Chuyên đề 15 BÀI TOÁN CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Mã 102 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,23\text{m}^3$ **B.** $2,48\text{m}^3$ **C.** $1,57\text{m}^3$ **D.** $1,11\text{m}^3$

Lời giải

Chọn C

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h=\dfrac{6,7-2x^2}{6x}$,

ta có $h>0$ nên $x<\sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$.

Thể tích bể cá là $V(x)=\dfrac{6,7x-2x^3}{3}$ và $V'(x)=\dfrac{6,7-6x^2}{3}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$		$\sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$1,57m^3$	$\searrow$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57\text{m}^3$.

Câu 2. **(Mã 104 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5,5\ m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?:

A. $1,40\ m^3$ **B.** $1,01\ m^3$ **C.** $1,51\ m^3$ **D.** $1,17\ m^3$

Lời giải

Chọn D

Gọi $x,2x,h$ lần lượt là chiều rộng, dài, cao của bể cá.

Ta có $2x^2+2(xh+2xh)=5,5 \Leftrightarrow h=\dfrac{5,5-2x^2}{6x}$ (Điều kiện $0<x<\sqrt{\dfrac{5,5}{2}}$).

Thể tích bể cá $V=2x^2.\dfrac{5,5-2x^2}{6x}=\dfrac{1}{3}(5,5x-2x^3)$.

$V'=\dfrac{1}{3}(5,5-6x^2)$. $V'=0 \Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{5,5}{6}}$.

Lập BBT suy ra $V_{\max}=\dfrac{11\sqrt{33}}{54}\approx 1,17\ m^3$.

Câu 3. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là $125m^3$. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

A. $3,12\,\text{m}$ **B.** $3,82\text{m}$ **C.** $3,62\text{m}$ **D** $3,42\text{m}$

Lời giải

Chọn B

Gọi chiều rộng hình hộp là a suy ra chiều dài là $3a$, chiều cao là h

$V = a.3a.h = 3a^2h \Rightarrow h = \dfrac{V}{3a^2} = \dfrac{125}{3a^2}$

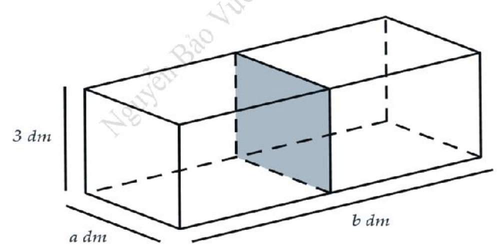
Diện tích thi công $S_{tc} = a.3a + 2\left(a.h\right) + 2\left(3a.h\right) = 3a^2 + 2ah + 6ah = 3a^2 + 2a.\dfrac{125}{3a^2} + 6a.\dfrac{125}{3a^2} = 3a^2 + \dfrac{1000}{3a}$

Áp dụng BĐT Cosi ta có $3a^2 + \dfrac{1000}{3a} = 3a^2 + \dfrac{500}{3a} + \dfrac{500}{3a} \geq 3\sqrt[3]{3a^2.\dfrac{500}{3a}.\dfrac{500}{3a}} = \sqrt[3]{\dfrac{750000}{9}}$

Diện tích thi công nhỏ nhất khi $3a^2 = \dfrac{500}{3a} = \dfrac{500}{3a} \Leftrightarrow 9a^3 = 500 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{500}{9}} \approx 3,82$

Ghi chú: Chúng ta có thể dung Phương pháp hàm số để tìm min của bài toán.

Câu 4. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72\,\text{dm}^3$, chiều cao là $3\,\text{dm}$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a,b (đơn vị dm) như hình vẽ. Tính a,b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



A. $a = \sqrt{24}\,\text{dm}$; $b = \sqrt{24}\,\text{dm}$. **B.** $a = 6\,\text{dm}$; $b = 4\,\text{dm}$.

C. $a = 3\sqrt{2}\,\text{dm}$; $b = 4\sqrt{2}\,\text{dm}$. **D.** $a = 4\,\text{dm}$; $b = 6\,\text{dm}$.

Lời giải

Thể tích của bể cá: $V = 3ab = 72\,\text{dm}^3 \Leftrightarrow b = \dfrac{72}{3a} = \dfrac{24}{a}$, với $a,b > 0$.

Diện tích kính để làm bể cá như hình vẽ:

$S = 3.3a + 2.3b + ab = 9a + 6.\dfrac{24}{a} + a.\dfrac{24}{a} = 9a + \dfrac{144}{a} + 24 \geq 2\sqrt{9a.\dfrac{144}{a}} + 24 \Leftrightarrow S \geq 96$.

$S = 96 \Leftrightarrow 9a = \dfrac{144}{a} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow b = 6$.

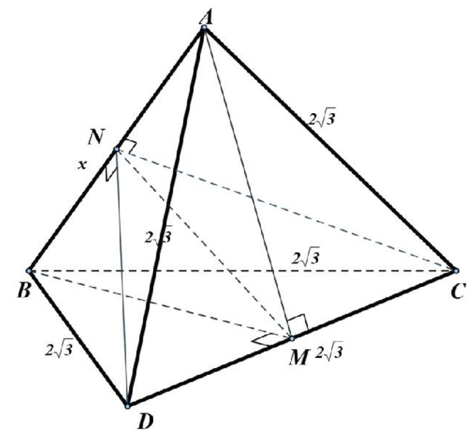
Vậy để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất thì $a = 4\,\text{dm}$; $b = 6\,\text{dm}$.

Câu 5. **(Mã 110 2017)** Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{14}$ **B.** $x = 3\sqrt{2}$ **C.** $x = \sqrt{6}$ **D.** $x = 2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD\perp MB \\ CD\perp MA \end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp (MAB)\Rightarrow \left\{\begin{matrix} CD\perp MN \\ CD\perp AB \end{matrix}\right.$.

Tam giác MAB cân tại M nên $MN\perp AB$.

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)=\dfrac{1}{6}x.2\sqrt{3}.MN.\sin 90^\circ$

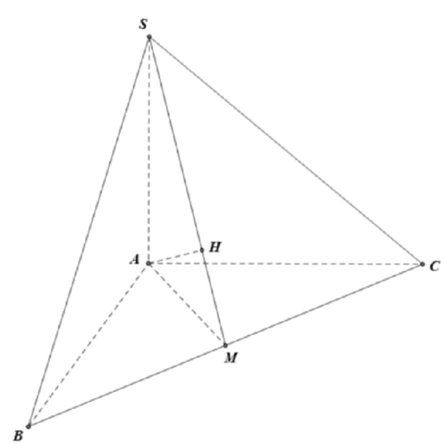
$=\dfrac{1}{6}x.2\sqrt{3}.\sqrt{3^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x.\sqrt{36-x^2}\le \dfrac{\sqrt{3}}{6}.\left[\dfrac{x^2+(36-x^2)}{2}\right]=3\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\sqrt{36-x^2}\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}$.

Câu 6. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), giá trị $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Đặt $SA=h, AB=AC=a$. Ta có

$d(A;(SBC))=AH=3;\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{h^2}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^4h^2}}\Rightarrow a^2h\ge 6$.

$\widehat{((SBC),(ABC))}=\widehat{SMA}=\alpha$.

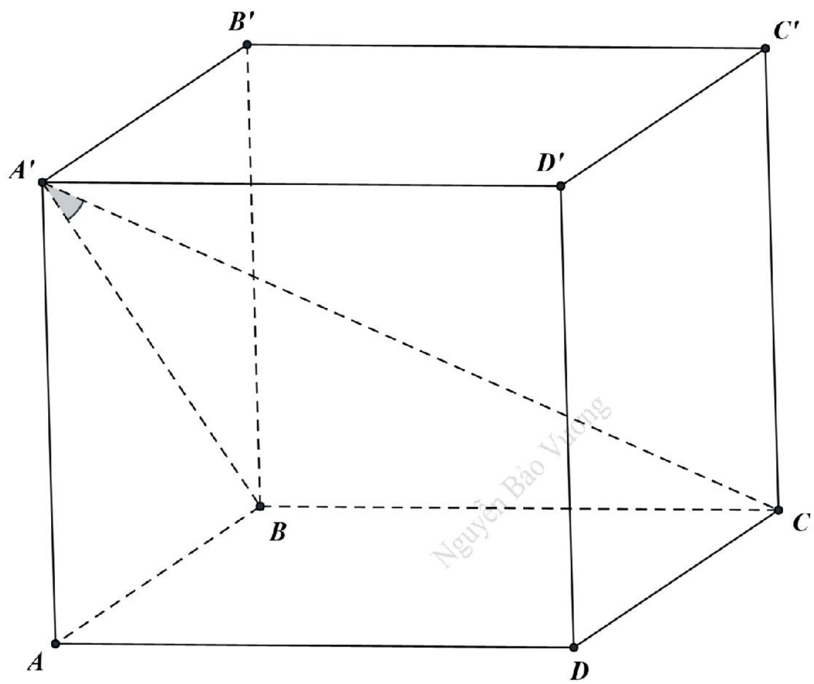
$V_{S.ABC}=\frac{1}{6}a^2h\geq 1$. Thể tích nhỏ nhất bằng 1 khi $a=h\Rightarrow SM=a\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{AM}{SM}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=x$, $AD=1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ bằng $30°$. Tìm giá trị lớn nhất V_{max} của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V_{max}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V_{max}=\frac{1}{2}$. **D.** $V_{max}=\frac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có $\left.\begin{array}{l}BC\perp BB'\\BC\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow CB\perp\left(ABB'A'\right)\Rightarrow A'B$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ là góc $\left(A'B,A'C\right)=\widehat{BA'C}$ (vì $\widehat{BA'C}$ nhọn do $\Delta BA'C$ vuông tại B). Vậy $\widehat{BA'C}=30°$.

Ta có $A'B=\frac{BC}{\tan\widehat{BA'C}}=\frac{1}{\tan 30°}=\sqrt{3}$; $A'A=\sqrt{A'B^2-AB^2}=\sqrt{3-x^2}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=AB.AD.AA'=x\sqrt{3-x^2}\leq\frac{x^2+\left(3-x^2\right)}{2}=\frac{3}{2}$.

Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow x=\sqrt{3-x^2}\Leftrightarrow x^2=3-x^2=x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ (vì $x>0$).

Vậy $V_{max}=\frac{3}{2}$.

Câu 8. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2019. Ông A đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x là?

A. $h=2, x=4$. **B.** $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, x=4$. **C.** $h=2,\ x=1$. **D.** $h=4,\ x=2$.

Lời giải

Ta có thể tích chiếc hộp: $V=x^2h=32$ (đvtt), với $x,h>0$. Suy ra $h=\dfrac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S=2x^2+8xh\ =2x^2+8x.\dfrac{32}{x^2}=2x^2+\dfrac{256}{x}$.

Cách 1

Ta có $2x^2+\dfrac{256}{x}=2x^2+\dfrac{128}{x}+\dfrac{128}{x}\geq 3\sqrt[3]{2x^2.\dfrac{128}{x}.\dfrac{128}{x}}=96$ (BĐT AM-GM).

Đẳng thức xảy ra khi $2x^2=\dfrac{128}{x}$ hay $x=4$, khi đó $h=2$.

Cách 2.

Xét hàm số $f\left(x\right)=2x^2+\dfrac{256}{x}$ với $x>0$.

Ta có $f'\left(x\right)=4x-\dfrac{256}{x^2}=\dfrac{4x^3-256}{x^2}$, $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 4x^3-256 \Leftrightarrow x=4$; $f\left(4\right)=96$.

BBT

x		0		4		$+\infty$
$f'\left(x\right)$			$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$		$+\infty$	$\searrow$	96	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt GTNN tại $x=4$, khi đó $h=2$.

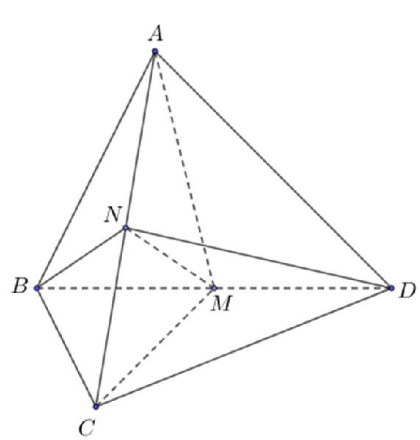
Vậy phương án A đúng.

Câu 9. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB=BC=CD=DA=1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$ **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC. Đặt $BD = 2x$, $AC = 2y$ $(x, y > 0)$.

Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp (AMC)$.

Ta có $MA = MC = \sqrt{1-x^2}$, $MN = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $S_{AMC} = \frac{1}{2}MN.AC = \frac{1}{2}y.\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.DB.S_{AMC} = \frac{1}{3}.2x.y\sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^2.y^2.\left(1-x^2-y^2\right)} \le \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2+1-x^2-y^2\right)^3}{27}}$$

$\Rightarrow V_{ABCD} \le \frac{2\sqrt{3}}{27}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

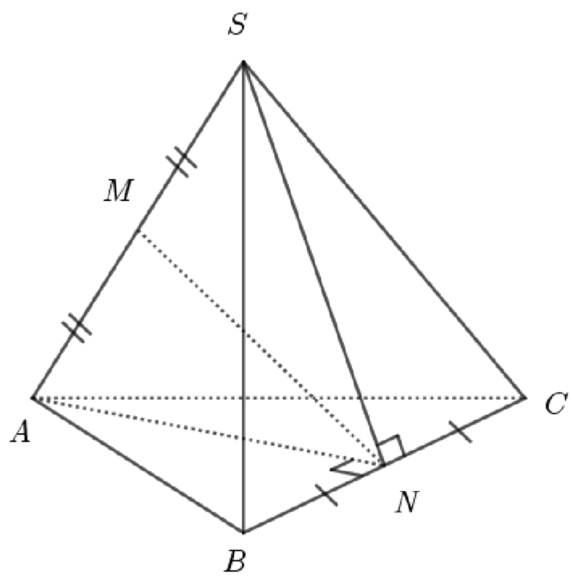
Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

Câu 10. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có $SA = x, SB = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $SABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **D.** $4\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và đặt $2a = x, 2b = y.$

$BC \perp AN, BC \perp SN \Rightarrow BC \perp (SAN)$

$$V_{SABC} = V_{BSAN} + V_{CSAN} = 2V_{BSAN} = \frac{1}{3}BC.S_{SAN}$$

$$AN^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 1 - b^2 \Rightarrow MN^2 = AN^2 - MA^2 = 1 - b^2 - a^2$$

$$\Rightarrow S_{SAN} = \frac{1}{2}SA.NM = a\sqrt{1-a^2-b^2}$$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}2ab\sqrt{1-a^2-b^2} \Rightarrow V^2{}_{SABC} = \frac{1}{9}.4a^2b^2.\left(1-a^2-b^2\right) \le \frac{4}{9}.\left(\frac{a^2+b^2+1-a^2-b^2}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow V^2{}_{SABC} \le \frac{4}{243}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2 = 1 - a^2 - b^2 \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + y = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 11. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $6\sqrt{6}$ **C.** $24\sqrt{3}$ **D.** $16\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

+) Gọi độ dài $AB = a, AD = b$ và $AA' = c$

Ta có tổng diện tích tất cả các mặt là 36 nên $2ab + 2bc + 2ca = 36 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 18\ (1)$

Do độ dài đường chéo AC' bằng 6 nên $a^2 + b^2 + c^2 = 36\ (2)$

+) Thể tích khối hộp là $V = abc$

Ta có $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 72 \Leftrightarrow a + b + c = 6\sqrt{2}$

Từ $(1) \Leftrightarrow ab = 18 - c(a+b) = 18 - c\left(6\sqrt{2} - c\right) = c^2 - 6\sqrt{2}c + 18$

Nên $V = abc = c^3 - 6\sqrt{2}c^2 + 18c = f(c)$, $c \in \left(0; 6\sqrt{2}\right)$

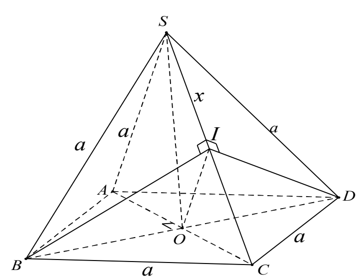
Ta có $f'(c) = 3c^2 - 12\sqrt{2}c + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 3\sqrt{2} \\ c = \sqrt{2} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta được $\underset{\left(0;6\sqrt{2}\right)}{Max} V = f\left(\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{3}\right)$, các cạnh còn lại đều bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{m}}{n}$ $\left(m, n \in \mathbb{N}^*\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m + 2n = 10$. **B.** $m^2 - n = 30$. **C.** $2n^2 - 3m < 15$. **D.** $4m - n^2 = -20$.

Lời giải



□ Gọi I là trung điểm SC, $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp SC \\ DI \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \perp SC$

Mà $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$

Khi đó, $BD \perp (SAC)$.

□ $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2V_{B.SAC}$.

□ $AO^2 = AB^2 - BO^2 = AB^2 - \left(BI^2 - OI^2\right) = AB^2 - \left(SB^2 - SI^2\right) + OI^2 = \dfrac{x^2 + a^2}{4}$

$\Rightarrow AC^2 = 4AO^2 = x^2 + a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

□ $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{B.SAC} = 2\cdot\dfrac{1}{3}BO\cdot\dfrac{1}{2}SA\cdot SC = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}\cdot a\cdot x = \dfrac{ax\sqrt{3a^2-x^2}}{6}$.

□ Ta có $x\sqrt{3a^2-x^2} = \sqrt{x^2.\left(3a^2-x^2\right)} \le \dfrac{x^2+\left(3a^2-x^2\right)}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} \le \dfrac{a^3}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

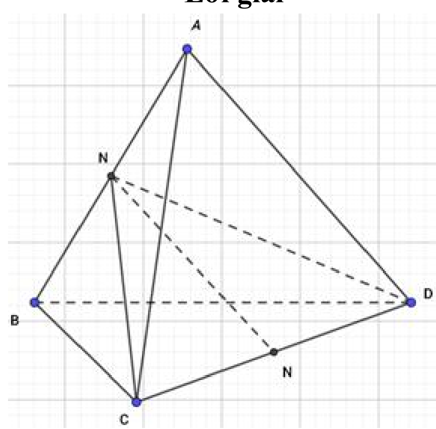
Vậy, thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow m = 6; n = 2$

$\Rightarrow m + 2n = 10$.

Câu 13. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $CD = y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Tam giác ADB, CAB là hai tam giác cân cạnh đáy AB nên $DM \perp AB$ và $CM \perp AB$. Suy ra $AB \perp (MCD)$.

$V_{ABCD} = V_{B.MCD} + V_{A.MCD} = \dfrac{1}{3}.BM.S_{MCD} + \dfrac{1}{3}.AM.S_{MCD} = \dfrac{x}{3}.S_{MCD}$.

Tam giác $\Delta ABC = \Delta ABD(c.c.c)$ nên $CM = DM \Rightarrow MN \perp CD$.

$S_{MCD} = \dfrac{1}{2}.CD.MN = \dfrac{1}{2}y.\sqrt{MC^2 - CN^2} = \dfrac{1}{2}y.\sqrt{\left(BC^2 - BM^2\right) - CN^2} = \dfrac{1}{2}y\sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4}}$

$= \dfrac{1}{4}y\sqrt{16 - \left(x^2 + y^2\right)}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{xy}{12}\sqrt{16 - \left(x^2+y^2\right)} \le \dfrac{xy}{12}\sqrt{16 - 2xy} = \dfrac{1}{12}\sqrt{xy.xy.(16 - 2xy)}$

$\le \dfrac{1}{12}\sqrt{\left(\dfrac{xy + xy + (16 - 2xy)}{3}\right)^3} = \dfrac{1}{12}\sqrt{\left(\dfrac{16}{3}\right)^3}$.

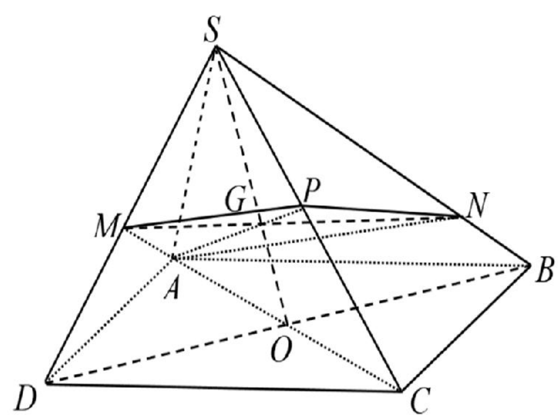
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 16 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = \dfrac{16}{3} \end{cases}$.

Vậy thể tích $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $xy = \dfrac{16}{3}$.

Câu 14. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{1}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = AP \cap SO$, suy ra G là trọng tâm tam giác SAC.

Gọi (P) là mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N.

Dễ thấy: $\begin{cases} (P) \cap (SBD) = MN \\ (P) \cap (SAC) = AP \\ (SBD) \cap (SAC) = SO \end{cases} \Rightarrow MN$, AP, SO đồng quy hay M, N, G thẳng hàng.

Đặt: $x = \dfrac{SM}{SD}$ $(0 < x \le 1)$ và $y = \dfrac{SN}{SB}$ $(0 < y \le 1)$.

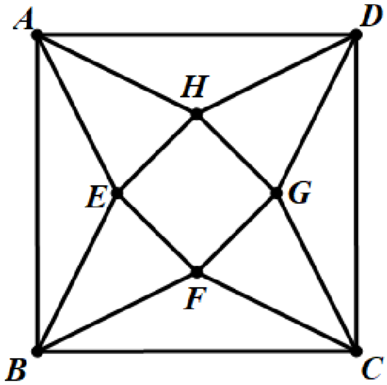
$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}} + \dfrac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABP}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SD}.\dfrac{SP}{SC} + \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC}\right) = \dfrac{1}{4}(x+y)$.

Từ tỷ lệ: $\dfrac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBD}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{\Delta SMG}}{S_{\Delta SDO}} + \dfrac{S_{\Delta SNG}}{S_{\Delta SBO}}\right) \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SD}.\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SM}{SD}.\dfrac{SG}{SO} + \dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SG}{SO}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{SM}{SD} + \dfrac{SN}{SB}\right)$.

$\Rightarrow xy = \dfrac{1}{3}(x+y)$. Lại có: $(x-1)(y-1) \ge 0 \Rightarrow xy - (x+y) + 1 \ge 0$.

Từ đó suy ra: $-\dfrac{2}{3}(x+y) + 1 \ge 0$ hay $x + y \le \dfrac{3}{2}$. Vậy $\dfrac{V_1}{V}$ lớn nhất bằng $\dfrac{3}{8}$.

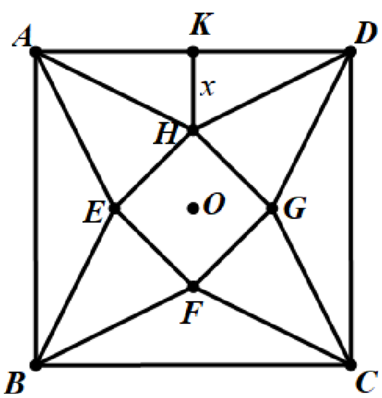
Câu 15. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An nhờ bố làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $5cm$ (tham khảo hình vẽ).

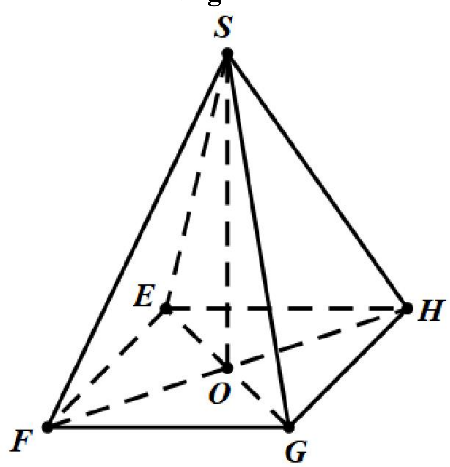


Cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA và sau đó gò các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều. Thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải





Gọi K là trung điểm AD, đặt $HK = x, 0 < x \le \dfrac{5}{2}$.

Ta có $EF = FG = GH = HE = \left(\dfrac{5}{2} - x\right)\sqrt{2}$; $HD = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + x^2}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{HD^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + x^2 - \left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2}$.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}.2.\left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2 \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + x^2 - \left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2} = \dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2.\sqrt{5x}$.

$\Rightarrow V' = \dfrac{2}{3}\left[-2\left(\dfrac{5}{2} - x\right)\sqrt{5x} + \left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2 \dfrac{5}{2\sqrt{5x}}\right]$, $V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$
V'		$+$	0	$-$	0
V		$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{10}}{3}$	$\searrow$	

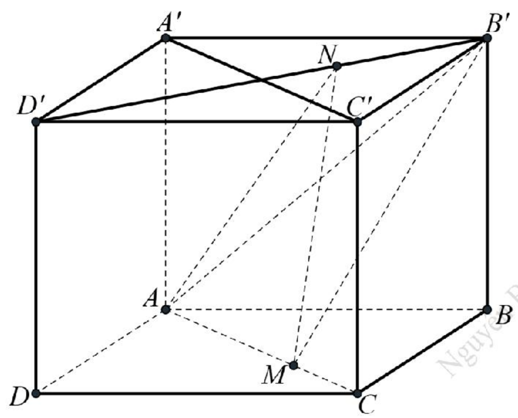
Dựa vào bảng biến thiên, ta có $V_{\max} = \dfrac{4\sqrt{10}}{3}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$.

Câu 16. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia $AC, B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{a^3}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{AB'MN} = \dfrac{1}{3} d\left(N, \left(AB'M\right)\right).S_{\Delta AB'M}$

Do $ACB'D'$ là tứ diện đều nên $\sin\left(\widehat{B'D', \left(AB'M\right)}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\widehat{B'AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $V_{AB'MN} = \dfrac{1}{3}\left(B'N.\sin\left(\widehat{B'D', \left(AB'M\right)}\right)\right).\dfrac{1}{2}AB'.AM.\sin\widehat{B'AM} = \dfrac{a}{6}.AM.B'N$

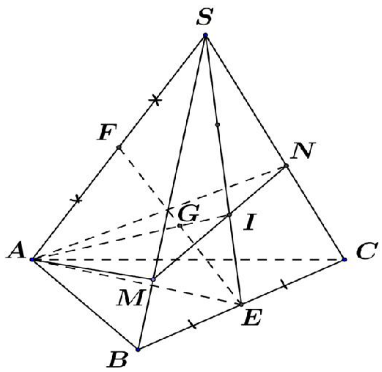
$\le \dfrac{a}{6}\left(\dfrac{AM + B'N}{2}\right)^2 = \dfrac{a^3}{12}$

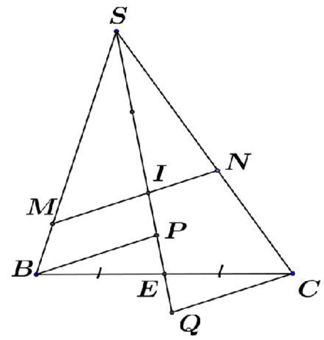
Vậy $\left(V_{AB'MN}\right)_{\max} = \dfrac{a^3}{12}$

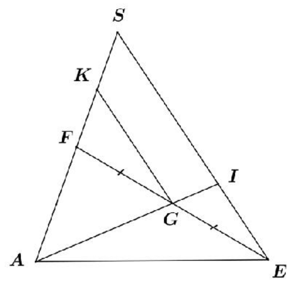
Câu 17. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là?

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải







Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm BC, SA, EF suy ra G là trọng tâm tứ diện $SABC$. Điểm I là giao điểm của AG và SE. Qua I dựng đường thẳng cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N. Suy ra (AMN) là mặt phẳng quay quanh AG thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kẻ $GK \parallel SE, (K \in SA)$ suy ra K là trung điểm FS.

$\Rightarrow \dfrac{KG}{SI} = \dfrac{AK}{AS} = \dfrac{3}{4}$. Mà $\dfrac{KG}{SE} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{SI}{SE} = \dfrac{2}{3}$.

Cách 1:

Kẻ $BP \parallel MN, CQ \parallel MN$; $(P, Q \in SE)$.

Ta có: $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SI}{SP}; \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SI}{SQ}$.

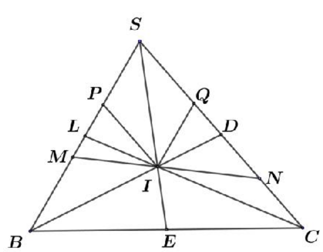
$\Rightarrow \Delta BEP = \Delta CEQ \Rightarrow E$ là trung điểm $PQ \Rightarrow SP + SQ = 2SE$ (đúng cả trong trường hợp $P \equiv Q \equiv E$).

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = 1.\dfrac{SI}{SP}.\dfrac{SI}{SQ} \overset{AM-GM}{\geq} \dfrac{SI^2}{\dfrac{(SP+SQ)^2}{4}} = \dfrac{SI^2}{SE^2} = \left(\dfrac{SI}{SE}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $SP = SQ = SE$. Hay $P \equiv Q \equiv E \Leftrightarrow MN \parallel BC$.

Cách 2:

Ta chứng minh được $\dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SC}{SN} = 3$.



Thật vậy, qua I kẻ các đường thẳng lần lượt song song SB, SC cắt SC, SB tương ứng tại D, L.

Ta có: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{SB}{IQ}=\dfrac{DB}{DI}=3\\ \dfrac{IQ}{SM}=\dfrac{NI}{NM}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{SB}{IQ}.\dfrac{IQ}{SM}=3.\dfrac{NI}{NM}\Leftrightarrow \dfrac{SB}{SM}=\dfrac{3NI}{NM}$, (1).

Lại có: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{SC}{IP}=\dfrac{LC}{LI}=3\\ \dfrac{IP}{SN}=\dfrac{MI}{MN}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{SC}{IP}.\dfrac{IP}{SN}=3.\dfrac{MI}{MN}\Leftrightarrow \dfrac{SC}{SN}=\dfrac{3MI}{MN}$, (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{SB}{SM}+\dfrac{SC}{SN}=3\left(\dfrac{NI}{NM}+\dfrac{MI}{MN}\right)=3$.

Đặt $x=\dfrac{SB}{SM};y=\dfrac{SC}{SN}$. Suy ra $x+y=3$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{xy}\overset{AM-GM}{\geq}\dfrac{1}{\dfrac{(x+y)^2}{4}}=\dfrac{4}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow MN\,//\,BC$.

Cách 3:

Đặt $\dfrac{SB}{SM}=x$; $\dfrac{SC}{SN}=y$, với $x>0$, $y>0$.

Ta có $\overrightarrow{SI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SE}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=\dfrac{1}{3}(x\overrightarrow{SM}+y\overrightarrow{SN})=\dfrac{x}{3}\overrightarrow{SM}+\dfrac{y}{3}\overrightarrow{SN}$.

Do I, M, N thẳng hàng nên $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1\Leftrightarrow x+y=3$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{xy}\geq\dfrac{1}{(\dfrac{x+y}{2})^2}=\dfrac{4}{9}$.

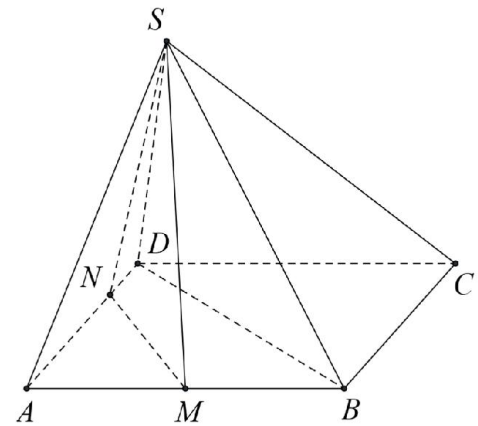
Vậy $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{4}{9}$ khi $x=y$, hay MN đi qua I và song song với BC.

Câu 18. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $2\dfrac{AB}{AM}+3\dfrac{AD}{AN}=8$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$.

A. $\dfrac{13}{16}$. **B.** $\dfrac{11}{12}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\dfrac{V_{SADB}}{V_{SANM}}=\dfrac{AD}{AN}.\dfrac{AB}{AM}\Leftrightarrow\dfrac{2.V_{SADB}}{V_{SANM}}=2.\dfrac{AD}{AN}.\dfrac{AB}{AM}$

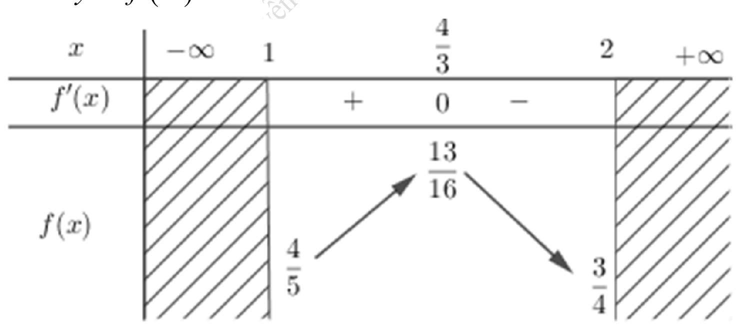
$\Leftrightarrow\dfrac{V}{V-V_1}=2.\dfrac{AD}{AN}.\dfrac{AB}{AM}\Leftrightarrow\dfrac{V-V_1}{V}=\dfrac{1}{2.\dfrac{AD}{AN}.\dfrac{AB}{AM}}\Leftrightarrow\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{2.\dfrac{AD}{AN}.\dfrac{AB}{AM}-1}{2.\dfrac{AD}{AN}.\dfrac{AB}{AM}}$

Đặt $x=\dfrac{AD}{AN}\Rightarrow 2\dfrac{AB}{AM}=8-3x,\left(1\le x\le 2\right)$. Khi đó $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{x\left(8-3x\right)-1}{x\left(8-3x\right)}=1+\dfrac{1}{3x^2-8x}$

Đặt $f\left(x\right)=1+\dfrac{1}{3x^2-8x},\left(1\le x\le 2\right)$

Ta có: $f'\left(x\right)=-\dfrac{6x-8}{\left(3x^2-8x\right)^2}\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow-\dfrac{6x-8}{\left(3x^2-8x\right)^2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}\Rightarrow f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{13}{16}$

Bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$



Dựa vào bảng biến thiên ta được hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{13}{16}$ tại $x=\dfrac{4}{3}$.

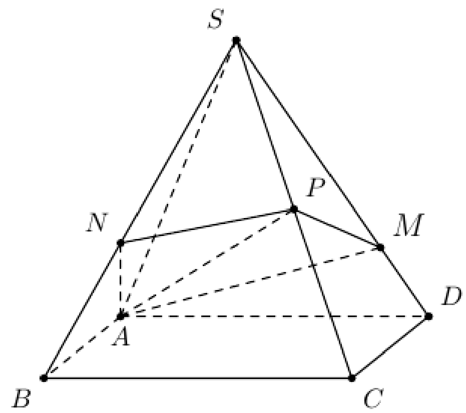
Vậy giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ là $\dfrac{13}{16}$.

Câu 19. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi P là trung điểm của SC. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ chứa AP và cắt hai cạnh SD, SB lần lượt tại M và N. Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Do (α) đi qua A, P, M, N nên bốn điểm này đồng phẳng.

Áp dụng công thức $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4.a.b.c.d}$ với $\frac{SA}{SA} = a$, $\frac{SC}{SP} = c$, $\frac{SD}{SM} = d$, $\frac{SB}{SN} = b$ thỏa mãn $a+c = b+d$.

Theo đề bài ta có: $\frac{SA}{SA} = 1$, $\frac{SC}{SP} = 2$ và đặt $\frac{SD}{SM} = d > 0$, $\frac{SB}{SN} = b > 0$.

Khi đó: $\frac{V'}{V} = \frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d}$ với $1+2 = b+d \Leftrightarrow b+d = 3$.

Vậy ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1+2+3}{4.2.b.d} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{3}{4bd}$.

Theo bất đẳng thức cơ bản: $bd \le \frac{(b+d)^2}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{bd} \ge \frac{4}{9}$ suy ra $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4bd} \ge \frac{3}{4}.\frac{4}{9} = \frac{1}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $b = d \Leftrightarrow b = d = \frac{3}{2}$.

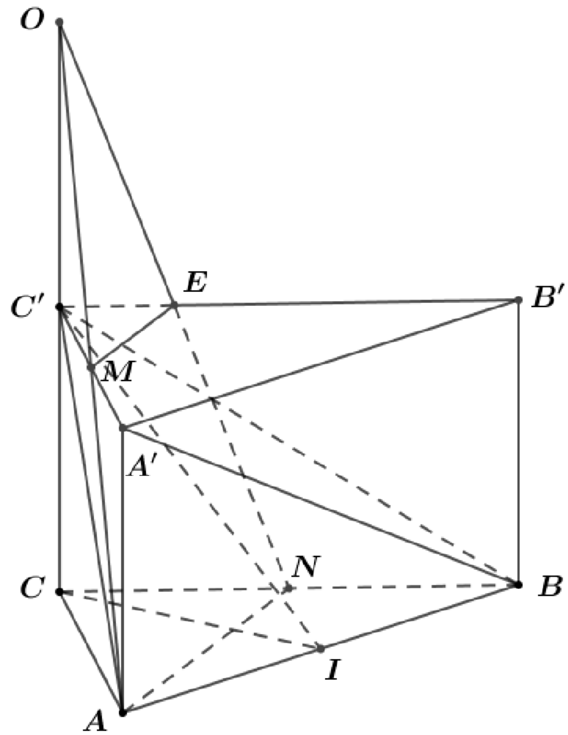
Vậy $\frac{V'}{V}$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **C.** $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $AB \perp (CIC')$ nên góc giữa $(C'AB)$ và (ABC) là góc $(CI, C'I)$, suy ra $\widehat{C'IC} = 60°$.

Tam giác $C'IC$ vuông tại C nên $C'C = CI \cdot \tan \widehat{C'IC} = \frac{AB}{2} \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CI = a^2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = CC' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$.

Trong $(ACC'A')$, kéo dài AM cắt CC' tại O.

Suy ra $C'M$ là đường trung bình của ΔOAC, do đó $OC = 2CC' = 2a\sqrt{3}$.

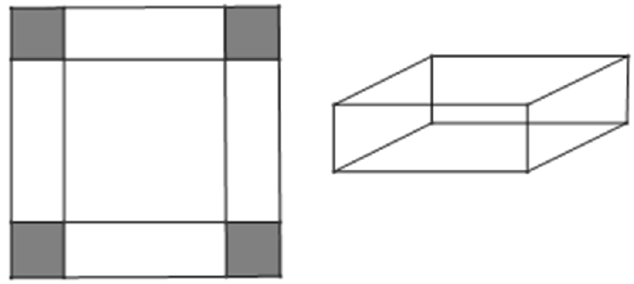
Thể tích khối chóp $V_{O.ACN} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACN} \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} \cdot 2CC' = \frac{1}{3}V$.

Thể tích khối chóp $V_{O.C'ME} = \frac{1}{3} \cdot S_{C'ME} \cdot OC' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} S_{A'B'C'} \cdot OC' = \frac{1}{24}V$.

Do đó $V_{C'EM.CAN} = V_{O.ACN} - V_{O.C'ME} = \frac{1}{3}V - \frac{1}{24}V = \frac{7}{24}V = \frac{7}{24} \cdot a^3\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Vậy phần thể tích nhỏ hơn là $V_{C'EM.CAN} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 21. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp(tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



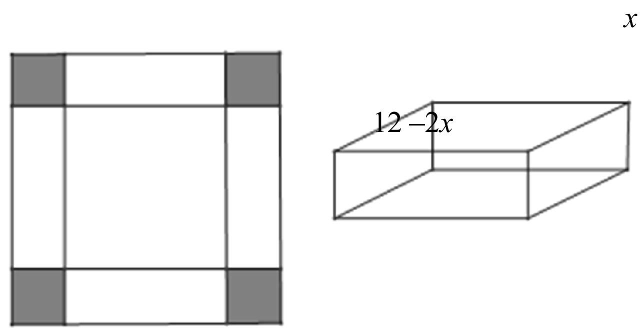
A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=6$.

Lời giải

Chọn A

Hình hộp có đáy của là hình vuông cạnh bằng $12-2x$, chiều cao bằng x.

Điều kiện $0<x<6$



Thể tích khối hộp là $V=\left(12-2x\right)^2.x=4\left(6-x\right)^2.x$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $\sqrt[3]{\left(6-x\right)\left(6-x\right).2x}\le\dfrac{\left(6-x\right)+\left(6-x\right)+2x}{3}$

$\Leftrightarrow\left(6-x\right)\left(6-x\right).2x\le 4^3$ $\Leftrightarrow 4\left(6-x\right)^2.x\le 2.4^3$ $\Leftrightarrow V\le 128$ (hằng số).

Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow 6-x=2x$ $\Leftrightarrow x=2$.

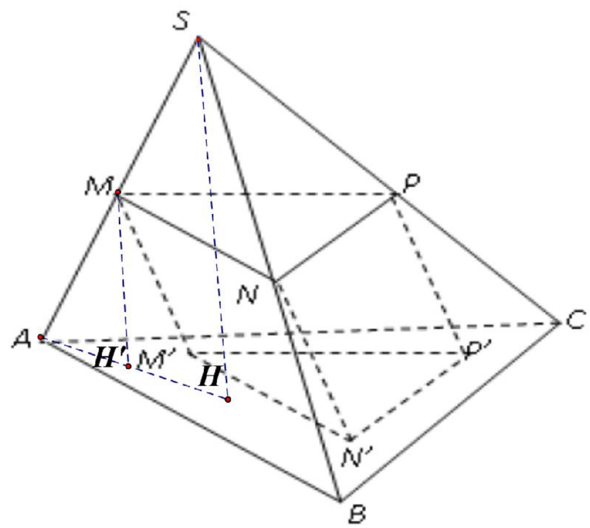
Vậy thể tích khối hộp lớn nhất khi $x=2$.

Câu 22. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Mặt phẳng (Q) thay đổi song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại M, N, P. Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (ABC) tại M', N', P'. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{8}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $\frac{SM}{SA}=x\left(0<x<1\right)\Rightarrow\frac{SN}{SB}=x=\frac{SP}{SC}$

$\Rightarrow\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}NM.NP.\sin\widehat{MNP}}{\frac{1}{2}BA.BC.\sin\widehat{ABC}}=\frac{NM}{BA}.\frac{NP}{BC}=x^2$

$\Rightarrow S_{\Delta MNP}=x^2.S_{\Delta ABC}$

Gọi chiều cao của hình chóp là SH, chiều cao của lăng trụ là MH':

$\Rightarrow\frac{MH'}{SH}=\frac{AM}{AS}=1-x\Rightarrow MH'=\left(1-x\right)SH$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=1\Leftrightarrow SH.S_{\Delta ABC}=3$

$\Rightarrow V_{MNP.M'N'P'}=MH'.S_{\Delta MNP}=\left(1-x\right)SH.x^2.S_{\Delta ABC}=x^2.\left(1-x\right).SH.S_{\Delta ABC}=x^2.\left(1-x\right).3$

Xét hàm số: $f\left(x\right)=3x^2-3x^3$ với $x\in\left(0;1\right)$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=6x-9x^2\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (loai)\\ x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{4}{9}$	↘	

Vậy: $\max V_{MNP.M'N'P'}=\frac{4}{9}$.

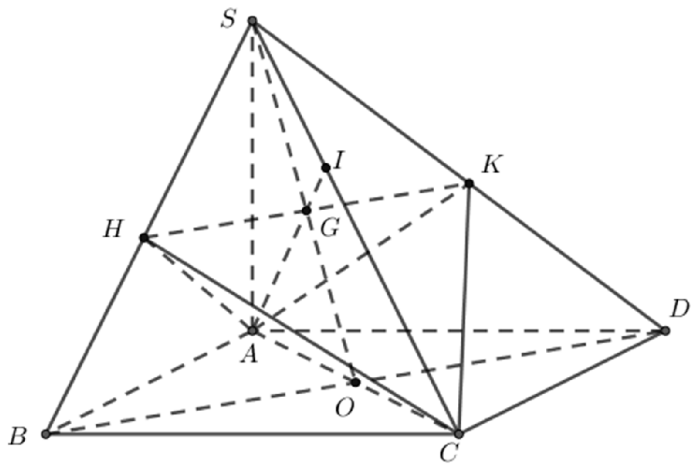
Câu 23. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A lấy điểm S di động không trùng với A. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt tại H, K. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{32}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Ta có $V_{S.ABD} = \frac{1}{3}S_{ABD}.SA = \frac{a^2x}{6}$.

Lại có $\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}} = \frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SD} = \left(\frac{SA}{SB}\right)^2.\left(\frac{SA}{SD}\right)^2 = \frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}$

$\Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}.V_{S.ABD} = \frac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2}$.

Gọi $O = AC \cap BD, G = SO \cap HK, I = AG \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH, (AH \subset (SAB))$.

Lại có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Chứng minh tương tự ta có $AK \perp SC$.

Vì $\begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK), AI \subset (AHK) \Rightarrow SC \perp AI$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, đặt $SA = x > 0$ và có $AC = a\sqrt{2}$, $AI \perp SC$

$\Rightarrow \frac{IC}{IS} = \left(\frac{AC}{AS}\right)^2 = \frac{2a^2}{x^2} \Rightarrow CI = \frac{2a^2}{x^2}SI$.

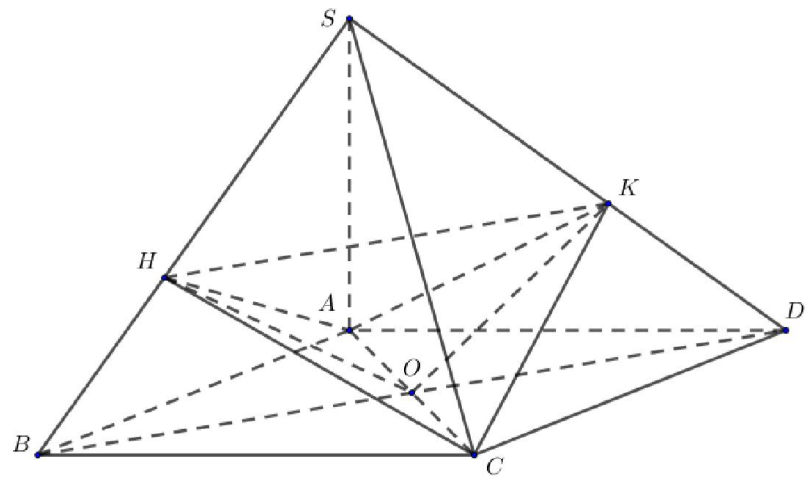
$\Rightarrow V_{ACHK} = \frac{1}{3}S_{AHK}.CI = \frac{1}{3}S_{AHK}.\frac{2a^2}{x^2}.SI = \frac{2a^2}{x^2}V_{S.AHK} = \frac{a^4}{3}.\frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

Ta lại có $\left(x^2+a^2\right)^2 = \left(\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{3}+a^2\right)^2 \overset{AM-GM}{\geq} 16\frac{x^3a}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{16a}$ (Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a\sqrt{3}$).

Suy ra $V_{ACHK} \le \frac{a^4}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{16a} \Leftrightarrow V_{ACHK} \le \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ khi $x = SA = a\sqrt{3}$.

Cách 2:



Đặt $SA = x, x > 0 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{a^2x}{3} \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^2x}{6}$.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm của $AC \Rightarrow d\left(A,\left(HOK\right)\right) = d\left(C,\left(HOK\right)\right)$

$\Rightarrow V_{AHOK} = V_{CHOK} \Rightarrow V_{ACHK} = 2V_{AHOK}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, có $AH \perp SB \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{x^2}{x^2+a^2}$.

Tương tự trong tam giác SAD ta cũng có $\frac{SK}{SD} = \frac{x^2}{x^2+a^2}$.

Lại có $\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}} = \frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SD} = \frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2} \Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}.V_{S.ABD} = \frac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2}$.

Mặt khác $\frac{d\left(H,\left(ABCD\right)\right)}{d\left(S,\left(ABCD\right)\right)} = \frac{BH}{BS} = \frac{a^2}{x^2+a^2} \Rightarrow d\left(H,\left(ABCD\right)\right) = \frac{a^2x}{x^2+a^2}$

Mà $S_{ABO} = \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow V_{H.ABO} = \frac{1}{3}S_{ABO}.d\left(H,\left(ABO\right)\right) = \frac{1}{12}.\frac{a^4x}{x^2+a^2}$.

Tương tự, ta có $V_{K.ADO} = \frac{1}{12}.\frac{a^4x}{x^2+a^2}$.

$$\Rightarrow V_{ACHK} = 2V_{AOHK} = 2\left(V_{S.ABD} - V_{S.AHK} - V_{HABO} - V_{KADO}\right) = 2\left(\frac{a^2x}{6} - \frac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2} - \frac{1}{6}.\frac{a^4x}{x^2+a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow V_{ACHK} = \frac{a^4}{3}.\frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}.$$

Xét hàm số $f\left(x\right) = \frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(x\right) = \frac{x^2\left(3a^2-x^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^3}; f'\left(x\right) = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$a\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(a\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = a\sqrt{3}$

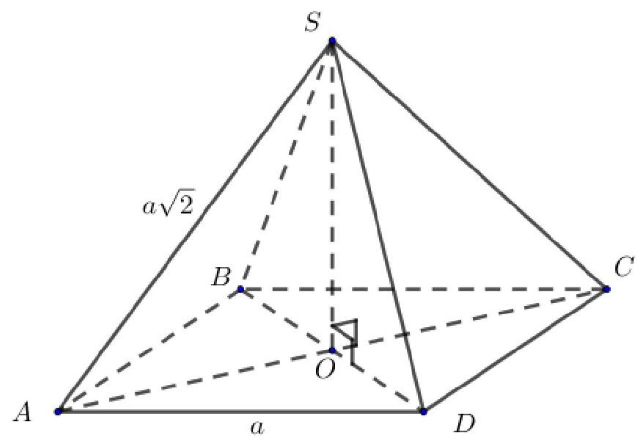
Vậy giá trị lớn nhất của V_{ACHK} bằng $\dfrac{a^4}{3}.\dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^3}{\left[\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2\right]^2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$ khi $SA = a\sqrt{3}$.

Câu 24. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Khối chóp có đáy là hình bình hành, một cạnh đáy bằng a và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là

A. $2\sqrt{6}a^3$. **B.** $8a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{7a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $AC \cap BD = O$.

Ta có $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình bình hành $ABCD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Không mất tính tổng quát, giả sử $AD = a$ và đặt $AB = x, (x > 0) \Rightarrow OA = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + a^2}$.

Xét ΔSOA vuông tại O, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{x^2 + a^2}{4}} \Leftrightarrow SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{7a^2 - x^2}$.

Lại có $S_{ABCD} = a.x$ nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{6}a.x.\sqrt{7a^2 - x^2} \overset{AM-GM}{\leq} \dfrac{a}{6}.\dfrac{x^2 + \left(7a^2 - x^2\right)}{2} = \dfrac{7a^3}{12}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

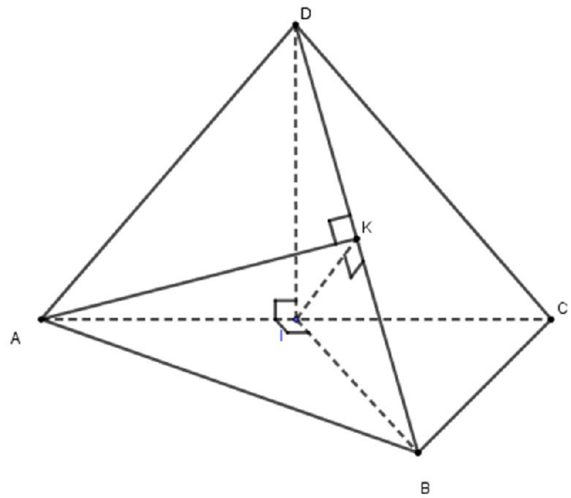
Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho là $\dfrac{7a^3}{12}$.

Câu 25. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có cạnh AC, BD thỏa mãn $AC^2+BD^2=16$ và các cạnh còn lại đều bằng 6. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AC, BD.

Ta có: $AC\perp IB, AC\perp ID \Rightarrow AC\perp(BID)\Rightarrow V_{ABCD}=2.V_{ABID}$

$V_{ABID}=\dfrac{1}{3}AI.S_{IBD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AC.\dfrac{1}{2}IK.BD$ (Do $IB=ID$ nên tam giác IBD cân tại I)

$BD=\sqrt{16-AC^2}$; $0<AC<4$

$IK^2=\dfrac{IB^2+ID^2}{2}-\dfrac{BD^2}{4}=ID^2-\dfrac{BD^2}{4}=AD^2-\dfrac{AC^2}{4}-\dfrac{BD^2}{4}=32\Rightarrow IK=4\sqrt{2}$

$V_{ABCD}=2.\dfrac{1}{12}.AC.4\sqrt{2}\sqrt{16-AC^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.AC.\sqrt{16-AC^2},(0<AC<4)$

Đặt $t=AC$, $(0<t<4)$.

Xét $f(t)=t\sqrt{16-t^2},(0<t<4)$

Ta có:

t	0		$2\sqrt{2}$		2
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗	8	↘	

Vậy thể tích khối tứ diện cần tìm đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của thể tích, ta có thể dùng cách khác như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số: AC^2 và $16-AC^2$

Ta có: $AC^2+16-AC^2\geq 2\sqrt{AC^2\left(16-AC^2\right)}\Leftrightarrow AC.\sqrt{16-AC^2}\leq 8$

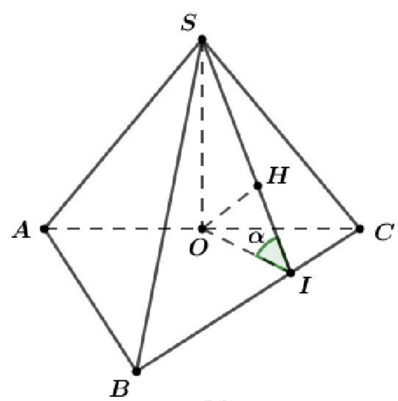
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AC^2=16-AC^2\Leftrightarrow AC=2\sqrt{2}$

Vậy thể tích khối tứ diện cần tìm đạt giá trị lớn nhất là $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Câu 26. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = BC\sqrt{5}$, $AC = 2BC\sqrt{2}$, hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm O của cạnh AC. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 2. Mặt phẳng (SBC) hợp với mặt phẳng (ABC) một góc α thay đổi. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{\sqrt{a}}{b}$, trong đó $a,b \in \mathbb{N}^*$, a là số nguyên tố. Tổng $a+b$ bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải



Áp dụng định lý Hê-rông trong tam giác ABC ta được diện tích $S_{ABC} = BC^2$.

Từ O kẻ $OI \perp BC$ tại I, suy ra góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là $\widehat{SIO} = \alpha$.

Từ O kẻ $OH \perp SI$ tại H thì $d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(O,(SBC)\right) = OH \Rightarrow OH = 1$.

Tam giác OHI vuông tại H nên $OI = \frac{OH}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Tam giác SOI vuông tại O nên $SO = OI \cdot \tan\alpha = \frac{OH}{\sin\alpha} \cdot \tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Mà diện tích

$S_{ABC} = BC^2 \Rightarrow 2OI = d\left(A,BC\right) = \frac{2S_{ABC}}{BC} = 2BC \Rightarrow OI = BC \Rightarrow S_{ABC} = OI^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$.

Xét hàm số $f(x) = \left(1-x^2\right)x = -x^3 + x$ trên $(0;1)$, $f'(x) = -3x^2 + 1$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

Suy ra $f(x) \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9}, \forall x \in (0;1)$.

Do đó $\left(1-\cos^2 x\right)\cos x \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha} \ge \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

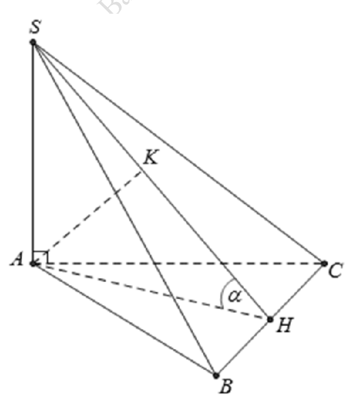
Vậy $a = 3, b = 2 \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 27. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos\alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$ (vì tam giác ABC vuông cân tại A).

Ta có $\begin{cases} AH \perp BC\,(cmt) \\ SA \perp BC\,(SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH.$

Ta có $\begin{cases} (ABC)\cap(SBC) = BC \\ AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((ABC),(SBC)) = (AH, SH) = \widehat{SHA} = \alpha.$

Kẻ $AK \perp SH$, với $K \in SH$.

Ta có $\begin{cases} AK \perp SH\,(gt) \\ AK \perp BC\,(BC \perp (SAH)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AK = 3.$

Tam giác SHK vuông tại K có $AH = \dfrac{AK}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{\sin\alpha}$.

Tam giác SAK vuông tại K có $SA=\dfrac{AK}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}=\dfrac{3}{\cos\alpha}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A có H là trung điểm của $BC \Rightarrow BC=2AH=\dfrac{6}{\sin\alpha}$ và

$AB=AC=\dfrac{BC}{\sqrt{2}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha}$.

Vậy $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha}.\dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha}=\dfrac{9}{\sin^2\alpha}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{9}{\sin^2\alpha}.\dfrac{3}{\cos\alpha}=\dfrac{9}{\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha}$.

Xét hàm số $y=\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha$ với $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Đặt $t=\cos\alpha \Rightarrow t\in[0;1] \Rightarrow y=\left(1-t^2\right)t=t-t^3$

Suy ra $y'=1-3t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\in[0;1] \\ t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\notin[0;1] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=0, y(1)=0, y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

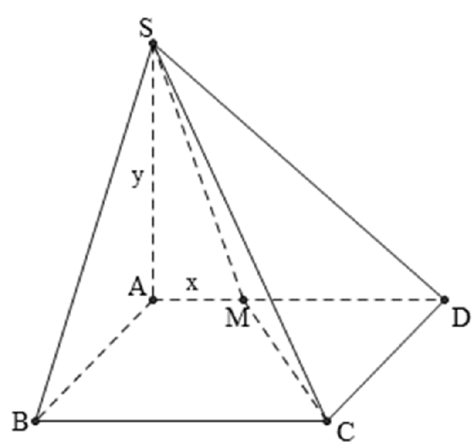
Vậy để thể tích khối chóp nhỏ nhất thì $\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha$ lớn nhất bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=y$ $(y>0)$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM=x$ $(0<x<a)$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$, biết $x^2+y^2=a^2$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $S_{ABCM}=\dfrac{1}{2}(AM+BC).AB=\dfrac{1}{2}(x+a).a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCM$ là $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCM}=\dfrac{1}{3}y.\dfrac{1}{2}\left(ax+a^2\right)=\dfrac{a}{6}(xy+ay)$

$\Leftrightarrow V^2 = \dfrac{a^2}{36} y^2 (x+a)^2 \Leftrightarrow \dfrac{36}{a^2} V^2 = (a^2 - x^2)(x+a)^2$

Xét hàm số $f(x) = (a^2 - x^2)(x+a)^2$ trên khoảng $(0;a)$.

Ta có: $f'(x) = -2x(x+a)^2 + 2(a^2 - x^2)(x+a) = 2(x+a)^2(a-2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$ (Vì $x > 0$)

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{a}{2}\right)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $\max\limits_{(0;a)} f(x) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \left(a^2 - \dfrac{a^2}{4}\right)\left(\dfrac{a}{2} + a\right)^2 = \dfrac{27a^4}{16}$

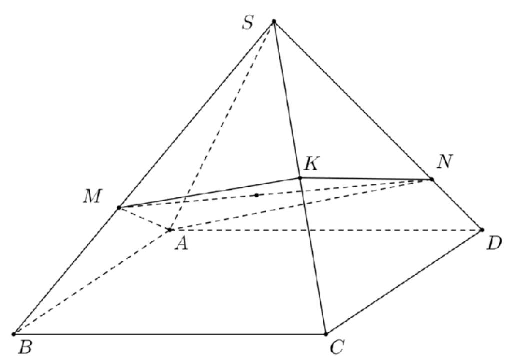
Vậy $V_{\max} = \sqrt{\dfrac{a^2}{36}.\max\limits_{(0;a)} f(x)} = \sqrt{\dfrac{a^2}{36}.\dfrac{27a^4}{16}} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 29. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SC. Mặt phẳng chứa AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử $x = \dfrac{SM}{SB}$, $y = \dfrac{SN}{SD}$.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2} V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2} V$.

$V_{S.AMKN} = V_{S.AMK} + V_{S.AKN} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SK}{SC}.V_{S.ABC} + \dfrac{SK}{SC}.\dfrac{SN}{SD}.V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}x.\dfrac{1}{2}V + \dfrac{1}{2}y.\dfrac{1}{2}V = \dfrac{1}{4}V.(x+y)$

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{4}(x+y)$.

Mặt khác, $V_{S.AMKN}=V_{S.AMN}+V_{S.KMN}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}.V_{S.ABD}+\dfrac{SK}{SC}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}.V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_1==\dfrac{1}{2}xy.V+\dfrac{1}{2}xy.\dfrac{1}{2}V=\dfrac{3xy}{4}V\Rightarrow\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{3xy}{4}$.

Do đó $\dfrac{1}{4}(x+y)=\dfrac{3}{4}xy\Rightarrow x+y=3xy$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $3xy=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow\sqrt{xy}\ge\dfrac{2}{3}\Rightarrow xy\ge\dfrac{4}{9}$

Do đó $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{3}{4}xy\ge\dfrac{3}{4}.\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=3xy\\x=y\end{cases}\Rightarrow x=y=\dfrac{2}{3}$.

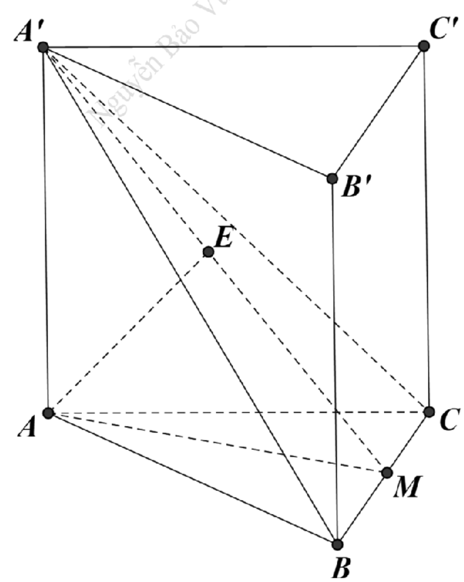
Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V}$ là $\dfrac{1}{3}$.

Câu 30. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi φ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(A'BC)$. Khi $\sin\varphi$ đạt giá trị lớn nhất, tính thể tích khối lăng trụ đã cho?

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt[4]{12}a^3}{4\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt[4]{27}a^3}{4\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $AA'=x\ (x>0)$

Gọi $h=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=d\left(C',\left(A'BC\right)\right)$.

Dựng $AM\perp BC,\ AE\perp A'M\Rightarrow h=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=d\left(C',\left(A'BC\right)\right)=AE=\dfrac{A'A.MA.}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}$

Khi đó ta có $h=\dfrac{a\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2+3a^2}}$ và $BC'=\sqrt{a^2+x^2}$.

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{h}{BC'} = \dfrac{a\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2+3a^2}\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\dfrac{\left(4x^2+3a^2\right)\left(x^2+a^2\right)}{x^2}}}$

Ta có $\sin\varphi$ lớn nhất khi $\dfrac{\left(4x^2+3a^2\right)\left(x^2+a^2\right)}{x^2}$ nhỏ nhất

Mà $\dfrac{\left(4x^2+3a^2\right)\left(x^2+a^2\right)}{x^2} = 4x^2 + \dfrac{3a^4}{x^2} + 7a^2 \ge 4a^2\sqrt{3} + 7a^2$ khi

Dấu bằng $4x^2 = \dfrac{3a^4}{x^2} \Rightarrow x = a\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$, khi đó thể tích khối lăng trụ bằng $\dfrac{\sqrt[4]{27}a^3}{4\sqrt{2}}$.