HÀM SỐ

SỰ ĐỒNG BIẾN VÀ NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Bài toán 1: Tìm khoảng đồng biến – nghịch biến của hàm số:

Cho hàm số $y=f(x)$

+) $f'(x)>0$ ở đâu thì hàm số đồng biến ở đấy.

+) $f'(x)<0$ ở đâu thì hàm số nghịch biến ở đấy.

Quy tắc:

+) Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x)=0$ tìm nghiệm.

+) Lập bảng xét dấu $f'(x)$.

+)Dựa vào bảng xét dấu và kết luận.

Bài toán 2: Tìm m để hàm số $y=f(x,m)$ đơn điệu trên khoảng (a,b)

+) Để hàm số đồng biến trên khoảng (a,b) thì $f'(x)\ge 0\forall x\in(a,b)$.

+) Để hàm số nghịch biến trên khoảng (a,b) thì $f'(x)\le 0\forall x\in(a,b)$

*** Riêng hàm số: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Có TXĐ là tập D. Điều kiện như sau:**

+) Để hàm số đồng biến trên TXĐ thì $y'>0\forall x\in D$

+) Để hàm số nghịch biến trên TXĐ thì $y'<0\forall x\in D$

+) Để hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì

$$\begin{cases} y'>0\forall x\in(a,b) \\ x\ne -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

+) Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì

$$\begin{cases} y'<0\forall x\in(a,b) \\ x\ne -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

*** Tìm m để hàm số bậc 3 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đơn điệu trên R**

HÀM SỐ

+) Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 có biệt thức Δ.

+) Để hàm số **đồng biến** trên R

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$$

+) Để hàm số **nghịch biến** trên R

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > a \\ \Delta \le 0 \end{cases}$$

Chú ý: *Cho hàm số*

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

+) Khi $a > 0$ *để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng k*

$\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *sao cho* $|x_1 - x_2| = k$.

+) Khi $a < 0$ *để hàm số đồng biến trên một đoạn có độ dài bằng k*

$\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *sao cho* $|x_1 - x_2| = k$.

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài toán 1: tìm điểm cực đại – cực tiểu của hàm số

Dấu hiệu 1:

+) nếu $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0 và nó đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm sô.

+) nếu $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0 và nó đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm sô.

*** Quy tắc 1:**

+) tính y'

+) tìm các điểm tới hạn của hàm số. (tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định)

+) lập bảng xét dấu y'. dựa vào bảng xét dấu và kết luận.

Dấu hiệu 2:

cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 tại x_0.

+) x_0 là điểm cđ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

+) x_0 là điểm ct

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

***) Quy tắc 2:**

+) tính $f'(x), f''(x)$.

+) giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

+) thay nghiệm vừa tìm vào $f''(x)$ và kiểm tra. từ đó suy kết luận.

Bài toán 2: Cực trị của hàm bậc 3

Cho hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

1. Để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

2. Để hàm số có không cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta \le 0$

3. Đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu.

+) Cách 1: Tìm tọa độ các điểm cực đại và cực tiểu A, B. Viết phương trình đường thẳng qua A, B.

+) Cách 2: Lấy y chia y' ta được: $y = (mx + n)y' + (Ax + B)$. Phần dư trong phép chia này là $y = Ax + B$ chính là phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu.

Bài toán 3: Cực trị của hàm số bậc 4 trùng phương

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đạo hàm

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

1. Hàm số có đúng 1 cực trị khi $b = \sqrt[3]{3}$.

+) Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$ hàm số có 1 CT và 0 cực đại

+) Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \le 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 0 CT

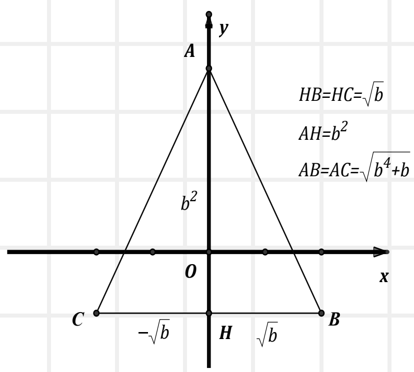
HÀM SỐ

2. hàm số có 3 cực trị khi $ab<0$ (a và b trái dấu).

+) nếu $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 CT

+) Nếu $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 CT

3. Gọi A, B, C là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số và



$A\in Oy$, $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

+) Tam giác ABC luôn cân tại A

+) B, C đối xứng nhau qua Oy và $x_B=-x_C, y_B=y_C=y_H$

+) Để tam giác ABC vuông tại A: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

+) Tam giác ABC đều: $AB=BC$

+) Tam giác ABC có diện tích S:

$$S=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}\left|x_B-x_C\right|.\left|y_A-y_B\right|$$

4. Trường hợp thường gặp: Cho hàm số $y=x^4-2bx^2+c$

+) Hàm số có 3 cực trị khi $b>0$

+) A, B, C là các điểm cực trị

$A\left(0;c\right), B\left(\sqrt{b}, c-b^2\right), C\left(-\sqrt{b}; c-b^2\right)$

+) Tam giác ABC vuông tại A khi $b=1$

+) Tam giác ABC đều khi $b=\sqrt[3]{3}$

+) Tam giác ABC có $\widehat{A}=120^0$ khi $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

+) Tam giác ABC có diện tích S_0 khi $S_0=b^2\sqrt{b}$

+) Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp R_0 khi

$$2R_0=\frac{b^3+1}{b}$$

HÀM SỐ

+) Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp r_0 khi

$$r_0 = \frac{b^2}{\sqrt{b^3+1}+1}$$

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D.

+) M là GTLN của hàm số trên D nếu: $\begin{cases} M \ge f(x) & \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$. Kí hiệu: $M = \max\limits_D f(x)$

+) m là GTNN của hàm số trên D nếu: $\begin{cases} m \le f(x) & \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$. Kí hiệu: $m = \min\limits_D f(x)$

+) Nhận xét: Nếu M, N là GTLN và GTNN của hàm số trên D thì phương trình $f(x) - m = 0$ & $f(x) - M = 0$ có nghiệm trên D.

2. Quy tắc tìm GTLN - GTNN của hàm số:

* **Quy tắc chung:** (Thường dung cho D là một khoảng)

- Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm trên D.
- Lập BBT cho hàm số trên D.
- Dựa vào BBT và định nghĩa từ đó suy ra GTLN, GTNN.

* **Quy tắc riêng:** (Dùng cho $[a;b]$).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a;b]$.

- Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a,b]$.
- Giả sử phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [a,b]$.
- Tính 4 giá trị $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2)$. So sánh chúng và kết luận.

HÀM SỐ

3. Chú ý:

1. GTLN,GTNN của hàm số là một số hữu hạn.

2. Hàm số liên tục trên đoạn $\left[a,b\right]$ thì luôn đạt GTLN, NN trên đoạn này.

3. Nếu hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[a,b\right]$ thì

$\max f\left(x\right)=f\left(b\right),\min f\left(x\right)=f\left(a\right)$

4. Nếu hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a,b\right]$ thì

$\max f\left(x\right)=f\left(a\right),\min f\left(x\right)=f\left(b\right)$

5. Cho phương trình $f\left(x\right)=m$ với $y=f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên D thì phương trình có nghiệm khi

$\min\limits_{D} f\left(x\right)\le m\le \max\limits_{D} f\left(x\right)$

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

+) Đường thẳng $x=a$ là TCĐ của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to a^+} y=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^+} y=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} y=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} y=-\infty$

+) Đường thẳng $y=b$ là TCN của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=b$ hoặc $\lim\limits_{x\to -\infty} y=b$

2. Dấu hiệu:

+) Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.

+) Hàm phân thức mà bậc của tử $\le$ bậc của mẫu có TCN.

+) Hàm căn thức dạng:

$y=\sqrt{}-\sqrt{},y=\sqrt{}-bt,y=bt-\sqrt{}$ có TCN. (Dùng liên hợp)

+) Hàm $y=a^x,\left(0<a\ne 1\right)$ có TCN $y=0$

+) Hàm số $y=\log_a x,\left(0<a\ne 1\right)$ có TCĐ $x=0$

3. Cách tìm:

+) TCĐ: Tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.

+) TCN: Tính 2 giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} y$

4. Chú ý:

+) Nếu

$$x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$$

+) Nếu

$$x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$$

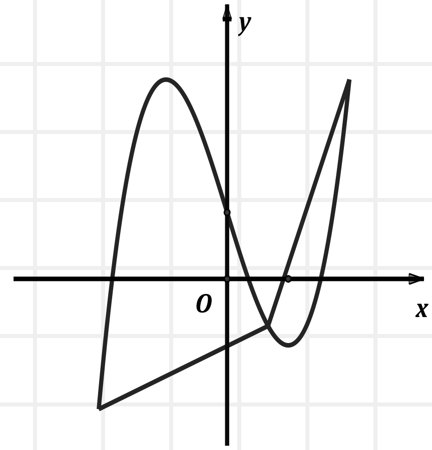
BẢNG BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Định hình hàm số bậc 3:

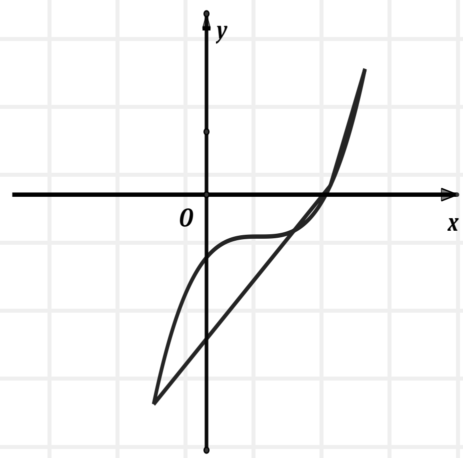
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a. a>0

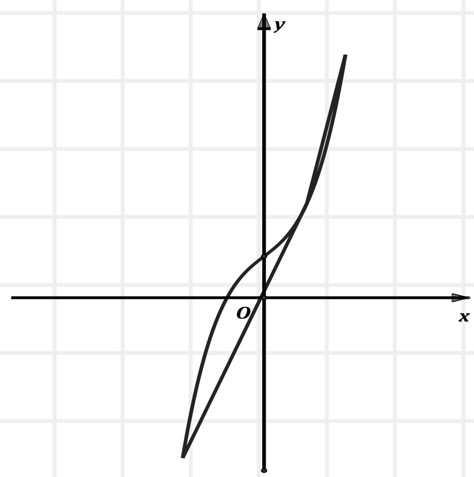
- $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta_{y'} > 0$



- $y' = 0$ có hai nghiệm kép hay $\Delta_{y'} = 0$



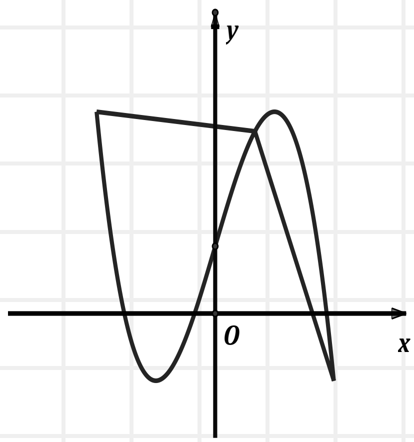
- $y' = 0$ vô nghiệm hay $\Delta_{y'} > 0$



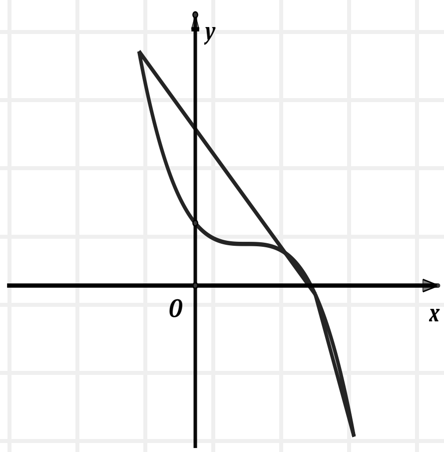
b. a<0

HÀM SỐ

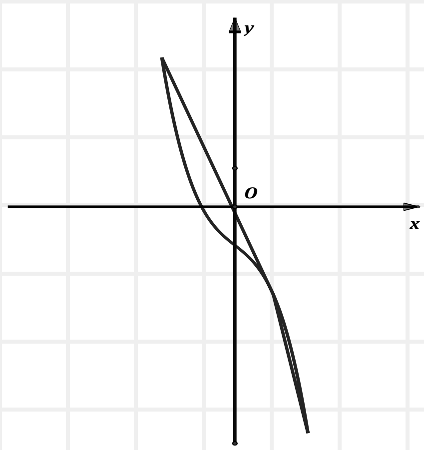
- $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta_{y'} > 0$



- $y' = 0$ có hai nghiệm kép hay $\Delta_{y'} = 0$



- $y' = 0$ vô nghiệm hay $\Delta_{y'} > 0$



2. Định hình hàm số bậc 4:

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

+) Đạo hàm:

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$$

+) Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$

- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 CT

- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 CT

+) Để hàm số có 1 cực trị $ab \geq 0$

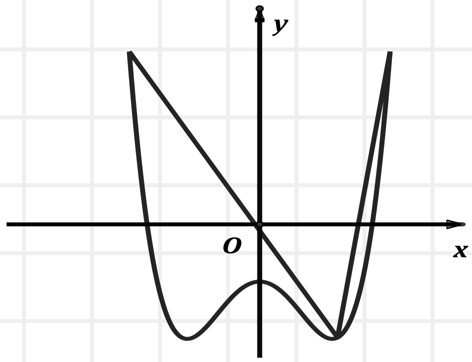
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 CT và 0 cực đại

- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 0 CT

a. a>0

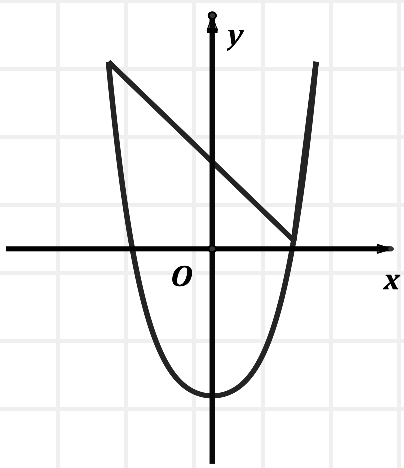
- $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt hay $ab < 0$

HÀM SỐ



- $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm hay

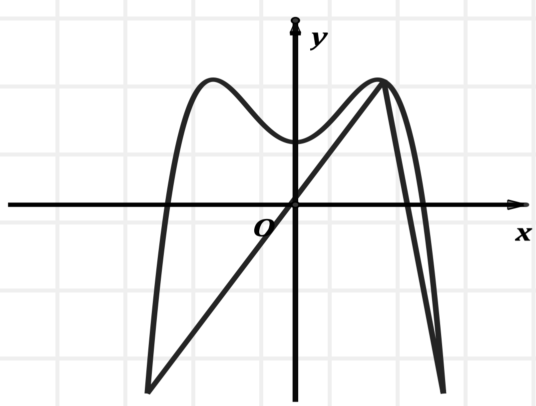
$ab \geq 0$



b. a<0

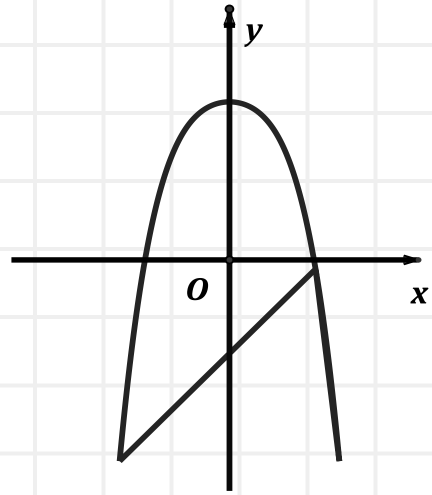
- $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt hay

$ab < 0$



- $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm hay

$ab \geq 0$



3. Định hình hàm số

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

+) Tập xác định: $D = R \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

+) Đạo hàm: $y = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

- Nếu $ad - bc > 0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.

- Nếu $ad - bc < 0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.

+) Đồ thị hàm số có:

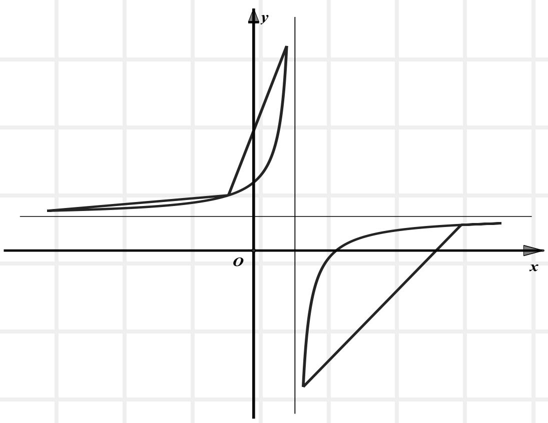
TCĐ: $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

HÀM SỐ

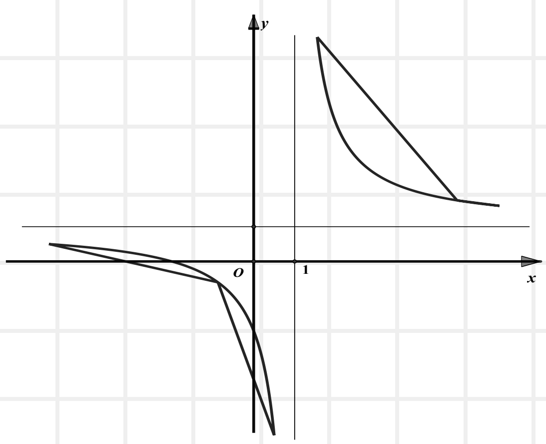
+) Đồ thị có tâm đối xứng:

$I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$

$\boxed{ad-bc>0}$



$\boxed{ad-bc<0}$



SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài toán 1: Tọa độ giao điểm của 2 ĐTHS

Phương pháp:

Cho 2 hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

+) Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

+) Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

Bài toán 2: Tương giao của đồ thị hàm bậc 3

Phương pháp 1: Bảng biến thiên (PP đồ thị)

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F\left(x,m\right)=0$ (phương trình ẩn x tham số m)

+) Cô lập m đưa phương trình về dạng $m=f\left(x\right)$

+) Lập BBT cho hàm số $y=f\left(x\right)$.

+) Dựa và giả thiết và BBT từ đó suy ra m.

*** Dấu hiệu:** Sử dụng PP bảng biến thiên khi m độc lập với x.

HÀM SỐ

Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$

+) Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x=x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.

+) Phân tích:

$$F(x,m)=0 \Leftrightarrow (x-x_0).g(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$$

(là $g(x)=0$ là phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

+) Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc 2 $g(x)=0$.

Phương pháp 3: Cực trị

***) Nhận dạng**: Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.

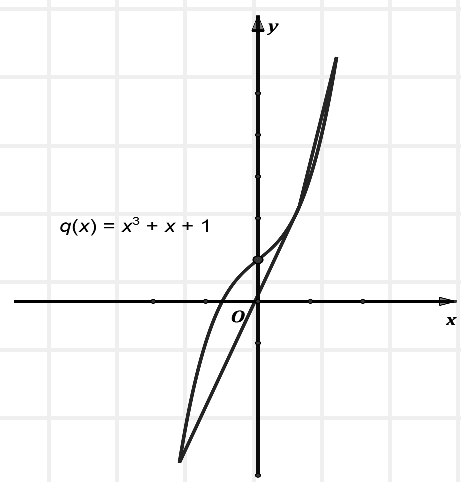
***) Quy tắc:**

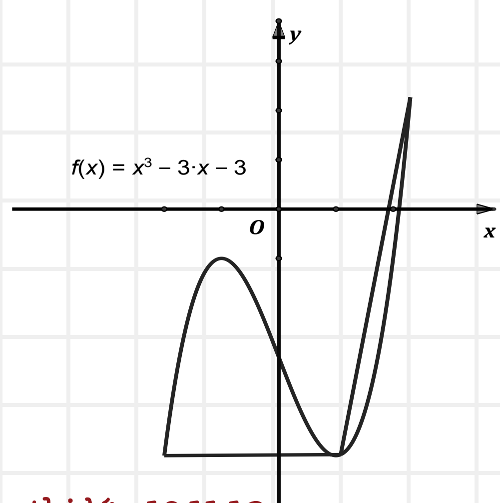
+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$ (1). Xét hàm số $y=F(x,m)$

+) Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị cắt trục hoành tại đúng 1 điểm. (2TH)

- Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên R hàm số không có cực trị hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

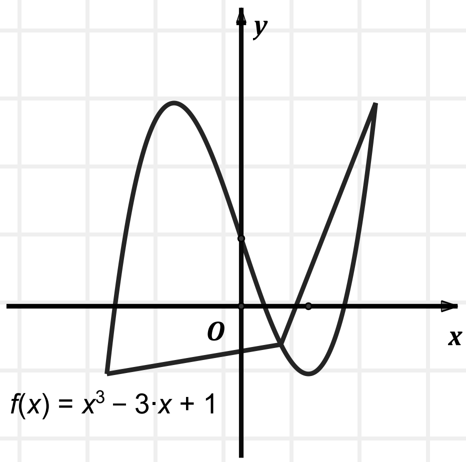
- Hoặc hàm số có CĐ, CT và (hình vẽ)

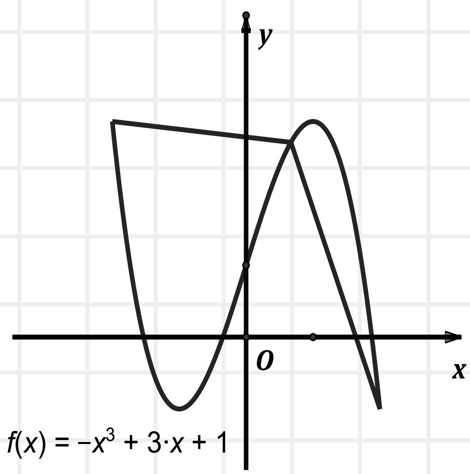




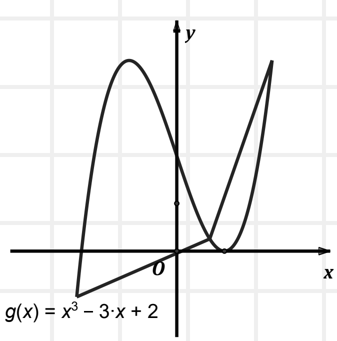
HÀM SỐ

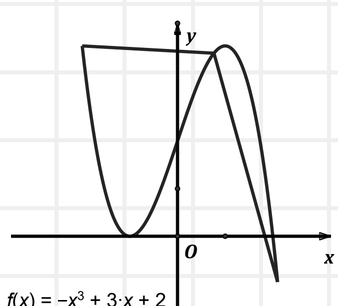
+) Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt Hàm số có cực đại, cực tiểu và





+) Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt Hàm số có cực đại, cực tiểu và





Bài toán: Tìm m để đồ thị hàm bậc 3 cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành 1 cấp số cộng:

1. Định lí vi ét:

** Cho bậc 2: Cho phương trình*

$ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2

thì ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$

**) Cho bậc 3: Cho phương trình*

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thì ta có:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}, x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

2. Tính chất của cấp số cộng:

+) Cho 3 số a,b,c theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: $a+c=2b$

3. Phương pháp giải toán:

+) Điều kiện cần: $x_0=-\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình. Từ đó thay vào phương trình để tìm m.

+) Điều kiện đủ: Thay m tìm được vào phương trình và kiểm tra.

Bài toán 3: Tương giao của hàm phân thức

Phương pháp

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}\left(C\right)$ và đường thẳng $d:y=px+q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\frac{ax+b}{cx+d}=px+q\Leftrightarrow F\left(x,m\right)=0$

(phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

* Các câu hỏi thường gặp:

1. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

2. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn:

$-\frac{d}{c}<x_1<x_2$.

3. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn

$x_1<x_2<-\frac{d}{c}$.

4. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $x_1<-\frac{d}{c}<x_2$.

5. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:

+) Đoạn thẳng $AB=k$

+) Tam giác ABC vuông.

+) Tam giác ABC có diện tích S_0

* Quy tắc:

+) Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

+) Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)

+) Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

***) Chú ý:** Công thức khoảng cách:

+) $A\left(x_A;y_A\right),B\left(x_B;y_B\right)$:

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

+) $\begin{cases}M\left(x_0;y_0\right)\\ \Delta: Ax_0+By_0+C=0\end{cases}$

$$\Rightarrow d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Bài toán 4: Tương giao của hàm số bậc 4

NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG:

$ax^4+bx^2+c=0$ **(1)**

1. Nhẩm nghiệm:

- Nhẩm nghiệm: Giả sử $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.

- Khi đó ta phân tích:

$$f\left(x,m\right)=\left(x^2-x_0^2\right)g\left(x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm x_0\\ g\left(x\right)=0\end{array}\right.$$

- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g\left(x\right)=0$

2. Ẩn phụ - tam thức bậc 2:

- Đặt $t=x^2,\left(t\ge 0\right)$. Phương trình: $at^2+bt+c=0$ (2).

- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn:

$$\left[\begin{array}{l}t_1<0=t_2\\ t_1=t_2=0\end{array}\right.$$

- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn:

$$\left[\begin{array}{l}t_1<0<t_2\\ 0<t_1=t_2\end{array}\right.$$

- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0=t_1<t_2$

- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<t_2$

HÀM SỐ

3. Bài toán: Tìm m để (C):

$y = ax^4 + bx^2 + c \ (1)$ cắt (Ox) tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).
- Để (1) cắt (Ox) tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý vi – ét tìm được m.

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài toán 1: Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số:

Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại M.

- Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$
- phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = f'(x)(x - x_0) + y_0$

Bài toán 2: Tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

- Gọi (Δ) là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.
- Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'(x_0) = k (*)$.
- Giải (*) tìm x_0. Suy ra $y_0 = f(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = k(x - x_0) + y_0$

Bài toán 3: Tiếp tuyến đi qua điểm

Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $A(a; b)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua A.

- Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và có hệ số góc k. Khi đó $(\Delta): y = k(x - a) + b$ (*)

HÀM SỐ

- Để (Δ) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=k(x-a)+b & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$$

có nghiệm.

- Thay (2) vào (1) ta có phương trình ẩn x. Tìm x thay vào (2) tìm k thay vào (*) ta có phương trình tiếp tuyến cần tìm.

*** Chú ý:**

1. Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (C) là:

$k=f'(x_0)$

2. Cho đường thẳng

$(d): y=k_d x+b$

+) $(\Delta)//(d) \Rightarrow k_\Delta = k_d$

+) $(\Delta)\perp(d)$

$\Rightarrow k_\Delta . k_d = -1 \Leftrightarrow k_\Delta = -\dfrac{1}{k_d}$

+)

$(\Delta,d)=\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \left|\dfrac{k_\Delta - k_d}{1+k_\Delta . k_d}\right|$

+) $(\Delta,Ox)=\alpha \Rightarrow k_\Delta = \pm\tan\alpha$

3. Tiếp tuyến tại các điểm cực trị của đồ thị (C) có phương song song hoặc trùng với trục hoành.

4. Cho hàm số bậc 3:

$y=ax^3+bx^2+cx+d, (a\neq 0)$

+) Khi $a>0$: Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

+) Khi $a<0$: Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc lớn nhất.

Tổng hợp
Lý thuyết và Công thức
HÀM SỐ
Từ A đến Z

Toán thầy Đạt - Chuyên luyện thi lớp 10,11,12