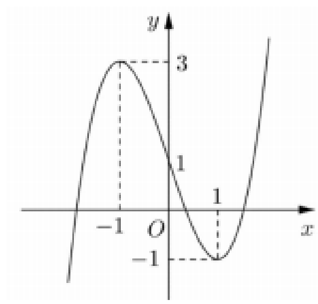
DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI 9-10 ĐIỂM

Dạng 3. Biện luận tương giao hàm hợp, hàm ẩn chứa THAM SỐ

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ là



A. $\left(-1;3\right)$ **B.** $\left[-1;1\right)$ **C.** $\left[-1;3\right)$ **D.** $\left(-1;1\right)$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x\Rightarrow\forall x\in\left(0;\pi\right)\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$

Vậy phương trình trở thành $f\left(t\right)=m$. Dựa và đồ thị hàm số suy ra $m\in\left[-1;1\right)$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Ta đặt: $g\left(x\right)=f\left(x^2-4x\right)$.

$g'\left(x\right)=\left(2x-4\right)f'\left(x^2-4x\right)$

$=2\left(x-2\right)\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+2\right)\left(x^2-4x\right)$ (dựa vào bảng biến thiên)

$=2\left(x-2\right)^3\left(x^2-4x+2\right)x\left(x-4\right)$.

Mặt khác:

$g(0)=f(0)=-3$;

$g\left(2-\sqrt{2}\right)=g\left(2+\sqrt{2}\right)=f(-2)=2$;

$g(2)=f(-4)=-2$;

$g(4)=f(0)=-3$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3<\dfrac{m}{6}\le 2$

$\Leftrightarrow -18<m\le 12$.

Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 15. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=x^2-4x$ (1)

Ta có BBT sau:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
u		0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy:

+ Với $u < -4$, phương trình (1) vô nghiệm.
+ Với $u = -4$, phương trình (1) có một nghiệm $x = 2 > 0$.
+ Với $-4 < u < 0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x > 0$.
+ Vơi $u \geq 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x > 0$

Khi đó $3f\left(x^2 - 4x\right) = m \Rightarrow f\left(u\right) = \frac{m}{3}$ (2), ta thấy:

+ Nếu $\frac{m}{3} = -3 \Leftrightarrow m = -9$, phương trình (2) có một nghiệm $u = 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-3 < \frac{m}{3} < -2 \Leftrightarrow -9 < m < -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u > 0$ và một nghiệm $u \in \left(-2;0\right)$ nên phương trình đã cho có ba ngiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = -2 \Leftrightarrow m = -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u = -4$, một nghiệm $u \in \left(-2;0\right)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-2 < \frac{m}{3} < 2 \Leftrightarrow -6 < m < 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, hai nghiệm $u \in \left(-4;0\right)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, một nghiệm $u = -2$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} > 2 \Leftrightarrow m > 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.

Vậy $-9 < m \leq 6 \Rightarrow$ có 15 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 4. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$

A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = x^2 - 4x$. Ta có $t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Với $t=x^2-4x$.

x	0					2					$+\infty$
t	0	$\searrow$	-2	$\searrow$		-4	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$f(t)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3<\frac{m}{5}\le 2\Leftrightarrow -15<m\le 10$. Vì m nguyên nên $m\in\{-14;-13;....;10\}$. Do đó có 25 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 16. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4f\left(x^2-4x\right)=m\Leftrightarrow f\left(x^2-4x\right)=\frac{m}{4}$

Đặt $t=x^2-4x\Rightarrow t'=2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

x	0		2		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $x\in(0;+\infty)\Rightarrow t\ge -4$

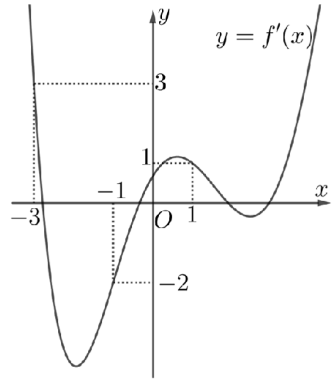
Ta có $f(t)=\frac{m}{4}$

Phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$

$\Rightarrow -3<\frac{m}{4}\le 2\Leftrightarrow -12<m\le 8$ mà m nguyên nên $m\in\{-11;-10;...;0;1;...;8\}$

Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 6. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$2f(\sin x-2)-\dfrac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\dfrac{5\cos 2x}{4}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 2f(-3)+\dfrac{11}{12}$. **B.** $m<2f(-1)+\dfrac{19}{12}$.

C. $m\le 2f(-1)+\dfrac{19}{12}$. **D.** $m<2f(-3)+\dfrac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$$

$$\Leftrightarrow m<2f(\sin x-2)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x-\frac{5\left(1-2\sin^2 x\right)}{4}$$

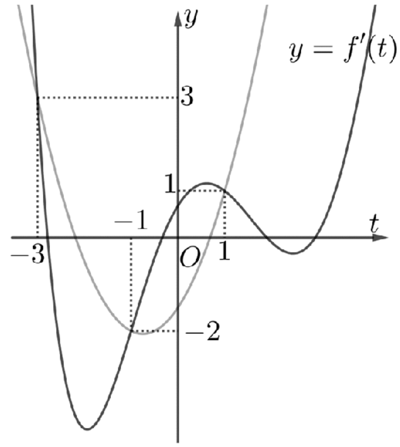
Đặt $t=\sin x-2$ (với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in(-3;-1)$, khi đó bất phương trình được viết lại thành:

$$m<2f(t)-\frac{2(t+2)^3}{3}+(t+2)-\frac{5\left[1-2(t+2)^2\right]}{4}.$$

hay $m<2f(t)-\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+3t+\dfrac{65}{12}$ (*).

Xét hàm số $g(t)=2f(t)-\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+3t+\dfrac{65}{12}$ trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $g'(t)=2f'(t)-2t^2-3t+3$. Do đó $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t^2+\dfrac{3}{2}t-\dfrac{3}{2}$.



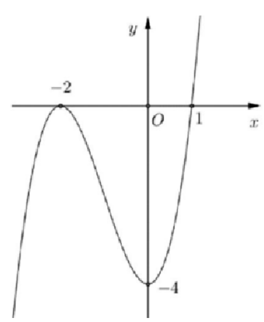
Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và parabol $y = t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$ trên đoạn $[-3;-1]$ thì $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3;-1\}$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[-3;-1]$ như sau:

t	-3		-1
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t \in (-3;-1)$. Điều đó tương đương với $m \le g(-1) = 2f(-1) + \frac{19}{12}$ dựa vào tính liên tục của hàm số $g(t)$.

Câu 7. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5;5)$ để phương trình $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m + 4 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

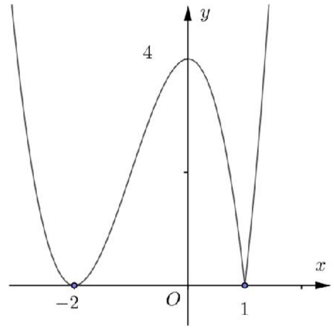
Chọn C

Ta có: $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow |f(x)|^2 - m|f(x)| - 4|f(x)| + 2m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (|f(x)| - 2)^2 - m(|f(x)| - 2) = 0 \Leftrightarrow (|f(x)| - 2)(|f(x)| - 2 - m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)|-2=0 \\ |f(x)|-2-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)|=2 \quad (1) \\ |f(x)|=m+2 \ (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ta có đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

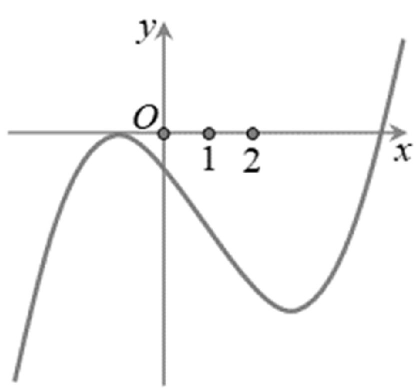
Suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt (2) có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

Ta có phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=|f(x)|$ và $y=m+2$. Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và $y=m+2$. Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ ta được phương trình $|f(x)|=m+2$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $|f(x)|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m+2>4 \\ m+2\neq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-5;5)\Rightarrow m\in\{-2;3;4\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m\in(-5;5)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

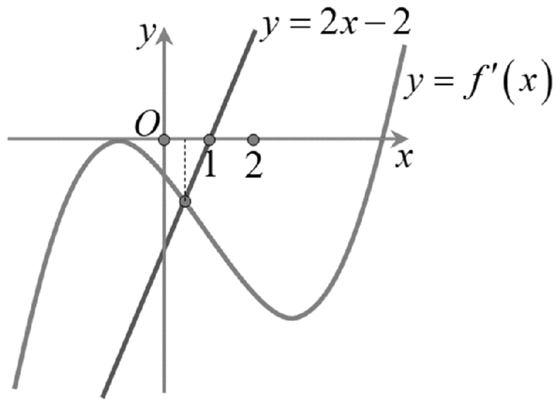
Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi



A. $m\le f(2)-2$. **B.** $m\le f(1)+1$. **C.** $m\le f(1)-1$. **D.** $m\le f(2)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $f(x) > x^2 - 2x + m \ (\forall x \in (1;2)) \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 2x > m \ (\forall x \in (1;2))$ (*).

Gọi $g(x) = f(x) - (x^2 - 2x)$

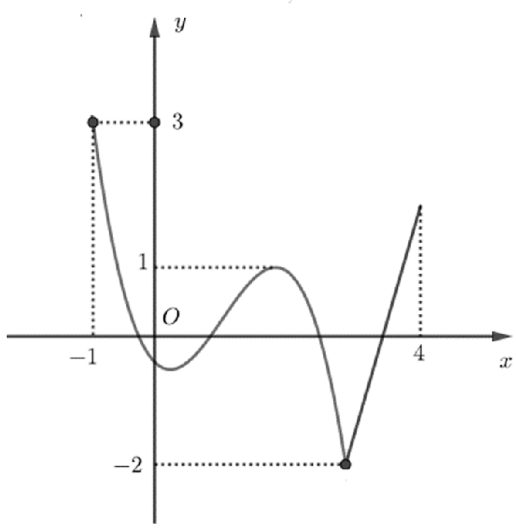
$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - (2x - 2)$

Theo đồ thị ta thấy $f'(x) < (2x-2) \ (\forall x \in [1;2]) \Rightarrow g'(x) < 0 \ (\forall x \in [1;2])$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[1;2]$

Do đó (*) $\Leftrightarrow m \le \min\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(2)$.

Câu 9. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}.$$

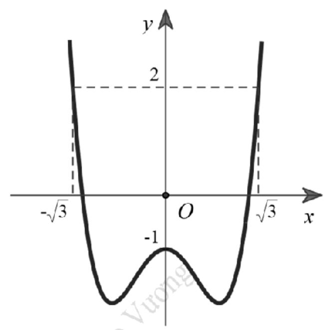
Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < \min\limits_{[-1;4]} f(x) \\ m > \max\limits_{[-1;4]} f(x) \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $\min\limits_{[-1;4]} f(x) = -2$; $\max\limits_{[-1;4]} f(x) = 3$.

$\Rightarrow \begin{cases} -3m < \min\limits_{[-1;4]} f(x) \\ m > \max\limits_{[-1;4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{3} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$ (thỏa mãn điều kiện $m > 0$)

Vậy trên đoạn $[-10;10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 10. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ đúng với mọi $x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ là



A. $m \geq 3f(1)$. **B.** $m \geq 3f(-\sqrt{3})$. **C.** $m \leq 3f(0)$. **D.** $m \leq 3f(\sqrt{3})$.

Lời giải

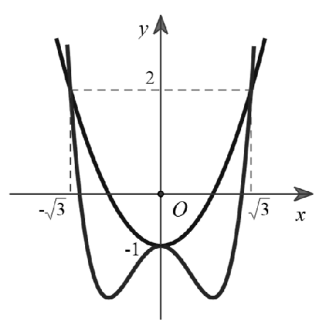
Chọn D

Ta có $3f(x) \geq x^3 - 3x + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x \geq m$

Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tính $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1$

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 1$



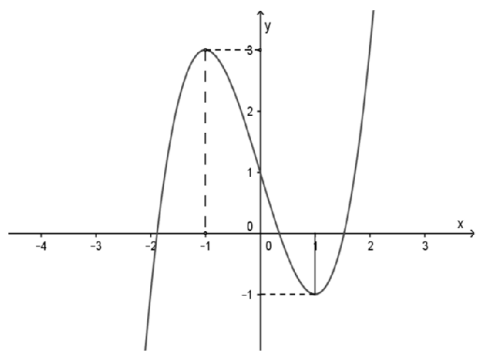
Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$

BBT

x	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$
$g'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-\sqrt{3})$	$\searrow$			$g(\sqrt{3})$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ thì $m \le \min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} g(x) = g(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3})$.

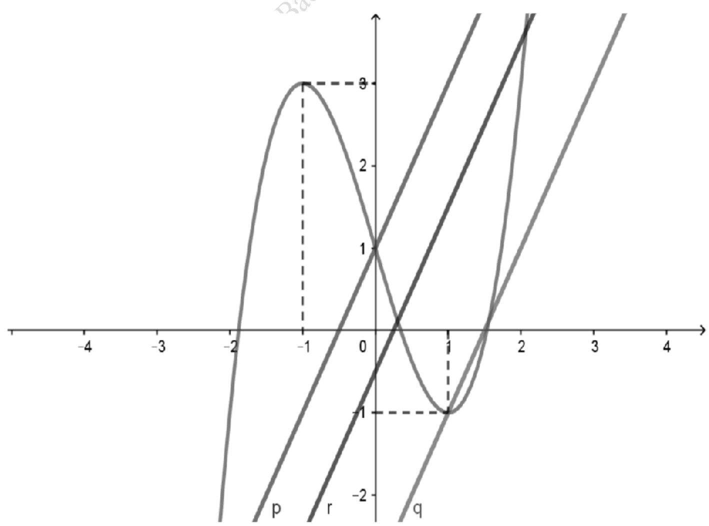
Câu 11. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0;\pi) \Rightarrow t \in (0;1]$.

Ta được phương trình: $f(t) - 2t = m - 2 \Leftrightarrow f(t) = 2t + m - 2$ (1)

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2t + m - 2$ (r).

Gọi $(p): y = 2x + 1$ song song với đường thẳng $(\Delta): y = 2t$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

Gọi $q: y = 2x - 3$ song song với đường thẳng $(\Delta): y = 2t$ và đi qua điểm $B(1;-1)$.

Để phương trình $f\left(\sin x\right)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ thì phương trình (1) phải có nghiệm $t\in\left(0;1\right]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (có thể trùng lên q và bỏ p)

$\Rightarrow -3\le m-2<1\Leftrightarrow -1\le m<3\Rightarrow m\in\left\{-1;0;1;2\right\}\Rightarrow S=\left\{-1;0;1;2\right\}$.

Do đó tổng các phần tử là: $-1+0+1+2=2$.

Câu 12. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3\left(x\right)+f\left(x\right)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in\left[-1;2\right]$?

A. 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$, ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$

$\Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3+m=0$ (1)

Xét $h(x)=f^3(x)+f(x)+x^3+m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $h'(x)=3f'(x)\cdot f^2(x)+f'(x)+3x^2=f'(x)\left[3f^2(x)+1\right]+3x^2$.

Ta có $f'(x)=3x^2+1>0,\forall x\in[-1;2]\Rightarrow h'(x)>0,\forall x\in[-1;2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên $\min\limits_{[-1;2]}h(x)=h(-1)=m-1$, $\max\limits_{[-1;2]}h(x)=h(2)=m+1748$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min\limits_{[-1;2]}h\left(x\right)\cdot\max\limits_{[-1;2]}h\left(x\right)\le 0 \Leftrightarrow h\left(-1\right)\cdot h\left(2\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(m-1\right)\left(1748+m\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow -1748\le m\le 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S=\{-1748;-1747;\ldots;0;1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 13. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[2;4\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[2;4\right]$?

x	2		3		$\frac{7}{2}$		4
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\sqrt{11}$	$\searrow$	2

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\underset{[2;4]}{Min} f(x) = f(4) = 2$ và $\underset{[2;4]}{Max} f(x) = f(2) = 4$

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2;4]$

Suy ra $\underset{[2;4]}{Min} g(x) = g(2) = 2$ và $\underset{[2;4]}{Max} g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$

Ta có $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m.f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} = m$

Xét hàm số $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2;4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x = 2$ nên

$$\underset{[2;4]}{Min} h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{Min} g(x)}{\underset{[2;4]}{Max} f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}$$

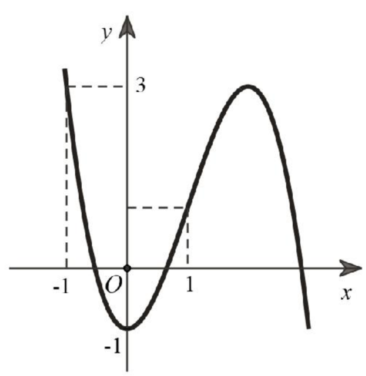
Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x = 4$ nên

$$\underset{[2;4]}{Max} h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{Max} g(x)}{\underset{[2;4]}{Min} f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2} \le m \le 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 14. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2019) f(\cos x) + m - 2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

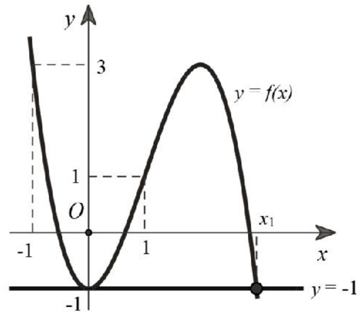
Chọn C

Ta có $f^2(\cos x) + (m - 2019) f(\cos x) + m - 2020 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2020 - m \end{array}\right.$ (1)

* Với $f(\cos x) = -1$

Dựa vào đồ thị ta có $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = x_1 \ (x_1 > 1)(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Vì $x\in[0;2\pi]\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$



* Với $f(\cos x)=2020-m$

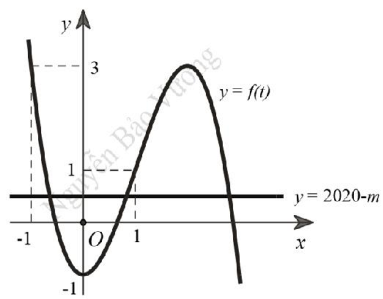
Đặt $t=\cos x\,(t\in[-1;1])$

Với $t\in(-1;1]$ thì phương trình $t=\cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0;2\pi]$.

Với $t=-1$ thì phương trình $t=\cos x$ có một nghiệm thuộc $[0;2\pi]$

Phương trình trở thành $f(t)=2020-m$

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\cos x)=2020-m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f(t)=2020-m$ có hai nghiệm $t\in(-1;1]$

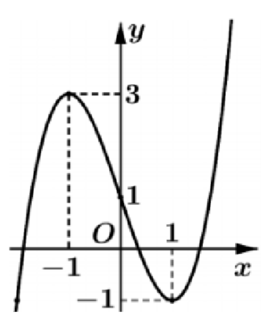


Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f(t)=2020-m$ có hai nghiệm $t\in(-1;1]$ thì $-1<2020-m\le 1\Leftrightarrow 2019\le m<2021$

Vì m nguyên nên $m\in\{2019;2020\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 15. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f(-1)=1;f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;\frac{-1}{e}\right)$.



A. $m \ge 2$. **B.** $m \ge 3$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) < \ln(-x) + m \Leftrightarrow m > f(x) - \ln(-x)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \ln(-x)$ trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Có $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x}$.

Trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ có $f'(x) > 0$ và $\frac{1}{x} < 0$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Vậy nên $f(x) < \ln(-x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge g(x), \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge g\left(-\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge 3$.

Câu 16. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3;5)$ là

A. 16. **B.** 17. **C.** 0. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x$ với $x \in (3;5)$.

Ta có: $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.

Với $x \in (3;5)$:

Ta có: $2 - x \in (-3;-1)$ nên $f'(2-x) > 0$ suy ra $-3f'(2-x) < 0$.

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} < \frac{x}{x} = 1$

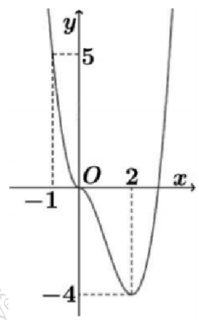
Suy ra $g'(x)=-3f'(2-x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-1<0, \forall x\in(3;5)$ nên hàm số nghịch biến trên $(3;5)$.

Suy ra $\min\limits_{(3;5)} g(x)=g(5)=3f(-3)+\sqrt{5^2+4}-5=\sqrt{29}-5$;

$\max\limits_{(3;5)} g(x)=g(3)=3f(-1)+\sqrt{3^2+4}-3=12+\sqrt{13}$.

Để phương trình $3f(2-x)+\sqrt{x^2+4}-x=m$ có nghiệm thì $\sqrt{29}-5\le m\le 12+\sqrt{13}$ mà m nguyên dương nên $m\in\{1,2,...,15\}$ tức là có 15 giá trị

Câu 17. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1)=1$, $f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+x^2+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi



A. $m>0$. **B.** $m>3-\frac{1}{e^2}$. **C.** $m\ge 3-\frac{1}{e^2}$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-x>0\Leftrightarrow x<0$

Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x)-\ln(-x)-x^2<m$ (*).

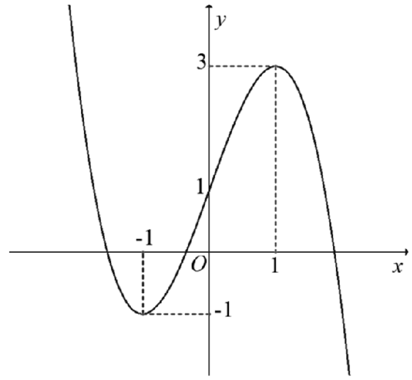
Xét hàm số $g(x)=f(x)-\ln(-x)-x^2$ trên $\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}-2x$. Với $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ thì $f'(x)>0; -\frac{1}{x}-2x>0$ nên $g'(x)>0$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

Suy ra (*) nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi $m\ge g\left(-\frac{1}{e}\right)=f\left(-\frac{1}{e}\right)-\ln\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=3-\frac{1}{e^2}$.

Câu 18. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn B

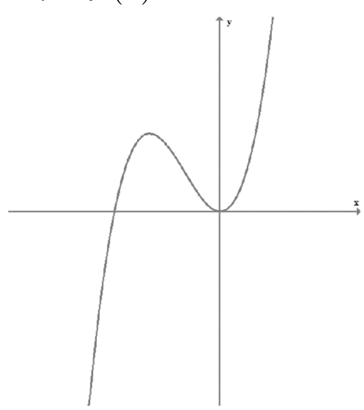
Khi $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x\in\left[-1;0\right)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy khi $\cos x\in\left[-1;0\right)$ thì $f\left(\cos x\right)\in\left[-1;1\right)$; khi đó $f\left(f\left(\cos x\right)\right)\in\left[-1;3\right)$.

Do đó phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1\le m<3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. **(Sở Ninh Bình)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\left|\sin x\right|\right)=f\left(m^2+6m+10\right)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn B

Từ đồ thị suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

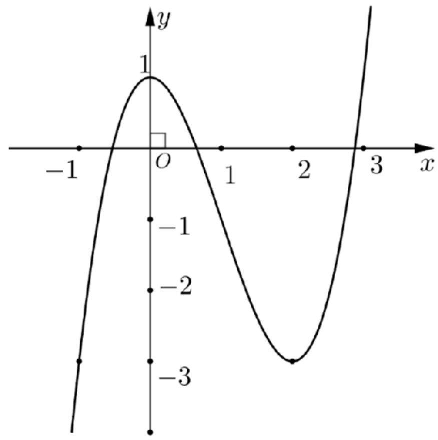
Do $2\left|\sin x\right|\ge 0; m^2+6m+10>0$ nên $f\left(2\left|\sin x\right|\right)=f\left(m^2+6m+10\right)\Leftrightarrow 2\left|\sin x\right|=m^2+6m+10$.

Mà $0\le 2\left|\sin x\right|\le 2$ nên yêu cầu bài toán tương đương

$0\le m^2+6m+10\le 2\Leftrightarrow m^2+6m+8\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le -2$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 20. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3-3x^2+m\right)+3=0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$.



A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

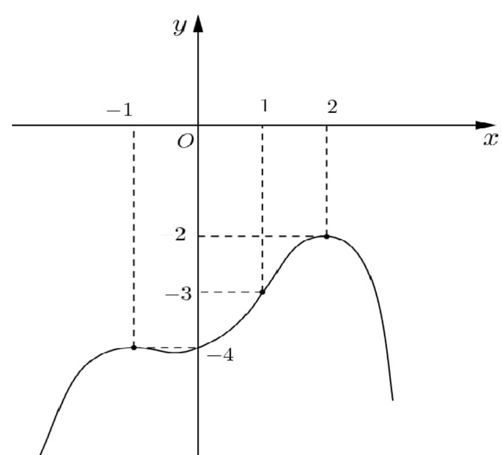
$f\left(x^3-3x^2+m\right)+3=0 \Leftrightarrow f\left(x^3-3x^2+m\right)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x^2+m=-1 \\ x^3-3x^2+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x^2+1=-m \\ x^3-3x^2+1=-m+3 \end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$ thì $\left[\begin{array}{l} -3\le -m\le 1 \\ -3\le -m+3\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le m\le 3 \\ 2\le m\le 6 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow m\in\left[-1;6\right]$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 21. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.8^{f(x)}\le(-m^2+5m).4^{f(x)}-((4-f^2(x)).16^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi số thực x là



A. 3. **B.** 5.

C. 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$16.8^{f(x)}\le(-m^2+5m).4^{f(x)}-((4-f^2(x)).16^{f(x)} \Leftrightarrow -m^2+5m\ge 16.2^{f(x)}+(4-f^2(x)).4^{f(x)}$

Vì. nên ta có $16.2^{f(x)}+(4-f^2(x)).4^{f(x)}\le 16.2^{-2}+0=4\,\forall x\in\mathbb{R}$

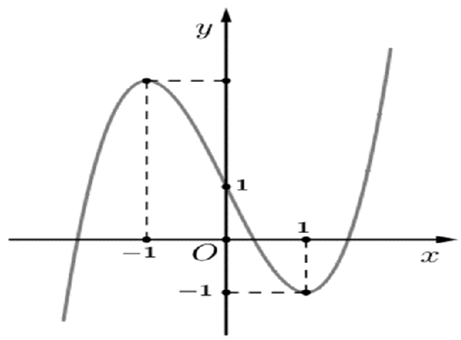
$\Rightarrow -m^2+5m\ge 4 \Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0 \Leftrightarrow 1\le m\le 4$

Câu 22. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m+e^x<f(x)$ có nghiệm với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi.

A. $m\le\min\left\{f(1)-e;f(-1)-\frac{1}{e}\right\}$. **B.** $m<f(0)-1$.

C. $m<\min\left\{f(1)-e;f(-1)-\frac{1}{e}\right\}$. **D.** $m\le f(0)-1$.

Lời giải



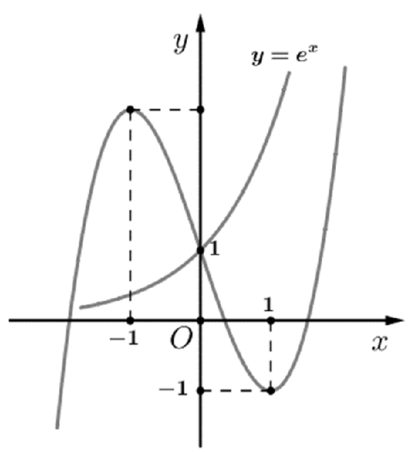
Chọn A

Ta có: $m+e^x<f(x)\Leftrightarrow m<f(x)-e^x$

Xét hàm số $g(x)=f(x)-e^x$ với $x\in(-1;1)$

$g'(x)=f'(x)-e^x; g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-e^x=0\Leftrightarrow f'(x)=e^x$

Dễ thấy với $x\in(-1;1); f'(0)=1; e^0=1\Rightarrow x=0$ là nghiệm của phương trình $f'(x)=e^x$ hơn nữa là nghiệm duy nhất (Minh họa bằng hình vẽ)



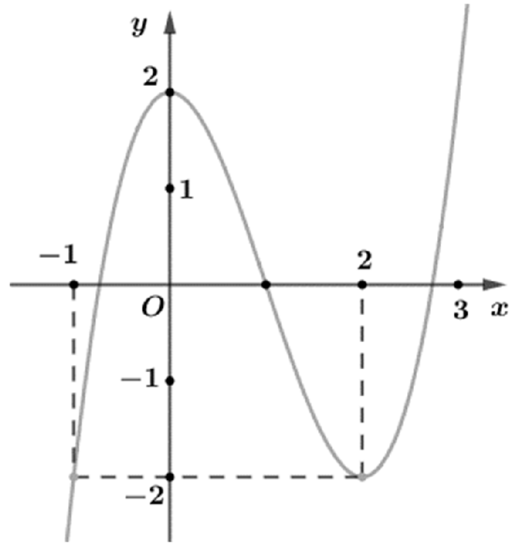
Dựa vào vị trí đồ thị hình vẽ trên ta có bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$

Qua bảng biến thiên và chỉ xét trong khoảng $(-1;1)$

$m < g(x) \Leftrightarrow m \le \min\{g(-1);g(1)\} \Leftrightarrow m \le \min\left\{f(1)-e; f(-1)-\frac{1}{e}\right\}$.

Câu 23. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2\sin x-1|-1)=m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 8. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị $x=0$ và $x=2$ nên có dạng $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Lần lượt thay thế các dữ kiện từ hình vẽ, ta được $\begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ 3\cdot a\cdot 2^2+2\cdot b\cdot 2=0 \\ -a^3+b+d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$.

Suy ra $f'(x)=x^3-3x^2+2 \Rightarrow f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+2x+C$.

Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+2x$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x-1)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x-1)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in [0;3\pi]$ nên $0 \le |2\sin x - 1| \le 3$.

Đặt $t = |2\sin x - 1|$, $t \in [0;3]$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(t-1) = m$ có tối đa 2 nghiệm $t = h$, $t = k$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = \pm h \\ 2\sin x - 1 = \pm k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\pm h + 1}{2} \\ \sin x = \dfrac{\pm k + 1}{2} \end{array}\right.$.

Trên $[0;3\pi]$, mỗi phương trình có nhiều nhất 4 nghiệm, do đó phương trình đã cho có nhiều nhất 16 nghiệm.

Câu 24. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		3		18		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình $e^{\sqrt{x}} \ge m - f(x)$ có nghiệm $x \in [4;16]$ khi và chỉ khi:

A. $m < f(4) + e^2$. **B.** $m \le f(4) + e^2$. **C.** $m < f(16) + e^2$. **D.** $m \le f(16) + e^2$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in [4;16]$. Ta có: $e^{\sqrt{x}} \ge m - f(x) \Leftrightarrow m \le e^{\sqrt{x}} + f(x)$ (*).

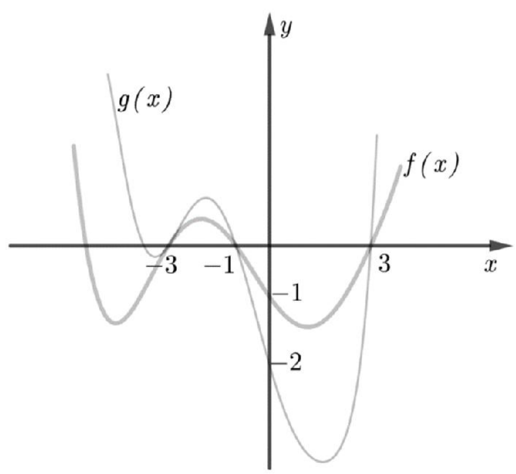
Đặt $g\left(x\right)=e^{\sqrt{x}}+f\left(x\right)$, $\forall x\in\left[4;16\right]\Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+f'\left(x\right)>0,\forall x\in\left[4;16\right]$

Bảng biến thiên:

x	4		16
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$f(4)+e^2$	$\nearrow$	$f(16)+e^4$

(*) thỏa mãn khi $m\le\min\limits_{\left[4;16\right]}g\left(x\right)=f\left(4\right)+e^2$.

Câu 25. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Biết rằng hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Tìm tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(x\right)\ge g\left(x\right)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[-3;3\right]$.



A. $\left(-\infty;\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. **B.** $\left[\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$.

Vì đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 suy ra

$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=a\left(x+3\right)^2\left(x+1\right)\left(x-3\right)$.

Nhận xét từ đồ thị khi $x\to\pm\infty$ thì phần đồ thị $f\left(x\right)$ nằm dưới $g\left(x\right)$ nên $a<0$.

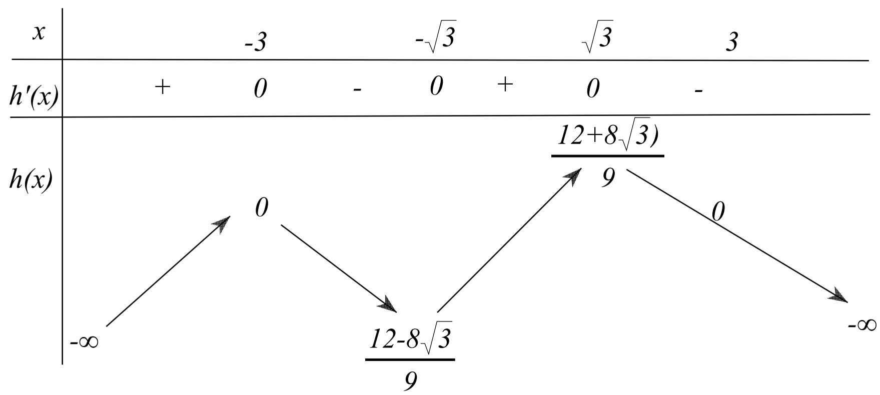
Mặt khác ta có $h\left(0\right)=27a=-2-\left(-1\right)=-1\Rightarrow a=\dfrac{-1}{27}$

Xét hàm $y=h\left(x\right)=\dfrac{-1}{27}\left(x+3\right)^2\left(x+1\right)\left(x-3\right)=\dfrac{-1}{27}\left(x^4+4x^3-6x^2-36x-27\right)$.

Ta có $y' = h'(x) = \dfrac{-1}{27}\left(4x^3 + 12x^2 - 12x - 36\right) = \dfrac{-1}{27}(x+3)\left(4x^2 - 12\right)$.

Suy ra $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Vây tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$f(x) \geq g(x) + m \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3;3]$ là $m \leq \dfrac{12 - 8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 26. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x) + m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x) + m}\right) = x^3 - m$ (1)

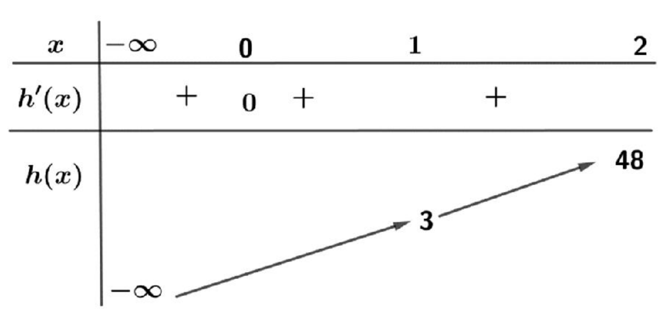
Đặt $t = \sqrt[3]{f(x) + m}$. Ta có $\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Rightarrow f(t) + t^3 = f(x) + x^3$ (2)

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u^3 \Rightarrow g'(u) = f'(u) + 3u^2 = 5u^4 + 12u^2 \geq 0, \forall u$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow g(t) = g(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x) + m} = x \Leftrightarrow x^3 - f(x) = m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3 \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0, \forall x$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:



Từ bảng biến thiên suy ra để (1) có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$ $\Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;2;3;...;16\}$ suy ra có 16 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 27. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$. Ta có $\Delta=(m-7)^2$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} f(\cos x)=m-5\ (1) \\ f(\cos x)=2\quad (2)\end{array}\right.$.

Với $f(\cos x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=a<-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=1\end{array}\right.$.

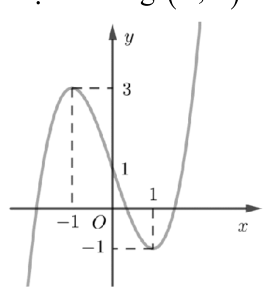
Trường hợp này được 3 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ thì (1) có đúng 1 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ và không trùng với nghiệm của các phương trình $\cos x=\frac{1}{2};\cos x=1$

$\Leftrightarrow f(t)=m-5$ với $t=\cos x$ có đúng 1 nghiệm trong $\left[-1;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow -4\le m-5<2\Leftrightarrow 1\le m<7$.

Do m nguyên nên có 6 giá trị của m thỏa mãn.

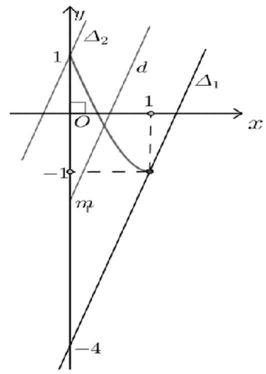
Câu 28. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y=f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -5. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -10.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t = \sin x$, $x \in (0;\pi) \Leftrightarrow t \in (0;1]$.

Phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc $(0;1]$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = 3x + m$ có điểm chung với hoành độ $x \in (0;1]$.

$\Delta_1: y = 3x - 4$ là đường thẳng qua điểm $(1;-1)$ và $\Delta_2: y = 3x + 1$ là đường thẳng qua điểm $(0;1)$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $(0;1]$ là phần đường cong nằm giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Vậy phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$ khi và chỉ khi d dao động trong miền giới hạn bởi Δ_1 và Δ_2 (không trùng với Δ_2) khi và chỉ khi $-4 \le m < 1 \Leftrightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1;0\}$.

Vậy tổng các giá trị của S bằng -10.

Câu 29. **(NK HCM-2019)** Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1) = f(2) = f(9) = 3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	6	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3

Tìm m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m \in (-2;9] \setminus ((-1;2) \cup \{6\})$. **B.** $m \in [-2;9] \setminus ((-1;2) \cup \{6\})$.

C. $m \in (-2;9] \setminus \{6\}$. **D.** $m \in [-2;9] \setminus \{-2;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$ khi $-4 < f(m) \le 3$.

Trên $(-2;0)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(-1) = 3$ nên $-4 < f(m) \le 3 \Leftrightarrow -2 < m \le -1$.

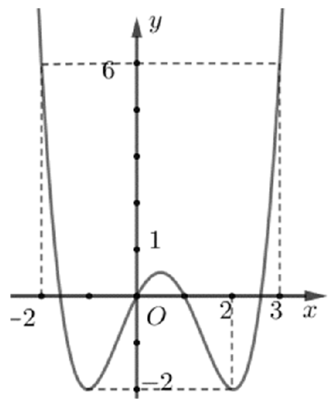
Trên $(0;6)$, hàm số $f(x)$ nghịch biến và $f(2) = 3$ nên $-4 < f(m) \le 3 \Leftrightarrow 6 > m \ge 2$.

Trên $(6;9)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(9)=3$ nên $-4<f(m)\le 3 \Leftrightarrow 6<m\le 9$.

Vậy điều kiện của m là: $m\in(-2;-1]\cup[2;6)\cup(6;9] \Leftrightarrow m\in(-2;9]\setminus\left((-1;2)\cup\{6\}\right)$.

Câu 30. **(Chuyên Đại học Vinh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.



Lời giải

Chọn B

Đặt $t=g(x)=x^3-3x,\ x\in[-1;2]$

$g'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;2]$

x	-1		1		2
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	2	↘	-2	↗	2

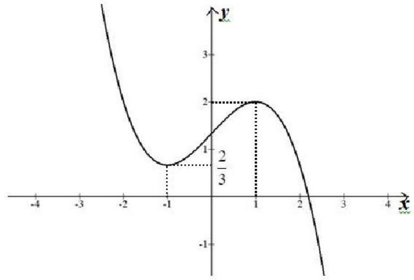
Suy ra với $t=-2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

$t\in(-2;2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

Phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2;2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m=0,\ m=-1$.

Câu 31. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ có nghiệm là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2-4x+5$. Ta có $t=(x-2)^2+1\geq 1$.

Phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ (1) trở thành phương trình $f(t)=m-1$ (2).

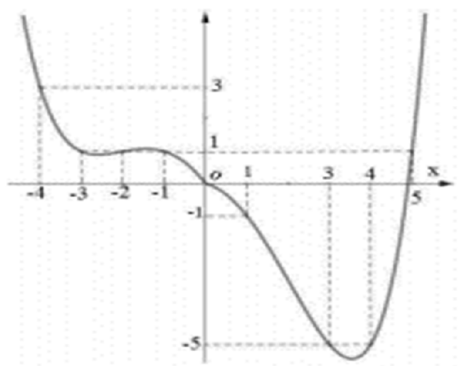
Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m-1\leq 2\Leftrightarrow m\leq 3$

Vậy tập hợp các giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{1;2;3\}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm



A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x-9x^2\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq \frac{2}{3}$

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}$; $0\leq x\leq \frac{2}{3}$

Ta có: $t'(x)=\frac{12(3x-1)}{\sqrt{6x-9x^2}}$; $0<x<\frac{2}{3}$; $t'(x)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ (nhận).

$t(0)=3;t\left(\frac{1}{3}\right)=-1;t\left(\frac{2}{3}\right)=3$.

Nên $-1\le t\le 3$.

Mặt khác: $f(t)=\frac{m-3}{2}$, $t\in[-1;3]$ có nghiệm.

Từ đồ thị ta có $-5\le\frac{m-3}{2}\le 1\Leftrightarrow -7\le m\le 5$.

Do m nguyên nên có 13 giá trị m là -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Câu 33. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m để phương trình $f^2(2x)-2f(2x)-m-1=0$ có nghiệm trên $(-\infty;1)$

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $[-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f^2(2x)-2f(2x)-m-1=0\Leftrightarrow f^2(2x)-2f(2x)-1=m\ (1)$.

Đặt $t=f(x)$, với $x\in(-\infty;1)$ thì $2x\in(-\infty;2)$, ki đó $t=f(2x)\in[0;+\infty)$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-2t-1=m(2)$.

(1) có nghiệm trên $(-\infty;1)$ tương ứng khi và chỉ khi (2) có nghiệm trên $[0;+\infty)$.

Xét $g(t)=t^2-2t-1,t\in[0;+\infty)$, có $g'(t)=2t-2,g'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên của $g(t)$:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có nghiệm $t\in[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\ge -2$.

Câu 34. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(\|x\|)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Đặt $t=f\left(|x|\right)\geq -1(*)$

Nhận xét:

+ với $t_0<-1\xrightarrow{(*)}x\in\varnothing$

+ với $t_0=-1;t_0>3\xrightarrow{(*)}$ 2 nghiệm

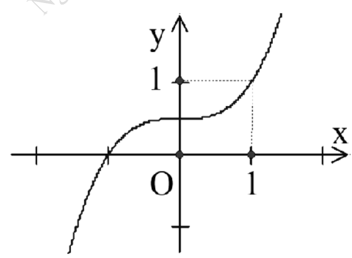
+ với $t_0=3\xrightarrow{(*)}$ 3 nghiệm

+ với $t_0\in(-1;3)\xrightarrow{(*)}$ 4 nghiệm

Phương trình trở thành $t^2-(m-6)t-m+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=m-5\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1<m-5<3\Leftrightarrow 4<m<8\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{5;6;7\}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị của $m\left(m\in\mathbb{R}\right)$ sao cho

$(x-1)\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 3. **<u>C</u>.** 2 **D.** 1.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$=1. Đặt $g(x)=m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1$.

$(x-1)\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\quad(*)$

Từ giả thiết ta có điều kiện cần để có $(*)$ là $g(1)=0\Leftrightarrow m^3f(1)-mf(1)+f(1)-1=0\Leftrightarrow m^3-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\pm1\end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

+)Với $m=0$ ta có $(*) \Leftrightarrow g(x)=(x-1)\left[f(x)-1\right] \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $m=0$ thỏa mãn.

+)Với $m=1$ ta có $(x-1)\left[f(2x-1)-1\right]=\frac{1}{2}\left[(2x-1)-1\right]\left[f(2x-1)-1\right] \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $m=1$ thỏa mãn.

+) Với $m=-1$, $(*) \Leftrightarrow (x-1)\left[-f(2x-1)+2f(x)-1\right] \geq 0\ (**)$.

Xét $x>1$ ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(2x-1)+1}{2f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d+1}{2\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)} = 4 > 0$

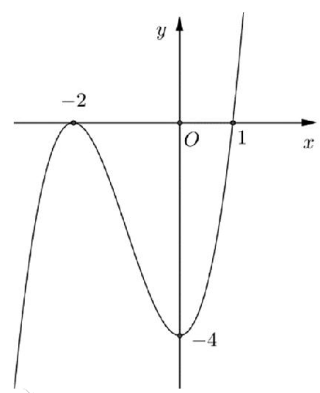
$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1: f(2\alpha-1)+1 > 2f(\alpha)$ hay $2f(\alpha)-f(2\alpha-1)-1<0$

$\Rightarrow (\alpha-1)\left[2f(\alpha)-f(2\alpha-1)-1\right]<0$ (không thỏa mãn $(**)$).

Do đó $m=-1$ không thỏa mãn

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x)-(m+5)\left|f(x)\right|+4m+4=0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

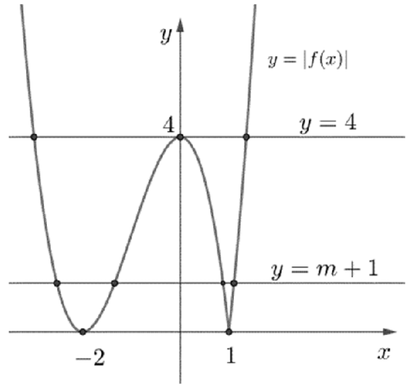
Phương trình tương đương với

$$f^2(x)-5\left|f(x)\right|+4-m\left(\left|f(x)\right|-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left|f(x)\right|-4\right)\left(\left|f(x)\right|-1\right)-m\left(\left|f(x)\right|-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left|f(x)\right|-4\right)\left(\left|f(x)\right|-1-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|f(x)\right|=4\ (1)\\ \left|f(x)\right|=m+1\ \ (2)\end{array}\right..$$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ như sau



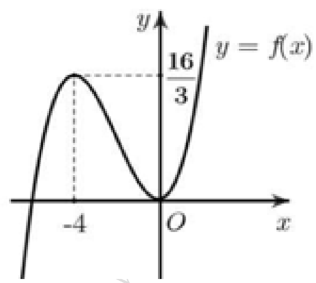
Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$, suy ra phương trình $\left(1\right)$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vì vậy, yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $\left(2\right)$ có 4 nghiệm phân biệt khác 4.

Suy ra $0<m+1<4 \Leftrightarrow -1<m<3 \Rightarrow m=0,\ 1,\ 2.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa bài toán.

Câu 37. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm.

A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\geq 0$, $\forall x$ và $m^2+4m+4=\left(m+2\right)^2\geq 0$, $\forall m$. Nhìn vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ suy ra phương trình đã cho tương đương

$\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|=m^2+4m+4 \quad \left(1\right)$

Đặt $P=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\left(*\right)$

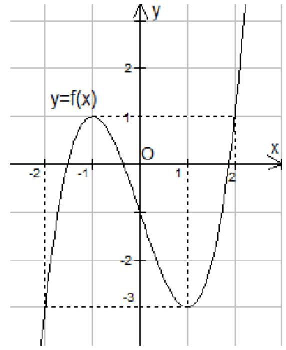
vì $2\cos x-\sin x+4>0$, $\forall x$

nên $\left(*\right)\Leftrightarrow\left(3-P\right)\sin x-\left(1+2P\right)\cos x=4P+1 \ \left(2\right)$

Phương trình $\left(2\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\left(4P+1\right)^2\leq\left(3-P\right)^2+\left(1+2P\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{-9}{11}\leq P\leq 1\Rightarrow\left|P\right|\leq 1$

Suy ra phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2+4m+4\leq 1\Leftrightarrow m\in\left[-3;-1\right]\Rightarrow$ Có ba giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình bên.



Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi

A. $m\in\{-3;1\}$..   **B.** $m\in(-3;1)$..

C. $m\in[-3;1)$..   **D.** $m\in(-3;1]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\sin x$ (*), $x\in[-\pi;\pi]\Rightarrow t\in[-2;2]$.

Khi đó phương trình $f(2\sin x)=m$ trở thành $f(t)=m$ (1). Số nghiệm của PT(1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=m$.

Nhận thấy:

Với $t\in\{-2;2\}$ thì PT(*) có 1 nghiệm $x\in[-\pi;\pi]$.

Với $t=0$ thì PT(*) có 3 nghiệm phân biệt $x\in[-\pi;\pi]$.

Với $t\in(-2;2)\backslash\{0\}$ thì PT(*) có 2 nghiệm phân biệt $x\in[-\pi;\pi]$.

Do đó, dựa vào đồ thị đã cho ta có:

+) TH 1: $m<-3$ thì phương trình (1) có một nghiệm $t<-2$. Suy ra $m<-3$ bị loại

+) TH 2: $m=-3$ thì PT(1) có hai nghiệm là $t=1$ và $t=-2$. Suy ra $m=-3$ là giá trị thỏa mãn.

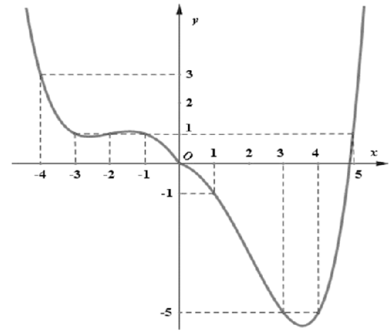
+) TH 3: $-3<m<1$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2;2)$. Suy ra $-3<m<1$ bị loại.

+) TH 4: Xét trường hợp $m=1$ thì PT(1) có hai nghiệm là $t=-1$ và $t=2$. Suy ra $m=1$ là giá trị thỏa mãn.

+) TH 5: $m>1$ thì phương trình (1) có một nghiệm $t>2$. Do đó $m>1$ bị loại.

Vậy các giá trị m cần tìm là $m\in\{-3;1\}$. Chọn. **A.**

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{-9x^2+30x-21}=\sqrt{4-(3x-5)^2}\Rightarrow 0\le\sqrt{-9x^2+30x-21}\le 2$

$\Rightarrow -3\le 3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\le 3$.

Đặt $t=3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\Rightarrow t\in[-3;3]$.

Khi đó, phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019\quad(1)\Leftrightarrow 2f(t)=m-2019$

$\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m-2019}{2}\quad(2)$

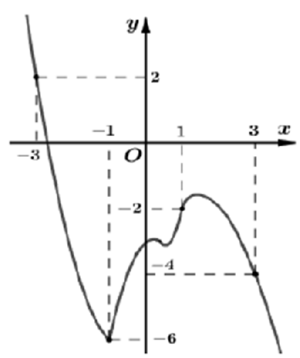
Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[-3;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có, phương trình (2) có nghiệm $t\in[-3;3]$ khi và chỉ khi

$-5\le\dfrac{m-2019}{2}\le 1\Leftrightarrow -10\le m-2019\le 2\Leftrightarrow 2009\le m\le 2021$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{2009,2010,...,2021\}$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 9. **B.** 17. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x-9x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{2}{3}$.

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}, x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$.

Ta có: $t'=-4.\frac{6-18x}{2\sqrt{6x-9x^2}}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}\in\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Bảng biến thiên cho $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}$ .Vì $x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\Rightarrow t\in[-1;3]$

Phương trình trở thành: $2f(t)=m-3\Leftrightarrow f(t)=\frac{m-3}{2}, t\in[-1;3]$. (*)

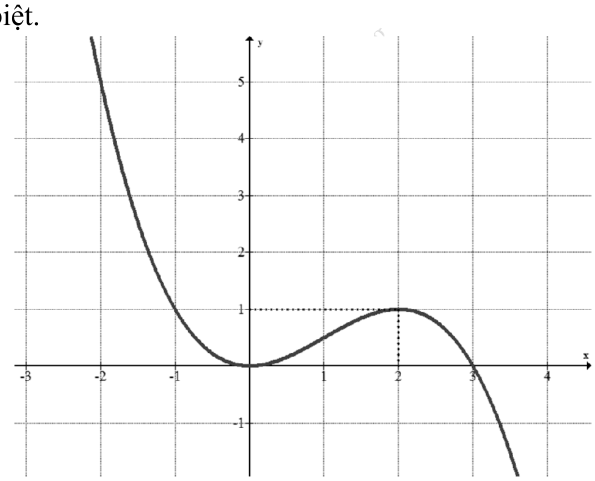
Phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t)=\frac{m-3}{2}$ có nghiệm $t\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow -6\le\frac{m-3}{2}\le -2+a\Leftrightarrow -12\le m-3\le -4+2a\Leftrightarrow -9\le m\le -1+2a$, với

$\max\limits_{[-1;3]} f(t)=a+2, a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-9;-8;-7;..;-1\}\Rightarrow$ có 9 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 41. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2+2x+m)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Theo hình vẽ ta có $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba nên $a\ne 0$.

$f'(x)=4ax^3+3b^2x+2cx+d\Rightarrow f''(x)=12ax^2+6bx+2c$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases}f'(0)=0\\f'(3)=0\\f''(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=0\\108a+27b+6c+d=0\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\c=d=0\end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=ax^4-4ax^3+e$.

$\Rightarrow f\left(x\right)=e\Leftrightarrow ax^4-4ax^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Khi đó $f\left(-x^2+2x+m\right)=e\left(1\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^2+2x+m=0\\-x^2+2x+m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(x-1\right)^2=1+m\\\left(x-1\right)^2=m-3\end{array}\right.$

PT$\left(1\right)$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}1+m>0\\m-3>0\\1+m\neq m-3\end{cases}\Leftrightarrow m>3$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\cap\left[-5;5\right]\Rightarrow m\in\left\{4;5\right\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa đề bài.

Câu 42. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $\left[-2;4\right]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1,5$	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{9}{x^2}-4\geq 0\\6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x-m=0\end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{9}{x^2}-4\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{9-4x^2}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}9-4x^2\geq 0\\x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\leq x\leq\dfrac{3}{2}\\x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\backslash\left\{0\right\}$.

Xét phương trình $6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x-m=0\Leftrightarrow m=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$ (1)

Xét hàm số $g\left(x\right)=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$, với $x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\backslash\left\{0\right\}$.

Ta có $g'\left(x\right)=-12f'\left(-2x+1\right)-24x^2+6=-6\left[2f'\left(-2x+1\right)+4x^2-1\right]$

Từ giả thiết ta suy ra $f'\left(-2x+1\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+1<2\\-2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$;

$$f'(-2x+1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<-2x+1<0 \\ 2<-2x+1<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=6f(-2x+1)-8x^3+6x$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(-2x+1)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	54	$\searrow$	4	$\nearrow$	9	$\nearrow$	14	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có đúng ba nghiệm $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4<m<14 \\ m\neq 9 \end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=5;6;7;8;10;11;12;13$. Vậy có 8 số nguyên m.

Câu 43. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0		1		2		3		5
$f(x)$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x)+\sqrt{3x}\leq 2019f(x)-\sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;5]$.

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2019. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Trên $[0;5]$, ta có: $mf(x)+\sqrt{3x}\leq 2019f(x)-\sqrt{10-2x}\Leftrightarrow m\leq 2019-\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$ trên đoạn $[0;5]$.

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}-\frac{1}{\sqrt{10-2x}}=\frac{3\sqrt{10-2x}-2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}.\sqrt{10-2x}}$$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=3\in[0;5]$.

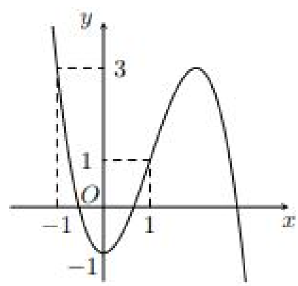
Do $g(0)=\sqrt{10}$, $g(3)=5$ và $g(5)=\sqrt{15}$ nên $\max\limits_{[0;5]} g(x)=g(3)=5$.

Mặt khác $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(3)=1$ nên

$$m\le 2019-\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)},\ \forall x\in[0;5]$$

$$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[0;5]}\left(2019-\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)}\right)=2019-\frac{5}{1}=2014.$$

Câu 44. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(cosx)+(m-2018)f(cosx)+m-2019=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f^2(cosx)+(m-2018)f(cosx)+m-2019=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(cosx)=-1 \\ f(cosx)=2019-m. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có: $f(\cos x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \quad (1) \\ \cos x=k>1 \quad (2) \end{array}\right.$

PT có 2 nghiệm thỏa mãn, PT vô nghiệm.

Yêu cầu: phương trình $f(cosx)=2019-m(2019-m\ne 1)$ có thêm 4 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

Nhận xét:

+ Với mỗi $t\notin[-1;1]$, phương trình $cosx=t$ vô nghiệm.

+ Với mỗi $t\in(-1;1]$, phương trình $cosx=t$ có 2 nghiệm $x\in[0;2\pi]$.

+ Với $t=-1$, phương trình $cosx=t$ có đúng 1 nghiệm $x\in[0;2\pi]$.

Như vậy, $-1<2019-m\le 1 \Leftrightarrow 2018\le m\le 2020$.

Câu 45. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $2f(x+2019)-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(-2;2)$. **C.** $m\in(-4;2)$. **D.** $m\in(-2;1)$.

Lời giải

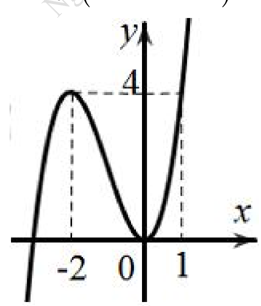
$2f(x+2019)-m=0 \Leftrightarrow f(x+2019)=\frac{m}{2}$ $(*)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f(x+2019)$ như sau:

x	$-\infty$		-2021		-2019		-2017		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
								$y=\frac{m}{2}$	

Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-2<\frac{m}{2}<1 \Leftrightarrow -4<m<2$.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2+2x-2)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0;1]$..



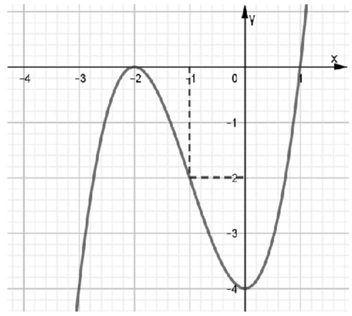
A. $[0;4]$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $\left[-\frac{1}{3};1\right]$

Lời giải

Đặt $t=x^2+2x-2$. Với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[-2;1]$

Phương trình $f(x^2+2x-2)=3m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=3m+1$ có nghiệm thuộc $[-2;1]\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le m\le 1$.

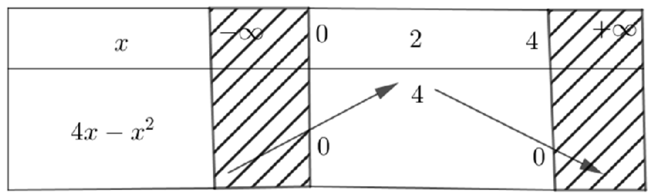
Câu 47. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)=m$ có nghiệm là



A. $[-2;0]$. **B.** $[-4;-2]$. **C.** $[-4;0]$. **D.** $[-1;1]$.

Lời giải

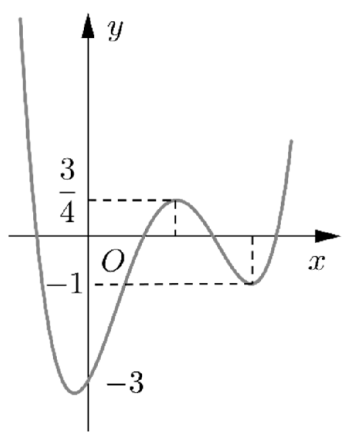
Phương trình $f\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)=m$ có điều kiện $0\le x\le 4$. Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra, với $0\le x\le 4$ thì $-1\le\sqrt{4x-x^2}-1\le 1$. Đặt $t=\sqrt{4x-x^2}-1$, $-1\le t\le 1$.(Có thể biến đổi $t=\sqrt{4-(x-2)^2}-1\Rightarrow -1\le t\le 1$).

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=m$ (1). Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t\in[-1;1]\Leftrightarrow -4\le m\le 0$.

Câu 48. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là



A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $t=|x+m|\ge 0$

Với $t=0\Rightarrow x=m$

Với mỗi giá trị $t>0$ sẽ ứng với 2 giá trị x

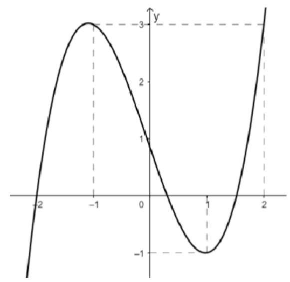
Ta có phương trình : $f(t)=m$ $(t\ge 0)$ (*)

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt dương

Từ đồ thị của hàm số $y=f(t)$ trên miền $t\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{4} \\ m=-1 \end{array}\right.$

Vậy có 1 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 49. **(Chuyen Phan Bội Châu 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2})=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$ là:

A. $[-1;3]$. **B.** $[-1;f(\sqrt{2})]$. **C.** $(-1;f(\sqrt{2})]$. **D.** $(-1;3]$.

Lời giải

Đặt $t=g(x)=\sqrt{4-x^2}$ với $x\in[-\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Suy ra: $g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\in[-\sqrt{2};3)$.

Ta có:

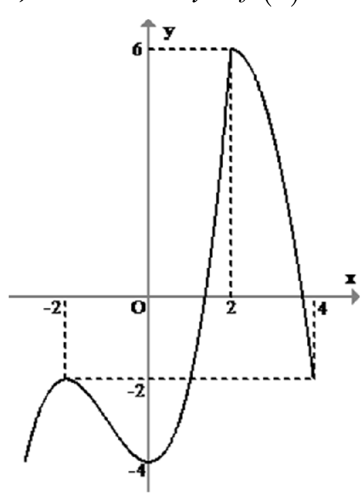
$g(0)=2$, $g(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$, $g(\sqrt{3})=1$.

Mà hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$

Suy ra, $t\in(1;2]$.

Từ đồ thị, phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;2]$ khi $m\in(-1;3]$.

Câu 50. **(Chuyên Dại Học Vinh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 11 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 10

Lời giải

Chọn C

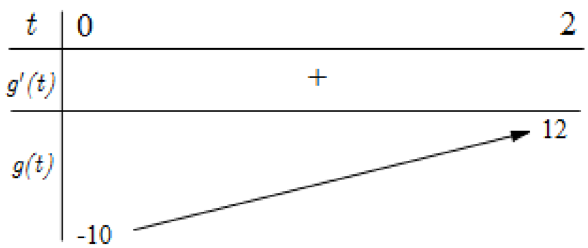
Đặt $t=\dfrac{x}{2}+1$, khi $-2\le x\le 2$ thì $0\le t\le 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\dfrac{1}{3}f\left(t\right)+2t-2=m \Leftrightarrow f\left(t\right)+6t-6=3m$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=f\left(t\right)+6t-6$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $g'\left(t\right)=f'\left(t\right)+6$. Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$ nên $f'\left(t\right)>0,\forall t\in\left(0;2\right) \Rightarrow g'\left(t\right)>0,\forall t\in\left(0;2\right)$ và $g\left(0\right)=-10$; $g\left(2\right)=12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(t\right)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$



Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$ khi và chỉ khi phương trình $g\left(t\right)=3m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\right]$ hay $-10\le 3m\le 12 \Leftrightarrow -\dfrac{10}{3}\le m\le 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m\in\left\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\right\}$.

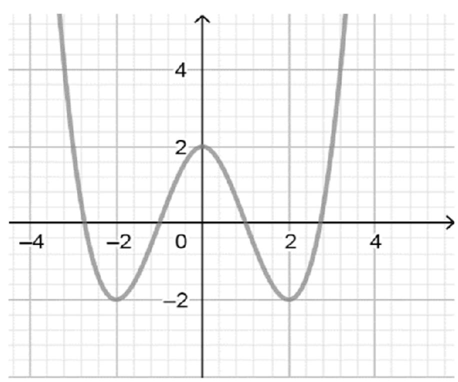
Vậy có 8 giá trị m thoả mãn bài toán.

Câu 51. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2\left(\left|x\right|-3\right)+2-m^2\left(\left|m\right|-3\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. 3 **B.** 12 **C.** $T=7$ **D.** 5

Lời giải

Chọn A



Ta có $x^2\left(\left|x\right|-3\right)+2-m^2\left(\left|m\right|-3\right)=0 \Leftrightarrow \left|x\right|^3-3\left|x\right|^2+2=\left|m\right|^3-3\left|m\right|^2$ (*)

Xét hàm số: $y=f\left(x\right)=\left|x\right|^3-3\left|x\right|^2+2$ có đồ thị như hình vẽ:

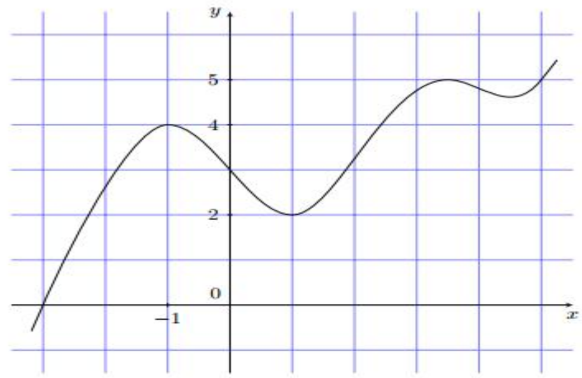
Từ đồ thị của hàm số ta có: Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -2<\left|m\right|^3-3\left|m\right|^2<2$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow \left|m\right|^3-3\left|m\right|^2\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow m^2\left(\left|m\right|-3\right)\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow m^2\left(|m|-3\right)\in\{-1;0;1\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|m|=3\\ m=0\\ m=1\quad (l)\\ m=-1\quad (l)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 3\\ m=0\end{array}\right.$$

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m\ \ (1)$

Đặt $t=x^2-2x$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ta có $t'=2x-2$; $t'=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $t=x^2-2x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

x	$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

Xét $t=-1$ khi đó phương trình (1) thành $f(-1)=m\Rightarrow 4=m$.

Với $m=4$ phương trình $f\left(x^2-2x\right)=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=-1\\ x^2-2x=a\end{array}\right.\ (*)$ với $2<a<3$.

Dễ thấy $(*)$ có tối đa 3 nghiệm (không thỏa mãn yêu cầu).

Xét $t_0\in\left(-1;\frac{21}{4}\right]$.

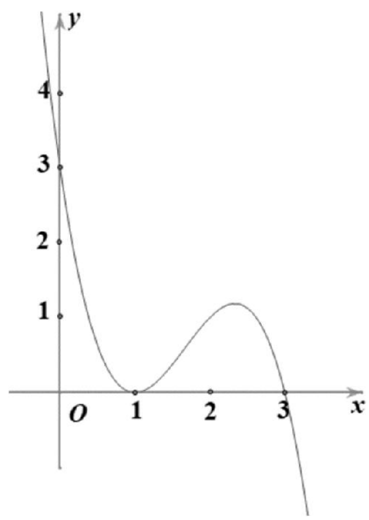
Nhận xét với mỗi $t_0 \in \left(-1;\dfrac{21}{4}\right]$ thì có 2 giá trị $x \in \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]$ thỏa mãn $t_0 = x^2 - 2x$.

Do đó phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]$ khi phương trình $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in \left(-1;\dfrac{21}{4}\right]$. Hay đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ tại 2 điểm với $t \in \left(-1;\dfrac{21}{4}\right]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có $m=3;m=5$ thỏa mãn yêu cầu.

KL: Có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài.

Câu 53. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và $f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $\left|f(|x|)\right|=m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



A. 8 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

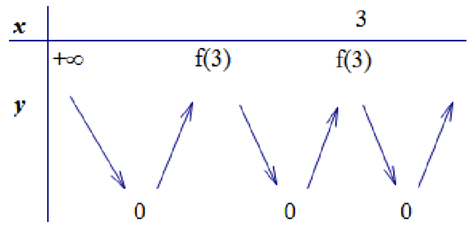
BBT của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		0		3		∞
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

BBT của hàm số $y=f(|x|)$

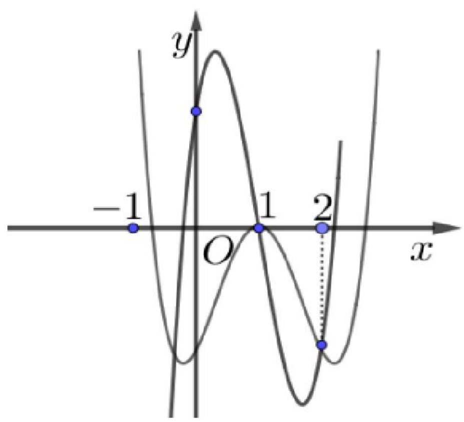
x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$f(3)$	↘	0	↗	$f(3)$	↘	$-\infty$

BBT của hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$



Suy ra phương trình $\left|f(|x|)\right|=m$ có nhiều nhất là 6 nghiệm.

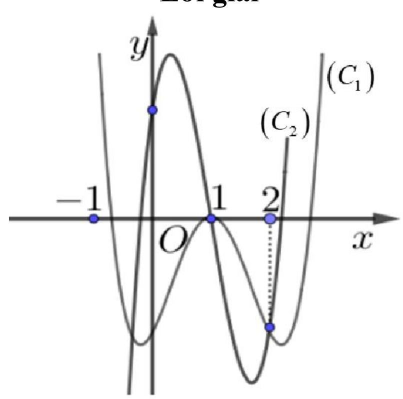
Câu 54. **(Thanh Tường Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(x\right)=me^{x}$ có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0;2\right]$ là nửa khoảng $\left[a;b\right)$. Tổng $a+b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. -0.81. **B.** -0.54. **C.** -0.27. **D.** 0.27.

Lời giải



Nhận xét: Đồ thị hàm $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm $y=f(x)$. Dựa vào hai đồ thị đề bài cho, thì (C_1) là đồ thị hàm $y=f(x)$ và (C_2) là đồ thị hàm $y=f'(x)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=me^x$ ta có:

$$f(x)=me^x \Leftrightarrow m=\frac{f(x)}{e^x}.$$

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ ta có:

$$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}.$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=x_0 \in (-1;0) \end{array}\right..$$

Dựa vào đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ ta được:

x	0		1		2
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$f(0)$	↗	0	↘	$\frac{f(2)}{e^2}$

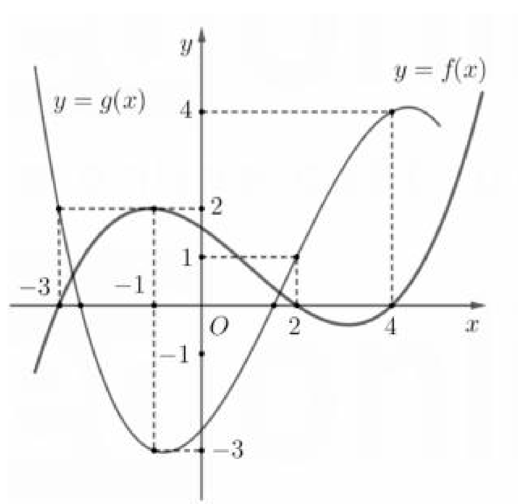
Yêu cầu bài toán ta suy ra: $\dfrac{f(2)}{e^2} \le m < 0$ (dựa vào đồ thị ta nhận thấy $f(0)=f(2)\approx -2$)

$\Leftrightarrow -0,27 \le m < 0$.

Suy ra: $a=-0,27, b=0$.

Vậy $a+b=-0,27$.

Câu 55. **(VTED 2019)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1-g(2x-1))=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]$.



A. 8 **<u>B</u>.** 3 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

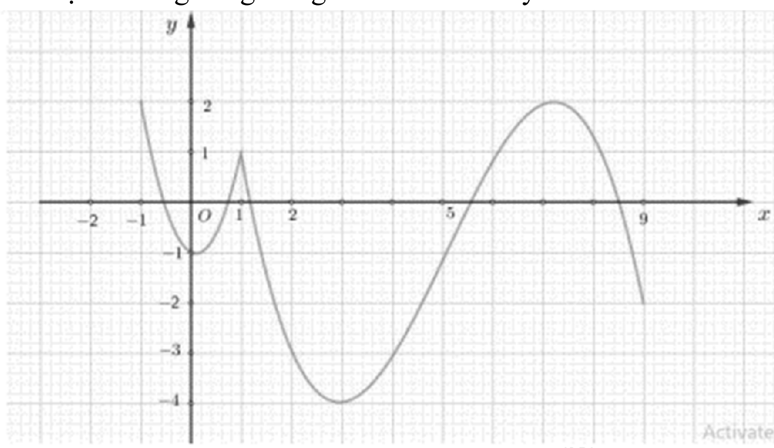
Chọn B

Với $x\in\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]\Rightarrow 2x-1\in[-3;4]\Rightarrow g(2x-1)\in[-3;4]\Rightarrow t=1-g(2x-1)\in[-3;4]$

Vậy ta cần tìm m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc đoạn

$[-3;4]\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le \max\limits_{[-3;4]} f(t)\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le 2$ trong đó $\min\limits_{[-3;4]} f(t)\in(-1;0)$. Vậy các số nguyên cần tìm là $a\in\{0,1,2\}$

Câu 56. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

A. 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $-4\le f(x)\le 2,\ \forall x\in[-1;9]$ (1) nên $-\left[f(x)+4\right].\left[f(x)-2\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$.

Do đó $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$ (2).

Ta có $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow 16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge m^2-3m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow \alpha=\min\limits_{x\in[-1;\,9]}\left\{16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\right\}\ge m^2-3m$ (3).

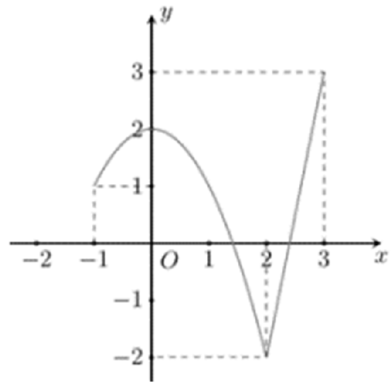
Từ (1) và (2) ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ và $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge 0,\ \forall x\in[-1;\,9]$.

Suy ra $16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge 4,\ \forall x\in[-1;\,9]$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=2\Leftrightarrow x=-1\vee x=a\ (7<a<8)$.

Do đó $\alpha=4$ và (3) $\Leftrightarrow 4\ge m^2-3m\Leftrightarrow -1\le m\le 4$. Vì m nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2;3;4\}$.

Câu 57. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f\left(x\right)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $\left[-1;3\right]$ khi và chỉ khi

A. $m\le 7$. **B.** $m\ge 7$. **C.** $m\le 2\sqrt{2}-2$. **D.** $m\ge 2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $f\left(x\right)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $\left[-1;3\right]$ khi và chỉ khi

$m\le \underset{[1;3]}{\text{Max}}\left(f\left(x\right)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\right)$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{7-x}}=\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{7-x}.\sqrt{x+1}}$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=3$.

$g\left(-1\right)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $g\left(3\right)=2+2=4$.

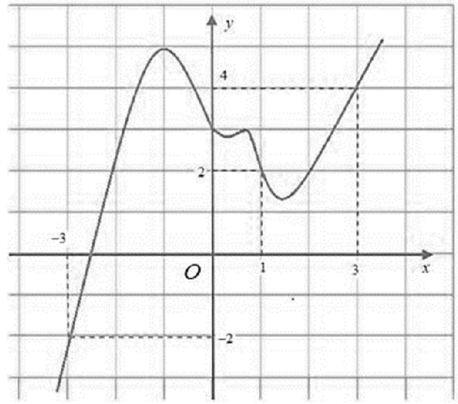
Suy ra $\underset{[-1;3]}{\text{Max}}\,g\left(x\right)=4$ tại $x=3$. (1)

Mặt khác, dựa vào đồ thị của $f\left(x\right)$ ta có $\underset{[-1;3]}{\text{Max}}\,f\left(x\right)=3$ tại $x=3$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\underset{[1;3]}{\text{Max}}\left(f\left(x\right)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\right)=7$ tại $x=3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc $\left[-1;3\right]$ khi và chỉ khi $m\le 7$.

Câu 58. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[-3;3\right]$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây



Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

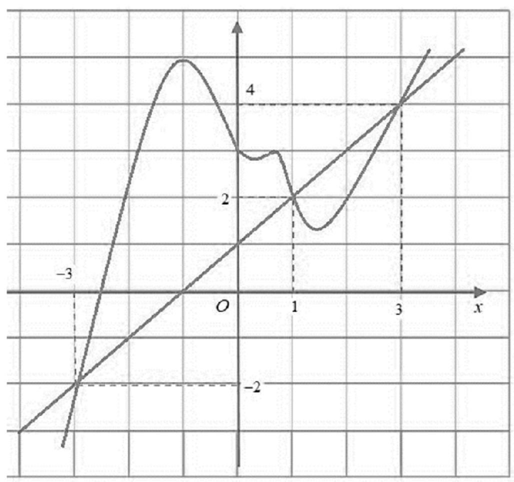
B. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g(1)=f(1)-\dfrac{(1+1)^2}{2}=f(1)-2=4$ và $g'(x)=f'(x)-(x+1)$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=x+1$ ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$; $y=x+1$; $x=-3; x=1$ có diện tích $S_1>4 \Leftrightarrow \int_{-3}^{1}\left|f'(x)-(x+1)\right|dx>4 \Leftrightarrow \int_{-3}^{1}\left|g'(x)\right|dx>4 \Leftrightarrow g(1)-g(-3)>4 \Rightarrow g(-3)<g(1)-4=0$.

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$; $y=x+1$; $x=1; x=3$ có diện tích $S_2<4$

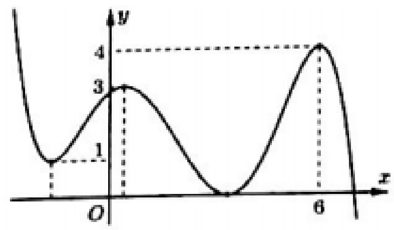
$\Leftrightarrow \int_{1}^{3}\left|f'(x)-(x+1)\right|dx<4 \Leftrightarrow \int_{1}^{3}\left|g'(x)\right|dx<4 \Leftrightarrow -g(3)+g(1)<4 \Rightarrow g(3)>g(1)-4=0$.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ trên $[-3;3]$

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-3)<0$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$g(3)>0$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Câu 59. **(Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}} = f^2(x)+3$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $m = \dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m = \pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}} = f^2(x)+3 \Leftrightarrow 4m^3+m = \left(f^2(x)+3\right)\sqrt{2f^2(x)+5}$

$\Leftrightarrow (2m)^3+2m = \left(2f^2(x)+5\right)\sqrt{2f^2(x)+5}+\sqrt{2f^2(x)+5}$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(2m) = f\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right) \Leftrightarrow 2m = \sqrt{2f^2(x)+5}$

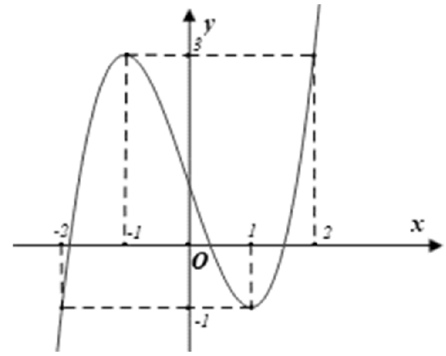
$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ f^2(x) = \dfrac{4m^2-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ f(x) = \pm\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}} \end{cases}$

Với $f(x) = -\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ từ đồ thị ta thấy chỉ có 1 nghiệm.

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình

$f(x) = \sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ phải có hai nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}} = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{\sqrt{37}}{2}, (m>0)$.

Câu 60. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(f(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(f(x))$.

$g'(x) = f'(f(x)).f'(x)$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(f(x)).f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{array}\right.$

$+\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$ (hoành độ các điểm cực trị).

$+\ f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có:

+ Khi $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $x = a \in (-2;-1)$; $x = b \in (1;2)$.

+ Khi $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 1$; $x = -2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1		b		2	$+\infty$
g'		0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
g			$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$		

Phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$

$\Leftrightarrow -1 < m < 3$.

Mà m là số nguyên nên $m \in \{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 61. **(THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2019)** Cho hàm số $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3) - m} = 2g(x) + 7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A. 7. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 25.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = g(x) + 3 \Rightarrow t = 2x^3 + x^2 - 8x + 3 \Rightarrow t' = 6x^2 + 2x - 8$.

$$t'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{4}{3} \\ x=1 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{289}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị $t \in \left(-2;\dfrac{289}{27}\right)$ sẽ có tương ứng 3 giá trị x.

$$\sqrt{g\left(g\left(x\right)+3\right)-m}=2g\left(x\right)+7 \Leftrightarrow \sqrt{g\left(t\right)-m}=2\left(t+3\right)+7 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ g\left(t\right)-m=\left(2t+1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ m=2t^3+t^2-8t-4t^2-4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ m=2t^3-3t^2-12t-1 \ \left(1\right) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình $\left(1\right)$ có 3 nghiệm phân biệt $t \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{289}{27}\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=2t^3-3t^2-12t-1$ với $t \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{289}{27}\right)$.

$$f'\left(t\right)=6t^2-6t-12 \Rightarrow f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\dfrac{1}{2}$		2		$\dfrac{289}{27}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	-21	$\nearrow$	$1979,5$

Từ bảng biến thiên, phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt $m \in \left(-21;4\right]$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-20;-19;-18;...;4\}\Rightarrow$có 25 số nguyên thỏa mãn.

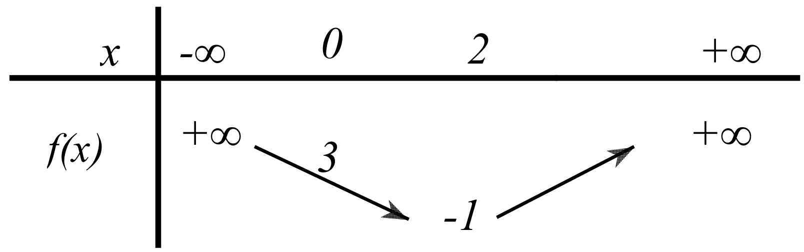
Câu 62. **(THPT Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

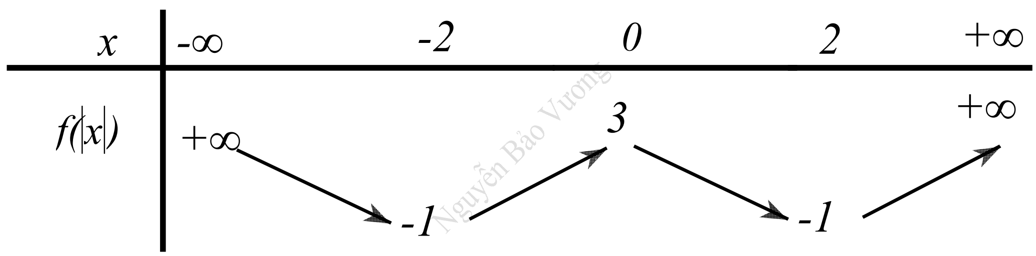
Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ có bảng biến thiên



Hàm số $y=f(|x|)$ có bảng biến thiên



Đặt $t=f(|x|)\geq -1(*)$

Nhận xét:

+ với $t_0<-1\xrightarrow{(*)}x\in\varnothing$ + với $t_0=-1;t_0>3\xrightarrow{(*)}$ 2 nghiệm

+ với $t_0=3\xrightarrow{(*)}$ 3 nghiệm + với $t_0\in(-1;3)\xrightarrow{(*)}$ 4 nghiệm

Phương trình trở thành $t^2-(m-6)t-m+5=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=m-5\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1<m-5<3\Leftrightarrow 4<m<8\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{5;6;7\}$

Câu 63. **(Sở GD Bạc Liêu - 2019)** Cho hàm số $f(x)=2x^3+x^2-8x+7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. 25. **B.** -66. **C.** 105. **D.** 91.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=f(x)-3$.

* $t=f(x)-3\Leftrightarrow t=2x^3+x^2-8x+4$ (1)

Đặt $g(x)=2x^3+x^2-8x+4\quad;g'(x)=6x^2+2x-8\;;g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-1\\ x=-\frac{4}{3}\Rightarrow y=\frac{316}{27}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{316}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)$ và $y=t$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $t<-1$ hoặc $t>\frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ $t=-1$ hoặc $t=\frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ $-1<t<\frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

* Ta có $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5\Leftrightarrow\sqrt{f(t)+m}=2t+1\quad(2)$

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm $t\ge-\frac{1}{2}$

$(2)\Leftrightarrow f(t)+m=4t^2+4t+1\Leftrightarrow m=4t^2+4t+1-f(t)\Leftrightarrow m=-2t^3+3t^2+12t-6$

Đặt $h(t)=-2t^3+3t^2+12t-6\quad;h'(t)=-6t^2+6t+12\;;h(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{316}{27}$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
y	-11	↗	14	↘	$-2660,89$

Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=h(t)$ và $y=m$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $m>14$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

+ $m=14$ hoặc $m<-11$ thì phương trình (2) có 1 nghiệm.

+ $-11\le m<14$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

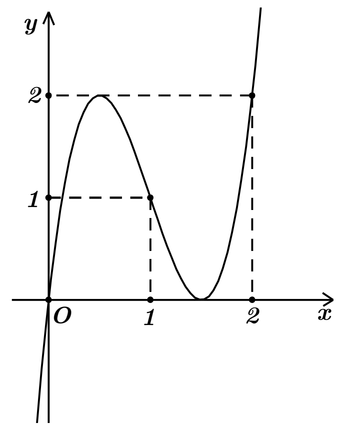
Phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $-\frac{1}{2}\le t<\frac{316}{27}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được kết quả là $-11\le m<14$. Suy ra $S=\{1;2;...;13\}$

Tổng các phần tử của $S=1+...+11+12+13=91$.

Câu 64. **(Quang Trung - Bình Phước - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$ khi và chỉ khi

A. $m>f(0)-\frac{1}{2}$. **B.** $m>f(1)-\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge f(1)-\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge f(0)-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

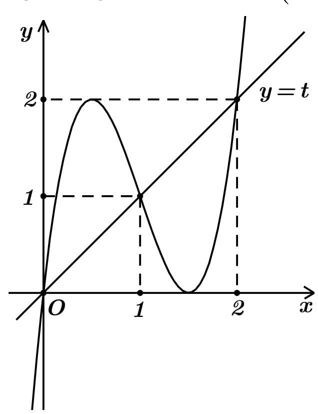
Đặt $2\sin x=t$. Vì $x\in(0;\pi)$ nên $t\in(0;2)$.

Bất phương trình trở thành $f(t)-\frac{t^2}{2}<m$. Đặt $g(t)=f(t)-\frac{t^2}{2}$ với $t\in(0;2)$.

Bất phương trình đúng với mọi $t\in(0;2)$ khi và chỉ khi $\max\limits_{(0;2)} g(t)<m$.

Ta có $g'(t)=f'(t)-t$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t$. Nghiệm phương trình này trên khoảng $(0;2)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=t$ với $t\in(0;2)$.



Dựa vào đồ thị ta được nghiệm $t=1\in(0;2)$.

Cũng dựa vào đồ thị ta thấy khi $t\in(0;1)$ thì $f'(t)>t\Rightarrow g'(t)>0$, khi $t\in(1;2)$ thì $f'(t)<t\Rightarrow g'(t)<0$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	$f(1)-\frac{1}{2}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{(0;2)} g(t) = g(1) = f(1) - \frac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (0;\pi)$ khi và chỉ khi $m > f(1) - \frac{1}{2}$.

Câu 65. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m} \Rightarrow t^3 = f(x) + m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t^3 = f(x) + m \\ x^3 = f(t) + m \end{cases} \Rightarrow f(x) + x^3 = f(t) + t^3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^3, x \in [1;2] \Rightarrow g'(x) = f'(x) + 3x^2 > 0 \;\; \forall x \in [1;2]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Vì $g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t \;\; \Rightarrow f(x) = x^3 - m$

$\Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 4m = x^3 - m \Rightarrow 3m = x^5 + 2x^3 \;\; (1)$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3, x \in [1;2] \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0 \;\; \forall x \in [1;2]$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow h(1) \le 3m \le h(2) \Leftrightarrow 3 \le 3m \le 48 \Leftrightarrow 1 \le m \le 16$.

Do $m \in Z \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;...;16\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số m.

ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!