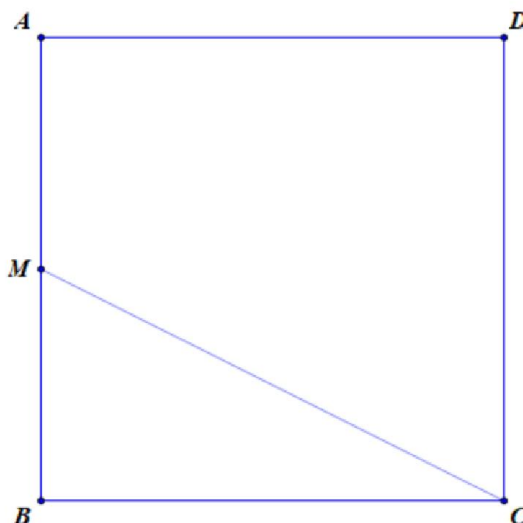
Các vectơ \vec{a}, \vec{b} cùng hướng khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 6 \\ 3 = 2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Câu 10. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3; 0; 8)$, $D(-5; -4; 0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\vec{CA} + \vec{CB}|$ bằng:

- A. $10\sqrt{5}$. B. $6\sqrt{10}$. C. $10\sqrt{6}$. D. $5\sqrt{10}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow BD = 12 \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow MC = 3\sqrt{10}$.

$$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |2\overrightarrow{CM}| = 2CM = 6\sqrt{10}.$$

Dạng 1.2 Tìm tọa độ điểm

- Câu 11. (THPT Cù Huy Cận 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- A.** $D(-4;-2;9)$. **B.** $D(-4;2;9)$. **C.** $D(4;-2;9)$. **D.** $D(4;2;-9)$.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3 - x; 1 - y; 2 - z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9).$$

- Câu 12. (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;1;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ (theo thứ tự các đỉnh) là hình bình hành?

- A.** $D(2;0;0)$. **B.** $D(1;1;1)$. **C.** $D(0;0;1)$. **D.** $D(0;2;1)$.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (x-1; y; z)$ và $\overrightarrow{BC} = (-1; 0; 1)$.

Suy ra $x = 0; y = 0; z = 1$.

Vậy $D(0;0;1)$.

Câu 13. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-2;8;-3)$

B. $D(-4;8;-5)$

C. $D(-2;2;5)$

D. $D(-4;8;-3)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$ cần tìm

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \\ z_B - z_A = z_C - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 1 = -3 - x_D \\ -1 - 2 = 5 - y_D \\ 3 - (-1) = 1 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 8 \\ z_D = -3 \end{cases}$$

Suy ra: $D(-4;8;-3)$.

Câu 14. (THPT Nguyễn Khuyến -2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, Tam giác ABC với $A(1;-3;3); B(2;-4;5), C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a+b+c$ bằng.

A. -5

B. 3

C. 1

D. -2

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} 1 = \frac{1+2+a}{3} \\ c = \frac{-3-4-2}{3} \\ 3 = \frac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c = -2$

Câu 15. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3), C(7;4;-2)$ Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$

B. $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$.

C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$

D. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE} = (x-7; y-4; z+2); 2\overrightarrow{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z)$

$$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 2-2x \\ y-4 = 4-2y \\ z+2 = -6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{8}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 16. (KTNL Gia Bình 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(-3;1;4)$. Điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

- A. $D(6;6;0)$ B. $D\left(0;\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$ C. $D(0;8;8)$ **D. $D(-4;-2;-6)$**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3 - x_D \\ 3 = 1 - y_D \\ 10 = 4 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -2 \\ z_D = -6 \end{cases}$$

Vậy $D(-4;-2;-6)$.

Câu 17. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho tam giác ABC có $A(1;-2;0)$, $B(2;1;-2)$, $C(0;3;4)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $(1;0;-6)$. B. $(1;6;2)$. **C. $(-1;0;6)$** . D. $(1;6;-2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD} \Leftrightarrow \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OC} - \overline{OB}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B \\ y_D = y_A + y_C - y_B \\ z_D = z_A + z_C - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 + 0 - 2 \\ y_D = -2 + 3 - 1 \\ z_D = 0 + 4 - 2 \end{cases} \Rightarrow D(-1;0;6).$$

Câu 18. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là

- A. $\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$** . B. $(4;5;-9)$. C. $\left(\frac{3}{2}; -5; \frac{17}{2}\right)$. D. $(1;-7;12)$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$. Vì M thuộc đoạn AB nên:

$$\overline{MA} = -2\overline{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = -2(2 - x) \\ 1 - y = -2(-3 - y) \\ -2 - z = -2(5 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 19. (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{AM} = 3\overline{AB}$.

- A. $M(9;-5;7)$** . B. $M(9;5;7)$.
C. $M(-9;5;-7)$. D. $M(9;-5;-5)$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có: $\overline{AM} = (x;y-1;z+2)$; $\overline{AB} = (3;-2;3)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y - 1 = -6 \\ z + 2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}. \text{ Vậy } M(9; -5; 7).$$

Câu 20. (Chuyên Phan Bội Châu 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

- A.** $B(2; 5; 0)$. **B.** $B(0; -1; -2)$. **C.** $B(0; 1; 2)$. **D.** $B(-2; -5; 0)$

Lời giải

Gọi $B(x; y; z)$

$$\text{Có } A(1; 2; -1) \quad \overrightarrow{AB} = (1; 3; 1) = (x - 1; y - 2; z + 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 0)$$

Câu 21. (Đề Thi Công Bằng Khtn 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A = (1; 0; 1)$, $B = (2; 1; 2)$ và $D = (1; -1; 1)$. Tọa độ điểm C là

- A.** $(2; 0; 2)$. **B.** $(2; 2; 2)$. **C.** $(2; -2; 2)$. **D.** $(0; -2; 0)$.

Lời giải

Gọi tọa độ điểm C là $(x; y; z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DC} = (x - 1; y + 1; z - 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y + 1 = 1 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

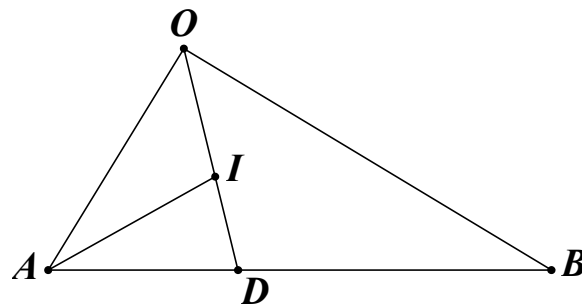
Vậy tọa độ điểm C là $(2; 0; 2)$.

Câu 22. (Sở Phú Thọ -2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a - b + c$ bằng

- A.** 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, do đó $OA = 3$, $OB = 4$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O , ta có $\overrightarrow{DA} = -\frac{DA}{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = -\frac{OA}{OB} \cdot \overrightarrow{DB}$, suy ra

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7}. \text{ Do đó } D\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{7}; 0\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}; 2\right) \Rightarrow AD = \frac{15}{7}.$

$$\overrightarrow{ID} = -\frac{AD}{AO} \cdot \overrightarrow{IO} = -\frac{5}{7} \overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{7}{12} \overrightarrow{OD} \Rightarrow D(1; 1; 0)$$

Do đó $a - b + c = 0.$

Câu 23. (Chuyên Đhsp Hà Nội -2019) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

Do $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ nên các tam giác $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMA$ vuông tại M .

Khi đó $IM = \frac{AB}{2}; JM = \frac{BC}{2}; KM = \frac{AC}{2}$. Mặt khác $AB = BC = AC = 2\sqrt{2}$.

Vậy $MI = MJ = MK = \sqrt{2}$. Khi đó M thuộc trục của đường tròn ngoại tiếp đáy IJK và cách (IJK) một khoảng không đổi là $\sqrt{2}$. Khi đó có hai điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1), N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

A. $I(1;1;1)$.

B. $I(0;1;1)$.

C. $I(0;-1;-1)$.

D. $I(1;0;1)$.

Lời giải

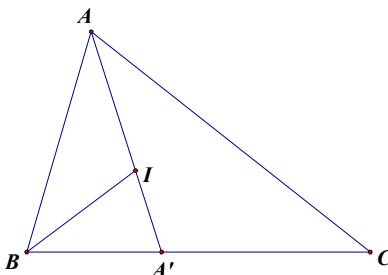
Chọn B

Ta có bài toán bài toán sau

Trong tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta có: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

với $BC = a; AC = b; AB = c$.

Thật vậy:



Gọi A' là chân đường phân giác trong kẻ từ A .

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA'} = \frac{c}{b} \overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow b\overrightarrow{BA'} + c\overrightarrow{CA'} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{IA} = \frac{c}{A'B} \overrightarrow{A'I} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \overrightarrow{A'I} = \frac{b+c}{a} \overrightarrow{A'I} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} + b\overrightarrow{BA'} + c\overrightarrow{CA'} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad (do(1)).$$

Áp dụng công thức trong tam giác OMN

$$ta \text{ được } OM.\overrightarrow{IN} + ON.\overrightarrow{IM} + MN.\overrightarrow{IO} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{OM.x_N + ON.x_M + MN.x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \frac{OM.y_N + ON.y_M + MN.y_O}{OM + ON + MN} = 1 \\ z_I = \frac{OM.z_N + ON.z_M + MN.z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm $I(0;1;1)$ là điểm cần tìm.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a+b+2c$ bằng

A. 5.

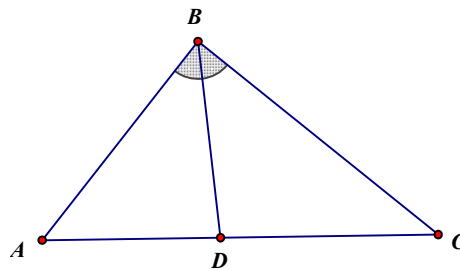
B. 4.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn A



$$Ta \text{ có } AB = \sqrt{26}, \quad BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

$$Gọi \ D(x;y;z), \text{ theo tính chất phân giác ta có } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \quad (*).$$

$$Ta \text{ có } \overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z) \text{ và } \overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z).$$

$$\text{Do đó } (*) \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a+b+2c=5.$$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ **B.** $\frac{AM}{BM} = 2$ **C.** $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ **D.** $\frac{AM}{BM} = 3$

Lời giải

Chọn A

$$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z); \overline{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}; \overline{AM} = (x+2; -3; z-1) \text{ và}$$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overline{AM} = k \cdot \overline{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$$

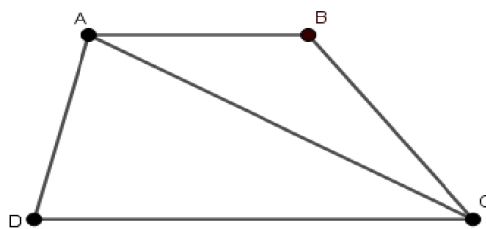
$$\overline{BM} = (-14; -6; -2); \overline{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB.$$

Câu 27. (Bình Giang-Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

A. $D(-12; -1; 3)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. **C.** $D(8; 7; -1)$. **D.** $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overline{AD} = 2\overline{BC}$ (1).

$$\overline{BC} = (-5; -2; 1), \overline{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

Câu 28. (THPT Trần Quốc Tuấn - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; -1)$, $C(6; 1; 0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a; b; c)$, tìm mệnh đề đúng?

- A. $a+b+c=6$. B. $a+b+c=5$. C. $a+b+c=8$. D. $a+b+c=7$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD+BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD+3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

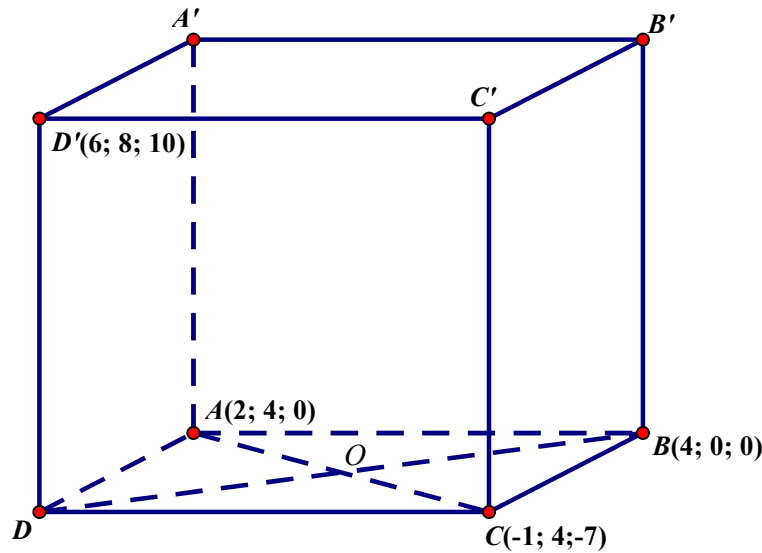
Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Giả sử } D(a; b; c) \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a-1 = \frac{4}{3} \\ b-2 = \frac{1}{3} \\ c-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 6.$$

Câu 29. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(-1; 4; -7)$ và $D'(6; 8; 10)$. Tọa độ điểm B' là

- A. $B'(8; 4; 10)$. B. $B'(6; 12; 0)$. C. $B'(10; 8; 6)$. D. $B'(13; 0; 17)$.

Lời giải



Giả sử $D(a; b; c)$, $B'(a'; b'; c')$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{DD'} = (9; 0; 17)$, $\overrightarrow{BB'} = (a' - 4; b'; c')$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 0 \\ c' = 17 \end{cases}. \text{ Vậy } B'(13; 0; 17).$$

Câu 30. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A. $A'(4; 6; -5)$. B. $A'(2; 0; 2)$. C. $A'(3; 5; -6)$. D. $A'(3; 4; -6)$.

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'} = (3; 5; -6)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$.

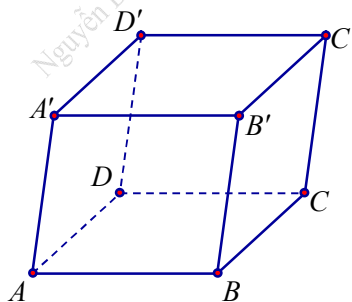
Do đó: $\overrightarrow{AA'} = (2; 5; -7)$.

Suy ra $A'(3; 5; -6)$.

Câu 31. (Chuyên Lê Hồng Phong 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là

- A. $(1; 1; -2)$. B. $(2; 1; -2)$. C. $(1; 2; -1)$. D. $(2; 1; -1)$.

Lời giải



Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x; y - 3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x'; 3 - y'; -3 - z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 + 3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2).$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD' . Ta có $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Gọi $G(a; b; c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IG} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{DI} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{IG} = \left(a - \frac{3}{2}; b - \frac{3}{2}; c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \text{ Do đó: } \begin{cases} \frac{3}{2} = 3\left(a - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(b - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy $G(2; 1; -2)$.

Câu 32. (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. B. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. D. $(-2; 11; 1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{26}; \overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{26}.$$

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

$$\text{Suy ra: } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

Câu 33. (Toán Học Và Tuổi Trẻ - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2; 2; 0)$ và $C(4; 1; -1)$. Trên mặt phẳng (Oxz) , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A , B , C .

A. $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$. B. $N\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$. C. $P\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$. D. $Q\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A(2; 2; 2) \text{ và } PA = PB = PC = \frac{3\sqrt{21}}{4}.$$

Câu 34. (SGD Thanh Hóa - 2018) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$.

Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. C. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. D. $M(4; -3; 8)$.

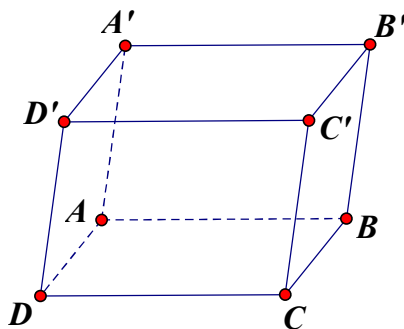
Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - 3x_B}{1-3} = 4 \\ y_M = \frac{y_A - 3y_B}{1-3} = -3 \\ z_M = \frac{z_A - 3z_B}{1-3} = 8 \end{cases} \Rightarrow M(4; -3; 8).$$

Câu 35. (SGD - Đà Nẵng - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C' .

- A. $C'(10;4;4)$. B. $C'(-13;4;4)$. C. $C'(13;4;4)$. D. $C'(7;4;4)$.

Lời giải



Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (3; 0; 1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4; 2; 3)$.

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10; 4; 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13; 4; 4).$$

Câu 36. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. $T = 8$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = 14$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = (2; 2; -4)$. (OAB) có phương trình: $x + y + z = 0$

$I \in (OAB) \Rightarrow a + b + c = 0$.

$\overrightarrow{AI} = (a; b-2; c+2)$, $\overrightarrow{BI} = (a-2; b-2; c+4)$, $\overrightarrow{OI} = (a; b; c)$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c+2)^2 = (a-2)^2 + (c+4)^2 \\ (b-2)^2 + (c+2)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Vậy $I(2; 0; -2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 8$

Câu 37. (THPT Trần Quốc Tuấn - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

- A. $M(0; 0; 3)$. B. $M(0; 0; -3)$. C. $M(-8; -4; 7)$. D. $M(8; 4; -7)$.

Lời giải

$$\text{Gọi điểm } M(x; y; z). \text{ Khi đó: } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 2(-2 - x) \\ y - 2 = 2(-1 - y) \\ z - 1 = 2(4 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy $M(0;0;3)$.

Câu 38. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\Delta ABC}$

- A. $D(8;7;-1)$. B. $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$. D. $D(-12;-1;3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\Delta ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1), \overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12;-1;3)$.

Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng và ứng dụng

Dạng 2.1 Tích vô hướng và ứng dụng

Câu 1. (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = 2$ B. $m = -6$ C. $m = 0$ D. $m = -4$

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{MN}(-3;-2;2); \overrightarrow{NP}(2;m-2;1).$$

$$\text{Tam giác } MNP \text{ vuông tại } N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 2. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

- A. 1. B. 3. C. 6. D. -9.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

\Rightarrow tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a + 2b + c = 3.$$

Câu 3. (HSG Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vec tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa \vec{u} , \vec{v} bằng 45° .

- A. $m = 2$. B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. C. $m = 2 - \sqrt{6}$. D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)} = 1-2m \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ 3m^2+3 = 1-4m+4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2-4m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Câu 4. (Sở Kon Tum - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ \vec{a} và \vec{b} là góc tù?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3m-9}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{2m^2+6m+10}}.$$

Góc giữa hai vec tơ \vec{a} và \vec{b} là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Leftrightarrow 3m-9 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Biết $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$. Khẳng định nào đúng?

- A. $5z-x=0$. B. $7x-y=0$. C. $5z+x=0$. D. $7x+y=0$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ nên

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4z=0 \\ -1x+2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4z=0 \\ 5y+7z=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4 \cdot \frac{-5}{7}y=0 \\ z=\frac{-5}{7}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=0 \\ 5y+7z=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } M(x; y; z). \text{ Ta có: } \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + y(y-2) + z^2 = 0 \\ x^2 + y(y-2) + z(z-2) = 0 \\ x(x-2) + y^2 + z(z-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(0; 0; 0) \\ M\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

Câu 7. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ \vec{u} và \vec{v} tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$

- A.** $\sqrt{19}$. **B.** -5 . **C.** 7 . **D.** $\sqrt{39}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(|\vec{u} + \vec{v}| \right)^2 = \left(\vec{u} + \vec{v} \right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2$$

$$= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 5^2 = 19.$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}.$$

Câu 8. (THPT Trần Nhân Tông - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A.** $m = -6$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Ta có

$$\overrightarrow{NM} = (3; 2; -2), \quad \overrightarrow{NP} = (2; m-2; 1).$$

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot (m-2) - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 0$.

Dạng 2.2 Tích có hướng và ứng dụng

Câu 9. (Yên Phong 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(-1; 1; 0)$, $D(-2; 1; 2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A.** $\frac{42}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{21}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AC} = (-3; 1; -2); \overrightarrow{AB} = (-1; -1; -4); \overrightarrow{AD} = (-4; 1; 0).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-6; -10; 4).$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện là: } V = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \cdot |14| = \frac{7}{3}.$$

- Câu 10. (SGD Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-5; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; 1)$, $\vec{c} = (m; 3; -1)$. Giá trị của m sao cho $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$ là
- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải

$$[\vec{b}, \vec{c}] = (-5; m+1; 3-2m)$$

$$\text{Ta có: } \vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}] \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=3 \\ 3-2m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

- Câu 11. (SGD - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m} = (4; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi \vec{p} là vectơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ (tích có hướng của hai vectơ \vec{m} và \vec{n}). Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vectơ \vec{p} .
- A. $\vec{p} = (9; -12; 0)$. B. $\vec{p} = (45; -60; 0)$. C. $\vec{p} = (0; 9; -12)$. D. $\vec{p} = (0; 45; -60)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } [\vec{m}, \vec{n}] = (3; -4; 0)$$

$$\text{Do } \vec{p} \text{ là vectơ cùng hướng với } [\vec{m}, \vec{n}] \text{ nên } \vec{p} = k[\vec{m}, \vec{n}], k > 0$$

$$\text{Mặt khác: } |\vec{p}| = 15 \Leftrightarrow k \cdot |[\vec{m}, \vec{n}]| = 15 \Leftrightarrow k \cdot 5 = 15 \Leftrightarrow k = 3. \text{ Vậy } \vec{p} = (9; -12; 0).$$

- Câu 12. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; -2; 2-a)$; $B(a+3; -1; 1)$; $C(-4; -3; 0)$; $D(-1; -2; a-1)$. Tập hợp các giá trị của a để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là tập con của tập nào sau?
- A. $(-7; -2)$. B. $(3; 6)$. C. $(5; 8)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}(a+3; 1; a-1), \overrightarrow{AC}(-4; -1; a-2), \overrightarrow{AD}(-1; 0; 2a-3).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2a-3; -a^2-5a+10; -a+1).$$

Để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow -2a+3+(2a-3) \cdot (-a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

- Câu 13. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3; -2; m)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $D(0; 0; 3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.
- A. $m = 8$. B. $m = 4$. C. $m = 12$. D. $m = 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DA} = (3; -2; m-3), \overrightarrow{DB} = (2; 0; -3), \overrightarrow{DC} = (0; 4; -3).$$

$$\text{Thể tích tứ diện: } V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}] \cdot \overrightarrow{DA}| \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{6} |24 + 8(m-3)| \Leftrightarrow \begin{cases} m=-6 \\ m=6 \end{cases}.$$

Vì m dương nên $m = 6$. Do đó chọn **D**.

Câu 14. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

$$\vec{u} = (1; 1; 2), \vec{v} = (-1; m; m-2). \text{ Khi } [\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{14} \text{ thì}$$

A. $m=1$ hoặc $m=-\frac{11}{5}$ **B.** $m=-1$ hoặc $m=-\frac{11}{3}$

C. $m=1$ hoặc $m=-3$ **D.** $m=-1$

Lời giải

Chọn C

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (-m-2; -m; m+1) \Rightarrow \|\vec{u}, \vec{v}\| = \sqrt{(m+2)^2 + m^2 + (m+1)^2} = \sqrt{3m^2 + 6m + 5}$$

$$\|\vec{u}, \vec{v}\| = \sqrt{14} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 5 = 14 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}.$$

Câu 15. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; -1; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(2; -1; 3)$, $D \in Oy$ và có thể tích bằng 5. Tính tổng tung độ của các điểm D .

A. -6

B. 2

C. 7

D. -4

Lời giải

Chọn A.

Do $D \in Oy \Rightarrow D(0; y; 0)$, khi đó: $\overrightarrow{DA} = (2; -1-y; 1)$, $\overrightarrow{DB} = (3; -y; -1)$, $\overrightarrow{DC} = (2; -1-y; 3)$.

Khi đó $[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] = (1+2y; 5; y+3)$

Và $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] \cdot \overrightarrow{DC}| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+6=30 \\ 2y+6=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ y=-18 \end{cases}.$

Vậy $y_1 + y_2 = 12 - 18 = -6$.

Câu 16. (Toán Học Tuổi Trẻ 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$, $D(-2; m; n)$. Trong các hệ thức liên hệ giữa m và n dưới đây, hệ thức nào để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng?

A. $2m+n=13$.

B. $2m-n=13$.

C. $m+2n=13$.

D. $2m-3n=10$.

Lời giải

Ta tính

$$\overrightarrow{AB} = (0; 2; -1); \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2); \overrightarrow{AD} = (-3; m+2; n); [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; 1; 2)$$

$$\text{Bốn điểm } A, B, C, D \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m+2n=13$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{m} = (4; 3; 1)$ và $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi \vec{p} là véc tơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ và $|\vec{p}| = 15$. Tọa độ của véc tơ \vec{p} là

A. $(9; -12; 0)$.

B. $(0; 9; -12)$.

C. $(-9; 12; 0)$.

D. $(0; 9; -12)$.

Lời giải

Ta có: $[\vec{m}, \vec{n}] = (3; -4; 0)$.

Vì \vec{p} là véc tơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ nên $\vec{p} = k \cdot [\vec{m}, \vec{n}] = (3k; -4k; 0)$, $k > 0$.

Ta có: $|\vec{p}| = 15 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2 + 16k^2} = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} k=-3 \\ k=3 \end{cases}.$

So sánh với điều kiện $k > 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \vec{p} = (9; -12; 0)$.

Câu 18. (Việt Đức Hà Nội 2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -2; 1); B(1; 0; -2); C(3; 1; -2); D(-2; -2; -1)$. Câu nào sau đây **sai**?

- A.** Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. **B.** Tam giác ACD là tam giác vuông tại A .
C. Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} là góc tù. **D.** Tam giác ABD là tam giác cân tại B .

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; -3); \quad \overrightarrow{CD} = (-5; -3; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3; 3; -3); \quad \overrightarrow{BD} = (-3; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-2; 0; -2)$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -6; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) = 0.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng. Vậy đáp án A sai.

$$\text{Lại có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + (-3) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow AC \perp AD.$$

\Rightarrow tam giác ACD là tam giác vuông tại A . Vậy đáp án B đúng.

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 = -14 < 0 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) < 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \text{ là góc tù.}$$

Vậy đáp án C đúng.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{14} \text{ hay } AB = BD \Rightarrow \text{tam giác } ABD \text{ là tam giác cân tại } B. \text{ Vậy đáp án D đúng.}$$

Câu 19. (THPT Lương Thế Vinh - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1), B(2; 1; 0), C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{ABC}$.

- A.** $D(8; 7; -1)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$. **D.** $D(-12; -1; 3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } AD \parallel BC \Rightarrow AD \text{ nhận } \overrightarrow{CB} = (5; 2; -1) \text{ là một VTCP.}$$

$$\text{Kết hợp với } AD \text{ qua } A(-2; 3; 1) \Rightarrow AD: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow D(5t - 2; 2t + 3; 1 - t).$$

$$\text{Biên đổi } S_{ABCD} = 3S_{ABC} \Leftrightarrow S_{ACD} = 2S_{ABC} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -2; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; -4; 0) \\ \overrightarrow{AD} = (5t; 2t; -t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; 1; -18) \\ [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (4t; -t; 18t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-18)^2} = \frac{\sqrt{341}}{2} \\ S_{ACD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(4t)^2 + (-t)^2 + (18t)^2} = \frac{|t| \sqrt{341}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với (1) ta được } \frac{|t|\sqrt{341}}{2} = \sqrt{341} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow D(8; 7; -1) \\ t = -2 \Rightarrow D(-12; -1; 3) \end{cases}$$

$$\text{Với } D(8; 7; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (10; 4; -2) = 2\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Với } D(-12; -1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (-10; -4; 2) = -2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Hình thang $ABCD$ có đáy AD thì $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$.

Do đó chỉ có $D(-12; -1; 3)$ thỏa mãn.

Câu 20. (Bình Giang-Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $A(4; 1; 2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng ABC là

A. $\frac{\sqrt{11}}{11}$.

B. 1.

C. 11.

D. $\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi DH là độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng ABC .

$$\text{Công thức tính thể tích tứ diện } ABCD \text{ là: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

$$\text{Công thức tính diện tích tam giác } S_{\triangle ABC} \text{ là: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

$$\text{Mặt khác } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot DH \text{ nên}$$

$$\frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| \cdot DH \Rightarrow DH = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (3; 0; 3); \overrightarrow{AC} = (1; 1; -2); \overrightarrow{AD} = (4; 1; 0) \\ \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] &= (-3; 9; 3); [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -3. \end{aligned}$$

$$\text{Nên } DH = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|} = \frac{3}{\sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{11}}{11}.$$

Câu 21. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; -2; 2-a)$; $B(a+3; -1; 1)$; $C(-4; -3; 0)$; $D(-1; -2; a-1)$. Tập hợp các giá trị của a để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là tập con của tập nào sau?

A. $(-7; -2)$.

B. $(3; 6)$.

C. $(5; 8)$.

D. $(-2; 2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}(a+3; 1; a-1), \overrightarrow{AC}(-4; -1; a-2), \overrightarrow{AD}(-1; 0; 2a-3).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2a-3; -a^2-5a+10; -a+1).$$

Để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow -2a + 3 + (2a - 3) \cdot (-a + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI

<https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing>

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương
https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

Tải nhiều tài liệu hơn tại: <http://diendangiaovientoan.vn/>

ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!

Nguyễn Bảo Vương