TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – XUẤT SẮC MỨC 9-10 ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Tìm m để $f(x,m)=0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D ?

— Bước 1. Tách m ra khỏi biến số và đưa về dạng $f(x)=A(m)$.

— Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số $A(m)$ để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$.

— Bước 4. Kết luận các giá trị cần tìm của $A(m)$ để phương trình $f(x)=A(m)$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D.

Lưu ý

— Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min\limits_{x\in D} f(x)\le A(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.

— Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại k điểm phân biệt.

Dạng 1. Phương trình logarit chứa tham số

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho phương trình $\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

A. $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0 \Leftrightarrow \left[1+\log(x)\right]^2-(m+2)\log_2 x+m-2=0$ (*)

Đặt $t=\log_2 x=g(x)$ $\Rightarrow 0\le t\le 1$ và mỗi giá trị của x sẽ cho một giá trị của t

(*) trở thành $(1+t)^2-(m+2)t+m-2=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1-mt-2t+m-2=0$

$\Leftrightarrow t^2-1=m(t-1)$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+1-m)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=m-1 & (1) \\ t=1 & (2)\end{array}\right.$

Với $t=1$ thì phương trình có một nghiệm $x=2$

Vậy để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t\ne 1$

$0\le m-1<1 \Leftrightarrow 1\le m<2$

Vậy $m\in[1;2)$ để thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$. Số các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|<15$ là:

A. 14 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0 \\ 2x^2-(m+3)x+1-m=x^2-x+1-3m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0\,(*) \\ x^2-(m+2)x+2m=0\,(1) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0\,(*) \\ \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m+1-3m>0 \\ 2^2-1+1-3m>0 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+1>0 \\ 4-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<2-\sqrt{3}$.

Theo giả thiết $\left|x_1-x_2\right|<15 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2<225 \Leftrightarrow m^2-4m-221<0 \Leftrightarrow -13<m<17$ Do đó $-13<m<2-\sqrt{3}$. Vậy số các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 13.

Câu 3. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m với $m<64$ để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x+m)+\log_5(2-x)=0$ có nghiệm. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 2018. **B.** 2016. **C.** 2015. **D.** 2013.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\frac{1}{5}}(x+m)+\log_5(2-x)=0 \Leftrightarrow \log_5(x+m)=\log_5(2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x=\dfrac{2-m}{2} \end{cases}$.

Vì $x<2$ nên $\dfrac{2-m}{2}<2 \Leftrightarrow m>-2$.

Kết hợp với $m<64$. Khi đó $-2<m<64$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=\{-1;0;1\ldots63\}$ có 65 giá trị.

Vậy tổng S các giá trị của m để phương trình có nghiệm là: $S=\dfrac{(-1+63).65}{2}=2015$.

Câu 4. **(Mã 102 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3(6x-1)=-\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\log_9 x^2-\log_3(6x-1)=-\log_3 m$.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases}$.

Khi đó

$\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 m = \log_3(6x-1)$

$\Leftrightarrow mx = 6x - 1 \Leftrightarrow x(6-m) = 1\ (1)$

+) Với $m = 6$, phương trình (1) trở thành $0 = 1$ (vô lý).

+) Với $m \neq 6$, phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{1}{6-m}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{6-m} > \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{6-m} - \dfrac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{6-m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6$.

Vậy $0 < m < 6$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5. **(Mã 103 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 4. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$.

Xét phương trình: $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m\ (1)$.

Cách 1.

$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x} = m \Leftrightarrow 5 - \dfrac{1}{x} = m\quad (2)$.

Xét $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

Có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(5 - \dfrac{1}{x}\right) = 5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ phương trình (2) có nghiệm $x > \dfrac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2.

Với $\begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$, ta có:

$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x} = m \Leftrightarrow (5-m)x = 1 \quad (2)$

Với $m = 5$, phương trình (2) thành $0.x = 1$ (vô nghiệm).

Với $m \neq 5$, $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5-m}$.

Xét $x > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5-m} > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{m}{5.(5-m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 6. **(Mã 101 - 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

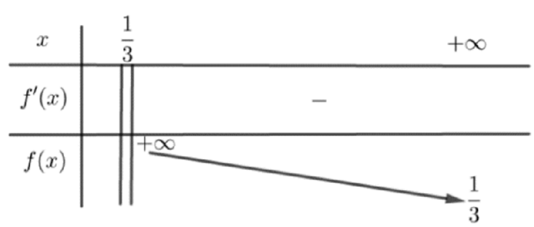
Chọn A

Điều kiện: $x > \dfrac{1}{3}$ và $m > 0$.

Phương trình đã cho tương đương: $\log_3 x - \log_3(3x-1) = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-1} = \dfrac{1}{m}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$ với $x > \dfrac{1}{3}$

Có $f'(x) = -\dfrac{1}{(3x-1)^2} < 0, \ \forall x > \dfrac{1}{3}$



Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm khi $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < m < 3$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1,2\}$.

Câu 7. **(Mã 104 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - 4\log_3(4x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 5. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

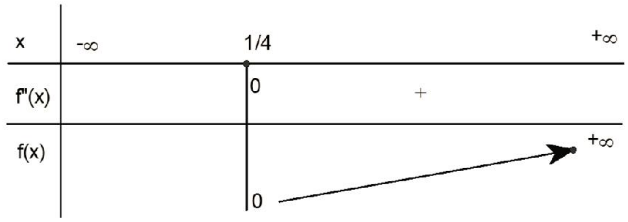
Chọn C

Điều kiện: $x > \dfrac{1}{4}$. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 x - 4\log_3(4x-1) = -\log_3 m$

$\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(4x-1)^4 = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{x}{(4x-1)^4} = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow m = \dfrac{(4x-1)^4}{x} = f(x)$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{(4x-1)^4}{x}$ có $f'(x)=\dfrac{16x(4x-1)^3-(4x-1)^4}{x^2}=\dfrac{(4x-1)^3(12x+1)}{x^2}>0,\forall x>\dfrac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:



Do đó phương trình có nghiệm khi $m>0$. Vậy có vô số giá trị nguyên của m.

Câu 8. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho phương trình $\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{Z}$ để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

+ Điều kiện $\begin{cases}x+2>0\\0<mx-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\5<mx\neq 6\end{cases}$

Với điều kiện trên, phương trình $\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$ $(*)$

$\Leftrightarrow \log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{mx-5}(x+2)$

$\Leftrightarrow x^2-6x+12=x+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.$.

$x=2$ là nghiệm phương trình $(*)$ khi $5<2m\neq 6\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}<m\neq 3$, vì $m\in Z\Rightarrow\begin{cases}m\geq 4\\m\in Z\end{cases}$.

$x=5$ là nghiệm phương trình $(*)$ khi $5<5m\neq 6\Leftrightarrow 1<m\neq\dfrac{6}{5}$, vì $m\in Z\Rightarrow\begin{cases}m\geq 2\\m\in Z\end{cases}$.

+ Phương trình $\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$ có nghiệm duy nhất khi $m=2$ hoặc $m=3$

Thử lại

$m=2$: $\log_{2x-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{2x-5}}\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\log_{2x-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{2x-5}(x+2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+12=x+2\\x+2>0\\0<2x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x=5$.

$m=3$: $\log_{3x-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{3x-5}}\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\log_{3x-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{3x-5}(x+2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+12=x+2\\x+2>0\\0<4x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x=5$.

Vậy có hai giá trị $m\in Z$ thỏa mãn ycbt.

Câu 9. Cho phương trình $\log_{2+\sqrt{5}}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)+\log_{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1^2+x_2^2=3$?

A. 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$\log_{2+\sqrt{5}}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)+\log_{\sqrt{5}-2}\left(x^2+mx-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{5}+2}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)-\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2mx-2m^2>0 \\ 2x^2-x+2m-4m^2=x^2+mx-2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2mx-2m^2>0 \\ x^2-(m+1)x+2m-2m^2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx-2m^2>0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1=2m \\ x_2=1-m \end{array}\right. \end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m)^2+m(2m)-2m^2>0 \\ (1-m)^2+m(1-m)-2m^2>0 \\ (2m)^2+(1-m)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2>0 \\ 2m^2+m-1>0 \\ 5m^2-2m-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -1<m<\dfrac{1}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{11}}{5}; m=\dfrac{1+\sqrt{11}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1-\sqrt{11}}{5}$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa yêu cầu đề bài

Câu 10. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $0<m<\dfrac{1}{4}$ **B.** $0\le m<\dfrac{1}{4}$ **C.** $m\le\dfrac{1}{4}$ **D.** $-\dfrac{1}{4}<m<0$

Lời giải

Ta có:

$4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0 \Leftrightarrow \left(2\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_2 x+m=0 \Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x=-m \quad (1)$

Đặt $t=\log_2 x$ với $t\in(-\infty;0)$.

$(1)\Leftrightarrow t^2+t=-m$.

Xét $f(t)=t^2+t$.

$f'(t)=2t+1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		0
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên $-\frac{1}{4}<-m<0 \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{4}$

Câu 11. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Tìm m để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2},4\right]$.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $-3\le m\le\frac{7}{3}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $-3<m\le\frac{7}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>2$. Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow (m-1)\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2\right]^2+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4=0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\left[-2\log_2(x-2)\right]^2+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4=0$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2)+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4=0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\log_2^2(x-2)+(m-5)\log_2(x-2)+m-1=0.\ (1)$$

Đặt $t=\log_2(x-2)$. Vì $x\in\left[\frac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Phương trình (1) trở thành $(m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$, $t\in[-1;1]$. (2)

$$\Leftrightarrow m=\frac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}=f(t), t\in[-1;1].$$

Ta có $f'(t)=\frac{-4t^2+4}{(t^2+t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	-1		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left[\frac{5}{2};4\right]$ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[-1;1]$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-3\le m\le\frac{7}{3}$.

Câu 12. (Chuyên Bắc Giang 2019) **Tìm** m **để phương trình** $\log_2{}^2 x-\log_2 x^2+3=m$ **có nghiệm** $x\in[1;8]$.

A. $6\le m\le 9$ **B.** $2\le m\le 3$ **C.** $2\le m\le 6$ **D.** $3\le m\le 6$

Lời giải

Chọn C

$\log_2{}^2 x-\log_2 x^2+3=m$ (1)

• Điều kiện: $x>0$ (*)

pt (1) $\Leftrightarrow$ $(\log_2 x)^2-2\log_2 x+3=m$

Cách 1: **(Tự luận)**

• Đặt $t=\log_2 x$, với $x\in[1;8]$ thì $t\in[0;3]$.

Phương trình trở thành: $t^2-2t+3=m$ (2)

• Để phương trình (1) có nghiệm $x\in[1;8]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in [0;3]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[0;3]} f(t) \le m \le \max\limits_{[0;3]} f(t)$, trong đó $f(t) = t^2 - 2t + 3$

$\Leftrightarrow 2 \le m \le 6$. (bấm máy tính)

Câu 13. **(HSG Bắc Ninh-2019)** Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m(*)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2020.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ m + \log_2 x \ge 0 \end{cases}$.

$\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m \Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 8\log_2 x - 4\sqrt{m + \log_2 x} = 4m$

$\Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 4\log_2 x + 1 = 4\sqrt{m + \log_2 x} + 4(m + \log_2 x) + 1$

$\Leftrightarrow (2\log_2 x - 1)^2 = \left(2\sqrt{m + \log_2 x} + 1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = 2\log_2 x - 1 \\ 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = -2\log_2 x + 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \\ \sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \end{array}\right.$

* **TH1:** $\sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \le 0 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 1 \\ \log_2^2 x - \log_2 x - m = 0 \ (1) \end{cases}$

Đặt: $t = \log_2 x \ (t \le 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = m \ (2)$

Đặt: $g(t) = t^2 - t \ (t \in (-\infty; 0]$.Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \le 0$

Ta có: $g(t) = t^2 - t \Rightarrow g'(t) = 2t - 1 < 0 \forall t \le 0$

Ta có BBT:

t	$-\infty$		0
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \le 0$ thì $m \ge 0$ (*)

* **TH2 :** $\sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \ge 1 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \ge 1 \\ \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 - m = 0 \ (3) \end{cases}$

Đặt: $t = \log_2 x \ (t \ge 1)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 3t + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 3t + 1 \ (4)$

Đặt: $g(t) = t^2 - t + 1, t \in [1; +\infty)$

Ta có: $g(t) = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow g'(t) = 2t - 3$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2} \in [1; +\infty)$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \ge 1$

Ta có BBT:

t	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$ thì $m \geq -\frac{5}{4}$ (**)

Kết hợp (*) và (**), $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; ...; 2019\}$

Vậy có tất cả 2021 giá trị của m thỏa mãn ycbt

Câu 14. **(Đề Tham Khảo 2017)** Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 4014. **B.** 2018. **C.** 4015. **D.** 2017 .

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > -1, mx > 0$.

$\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x}$

Xét hàm $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ $(x > -1, x \neq 0)$; $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \ (l) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m < 0. \end{array}\right.$

Vì $m \in [-2017; 2017]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu là $m \in \{-2017; -2016; ...; -1; 4\}$.

Chú ý: Trong lời giải, ta đã có thể bỏ qua điều kiện $mx > 0$ vì với phương trình $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ với $0 < a \neq 1$ ta chỉ cần điều kiện $f(x) > 0$.

Câu 15. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx - \ln x = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2; 3)$

A. $\left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 3}{3}\right)$ **B.** $\left(-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right) \cup \left(\frac{\ln 3}{3}; +\infty\right)$

C. $\left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{1}{e}\right)$ **D.** $\left(\frac{\ln 3}{3}; \frac{1}{e}\right)$

Lời giải

Chọn D

$mx-\ln x=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{\ln x}{x}, \forall x\in(2;3)$

Đặt $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, \forall x\in(2;3)$

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

BBT

x	2		e		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	$\dfrac{\ln 3}{3}$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m\in\left(\dfrac{\ln 3}{3};\dfrac{1}{e}\right)$.

Câu 16. **(THPT Dông Sơn Thanh Hóa 2019)** Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình: $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.log_2\left((x-1)^2+2\right)=2^{2|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)(*)$

Đặt $f(t)=2^t\log_2(t+2),\ t\ge 0$; $f'(t)=2^t\ln 2.\log_2(t+2)+2^t\dfrac{1}{(t+2)\ln 2}>0,\forall t\ge 0$.

Vậy hàm số $f(t)=2^t\log_2(t+2)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) ta có $f\left[(x-1)^2\right]=f\left[2|x-m|\right]\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2(x-m)=(x-1)^2\\2(x-m)=-(x-1)^2\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=x^2-4x+1+2m=0\ (a)\\x^2=2m-1\ (b)\end{array}\right.$

Do các phương trình (a) và (b) là phương trình bậc hai nên để phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt ta có các trường hợp sau:

TH1: $m=\dfrac{1}{2}$, (b) chỉ có nghiệm kép bằng 0 và (a) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 (thỏa mãn).

TH2: $m>\dfrac{1}{2}$, (b) có 2 nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2m-1}$ và (a) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng $\pm\sqrt{2m-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\g(\pm\sqrt{2m-1})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\g(\pm\sqrt{2m-1})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\m=1\end{cases}\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

+ TH3: $m>\dfrac{1}{2}$, (b) có 2 nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2m-1}$ và (a) có nghiệm kép khác $\pm\sqrt{2m-1}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(\pm\sqrt{2m-1}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $\dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} = 3$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\ln\left(m + \ln\left(m + \sin x\right)\right) = \sin x$ có nghiệm.

A. $\dfrac{1}{e} + 1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{e} - 1$. **<u>B.</u>** $1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{e} - 1$. **C.** $1 \leq \mathrm{m} \leq \dfrac{1}{e} + 1$. **D.** $1 \leq \mathrm{m} < \mathrm{e} - 1$.

Lời giải

Đặt $u = \ln\left(m + \sin x\right)$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u = \ln\left(m + \sin x\right) \\ \ln\left(m + u\right) = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = m + \sin x \\ e^{\sin x} = m + u \end{cases}$

Từ hệ phương trình ta suy ra: $e^u + u = e^{\sin x} + \sin x \ (*)$

Xét hàm số $f\left(t\right) = e^t + t$ có $f'\left(t\right) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow f\left(u\right) = f\left(\sin x\right) \Leftrightarrow u = \sin x$

Khi đó ta được: $\ln\left(m + \sin x\right) = \sin x \Leftrightarrow e^{\sin x} - \sin x = m\left(**\right)$

Đặt $z = \sin x, z \in \left[-1;1\right]$. Phương trình $\left(**\right)$ trở thành: $e^z - z = m\left(**\right)$

Xét hàm số: $g\left(z\right) = e^z - z$ trên $\left[-1;1\right]$.

Hàm số $g\left(z\right) = e^z - z$ liên tục trên $\left[-1;1\right]$ và có $\max\limits_{[-1;1]} g\left(z\right) = g\left(1\right) = e - 1, \min\limits_{[-1;1]} g\left(z\right) = g\left(0\right) = 1$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(**\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ $1 \leq m \leq e - 1$.

Câu 18. **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5. **B.** Vô số. **C.** 4. **<u>D.</u>** 3.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Điều kiện: $x > 1$

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow (x-1)^2 = mx - 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 9 = mx$. Do $x > 1$ nên suy ra $\dfrac{x^2 - 2x + 9}{x} = m.$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$		8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào BBT ta thấy yêu cầu của bài toán là $4 < m < 8$. Do m nguyên nên $m \in \{5;6;7\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. **(THPT Trần Phú - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $m^2 \ln\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right) = \left(2 - m\right)\ln x - 4$ có nghiệm thuộc vào đoạn $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}; 1\right]$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Có $m^2\ln\left(\frac{x}{e}\right)=(2-m)\ln x-4 \Leftrightarrow m^2(\ln x-1)=(2-m)\ln x-4 \Leftrightarrow (m^2+m-2)\ln x=m^2-4\ (1)$.

• Với $m^2+m-2=0 \Rightarrow m=1\ (m>0)$, $(1)\Leftrightarrow 0\ln x=-3$ (Vô nghiệm) $\Rightarrow$ Loại $m=1$.

• Với $m\neq 1$, $(1)\Leftrightarrow \ln x=\frac{m-2}{m-1}\ (2)$.

+ Hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{e};1\right]\Rightarrow \ln x\in[-1;0]$.

+ Phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{e};1\right]$ khi

$$-1\le\frac{m-2}{m-1}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{m-2}{m-1}\ge -1\\ \frac{m-2}{m-1}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{3}{2}\\ m<1\end{array}\right.\\ 1<m\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\le m\le 2 \Rightarrow m=2.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20. **(THPT Trần Phú - 2019)** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $4\log_{36}^2 x-m\log_6\frac{x}{6}+2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2-72\sqrt{x_1.x_2}+1296\le 0$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$4\log_{36}^2 x-m\log_6\frac{x}{6}+2=0$ (Điều kiện $x>0$)

$\Leftrightarrow \log_6^2 x-m\log_6 x+m+2=0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta=m^2-4(m+2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<2-2\sqrt{3}\\ m>2+2\sqrt{3}\end{array}\right.$

$x_1.x_2-72\sqrt{x_1.x_2}+1296\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1.x_2}=36 \Leftrightarrow x_1.x_2=1296$

$\Rightarrow \log_6(x_1.x_2)=4 \Leftrightarrow \log_6 x_1+\log_6 x_2=4 \Rightarrow m=4$ (không thỏa điều kiện của m)

Câu 21. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2019}(4-x^2)+\log_{\frac{1}{2019}}(2x+m-1)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt là $T=(a;b)$. Tính $S=2a+b$.

A. 18. **B.** 8. **C.** 20. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=(-2;2)\cap\left(\frac{1-m}{2};+\infty\right)$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$\log_{2019}\frac{4-x^2}{2x+m-1}=0 \Leftrightarrow 4-x^2=2x+m-1 \Leftrightarrow x^2+2x+m-5=0$ (*)

Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \Delta=1^2-1.(m-5)=6-m>0 \Leftrightarrow m<6$ (1)

Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm lần lượt là $x_1=-1+\sqrt{6-m};x_2=-1-\sqrt{6-m}$.

TH1: $\frac{1-m}{2} \le -2 \Leftrightarrow m \ge 5$ (2) $\Rightarrow D = (-2;2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -1+\sqrt{6-m} < 2 \\ -1-\sqrt{6-m} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-m} < 3 \\ \sqrt{6-m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 5$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $5 < m < 6$.

TH2: $-2 < \frac{1-m}{2} < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 5$ (4).

$\Rightarrow D = \left(\frac{1-m}{2};2\right)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm

$x_1, x_2 \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -1+\sqrt{6-m} < 2 \\ -1-\sqrt{6-m} > \frac{1-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-m} < 3 \\ \sqrt{6-m} < \frac{m-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 5$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $m \in \varnothing$. Vậy $5 < m < 6$. Suy ra $a = 5, b = 6 \Rightarrow 2a + b = 16$.

Câu 22. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

A. 17. **B.** 16. **C.** 14. **<u>D</u>.** 15.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Điều kiện xác định: $x > -3$ và $x \ne -2$.

Biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau: $\log_3(x+3) + 4m\log_{(x+3)} 3 - 16 = 0$.

$\Leftrightarrow \log_3^2(x+3) - 16\log_3(x+3) + 4m = 0$ (1).

Đặt $\log_3(x+3) = t$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 16t + 4m = 0$ (2).

Ta có: $\log_3(x+3) = t \Leftrightarrow x = 3^t - 3$.

Theo điều kiện đề bài thì $x > -2$ nên $3^t - 3 > -2 \Leftrightarrow t > 0$.

Vậy để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$

thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 = 16 > 0 \\ t_1 . t_2 = 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 - 4m > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 16$. Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 23. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019)** Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a + b$ bằng

A. $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{22}{3}$. **<u>D</u>.** 7.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Ta có:

$\ln(3x-mx+1)=\ln(-x^2+4x-3)$ (1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x-3>0 \\ 3x-mx+1=-x^2+4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<3 \\ x^2-x+4=mx \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<3 \\ \dfrac{x^2-x+4}{x}=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<3 \\ \dfrac{x^2-x+4}{x}=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<3 \\ x+\dfrac{4}{x}-1=m \quad (2) \end{cases}$

Xét hàm số: $f(x)=x+\dfrac{4}{x}-1;\quad x\in(1;3)$ có $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$

$f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in(1;3)\Rightarrow f(2)=3 \\ x=-2\notin(1;3) \end{array} \right.$

Bảng biến thiên:

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:
Phương trình (1) có nghiệm.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $(1;3)$.

$\Leftrightarrow 3\le m<4 \Leftrightarrow m\in[3;4)$.

Suy ra $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=3+4=7$.

Câu 24. **(Cần Thơ 2019)** Cho phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x-4\sqrt{1-\log_2 x}=m$, với m là tham số thực. Số các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của m để phương trình đã cho có nghiệm là

A. 2021. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $1-\log_2 x\ge 0 \Leftrightarrow \log_2 x\le 1 \Leftrightarrow 0<x\le 2$.

Với điều kiện trên thì phương trình tương đương với $(1-\log_2 x)^2-4\sqrt{1-\log_2 x}-1=m$ (1).

Đặt $t=\sqrt{1-\log_2 x}$, vì $x\in(0;2]$ nên $t\ge 0$. Khi đó, (1) trở thành $t^4-4t-1=m$ (2).

Để (1) có nghiệm $x\in(0;2]$ thì (2) có nghiệm $t\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=t^4-4t-1$, $t\in[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=4t^3-4$. Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1\in[0;+\infty)$.

Ta được bảng biến thiên của $f(t)$ như sau:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Theo BBT, để (2) có nghiệm $t \geq 0$ thì $m \geq -4$, mà $m \in [-2019;2019] \cap \mathbb{Z}$ nên tập hợp các giá trị của m cần tìm là $\{-4;-3;-2;-1;0;1;\ldots;2019\}$.

Vậy có tất cả 2024 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 25. **(Nam Định - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-1;0)$. **B.** $m \in (-2;0)$. **C.** $m \in (-1;+\infty)$. **D.** $m \in [-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có pt: $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right] \Leftrightarrow x\log_3(x+1) = 1 + m\log_3(x+1)$

$\Leftrightarrow (x-m)\log_3(x+1) = 1$ (1).

Đặt: $\log_3(x+1) = t \Rightarrow x = 3^t - 1$

Ta có, Pt (1) $\Rightarrow (3^t - m - 1).t = 1 \Rightarrow f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1 = m$, với $t \neq 0$.

Đặt: $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$, với $t \neq 0$.

$\Rightarrow f'(t) = 3^t.\ln 3 + \frac{1}{t^2} > 0, t \in (-\infty;0),(0;+\infty)$.

Suy ra, $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

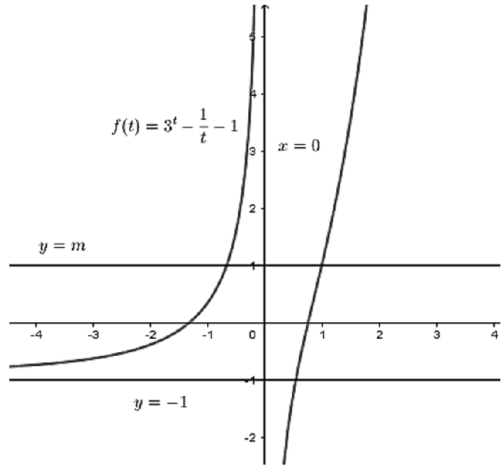
Ta xét các giới sau:

$\lim\limits_{t\to-\infty}\left(3^t - \frac{1}{t} - 1\right) = -1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(3^t - \frac{1}{t} - 1\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{t\to0^+}\left(3^t - \frac{1}{t} - 1\right) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to0^-}\left(3^t - \frac{1}{t} - 1\right) = +\infty$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$, với $t \in (-\infty;0),(0;+\infty)$.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	||	$+$	
$f(t)$	-1 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ $+\infty$



Ta có, số nghiệm của Pt (1) cũng chính là số nghiệm của đồ thị hàm số (C) $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$ và đồ thị hàm số $y = m$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa, vào đồ thị ở hình vẽ trên, để phương trình $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có ba nghiệm khi $m \in (-1;+\infty)$.

Cách 2.

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có: $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ (1)

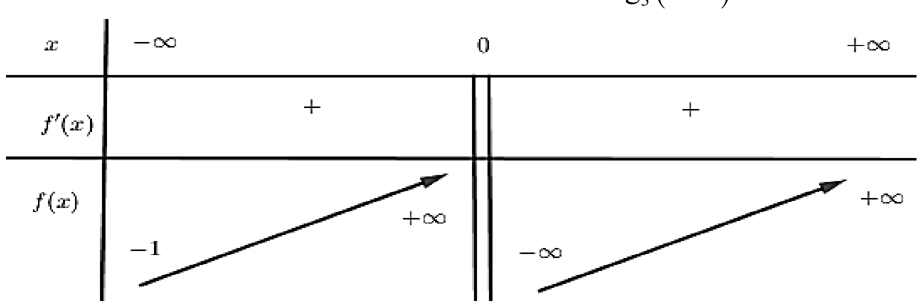
Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm phương trình trên.

Pt (1) $\Leftrightarrow (x-m)\log_3(x+1) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\log_3(x+1)} = m$.

Đặt: $f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)\ln 3.(\log_3(x+1))^2} > 0, \forall x \in (-1;+\infty)$.

Suy ra $f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)}$ là hàm số đồng biến $\forall x \in (-1;+\infty)$.

Ta có BBT của hàm số $f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)}$.



Dựa, vào BBT ở hình vẽ trên, để phương trình $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có ba nghiệm khi $m \in (-1;+\infty)$.

Câu 26. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho a, b là các số thực dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a + b = 2019$ để phương trình $5\log_a x.\log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1.x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$; với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$

A. 22209. **B.** 20190. **C.** 2019. **D.** 14133.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra ta có

$5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0$

$\Leftrightarrow 5\log_a x.\left(\log_b a.\log_a x\right)-4\log_a x-3\left(\log_b a.\log_a x\right)-2019=0$

$\Leftrightarrow 5\log_b a.\left(\log_a x\right)^2-\left(4+3\log_b a\right)\log_a x-2019=0\left(*\right)$

Vì $a,b>1\Rightarrow \log_b a.\left(-2019\right)<0\Rightarrow\left(*\right)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

Theo Viet ta có:

$$\log_a x_1+\log_a x_2=\frac{4+3\log_b a}{5\log_b a}\Leftrightarrow \log_a\left(x_1.x_2\right)=\frac{4+3.\dfrac{\ln a}{\ln b}}{5\dfrac{\ln a}{\ln b}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(x_1.x_2\right)}{\ln a}=\frac{4\ln b+3\ln a}{5\ln a}\Leftrightarrow \ln\left(x_1.x_2\right)=\frac{1}{5}\left(4\ln\left(2019-a\right)+3\ln a\right)$$

Xét $f\left(a\right)=\frac{1}{5}\left(4\ln\left(2019-a\right)+3\ln a\right)$ với $a\in\left(1;2019\right)$

Ta có $f'\left(a\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{2019-a}+\frac{3}{a}\right)$; $f'\left(a\right)=0\Leftrightarrow a=\frac{6057}{7}$

Bảng biến thiên

a	1		$\frac{6057}{7}$		2019
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	$f(\frac{6057}{7})$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta được giá trị lớn nhất của $\ln\left(x_1.x_2\right)=\frac{4}{5}.\ln\frac{8076}{7}+\frac{3}{5}.\ln\frac{6057}{7}$ khi $a=\frac{6057}{7}$.

Từ đó suy ra $m=6057$; $n=8076\Rightarrow S=m+2n=6057+2.8076=22209$

Câu 27. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=2a+3b$

A. $S_{\min}=33$. **B.** $S_{\min}=30$. **C.** $S_{\min}=17$. **D.** $S_{\min}=25$.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện để hai phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ và $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt là: $b^2-20a>0$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\ln x_1+\ln x_2=-\dfrac{b}{a}\\ \log x_3+\log x_4=-\dfrac{b}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln\left(x_1x_2\right)=-\dfrac{b}{a}\\ \log\left(x_3x_4\right)=-\dfrac{b}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1x_2=e^{-\frac{b}{a}}\\ x_3x_4=10^{-\frac{b}{5}}\end{cases}$.

Mà $x_1x_2>x_3x_4\Rightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a}>-\frac{b}{5}\ln 10$

$\Rightarrow a > \dfrac{5}{\ln 10} \Rightarrow a \geq 3$.

Theo điều kiện có $b^2 - 20a > 0 \Rightarrow b^2 > 20a \geq 60 \Rightarrow b \geq 8$.

Từ và suy ra $S = 2a + 3b \geq 30 \Rightarrow S_{\min} = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$.

Câu 28. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right) + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2+mx+1>0 \\ x+2>0 \end{cases}$

$\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right) + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2$

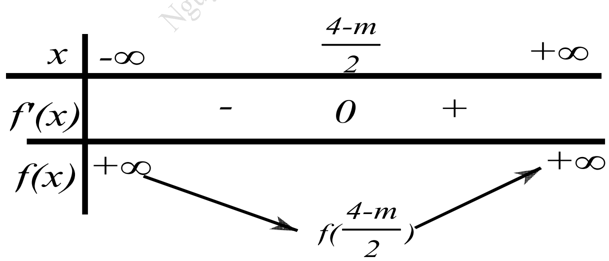
$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{2x^2+mx+1} + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2+\log_2(x+2)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0;+\infty)$,

có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà $f\left(\sqrt{2x^2+mx+1}\right) = f(x+2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m-4)x - 3 = 0 \end{cases}$

Do $f(x) = x^2 + (m-4)x - 3$ là tam thức bậc hai nên có bảng biến thiên



Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = x^2 + (m-4)x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2.

suy ra: $\begin{cases} -2 < \dfrac{4-m}{2} \\ f\left(\dfrac{4-m}{2}\right) < 0 < 9-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \dfrac{9}{2} \\ \left(\dfrac{4-m}{2}\right)^2 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{2}$.

Do $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1;2;3;4\}$ .Vậy có 4 giá trị của m .

Câu 29. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x+m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_4(1009x)=t \Rightarrow 1009x=4^t$

Phương trình đã cho có dạng $\log_6(2.4^t+m)=t \Leftrightarrow 2.4^t+m=6^t \Leftrightarrow m=6^t-2.4^t$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(t)=6^t-2.4^t$ với đường thẳng $y=m$.

Xét hàm số: $f(t)=6^t-2.4^t$ $f'(t)=6^t\ln 6-2.4^t\ln 4=2^t\left(3^t\ln 6-2.2^t\ln 4\right)$.

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow 6^t\ln 6=2.4^t\ln 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t=4\log_6 2 \Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)$$

+) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(6^t-2.4^t\right)=\lim\limits_{t\to+\infty} 6^t\left(1-2.\left(\frac{2}{3}\right)^t\right)=+\infty$

+) $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(6^t-2.4^t\right)=0$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Với $f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)\right)\approx -2,0136$

Từ bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm thì $m\ge f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)\right)\approx -2,0136$.

Vậy $-2\le m<2018$. Có 2020 số nguyên m.

Câu 30. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3(3^x+2m)=\log_5(3^x-m^2)$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_3(3^x+2m)=\log_5(3^x-m^2)=t \Rightarrow \begin{cases}3^x+2m=3^t\\ 3^x-m^2=5^t\end{cases}$

$\Rightarrow 2m+m^2=3^t-5^t \Leftrightarrow m^2+2m+1=3^t-5^t+1$ (*).

Xét hàm số $f(t)=3^t-5^t+1$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3^t.\ln 3-5^t.\ln 5$.

Khi đó $f'(t)=0 \Leftrightarrow 3^t.\ln 3-5^t.\ln 5=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t=\frac{\ln 5}{\ln 3} \Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5)=t_0$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5)$	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$-\infty$ ↗	$f(\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5))$	↘ $-\infty$

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \le f(t_0) \Leftrightarrow -\sqrt{f(t_0)}-1 \le m \le \sqrt{f(t_0)}-1 \Rightarrow -2,068 \le m \le 0,068.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 31. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1;27]$.

A. $m \in (0;2)$. **B.** $m \in [0;2]$. **C.** $m \in [2;4]$. **D.** $m \in (0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{\log_3 x + 1}$. Với $x \in [1;27]$ thì $t \in [1;2]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = t^2 + t \; (*)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên đoạn $[1;2]$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1;2]$ nên hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $[1;2]$.

Bảng biến thiên:

t	1	2
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	2 ↗	6

Để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1;27]$ thì phương trình $(*)$ phải có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1;2]$.

Từ bảng biến thiên, suy ra $2 \le 2m + 2 \le 6 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.

Câu 32. **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_9 x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1;9]$.

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_3^2 x - m\log_9 x^2 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - m\log_3 x + 2 - m = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, với $x \in [1;9] \Rightarrow t \in [0;2]$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - mt + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+2}{t+1}$ (1) (Do $t \ne -1, \forall t \in [0;2]$).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+2}{t+1}$ với $t \in [0;2]$ ta có:

$$f'(t) = \frac{t^2+2t-2}{(t+1)^2},\; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2+2t-2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1+\sqrt{3} \in [0;2] \\ t = -1-\sqrt{3} \notin [0;2] \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

t	0		$-1+\sqrt{3}$		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	$-2+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	2

Khi đó: phương trình đã cho có nghiệm $x\in[1;9]$ $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm $t\in[0;2]$.

$\Leftrightarrow -2+2\sqrt{3}\le m\le 2$.

Mặt khác, do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=2$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33. **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_2(mx)=\log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} mx>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx>0 \\ x>-1 \end{cases}$.

Ta có $\log_2(mx)=\log_{\sqrt{2}}(x+1)\Leftrightarrow \log_2(mx)=2\log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2(mx)=\log_2(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ mx=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ mx=(x+1)^2 \quad (1) \end{cases}$.

Nhận xét với $x=0$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x\ne 0$ thì $(1)\Leftrightarrow m=\dfrac{(x+1)^2}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ với $x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\}$

có $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
								y = m

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $0\le m<4$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2(mx)=\log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm.

Câu 34. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)$ có nghiệm là

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases}2020x+m>0\\1010x>0\end{cases}$ (*)

Đặt $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)=t$.

Suy ra $\begin{cases}2020x+m=6^t\\1010x=4^t\end{cases}$ (1).

Từ đó $m=6^t-2.4^t$ (2).

Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình (2) thì $x_0=\dfrac{4^{t_0}}{2010}$ là nghiệm của hệ phương trình (1) đồng thời x_0 thỏa mãn điều kiện $(*)$. Do đó x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Từ đó, điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho có nghiệm là phương trình (2) có nghiệm.

Xét hàm số $f(t)=6^t-2.4^t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=6^t.\ln 6-2.4^t.\ln 4$ và $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16):=\alpha$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:

t	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-2,014$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge -2$ $(\text{do } m\in\mathbb{Z})$.

Vậy tất cả các giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là các số nguyên thuộc tập hợp $\{-2.-1,0,1,2,....,2019\}$, có tất cả 2022 giá trị.

Câu 35. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\,x_2$ và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3,\,x_4$ sao cho $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=2a+3b$.

A. 30. **B.** 25. **C.** 33. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

$a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ (1)

$5\log^2 x+b\log x+a=0$ (2)

Điều kiện để (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\,x_2$ và (2) có hai nghiệm phân biệt $x_3,\,x_4$ là: $b^2-20a>0\Leftrightarrow b^2>20a$.

Nhận xét: $x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4>0$

Do đó: $x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow \ln(x_1x_2)>\ln(x_3x_4)\Leftrightarrow \ln(x_1x_2)>\dfrac{\log(x_3x_4)}{\log e}$

$\Leftrightarrow (\ln x_1+\ln x_2)\log e>\log x_3+\log x_4$

Mà $\ln x_1 + \ln x_2 = -\frac{b}{a}$; $\log x_3 + \log x_4 = -\frac{b}{5}$ và a, b nguyên dương

Nên $-\frac{b}{a}\log e > -\frac{b}{5} \Leftrightarrow a > 5\log e$

Vì a là số nguyên dương và $5\log e \approx 2,17$ nên $a \ge 3$

$\Rightarrow 20a \ge 60 \Rightarrow b^2 > 60 \Rightarrow b > \sqrt{60}$ $(b > 0)$

Vì b là số nguyên dương và $\sqrt{60} \approx 7,75$ nên $b \ge 8$

Do đó: $S = 2a + 3b \ge 30 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của S là 30 khi $a = 3$; $b = 8$.

Câu 36. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng

A. 16. **B.** 119. **C.** 120. **D.** 159.

Lời giải

Chọn D

$$\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = m \\ \log_2 x = 4m+1 \end{array}\right.$$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $m \ne 4m+1 \Leftrightarrow m \ne \frac{-1}{3}$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 2^m > 0, x_2 = 2^{4m+1} = 2.(2^m)^4 > 0$

Vì $x_1 + x_2 = 165 \Leftrightarrow 2^m + 2.(2^m)^4 = 165$ (*)

Xét hàm số $f(t) = 2.t^4 + t \Rightarrow f'(t) = 8t^3 + 1 > 0\, \forall t > 0$

Mà $2^m = 3$ là nghiệm của $(*)$ nên là nghiệm duy nhất. Suy ra $x_1 = 3, x_2 = 2.3^4 = 162$

Suy ra $|x_1 - x_2| = 159$.

Câu 37. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3) - (m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(3;6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Không tồn tại m_0. **B.** $m_0 \in \left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $m_0 \in \left(2;\frac{10}{3}\right)$. **D.** $m_0 \in \left(-5;\frac{-5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_{\frac{1}{3}}(x-3)$.

Vì $x \in (3;6) \Rightarrow t > -1$.

Phương trình trở thành: $(m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0$ (*)

$\Leftrightarrow mt^2 - mt + m = t^2 - 5t + 1$

$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$

$$f'(t)=\frac{(2t-5)(t^2-t+1)-(2t-1)(t^2-5t+1)}{(t^2-t+1)^2}=\frac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}$$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1		1		$+\infty$
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình đã cho có nghiệm $x\in(3;6)$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t>-1$.

$\Leftrightarrow m\ge -3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m_0=-3\in\left(-5;\frac{-5}{2}\right)$.

Câu 38. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho phương trình $m\ln(x+1)-x-2=0$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0<x_1<2<4<x_2$ là khoảng $(a;+\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3,7;3,8)$. **B.** $(3,6;3,7)$. **C.** $(3,8;3,9)$. **D.** $(3,5;3,6)$.

Lời giải

Chọn A

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$ phương trình: $m\ln(x+1)-x-2=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{x+2}{\ln(x+1)}$

Đặt $f(x)=\dfrac{x+2}{\ln(x+1)}, x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\}$

Với yêu cầu của đề bài ta xét $f(x)$ trên 2 khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$

$$f'(x)=\frac{\ln(x+1)-(x+2)\frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$$

Đặt $g(x)=\ln(x+1)-(x+2)\dfrac{1}{x+1}, x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$$

Suy ra $\begin{cases} g(x)<g(2)=\ln 3-\dfrac{4}{3}<0, \forall x\in(0;2)\Rightarrow f'(x)<0, \forall x\in(0;2) \\ g(x)>g(5)=\ln 5-\dfrac{6}{5}>0, \forall x\in(4;+\infty)\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in(4;+\infty) \end{cases}$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{\ln 3}$		$\frac{6}{\ln 5}$	$\nearrow$	-3

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình đề bài có 2 nghiệm phân biệt thỏa $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$

$\Leftrightarrow m > \dfrac{6}{\ln 5}\left(\approx 3,728\right)$

Câu 39. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

A. Không tồn tại a. **B.** $a < -1$ hoặc $a = 4 - 2\sqrt{10}$.
C. $a < 1$. **D.** $a = 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x^3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\log_3 x + a\sqrt{3\log_3 x} + a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2.\left(3\log_3 x\right) + 3a\sqrt{3\log_3 x} + 3a + 3 = 0 \;\left(1\right)$.

Đặt $\sqrt{3\log_3 x} = t, t \ge 0$ thì $\left(1\right)$ trở thành: $2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0$.

Do đó, yêu cầu bài toán trở thành: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc nửa khoảng $\left[0; +\infty\right)$.

Ta có: $2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow 3a = \dfrac{-2t^2 - 3}{t+1}, t \ge 0$.

Xét hàm số: $f\left(t\right) = \dfrac{-2t^2 - 3}{t+1}$ trên nửa khoảng $\left[0; +\infty\right)$. Ta có:

+) $f'\left(t\right) = \dfrac{-2t^2 - 4t + 3}{\left(t+1\right)^2}$. $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-2+\sqrt{10}}{2} \\ t = \dfrac{-2-\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$.

+) $\lim\limits_{t \to +\infty} f\left(t\right) = -\infty$.

+) Bảng biến thiên:

t	0		$\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$4-2\sqrt{10}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất khi

$\left[\begin{array}{l} 3a < -3 \\ a = -4 + 2\sqrt{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -1 \\ a = -4 + 2\sqrt{10} \end{array}\right.$.

Đáp số: $a < -1$ hoặc $a = -4 + 2\sqrt{10}$.

Câu 40. **(Sở Ninh Bình 2020)** Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $\left(m-1\right)\log^2_{\frac{1}{2}}\left(x-2\right) - \left(m-5\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(x-2\right) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(2;4\right)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in \left(-1; \dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(2; \dfrac{10}{3}\right)$. **C.** $m_0 \in \left(4; \dfrac{16}{3}\right)$. **D.** $m_0 \in \left(-5; \dfrac{-5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>2$.

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, với $x\in(2;4)\Rightarrow t\in(-1;+\infty)$.

Phương trình đã cho trở thành: $(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0$

$t^2-5t+1=mt^2-mt+m\Leftrightarrow t^2-5t+1=m\left(t^2-t+1\right)$

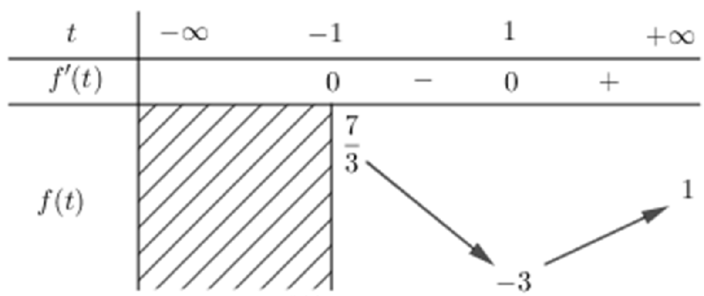
$\Leftrightarrow \dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}=m\ \ (1),\ \left(t^2-t+1\neq 0,\forall t\right)$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $t>-1$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1},\ (t>-1)$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{4t^2-4}{\left(t^2-t+1\right)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow 4t^2-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow f(1)=-3\\ x=-1\Rightarrow f(-1)=-\dfrac{7}{3}\end{array}\right.$

Bảng biên thiên hàm số $f(t)$:



Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t>-1$ khi và chỉ khi $-3\le m<\dfrac{7}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tham số thực m để phương trình đã cho có nghiệm là $m_0=-3\in\left(-5;\dfrac{-5}{2}\right)$.

Câu 41. **(Sở Yên Bái - 2020)** Giả sử phương trình $\log_2^2 x-(m+2)\log_2 x+2m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=6$. Giá trị biểu thức $\left|x_1-x_2\right|$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương

$$\log_2^2 x-m\log_2 x-2\log_2 x+2m=0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x-m)(\log_2 x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=m\\ \log_2 x=2\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2^m\\ x=4\end{array}\right.$$

Theo giả thiết $x_1+x_2=6\Rightarrow 2^m+4=6\Rightarrow m=1\Rightarrow x=2\Rightarrow \left|x_1-x_2\right|=2$.

Câu 42. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;8]$.

A. $2\le m\le 6$ **B.** $3\le m\le 6$ **C.** $6\le m\le 9$ **D.** $2\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_2 x$. Khi $x\in[1;8]$ thì $t\in[0;3]$. Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $t^2-2t+3=m$ có nghiệm $t\in[0;3]$. Xét hàm số $f(t)=t^2-2t+3$ với $t\in[0;3]$, ta có:

$f'(t)=2t-2=0 \Leftrightarrow t=1$; $\min\limits_{t\in[0;3]} f(t)=f(1)=2$; $\max\limits_{t\in[0;3]} f(t)=f(3)=6$.

Đồ thị hàm số $y=f(t)=t^2-2t+3$ và đường thẳng $y=m$ sẽ cắt nhau tại điểm có hoành độ $t\in[0;3]$ nếu như $\min\limits_{t\in[0;3]} f(t)\le m\le \max\limits_{t\in[0;3]} f(t) \Leftrightarrow 2\le m\le 6$.

Câu 43. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

A. $m=\dfrac{9}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** Không tồn tại. **D.** $m=\dfrac{61}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_3 x$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-3t+2m-7=0\ (*)$.

Ứng với mỗi nghiệm t của phương trình $(*)$ có một nghiệm x.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow (-3)^2-4(2m-7)>0 \Leftrightarrow 9-8m+28>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{37}{8}$.

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm phương trình $(*)$.

Theo định lý Viét ta có: $t_1+t_2=3 \Rightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=3 \Leftrightarrow \log_3(x_1.x_2)=3 \Leftrightarrow x_1.x_2=27$.

Theo đề bài $(x_1+3)(x_2+3)=72 \Leftrightarrow x_1.x_2+3(x_1+x_2)+9=72 \Leftrightarrow x_1+x_2=12$.

Vậy ta có $\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_1.x_2=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=9 \\ x_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=2 \\ t_2=1 \end{cases} \Rightarrow t_1.t_2=2$.

Theo định lý Viét ta có $t_1.t_2=2 \Leftrightarrow 2=2m-7 \Leftrightarrow m=\dfrac{9}{2}$ (thỏa mãn).

Kết luận: $m=\dfrac{9}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)$ có nghiệm là

A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Ta đặt $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)=t$. Khi đó

$2020x+m=6^t$ và $1010x=4^t$. Ta suy ra $2\cdot 4^t+m=6^t \Leftrightarrow m=6^t-2\cdot 4^t$

Đặt $f(t)=-2.4^t+6^t$

$f'(t)=6^t\ln 6-2.4^t.\ln 4$

$f'(t)=0 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{2\ln 4}{\ln 6}=\log_6 16 \Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq f\left(\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right)\right) \approx -2,01$.

Hơn nữa, $\begin{cases} m < 2020 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} -2 \leq m \leq 2019 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy ta có 2022 giá trị m thỏa mãn.

Câu 45. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho phương trình $\left(me^x - 10x - m\right)\left[\log(mx) - 2\log(x+1)\right] = 0$. ($m$ là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

$\left(me^x - 10x - m\right)\left[\log(mx) - 2\log(x+1)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx > 0 & (1) \\ x+1 > 0 & (2) \\ \left[\begin{array}{ll} me^x - 10x - m = 0 & (3) \\ mx = (x+1)^2 & (4) \end{array}\right. \end{cases} \quad (*).$$

*) $m = 0$ thì pt vô nghiệm.

*) $m > 0$ thì hệ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{10x}{e^x - 1} \\ m = \dfrac{(x+1)^2}{x} \end{array}\right. \end{cases}$. (Vì $e^x - 1 > e^0 - 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$)

+Xét $f(x) = \dfrac{10x}{e^x - 1}$ và $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x} = x + \dfrac{1}{x} + 2$.

$+ f'(x) = \dfrac{10\left(e^x - 1\right) - e^x.10x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \dfrac{10e^x(1-x) - 10}{\left(e^x - 1\right)^2}$.

Xét $u(x) = 10e^x(1-x) - 10 \Rightarrow u'(x) = -10e^x + 10e^x(1-x) = -10xe^x < 0 \, \forall x \in (0;+\infty)$

Suy ra: Hàm số $u(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty) \Rightarrow u(x) < u(0) = 0$.

$\Rightarrow f'(x) < 0 \, \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 10, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

x	0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		
$f(x)$	10	$\searrow$	4	

$+ \; g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình có ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 4<m<10$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{5;6;7;8;9\}$

*) $m<0$ thì hệ $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<0 \\ \left[\begin{array}{l} m=f(x) \\ m=g(x) \end{array}\right. \end{cases}$.

Tương tự ta có $f'(x)>0\,\forall x\in(-1;0)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{-10}{e^{-1}-1}=\dfrac{-10e}{1-e}=\dfrac{10e}{e-1}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=10$

x	-1		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	10	$\nearrow$	$\dfrac{10e}{e-1}$

$g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

x	-1		0
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm thực phân biệt, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy có 5 giá trị m.

Câu 46. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho phương trình $4^{-|x-m|}.\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{2x-x^2}.\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Có $4^{-|x-m|}.\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}.\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|}.\log_2\left[\left(x-1\right)^2+2\right]-2^{1-(x-1)^2}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2^{1-2|x-m|}}{\log_2\left(2|x-m|+2\right)}=\dfrac{2^{1-(x-1)^2}}{\log_2\left[\left(x-1\right)^2+2\right]}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{2^{1-t}}{\log_2\left(t+2\right)}$ có $f'\left(t\right)=\dfrac{-2^{1-t}.\ln\left(t+2\right)-\dfrac{2^{1-t}}{\left(t+2\right)\ln 2}}{\left[\log_2\left(t+2\right)\right]^2}<0,\forall t>-2.$

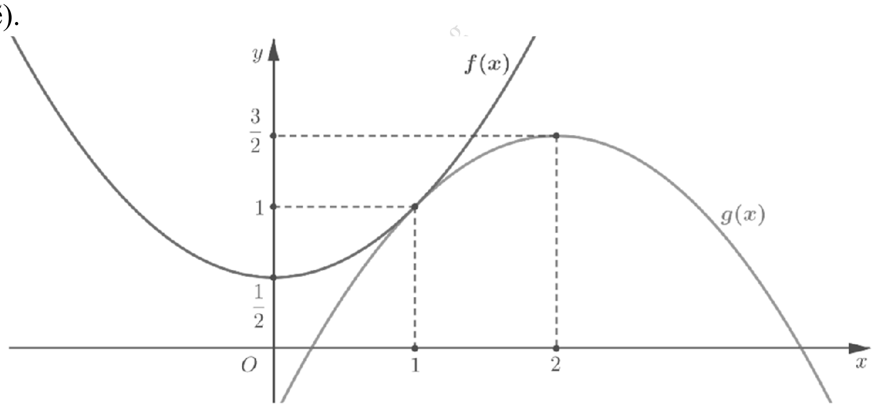
Phương trình đã cho $\Leftrightarrow$ $f\left[\left(x-1\right)^2\right]=f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=2|x-m|$

$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+1+2m\right)\left(x^2+1-2m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x+2m+1=0\\x^2+1-2m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\dfrac{1}{2}x^2+1=m & (1)\\-\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{1}{2}=m & (2)\end{array}\right..$

Khi đó $ycbt\Leftrightarrow$ phương trình (1) và (2) có tổng cộng 3 nghiệm thực phân biệt.

Vẽ đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ và $g\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ (tham khảo hình vẽ).



Đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x=1$.

Dựa vào đồ thị ta có $m=\dfrac{1}{2},m=1,m=\dfrac{3}{2}$ thì phương trình đã cho có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy tổng các giá trị thực của m thỏa ycbt là $\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}=3.$

Câu 47. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho phương trình $\log_3^2\left(9x\right)-\left(m+5\right)\log_3 x+3m-10=0$ (với m là tham số thực). Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[1;81\right]$ là

A. 3 **B.** 5 **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3^2\left(9x\right)-\left(m+5\right)\log_3 x+3m-10=0\Leftrightarrow\log_3^2\left(x\right)-\left(m+1\right)\log_3 x+3m-6=0,(1)$

Đặt $t=\log_3 x$, khi $x\in\left[1;81\right]$ thì $t\in\left[0;4\right]$.

Khi đó ta có phương trình $t^2-\left(m+1\right)t+3m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=m-2\end{array}\right..$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;81]$ $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t\in[0;4]\Leftrightarrow\begin{cases}m-2\neq 3\\0\le m-2\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 5\\2\le m\le 6\end{cases}$.

Suy ra có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;81]$.

Chọn đáp án **C.**

Câu 48. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $5x+y=4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3\dfrac{x^2+2y+m}{x+y}+x^2-3x-y+m-1=0$ có nghiệm là

A. 10. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3\frac{x^2+2y+m}{x+y}+x^2-3x-y+m-1=0$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+2y+m\right)+x^2+2y+m=\log_3 3(x+y)+3(x+y) \qquad (1)$$

Vì $x,y>0$ nên $x+y>0$. Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow x^2+2y+m=3x+3y\Leftrightarrow x^2-3x-y+m=0 \qquad (*)$

Kết hợp với điều kiện $5x+y=4\Rightarrow y=4-5x$. Vì $x,y>0\Rightarrow 0<x<\dfrac{4}{5}$.

Ta có $(*)\Leftrightarrow x^2+2x+m-4=0\Leftrightarrow m=-x^2-2x+4, \forall x\in\left(0;\dfrac{4}{5}\right)$.

Hàm số $y=-x^2-2x+4$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{4}{5}\right)$ (do $-1<0$) nên $\dfrac{44}{25}<-x^2-2x+4<4$.

Do vậy $m\in\{2;3\}$ là các giá trị cần tìm.

Vậy tổng tất cả các giá trị m thỏa ycbt là 5.

Câu 49. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x$ có nghiệm là $m\ge-\dfrac{a}{b}$ với a,b là hai số nguyên dương và $b<7$. Hỏi $a+b+b^2$ bằng bao nhiêu?

A. 31. **B.** 32. **C.** 21. **D.** 23.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x\Leftrightarrow\begin{cases}m+2^x\ge 0\\m+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}\quad(*)\end{cases}.$$

$(*)\Leftrightarrow\left(m+2^x\right)+\sqrt{m+2^x}=\left(2^x\right)^2+2^x$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t\ (t\ge 0)$. Ta có $f'(t)=2t+1>0$ với mọi $t\ge 0$, suy ra hàm số luôn đồng biến với mọi $t\ge 0$.

$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+2^x}\right)=f\left(2^x\right)\Leftrightarrow\sqrt{m+2^x}=2^x\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2=2^x+m\ (**)$.

Đặt $t=2^x\ (t>0)$, khi đó phương trình $(**)$ trở thành $t^2-t=m\ (***)$.

Xét hàm $g(t)=t^2-t\ (t>0)$, ta có $g'(t)=2t-1\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để $(***)$ có nghiệm $t>0$ thì $m \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b+b^2=21$.

Câu 50. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2^2(4x)-m\log_{\sqrt{2}} x-2m-4=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;8]$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **<u>D</u>.** 3.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

ĐK: $x>0$

$\log_2^2(4x)-m\log_{\sqrt{2}} x-2m-4=0$

$\Leftrightarrow (2+\log_2 x)^2-2m\log_2 x-2m-4=0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x+4\log_2 x=2m(\log_2 x+1)(1)$

$\log_2 x=t; x\in[1;8] \Rightarrow t\in[0;3]$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{t^2+4t}{t+1}=2m$

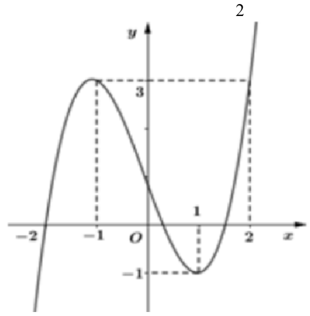
$f(t)=\frac{t^2+4t}{t+1}; t\in[0;3]$

$f'(t)=\frac{t^2+2t+4}{(t+1)^2}>0, \forall t\in[0;3]$

$\Rightarrow f(0)\leq 2m\leq f(3)$

$\Leftrightarrow 0\leq m\leq \frac{21}{8}, m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{0,1,2\}$

Câu 51. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ sao cho phương trình $\log_2^3(f(x)+1)-\log_{\sqrt{2}}^2(f(x)+1)+(2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1}+2m=0$ có nghiệm $x\in(-1;1)$?



<u>A</u>. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** vô số.

Lời giải

<u>Chọn A</u>

Với $x\in(-1;1) \Rightarrow -1<f(x)<3 \Leftrightarrow 0<f(x)+1<4$.

Đặt $t=\log_2\left(f\left(x\right)+1\right)\Rightarrow t\in\left(-\infty;2\right),\forall x\in\left(-1;1\right)$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^3-4t^2-\left(m-4\right)t+2m=0$

$$\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left(t^2-2t-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\notin\left(-\infty;2\right)\\t^2-2t-m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow t^2-2t-m=0\Leftrightarrow t^2-2t=m\ \left(*\right)$$

Để phương trình đã cho có $x\in\left(-1;1\right)\Leftrightarrow$ phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm $t\in\left(-\infty;2\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2-2t$ trên $\left(-\infty;2\right)$ có $f'\left(t\right)=2t-2=0\Leftrightarrow t=1\in\left(-\infty;2\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(t\right)=t^2-2t$

t	$-\infty$		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm $t\in\left(-\infty;2\right)$ khi và chỉ khi $m\geq-1$.

Mà $\begin{cases}m\in\left[-5;5\right]\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\left\{-1;0;1;2;3;4;5\right\}$. Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Phương trình mũ chứa tham số

Câu 1. **(Mã 101 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 6 **B.** 4 **C.** 13 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=4^x,\left(t>0\right)$. Phương trình trở thành:

$t^2-4mt+5m^2-45=0$ (1).

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t>0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\P>0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+45>0\\5m^2-45>0\\4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\sqrt{5}<m<3\sqrt{5}\\m<-3\vee m>3\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 3<m<3\sqrt{5}.$$

Vì m nguyên nên $m\in\left\{4;5;6\right\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Câu 2. **(Mã 104 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x-2.3^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=1$.

A. $m=3$ **B.** $m=1$ **C.** $m=6$ **D.** $m=-3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $9^x-2.3^{x+1}+m=0\Leftrightarrow 3^{2x}-6.3^x+m=0$.

Phương trình có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=1\Rightarrow\begin{cases}\Delta'=9-m>0\\3^{x_1}+3^{x_2}=6>0\\3^{x_1+x_2}=3=m\end{cases}\Leftrightarrow m=3$.

Câu 3. **(Mã 102 2018)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 7 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $25^x - m.5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0\ (1)$.

Đặt $t = 5^x\ (t > 0)$. Phương trình trở thành $t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0\ (2)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 4\left(7m^2 - 7\right) > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2;3\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 4. **(Mã 103 2018)** Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m^2 - 5 = 0\ (1)$

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình (1) thành: $t^2 - 2m.t + 2m^2 - 5 = 0\ (2)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phânbiệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\frac{5}{2}}\ hoac\ m > \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Do m nguyên nên $m = 2$. Vậy S chỉ có một phần tử

Câu 5. **(Mã 110 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. $m \in (0;+\infty)$ **B.** $m \in (-\infty;1)$ **C.** $m \in (0;1]$ **D.** $m \in (0;1)$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2.2^x + m = 0$, (1).

Đặt $t = 2^x > 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2t + m = 0$, (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt và lớn hơn

$$0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -\frac{-2}{1} > 0 \\ \frac{m}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Câu 6. **(Mã 104 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 5 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 19

Lời giải

Chọn C

$9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0(1) \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 3m.3^x + 3m^2 - 75 = 0$

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0(2)$

(1) có hai ngiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 300 - 3m^2 > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 10 \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 10$$

Do m nguyên nên $m = \{6; 7; 8; 9\}$

Câu 7. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho phương trình $9^x - (2m+3).3^x + 81 = 0$ (m là tham số thực). Giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(5;10)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(10;15)$. **D.** $(15;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$9^x - (2m+3).3^x + 81 = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - (2m+3).3^x + 81 = 0$. Đặt $t = 3^x (t > 0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - (2m+3)t + 81 = 0 \quad (2)$

$\Delta = (2m+3)^2 - 4.81 = (2m+3)^2 - 324$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương:

Điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 - 324 > 0 \\ 2m+3 > 0 \\ 81 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2m+3 > 18 \\ 2m+3 < -18 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m+3 > 18 \\ m > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2m+3 < -18 \\ m > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > \dfrac{15}{2} \\ m > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m < -\dfrac{21}{2} \\ m > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > \dfrac{15}{2}$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m+3 \\ t_1.t_2 = 81 \end{cases}$

Vì $t_1.t_2 = 81 \Leftrightarrow 3^{x_1}.3^{x_2} = 3^4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$

Do đó: $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 10 \Leftrightarrow 4^2 - 2x_1.x_2 = 10 \Leftrightarrow x_1.x_2 = 3$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1.x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 30$

Nên $2m+3 = 30 \Leftrightarrow m = \dfrac{27}{2} (TM)$

Vậy chọn **C.**

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho phương trình $m.16^x - 2(m-2).4^x + m - 3 = 0\,(1)$. Tập hợp tất cả các giá trị dương của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tổng $T = a + 2b$ bằng:

A. 14 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

+) Đặt: $4^x = t\,(t>0) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow m.t^2 - 2(m-2)t + m - 3 = 0\,(2)$

+) Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Rightarrow \text{ Điều kiện: } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-2)^2 - m(m-3) > 0 \\ \dfrac{m-2}{m} > 0 \\ (m-3)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m+4>0 \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<m<4 \\ m<0\,(l) \end{array}\right.$$

+) Vậy $3 < m < 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 11$

Câu 9. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-5;0)$. **B.** $(-7;-5)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải

Đặt $t = 2^x$. Ta có phương trình $t^2 - 6t + m = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1 \Leftrightarrow$ pt có hai nghiệm dương t_1, t_2

thỏa mãn $t_1.t_2 = 2^{x_1+x_2} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ s > 0 \\ p = \dfrac{1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ 6 > 0 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Câu 10. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Với giá trị nào của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$

A. $m = \dfrac{5}{2}$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 8$. **D.** $m = \dfrac{13}{2}$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương $2^{2x} - 2m.2^x + 2m + 3 = 0$ (1).

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2m.t + 2m + 3 = 0$ (2).Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t_1; t_2$ dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$. Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1.t_2 = 2m + 3 \end{cases}$

Với $t = 2^x$ ta có: $\begin{cases} t_1 = 2^{x_1} \\ t_2 = 2^{x_2} \end{cases} \Rightarrow t_1.t_2 = 2^{x_1}.2^{x_2} \Leftrightarrow 2m + 3 = 2^{x_1+x_2} \Leftrightarrow 16 = 2m + 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{13}{2}$ (thỏa mãn).

Câu 11. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi

A. $m = 4$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Phương trình viết thành $t^2-2mt+2m=0\,(1)$.

Ta có $x_1+x_2=3\Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2^3\Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=8$.

Ycbt tương đương phương trình (1) có hai nghiệm dương t_1,t_2 thỏa mãn $t_1.t_2=8$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-2m>0\\ t_1+t_2=2m>0\\ t_1.t_2=2m=8\end{cases}\Leftrightarrow m=4.$$

Câu 12. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4.4^{x^2+2x}+(2m-2)6^{x^2+2x+1}-(6m+3)3^{2x^2+4x+2}=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $4-3\sqrt{2}<m<4+3\sqrt{2}$ **B.** $m>4+3\sqrt{2}$ **hoặc** $m<4-3\sqrt{2}$

C. $m>-1$ **hoặc** $m<\frac{-1}{2}$ **D.** $-1<m<\frac{-1}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$4.4^{x^2+2x}+(2m-2)6^{x^2+2x+1}-(6m+3)3^{2x^2+4x+2}=0\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2+2x+1}+(2m-2)6^{x^2+2x+1}-(6m+3)9^{x^2+2x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2+2x+1}+(2m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1}-(6m+3)=0\quad(2)$$

• **Đặt** $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2}\le\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$. **Suy ra** $0<t\le 1$

Pt (2) trở thành: $t^2+(2m-2)t-6m-3=0\quad(3)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\quad(loai)\\ t=-2m-1\end{array}\right.$$

• **Để phương trình (1) có 2 nghiệm** x **phân biệt**

$\Leftrightarrow$ **Phương trình** $t^2+(2m-2)t-6m-3=0$ **có đúng một nghiệm** t **thuộc khoảng** $(0;1)$

$\Leftrightarrow 0<-2m-1<1$

$\Leftrightarrow -1<m<\frac{-1}{2}$.

Chú ý: **Nếu** $t=1$ **thì phương trình** $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2}=1$ chỉ có nghiệm duy nhất là $x=-1$.

Câu 13. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình $(m-3)9^x+2(m+1)3^x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tính tích $a.b$.

A. 4 **B.** -3 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Đặt: $3^x=t,(t>0)$. Khi đó phương trình trở thành $(m-3)t^2+2(m+1)t-m-1=0(*)$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(2m-2)>0\\ -\frac{m+1}{m-3}>0\\ \frac{-m-1}{m-3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\vee m>1\\ -1<m<3\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<3\Rightarrow a.b=3$$

Câu 14. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m.2^x + 2m - 2019 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 1008. **B.** 1007. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải

$4^x - m.2^x + 2m - 2019 = 0\,(1)$

Đặt $t = 2^x\,(t > 0)$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - mt + 2m - 2019 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa $x_1 < 0 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = t_1 + t_2 > 0 \\ P = t_1 t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 2019 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(2m - 2019) < 0 \\ m > 0 \\ m > \dfrac{2019}{2} \\ 2m - 2019 - m + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8076 > 0\,(\forall m) \\ m > 0 \\ m > \dfrac{2019}{2} \\ m < 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2019}{2} < m < 2018.$$ Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $1010 \le m \le 2017$

Số giá trị nguyên m thỏa đề là 1008.

Câu 15. Cho phương trình $\left(4 + \sqrt{15}\right)^x + (2m + 1)\left(4 - \sqrt{15}\right)^x - 6 = 0$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$. Ta có m thuộc khoảng nào?

A. $(3;5)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Đặt $t = \left(4 + \sqrt{15}\right)^x$, $t > 0$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$t + \dfrac{(2m+1)}{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 2m + 1 = 0, t > 0$ (*)

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 = (t_2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(*)} > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < m < 4$

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_1.t_2 = 2m + 1 \\ t_1 = (t_2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_2 = \sqrt[3]{2m+1} \\ t_1 = \left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2 + \sqrt[3]{2m+1} = 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2m+1} = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{2} \in (3;5)$.

Câu 16. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Phương trình $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + (1 - 2a)\left(2 - \sqrt{3}\right)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}$, $t>0$

Phương trình trở thành $t+\dfrac{1-2a}{t}-4=0 \Leftrightarrow t^2-4t+1-2a=0$ (1)

GT: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1-x_2=\log_{2+\sqrt{3}}3 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1-x_2}=3$

Khi đó $t_1=3t_2$

YCBT$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1=3t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ t_1>0;\ t_2>0\\ t_1+t_2=4\\ t_1.t_2=1-2a\\ t_1=3t_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3+2a>0\\ t_1=3\\ t_2=1\\ t_1t_2=1-2a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a>-\dfrac{3}{2}\\ a=-1\end{cases} \Leftrightarrow a=-1$$

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình $(m-3)9^x+2(m+1)3^x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tính tích $a.b$.

A. 4 **B.** -3 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Đặt $3^x=t,\ (t>0)$, phương trình đã cho trở thành $(m-3)t^2+2(m+1)t-m-1=0$ (*)

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)(2m-2)>0\\ -\dfrac{m+1}{m-3}>0\\ \dfrac{-m-1}{m-3}>0\end{cases} \Leftrightarrow 1<m<3$$

Khi đó $(a;b)=(1;3)$

Tích $a.b=3$

Câu 18. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả các giá trị của mm để phương trình $9^x-2m.3^x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt

A. $-2<m<2$ **B.** $m>2$ **C.** $m>-2$ **D.** $m<2$

Lời giải

Đặt $t=3^x \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow t\in(0;+\infty)$ và mỗi x cho ta một giá trị t tương ứng.

Khi đó phương trình trở thành $t^2-2mt+m+2=0$ $(*)$

Để pt đã cho có 2 nghiệm phân biệt, tương đương phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-m-2>0\\ 2m>0\\ m+2>0\end{cases} \Leftrightarrow m>2$

Câu 19. Xác định các giá trị của tham số m để phương trình $9^x-2(m+2)6^x+(m^2+4m+3)4^x=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m<-2.$ **B.** $m>-3.$ **C.** $m>-1.$ **D.** $m>-2.$

Lời giải

Xét phương trình: $9^x-2(m+2)6^x+(m^2+4m+3)4^x=0$

Chia cả hai vế của phương trình cho 4^x ta được $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2(m+2)\left(\frac{3}{2}\right)^x + m^2 + 4m + 3 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, (t > 0)$ khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 2(m+2)t + m^2 + 4m + 3 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1.t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 - m^2 - 4m - 3 > 0 \\ 2(m+2) > 0 \\ m^2 + 4m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m > -2 \\ m \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Câu 20. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Biết rằng $m = m_0$ là giá trị của tham số m sao cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào sau đây

A. $(3;9)$. **B.** $(9;+\infty)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

$9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ (1)

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Pt(1) trở thành: $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 4m-1 \end{array}\right.$.

Để pt(1) có 2 nghiệm thì điều kiện cần và đủ là $4m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Khi đó pt (1) có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \log_3(4m-1)$.

Từ giả thiết $(x_1+2)(x_2+2) = 12 \Leftrightarrow 3(\log_3(4m-1) + 2) = 12 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.(3^2+1) = \frac{5}{2}$. Vậy $m \in (1;3)$.

Câu 21. **(Sở Phú Thọ 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $16^x - 2(m+1)4^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 6 **B.** 7 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 4^x, t > 0$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ pt (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 9 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ 3m - 8 > 0 \\ m - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8}{3} < m < 9$$

Vậy m có 6 giá trị nguyên.

Câu 22. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m.2^x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm. Tập $\mathbb{R} \setminus S$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 7

Lời giải

Đặt $t = 2^x\ (t > 0)$, khi đó phương tình có dạng

$$t^2 - mt + 2m + 1 = 0\ (2)$$

Để phương trình ban đầu có nghiệm thì phương trình (2) có nghiệm dương

TH 1: Pt(2) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 2m+1<0 \Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$

TH 2: pt(2) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta = m^2-8m-4\geq 0\\ m>0\\ 2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow m\geq 4+\sqrt{20}$

Nên $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[4+\sqrt{20};+\infty\right) \Rightarrow \mathbb{R}\setminus S=\left[-\frac{1}{2};4+\sqrt{20}\right)$. Vậy các số nguyên thỏa mãn là $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ hay đáp án C

Câu 23. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của m thuộc khoảng

A. $(9;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0$ (1)

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-8m+4>0\\ 2(2m+1)>0\\ 3(4m-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1\\ m>-\frac{1}{2}\\ m>\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1\\ m>\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là $t=4m-1$ và $t=3$.

Với $t=4m-1$ thì $3^{x_1}=4m-1 \Leftrightarrow x_1=\log_3(4m-1)$.

Với $t=3$ thì $3^{x_2}=3 \Leftrightarrow x_2=1$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=12 \Leftrightarrow x_1=2 \Leftrightarrow \log_3(4m-1)=2 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\frac{5}{2}$ nên m thuộc khoảng $(1;3)$.

Câu 24. **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x-2.12^x+(m-2).9^x=0$ có nghiệm dương?

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Phương trình $16^x-2.12^x+(m-2).9^x=0$ có nghiệm $\forall x\in(0;+\infty)$

Phương trình tương đương $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-2.\left(\frac{4}{3}\right)^x+(m-2)=0$ có nghiệm $\forall x\in(0;+\infty)$

Đặt $t=\left(\frac{4}{3}\right)^x, t\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow t^2-2.t+(m-2)=0, \forall t\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow t^2-2.t=2-m, \forall t\in(1;+\infty)$

Xét $y=t^2-2.t$

t	1		$+\infty$
y'	0	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có nghiệm $\forall t \in (1;+\infty)$ khi $2-m>-1 \Leftrightarrow m<3$

Câu 25. **(THPT Ba Đình -2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4.3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 27. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \in [0;4]$.

Đặt $t = \sqrt{4x-x^2}$ với $x \in [0;4]$ thì $t \in [0;2]$

Đặt $u = 3^t$ với $t \in [0;2]$ thì $u \in [1;9]$

Khi đó, tìm m để phương trình $u^2 - 4u + 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;9]$.

$\Leftrightarrow 2m = -u^2 + 4u + 1$, với $u \in [1;9]$

Xét hàm số $f(u) = -u^2 + 4u + 1$.

$f'(u) = -2u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = 2$.

Ta có, $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(9) = -44$.

Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-44 \le 2m \le 5 \Leftrightarrow -22 \le m \le \frac{5}{2}$.

Vậy có 25 số nguyên của tham số m.

Câu 26. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Gọi $(a;b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Tổng $a+b$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** -6. **D.** -14.

Lời giải

Đặt $t = e^x$; $x \in (0;\ln 5)$ tương ứng $t \in (1;5)$.

Phương trình thành $2t^2 - 8t = m$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 8t$ với $t \in (1;5)$ có $f'(t) = 4t - 8$

t	1		2		5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\searrow$	-8	$\nearrow$	10

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ khi phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm $t \in (1;5)$ $\Leftrightarrow -8 < m < -6$.

Câu 27. **(Sở Bắc Giang 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)^x - m\left(\sqrt{2}-1\right)^x = 8$ có hai nghiệm dương phân biệt. Số phần tử của S bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Đặt $\left(\sqrt{2}+1\right)^x=t, t>0$. Vì $\left(\sqrt{2}+1\right)^x.\left(\sqrt{2}-1\right)^x=1$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^x=\frac{1}{t}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t-\frac{m}{t}=8 \Leftrightarrow t^2-8t=m \ (*).$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Xét $f(t)=t^2-8t$, trên $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2t-8$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4$

Bảng biến thiên của hàm $f(t)$

t	1		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-7	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-16<m<-7$.

Vậy số phần tử của S là 8.

Câu 28. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

Lời giải

$\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}+m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=6$ (1)

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t>0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=\frac{1}{t}$

$(1) \Leftrightarrow t+m.\frac{1}{t}=6 \Leftrightarrow t^2-6t+m=0$ (2)

Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

$(2) \Leftrightarrow m=-t^2+6t$. Xét hàm số $f(t)=-t^2+6t$ trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=-2t+6;\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên:

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m<5$ hoặc $m=9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m\in(-10;10)$ nên $m=\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;9\}$.

Suy ra có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 29. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x-m.\left(\frac{1}{3}\right)^x+2m+1=0$ có nghiệm khi m nhận giá trị:

A. $m<-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}<m<4-2\sqrt{5}$. **C.** $m\geq 4+2\sqrt{5}$. **D.** $m<-\frac{1}{2}\vee m\geq 4+2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có phương trình: $\left(\frac{1}{9}\right)^x-m.\left(\frac{1}{3}\right)^x+2m+1=0$

Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $(t>0)$ phương trình trở thành: $t^2-m.t+2m+1=0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình có nghiệm dương.

$t=2$ không là nghiệm của phương trình nên $\Leftrightarrow m=\frac{t^2+1}{t-2}=f(t)$

$f'(t)=\frac{t^2-4t-1}{(t-2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow \frac{t^2-4t-1}{(t-2)^2}=0\Rightarrow t^2-4t-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2-\sqrt{5}\ (L) \\ t=2+\sqrt{5}\ (N)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên.

t	0		2		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		-	$\|\|$	-	0	+	
$f(t)$	$\frac{-1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình có nghiệm khi $m<-\frac{1}{2}\vee m\geq 4+2\sqrt{5}$

Câu 30. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1).16^x-2(2m-3).4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Cách 1.

Đặt $t=4^x, t>0$, phương trình đã cho trở thành:

$(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \Leftrightarrow m=-\frac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}$ (*).

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$.

Đặt $f(t)=-\frac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}\Rightarrow f'(t)=\frac{10t^2-2t-56}{\left(t^2-4t+6\right)^2}$. Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{561}}{10}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{561}}{10}$	0		1		$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0			$-$		0	$+$	
$f(x)$				$\frac{-5}{6}$	$\searrow$	-4	$\searrow$	$\approx -11,67$	$\nearrow$	-1

Từ bảng biến thiên, ta có phương trình (*) có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$ khi $-4<m<-1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m=-3$ và $m=-2$.

Cách 2:

Đặt $t=4^x, t>0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0$ (*).

Đặt $f(x)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$.

Điều đó xảy ra khi: $\begin{cases}(m+1)f(1)<0\\(m+1)f(0)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)(3m+12)<0\\(m+1)(6m+5)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4<m<-1\\ \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>-\dfrac{5}{6}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow -4<m<-1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m=-3$ và $m=-2$.

Câu 31. Phương trình $4^x+1=2^x.m.\cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Số giá trị của tham số m thỏa mãn là

A. Vô số **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x+1=2^x m\cos(\pi x) \Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=m\cos(\pi x)$

Ta thấy nếu $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình thì $x=-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình nên để phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0=0$.

Với $x_0=0$ là nghiệm của phương trình thì $m=2$.

Thử lại: Với $m=2$ ta được phương trình $2^x+2^{-2}=2\cos(\pi x)$ $(*)$

$VT\ge 2; VP\le 2$ nên $(*)\begin{cases}2^x+2^{-2}=2\\2\cos(\pi x)=2\end{cases} \Leftrightarrow x=0$ thỏa mãn. Vậy $m=2$.

Câu 32. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho phương trình $2^x=\sqrt{m.2^x.\cos(\pi x)-4}$, với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m_0\in[-5;-1)$. **B.** $m_0<-5$. **C.** $m_0\in[-1;0)$. **D.** $m_0>0$.

Lời giải

Phương trình $4^x=m.2^x.\cos(\pi x)-4 \Leftrightarrow 2^x+2^{2-x}=m.\cos(\pi x)$

Điều kiện cần: nếu x_0 là một nghiệm của phương trình thì $2-x_0$ cũng là nghiệm. Vì phương trình có nghiệm duy nhất nên $x_0=1$

Thay vào phương trình ta có: $m=-4$.

Điều kiện đủ:

Với $m=-4$ ta có $4^x+4.2^x\cos(\pi x)+4=0 \Leftrightarrow \left[2^x+2\cos(\pi x)\right]^2+4\sin^2(\pi x)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2^x=-2\cos(\pi x)\\ \sin(\pi x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^x=-2\cos(\pi x)\\ \left[\begin{array}{l}\cos(\pi x)=1\\ \cos(\pi x)=-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^x=2\\ \cos(\pi x)=-1\end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $m=-4$ thỏa mãn

Câu 33. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8^x+3x.4^x+(3x^2+1).2^x=(m^3-1)x^3+(m-1)x$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;10)$.

A. 101 **B.** 100 **C.** 102 **D.** 103

Lời giải

$8^x+3x.4^x+\left(3x^2+1\right).2^x=\left(m^3-1\right)x^3+\left(m-1\right)x \quad (1)$

$\Leftrightarrow \left(2^x+x\right)^3+\left(2^x+x\right)=\left(mx\right)^3+mx$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$

Ta có $t=2^x+x$ mà $0<x<10 \Rightarrow \begin{cases}1<2^x<1024\\0<x<10\end{cases} \Rightarrow 1<2^x+x<1034 \Rightarrow 1<t<1034$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t, t\in\left(1;1034\right)$.

$f'\left(t\right)=3t^2+1>0, \forall t\in\left(1;1034\right)$ hay $f\left(t\right)=t^3+t$ đồng biến trên $\left(1;1034\right)$

Suy ra $\left(2\right)\Leftrightarrow 2^x+x=mx \Leftrightarrow \dfrac{2^x+x}{x}=m$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2^x}{x}+1, t\in\left(0;10\right)$.

$\Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{x.2^x\ln 2-2^x}{x^2}=\dfrac{2^x\left(x.\ln 2-1\right)}{x^2}$

$g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\ln 2}=\log_2 e$

BBT

x	0		$\log_2 e$		10
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e.\ln 2+1$	$\nearrow$	$104,4$

$ycbt \Leftrightarrow e.\ln 2+1<m<104,4$

mà $m\in Z$ nên $m=\overline{3,104}$.

Có tất cả 102 số nguyên m thoả mãn.

Câu 34. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$ **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$ **C.** $\left(0;\dfrac{1}{e}\right)$ **D.** $\left[\dfrac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$

Lời giải

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2=1+2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Ta có $t'=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}, t'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

x	-1		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		1
t'		$+$	0	$-$	
t	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Vậy $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Phương trình trở thành $e^{3m}+e^{m}=2t\left(1+\dfrac{t^2-1}{2}\right)\Leftrightarrow e^{3m}+e^{m}=t^3+t\Leftrightarrow e^{m}=t$. (sử dụng hàm đặc trưng).

Phương trình có nghiệm khi và chi khi $-1\le e^{m}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le\ln\sqrt{2}\Leftrightarrow m\in(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2]$.

Câu 35. **(SP Đồng Nai - 2019)** Gọi A là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho tập nghiệm của phương trình $x.2^x=x\left(x-m+1\right)+m.\left(2^x-1\right)$ có hai phần tử. Số phần tử của A bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Phương trình: $x.2^x=x\left(x-m+1\right)+m.\left(2^x-1\right)$ (1)

$\Leftrightarrow 2^x.\left(x-m\right)=\left(x-m\right)\left(x-1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x-m\right)\left(2^x-x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ 2^x-x-1=0\ \ (2) \end{array}\right.$

Xét phương trình $(2):2^x-x-1=0$

Đặt $f(x)=2^x-x-1\quad\Rightarrow f'(x)=2^x\ln 2-1$

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		$\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=0\ \ (2)$ có nhiều nhất 2 nghiệm.

Mà $f(0)=f(1)=0$

$\Rightarrow$ phương trình (2) có đúng 2 nghiệm $x=0;x=1$.

$\Rightarrow$ phương trình (1) có các nghiệm là $x=0;x=1;x=m$.

Để tập nghiệm của phương trình (1) có hai phần tử $\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Số phần tử của A bằng 2.

Câu 36. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Giá trị của m để phương trình $4^{|x|}-2^{|x|+1}-m=0$ có nghiệm duy nhất là:

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn D

$4^{|x|}-2^{|x|+1}-m=0\ \left(1\right)$.

Đặt $t=2^{|x|}$, $t\ge 1$.

Phương trình $\left(1\right)$ trở thành: $t^2-2t-m=0\Leftrightarrow m=t^2-2t\ \left(2\right)$.

Nhận xét: với $t=1$ ta có duy nhất 1 nghiệm x tương ứng; với mỗi $t>1$ ta có 2 nghiệm x tương ứng.

Phương trình (1) có duy nhất nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có một nghiệm $t_1 = 1$ và nghiệm còn lại $t_2 \le 1$.

$t_1 = 1$ là nghiệm của phương trình $(2) \Leftrightarrow -1 - m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó phương trình (2) trở thành: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa điều kiện trên).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = -1$.

Câu 37. **(THPT Thăng Long 2019)** Gọi $(a;b)$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Giá trị của tổng $a+b$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** -6. **<u>D</u>.** -14.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Đặt $t = e^x$. Khi đó $x \in (0;\ln 5) \Leftrightarrow t \in (e^0; e^{\ln 5})$ hay là $t \in (1;5)$.

Phương trình đã cho trở thành $2t^2 - 8t = m$, với $t \in (1;5)$.

Vì với mỗi giá trị của $t \in (1;5)$ ta có một và chỉ một giá trị tương ứng của $x \in (0;\ln 5)$. Do đó, yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi phương trình $2t^2 - 8t = m$ có hai nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(1;5)$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 2t^2 - 8t$ có $f'(t) = 4t - 8$ trên đoạn $[1;5]$:

t	1		2		5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\searrow$	-8	$\nearrow$	10

Dựa vào bảng trên ta thấy, phương trình $2t^2 - 8t = m$ có hai nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(1;5)$ khi và chỉ khi $-8 < m < -6$.

Vậy phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ khi và chỉ khi $m \in (-8;-6)$.

Suy ra $a = -8$ và $b = -6$, do đó $a + b = -14$.

Câu 38. **(Chuyên Long An-2019)** Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 = 3$.

A. $m \in \left(\frac{9}{2};5\right)$. **B.** $m \in (-2;-1)$. **C.** $m \in (1;3)$. **<u>D</u>.** $m \in (3;5)$.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

$4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0\ (*)$

Đặt $t = 2^x > 0$

$(*) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m = 0\ (**)$

Giả sử phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn đều kiện đề bài thì phương trình $(**)$ có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa:

$$t_1.t_2 = 8 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$$

Thử lại phương trình $(*)$ ta có $m = 4$ thỏa mãn điều kiện.

Câu 39. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $16^x - m.4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow \left(4^x\right)^2 - \frac{m}{4}.4^x + 5m^2 - 44 = 0 \ (1)$.

Đặt $t = 4^x \ (t > 0)$, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 đối nhau $\Rightarrow t_1t_2 = 4^{x_1}.4^{x_2} = 4^{x_1+x_2} = 4^0 = 1$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t^2 - \frac{m}{4}t + 5m^2 - 44 = 0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa $t_1t_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{16} - 4\left(5m^2 - 44\right) > 0 \\ \frac{m}{4} > 0 \\ 5m^2 - 44 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{16\sqrt{29}}{29} < m < \frac{16\sqrt{29}}{29} \\ m > 0 \\ m = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Vậy tập S không có phần tử.

Câu 40. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - 2m.2^x - m + 6 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 3$. Tập hợp S có bao nhiêu phần tử?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ ta được phương trình $t^2 - 2mt - m + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+6}{2t+1} = m \ (1)$.

Ta có $x_1 < x_2 < 3 \Leftrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} < 2^3 = 8$.

Phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 8$.

Đặt $f(t) = \frac{t^2+6}{2t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{2\left(t^2 + t - 6\right)}{(2t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $f(t)$ trên $(0;8)$:

t	0		2		8
y'		-	0	+	
y	6	↘	2	↗	$\frac{70}{17}$

Từ bảng biến thiên ta thấy (1) có hai nghiệm $0 < t_1 < t_2 < 8$ khi $2 < m < \frac{70}{17}$.

Suy ra có hai giá trị nguyên của m là $m = 3$ và $m = 4$.

Câu 41. **(THPT Minh Khai - 2019)** Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m+3).2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $\left(\frac{21}{2};\frac{29}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{11}{2};\frac{19}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2^x$, điều kiện $t>0$. Phương trình ban đầu trở thành $t^2-(2m+3).t+64=0\ (*)$.

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm thực x_1 và x_2 thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm t_1, t_2 dương $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2+12m-247>0\\ 2m+3>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{19}{2}\\ m>\dfrac{13}{2}\end{array}\right.\\ m>-\dfrac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow m>\dfrac{13}{2}$.

Theo định lý Vi-ét, ta có $t_1.t_2=64 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=64 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=64 \Rightarrow x_1+x_2=6$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=24 \Leftrightarrow x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4=24 \Leftrightarrow x_1.x_2=8$.

Từ $\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1.x_2=8\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=2\\ x_2=4\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=4\\ x_2=2\end{cases}\end{array}\right.$.

Khi đó, ta có $t_1+t_2=2^{x_1}+2^{x_2}=20=2m+3 \Rightarrow m=\dfrac{17}{2}$.

Câu 42. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

A. $\left(0;\dfrac{1}{e}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$. **D.** $\left[\dfrac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x\in[-1;1]$

Đặt $x+\sqrt{1-x^2}=t$. Vì $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$

Ta có: $t^2=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2=1+2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành: $e^{3m}+e^m=t^3+t$.

Xét hàm số $f(u)=u^3+u$, $f'(u)=3u^2+1>0\ \forall u$ do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $e^{3m}+e^m=t^3+t \Leftrightarrow f(e^m)=f(t) \Leftrightarrow e^m=t$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1\le e^m\le\sqrt{2} \Rightarrow 0<e^m\le\sqrt{2}$ (do $e^m>0$)

$\Leftrightarrow m\le\ln\sqrt{2} \Rightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$.

Câu 43. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-(m-1).2^x+2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=1$.

A. $m\in R$. **B.** $m>1+2\sqrt{2}; m<1-2\sqrt{2}$.

C. $m\ge 1+2\sqrt{2}$. **D.** $m>1+2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Ta có phương trình $t^2-(m-1)t+2=0$ (1).

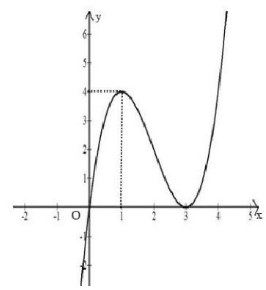
Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi phương trình (1) có hai nghiệm t_1, $t_2>0$.

Khi đó $x_1+x_2=\log_2 t_1+\log_2 t_2=\log_2(t_1.t_2)$.

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thoả mãn

$$\log_2(t_1.t_2)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(m-1)^2-8>0\\ m-1>0\\ \log_2(t_1t_2)=1\end{cases} \Leftrightarrow m>1+2\sqrt{2}.$$

Câu 44. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f\left(e^{x^2}\right)=m$ có đúng 2 nghiệm thực là

A. $[0;4]$. **B.** $\{0;4\}$. **C.** $\{0\}\cup(4;+\infty)$. **D.** $[4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=e^{x^2}$. Ta có $x^2\ge 0\Rightarrow t\ge 1$, nếu $t=1$ thì $x=0$ và nếu $t>1$ thì $x=\pm\sqrt{\ln t}$.

Phương trình $f\left(e^{x^2}\right)=m$ (1) trở thành phương trình $f(t)=m$ (2).

Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có

(1) có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có đúng 1 nghiệm thuộc $[1;+\infty)$ và nghiệm này lớn hơn 1.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m>4\end{array}\right.$$

Vậy tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{0\}\cup(4;+\infty)$.

Câu 45. **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}+m\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=6$. (1)

Đặt $t=\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t>0$. Phương trình (1) trở thành: $t+\dfrac{m}{t}=6\Leftrightarrow -t^2+6t=m$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng 1 nghiệm lớn hơn 1.

Xét hàm số: $g(t)=-t^2+6t$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ta có: $g'(t)=-2t+6\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên:

t	1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

$y = m$

Nhìn vào bảng biến thiên ta có: phương trình (2) có đúng 1 nghiệm lớn hơn $1 \Leftrightarrow m \le 5$.

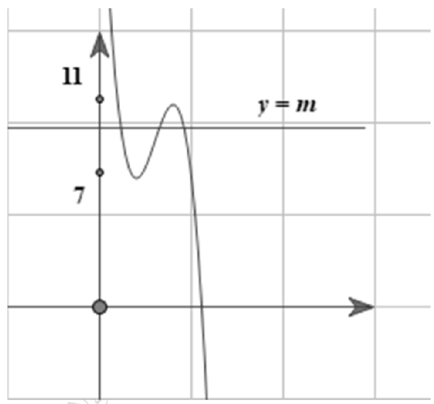
Kết hợp điều kiện m nguyên và $m \in (-10;10) \Rightarrow m \in (-10;5] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow$ Có 15 giá trị m thỏa yêu cầu đề.

Câu 46. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m).3^{x-3} = 3^x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 34. **B.** 27. **C.** 38. **D.** 45.

Lời giải

Chọn B



$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m).3^{x-3} = 3^x + 1$

$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left[(x-3)^3 + 27 + m - 3x\right].3^{x-3} = 3^x + 1$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-3)^3 + m - 3x + 27 = 3^3 + 3^{3-x}$ (1)

$a = 3 - x;\ b = \sqrt[3]{m-3x}$

$(1) \Leftrightarrow 3^b + 27 + b^3 - a^3 = 27.+3^a \Leftrightarrow 3^b + b^3 = 3^a + a^3$

Xét $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t.\ln 3 + 3t^2 \ge 0 \forall t \in R$

$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 3 - x = \sqrt[3]{m-3x}$

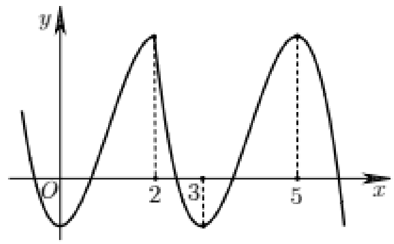
$\Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27$

$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 18x - 24$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

Dựa vào đồ thị: $7 < m < 11 \Rightarrow m = 8, 9, 10$.

Câu 47. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

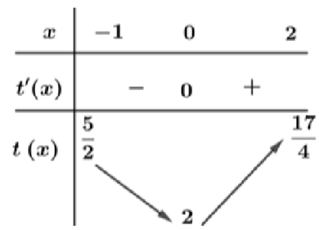
Lời giải

Chọn B

Đặt $t=t\left(x\right)=2^x+2^{-x}$, với $x\in\left[-1;2\right]$.

Hàm số $t=t\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;2\right]$ và $t'\left(x\right)=2^x.\ln 2-2^{-x}.\ln 2$, $t'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:



Vậy với $x\in\left[-1;2\right]\Rightarrow t\in\left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Với mỗi $t\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị x thỏa mãn $t=2^x+2^{-x}$.

Với mỗi $t\in\left\{2\right\}\cup\left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn $t=2^x+2^{-x}$.

Xét phương trình $f\left(t\right)=m$ với $t\in\left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Từ đồ thị trên ta thấy phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm t_1, t_2, trong đó có $t_1\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$, $t_2\in\left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$. Do đó phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$.

Câu 48. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in\left(1;3\right)$. Chọn đáp án đúng.

A. $S=-35$. **B.** $S=20$. **C.** $S=25$. **D.** $S=-21$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2^x$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2-8t+7=m^2+6m$ với $2<t<8$ (vì $1<x<3$).

Khi đó phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in\left(1;\,3\right)$

$\Leftrightarrow f\left(t\right)=m^2+6m$ có nghiệm $t\in\left(2;\,8\right)$, với $f\left(t\right)=t^2-8t+7$.

Ta có $f'\left(t\right)=2t-8$; $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=4\in\left(2;\,8\right)$.

Bảng biến thiên:

x	2		4		8
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-5	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-9 \le m^2+6m<7$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+6m+9 \ge 0 \\ m^2+6m-7<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ -7<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow -7<m<1$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Suy ra $S=-(6+5+4+3+2+1+0)=-21$.

Câu 49. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập các giá trị của m để phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)2^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty;\dfrac{9}{2}\right)$. **B.** $\left[4;\dfrac{9}{2}\right]$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $[4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$. Đặt $t=2^{1+\sqrt{1-x^2}}$; $-1 \le x \le 1 \Rightarrow 2 \le t \le 4$.

Phương trình trở thành: $t^2-(m+2)t+2m+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2-2t+1}{t-2}=m$ (*)

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2} \Rightarrow f'(t)=\dfrac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}$

t	2		3		4
$f'(t)$	||	-	0	+	
$f(t)$	|| $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\dfrac{9}{2}$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $t \in [2;4]$ $\Leftrightarrow m \ge 4$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=3^{x-4}+(x+1).2^{7-x}-6x+3$, khi phương trình $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+3m-1=0$ có số nghiệm nhiều nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số m có dạng $\dfrac{a}{b}$ (trong đó a, $b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=a+b$.

A. $T=7$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=13$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=7-4\sqrt{6x-9x^2}=7-4\sqrt{1-(3x-1)^2} \in [3;7]$. Khi đó $f(t)=1-3m$.

Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+(t+1)2^{7-t}-6t+3$ trên đoạn $[3;7]$.

Ta có $f'(t)=3^{t-4}\ln 3+2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2-6$;

$f''(t)=3^{t-4}(\ln 3)^2-2^{7-t}\ln 2-2^{7-t}\ln 2+(t+1)2^{7-t}(\ln 2)^2$

$=3^{t-4}(\ln 3)^2+\underbrace{\left[-2+(t+1)\ln 2\right]}_{>0,\forall t\in[3;7]}2^{7-t}\ln 2>0.$

Suy ra hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$.

Lại có $\begin{cases} f'(3)<0 \\ f'(7)>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất t_0 thuộc $(3;7)$.

t	3		t_0		7
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{148}{3}$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	-4

Dựa vào BBT, ta thấy phương trình $f(t)=1-3m$ có số nghiệm nhiều nhất

$\Leftrightarrow f(t_0)<1-3m\le -4 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\le m<\frac{1-f(t_0)}{3}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của m là $\frac{5}{3}\longrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$ nên $a+b=8$.

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực?

A. 5. **B.** 7. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $0\le 1-x^2\le 1 \Leftrightarrow 1\le 1+\sqrt{1-x^2}\le 2 \Leftrightarrow 3\le 3^{1+\sqrt{1-x^2}}\le 9$

Đặt $t=3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ phương trình trở thành $t^2-(m+3).t+2m+1=0 \quad (1)$

Phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t\in[3;9]$

$(1)\Leftrightarrow m=\frac{t^2-3t+1}{t-2}\Leftrightarrow m=t-1-\frac{1}{t-2}$ vì $t-2>0$

Xét $f(t)=t-1-\frac{1}{t-2}$ liên tục trên đoạn $[3;9]$ có $f'(t)=1+\frac{1}{(t-2)^2}>0 \quad \forall t\in[3;9]\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên đoạn $[3;9]$.Có $f(3)=1; f(9)=\frac{55}{7}$

Vậy phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow m\in\left[1;\frac{55}{7}\right]$

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ Có 7 giá trị nguyên.

Câu 52. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y}-2^y+x=2y \\ 2^x+1=(m^2+2).2^y.\sqrt{1-y^2} \end{cases} (1)$, m là tham số. Gọi S là tập các giá trị m nguyên để hệ (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $|y|\le 1\Leftrightarrow y\in[-1;1]$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ (1) ta có $2^{x-y}+(x-y)=2^y+y \ (2)$.

Xét hàm số $y=f(t)=2^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Dễ thấy $y'=2^t.\ln 2+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (2) tương đương với $x-y=y\Leftrightarrow x=2y$.

Thay $x=2y$ vào phương trình thứ hai của hệ (1) ta được $4^y+1=(m^2+2).2^y.\sqrt{1-y^2}$ (3).

Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) phải có nghiệm duy nhất $y\in[-1;1]$.

Giả sử $y_0\in[-1;1]$ là một nghiệm của (3) thì $4^{y_0}+1=(m^2+2).2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$.

Khi đó $4^{-y_0}+1=(m^2+2).2^{-y_0}.\sqrt{1-(-y_0)^2}\Leftrightarrow 4^{y_0}+1=(m^2+2).2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$ nên $-y_0$ cũng là nghiệm của (3). Suy ra $y_0=-y_0\Leftrightarrow y_0=0$. Thay $y=0$ vào (3) ta được $m=0$.

Thử lại: với $m=0$ thì (3) viết thành $4^y+1=2.2^y.\sqrt{1-y^2}\Leftrightarrow 2^y+\dfrac{1}{2^y}=2\sqrt{1-y^2}$ (4).

Ta có $VT(4)\ge 2$, dấu bằng khi $2^y=\dfrac{1}{2^y}\Leftrightarrow y=0$; $VP(4)\le 2$, dấu bằng khi $y=0$.

Suy ra phương trình (4) có nghiệm duy nhất là $y=0$. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Câu 53. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a>0$ và $a\ne 1$, biết phương trình $a^x-\dfrac{1}{a^x}=2\cos(bx)$ có 7 nghiệm phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $a^{2x}-2a^x(\cos bx+2)+1=0$.

A. 28. **B.** 14. **C.** 0. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$a^{2x}-2a^x(\cos bx+2)+1=0\Leftrightarrow a^x-2+\frac{1}{a^x}=2(\cos bx+1)$$

$$\Leftrightarrow\left(a^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right)^2=4\cos^2\frac{bx}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}=2\cos\dfrac{bx}{2}\\ a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}=-2\cos\dfrac{bx}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}=2\cos b\left(\dfrac{x}{2}\right) & (1)\\ a^{\frac{-x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{-x}{2}}}=2\cos b\left(\dfrac{-x}{2}\right) & (2)\end{array}\right..$$

Nếu phương trình (1) và phương trình (2) có nghiệm chung là x_0 thì $2\cos\dfrac{bx_0}{2}=-2\cos\dfrac{bx_0}{2}$

$\Rightarrow\cos\dfrac{bx_0}{2}=0\Rightarrow a^{\frac{x_0}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x_0}{2}}}=0\Rightarrow x_0=0\Rightarrow\cos\dfrac{bx_0}{2}=1$ (Vô lí).

Do đó phương trình (1) và phương trình (2) không có nghiệm chung.

Mặt khác theo giả thiết phương trình (1) và phương trình (2) đều có 7 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 14 nghiệm phân biệt.

Câu 54. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\dfrac{15}{13}$	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của m để phương trình $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là

A. e^4. **B.** e^3. **C.** $e^{\frac{15}{13}}$. **D.** e^5.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $f'(x)=a(x-1)(x-3)=a(x^2-4x+3)(a\ne 0)$

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int a(x^2-4x+3)\mathrm{d}x=a(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x)+C$

Do $f(1)=1,\ f(3)=\frac{15}{13}$ nên ta có hệ $\begin{cases}\frac{4}{3}a+C=1\\ C=\frac{15}{13}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{26}\\ C=\frac{15}{13}\end{cases}$

Khi đó hàm số $f(x)=-\frac{1}{26}x^3+\frac{3}{13}x^2-\frac{9}{26}x+\frac{15}{13}$

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$

$f'(x)=\frac{-3}{26}(x^2-4x+3),\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$

Ta có: $f(0)=\frac{15}{13},\ f(1)=1,\ f(2)=\frac{14}{13}$ nên $1\le f(x)\le\frac{15}{13}$

Đặt $f(x)=t$

Xét hàm số $g(t)=2t^3-\frac{13}{2}t^2+7t+\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[1;\frac{15}{13}\right]$

$g'(t)=6t^2-13t+7,\ g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{7}{6}\notin\left[1;\frac{15}{13}\right]\end{array}\right.$

Ta có: $g(1)=4,\ g(\frac{15}{13})=\frac{8778}{2197}$

Suy ra GTLN của $g(x)$ trên đoạn $\left[1;\frac{15}{13}\right]$ bằng 4. Theo yêu cầu bài toán thì $m=e^4$.

Câu 55. **(Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho phương trình $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+(2m+1)\left(4-\sqrt{15}\right)^x-6=0$ (m là tham số). Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1-2x_2=0$. Khi đó m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=t\ (t>0)\ \Rightarrow\left(4-\sqrt{15}\right)^x=\frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t+\frac{2m+1}{t}-6=0\Leftrightarrow t^2-6t+2m+1=0\quad(*)$

$x_1-2x_2=0\Leftrightarrow\left(4+\sqrt{15}\right)^{x_1-2x_2}=1\Leftrightarrow\frac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{x_1}}{\left(4+\sqrt{15}\right)^{2x_2}}=1\Leftrightarrow\frac{t_1}{t_2^2}=1.$

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1-2x_2=0$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt dương t_1,t_2 thỏa mãn $t_1=t_2^2$

Tức là: $\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\\ t_1=t_2^2\quad(1)\end{cases}$

+) $\Delta'>0\Leftrightarrow 8-2m>0\Leftrightarrow m<4.$

+) $S=6>0$ luôn đúng.

+) $P = 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$.

+) Theo Vi-ét: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 & (2) \\ t_1.t_2 = 2m+1 & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (3) suy ra: $t_2^3 = 2m+1 \Leftrightarrow t_2 = \sqrt[3]{2m+1} \Rightarrow t_1 = \left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2$.

Thay vào (2) ta được $\left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2 + \sqrt[3]{2m+1} - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{2m+1} = 2 \\ \sqrt[3]{2m+1} = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{7}{2} \ \ (tm) \\ m = -14\,(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $m = \dfrac{7}{2} \in (3;5)$.

Câu 56. **(THPT Minh Khai 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5^x + 10 = m\sqrt{25^x + 4}$ có nghiệm duy nhất. Số tập con của S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

$5^x + 10 = m\sqrt{25^x+4} \Leftrightarrow \dfrac{5^x+10}{\sqrt{25^x+4}} = m \quad (1)$.

TH 1: $m \le 0$. Phương trình (1) vô nghiệm.

TH 2: $m > 0$. (1) $\Leftrightarrow \dfrac{(5^x+10)^2}{25^x+4} = m^2$

Đặt $t = 5^x$, $t > 0$. Ta có: $\dfrac{(t+10)^2}{t^2+4} = m^2 \quad (2)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{(t+10)^2}{t^2+4}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

$f'(t) = \dfrac{-20t^2 - 192t + 80}{(t^2+4)^2}$. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -10 (l) \\ t = \dfrac{2}{5} (tm) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(t$		$+$	0	$-$	
$f(t$	25	$\nearrow$	26	$\searrow$	1

Để phương trình (1) có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có đúng một nghiệm $t > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = 26 \\ 1 < m^2 \le 25 \end{array}\right.$. Do điều kiện $\begin{cases} m > 0 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{2,3,4,5\}$.

Vậy $S = \{2,3,4,5\}$, do đó số tập con của S là $2^4 = 16$.

Câu 57. **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số m để phương trình $4^{x^2-2x+1} - m.2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ (1)

Đặt $t=2^{x^2-2x+1}=2^{(x-1)^2}$. Do đó, ta có $(x-1)^2=\log_2 t$. Điều kiện $(t\geq 1)$

Ta có phương trình: (1) trở thành: $t^2-2mt+3m-2=0$ (2)

Ta nhận thấy mỗi giá trị $t>1$ cho hai giá trị x tương ứng. Như vậy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm thỏa: $1<t_1<t_2$.

$(2)\Leftrightarrow(2t-3)m=t^2-2$.

Nhận xét: $t=\dfrac{3}{2}$, không là nghiệm phương trình.

Xét $t\neq\dfrac{3}{2}$, $(2)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2}{2t-3}$. Xét hàm $g(t)=\dfrac{t^2-2}{2t-3}$ trên $(1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

$g'(t)=\dfrac{2t^2-6t+4}{(2t-3)^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$

t	1 $+\infty$					$\frac{3}{2}$			2
$g'(t)$	0	$-$		$\Vert$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta cần $m>2$.

Câu 58. Cho phương trình: $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$. Tập các giá trị để bất phương trình có ba nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** −4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0\Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m}+x^3+x^2-2x+m=2^{x^2+x}+x^2+x(*)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $(*)\Leftrightarrow f\left(x^3+x^2-2x+m\right)=f\left(x^2+x\right)\Leftrightarrow x^3+x^2-2x+m=x^2+x$

$\Leftrightarrow x^3-3x+m=0\Leftrightarrow m=-x^3+3x(**)$.

Xét hàm số $g(x)=-x^3+3x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=-3x^2+3$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m<2 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+2b=2$.

Câu 59. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right)3^x+1=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0 \Leftrightarrow 3^{2(x+1)}-m\left(4\sqrt{|x+1|}+3m+3\right).3^x+1=0$

$\Leftrightarrow 3^{x+1}+\dfrac{1}{3^{x+1}}=\dfrac{1}{3}m\left(4\sqrt{|x+1|}+3m+3\right)$.

Đặt $x+1=t$ thì PT trở thành $3^t+\dfrac{1}{3^t}=\dfrac{1}{3}m\left(4\sqrt{|t|}+3m+3\right)$ $(*)$

Vậy bài toán trở thành tìm m để phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận thấy, nếu t_o là một nghiệm của $(*)$ thì $-t_o$ cũng là nghiệm của $(*)$.

Suy ra, điều kiện cần để phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là $(*)$ có nghiệm $t=0$.

$\Rightarrow 1+1=\dfrac{1}{3}m.(3m+3) \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Thử lại:

• Với $m=-2$ thì $(*)$ trở thành $3^t+\dfrac{1}{3^t}=\dfrac{-2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)$.

Nhận thấy, $VT=3^t+\dfrac{1}{3^t}\overset{Cauchy}{\geq}2$, $VP\leq\dfrac{-2}{3}.(-3)=2 \Rightarrow$ PT có nghiệm duy nhất $t=0$ nên $m=-2$ không thỏa mãn.

• Với $m=1$ thì $(*)$ trở thành $3^t+\dfrac{1}{3^t}=\dfrac{1}{3}\left(4\sqrt{|t|}+6\right) \Leftrightarrow 3^t+\dfrac{1}{3^t}-\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{|t|}+3\right)=0$ $(**)$

Xét hàm số $f(t)=3^t+\dfrac{1}{3^t}-\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{|t|}+3\right)$ với $t>0$.

Ta có, $f'(t)=3^t.\ln 3-\dfrac{\ln 3}{3^t}-\dfrac{2}{3\sqrt{t}}$; $f''(t)=3^t\ln^2 3+\dfrac{\ln^2 3}{3^t}+\dfrac{1}{3\sqrt{t^3}}>0$ với mọi $t>0$.

$\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow f'(t)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm $t>0$.

$\Rightarrow f(t)=0$ có nhiều nhất 2 nghiệm $t>0$.

Lại có, $f(1)=0$ và $f(0)=0 \Rightarrow$ Phương trình $(**)$ có 3 nghiệm là $t=0$, $t=\pm1$.

Vậy $m=1$ thỏa mãn.

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để phương trình $2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{mx-2m-1}{x-2}=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình $2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{mx-2m-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow 2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{m(x-2)-1}{x-2}=0$

$\Leftrightarrow 2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+m-\dfrac{1}{x-2}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{x-2}-2019^x-\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Xét hàm số

$$y=\frac{1}{x-2}-2019^x-\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow y'=-\frac{1}{(x-2)^2}-2019^x\ln(2019)-\frac{3}{(x+1)^2}<0;\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;2\right\}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	||	$-$	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m\in(-\infty;-2)$ mà $m\in[-2019;2019];m\in\mathbb{Z}$. Vậy ta có 2017 số nguyên m cần tìm.

Câu 61. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2+1=3^m$ và $m=3^x-2x^2+x-1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S.

A. 6 **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hai phương trình đã cho có nghiệm chung nên hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}2x^2+1=3^m\\ m=3^x-2x^2+x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\log_3\left(2x^2+1\right)\\ m=3^x-2x^2+x-1\end{cases}\Rightarrow\log_3\left(2x^2+1\right)=3^x-2x^2+x-1$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2+1\right)+2x^2+1=3^x+x\Leftrightarrow 3^{\log_3\left(2x^2+1\right)}+\log_3\left(2x^2+1\right)=3^x+x.$$

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$ xác định trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)=3^t.\ln 3+1>0$ suy ra hàm $f(t)=3^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $\log_3\left(2x^2+1\right)=x\Leftrightarrow 2x^2+1=3^x$.

Xét hàm số $g(x)=2x^2+1-3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=4x-3^x\ln 3\Rightarrow g''(x)=4-3^x\ln^2 3\Rightarrow g'''(x)=-3^x\ln^3 3<0$. Suy ra hàm số $g''(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $g(x)=0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm.

Ta lại có $g(0)=g(1)=g(2)=0$. Suy ra phương trình $2x^2+1=3^x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\\ m=2\end{array}\right.$.

Vậy $S=3$.

Câu 62. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Giá trị của tham số m để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$ là

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Phương trình trở thành $t^2-2mt+2m=0$ (*).

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m\ge 0\\ 2m>0\\ 2m>0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 2.$$

Ta có $x_1+x_2=3 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2^3 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=8 \Leftrightarrow t_1.t_2=8 \Leftrightarrow 2m=8 \Leftrightarrow m=4$.

Kết luận $m=4$.

Câu 63. **(Chuyên Chu Văn An - 2020)** Tìm m để phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m<0$. **B.** $m>1$. **C.** $-1<m<1$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2^x$, điều kiện: $t>0$.

Phương trình trở thành: $t^2-2t+m=0$ (*)

Phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

$\Leftrightarrow t^2-2t+m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn: $t_1<1<t_2$.

Phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=1-m>0\\ t_1.t_2=m>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1$.

Phương trình có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi

$(t_1-1)(t_2-1)<0$

$\Leftrightarrow t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$

$\Leftrightarrow m-2+1<0$

$\Leftrightarrow m<1$.

Kết hợp các điều kiện thì ta được $0<m<1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 64. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x-2.6^{x+1}+(m-3).4^x=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 35. **B.** 38. **C.** 34. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tương đương $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-12.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+(m-3)=0$.

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$, $t>0$.

Phương trình trở thành $t^2-12.t+(m-3)=0$, $t>0$ (*)

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}39-m>0\\ m-3>0\\ 12>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<39\\ m>3\end{cases} \Leftrightarrow 3<m<39$.

Vậy có 35 giá trị nguyên dương của tham số m.

Câu 65. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Gọi S là tập hợp các số nguyên m sao cho phương trình $4^x-m.2^{x+1}+3m^2-500=0$ có 2 nghiệm phân biệt. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2^x\ (t>0)$ khi đó phương trình $4^x-m.2^{x+1}+3m^2-500=0\ (1)$ trở thành:

$t^2-2m.t+3m^2-500=0\ (2)$. Để (1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2)

có 2 nghiệm dương phân biệt hay $\begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-3m^2+500>0\\ 3m^2-500>0\\ 2m>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\sqrt{10} < m < 5\sqrt{10} \\ m < \dfrac{-10\sqrt{15}}{3} \vee m > \dfrac{10\sqrt{15}}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{10\sqrt{15}}{3} < m < 5\sqrt{10}.$$

Vậy tập hợp các số nguyên m là $S = \{13;14;15\}$.

Câu 66. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Tìm điều kiện của tham số a để phương trình sau có nghiệm: $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (a+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2a + 1 = 0$. Hãy chọn đáp án đúng nhất?

A. $4 \le a \le \dfrac{64}{7}$. **B.** $2 \le a \le \dfrac{64}{9}$. **C.** $3 \le a \le \dfrac{50}{3}$. **D.** $1 \le a \le \dfrac{50}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ vì $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \Rightarrow 3 \le t \le 9$. Khi đó bài toán trở thành tìm điều kiện của tham số a để phương trình $t^2 - (a+2).t + 2a + 1 = 0\,(*)$ có nghiệm trên đoạn $[3;9]$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = a(t-2)$.

Vì $t = 2$ không phải nghiệm của phương trình nên $(*) \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 2t + 1}{t-2} = a$

Xét $f(t) = \dfrac{t^2 - 2t + 1}{t-2} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{t-2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \notin [3;9] \\ t = 3 \in [3;9] \end{array}\right.$

Ta có $f(3) = 4; f(9) = \dfrac{64}{7} \Rightarrow 4 \le a \le \dfrac{64}{7}$ thì phương trình bài ra có nghiệm.

Câu 67. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \le 2020 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0 \end{cases}$ có nghiệm là :

A. $m \ge -3$. **B.** $-2 \le m \le 1$. **C.** $-1 \le m \le 2$. **D.** $m \ge -2$.

Lời giải

Chọn D

$7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \le 2020 \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} + 1010.\left(2x + \sqrt{x+1}\right) \le 7^{2+\sqrt{x+1}} + 1010.\left(2 + \sqrt{x+1}\right) \quad (*)$

Hàm số $f(t) = 7^t + 1010.t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f\left(2x + \sqrt{x+1}\right) \le f\left(2 + \sqrt{x+1}\right)$

Suy ra : $2x + \sqrt{x+1} \le 2 + \sqrt{x+1} \Rightarrow -1 \le x \le 1$.

$x \in [-1;1]$: $x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x-2}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \exists x \in [-1;1]$: $m \ge \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \qquad (**)$

x	-1		$2-\sqrt{3}$		1
$\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$	-2	$\nearrow$	$2-2\sqrt{3}$	$\searrow$	-2

Từ bảng biến thiên ta có, $(**) \Leftrightarrow m \ge -2$.

Câu 68. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho phương trình $16^{x^2}-2.4^{x^2+1}+10=m$ (m là tham số). Số giá trị nguyên của tham $m\in[-10;10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=4^{x^2}$, $t\ge 1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2-8t+10=m$ (1)

Nghiệm $t=1$ cho một nghiệm $x=0$.

Mỗi nghiệm $t>1$ cho hai nghiệm x đối nhau.

Do vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng một nghiệm $t>1$, nghiệm còn lại (nếu có) phải nhỏ hơn 1.

Xét hàm số $f(t)=t^2-8t+10$.

Bảng biến thiên

t	1		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$	3	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 1 khi $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m=-6 \end{array}\right.$.

Suy ra số giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ là 8.

Câu 69. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\left(2^x-2x\right)\sqrt{(3)^{2^x}-m}=0$ (với m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2020;2020]$ để tập hợp S có hai phần tử?

A. 2094. **B.** 2092. **C.** 2093. **D.** 2095.

Lời giải.

Chọn A

Gọi D là tập xác định của phương trình đã cho.

Nếu $m\le 1$ thì $3^{2^x}-m>0\,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $D=\mathbb{R}$.

Nếu $m>1$ thì $D=\left[\log_2(\log_3 m);+\infty\right)$.

$$\left(2^x-2x\right)\sqrt{(3)^{2^x}-m}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2^x-2x=0\,(1) \\ (3)^{2^x}-m=0\,(2) \end{array}\right..$$

Xét hàm số $f(x)=2^x-2x$ có $f'(x)=2^x\ln 2-2;\, f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\ln 2}$ do đó phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác $f(1)=0; f(2)=0$ nên $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Lại có với $m>1, (2)\Leftrightarrow x=\log_2(\log_3 m)$.

Nếu $m \le 1$ thì $S = \{1;2\}$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Nếu $m > 1$ thì S có hai phần tử khi và chỉ khi $1 \le \log_2(\log_3 m) < 2 \Leftrightarrow 9 \le m < 81$.

Vậy S có hai phần tử khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m \le 1 \\ 9 \le m < 81 \end{array}\right.(*)$. Số các giá trị nguyên của $m \in [-2020;2020]$ thỏa mãn $(*)$ là $1 + 2020 + 1 + 81 - 9 = 2094$.

Câu 70. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai số thực bất kỳ $a > 1$, $b > 1$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$. Trong trường hợp biểu thức $S = \left(\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2 - 6x_1 - 6x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a = b^{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $a = b^{\sqrt[3]{6}}$. **C.** $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$. **D.** $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^x b^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^x b^{x^2}}{b} = 1 \Leftrightarrow a^x b^{x^2} = b \Leftrightarrow \ln\left(a^x b^{x^2}\right) = \ln b$

$\Leftrightarrow \ln a^x + \ln b^{x^2} = \ln b \Leftrightarrow x^2 \ln b + x\ln a - \ln b = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\left\{\begin{array}{l} \ln b \ne 0 \,\forall b > 1 \\ \Delta = \ln^2 a + 4\ln^2 b \ge 0 \;\forall a > 1, b > 1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

Theo định lý Viét ta có $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{\ln a}{\ln b} = -\log_b a \\ x_1.x_2 = -\frac{\ln b}{\ln b} = -1 \end{array}\right.$.

Khi đó ta có $S = \left(\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2 - 6x_1 - 6x_2 = \left(\frac{-1}{-\log_b a}\right)^2 + 6\log_b a = \frac{1}{\log_b^2 a} + 6\log_b a$.

Do $a > 1$, $b > 1 \Rightarrow \log_b a > \log_b 1 = 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$S = \frac{1}{\log_b^2 a} + 6\log_b a = \frac{1}{\log_b^2 a} + 3\log_b a + 3\log_b a \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\log_b^2 a}.3\log_b a.3\log_b a} = 3\sqrt[3]{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\log_b^2 a} = 3\log_b a \Leftrightarrow \log_b^3 a = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_b a = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$.

Vậy khẳng định đúng là $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$.

Câu 71. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình $16^x - 6.8^x + 8.4^x - m.2^{x+1} - m^2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Khi đó S có

A. 4 tập con. **B.** Vô số tập con. **C.** 8 tập con. **D.** 16 tập con.

Lời giải

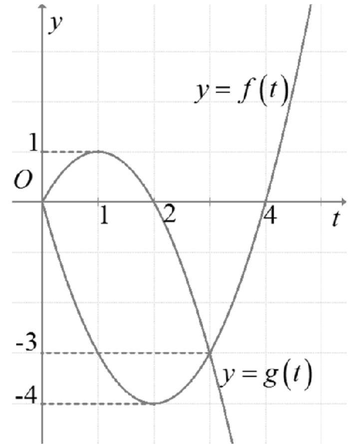
Chọn D

Đặt $t = 2^x, (t > 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^4 - 6t^3 + 8t^2 - 2mt - m^2 = 0(*), t > 0$.

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt.

$(*) \Leftrightarrow \left(t^4 - 6t^3 + 9t^2\right) - \left(t^2 + 2mt + m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = t^2 - 4t\,(1) \\ m = -t^2 + 2t\,(2) \end{array}\right.$.

Xét hai hàm số $f(t)=t^2-4t; g(t)=-t^2+2t$ trên khoảng $(0;+\infty)$ có đồ thị như sau



Dựa vào đồ thị hai hàm số này ta suy ra phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $m\in\{0;1;-3;-4\}$ hay S có 4 phần tử.

Vậy S có $2^4=16$ tập con.

Câu 72. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$. **B.** $[2;4]$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{6^x+3.2^x}{1+2^x}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{1+2^x}$ liên tục trên $(0;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{12^x\ln 3+6^x\ln 6+3.2^x\ln 2}{(1+2^x)^2}>0, \forall x\in(0;1)$. Suy ra hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{1+2^x}$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f(0)<m<f(1)$, tức là $2<m<4$.

Câu 73. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-2019;2020)$ sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \\ 2x-1=\sqrt{2y-2x+m} \end{cases}?$$

A. 2017. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$.

Đặt $t=x^2-2y$, phương trình trở thành: $4+9.3^t=\left(4+9^t\right).7^{2-t} \Leftrightarrow 4.7^t+9.3^t.7^t=4.49+49.3^{2t}$

$\Leftrightarrow 4\left(7^t-7^2\right)=3^t\left(3^t.7^2-7^t.3^2\right)$ $(*)$.

Giả sử $3^t.7^2-7^t.3^2<0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{7}\right)^t<\left(\dfrac{3}{7}\right)^2 \Leftrightarrow t>2$.

Nếu $t > 2 \Rightarrow \begin{cases} VT(*) > 0 \\ VP(*) < 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Nếu $t < 2 \Rightarrow \begin{cases} VT(*) < 0 \\ VP(*) > 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Nếu $t = 2 \Rightarrow VT(*) = VP(*) \Rightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $t = 2 \Rightarrow x^2 - 2y = 2 \Rightarrow 2y = x^2 - 2$

Ta được: $2x - 1 = \sqrt{x^2 - 2x - 2 + m} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x + 3 = m \quad (1) \\ x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$, với $x \in \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow f'(x) = 6x - 2 > 0, \forall x \ge \dfrac{1}{2}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow f(x) \ge f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{4} \Rightarrow (1)$ có nghiệm $x \in \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ khi $m \ge \dfrac{11}{4} \Rightarrow m \in \left[\dfrac{11}{4}; 2020\right)$. Vì m nguyên nên $m \in \{3; 4; 5; ...; 2019\}$.

Vậy có 2017 giá trị của m.

Câu 74. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$ thuộc đoạn $[0; 50\pi]$

A. $\dfrac{2671\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{1853\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{2475\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{2653\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x \ne 0$. Nhận thấy $e^{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} > 0 \ \forall x \in R \Rightarrow \tan x > 0$.

Ta có: $e^{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)} = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \dfrac{e^{\frac{\sin x}{\sqrt{2}}}}{e^{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}}} = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \dfrac{e^{\frac{\sin x}{\sqrt{2}}}}{\sin x} = \dfrac{e^{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}}}{\cos x} \ (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}}{t}$, $t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ có:

$$f'(t) = \frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(\sqrt{2}t - 2)}{2t^2} < 0, \forall t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

Bảng biến thiên:

t	-1		0		1
$f'(t)$		$-$	||	$-$	
$f(t)$	$f(-1)$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$f(1)$

Từ bảng biến thiên ta thấy: $f(-1) = -e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} < 0$, $f(1) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} > 0$.

Do đó từ (*) ta có: $f(\sin x)=f(\cos x)\Leftrightarrow \sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$.

Theo giả thiết $x\in\left[0;50\pi\right]\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{4}+k\pi\le 50\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le k\le\frac{199}{4}$ (**)

Do $k\in Z$ nên từ (**) suy ra $k\in\left\{0;1;...;49\right\}$, có 50 giá trị k thỏa mãn.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình trên đoạn $\left[0;50\pi\right]$ là:

$$S=\sum_{k=0}^{49}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\frac{2475\pi}{2}.$$

Câu 75. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình (ẩn x): $3^{\log_2 x^2}-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1x_2>2$.

A. $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $x>0$.

Ta có: $3^{\log_2 x^2}-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0\ (1)$

$\Leftrightarrow\left(3^{\log_2 x}\right)^2-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0$

Đặt: $t=3^{\log_2 x}\ (t>0)$

$\Rightarrow \log_2 x=\log_3 t$

$\Leftrightarrow x=2^{\log_3 t}$

Khi đó: $t^2-2(m+3)t+m^2+3=0\ \ (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương $t_1;t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+3)^2-(m^2+3)>0\\ 2(m+3)>0\\ m^2+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ m>-3\end{cases}\Leftrightarrow m>-1.$$

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases}t_1+t_2=2(m+3)\\ t_1.t_2=m^2+3\end{cases}$

Ta có: $x_1.x_2>2$

$\Leftrightarrow 2^{\log_3 t_1}.2^{\log_3 t_2}>2$

$\Leftrightarrow 2^{\log_3(t_1.t_2)}>2$

$\Leftrightarrow 2^{\log_3(m^2+3)}>2$

$\Leftrightarrow \log_3(m^2+3)>1$

$\Leftrightarrow m^2+3>3$

$\Leftrightarrow m^2>0$

$\Leftrightarrow m\neq 0$

Vậy $\begin{cases}m>-1\\ m\neq 0\end{cases}$.

Dạng 3. Phương trình kết hợp của mũ và logarit chứa tham số

Câu 1. **(Mã 103 -2019)** Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số. **B.** 124. **C.** 123. **D.** 125.

Lời giải

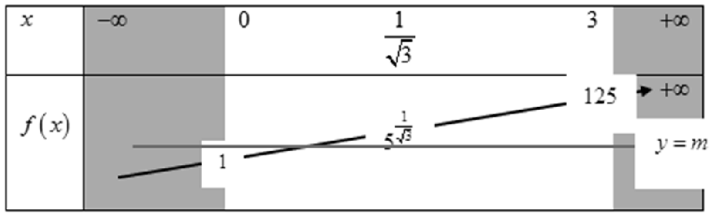
Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 5^x-m\ge 0\ (m>0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ge \log_5 m \end{cases}$.

$\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0\ (1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x-\log_3 x-1=0 \\ 5^x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x)=5^x=m \end{array}\right.$.

Xét $f(x)=5^x$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$\left[\begin{array}{l} m=1 \\ 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\le m<125 \end{array}\right.,\ m\in\mathbb{Z}_+ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m\le 1 \\ 3\le m\le 124 \end{array}\right.$

Nên có 123 giá trị m thoả mãn.

Câu 2. **(Mã 102 - 2019)** Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{3^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. vô số. **B.** 81. **C.** 79. **D.** 80.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ 3^x-m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ m\le 3^x \end{cases}$ (*)

Ta có $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{3^x-m}=0\ (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\log_2^2 x-3\log_2 x-2=0 & (2) \\ \sqrt{3^x-m}=0 & (3) \end{array}\right.$.

Trong đó $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=2 \\ \log_2 x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.(4)

Với $m>0$ thì $3^x=m \Leftrightarrow \log_3 m=x$.

Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi xảy ra các trường hợp sau:

TH1: (3) có nghiệm $x=\log_3 m\le 0 \Leftrightarrow 0<m\le 1$. Kết hợp điều kiện (*) và (4) ta được $m=1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $x=4$.

TH2: $m>1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x\ge \log_3 m>0$.

Và do $4>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le \log_3 m<4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\le m<3^4$.

Mà m nguyên dương nên ta có $m\in\{3,4,...,80\}$, có 78 giá trị của m.

Vậy có 79 giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt

Câu 3. **(Mã 104 2019)** Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 64. **B.** Vô số. **C.** 62. **D.** 63.

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x\ge \log_4 m \end{cases}$ (*) (với m nguyên dương).

Phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x-\log_3 x-1=0\ (2) \\ 4^x=m\ (3) \end{array}\right.$.

Phương trình $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=1 \\ \log_3 x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$.

Phương trình $(3)\Leftrightarrow x=\log_4 m$.

Do m nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

TH 1: $m=1$ thì $\log_4 m=0$. Do đó (*) là $x>0$.

Khi đó nghiệm của phương trình (3) bị loại và nhận nghiệm của phương trình (2).

Do đó nhận giá trị $m=1$.

TH 2: $m\ge 2$ thì (*) là $x\ge \log_4 m$ (vì $\log_4 m\ge \dfrac{1}{2}$)

Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3}\le \log_4 m<3$

$\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\le m<4^3$

Suy ra $m\in\{3;4;5;\ldots;63\}$.

Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63-3+1+1=62$ giá trị nguyên dương m.

Câu 4. **(Mã 101 2019)** Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 49. **B.** 47. **C.** Vô số. **D.** 48.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 7^x-m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 7^x\ge m \end{cases}$.

* Trường hợp $m\le 0$ thì $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x-1)(4\log_2 x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-\dfrac{5}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2^{-\frac{5}{4}} \end{array}\right.$.

Trường hợp này không thỏa điều kiện m nguyên dương.

* Trường hợp $m>0$, ta có $\begin{cases} x>0 \\ 7^x\ge m \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \log_7 m$ nếu $m>1$ và $x>0$ nếu $0<m\le 1$.

Khi đó $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0\\ \sqrt{7^x-m}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2^{-\frac{5}{4}}\\ x=\log_7 m\end{array}\right.$.

+ Xét $0<m\le 1$ thì nghiệm $x=\log_7 m\le 0$ nên trường hợp này phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x=2; x=2^{-\frac{5}{4}}$ thỏa mãn điều kiện.

+ Xét $m>1$, khi đó điều kiện của phương trình là $x\ge \log_7 m$.

Vì $2>2^{-\frac{5}{4}}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2>\log_7 m\ge 2^{-\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}}\le m<7^2$.

Trường hợp này $m\in\{3;4;5;...;48\}$, có 46 giá trị nguyên dương của m.

Tóm lại có 47 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn phương án

B.

Câu 5. **(Mã 102 2018)** Cho phương trình $3^x+m=\log_3(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 15 **B.** 16 **C.** 9 **D.** 14

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^x+m=\log_3(x-m) \Leftrightarrow 3^x+x=\log_3(x-m)+x-m \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$, với $t\in\mathbb{R}$. Có $f'(t)=3^t\ln 3+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác phương trình (*) có dạng: $f(x)=f\left(\log_3(x-m)\right)$. Do đó ta có $f(x)=f\left(\log_3(x-m)\right) \Leftrightarrow x=\log_3(x-m) \Leftrightarrow 3^x=x-m \Leftrightarrow 3^x-x=-m$

Xét hàm số $g(x)=3^x-x$, với $x\in\mathbb{R}$. Có $g'(x)=3^x\ln 3-1$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\log_3\left(\dfrac{1}{\ln 3}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm là:

$m\in\left(-\infty;-g\left(\log_3\left(\dfrac{1}{\ln 3}\right)\right)\right]$. Vậy số giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm là: 14.

Câu 6. **(Mã 101 2018)** Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 19 **B.** 9 **C.** 21 **D.** 20

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>m$

Đặt: $t=\log_5(x-m)\Rightarrow\begin{cases}x-m=5^t\\5^x+m=t\end{cases}\Rightarrow 5^x+x=5^t+t\ \ (1)$.

Xét hàm số $f(u)=5^u+u\Rightarrow f'(u)=5^u\ln 5+1>0,\forall u\in\mathbb{R}$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow x=5^x+m\Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $f(x)=x-5^x$, $x>m$

Do: $5^x>0\Rightarrow m<x$, suy ra phương trình có nghiệm luôn thỏa điều kiện.

$f'(x)=1-5^x\ln 5$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-5^x\ln 5=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\approx -0,295$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx -0,917$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\le\approx -0,917\xrightarrow{m\in(-20;20)}m=\{-19;-18;...;-1\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 7. **(Mã 103 -2018)** Cho phương trình $7^x+m=\log_7(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-25;25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9 **B.** 25 **C.** 24 **D.** 26

Lời giải

<u>Chọn C</u>

ĐK: $x>m$

Đặt $t=\log_7(x-m)$ ta có $\begin{cases}7^x+m=t\\7^t+m=x\end{cases}\Rightarrow 7^x+x=7^t+t\ \ (1)$

Do hàm số $f(u)=7^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1)\Leftrightarrow t=x$. Khi đó:

$7^x+m=x\Leftrightarrow m=x-7^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-7^x\Rightarrow g'(x)=1-7^x\ln 7=0\Leftrightarrow x=-\log_7(\ln 7)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\log_7(\ln 7)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-\log_7(\ln 7))$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\le g(-\log_7(\ln 7))\approx -0,856$ (cácnghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x-m=7^x>0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25;25)$, nên $m\in\{-24;-16;...;-1\}$.

Câu 8. Cho phương trình $5^x+m+\log_{\frac{1}{5}}(x-m)=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm thực?

A. 20. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Ta có: $5^x+m+\log_{\frac{1}{5}}(x-m)=0 \Leftrightarrow 5^x=\log_5(x-m)-m=0$ (1).

ĐKXĐ: $x>m$.

Đặt $t=\log_5(x-m)$, ta có $x-m=5^t$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}x-m=5^t\\ t-m=5^x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-m=5^t & (*)\\ 5^x+x=5^t+t & (2)\end{cases}$.

Xét hàm số $f(u)=5^u+u$, $u\in\mathbb{R}$.

+ $f'(u)=5^u\ln 5+1>0,\forall u$ suy ra hàm số $f(u)=5^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f(x)=f(t)\Leftrightarrow x=t$.

Thay vào phương trình $(*)$ ta có $m=x-5^x$ (3).

Ta có $x-m=5^x>0$, do đó phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x)=x-5^x$, $x\in\mathbb{R}$, có $g'(x)=1-5^x\ln 5, g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5^x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5^x)=-\infty$.

BBT

x	$-\infty$	$\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$\log_5\left(\frac{1}{e\ln 5}\right)$	$\searrow$ $-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\le\log_5\left(\frac{1}{e\ln 5}\right)\simeq -0,91$.

Vì $m\in(-20;20)$ và là số nguyên, suy ra $m\in\{-20;-19;...;-1\}$

Vậy có 19 giá trị của m.

Câu 9. **(Mã 104 2018)** Cho phương trình $2^x+m=\log_2(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-18;18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9 **B.** 19 **C.** 17 **D.** 18

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x>m$

Đặt $t=\log_2(x-m)$ ta có $\begin{cases}2^x+m=t\\ 2^t+m=x\end{cases}\Rightarrow 2^x+x=2^t+t$ (1)

Do hàm số $f(u)=2^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1)\Leftrightarrow t=x$. Khi đó:

$2^x+m=x\Leftrightarrow m=x-2^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-2^x\Rightarrow g'(x)=1-2^x\ln 2=0\Leftrightarrow x=-\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\log_2(\ln 2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-\log_2(\ln 2))$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \le g(-\log_2(\ln 2)) \approx -0,914$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 2^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-18;18)$, nên $m \in \{-17;-16;...;-1\}$.

Câu 10. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20;20)$ để phương trình trên có nghiệm?

A. 15. **<u>B</u>.** 19. **C.** 14. **D.** 17.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Ta có phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$ (1) với điều kiện $x - m > 0$.

Đặt $\log_5(x-m) = t \Leftrightarrow x - m = 5^t$ (*) thay vào phương trình (1) ta có $5^x + m = t \Leftrightarrow t - m = 5^x$(**). Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - m = 5^t \\ t - m = 5^x \end{cases}$. Từ hệ phương trình ta suy ra $x - t = 5^t - 5^x$

$\Leftrightarrow x + 5^x = t + 5^t$.

Xét hàm số $f(x) = x + 5^x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(x) = 1 + 5^x.\ln 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = x + 5^x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó ta có $x + 5^x = t + 5^t \Leftrightarrow f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$ thay vào phương trình (**) ta có $x - m = 5^x \Leftrightarrow x - 5^x = m$. Đặt $g(x) = x - 5^x$ ta có $g'(x) = 1 - 5^x.\ln 5$. Ta có

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 5^x.\ln 5 = 0 \Leftrightarrow 5^x = \dfrac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow x = \log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$.

Ta có BBT với $g\left(\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)\right) = \log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right) - \dfrac{1}{\ln 5} = \alpha$.

x	$-\infty$		$\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $x - 5^x = m$ có nghiệm khi $m \le \alpha$ hay $m \le \log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right) - \dfrac{1}{\ln 5}$. Ta suy ra có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 11. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

A. -2. **B.** 1. **C.** 4. **<u>D</u>.** 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, khi đó $t \ge 1$.

Thế vào phương trình đã cho ta được phương trình sau

$$2^t \ln(t+1) = 2^{m^2} \ln(m^2+1) \Leftrightarrow t = m^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = m^2$$

(Do hàm đặc trưng $f(u) = 2^u \ln(u+1)$ có

$f'(u) = \dfrac{2^u}{u+1} + 2^u \ln(u+1).\ln 2 \ge 0, \forall u \ge 0 \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$)

Vậy $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 - m^2 = 0$ có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow$ Tổng tất cả các giá trị m bằng 0.

Câu 12. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tương đương $3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \dfrac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2}.\ln(2|x-m|+2) \ (*).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t.\ln t, t \ge 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra

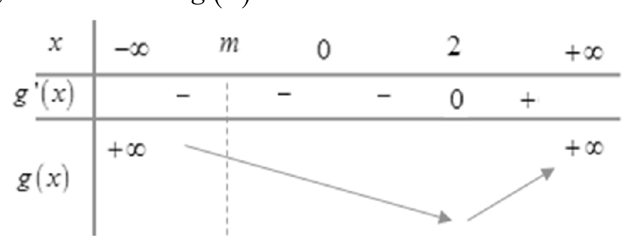
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x-m| + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x - 2|x-m| + 1 = 0$.

Có $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 \ khi \ x \ge m \\ x^2 - 2m + 1 \quad khi \ x \le m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x - 4 \ khi \ x \ge m \\ 2x \quad khi \ x \le m \end{cases}$

và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ khi \ x \ge m \\ x = 0 \ khi \ x \le m \end{array}\right.$.

Xét các trường hợp sau:

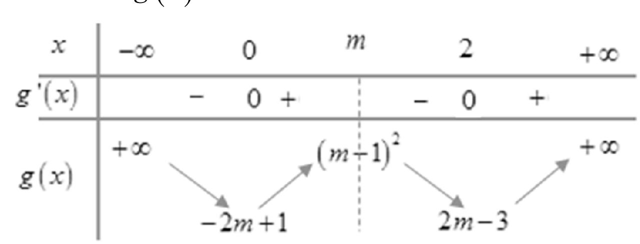
TH1: $m \le 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:



Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thoả mãn.

TH2: $m \ge 2$ tương tự.

TH3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:



Phương trình có 3 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}(m-1)^2=0\\-2m+1=0>2m-3\\-2m+1<0=2m-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{1}{2}\\m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Cả 3 giá trị trên đều thoả mãn, nên tổng của chúng bằng 3.

Câu 13. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-10;10]$ để phương trình
$e^{x+a}-e^x=\ln(1+x+a)-\ln(1+x)$ có nghiệm duy nhất.

A. 2. **B.** 10. **C.** 1. **D.** 20

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định $\begin{cases}x+1+a>0\\x+1>0\end{cases}$ (*)

Phương trình tương đương với $e^{x+a}-e^x-\left(\ln(1+x+a)-\ln(1+x)\right)=0$.

Đặt $f(x)=\mathrm{e}^{x+a}-e^x$, $g(x)=\ln(1+x+a)-\ln(1+x)$, $Q(x)=f(x)-g(x)$

Phương trình đã cho viết lại thành $Q(x)=0$

+) Với $a=0$ thì $Q(x)=0$ (luôn đúng với mọi x thoả mãn (*)).

+) Với $a>0$ có (*) tương đương với $x>-1$, $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến với $x>-1$

Khi đó, $Q(x)$ đồng biến với $x>-1$. (1)

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}Q(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(e^{x+a}-e^x-\ln\dfrac{1+x+a}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left[e^{x+a}-e^x-\ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^a-1\right)-\ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right]=+\infty\end{cases}$ (2)

Kết hợp (1), (2) thì phương trình $Q(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

+) Với $a<0$ có (*) tương đương với $x>-1-a$, $g(x)$ đồng biến và $f(x)$ nghịch biến với $x>-1-a$.

Khi đó, $Q(x)$ nghịch biến với $x>-1-a$. (3)

Ta có:

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1-a)^+}Q(x)=\lim\limits_{x\to(-1-a)^+}\left(e^{x+a}-e^x-\ln\dfrac{1+x+a}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to(-1-a)^+}\left[e^{x+a}-e^x-\ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^a-1\right)-\ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right]=-\infty\end{cases}$ (4)

Kết hợp (3), (4) suy ra $Q(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Do a là số nguyên trên đoạn $[-10;10]$ nên kết hợp 3 trường hợp trên thấy có 20 giá trị của a thoả mãn điều kiện của bài.

Câu 14. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ để phương trình $e^x=\ln(x+2m)+2m$ có nghiệm?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4039.

Lời giải

Chọn A

Ta có $e^x = \ln(x+2m)+2m \Leftrightarrow e^x + x = \ln(x+2m)+x+2m \Leftrightarrow e^x + x = e^{\ln(x+2m)} + \ln(x+2m)$ (*).

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ với $t\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(t)=e^t+1>0,\forall t$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x)=f(\ln(x+2m)) \Leftrightarrow x=\ln(x+2m) \Leftrightarrow x+2m=e^x \Leftrightarrow 2m=e^x-x$.

Xét hàm số $g(x)=e^x-x \Rightarrow g'(x)=e^x-1 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biên thiên suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2m\ge 1 \Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in(-2020;2020)$ nên $m\in\{1;2;3;...;2019\}$.

Vậy có 2019 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ để phương trình $e^x=\ln(x+2m)+2m$ có nghiệm.

Dạng 4. Phương trình mũ – logarit chứa nhiều ẩn

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$. (1)

Đặt $\log_3(x+1)=t \Rightarrow x+1=3^t$.

Phương trình (1) trở thành: $t+3^t=2y+3^{2y}$ (2)

Xét hàm số $f(u)=u+3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u)=1+3^u\ln 3>0,\forall u\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f(t)=f(2y)\Leftrightarrow t=2y \Rightarrow \log_3(x+1)=2y \Leftrightarrow x+1=9^y \Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\le x\le 2020 \Rightarrow 0\le 9^y-1\le 2020 \Leftrightarrow 1\le 9^y\le 2021 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_9 2021$

$(\log_9 2021\approx 3,464)$

Do $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của x

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

Cách 2:

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$

Xét hàm số $f(x)=\log_3(x+1)+x+1$ với $x\in[0;2020]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ln 3}+1>0,\forall x\in x\in[0;2020] \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;2020]$.

Suy ra $f(0)\le f(x)=\log_3(x+1)+x+1\le f(2020)\Leftrightarrow 1\le f(x)\le \log_2 2021+2021$

$\Rightarrow 1\le 2y+9^y\le \log_3 2021+2021<2028$

Nếu $y<0\Rightarrow 2y+9^y<9^y<9^0=1\Rightarrow y\ge 0$

Khi đó $y \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(2y+9^y\right) \in \mathbb{N} \Rightarrow 2y+9^y \le 2027 \Rightarrow 9^y \le 2027-2y \le 2027$

$\Rightarrow y \le \log_9 2027 \approx 3,465 \ \Rightarrow y \le 3 \Rightarrow 0 \le y \le 3$

$\Rightarrow y \in \{0;1;2;3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của y chỉ cho 1 giá trị của x.

+) $y=0 \Rightarrow \log_3(x+1)+x+1=1 \Leftrightarrow x=0$

+) $y=1 \Rightarrow \log_3(x+1)+x+1=11 \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x=10 \Leftrightarrow x=8$

+) $y=2 \Rightarrow \log_3(x+1)+x+1=85 \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x=84 \Leftrightarrow x=80$

+) $y=3 \Rightarrow \log_3(x+1)+x+1=735 \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x=734 \Leftrightarrow x=729$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} (1)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$9^t=(x+y)^2 \le 2\left(x^2+y^2\right)=4^t \Rightarrow \dfrac{9^t}{4^t} \le 2 \Rightarrow t \le \log_{\frac{9}{2}} 2$

Như vậy,

$x^2+y^2=4^t \Rightarrow x^2 \le 4^t \le 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 1,89 \Rightarrow x \in \{-1;0;1\}$

➢ Trường hợp 1: $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=1 \end{cases}$.

➢ Trường hợp 2: $x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$.

➢ Trường hợp 3: $x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2+1=4^t \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ y=3^t+1 \ge 2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 \ge 5$ mâu thuẫn với $x^2+y^2 \le 4^{\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}$ suy ra loại $x=-1$.

Vậy có hai giá trị $x \in \{0;1\}$

Cách 2:

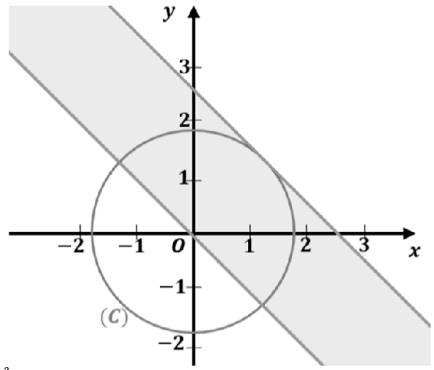
Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} (1)$.

Suy ra x,y là tọa độ của điểm M với M thuộc đường thẳng $d: x+y=3^t$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=4^t$.

Để tồn tại y tức tồn tại M nên $d,(C)$ có điểm chung, suy ra $d(O,d) \le R$ trong đó $O(0;0)$, $R=2^t$ nên $\dfrac{\left|-3^t\right|}{\sqrt{2}} \le 2^t \Leftrightarrow t \le \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2}$.

Khi đó $(1) \Rightarrow \begin{cases} 0 < x+y \le 3^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} \\ x^2+y^2 \le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} \end{cases}$.

Minh họa quỹ tích điểm M như hình vẽ sau



Ta thấy có 3 giá trị $x \in \mathbb{Z}$ có thể thỏa mãn là $x=-1; x=0; x=1$.

Thử lại:

➢ Trường hợp 1: $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=1 \end{cases}$.

➢ Trường hợp 2: $x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$.

➢ Trường hợp 3: $x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2+1=4^t \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ y=3^t+1 \ge 2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 \ge 5$ mâu thuẫn với $x^2+y^2 \le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}$ suy ra loại $x=-1$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n \le 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **<u>D</u>.** 9.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Ta có $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{2a^m}{n} = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Xét hai hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ và $g(x)=\dfrac{2}{n}x^m$ trên $(-1;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

$+$ Nếu m chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$g(1)$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó m lẻ.

$+$ Nếu m lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x=0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1;1)$ khi có 1 nghiệm trên $(0;1)$, hay $f(1)>g(1)\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right)<\frac{2}{n}\Leftrightarrow n<\frac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\approx 2,26\Rightarrow n\in\{1;2\}$.

Đối chiếu điều kiện, với $n=1$ suy ra $m\in\{1;3;5;7;9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n=2$ thì $m\in\{1;3;5;7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C.

Xét $f(x)=\frac{2}{n}.x^m-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$

Đạo hàm $f'(x)=\frac{2m}{n}x^{m-1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$

Theo đề bài $f(x)=0$ có ba nghiệm nên $\frac{2m}{n}x^{m-1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có ít nhất hai nghiệm

Xét đồ thị của hàm $y=x^{m-1};y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $m-1$ chẵn và $m-1>0$

Suy ra $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$. Khi đó $f'(x)=0$ có nghiệm $\begin{cases}x_1<0\\x_2>0\end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)>0\\f(-1)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{n}>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\\-\frac{2}{n}<\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow n\le 2\Rightarrow n=\{1;2\}$

$n\in\{1;2\}$ và $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$, do $m+n\le 14$ nên ta có 11 cặp $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 12$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1,1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})$?

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})\Leftrightarrow\frac{2}{n}a^m=\ln(a+\sqrt{a^2+1})\quad(*)$.

Xét hàm $f(a)=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ trên $(-1,1)$ (dễ thấy hàm f lẻ, đồng biến trên R), có BBT:

a	-1		0		1
$f'(a)$		$+$	1	$+$	
$f(a)$	$\ln(-1+\sqrt{2})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln(1+\sqrt{2})$

Xét hàm $g(a)=\dfrac{2}{n}.a^m$ trên $(-1,1)$.

Với m chẵn, $g(a)$ là hàm chẵn và $g(a)\ge 0,\forall a\in R$, do đó $(*)$ không thể có 3 nghiệm.

Với m lẻ, $g(a)$ là hàm lẻ, đồng biến trên R và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a=0$ là đường thẳng $y=0$.

Dễ thấy $(*)$ có nghiệm $a=0\in(-1;1)$. Để $(*)$ có đúng 3 nghiệm tức là còn có 2 nghiệm nữa là $\pm a_0$ với $0<a_0<1$.

Muốn vậy, thì $g(1)=\dfrac{2}{n}.1^m=\dfrac{2}{n}>f(1)=\ln(1+\sqrt{2})\Leftrightarrow n<\dfrac{2}{\ln(1+\sqrt{2})}\approx 2,26\Rightarrow n=1;n=2$

Cụ thể:

+ $m\in\{3;5;7;9\}$ thì $n\in\{1;2\}$: Có 8 cặp (m,n)

+ $m=11$ thì $n\in\{1\}$: Có 1 cặp (m,n)

+ $m=1$: Đồ thị hàm số $g(a)$ là đường thẳng ($g(a)=a;g(a)=2a$) không thể cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại giao điểm $a_0\ne 0$ được vì tiếp tuyến của hàm số $f(a)$ tại điểm có hoành độ $a=0$ là đường thẳng $y=a$.

Vậy có cả thảy 9 cặp (m,n).

Câu 6. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m\in[-1;1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2+1}\left(x^2+y^2\right)=\log_2\left(2x+2y-2\right)$ có nghiệm nguyên $(x;y)$ duy nhất?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+y^2>0\\ x+y-1>0\end{cases}$.

Nhận xét: Vì x,y có vai trò như nhau nên nếu phương trình có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là một nghiệm của phương trình.

***) Điều kiện cần:** Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_0=y_0$.

Thay vào phương trình ta được $\log_{m^2+1}\left(2x_0^2\right)=\log_2\left(4x_0-2\right)$

Vì $x_0\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4x_0-2>1$. Lại có $2x_0^2\ge 4x_0-2\Rightarrow \log_2\left(4x_0-2\right)=\log_{m^2+1}\left(2x_0^2\right)\ge\log_{m^2+1}\left(4x_0-2\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\log_{4x_0-2}2}\ge\dfrac{1}{\log_{4x_0-2}\left(m^2+1\right)}\Rightarrow \log_{4x_0-2}\left(m^2+1\right)\ge\log_{4x_0-2}2$

$\Rightarrow m^2+1\ge 2\Rightarrow m^2\ge 1$ mà $m\in[-1;1]\Rightarrow m=\pm 1$.

***) Điều kiện đủ:** Với $m=\pm 1$ thì phương trình đã cho trở thành

$\log_2\left(x^2+y^2\right)=\log_2\left(2x+2y-2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+2y-2\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Vậy có hai giá trị m cần tìm là $m=\pm 1$.

Câu 7. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{11}(3x+4y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_{11}(3x+4y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)=t \Leftrightarrow \begin{cases}3x+4y=11^t\\ x^2+y^2=4^t\end{cases}$ (*).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $\Delta: 3x+4y=11^t$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=4^t$ có điểm chung

$\Leftrightarrow d(O,\Delta)\le R \Leftrightarrow \dfrac{11^t}{5}\le 2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{11}{2}\right)^t\le 5 \Leftrightarrow t\le \log_{\frac{11}{2}}5$.

Do $x^2+y^2=4^t$ nên $|y|\le 2^t\le 2^{\log_{\frac{11}{2}}5}\approx 1.9239767$.

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-1;0;1\}$.

Thử lại:

- Với $y=-1$, hệ (*) trở thành $\begin{cases}3x-4=11^t\\ x^2+1=4^t\end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{11^t+4}{3}\right)^2+1=4^t \Leftrightarrow 121^t+8.11^t+25=9.4^t$ (**)

Nếu $t<0$ thì $4^t<1 \Rightarrow 4^t<\left(\dfrac{11^t+4}{3}\right)^2+1$.

Nếu $t\ge 0 \Rightarrow \begin{cases}121^t\ge 4^t\\ 8.11^t\ge 8.4^t\end{cases} \Rightarrow 121^t-4^t+8\left(11^t-4^t\right)+25>0$.

Vậy (**) vô nghiệm.

- Với $y=0$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}3x=11^t\\ x^2=4^t\end{cases} \Rightarrow \dfrac{121^t}{9}=4^t \Leftrightarrow t=\log_{\frac{11}{2}}3 \Rightarrow x=\dfrac{11^{\log_{\frac{11}{2}}3}}{3}$.

- Với $y=1$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}3x+4=11^t\\ x^2+1=4^t\end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{11^t-4}{3}\right)^2+1=4^t \Leftrightarrow 121^t-8.11^t+25=9.4^t$.

Xét hàm số $f(t)=121^t-8.11^t+25-9.4^t$, liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)f(1)<0$ nên phương trình $f(t)=0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. Khi đó hiển nhiên sẽ tồn tại x thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn là $y=0,\ y=1$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-(y+4)}$ và $4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-(y+4)} \Leftrightarrow 5^{-(y+3)}=3^{\left|x^2-2x-3\right|}$. (*)

Vì $3^{\left|x^2-2x-3\right|}\ge 3^0 \Rightarrow 5^{-(y+3)}\ge 1 \Rightarrow y+3\le 0 \Rightarrow y\le -3$.

Với $y\le -3$ ta có: $4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8 \Leftrightarrow -4y+(y-1)+(y+3)^2\le 8 \Leftrightarrow y^2+3y\le 0$

$\Leftrightarrow -3\le y\le 0$. Kết hợp với $y\le -3$ suy ra $y=-3$.

Thế $y=-3$ vào $(*)$ ta được: $3^{\left|x^2-2x-3\right|}=1\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn là $(-1;-3);(3;-3)$.

Câu 9. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của phương trình $4^{x-1}+2^x\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+2=2^x+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $x_0>7$. **B.** $-2<x_0<4$. **C.** $4<x_0<7$. **D.** $-5<x_0<-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^{x-1}+2^x\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+2=2^x+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)$

$\Leftrightarrow 4^x-4.2^x+4.\left(2^x-2\right).\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+4+4=0$

$\Leftrightarrow\left(2^x-2\right)^2+4\left(2^x-2\right)\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+4\left[\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)+\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow\left(2^x-2\right)^2+2.\left(2^x-2\right).2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+\left[2\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]^2+4\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow\left[\left(2^x-2\right)+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]^2+4\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x-2+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)=0\\\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0\end{array}\right.$

Vì $\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0\Rightarrow\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=\pm1$.

□ $\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=1\Rightarrow 2^x=0$ (vô nghiệm)

□ $\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=-1\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow x=x_0=2\in(-2;4)$.

Câu 10. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 4000$ và $5\left(25^y+2y\right)=x+\log_5(x+1)^5-4$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_5(x+1)=t\Rightarrow x=5^t-1$.

Phương trình trở thành:

$5\left(5^{2y}+2y\right)=5^t-1+5t-4\Leftrightarrow 5^{2y}+2y=5^{t-1}+(t-1)$.

Xét hàm số $f(u)=5^u+u\Rightarrow f'(u)=5^u.\ln 5+1>0$ nên hàm số luôn đồng biến.

Vậy để $f(2y)=f(t-1)\Leftrightarrow 2y=t-1\Leftrightarrow 2y+1=t=\log_5(x+1)$

$\Rightarrow 0\le 2y+1\le\log_5 4001\Rightarrow 0\le 2y+1\le 5\Rightarrow y=\{0;1;2\}$

Với mỗi nghiệm y ta tìm được một nghiệm x tương ứng.

Câu 11. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

A. 2017. **B.** 4034. **C.** 2. **D.** 2017.2020.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết kết hợp ĐKXĐ của bất phương trình ta có: $1\le y\le 2020; 4\le x\le 2020; x,y\in Z$,(1).

Ta có: $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$

$\Leftrightarrow(x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)+(x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$ (*).

Xét $f(x)=\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)=\log_2\left(2+\frac{7}{x-3}\right)>0,\forall x\in[4;2020]$ (2).

+ Với $y=1$ thay vào (*) ta được:

$3(x+4)\log_3\left(\frac{2}{3}\right)-(x-3)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$ (luôn đúng $\forall x\in[4;2020]$ do (1) và (2)).

Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$.

+ Với $y=2$ thay vào (*) ta thấy luôn đúng $\forall x\in[4;2020]$.

Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$.

+ Với $3\le y\le 2020\Rightarrow y-2>0$.

Xét $g(y)=\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)=\log_3\left(\frac{y+y}{y+2}\right)>\log_3\left(\frac{y+2}{y+2}\right)=0,\forall y\ge 3$ (3).

Suy ra (*) vô nghiệm (Do (2) và (3)).

Vậy có 4034 bộ $(x;y)$.

Câu 12. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho x là số thực dương và y là số thực thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$. Giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+2020$ bằng

A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2,\forall x>0\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}\ge 4$.

Đặt $\sqrt{y+1}=t,t\ge 0$ thu được

$14-(y-2)\sqrt{y+1}=14-(t^2-3)t=-t^3+3t+14=16-(t-1)^2(t+2)\le 16,\forall t\ge 0$.

Dẫn đến $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\le\log_2 16=4$.

Như vậy hai vế bằng nhau khi dấu đẳng thức xảy ra tức là

$$\begin{cases}t=1\\ x=\frac{1}{x}\\ x>0\end{cases}\Rightarrow x=1;y=0\Rightarrow P=x^2+y^2-xy+2020=2021.$$

Câu 13. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho phương trình $\log_3\left(3x^2-6x+6\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ và $0<x<2020$; $y\in\mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$\log_3\left(3x^2-6x+6\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1\Leftrightarrow\log_3 3\left(x^2-2x+2\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$.

$\Leftrightarrow 1+\log_3\left(x^2-2x+2\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$.

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2-2x+2\right)+\left(x^2-2x+2\right)=3^{y^2}+y^2$ (1).

Đặt $\log_3\left(x^2-2x+2\right)=z\Rightarrow x^2-2x+2=3^z$ thì (1) trở thành:

$\Leftrightarrow 3^z + z = 3^{y^2} + y^2$ (2).

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(2) $\Leftrightarrow f(z) = f(y^2) \Leftrightarrow z = y^2$.

Thay trở lại cách đặt ta có: $\log_3(x^2 - 2x + 2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^{y^2}$.

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 2x + 2,\ x \in (0;2020) \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		2020
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	4076362

Suy ra:

$\Leftrightarrow 1 \le g(x) < 4076362 \Leftrightarrow 1 \le 3^{y^2} < 4076362 \Leftrightarrow 0 \le y^2 < \log_3 4076362$.

Do $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \le y < \sqrt{\log_3 4076362} \approx 3,7 \Rightarrow y \in \{0;1;2;3\}$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 1 \\ g(x) = 3 \\ g(x) = 3^4 \\ g(x) = 3^9 \end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta thấy mỗi phương trình trên có một nghiệm $0 < x < 2020$.

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 14. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2 \le x \le 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 2020. **B.** 9. **C.** 2019. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2(x + 2^{y-1}) = t$. Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^t$, $x = 2^t - 2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y - t = 2(2^t - 2^{y-1}) - y \Leftrightarrow 2.2^y + y = 2.2^t + t$.

Xét hàm số $g(x) = 2.2^x + x$ có $g'(x) = 2.2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x$ nên hàm số $y = g(x)$ luôn đồng biến.

Khi đó $2.2^y + y = 2.2^t + t \Leftrightarrow y = t$ hay $y = \log_2(x + 2^{y-1})$.

Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 2^{y-1} = 2^{y-1}$.

Mà $2 \le x \le 2021$ nên $2 \le 2^{y-1} \le 2021 \Leftrightarrow 1 \le y - 1 \le \log_2 2021$ hay $2 \le y \le (\log_2 2021) + 1$.

Lại có y là số nguyên nên $y \in \{2,3,...,11\}$ tức 10 giá trị thỏa mãn.

Xét biểu thức $x = 2^{y-1}$, mỗi giá trị nguyên của y cho tương ứng 1 giá trị nguyên của x nên có 10 cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 15. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thảo mãn $3^{x+y}-x^2\left(3^x-1\right)=(x+1)3^y-x^3$, với $x<2020$?

A. 13. **B.** 15. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$3^{x+y}-x^2\left(3^x-1\right)=(x+1)3^y-x^3 \Leftrightarrow 3^y\left(3^x-x-1\right)=x^2\left(3^x-x-1\right) \Leftrightarrow \left(3^x-x-1\right)\left(3^y-x^2\right)=0$$

Ta thấy $3^x-x-1>0, \forall x>0 \Rightarrow \left(3^x-x-1\right)\left(3^y-x^2\right)=0 \Leftrightarrow 3^y=x^2 \Leftrightarrow y=2\log_3 x \Rightarrow x=3^k$.

Vì $x<2020 \Rightarrow 3^k<2020 \Rightarrow 3^k \le 3^6 \Rightarrow k=\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 16. **(Sở Bình Phước - 2020)** Biết a,b là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$, đồng thời x,y,z là các số các số thực dương thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log\left(x^2+y^2\right)=z+1$. Giá trị của $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(4;5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases}\log(x+y)=z\\ \log\left(x^2+y^2\right)=z+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=10^z\\ x^2+y^2=10^{z+1}=10.10^z\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=10(x+y)$

Khi đó $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z} \Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=a.\left(10^z\right)^3+b.\left(10^z\right)^2$

$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=a.(x+y)^3+b.(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2=a.(x+y)^2+b.(x+y)$

$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2=a.\left(x^2+2xy+y^2\right)+\dfrac{b}{10}\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow x^2+y^2-xy=\left(a+\dfrac{b}{10}\right)\left(x^2+y^2\right)+2a.xy$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases}a+\dfrac{b}{10}=1\\ 2a=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=15\end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=4+\dfrac{1}{225}=4{,}008\in(4;5)$.

Câu 17. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$.

A. 2020 **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3 \Leftrightarrow 3^x+3(x-2)=9y+3\log_3 y \Leftrightarrow 3^x+3(x-2)=3^{2+\log_3 y}+3\log_3 y\ (*)$.

Xét hàm số: $f(t)=3^t+3(t-2)$.

Ta có: $f'(t)=3^t.\ln 3+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow f(x)=f\left(2+\log_3 y\right) \Leftrightarrow x=2+\log_3 y \Leftrightarrow y=3^{x-2}$.

Do $0<y<2020$ và x,y nguyên nên: $1\le 3^{x-2}<2020 \Leftrightarrow 2\le x<2+\log_3 2020 \Rightarrow x\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Ứng với mỗi giá trị x có một giá trị của y nên có 7 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Giả sử a,b là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương

x,y,z thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log(x^2+y^2)=z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $-\frac{25}{2}$. **B.** $-\frac{31}{2}$. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** $\frac{29}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases}\log(x+y)=z\\ \log(x^2+y^2)=z+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ x^2+y^2=10^{z+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ (x+y)^2-2xy=10.10^z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ 10^{2z}-2xy=10.10^z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ xy=\dfrac{10^{2z}-10.10^z}{2}\end{cases}.$$

Khi đó $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=10^{3z}-3.\left(\dfrac{10^{2z}-10.10^z}{2}\right).10^z$

$$=\frac{1}{2}\left(2.10^{3z}-3.10^{3z}+30.10^{2z}\right)=\frac{1}{2}\left(-10^{3z}+30.10^{2z}\right)=-\frac{1}{2}.10^{3z}+15.10^{2z}.$$

Lại có $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$.

Suy ra $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=15\end{cases}\Rightarrow a+b=\dfrac{29}{2}$.

Câu 19. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số hữu tỉ a thuộc đoạn $[-1;1]$ sao cho tồn tại số thực b thỏa mãn

$$\log_2\left(1-a^2-b^2+2b\right)=\frac{2^a}{4^a+1}+\frac{4^a}{2^a+1}+\frac{1}{2^a+4^a}-\frac{1}{2}.$$

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{2^x}{4^x+1}+\dfrac{8^x+1}{2^x\left(1+2^x\right)}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2^x}{4^x+1}+\dfrac{4^x-2^x+1}{2^x}-\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x+1}{2^x}-\frac{3}{2}=\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x+1}{4.2^x}+\frac{3}{4}\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)-\frac{3}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $\dfrac{2^x}{4^x+1}+\dfrac{4^x+1}{4.2^x}\geq 1\quad(1)$.

Lại có $\dfrac{3}{4}\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}-2\right)=\dfrac{3}{4}\left(\sqrt{2^x}-\dfrac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2\geq 0\quad(2)$.

Từ $(1);(2)$ suy ra $\dfrac{2^x}{4^x+1}+\dfrac{4^x}{2^x+1}+\dfrac{1}{2^x+4^x}-\dfrac{1}{2}\geq 1$

$$\Rightarrow\log_2\left(1-a^2-b^2+2b\right)\geq 1\Leftrightarrow 1-a^2-b^2+2b\geq 2\Leftrightarrow a^2+b^2-2b+1\leq 0\Leftrightarrow a^2+\left(b-1\right)^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}.$$

$a=0\in[-1;1]$ nên chọn phương án **C.**

Câu 20. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $x+y>0;-20\le x\le 20$ và

$\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$?

A. 19. **B.** 6 **C.** 10. **D.** 41.

Lờigiải

Chọn C

+ Điều kiện: $x+2y>0$

+ Ta có: $x+y>0$ nên

$$\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{(x+y)(x+2y)}{x+y}+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+2y^2+3xy)-\log_2(x+y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+2y^2+3xy)+x^2+2y^2+3xy=\log_2(x+y)+x+y \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t)=\log_2 t+t$, ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0$ $t\in(0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(x^2+2y^2+3xy)=f(x+y)\Leftrightarrow x^2+2y^2+3xy=x+y$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1)=0\Leftrightarrow x=1-2y$ vì $x+y>0$ nên $x+y=1-y>0$

+ Do $-20\le x\le 20$ suy ra $-\frac{19}{2}\le y<1$

+ Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-9;-8;...;-1;0\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thoả mãn YCBT.

Vậy có 10 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn YCBT.

Câu 21. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x>1$, $y>1$ và $\log_3 x\log_3 6y+2\log_3 x\log_3 2y(3-\log_3 2xy)=\frac{9}{2}$. Giá trị của biểu thức $P=x+2y$ gần với số nào nhất trong các số sau

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a=\log_3 x$, $b=\log_3 2y$. Do $x>1$, $y>1$ nên $a>0$, $b>\log_3 2$.

Theo giả thiết ta có: $a(b+1)+2ab(3-a-b)=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2a^2b+a(2b^2-7b-1)+\frac{9}{2}=0 \quad (1)$

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn a, b là tham số. Để phương trình (1) có nghiệm $a>0$

thì: $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ -\frac{2b^2-7b-1}{2b}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2b^2-7b-1)^2-36b\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4b^4-28b^3+45b^2-22b+1\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(b-1)^2(4b^2-20b+1)\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\ \begin{cases}4b^2-20b+1\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}\end{array}\right..$$

Với $b=1\Rightarrow 2a^2-6a+\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$. Khi đó $P=x+2y=3^{\frac{3}{2}}+3\approx 8,1$.

Với $\begin{cases}4b^2-20b+1\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}$: hệ vô nghiệm do $b>\log_3 2$.

Vậy giá trị biểu thức $P = x + 2y$ gần nhất với 8.

Câu 22. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \le 2020$ thỏa mãn

$$2(3x - y) = 3(1 + 9^y) - \log_3(2x - 1)$$

A. 1010. **B.** 2020. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_3(2x-1) = t \Rightarrow 2x = 3^t + 1$, ta được $3(3^t + 1) - 2y = 3(1 + 3^{2y}) - t \Leftrightarrow 3.3^t + t = 3.3^{2y} + 2y$ (*).

Xét hàm số $f(u) = 3.3^u + u \Rightarrow f'(u) = 3.3^u \ln 3 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow t = 2y$, vậy nên $2x = 3^{2y} + 1 \Leftrightarrow 9^y = 2x - 1$.

Vì $x \le 2020 \Rightarrow 9^y \le 4039 \Leftrightarrow y \le \log_9 4039$. Vì y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3\}$. Ta thấy với mỗi giá trị nguyên của y thì tìm được 1 giá trị nguyên của x. Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.