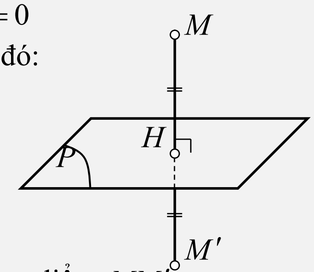
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 2. Bài toán tìm điểm

① **Tìm hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng** $(P): ax+by+cz+d=0$

Viết phương trình đường thẳng MH qua M và vuông góc với (P), khi đó:

$$H=d\cap(P) \text{ thỏa } \begin{cases} x=x_{\circ}+a_1t \\ y=y_{\circ}+a_2t \\ z=z_{\circ}+a_3t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases} x=? \\ y=? \Rightarrow H. \\ z=? \end{cases}$$

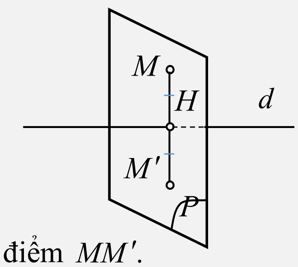


✓ **Lưu ý**: Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $(P) \Rightarrow H$ là trung điểm MM'.

② **Tìm hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d.**

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d, khi đó:

$$H=d\cap(P) \text{ thỏa } \begin{cases} x=x_{\circ}+a_1t \\ y=y_{\circ}+a_2t \\ z=z_{\circ}+a_3t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases} x=? \\ y=? \Rightarrow H. \\ z=? \end{cases}$$



✓ **Lưu ý**: Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $d \Rightarrow H$ là trung điểm MM'.

Câu 1. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a;\ b;\ c)$ thuộc d sao cho $MA^2+MB^2=28$, biết $c<0$.

A. $M\left(\dfrac{1}{6};\ \dfrac{7}{6};\ -\dfrac{2}{3}\right)$ **B.** $M\left(-\dfrac{1}{6};\ -\dfrac{7}{6};\ -\dfrac{2}{3}\right)$

C. $M(-1;\ 0;\ -3)$ **D.** $M(2;\ 3;\ 3)$

Lời giải

Chọn A

Ta có : $M\in d$ nên $\exists t\in\mathbb{R}: M(1+t;\ 2+t;\ 1+2t)$.Đk $:1+2t<0 \Rightarrow t<\dfrac{-1}{2}$ (*)

$MA^2+MB^2=28$

$\Leftrightarrow (-t)^2+(-3-t)^2+(1-2t)^2+(-2-t)^2+(-t)^2+(2-2t)^2=28$

$\Leftrightarrow 12t^2-2t-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1(L) \\ t=-\dfrac{5}{6}(T/m) \end{array}\right.$

Với $t=-\dfrac{5}{6}$, ta có $M\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 2. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của $M(1;0;1)$ lên đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ là

A. $(2;4;6)$. **B.** $\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $(0;0;0)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{6}{7}\right)$.

Lời giải

Đường thẳng Δ có vtcp $\vec{u}=(1;2;3)$ và có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Gọi $N(t;2t;3t)\in\Delta$ là hình chiếu vuông góc của M lên Δ, khi đó:

$\overrightarrow{MN}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow (t-1)+(2t-0).2+(3t-1).3=0 \Leftrightarrow 14t-4=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{7} \Rightarrow N\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{6}{7}\right)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(-4;0;0)$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \\ z=-2t \end{cases}$. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của M lên Δ. Tính $a+b+c$.

A. 5. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của M lên Δ nên tọa độ của H có dạng $H(1-t;-2+3t;-2t)$ và $\overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{u_\Delta}$

$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow 14t-11=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{11}{14} \Rightarrow H(\dfrac{3}{14};\dfrac{5}{14};\dfrac{-22}{14}) \Rightarrow a+b+c=-1$

Câu 4. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian Oxyz, tìm tọa độ hình chiếu H của $A(1;1;1)$ lên đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$.

A. $H(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3})$. **B.** $H(1;1;1)$. **C.** $H(0;0;-1)$. **D.** $H(1;1;0)$.

Lời giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;1)$. Do $H\in d \Rightarrow H(1+t;1+t;t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(t;t;t-1)$. Do H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d nên suy ra

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow t+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3} \Rightarrow H(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3};1)$.

Câu 5. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d):\begin{cases} x=6-4t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên (d).

A. $A'(2;3;1)$. **B.** $A'(-2;3;1)$. **C.** $A'(2;-3;1)$. **D.** $A'(2;-3;-1)$.

Lời giải

Ta có $A'\in(d)$ nên gọi $A'(6-4t;-2-t;-1+2t)$; $\overrightarrow{AA'}=(5-4t;-3-t;-2+2t)$;

đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-4;-1;2)$.

$AA'\perp(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow (5-4t).(-4)+(-3-t).(-1)+(-2+2t).2=0 \Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow A'(2;-3;1)$.

Vậy $A'(2;-3;1)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có đáy là AB và CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Phương trình đường thẳng d qua $C(-6;3;6)$ và song song với đường thẳng AB là

$$\frac{x+6}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-6}{2}$$

Điểm D thuộc đường thẳng d nên gọi tọa độ D là $D(-6-2t;3+t;6+2t)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân nên ta có:

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right| \Leftrightarrow t^2+8t+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-6 \end{array}\right..$$

Với $t=-2 \Rightarrow D_1(-2;1;2)$, tứ giác là hình bình hành nên loại.

Với $t=-6 \Rightarrow D_2(6;-3;-6)$ thỏa mãn, nên $6-3-6=-3$.

Câu 7. **(THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$; $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

A. -1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** -5

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$

Vì $C\in d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases} \Rightarrow c(-1+2t;t)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2);\overrightarrow{AC}=(-1+2t;t;2-t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3t-7;-3t-1;3t-3)$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}$

$S_{ABC}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow C(1;1;1) \Rightarrow m+n+p=3$

Câu 8. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

A. $(-1;0;4)$. **B.** $(7;1;-1)$. **C.** $(2;1;-2)$. **D.** $(0;2;-5)$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d. Phương trình của mặt phẳng (P) là: $1(x-3)+2(y-2)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-7=0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d, khi đó $H=d\cap(P)$

Suy ra $H\in d \Rightarrow H(-1+t;-3+2t;-2+2t)$, mặt khác $H\in(P) \Rightarrow -1+t-6+4t-4+4t-7=0$ $\Rightarrow t=2$. Vậy $H(1;1;2)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d, khi đó H là trung điểm của AA' suy ra $A'(-1;0;4)$.

Câu 9. **(Sở Bình Phước -2019)** Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $2\sqrt{14}$ **D.** $2\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ đi qua $N(0;2;3)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$

$\overrightarrow{MN}=(-2;6;4)$; $\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]=(16;8;-4)$.

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{14}.$$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi $M(a;\,b;\,c)$ thuộc đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$. Biết điểm M có tung độ âm và cách mặt phẳng (Oyz) một khoảng bằng 2. Xác định giá trị $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=11$. **C.** $T=-13$. **D.** $T=1$.

Lời giải

$M\in\Delta \Rightarrow M(t;\ 1+2t;\ -2+3t)$.

Ta có $d(M;(Oyz))=|t|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\Rightarrow 1+2t=5\\ t=-2\Rightarrow 1+2t=-2\end{array}\right.$.

Suy ra $t=-2$. Do đó $M(-2;\ -3;\ -8)$.

Vậy $a=-2;\ b=-3;\ c=-8 \Rightarrow T=a+b+c=-13$.

trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=1+2t\\2x+y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\x=1\\y=1\\z=3\end{cases}$. Do đó $M(1;1;3)$, $a+b+c=5$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, đường thẳng d đi qua A cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2-2t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $B(0;b;0)$ là giao điểm của d với trục Oy. (Điều kiện $b<0$)

Ta có $OA=2$ và tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=1 \Rightarrow OB=1$

Suy ra $B(0;-1;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;0)$ là một vec tơ chỉ phương của d.

Và đường thẳng d đi qua điểm $A(2;0;0)$ nên $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$.

Câu 12. **(Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P): x+2y-3z+2=0$. Tọa độ điểm M là

A. $M(2;0;-1)$. **B.** $M(5;-1;-3)$. **C.** $M(1;0;1)$. **D.** $M(-1;1;1)$.

Lời giải

Tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x-2}{-3}=\frac{y}{1} \\ \frac{y}{1}=\frac{z+1}{2} \\ x+2y-3z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ 2y-z=1 \\ x+2y-3z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

Vậy $M(-1;1;1)$.

Câu 13. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;-1)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x+y+z=0$ là:

A. $(-2;1;1)$. **B.** $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$. **C.** $(1;1;-2)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của $A(3;2;-1)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x+y+z=0$. Khi đó: AH nhận $\vec{n}(1;1;1)$ là vectơ chỉ phương suy ra phương trình $AH: \frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$.

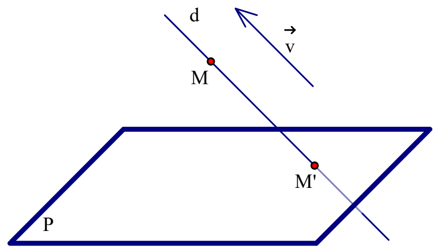
Do $H \in AH \Rightarrow H(3+t;\ 2+t;-1+t)$.

Do $H \in (\alpha) \Rightarrow 3+t+2+t-1+t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{4}{3} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

Câu 14. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(-1;0;3)$ theo phương véctơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$ có tọa độ là

A. $(2;-2;-2)$. **B.** $(-1;0;1)$. **C.** $(-2;2;2)$. **D.** $(1;0;-1)$.

Lời giải



Đường thẳng d đi qua $M(-1;0;3)$, có véctơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;1)$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=3+t \end{cases}.$$

Gọi M' là hình chiếu của điểm $M(-1;0;3)$ theo phương véctơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$.

$\Rightarrow M'=d\cap(P)\Rightarrow$ tọa độ M' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=3+t \\ x-y+z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=3+t \\ -1+t+2t+3+t+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow M'(-2;2;2).$$

Câu 15. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** -2.

Lời giải

$M\in\Delta\Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$.

$M\in(P)\Leftrightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow t=-3$.

$M(0;0;-2)\Rightarrow x_0+y_0+z_0=-2$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và $d:\begin{cases} x=-t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$. Gọi $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC). Tổng $S=a+b+c$ là:

A. -7. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) qua các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ nằm trên các trục Ox, Oy, Oz có phương trình là: $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Điểm $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của của d và mặt phẳng (ABC).

Suy ra $\frac{-t}{1}+\frac{2+t}{2}+\frac{3+t}{3}=1 \Leftrightarrow t=6$ suy ra $\begin{cases} a=-6 \\ b=8 \\ c=9 \end{cases}$.

Vậy $S=-6+8+9=11$.

Câu 17. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x-2y+z-35=0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), tính OA'.

A. $OA'=5\sqrt{3}$ **B.** $OA'=\sqrt{46}$ **C.** $OA'=\sqrt{186}$ **D.** $OA'=3\sqrt{26}$

Lời giải

Chọn C

+ A' đối xứng với A qua (P) nên AA' vuông góc với (P)

+Suy ra phương trình đường thẳng $AA': \begin{cases} x=-1+6t \\ y=3-2t \\ z=6+t \end{cases}$

+Gọi H là giao điểm của AA' và mặt phẳng $(P) \Rightarrow H(-1+6t;3-2t;6+t)$

+ Do H thuộc $(P) \Rightarrow 6(-1+6t)-2(3-2t)+1(6+t)-35=0$

$\Leftrightarrow 41t-41=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(5;1;7)$

+ A' đối xứng với A qua (P) nên H là trung điểm của AA'

$\Rightarrow A'(11;-1;8) \Rightarrow OA'=\sqrt{11^2+(-1)^2+8^2}=\sqrt{186}$

Câu 18. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ điểm M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;1)$ lên mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z=0$.

A. $M'\left(2;\frac{5}{2};3\right)$. **B.** $M'(1;3;5)$. **C.** $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M'(3;1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (α).

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-2t \\ z=1+t \end{cases}$. Ta có $M'=\Delta \cap (\alpha)$.

Xét phương trình: $2+t-2(3-2t)+1+t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Vậy $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 19. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm M' đối xứng với điểm $M(1;2;4)$ qua mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+2z-3=0$ có tọa độ là

A. $(-3;0;0)$. **B.** $(-1;1;2)$. **C.** $(-1;-2;-4)$. **D.** $(2;1;2)$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;2)$.

MM' vuông góc với mặt phẳng (α) nên đường thẳng MM' nhận $\vec{n}=(2;1;2)$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng MM' là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=4+2t \end{cases}$.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng MM' và mặt phẳng (α).

$H \in MM' \Leftrightarrow H(1+2t;2+t;4+2t)$.

$H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2(1+2t)+2+t+2(4+2t)-3=0 \Leftrightarrow 9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Leftrightarrow H(-1;1;2)$.

M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (α) nên H là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-3;0;0)$.

Câu 20. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$,đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(6;-7;0)$ **B.** $(3;-2;-1)$ **C.** $(-3;8;-3)$ **D.** $(0;3;-2)$

Lời giải

Chọn D

Ta gọi AB cắt d tại điểm $M(1+2m;-1+m;2-m)\in d$

$\overrightarrow{AM}(2m;m-3;3-m)$, theo yêu cầu bài toán AB vuông góc d, ta có

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_d}=0 \Rightarrow 2.2m+m-3+m-3=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2;-2;2)$

Đường thẳng AB đi qua A nhận $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=(1;-1;1)$ là VTCP, ta có phương trình AB là

$AB:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. Gọi $B(1+t;2-t;-1+t)\in AB$

Lại có điểm $B\in(P) \Rightarrow 1+t+2-t+2(-1+t)+1=0 \Rightarrow t=-1$. Vậy $B(0;3;-2)$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1;0;2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(2;-1;1)$. **B.** $Q(0;-1;1)$. **C.** $N(0;-1;2)$. **D.** $M(-1;-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u}=(1;1;-2)$.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng d_1. Vì $H\in d_1: H(1+t;t;5-2t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(t;t;3-2t)$.

d vuông góc với d_1 $\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AH}=0 \Leftrightarrow t+t-2(3-2t)=0 \Leftrightarrow 6t=6 \Leftrightarrow t=1$.

Lúc đó, đường thẳng d qua $A(1;0;2)$ và có VTCP $\overrightarrow{AH}=(1;1;1)$ có phương trình: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$.

Lúc đó, điểm $Q(0;-1;1)$ thuộc đường thẳng d.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác đều ABC với $A(6;3;5)$ và đường thẳng BC có phương trình tham số $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=2t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(-1;-12;3)$. **B.** $N(3;-2;1)$. **C.** $P(0;-7;3)$. **D.** $Q(1;-2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng BC đi qua $M_0(1;2;0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;2)$.

Mp(ABC) có vecto pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{M_0A}\right]=(3;15;-6)$ cùng phương $\vec{n'}=(1;5;-2)$.

$\Delta\perp(ABC)\Rightarrow\Delta$ có vecto chỉ phương $\vec{n'}=(1;5;-2)$

Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow AH\perp BC$ và $H(1-t;2+t;2t)$.

$\overrightarrow{AH}=(-5-t;-1+t;2t-5)$. Ta có $AH\perp BC\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 6t-6=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $H(0;3;2)$.

G là trọng tâm tam giác $ABC\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}\right)=2\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=(2;3;3)\Leftrightarrow G=(2;3;3)$.

Δ đi qua G, có vecto chỉ phương $\vec{n'}=(1;5;-2)$

$\Rightarrow$ phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+5t \\ z=3-2t \end{cases}$. Vậy $Q\in\Delta$.

Câu 23. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$, $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $C(m;n;p)\in d\Rightarrow C(-1+2t;t;2-t)$.

Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1;-1;-2) \\ \overrightarrow{AC}=(2t;t-3;1-t) \end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3t-7;-3t-1;3t-3)$.

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}$.

Theo đề ta có $\dfrac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 27t^2-54t+27=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $C(1;1;1)$.

Vậy $m+n+p=3$.

Câu 24. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $(Oxyz)$ cho hai đường thẳng $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{-2}$ và $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{-1}$. Gọi M là trung điểm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng trên. Tính đoạn OM.

A. $OM=\frac{\sqrt{14}}{2}$. **B.** $OM=\sqrt{5}$. **C.** $OM=2\sqrt{35}$. **D.** $OM=\sqrt{35}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=4+t\\z=-2t\end{cases}$ nhận véctơ $\vec{u}=(1;1;-2)$ làm véctơ chỉ phương.

Đường thẳng $d':\begin{cases}x=3+2m\\y=-1-m\\z=-2-m\end{cases}$ nhận véctơ $\vec{v}=(2;-1;-1)$ làm véctơ chỉ phương.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung với $A\in d$ và $B\in d'$.

Khi đó $A(2+t;4+t;-2t)$ và $B(3+2m;-1-m;-2-m)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2m-t+1;-m-t-5;-m+2t-2)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\\\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\\overrightarrow{AB}.\vec{v}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m-6t=0\\6m-3t=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2\\t=-1\end{cases}$. Suy ra $A(1;3;2)$ và $B(-1;1;0)$.

Suy ra trung điểm của AB là $M(0;2;1)$. Vậy $OM=\sqrt{5}$.

Câu 25. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x-2y+z=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d và có hoành độ dương sao cho $AM=\sqrt{6}$. Khi đó tổng $S=2016a+b-c$ là

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn A

Tìm A từ hệ $\begin{cases}x-2y+z=0\\\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+z=0\\x-2y=1\\y+z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\\z=-1\end{cases}\Rightarrow A(-1;-1;-1)$.

Gọi $M(1+2t;t;-2-t)$, $t>\frac{-1}{2}$ ta có $AM=\sqrt{6t^2+12t+6}=\sqrt{6}\Leftrightarrow t=0;t=-2$

Với $t=0\Rightarrow M(1;0;-2)\Rightarrow a=1;b=0;c=-2\Rightarrow S=2018$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$, $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ lần lượt cắt d_1, d_2 tại B và C. Độ dài BC là

A. $\sqrt{19}$. **B.** 19. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $d \cap d_1 = B \Rightarrow B(1+t_1;-1-t_1;2t_1)$.

$d \cap d_2 = C \Rightarrow C(t_2;1+2t_2;t_2)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (t_1-4;-t_1+2;2t_1-5)$ và $\overrightarrow{AC} = (t_2-5;2t_2+4;t_2-5)$.

Vì $A \notin d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$.

Ba điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng $d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1-4 = k(t_2-5) \\ -t_1+2 = k(2t_2+4) \\ 2t_1-5 = k(t_2-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Do đó $B(2;-2;2)$, $C(-1;-1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-3;1;-3)$.

Vậy $BC = \sqrt{19}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1}$; $d_2: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M căt d_1, d_2 lần lượt tại A và B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

phương trình tham số của $d_1: \begin{cases} x = 1+t_1 \\ y = 2+3t_1 \\ z = t_1 \end{cases}; t_1 \in \mathbb{R}$, $A \in d_1 \Rightarrow A(1+t_1;2+3t_1;t_1)$;

phương trình tham số của $d_2: \begin{cases} x = -1-t_2 \\ y = 1+2t_2 \\ z = 2+4t_2 \end{cases}; t_2 \in \mathbb{R}$, $B \in d_2 \Rightarrow B(-1-t_2;1+2t_2;2+4t_2)$;

$\overrightarrow{MA} = (t_1-2;3t_1-1;t_1+2); \overrightarrow{MB} = (-4-4t_2;-2+2t_2;4+4t_2)$.

Vì A, B, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1-2 = -4k-kt_2 \\ 3t_1-1 = -2k+2kt_2 \\ t_1+2 = 4k+4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+4k+kt_2 = 2 \\ 3t_1+2k-2kt_2 = 1 \\ t_1-4k-4kt_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ k = \dfrac{1}{2} \\ kt_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ k = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = 0 \end{cases}.$$

Vậy, $A(1;2;0)$ và $B(-1;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2;-1;2)$.

Độ dài đoạn thẳng $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$.

Câu 28. Cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(0;0;2)$, $C(2;3;-2)$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$.

Biết điểm $M(a;b;c)$ với $a>0$ thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho $AM\perp\Delta$ và $AM=\sqrt{14}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=5$. **C.** $T=7$. **D.** $T=-6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;1)$.

$\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;-3)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$.

Mặt phẳng (ABC) nhận vectơ $\overrightarrow{n_{(ABC)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng Δ

$\Rightarrow$ mặt phẳng (Q) nhận vectơ $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Khi đó $AM\perp\Delta\Leftrightarrow AM\subset(Q)\Rightarrow M\in(Q)$.

Mặt khác theo giả thiết $M\in(ABC)$ $\Rightarrow M\in$ giao tuyến d của hai mặt phẳng (ABC) và (Q).

Đường thẳng d nhận vectơ $\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_{(ABC)}}\right]=(3;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương, đồng thời đi qua A

$\Rightarrow$ PT $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\z=1-t\end{cases}$.

Ta có $M\in d\Rightarrow M=(1+3t;1+2t;1-t)$.

Theo giả thiết $AM^2=14\Leftrightarrow(3t)^2+(2t)^2+(-t)^2=14\Leftrightarrow14t^2=14\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\end{array}\right.$.

Với $t=-1\Rightarrow M=(-2;-1;2)$ (loại).

Với $t=1\Rightarrow M=(4;3;0)$ (nhận)

Khi đó $a=4;b=3;c=0$.

Vậy $a+b+c=7$.

Câu 29. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(3;-2;-1)$. **B.** $(-3;8;-3)$. **C.** $(0;3;-2)$. **D.** $(6;-7;0)$.

Lời giải

Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$.

Gọi $M=AB\cap d\Rightarrow M(1+2t;-1+t;2-t)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2t;t-3;3-t)$.

$AB\perp d\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 4t+t-3-3+t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2;-2;2)=2(1;-1;1)$

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;2;-1)$, có một VTCP là $\vec{u}=(1;-1;1)$

$$\Rightarrow AB:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

Ta có: $B=AB\cap(P)$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-1+t\\x+y+2z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\x=0\\y=3\\z=-2\end{cases}$

$\Rightarrow B(0;3;-2)$.

Câu 30. **(SGD Bạc Liêu - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t,\\z=-2+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$.

Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A, cắt mặt cầu tại B sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Mặt phẳng trung trực đoạn AB có phương trình là

A. $2x+4y-4z-19=0$. **B.** $3x-6y-6z-62=0$.

C. $2x-4y-4z-43=0$. **D.** $3x+6y-6z-31=0$.

Lời giải

Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A suy ra tọa độ $A(3+a;-1-a;-2+a)$.

$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=\pm\overrightarrow{AB}$

Trường hợp 1:

$$3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}3(-2-a)=x-3-a\\3(3+a)=y+1+a\\3(1-a)=z+2-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3-2a\\y=8+2a\\z=1-2a\end{cases}\text{ suy ra } B(-3-2a;8+2a;1-2a)$$

Do $B\in(S)$ nên

$$(-3-2a)^2+(8+2a)^2+(1-2a)^2-4(-3-2a)+10(8+2a)+14(1-2a)+64=0$$

$\Leftrightarrow 12a^2+40a+244=0$, phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2:

$$3\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}3(-2-a)=-(x-3-a)\\3(3+a)=-(y+1+a)\\3(1-a)=-(z+2-a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9+4a\\y=-10-4a\\z=-5+4a\end{cases}$$

Suy ra $B(9+4a;-10-4a;-5+4a)$

Do $B\in(S)$ nên

$$(9+4a)^2+(-10-4a)^2+(-5+4a)^2-4(9+4a)+10(-10-4a)+14(-5+4a)+64=0$$

$$\Leftrightarrow 48a^2+112a+64=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right..$$

Điểm B có hoành độ là số nguyên nên $B(5;-6;-9)$; $A(2;0;-3)$.

Mặt phẳng trung trực đoạn AB đi qua trung điểm $I\left(\dfrac{7}{2};-3;-6\right)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(-1;2;2)$ nên có phương trình $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)-2(y+3)-2(z+6)=0\Leftrightarrow 2x-4y-4z-43=0$

Dạng 3. Bài toán liên quan đến góc – khoảng cách

1. *Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

- *Khoảng cách từ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ đến mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$ được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

  Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng
- *Cho hai mặt phẳng song song $(P):ax+by+cz+d=0$ và $(Q):ax+by+cz+d'=0$ có cùng véctơ pháp tuyến, khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là* $\boxed{d((Q),(P))=\dfrac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

2. *Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng – Khoảng cách giữa hai đường thẳng*

- ***Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng*** *d qua điểm $M_\circ$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}_d$ được xác định bởi công thức* $\boxed{d(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_\circ M},\vec{u}_d\right]\right|}{|\vec{u}_d|}}$.

  Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song *là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.*
- ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:*** *d đi qua điểm M và có véctơ chỉ phương $\vec{u}$ và d' đi qua điểm M' và có véctơ chỉ phương $\vec{u}'$ là* $\boxed{d(d,d')=\dfrac{\left|[\vec{u},\vec{u}'].\overrightarrow{M_\circ M}\right|}{\left|[\vec{u},\vec{u}']\right|}}$.

3. *<u>Góc giữa hai véctơ</u>*

Cho hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn hoặc tù.

$$\boxed{\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}\quad \text{với } 0^\circ<\alpha<180^\circ.$$

4. *Góc giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *và* $(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

$$\boxed{\cos\left((P),(Q)\right)=\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}\ \text{với } 0°<\alpha<90°.$$

5. *Góc giữa hai đường thẳng*

Góc giữa hai đường thẳng d_1 *và* d_2 *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ *và* $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$.

$$\boxed{\cos(d_1;d_2)=\cos\alpha=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}\ \text{với } 0°<\alpha<90°.$$

6. *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*

Góc giữa đường thẳng d *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_d=(a;b;c)$ *và mặt phẳng* (P) *có véctơ pháp tuyến* $\vec{n}_{(P)}=(A;B;C)$ *được xác định bởi công thức:*

$$\boxed{\sin\alpha=\left|\cos(\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d)\right|=\frac{|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d|.|\vec{n}_{(P)}|}=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\ \text{với } 0°<\alpha<90°.$$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x=7y+z+25=0$ và đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$. Gọi d_1' là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P). Đường thẳng d_2 nằm trên (P) tạo với d_1, d_1' các góc bằng nhau, d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(a;b;c)$. Tính $\frac{a+2b}{c}$.

A. $\frac{a+2b}{c}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{a+2b}{c}=0$. **C.** $\frac{a+2b}{c}=\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{a+2b}{c}=1$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $(Q)=(d_1,d_1')$ khi đó (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_1}\right]=(5;5;15)$.

Đường thẳng d_1' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}'=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_1}\right]=(22;11;-11)$ hay một vectơ chỉ phương khác $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Vì $\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{u_2}=0\Rightarrow 4a-7b+c=0\Rightarrow c=7b-4a\Rightarrow \overrightarrow{u_2}=(a;b;7b-4a)$.

Ta lại có $(d_1;d_2)=(d_1';d_2)\Leftrightarrow\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1}',\overrightarrow{u_2}\right)\right|$

$\Leftrightarrow|a+2b+4a-7b|=|2a+b+4a-7b|\Leftrightarrow|5a-5b|=|6a-6b|\Leftrightarrow|a-b|=0\Leftrightarrow a=b$

Chọn $a=1\Rightarrow b=1, c=3\Rightarrow\frac{a+2b}{c}=1$.

Cách 2:

Gọi $(Q)=(d_1,d_1')$ khi đó $(P)\perp(Q)$. Các đường thẳng nằm trong (P) mà vuông góc với (Q) thì vuông góc với tất cả các đường thẳng trong (Q) hay chúng cùng tạo với d_1,d_1' các góc 90°. Do đó, các đường thẳng này thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chúng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\overrightarrow{n_Q}(1;1;3)\Rightarrow \dfrac{a+2b}{c}=1$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7),B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y-z+4=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

* Ta có : $\overrightarrow{AB}=(2;4;-6)=2(1;2;-3)$

Gọi $I(4;3;4)$ là trung điểm của AB

Phương trình mặt phẳng trung trực (Q) của AB là : $(x-4)+2(y-3)-3(z-4)=0$

$\Leftrightarrow x+2y-3z+2=0$

Gọi $d=(P)\cap(Q)$. Đường thẳng d có 1 vpcp là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(1;1;1)$ và đi qua điểm $N(-2;0;0)$, có phương trình là $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=t\\z=t\end{cases}$

* Gọi $M\in(P):MA=MB$. Khi đó $M\in$ d và $M(-2+t;t;t)$

Theo giả thiết, ta có : $MA=\sqrt{35}\Leftrightarrow\sqrt{(t-5)^2+(t-1)^2+(t-7)^2}=\sqrt{35}$

$\Leftrightarrow 3t^2-26t+40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{20}{3}\\t=2\Rightarrow M(0;2;2)\end{array}\right.$

Vậy $OM=2\sqrt{2}$

Câu 33. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$, $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45^0 và nhận vectơ $\vec{n}=(1;b;c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc.

A. -4 hoặc 0. **B.** 4 hoặc 0. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Ta có vectơ chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1=(2;-2;-1)$ và $\vec{u}_2=(1;0;-1)$.

Mặt phẳng (P) qua $d_1\Rightarrow\vec{n}.\vec{u}_1=0\Leftrightarrow 2-2b-c=0.$ (1)

$\sin(d_2,(P))=\dfrac{|\vec{u}_2.\vec{n}|}{|\vec{u}_2|.|\vec{n}|}=\sin45^\circ\Leftrightarrow\dfrac{|1-c|}{\sqrt{b^2+c^2+1}.\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow|1-c|=\sqrt{b^2+c^2+1}\Leftrightarrow b^2+2c=0.(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\begin{cases}b=2\\c=-2\end{cases}\Rightarrow b.c=-4.$

Cu 34. **(Chuỵn Phan Bội Chu 2019) Trong khơng gian với hệ tọa độ** $Oxyz$ **, cho hai đường thẳng** $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ **v̀** $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$ **. Mặt phẳng** (P) **qua** d_1 **tạo với** d_2 **một gĩc** 45° **v̀ nhận v́ctơ** $\vec{n}(1;b;c)$ **̀lm một v́ctơ pḥp tuyến. X́c định tích** bc **.**

A. -4 **hoặc** 0 **B.** 4 **hoặc** 0 **<u>C</u>.** -4 **D.** 4

Lời giải

Đường thẳng d_1 và d_2 có véctơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(2;-2;-1)$ và $\vec{u}_2=(1;0;-1)$.

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;b;c)$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}\vec{u}_1\perp\vec{n}\\ \left|\dfrac{\vec{u}_2.\vec{n}}{|\vec{u}_2|.|\vec{n}|}\right|=\sin 45^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}_1.\vec{n}=0\\ \left|\dfrac{1.1+0.b+(-1).c}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+b^2+c^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2b-c=0\\ |1-c|=\sqrt{1+b^2+c^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+c=2\\ (1-c)^2=1+b^2+c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+c=2\\ b^2+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ c=-2\end{cases}$

Vậy $b.c=-4$.

Câu 35. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** rong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1, tạo với d_2 một góc 45° và nhận vectơ $\vec{n}(1;b;c)$ làm một vec tơ pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

<u>A</u>. -4. **B.** 4. **C.** 4 hoặc 0. **D.** -4 hoặc 0.

Lời giải.

$\overrightarrow{u_1}=(2;-2;-1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1;0;-1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2. Theo bài ra ta có

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\sin\left(d_2;(P)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2.1+(-2)b+(-1)c=0\\ \dfrac{|1.1+0.b+(-1)c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2-2b\\ (c-1)^2=1+b^2+c^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ c=-2\end{cases}$.

Câu 36. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P). Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d và cách M một khoảng $\sqrt{42}$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+4}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$. **<u>D</u>.** Đáp án khác.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Gọi $M=d\cap(P)$. Suy ra $M\in d\Rightarrow M(3+2t;-2+t;-1-t);M\in(P)\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(1;-3;0)$

(P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;1;1)$. d có véc tơ chỉ phương $\vec{a}_d=(2;1;-1)$. Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta=\left[\vec{a}_d,\vec{n}_P\right]=(2;-3;1)$. Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ, khi đó $MN=(x-1;y+3;z)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{a_\Delta}\\ N\in(P)\\ MN=\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y+z-11=0\\ x+y+z+2=0\\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42\end{cases}$.

Giải hệ ta tìm được $N(5;-2;-5)$ và $N(-3;-4;5)$.

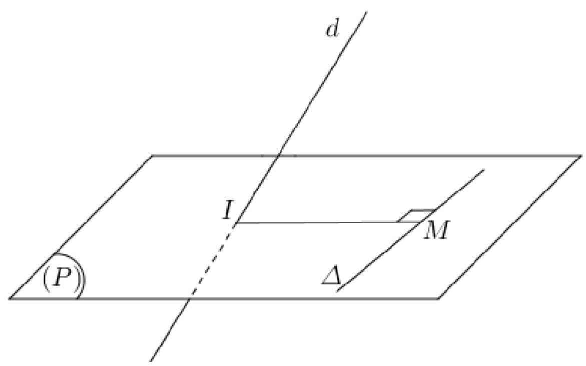
Với $N(5;-2;-5)$, ta có $\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$.

Với $N(-3;-4;5)$, ta có $\Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

Câu 37. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\\ z=2-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$, cắt mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ tại điểm I. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta\perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a;b;c)$ (với $a+b>c$) của điểm I trên đường thẳng Δ.

A. $M(2;5;-4)$. **B.** $M(6;-3;0)$. **C.** $M(5;2;-4)$. **D.** $M(-3;6;0)$.

Lời giải



(P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$ và d có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-1)$.

$I=d\cap(P)\Rightarrow I(1;1;1)$.

Vì $\Delta\subset(P);\Delta\perp d\Rightarrow\Delta$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(-3;2;1)$.

M là hình chiếu của I trên Δ nên M thuộc mặt phẳng (Q) đi qua I và vuông góc với Δ.

Mặt phẳng (Q) nhận $\overrightarrow{u_\Delta}=(-3;2;1)$ làm véctơ pháp tuyến nên ta có phương trình của $(Q):-3(x-1)+2(y-1)+1(z-1)=0\Leftrightarrow 3x-2y-z=0$.

Gọi $d_1=(P)\cap(Q)\Rightarrow d_1$ có véctơ chỉ phương $\vec{v}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\vec{n}\right]=(1;4;-5)$ và d_1 đi qua I, phương trình của $d_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+4t\\ z=1-5t\end{cases}$.

Mặt khác $M\in\Delta\Rightarrow M\in(P)\Rightarrow M\in d_1$.

Giả sử $M\left(1+t;1+4t;1-5t\right)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=\left(t;4t;-5t\right)$.

Ta có: $IM=\sqrt{42}\Leftrightarrow\sqrt{t^2+16t^2+25t^2}=\sqrt{42}\Leftrightarrow t=\pm1$.

+) Với $t=1\Rightarrow M\left(2;5;-4\right)$.

+) Với $t=-1\Rightarrow M\left(0;-3;6\right)$.

Vì $M\left(a;b;c\right)$ (với $a+b>c$) nên $M\left(2;5;-4\right)$.

Cách 2: Vì $M\left(a;b;c\right)$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} M\in(P) \\ \overrightarrow{IM}\perp\vec{u}_\Delta \\ IM=\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b+c-3=0 \\ -3(a-1)+2(b-1)+(c-1)=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b+c-3=0 \\ -3a+2b+c=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4a-b=3 \\ a+b+c-3=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=4a-3 \\ c=-5a+6 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=0 \\ b=-3 \\ c=6\end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-4\end{cases}\end{array}\right.$$

Vì $M\left(a;b;c\right)$ (với $a+b>c$) nên $M\left(2;5;-4\right)$.

Câu 38. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, $\Delta_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$, $\Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}\left(h;k;1\right)$. Giá trị $h-k$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

$H\in\Delta_1\Leftrightarrow H\left(3+2t;t;1+t\right)$.

$K\in\Delta_2\Leftrightarrow K\left(1+m;2+2m;m\right)$.

Ta có $\overrightarrow{HK}=\left(m-2t-2;2m-t+2;m-t-1\right)$.

Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=\left(1;1;-2\right)$.

$\Delta\perp d\Leftrightarrow\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{HK}=0\Leftrightarrow m-t+2=0\Leftrightarrow m=t-2\Rightarrow\overrightarrow{HK}=\left(-t-4;t-2;-3\right)$.

Ta có $HK^2=\left(-t-4\right)^2+\left(t-2\right)^2+\left(-3\right)^2=2\left(t+1\right)^2+27\geq27,\forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow minHK=\sqrt{27}$, đạt được khi $t=-1$.

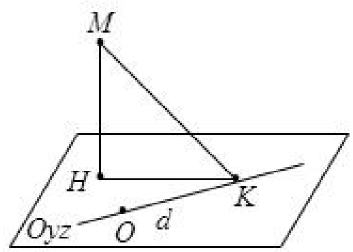
Khi đó ta có $\overrightarrow{HK}=(-3;-3;-3)$, suy ra $\vec{u}(1;1;1)\Rightarrow h=k=1\Rightarrow h-k=0$.

Câu 39. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O, thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa d và trục tung bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz) và trên đường thẳng d.

Ta có: $d(M,d)=MK\geq MH=1$, $H(0;-2;1)$.

Suy ra $d(M,d)$ nhỏ nhất khi $K\equiv H$. Khi đó d có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{OH}=(0;-2;1)$.

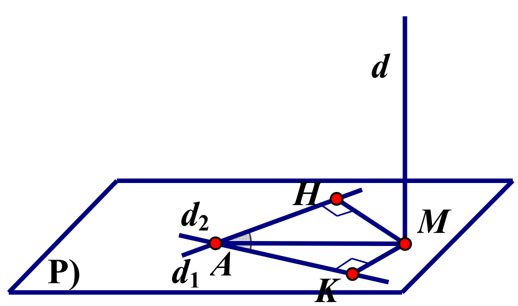
$\cos(d,Oy)=\frac{\left|\overrightarrow{OH}.\vec{j}\right|}{\left|\overrightarrow{OH}\right|\left|\vec{j}\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 40. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$, mặt phẳng $(P):x-z-1=0$ và đường thẳng $(d):\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=-2+t\end{cases}$. Gọi $d_1;d_2$ là các đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và đều có khoảng cách đến đường thẳng d bằng $\sqrt{6}$. Côsin của góc giữa d_1 và d_2 bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



* Ta có: $\vec{n}_P=(1;0;-1)$, $\vec{u}_d=(-1;0;1)\Rightarrow d\perp(P)$ và $d\cap(P)=M(0;2;-1)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(2;-1;2)\Rightarrow MA=3$

* Gọi H; K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên d_1 và d_2, ta có

$d\left(d_1;d\right)=d\left(M;d_1\right)=MH$, $d\left(d_2;d\right)=d\left(M;d_2\right)=MK\Rightarrow MH=MK=\sqrt{6}$

$\Rightarrow \sin\widehat{MAK}=\sin\widehat{MAH}=\dfrac{HM}{AM}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \cos\left(d_1;d_2\right)=\left|\cos\left(2.\widehat{MAH}\right)\right|=\left|1-2\sin^2\widehat{MAH}\right|=\left|1-\dfrac{4}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$.

Câu 41. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\left(d\right):\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $\left(P\right):x+y-z+3=0$ và điểm $A\left(1;2;-1\right)$. Cho đường thẳng $\left(\Delta\right)$ đi qua A, cắt $\left(d\right)$ và song song với mặt phẳng $\left(P\right)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến $\left(\Delta\right)$

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M=\left(\Delta\right)\cap\left(d\right)\Rightarrow M\left(t+3;3t+3;2t\right)\left(t\in R\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(t+2;3t+1;2t+1\right)$.

Gọi $\vec{n}\left(1;1;-1\right)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$.

Ta có $\left(\Delta\right)//\left(P\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow t+2+3t+1-2t-1=0\Leftrightarrow t=-1$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}\left(1;-2;-1\right)\Rightarrow d\left(O;\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OA}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Câu 42. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và

$d_2:\begin{cases}x=1+4t\\y=-1-2t\\z=2+2t\end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng?

A. $\dfrac{\sqrt{87}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{174}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{174}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{87}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và nhận $\overrightarrow{u_1}=\left(2;-1;1\right)$ làm VTCP.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1;-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{u_2}=\left(4;-2;2\right)$ làm VTCP.

Dễ thấy: $\overrightarrow{u_2}=2.\overrightarrow{u_1}$ nên đường thẳng d_1 song song hoặc trùng với đường thẳng d_2.

Lại có điểm $M\left(1;-2;0\right)\in d_1$ nhưng $M\left(1;-2;0\right)\notin d_2$ nên suy ra $d_1 // d_2$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng khoảng cách từ điểm $M\left(1;-2;0\right)$ đến đường thẳng d_2.

$\mathrm{d}\left(M;d_2\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(0;1;2),\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{u_2}=(6;8;-4)$.

$\Rightarrow d(M;d_2)=\dfrac{\sqrt{6^2+8^2+(-4)^2}}{\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{174}}{6}\Rightarrow d(d_1;d_2)=\dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+3z-14=0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho ΔMAB vuông tại M. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy).

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

$\overrightarrow{AM}=(x-3;y-1;z-2)$, $\overrightarrow{BM}=(x+3;y+1;z)$.

Vì ΔMAB vuông tại M nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow(x-3)(x+3)+(y-1)(y+1)+z(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x^2-9+y^2-1+z^2-2z=0\Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=11$.

$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{11}$.

Nhận xét thấy $d(I,(P))=\dfrac{|0+0+3.1-14|}{\sqrt{1^2+1^2+3^3}}=\sqrt{11}=R$.

$\Rightarrow(P)$ tiếp xúc với (S) tại M

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Rightarrow\begin{cases}M\in(P)\\ \overrightarrow{IM}\text{ cïng ph-ng }\overrightarrow{n_{(P)}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+3z=14\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=4\end{cases}\Rightarrow M(1;1;4)$.

Vậy $d(M,(Oxy))=|4|=4$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0),B(0;3;0),C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất. Khi đó Δ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(4;3;7)$. **B.** $(-1;-2;1)$. **C.** $(7;5;3)$. **D.** $(3;4;3)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 3x+2y+z-6=0$, dễ thấy $D\in(ABC)$.

Ta thấy $P=d(A,\Delta)+d(B,\Delta)+d(C,\Delta)\le AD+BD+CD$.

Vậy P lớn nhất khi và chỉ khi các hình chiếu vuông góc của các điểm A,B,C trên Δ trùng D hay $\Delta\perp(ABC)$ tại D.

Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+2t\\ z=1+t\end{cases}$, ta thấy Δ đi qua điểm có tọa độ $(7;5;3)$.

Câu 45. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)** Tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1;d_2$ tới mặt phẳng (P) trong đó: $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{3};d_2:\frac{-x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1};(P):2x+4y-4z-3=0$.

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{13}{6}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của hai đường thẳng d_1,d_2 như sau:

$$d_1:\begin{cases}x=-1+2t\\y=3t\\z=1+3t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1-2t'\\y=t'\\z=1+t'\end{cases}.$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}-1+2t=1-2t'\\3t=t'\\1+3t=1+t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+2t'=2\\3t-t'=0\\3t-t'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{4}\\t'=\frac{3}{4}\end{cases}$.

Suy ra giao điểm của d_1,d_2 là $A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là: $d\left(A;(P)\right)=\frac{\left|2.\left(-\frac{1}{2}\right)+4.\left(\frac{3}{4}\right)-4.\left(\frac{7}{4}\right)-3\right|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}=\frac{4}{3}$.

Câu 46. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$ và đường thẳng $(\Delta):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{x-1}{-1}$. Khoảng cách giữa (Δ) và (P) là

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{2}{9}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Đường thẳng $(\Delta):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$ và đi qua điểm $M=(1;-1;1)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\M\notin(P)\end{cases}$ suy ra (Δ) song song với (P).

Khi đó $d\left((\Delta),(P)\right)=d\left(M,(P)\right)=\frac{|2+1+2-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y=3-t\\z=t\end{cases}$.Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $45°$.Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(3;2;1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(3;-1;2)$. **D.** $M(3;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta viết phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y+z-3=0\end{cases}$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d nên có dạng: $mx+n(y+z-3)=0, m^2+n^2\neq 0$

$\Leftrightarrow mx+ny+nz-3n=0 \Rightarrow (P)$ có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(m;n;n)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có: $\cos((P);(Oxy))=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P};\vec{k}\right)\right| \Leftrightarrow \cos 45°=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_P}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\vec{k}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+n^2+n^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{m^2+2n^2}=\sqrt{2}|n| \Leftrightarrow m^2=0 \Leftrightarrow m=0$.

Chọn $n=1 \Rightarrow (P): y+z-3=0$.

Do đó: $M(3;2;1)\in(P)$.

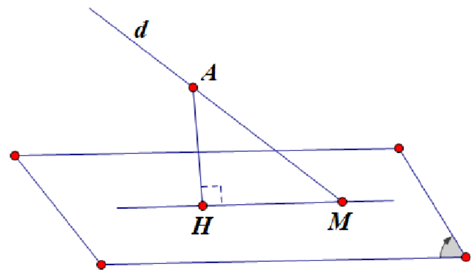
Bình luận: Đối với những bài toán viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng cho trước ta nên sử dụng khái niệm chùm mặt phẳng như sau: Mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(Q): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ có phương trình dạng $m(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+n(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0, m^2+n^2\neq 0$.

Câu 48. **(Chuyên Hà Tĩnh 2019))** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-3z-3=0$. Gọi M là giao điểm của d và (α), A thuộc d sao cho $AM=\sqrt{14}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α).

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng $(\alpha): x+2y-3z-3=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-3)$.

Ta có: $\sin(d;(\alpha))=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α).

Khi đó tam giác ΔMAH vuông tại H nên $\sin(d;(\alpha))=\sin\widehat{AMH}=\dfrac{AH}{AM}$.

$\Rightarrow AH=AM.\sin(d;(\alpha))=3$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng 3.

Câu 49. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng $(P): x+ay+bz+c=0\,(c>0)$ song song với d_1,d_2 và khoảng cách từ d_1 đến (P) bằng 2 lần khoảng cách từ d_2 đến (P). Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 14. **B.** 6. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

Gọi $\vec{u}_1=(1;1;2)$, $\vec{u}_2=(2;1;1)$ lần lượt là một vectơ chỉ phương của d_1, d_2.

Gọi $\vec{n}_1=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;3;-1)$, có $\vec{n}_1$ cùng phương $\vec{n}_2=(1;-3;1)$.

$\vec{n}=(1;a;b)$ là một vec-tơ chỉ phương của (P).

Do (P) song song với d_1,d_2 nên chọn $\vec{n}=(1;-3;1)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x-3y+z+c=0$.

Lấy $M_1(1;-2;1)\in d_1$, $M_2(1;1;-2)\in d_2$

Có $d(d_1;(P))=2d(d_2;(P))\Leftrightarrow d(M_1;(P))=2d(M_2;(P))$

$\Leftrightarrow\dfrac{|1-3(-2)+1+c|}{\sqrt{11}}=2\dfrac{|1-3-2+c|}{\sqrt{11}}\Leftrightarrow|8+c|=2|-4+c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8+c=2(-4+c)\\8+c=2(4-c)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=16\ (\text{nhận})\\c=0\ \ (\text{loại})\end{array}\right.$.

Nên $(P): x-3y+z+16=0$, suy ra $a=-3$, $b=1$, $c=16$.

Vậy $a+b+c=14$.

Câu 50. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=4t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

+ Các điểm cách đều hai điểm A, B thì nằm trên mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$

+ Phương trình mặt phẳng (α) là $3x+y-7=0$.

Do đó đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (α)

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(0;7;0)\in(P)\cap(\alpha)$ và nhận

$\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(1;-3;2)$ làm một vectơ chỉ phương là $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

Câu 51. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^0$, $BC=3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\frac{x-4}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+z-3=0$. Biết đỉnh C có cao độ âm. Tính hoành độ đỉnh **A.**

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $C\in BC$ nên $C(4+t;5+t;-7-4t)$.

BC có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-4)$. Mặt phẳng (α) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;0;1)$.

Gọi φ là góc giữa BC và (α). Ta có $\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{u};\vec{n}\right)\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=30^0$. Tức là A là hình chiếu của C lên (α).

Vậy $\frac{3\sqrt{2}}{2}=CA=d\left(C;(\alpha)\right)=\frac{|4+t-7-4t-3|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} C(3;4;-3) \\ C(1;2;5) \end{array}\right.$

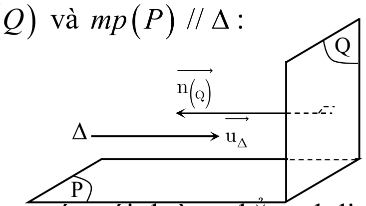
Mà C có cao độ âm, suy ra $C(1;2;5)$.

Lúc này AC qua $C(1;2;5)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{n}=(1;0;1)$. Nên $A(3+t;4;-3+t)$.

Mặt khác A nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+z-3=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}\Rightarrow x_A=\frac{9}{2}$.

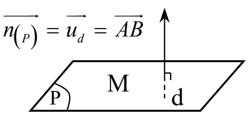
Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến đường thẳng

Dạng 1. Viết phương trình mp(P) đi qua M, vuông góc mp(Q) và $mp(P)\,//\,\Delta$:



$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases} \bullet\ \text{Đi qua } M(x_o, y_o, z_o) \\ \bullet\ VTPT: \overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{n_{(Q)}}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] \end{cases}$

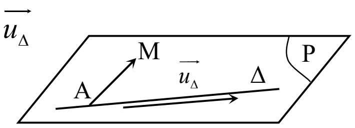
Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với đường thẳng d đi qua hai điểm A và B, với:



$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases} \bullet\ \text{Đi qua } M \\ \bullet\ VTPT: \overrightarrow{n_{(P)}} = \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$

Dạng 3. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường thẳng Δ:

$\xrightarrow{PP}$ ***Trên đường thẳng Δ lấy điểm A và xác định VTCP*** $\overrightarrow{u_\Delta}$



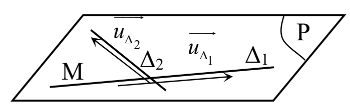
Khi đó $mp(P):\begin{cases} \bullet\ \text{Đi qua } M \\ \bullet\ VTPT: \overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] \end{cases}$

Dạng 4. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng song song Δ_1, Δ_2:

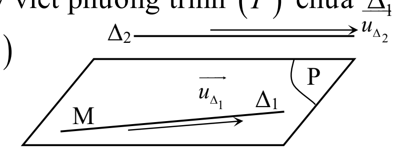
$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases} \bullet\ \text{Đi qua } M \in \Delta_1,\ (hay\ M \in \Delta_2) \\ \bullet\ VTPT: \overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right] \end{cases}$

Dạng 5. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng cắt nhau Δ_1, Δ_2:

$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases} \bullet\ \text{Đi qua } M \in \Delta_1,\ (hay\ M \in \Delta_2) \\ \bullet\ VTPT: \overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right] \end{cases}$



Dạng 6. Cho 2 đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2. Hãy viết phương trình (P) chứa Δ_1 và song song Δ_2



$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases} \bullet\ \text{Đi qua } M \in \Delta_1,\ (hay\ M \in \Delta_2) \\ \bullet\ VTPT: \overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right] \end{cases}$

Dạng 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng (α), (β)

$\xrightarrow{PP}$ ***Chọn*** A, B ***thuộc giao tuyến hai mặt phẳng*** (α) ***và*** $(\beta) \Rightarrow A, B \in (P)$. ***Cụ thể:***

Cho: $z = z_o \Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -(C_1z_o + D_1) \\ A_2x + B_2y = -(C_2z_o + D_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ... \\ y = ... \end{cases} \Rightarrow A(...;...;...) \in (P)$

Cho: $x = x_o \Rightarrow \begin{cases} B_1y + C_1z = -(A_1x_o + D_1) \\ B_2y + C_2z = -(A_2x_o + D_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ... \\ z = ... \end{cases} \Rightarrow B(...;...;...) \in (P)$

Khi đó $mp(P):\begin{cases} \bullet\ \text{Đi qua } M \\ \bullet\ VTPT: \overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right] \end{cases}$

Câu 52. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình:

$\frac{x-10}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P):10x+2y+mz+11=0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $m=2$ **B.** $m=-52$ **C.** $m=52$ **D.** $m=-2$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta:\frac{x-10}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;1;1)$

Mặt phẳng $(P):10x+2y+mz+11=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(10;2;m)$

Để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ phải cùng phương với $\vec{n}$

$\Rightarrow \frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\frac{1}{m}\Leftrightarrow m=2$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P):x-y+z-3=0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua O, song song với Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+z=0$. **B.** $x-2y+z=0$. **C.** $x+2y+z-4=0$. **D.** $x-2y+z+4=0$.

Lời giải

Δ có VTCP $\vec{u}=(-1;2;-3)$ và (P) có VTPT là $\vec{n}=(1;-1;1)$.

(α) qua O và nhận $\vec{n'}=-\left[\vec{u};\vec{n}\right]=(1;2;1)$

Suy ra $(\alpha):x+2y+z=0$.

Câu 54. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;-2)$ và đi qua điểm $M(1;-3;2)$, $d_2:\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax+by+cz+11=0$. Giá trị $a+2b+3c$ bằng

A. -42. **B.** -32. **C.** 11. **D.** 20.

Lời giải

Đường thẳng d_2 có véctơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;3)$ và đi qua điểm $N(-3;1;-4)$

Ta có: $\left[\vec{v},\vec{u}\right]=(4;5;2)\neq\vec{0}$; $\overrightarrow{MN}=(-4;4;-6)$; $\left[\vec{v},\vec{u}\right].\overrightarrow{MN}=-16+20-12=-8\neq 0$

$\Rightarrow$ d_1 và d_2 chéo nhau.

Mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 nên (P) nhận $\left[\vec{v},\vec{u}\right]=(4;5;2)$ làm một vectơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(-1;-1;-1)$ của đoạn MN

Suy ra phương trình của (P): $4(x+1)+5(y+1)+2(z+1)=0\Leftrightarrow 4x+5y+2z+11=0$

$\Rightarrow a=4;b=5;c=2$ $\Rightarrow a+2b+3c=20$.

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$

A. $(P):2x-2z+1=0$ **B.** $(P):2y-2z+1=0$ **C.** $(P):2x-2y+1=0$ **D.** $(P):2y-2z-1=0$

Lời giải

Chọn B

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1=(-1;1;1)$

d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(2;-1;-1)$

Vì (P) song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(0;1;-1)$

Khi đó (P) có dạng $y-z+D=0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ của AB

Do đó $(P):2y-2z+1=0$

Câu 56. **(SGD Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3}$ và $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$ có phương trình là

A. $-2x-y+9z-36=0$. **B.** $2x-y-z=0$.

C. $6x+9y+z+8=0$. **D.** $6x+9y+z-8=0$.

Lời giải

Đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3}$ đi qua điểm $M(1;-2;4)$, có một VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;3)$.

Đường thẳng $d_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$ có một VTCP là $\overrightarrow{u_2}=(1;-1;3)$.

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau $d_1,d_2 \Rightarrow (P)$ qua điểm $M(1;-2;4)$, có một VTPT là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(6;9;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là :

$(P):6(x-1)+9(y+2)+(z-4)=0 \Leftrightarrow 6x+9y+z+8=0$.

Câu 57. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(0;1;0)$, mặt phẳng $(Q):x+y-4z-6=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=3\\y=3+t\\z=5-t\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d và vuông góc với (Q) là :

A. $3x+y+z-1=0$. **B.** $3x-y-z+1=0$. **C.** $x+3y+z-3=0$. **D.** $x+y+z-1=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;-4)$.

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(0;1;-1)$.

Gọi VTPT của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_P}$.

Ta có: $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}$ và $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_d}$ nên chọn $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{u_d}\right]=(3;1;1)$.

(P) đi qua điểm $A(0;1;0)$, VTPT $\overrightarrow{n_P}=(3;1;1)$ có phương trình là: $3x+y+z-1=0$.

Câu 58. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z=0$. **B.** $x+y-z-2=0$. **C.** $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A đến d. Khi đó $H(2-t;-1+2t;1+t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(-1-t;2t;1+t)$.

Do $AH\perp d\Rightarrow-(-1-t)+2.2t+1+t=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH\perp(\alpha)$.

Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Vậy (α): $1(x-2)+1(y+1)-1(z-1)=0\Leftrightarrow x+y-z=0$.

Câu 59. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 là

A. $(P):x+5y+8z-16=0$. **B.** $(P):x+5y+8z+16=0$.

C. $(P):x+4y+6z-12=0$. **D.** $(P):2x+y-6=0$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;3;-2)$.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;5;8)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;5;8)$ là $x+5y+8z-16=0$.

Câu 60. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng: $(d):\begin{cases}x=t+2\\y=3t-1\\z=2t+1\end{cases}$ và $(\Delta):\begin{cases}x=m+3\\y=3m-2\\z=2m+1\end{cases}$ có dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính $P=a+2b+3c$.

A. $P=-10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=-8$. **D.** $P=0$.

Lời giải

Ta có $d//\Delta$.

Chọn $A(2;-1;1)\in(d), B(3;-2;1)\in(\Delta)$.

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$

Phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d) và (Δ) qua $A(2;-1;1)$ và có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_{(d)}}\right]=(-2;-2;4)=-2(1;1;-2)$ là:

$1(x-2)+1(y+1)-2(z-1)=0\Leftrightarrow x+y-2z+1=0$.

$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\Rightarrow P=a+2b+3c=1+2.(-2)+3.1=0\\c=1\end{cases}$.

Câu 61. **(Chuyên Trần Đại Nghĩa - 2018)** Tìm tất cả các mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng (P): $2x-z+1=0$ góc $45°$.

A. (α): $3x+z=0$. **B.** (α): $x-y-3z=0$.

C. (α): $x+3z=0$. **D.** (α): $3x+z=0$ hay (α): $8x+5y+z=0$.

Lời giải

d đi qua điểm $O(0;0;0)$ có vtcp $\vec{u}=(1;-1;-3)$.

(α) qua O có vtpt $\vec{n}=(a;b;c)$ có dạng $ax+by+cz=0$, do $\vec{n}.\vec{u}=0\Rightarrow a-b-3c=0$.

(P): $2x-z+1=0$ vtpt $\vec{k}=(2;0;-1)$.

Ta có $\cos 45°=\frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|}=\frac{|2a-c|}{\sqrt{5(a^2+b^2+c^2)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 10(a^2+b^2+c^2)=(4a-2c)^2$

$\Leftrightarrow 10(b^2+6bc+9c^2+b^2+c^2)=(4b+12c-2c)^2\Leftrightarrow 10(2b^2+6bc+10c^2)=(4b+10c)^2$

$\Leftrightarrow 4b^2-20bc=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=5c\end{array}\right.$.

$+\ b=0\Rightarrow a=3c\ \Rightarrow(\alpha)$: $x+3z=0$.

$+\ b=5c$, chọn $c=1\Rightarrow b=5,\ a=8\Rightarrow(\alpha)$: $8x+5y+z=0$.

Câu 62. **(Quảng Nam - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Véctơ nào trong các véctơ dưới đây là một véctơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.

A. $\vec{n}=(1;-1;-1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-1;-3)$. **C.** $\vec{n}=(1;-1;5)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;-5)$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng qua hai điểm A, O có dạng $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$.

Gọi (P) là mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O nên (P): $m(x-y)+nz=0$, $m^2+n^2>0$. Khi đó véctơ pháp tuyến của (P) có dạng $\vec{n}=(m;-m;n)$.

Ta có $d(B,(P))=\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{|m+2n|}{\sqrt{m^2+m^2+n^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2m^2-4mn-n^2=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{n}=1\\\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.$.

Vậy một véctơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó là $\vec{n}=\left(\dfrac{1}{5}n;\dfrac{-1}{5}n;n\right)=\dfrac{n}{5}(1;-1;5)$.

Câu 63. **(Sở Bình Phước - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

A. $14x-4y-8z+1=0$. **B.** $14x-4y-8z+3=0$.

C. $14x-4y-8z-3=0$. **D.** $14x-4y-8z-1=0$.

Lời giải

Ta có $\vec{a}=(2;1;3)$ và $\vec{b}=(2;-1;4)$ là véc tơ chỉ phương của d_1, d_2

Nên $\vec{n}=\vec{a}\wedge\vec{b}=(7;-2;-4)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Do đó $(P):7x-2y-4z+D=0$

Lấy $M(2;2;3)\in d_1$ và $N(1;2;1)\in d_2$.

Do (P) cách đều d_1 và d_2 nên $d(M,(P))=d(N,(P))$.

$\Leftrightarrow\dfrac{|7.2-2.2-4.3+D|}{\sqrt{7^2+2^2+4^2}}=\dfrac{|7.1-2.2-4.1+D|}{\sqrt{7^2+2^2+4^2}}\Leftrightarrow|D-2|=|D-1|\Leftrightarrow D=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $(P):7x-2y-4z+\dfrac{3}{2}=0\Leftrightarrow(P):14x-4y-8z+3=0$.

Câu 64. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa điểm A và đường thẳng d?

A. $(P):5x+2y+4z-5=0$. **B.** $(P):2x+1y+2z-1=0$.

C. $(P):5x-2y-4z-5=0$. **D.** $(P):2x+1y+2z-2=0$.

Lời giải

VTCP của d là $\vec{a}=(2;1;2)$ và $B(1;-2;1)\in d$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(0;-2;1)$.

Do đó véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right]=(5,-2;-4)$.

Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là $5(x-1)-2(y-0)-4(z-0)=0$ hay $5x-2y-4z-5=0$.

Câu 65. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có phương trình $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3},d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1,d_2.

A. $14x+4y+8z+13=0$. **B.** $14x-4y-8z-17=0$.

C. $14x-4y-8z-13=0$. **D.** $14x-4y+8z-17=0$.

Lời giải

Chọn B

d_1,d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{n_1}(2;1;3),\overrightarrow{n_2}(2;-1;4)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(7;-2;-4)$.

Gọi $A(2;2;3)\in d_1,B(1;-2;-1)\in d_2$.

Gọi phương trình mặt phẳng $(P):7x-2y-4z+d=0$.

Do mặt phẳng (P) cần tìm cách đều d_1,d_2 nên

$$d(A,(P))=d(B,(P))\Leftrightarrow\frac{|d-2|}{\sqrt{7^2+2^2+4^2}}=\frac{|15+d|}{\sqrt{7^2+2^2+4^2}}$$

$$\Leftrightarrow|d-2|=|15+d|\Leftrightarrow d-2=-15-d\Leftrightarrow d=-\frac{13}{2}.$$

Vậy $(P):7x-2y-4z-\dfrac{13}{2}=0\Leftrightarrow14x-4y-8z-13=0.$

Câu 66. **(Chuyên KHTN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1;d_2$ là:

A. $2y-2z+1=0$. **B.** $2y-2z-1=0$.

C. $2x-2z+1=0$. **D.** $2x-2z-1=0$.

Lời giải

Ta có: Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(-1;1;1)$ và đường thẳng d_2 đi qua điểm $A(0;1;2)$ có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;1)$

Mặt phẳng (P) song song $d_1;d_2$ nên (P) có VTPT là $n=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(0;-1;1)$

Do đó: Mặt phẳng (P) có dạng $y-z+m=0$

Mặt khác: (P) cách đều hai đường thẳng $d_1;d_2$ nên

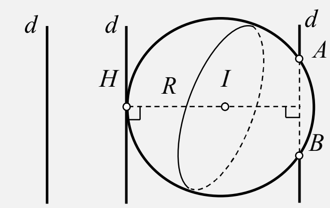
$$d(d_1;(P))=d(d_2;(P))\Leftrightarrow d(A;(P))=d(B;(P))\Leftrightarrow|m|=|m-1|\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$$

Vậy $(P):y-z+\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow2y-2z+1=0$.

Dạng 5. Bài toán liên quan đến vị trí tương đối

1. *Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)*

Cho mặt cầu (S) *có tâm* I*, bán kính* R *và đường thẳng* Δ*. Để xét vị trí tương đối giữa* Δ *và* (S) *ta tính* $d(I,\Delta)$ *rồi so sánh với bán kính* R*.*

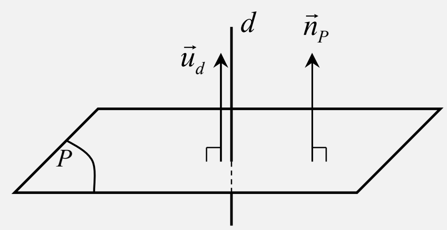


- *Nếu* $d(I,\Delta) > R : \Delta$ *không cắt* (S)*.*
- *Nếu* $d(I,\Delta) = R : \Delta$ *tiếp xúc với* (S) *tại* H*.*
- *Nếu* $d(I,\Delta) < R : \Delta$ *cắt* (S) *tại hai điểm phân biệt* A*,* B*.*
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

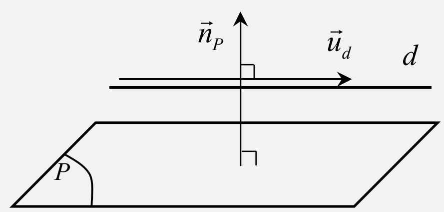
2. *Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)*

Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = x_\circ + a_1 t \\ y = y_\circ + a_2 t \\ z = z_\circ + a_3 t \end{cases}$ *và mặt phẳng* $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x = x_\circ + a_1 t & (1) \\ y = y_\circ + a_2 t & (2) \\ z = z_\circ + a_3 t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} \quad (*)$



- *Nếu* $(*)$ *có nghiệm duy nhất* $\Leftrightarrow d$ *cắt* (α)*.*
- *Nếu* $(*)$ *có vô nghiệm* $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$*.*
- *Nếu* $(*)$ *vô số nghiệm* $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$*.*



3. *Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d’*

Cho hai đường thẳng: $d : \begin{cases} x = x_\circ + a_1 t \\ y = y_\circ + a_2 t \\ z = z_\circ + a_3 t \end{cases}$ *và* $d' : \begin{cases} x = x'_\circ + a'_1 t' \\ y = y_\circ + a'_2 t' \\ z = z_\circ + a'_3 t' \end{cases}$ *lần lượt qua điểm hai điểm* M*,* N *và có véctơ chỉ phương lần lượt là* $\vec{a}_d$*,* $\vec{a}_{d'}$*.*

- d *song song* $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k\vec{a}_{d'} \\ M \notin d' \end{cases}$.
- d *trùng* $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k\vec{a}_{d'} \\ M \in d' \end{cases}$.
- d *cắt* $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d \text{ ko } \uparrow\uparrow \ \vec{a}_{d'} \\ [\vec{a}, \vec{a}'] . \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}$
- d *chéo* $d' \Leftrightarrow [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}] . \overrightarrow{MN} \neq 0$.

Lưu ý: *Nếu* d *cắt* d' *ta tìm tọa độ giao điểm bằng giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x_\circ + a_1 t = x'_\circ + a'_1 t' \\ y_\circ + a_2 t = y'_\circ + a'_2 t' \\ z_\circ + a_3 t = z'_\circ + a'_3 t' \end{cases}$.

Câu 67. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$, $d_2 : \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Xét vị trí tương đói của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau **B.** Trùng nhau **C.** Song song **D.** Cắt nhau

Lời giải

Chọn C

$d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-2}\Rightarrow \overrightarrow{u_1}=(2;1;-2)$; $d_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}\Rightarrow \overrightarrow{u_2}=(-2;-1;2)$

$\overrightarrow{u_1}=-\overrightarrow{u_2}\Rightarrow d_1//d_2\vee d_1\equiv d_2$

Điểm $M(1;0;-2)\in d_1$; $M\notin d_2$ nên $d_1//d_2$

Câu 68. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3},\quad \Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$$

A. Δ_1 song song với Δ_2. **B.** Δ_1 chéo với Δ_2. **C.** Δ_1 cắt Δ_2. **D.** Δ_1 trùng với Δ_2.

Lời giải

Vì $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{2}{-2}$ nên vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;2;3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-1;-2;1)$ của Δ_2. Tức là Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2.

Lấy $M(1;-1;0)\in\Delta_1$, $N(3;3;-2)\in\Delta_2$. Ta có: $\overrightarrow{MN}=(2;4;-2)$.

Khi đó: $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}=0$. Suy ra $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2.

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P). **B.** d vuông góc với (P).

C. d song song với (P). **D.** d nằm trong (P).

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}(1;-3;-1)$

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(3;-3;2)$

Ta có $\vec{u}.\vec{n}=3+9-2=10\neq 0$ nên loại trường hợp $d//(P)$ và $d\subset(P)$.

Lại có $\vec{u}$ và $\vec{n}$ không cùng phương nên loại trường hợp $d\perp(P)$.

Vậy d cắt và không vuông góc với (P).

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):11x+my+nz-16=0$. Biết $\Delta\subset(P)$, tính giá trị của $T=m+n$.

A. $T=2$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=14$. **D.** $T=-14$.

Lời giải

Cách 1: Lấy $\begin{cases}A(0;2;-1)\in\Delta\\ B(-2;3;2)\in\Delta\end{cases}$

Mà $\Delta\subset(P)\Rightarrow\begin{cases}A\in(P)\\ B\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-n-16=0\\ 11.(-2)+3m+2n-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=10\\ n=4\end{cases}$

$\Rightarrow T=m+n=14$.

Cách 2: Đường thẳng Δ đi qua $A(0;2;-1)$ có VTCP $\vec{u}=(-2;1;3)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(11;m;n)$.

$\Delta\subset(P)\Rightarrow\begin{cases}A\in(P)\\ \vec{n}.\vec{u}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-n-16=0\\ -22+m+3n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=10\\ n=4\end{cases}$.

$\Rightarrow T=m+n=14$.

Câu 71. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $m^2x-my-2z+19=0$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d//(\alpha)$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{1;2\}$. **D.** $\{2\}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-1)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(m^2;-m;-2)$.

Để $d//(\alpha)$ thì $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\ M(1;2;9)\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2=0\\ m^2-2m-18+19\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=2\end{array}\right.\\ m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Câu 72. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ song song với mặt phẳng $(P):2x+y-m^2z+m=0$

A. $m=1$. **B.** $m\in\varnothing$ **C.** $m\in\{-1;1\}$. **D.** $m=-1$

Lời giải

Chọn D

Một véctơ chỉ phương của d: $\vec{u}=(1;-1;1)$; $A(1;-1;2)\in d$.

Một véctơ pháp tuyến của (P): $\vec{n}=(2;1;-m^2)$.

$d//(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\ A\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\cdot 2-1\cdot 1-1\cdot m^2=0\\ 2\cdot 1-1-2m^2+m\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m^2=0\\ 1-2m^2+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\pm 1\\ 1-2m^2+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 73. Gọi m,n là hai giá trị thực thỏa mãn: giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m):mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m):x-my+nz+2=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):4x-y-6z+3=0$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=3$.

Lời giải

Chọn D

$(P_m):mx+2y+nz+1=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(m;2;n)$.

$(Q_m):x-my+nz+2=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(1;-m;n)$.

$(\alpha): 4x-y-6z+3=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(4;-1;-6)$.

Do giao tuyến của (P_m) và (Q_n) vuông góc với (α)

$$\Rightarrow \begin{cases}(P_m)\perp(\alpha)\\(Q_n)\perp(\alpha)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\\\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4m-2-6n=0\\4+m-6n=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4m-6n=2\\m-6n=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$$

Vậy $m+n=3$.

Câu 74. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$; $d_2: \begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=m\end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -11. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 11.

Lời giải

d_1 đi qua điểm $M(1;0;0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;1;3)$.

d_2 đi qua điểm $N(1;2;m)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;1;0)$.

$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-3;3;1)$; $\overrightarrow{MN}=(0;2;m)$.

d_1 và d_2 chéo nhau khi và chỉ khi $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -6$.

Mặt khác $d(d_1,d_2)=\dfrac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \dfrac{\left|[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\right|}=\dfrac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \dfrac{|m+6|}{\sqrt{19}}=\dfrac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-11\end{array}\right.$.

Khi đó tổng các phần tử của m là -12.

Câu 75. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $(d_1): \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $(d_2): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, $(d_3): \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $(d_4): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là:

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1=(3;-1;-1)$ và có một véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2=(0;0;1)$ và có một véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;1)$.

Do $\overrightarrow{u_1}=\vec{u}_2$ và $M_1\notin d_1$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3;1;2)$, $\left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=(-5;-5;-5)=-5(1;1;1;)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2 khi đó (α) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (α) là $x+y+z-1=0$.

Gọi $A=d_3\cap(\alpha)$ thì $A(1;-1;1)$. Gọi $B=d_4\cap(\alpha)$ thì $B(-1;2;0)$.

Do $\overrightarrow{AB}=(-2;3;-1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;1)$ nên đường thẳng AB cắt hai đường thẳng d_1 và d_2.

Câu 76. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(1;-1;0)$ **B.** $H(-3;0;-2)$ **C.** $H(-1;4;4)$ **D.** $H(3;0;2)$

Lời giải

Chọn D

Tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$.

Tọa độ điểm H là giao điểm của d và (P), ta có:

$2(1+2t)-2(2-2t)-(3-t)-4=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy $H(3;0;2)$.

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

$\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng OH $\Rightarrow OH: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=2t \end{cases}$

$\Rightarrow H(t;-2t;2t)$

$H \in (P) \Rightarrow t-2.(-2t)+2.2t+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(-1;2;-2) \Rightarrow a+b+c=-1$

Câu 78. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Bán kính của (S) bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $H(1+2t;-t;t)$ là hình chiếu của I trên đường thẳng d.

Có $\overrightarrow{IH}=(2t;-t;t-2)$; vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;-1;1)$.

Vì H là hình chiếu vuông góc của I trên d nên $\overrightarrow{IH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow 2t.2+(-t).(-1)+(t-2).1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IH}=\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow IH=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=IH=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$, đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M, song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $2x-2y+5z-22=0$. **B.** $2x+y+2z-13=0$.

C. $2x+y-2z-1=0$. **D.** $2x-y+2z-7=0$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $\vec{n}=(2a;b;c)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần lập, $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-3;2;2)$.

Mặt phẳng (P) song song với Δ nên ta có $\vec{n}.\vec{u}=0\Leftrightarrow -6a+2b+2c=0\Leftrightarrow c=3a-b$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên phương trình có dạng:

$2a(x-4)+b(y-3)+(3a-b)(z-1)=0 \Leftrightarrow 2ax+by+(3a-b)z-11a-2b=0$ (*)

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=1$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,(P))=1\Leftrightarrow \dfrac{3|b|}{\sqrt{4a^2+b^2+(3a-b)^2}}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3|b|}{\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}}=1\Leftrightarrow 3|b|=\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}$.

$\Leftrightarrow 9b^2=13a^2+2b^2-6ab\Leftrightarrow 13a^2-6ab-7b^2=0\Leftrightarrow (a-b)(13a+7b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 13a=-7b \end{array}\right.$.

Với $a=b$, chọn $a=1,b=1$, thay vào (*) ta được pt $(P_1):2x+y+2z-13=0$.

Ta có $N(6;2;2)\in\Delta$. Dễ thấy $N\notin(P_1)$, suy ra $(P_1):2x+y+2z-13=0$ song song với Δ.

Với $13a=-7b$, chọn $a=7,b=-13$, thay vào (*) ta được pt $(P_2):14x-13y+34z-51=0$.

Ta có $N(6;2;2)\in\Delta$, dễ thấy $N\notin(P_2)$, suy ra $(P_2):14x-13y+34z-51=0$ song song với Δ.

Vậy **chọn B.**

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

Vì (P) đi qua $M(4;3;1)$ nên phương án **A, C** bị loại.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;2;2)$. (P) song song với đường thẳng Δ nên $\vec{n}.\vec{u}=0$. Do đó phương án **D** bị loại.

Vậy phương án **B** là phương án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 80. **(Mã 104 2018)** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$ và điểm $A(-1;-1;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

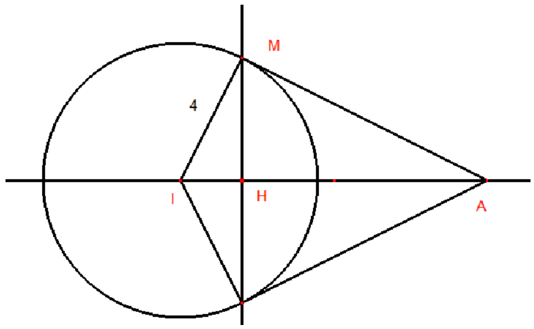
A. $6x+8y+11=0$ **B.** $6x+8y-11=0$ **C.** $3x+4y-2=0$ **D.** $3x+4y+2=0$

Lời giải

Chọn C

(S) có tâm $I(2;3;-1)$; bán kính $R=4$

$A(-1;-1;-1)\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)$, tính được $IA=5$.



Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2=IH.IA\Rightarrow IH=\dfrac{IM^2}{IA}=\dfrac{16}{5}$, từ đó tính được $\overrightarrow{IH}=\dfrac{16}{25}\overrightarrow{IA}$ tìm được $H\left(\dfrac{2}{25};\dfrac{11}{25};-1\right)$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $-3\left(x-\dfrac{2}{25}\right)-4\left(y-\dfrac{11}{25}\right)=0\Leftrightarrow 3x+4y-2=0$.

Câu 81. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$; $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A. $y+z+3=0$ **B.** $x+z+1=0$ **C.** $x+y+1=0$ **D.** $x+z-1=0$

Lời giải.

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1-2)$; $R=\sqrt{2}$.

Véctơ chỉ phương của d: $\vec{u}_d=(1;2;-1)$. Véctơ chỉ phương của Δ: $\vec{u}_\Delta=(1;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $\left[\vec{u}_d,\vec{u}_\Delta\right]=(-1;0;-1)$ nên chọn một véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;0;1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng: $x+z+D=0$.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I;(P))=R\Leftrightarrow \dfrac{|-1-2+D|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |D-3|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=5\\D=1\end{array}\right.$.

Chọn (P): $x+z+1=0$.

Câu 82. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x-y+2z=0$. **B.** $-2x+2y-z+4=0$.

C. $x+y+z=0$ **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(3;1;-4)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-3;1)$ và bán kính $R=3$.

Vì (P) chứa d nên $\vec{u}.\vec{n}=0$ và (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I;(P))=3$.

Ta chỉ xét phương trình $\vec{u}.\vec{n}=0$. Lấy hai điểm nằm trên đường thẳng d là $M(4;0;-4)$ và $N(1;-1;0)$.

Ta nhận thấy: $M(4;0;-4)$ và $N(1;-1;0)$ không thỏa mãn đáp án $A;B;C$.

Vậy, đáp án là D.

Câu 83. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$, $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$ **C.** $x+y+2z+9=0$ **D.** $x-y+2z+9=0$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 có vtcp $\overrightarrow{u_1}(3;-1;-1)$, đường thẳng d_2 có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1;1;-1)$. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (α) cần tìm. Do (α) song song với hai đường thẳng d_1,d_2 nên $\vec{n}\perp\overrightarrow{u_1}$ và $\vec{n}\perp\overrightarrow{u_2}$, từ đó ta chọn $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(2;2;4)$. Suy ra $(\alpha):x+y+2z+c=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

(α) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d(I;(\alpha))=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|c-3|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c-3=6\\c-3=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=9\\c=-3\end{array}\right.$.

Câu 84. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P):2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases}x=2+9t\\y=1+9t\\z=3+8t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2-5t\\y=1+3t\\z=3\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2+4t\\y=1+3t\\z=3-3t\end{cases}$

Lời giải

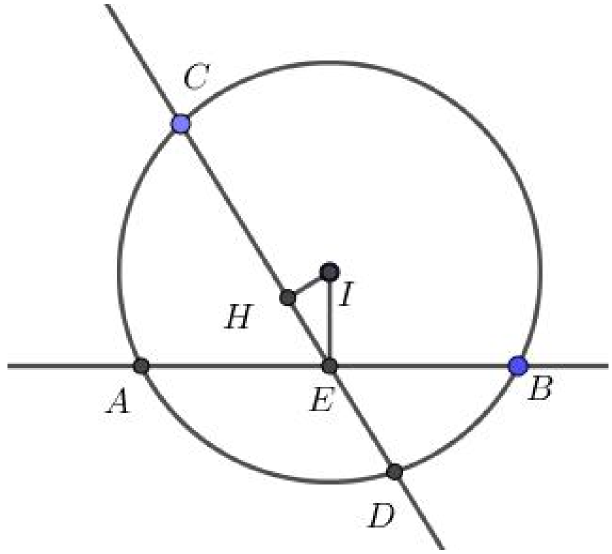
Chọn C

Ta có tâm và bán kính mặt cầu (S) là $I(3;2;5);R=6$

$IE=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}<R$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua E

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ



Dây cung càng nhỏ khi khoảng cách từ tâm tới đường thẳng Δ càng lớn

Ta có $d\left(I,\Delta\right)=IH\le IE$

Vậy dây cung nhỏ nhất khi đường thẳng Δ vuông góc với $\overrightarrow{IE}=\left(-1;-1;;-2\right)$

Dựa vào các đáp án ta thấy trong các vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\left(9;9;8\right)$ $\overrightarrow{u_3}=\left(-5;3;0\right)$ $\overrightarrow{u_3}=\left(1;-1;0\right)$ $\overrightarrow{u_4}=\left(4;3;-3\right)$

Thì chỉ có $\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{IE}=0$

Nhận xét: ta hoàn toàn có thể viết được pt đường thẳng Δ bằng cách viết pt mặt phẳng $\left(Q\right)$ đi qua E nhận $\overrightarrow{IE}=\left(-1;-1;;-2\right)$ làm một vecto pháp tuyến, khi đó $\Delta=\left(P\right)\cap\left(Q\right)$

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$ có phương trình lần lượt là $\left(S_1\right):x^2+y^2+z^2=25$, $\left(S_2\right):x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=\left(1;-1;0\right)$ tiếp xúc với mặt cầu $\left(S_2\right)$ và cắt mặt cầu $\left(S_1\right)$ theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d?

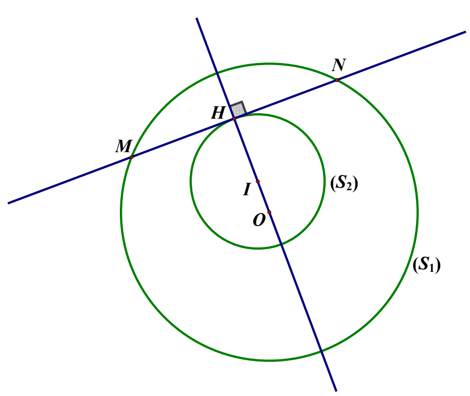
A. $\vec{u}_1=\left(1;1;\sqrt{3}\right)$ **B.** $\vec{u}_2=\left(1;1;\sqrt{6}\right)$ **C.** $\vec{u}_3=\left(1;1;0\right)$ **D.** $\vec{u}_4=\left(1;1;-\sqrt{3}\right)$

Lời giải

Mặt cầu $\left(S_1\right)$ có tâm $O\left(0;0;0\right)$, bán kính $R_1=5$.

Mặt cầu $\left(S_2\right)$ có tâm $I\left(0;0;1\right)$, bán kính $R_2=2$.

Có $OI=1<R_1-R_2$ nên $\left(S_2\right)$ nằm trong mặt cầu $\left(S_1\right)$.



Giả sử d tiếp xúc với $\left(S_2\right)$ tại H và cắt mặt cầu $\left(S_1\right)$ tại M, N. Gọi K là trung điểm MN.

Khi đó $IH = R_2 = 2$ và $OH \ge OK$.

Theo giả thiết $MN = 8 \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow OK = \sqrt{R_1^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Có $OI = 1$, $IH = 2 \Rightarrow OK = OI + IH \ge OH \ge OK$. Do đó $OH = OK$, suy ra $H \equiv K$, tức d vuông góc với đường thẳng OI.

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1;-1;0)$ và vuông góc với $\overrightarrow{OI} = (0;0;1)$ nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = \left[\overrightarrow{OI}, \vec{u}\right] = (1;1;0)$.

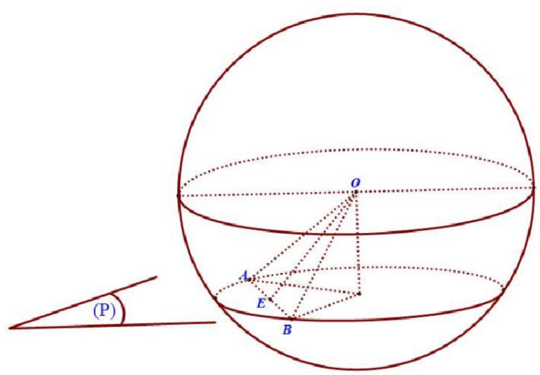
Câu 86. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;\,0;0)$ bán kính $R = 2$. Tam giác OAB là tam giác đều có cạnh bằng 2.

Gọi M là trung điểm AB ta có $OM = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, mặt khác $\overrightarrow{OE}(1;1;1) \Rightarrow OE = \sqrt{3}$. Vậy điểm M trùng điểm E. Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ ta có: $\vec{u} \perp \overrightarrow{OE}$ và $\vec{u} \perp \vec{n}$ (với $\vec{n}(1;-3;5)$ là vectơ pháp tuyến của (P) vì $\Delta \subset (P)$).

$\left[\vec{n}, \overrightarrow{OE}\right] = (-8;4;4)$, chọn $\vec{u} = -\dfrac{1}{4}\left[\vec{n}, \overrightarrow{OE}\right] = (2;-1;-1)$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua E, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;-1;-1)$ có phương trình là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (a;1;2)$. Giá trị của a sao cho đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 là

A. $a=-1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=0$. **D.** $a=1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của đường thẳng d_1 là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$.

Phương trình tham số đường thẳng d_2 qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(a;1;2)$ là:

$d_2:\begin{cases} x=1+at' \\ y=0+t' \\ z=-1+2t' \end{cases}$

d_1 nhận $\vec{u}=(1;-2;1)$ làm vectơ chỉ phương và d_2 nhận $\vec{v}=(a;1;2)$ làm vectơ chỉ phương

Đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} 1+t=1+at' \\ 2-2t=0+t' \\ 3+t=-1+2t' \end{cases}$ có đúng một nghiệm.

Ta có:

$$\begin{cases} 1+t=1+at' \\ 2-2t=0+t' \\ 3+t=-1+2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-at'=0 \\ -2t-t'=-2 \\ t-2t'=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t'=2 \\ 0-a.2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t'=2 \\ a=0 \end{cases}.$$

Vậy $a=0$.

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1, (S_2):x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$ và $(S_3):x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

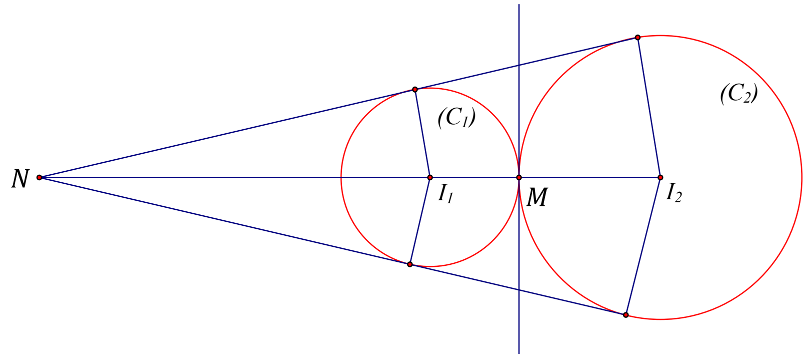
Chọn A

Ta có: $(S_1):\begin{cases} I_1(-3;2;4) \\ R_1=1 \end{cases}$, $(S_2):\begin{cases} I_2(0;2;4) \\ R_2=2 \end{cases}$, $(S_3):\begin{cases} I_3(-2;2;0) \\ R_2=3 \end{cases}$

$\Rightarrow I_1I_2=3=R_1+R_2 \Rightarrow (S_1),(S_2)$ tiếp xúc với nhau tại M.

Ta có $\overrightarrow{MI_2}=2\overrightarrow{I_1M}=\frac{2}{3}\overrightarrow{I_1I_2} \Rightarrow M(-2;2;4)$

Cắt hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ theo phương chứa đường nối tâm của chúng ta có thiết diện là hai đường tròn lớn $(C_1),(C_2)$.



Trường hợp 1: Mặt phẳng qua M vuông góc với I_1I_2 có phương trình là $(\alpha): x+2=0$ mà $d(I_3;(\alpha))=0 \Rightarrow (\alpha)$ không tiếp xúc với $(S_3) \Rightarrow$ **LOẠI.**

Trường hợp 2: N là tâm vị tự ngoài của $(C_1),(C_2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{NI_2}=2\overrightarrow{NI_1}=2\overrightarrow{I_1I_2} \Rightarrow N(-6;2;4)$.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu. (P) qua N và có vtpt là $\vec{n}(1;a;b)$

$\Rightarrow (P): x+6+a(y-2)+b(z-4)=0 \Leftrightarrow (P): x+ay+bz-2a-4b+6=0$.

Có: $\begin{cases} d(I_1;(P))=1 \\ d(I_2;(P))=2 \\ d(I_3;(P))=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\sqrt{1+a^2+b^2} \\ 6=2\sqrt{1+a^2+b^2} \\ |4b-4|=3\sqrt{1+a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{13}{4} \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Với $b=\dfrac{13}{4} \Rightarrow a^2=-\dfrac{41}{16}$ (loại)

Với $b=-\dfrac{5}{4} \Rightarrow a^2=\dfrac{103}{16} \Rightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{103}}{4}$

Vậy có 2 mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(1;2;-1)$.

C. $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm I thuộc đường thẳng d nên có tọa độ dạng: $I(1+2t;-t;-2+t)$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oy nên $d(I,Oy)=R \Leftrightarrow \sqrt{(1+2t)^2+(-2+t)^2}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{5t^2+5}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $I(5;-2;0)$ (Loại).

Với $t=-2$ ta có $I(-3;2;-4)$ (Thỏa mãn).

Nên mặt cầu (S) có phương trình là: $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$.

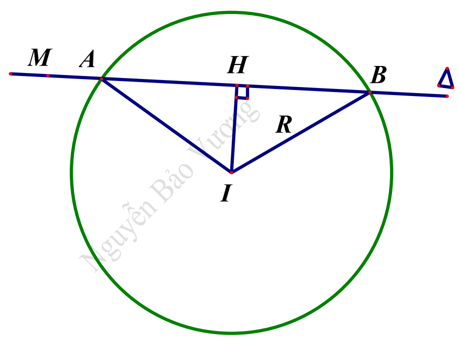
Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt cầu, nhận thấy điểm $N(1;2;-1)$ thỏa mãn.

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=4+2t \\ y=3+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=8$. Giá trị của m là

A. $m=5$. **B.** $m=12$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=-10$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow IH \perp AB$, $HA=4$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$, bán kính $R=\sqrt{13-m}$, $(m<13)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(4;3;3)$ và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(6;0;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-3;-6;6) \Rightarrow IH=d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3$.

Ta có: $R^2=IH^2+HA^2 \Leftrightarrow 13-m=3^2+4^2 \Leftrightarrow m=-12$.

Câu 91. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x=4-2t \\ y=t \\ z=3 \end{cases}, (t\in\mathbb{R}), d_2: \begin{cases} x=1 \\ y=t' \\ z=-t' \end{cases}, (t'\in\mathbb{R})$.

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ là:

A. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{9}{4}$. **B.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{3}{2}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$. **D.** $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với $(d_1),(d_2)$ là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$. Lấy $A(4-2t;t;3)\in d_1; B(1;t';-t')\in d_2$. A,B là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_2}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5t+t'=-6\\ -t+2t'=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\ t'=-1\end{cases}$.

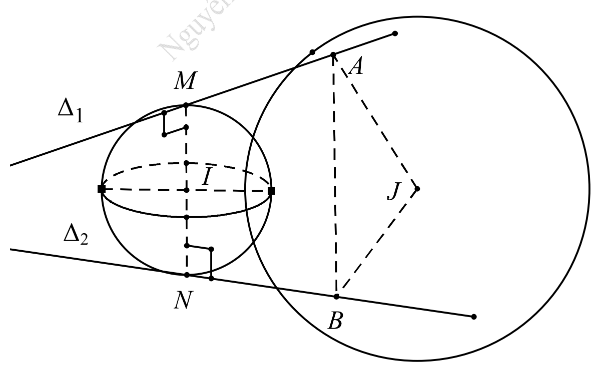
Khi đó $A(2;1;3); B(1;-1;1)$. Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$, bán kính $R=\frac{3}{2}$.

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\Delta_1:\begin{cases}x=4+3t_1\\ y=1-t_1\\ z=-5-2t_1\end{cases}$, $\Delta_2:\begin{cases}x=2+t_2\\ y=-3+3t_2\\ z=t_2\end{cases}$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$, gọi $\vec{u}_1(3;-1;-2),\vec{u}_2(1;3;1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng.

Gọi $M\in\Delta_1\Rightarrow M(4+3t_1;1-t_1;-5-2t_1); N\in\Delta_2\Rightarrow N(2+t_2;3t_2-3;t_2)$.

Suy $\overrightarrow{MN}=(t_2-3t_1-2;3t_2+t_1-4;t_2+2t_1+5)$.

MN là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\vec{u}_1=0\\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7t_1+t_2=-6\\ 2t_1+11t_2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=-1\\ t_2=1\end{cases}$.

$\overrightarrow{MN} = (2;-2;4) \Rightarrow MN = 2\sqrt{6}.$

Giả sử (S) là mặt cầu tâm J đường kính d tiếp xúc với lần lượt Δ_1, Δ_2 tại A, B. Khi đó $JA + JB \geq AB$. Hay $d \geq AB \geq MN \Rightarrow d \geq MN$. Vậy đường kính d nhỏ nhất khi $d = MN$. Suy ra mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất $r = \dfrac{MN}{2} = \sqrt{6}$.

Cách khác

Hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa Δ_1, Δ_2 là (P), (Q). Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sẽ tiếp xúc với $(P),(Q)$ nên đường kính cầu là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ hay là khoảng cách từ Δ_2 đến (P).

Gọi $\vec{u}_1(3;-1;-2), \vec{u}_2(1;3;1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng, $N(2;-3;0) \in \Delta_2$.

$\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = (5;-5;10) \Rightarrow \vec{n}_P = (1;-1;2)$, phương trình $(P): x - y + 2z + 7 = 0$.

$d((P),(Q)) = d(\Delta_2,(P)) = d(N,(P)) = \dfrac{|2+3+7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{6}$. Suy ra bán kính cần tìm là $\sqrt{6}$