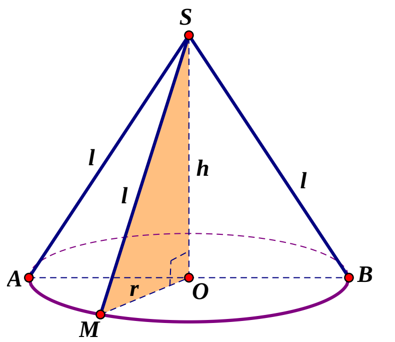
Chuyên đề 21 KHỐI NÓN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

MỘT SỐ BÀI TOÁN VD – VDC LIÊN QUAN ĐẾN KHỐI NÓN (CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ)

Lý thuyết – phương pháp chung

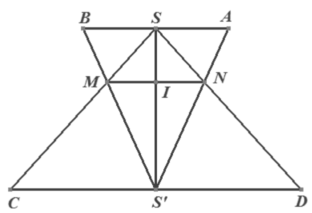
MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 ☞**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	□ **Đường cao:** $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). □ **Bán kính đáy:** $\boxed{r = OA = OB = OM}$. □ **Đường sinh:** $\boxed{l = SA = SB = SM}$. □ **Góc ở đỉnh:** $\boxed{\widehat{ASB}}$ □ **Thiết diện qua trục:** ΔSAB cân tại S. □ **Góc giữa đường sinh và mặt đáy:** $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	□ **Chu vi đáy:** $\boxed{p = 2\pi r}$. □ **Diện tích đáy:** $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. □ **Thể tích:** $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *(liên tưởng đến thể tích khối chóp).* □ **Diện tích xung quanh:** $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. □ **Diện tích toàn phần:** $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai khối nón có chung trục $SS' = 3r$. Khối nón thứ nhất có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm S' bán kính $2r$. Khối nón thứ hai có đỉnh S', đáy là hình tròn tâm S bán kính r. Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng

A. $\frac{4\pi r^3}{27}$. **B.** $\frac{\pi r^3}{9}$. **<u>C</u>.** $\frac{4\pi r^3}{9}$. **D.** $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hai khối nón và lần lượt cắt hai đường tròn (S, r) và $(S', 2r)$ theo đường kính AB, CD. Gọi $M = SC \cap S'B, N = SD \cap S'A$. Phần chung của 2 khối nón đã cho gồm 2 khối nón chung đáy là hình tròn đường kính MN và đỉnh lần lượt là S, S'.

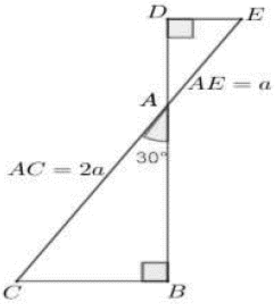
Ta có $\frac{MN}{CD} = \frac{SN}{SD} = \frac{SN}{SN + ND} = \frac{SA}{SA + S'D} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}CD = \frac{4r}{3}$.

Gọi I là giao điểm của MN và SS'. Ta có $SI = \frac{1}{3}SS' = r, S'I = \frac{2}{3}SS' = 2r$.

Do đó thể tích phần chung là

$$V = \frac{1}{3}\pi SI.\left(\frac{MN}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\pi S'I.\left(\frac{MN}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\pi.r.\frac{4r^2}{9} + \frac{1}{3}\pi.2r.\frac{4r^2}{9} = \frac{4\pi r^3}{9}.$$

Câu 2. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ bên) quanh trục DB.



A. $\frac{9\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của vật thể tròn xoay gồm hai phần bao gồm thể tích V_1 của hình nón tạo bởi tam giác vuông ABC khi quay quanh cạnh AB và thể tích V_2 của hình nón tạo bởi tam giác vuông ADE khi quay quanh cạnh AD.

*Xét tam giác vuông ABC vuông tại B ta có:

$r_1 = BC = AC.\sin 30^o = a$; $h_1 = AB = AC.\sin 60^o = a\sqrt{3}$

Vậy ta có $V_1 = \frac{1}{3}\pi.r_1^2.h_1 = \frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

*Xét tam giác vuông ADE vuông tại D ta có:

$r_2 = DE = AE.\sin 30^o = \frac{a}{2}$; $h_2 = AD = AE.\sin 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy ta có $V_2 = \frac{1}{3}\pi.r_2^2.h_2 = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}$.

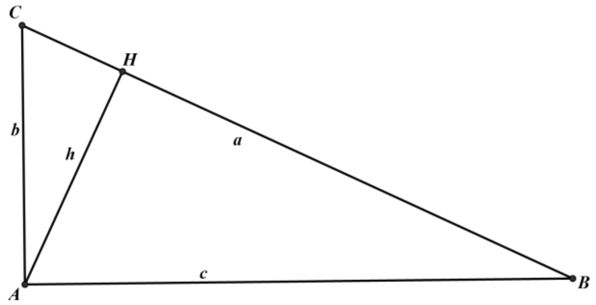
Vậy thể tích của vật thể tròn xoay là $V = V_1 + V_2 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24} = \frac{3\pi\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 3. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC, quay cạnh AC, quanh cạnh AB, ta thu được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_b > S_c > S_a$. **B.** $S_b > S_a > S_c$. **C.** $S_c > S_a > S_b$. **D.** $S_a > S_c > S_b$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh $BC, AH = h$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC ta thu được hình hợp bởi hai hình nón tròn xoay có chung đáy bán kính bằng h, đường sinh lần lượt là b,c. Do đó $S_a=\pi bh+\pi ch$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh AC ta thu được hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng c, đường sinh bằng a, $S_b=\pi ac+\pi c^2=\pi c\left(a+c\right)$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh AB ta thu được hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng b, đường sinh bằng a, $S_c=\pi ab+\pi b^2=\pi b\left(a+b\right)$.

Do $b<c$ nên $\begin{cases} ab<ac \\ b^2<c^2 \end{cases} \Rightarrow S_c<S_b$.

Ta có $h=\dfrac{bc}{a}\Rightarrow S_a=\pi b^2.\dfrac{c}{a}+\pi c^2.\dfrac{b}{a}$.

Tam giác ABC vuông nên $\dfrac{c}{a}<1\Rightarrow \pi b^2\dfrac{c}{a}<\pi b^2$; $\dfrac{c^2}{a^2}<1\Rightarrow \pi c^2\dfrac{b}{a}<\pi ab$.

$\Rightarrow S_a<\pi b^2+\pi ab=\pi b\left(a+b\right)=S_c$. Do đó $S_a<S_c$.

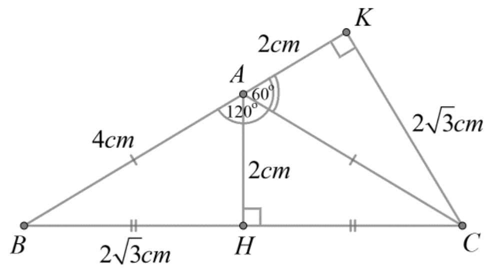
Vậy $S_b>S_c>S_a$.

Câu 4. Cho tam giác ABC cân tại A, góc $BAC=120°$ và $AB=4\text{cm}$. Tính thể tích khối tròn xoay lớn nhất có thể khi ta quay tam giác ABC quanh đường thẳng chứa một cạnh của tam giác ABC.

A. $16\sqrt{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $16\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\dfrac{16\pi}{\sqrt{3}}\ \left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\dfrac{16\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn B



Trường hợp 1: Khối tròn xoay khi quay ΔABC quanh đường thẳng chứa AB (hoặc AC) có thể tích bằng hiệu thể tích của hai khối nón $\left(N_1\right)$ và $\left(N_2\right)$.

Dựng $CK\perp BA$ tại $K\Rightarrow \begin{cases} AK=AC.\cos CAK=4.\cos 60°=2\text{cm} \\ BK=BA+AK=4+2=6\text{cm} \\ CK=AC.\sin CAK=4.\sin 60°=2\sqrt{3}\text{cm} \end{cases}$.

+ $\left(N_1\right)$ có $h_1=BK=6\text{cm}$, $r_1=CK=2\sqrt{3}\text{cm}$.

+ $\left(N_2\right)$ có $h_2=AK=2\text{cm}$, $r_2=CK=2\sqrt{3}\text{cm}$.

Do đó $V=\dfrac{1}{3}\pi.CK^2.\left(BK-AK\right)=\dfrac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{3}\right)^2.\left(6-2\right)=16\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Trường hợp 2: Khối tròn xoay khi quay ΔABC quanh đường thẳng chứa BC có thể tích bằng tổng thể tích của hai khối nón $\left(N_3\right)$ và $\left(N_4\right)$.

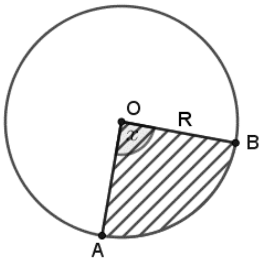
Kẻ đường cao $AH\ \left(H\in BC\right)\Rightarrow \begin{cases} AH=AB.\cos BAH=4.\cos 60°=2\text{cm} \\ BH=CH=AB.\sin BAH=4.\sin 60°=2\sqrt{3}\text{cm} \end{cases}$.

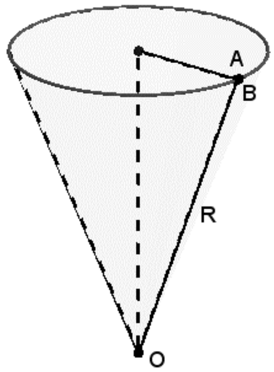
$\left(N_3\right)$ và $\left(N_4\right)$ có $h_3=h_4=BH=CH=2\sqrt{3}\text{cm}$, $r_3=r_4=HA=2\text{cm}$.

Do đó $V = 2.\frac{1}{3}\pi.AH^2.BH = 2.\frac{1}{3}\pi.2^2.2\sqrt{3} = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left(\text{cm}^3\right)$.

Vậy $V_{\max} = 16\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 5. **(Cụm liên trường Hải Phòng- 2019)** Huyền có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Huyền muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu là lớn nhất?





A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Góc x chắn cung AB có độ dài $l = R.x$.

Từ giả thiết suy ra bán kính của phễu là $r = \frac{Rx}{2\pi}$ và chiều cao của phễu là

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

Khi đó thể tích của phễu là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\frac{R^2x^2}{4\pi^2}.\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$, $x \in (0;2\pi)$

$$f'(x) = 2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = \frac{2x\left(4\pi^2 - x^2\right) - x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = \frac{x\left(8\pi^2 - 3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}.$$

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

Lập bảng biến thiên, ta có:

x	0		$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Vậy thể tích phễu lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

Câu 6. Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A. $R=3a$. **B.** $R=\dfrac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{9}a$. **D.** $R=\dfrac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi h,l lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón.

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.h=9a^3\pi\sqrt{2}\Rightarrow h=\frac{27a^3\sqrt{2}}{R^2}\Rightarrow l=\sqrt{R^2+h^2}=\sqrt{R^2+2.\frac{729a^6}{R^4}}$$

$$S_{xq}=\pi.R.l=\pi\sqrt{R^4+\frac{729a^6}{R^2}+\frac{729a^6}{R^2}}\ge\pi\sqrt{3\sqrt[3]{R^4.\frac{729a^6}{R^2}.\frac{729a^6}{R^2}}}.$$

$\Rightarrow S_{xq}=9\pi a^2$. Nên $\min S_{xq}=9\pi a^2$ khi $R^4=\dfrac{729a^6}{R^2}\Leftrightarrow R=3a$.

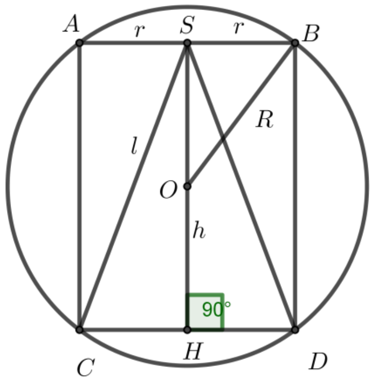
Câu 7. **(HSG Sở Nam Định 2019)** Cho hai mặt phẳng $(P),(Q)$ song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O, bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

A. $h=R$. **B.** $h=R\sqrt{2}$. **C.** $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2R\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cắt khối cầu tâm O, bán kính R bằng mặt phẳng (α) đi qua tâm O và vuông góc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ ta được hình như hình vẽ bên dưới.



Trong đó, $AB=(\alpha)\cap(P)$, $CD=(\alpha)\cap(Q)$ với $AB=CD$, $h=SH=AC=BD$, $R=OB$.

Đường sinh $l=SC=SD$.

Bán kính của mỗi hình tròn giao tuyến là $r=\dfrac{AB}{2}$.

Ta có: $l^2=SC^2=AC^2+AS^2=h^2+r^2$ và $r^2=SB^2=OB^2-SO^2=R^2-\dfrac{h^2}{4}$.

Suy ra $l^2=R^2+\dfrac{3h^2}{4}$.

Mà diện tích xung quanh của khối nón được xét là: $S_{xq}=\pi rl$.

Ta có S_{xq} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow$ rl đạt giá trị lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số $r\sqrt{3}$ và l ta có

$$rl = \frac{1}{2\sqrt{3}}.2.\left(r\sqrt{3}\right)l \le \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3r^2 + l^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.4R^2 = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}.$$

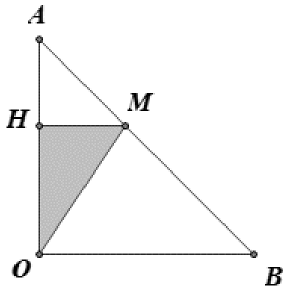
□ rl lớn nhất là $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $3r^2 = l^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho tam giác OAB vuông cân tại O, có $OA = 4$. Lấy điểm M thuộc cạnh AB (M không trùng với A, B) và gọi H là hình chiếu của M trên OA. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay tam giác OMH quanh OA.

A. $\frac{128\pi}{81}$. **B.** $\frac{81\pi}{256}$. **C.** $\frac{256\pi}{81}$. **D.** $\frac{64\pi}{81}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $h = OH$, $0 < h < 4$.

Khi quay tam giác OMH quanh OA, ta được hình nón đỉnh O chiều cao h bán kính đáy $r = HM$.

Ta có $HM \,//\, OB$ nên $\frac{AH}{AO} = \frac{HM}{OB} \Rightarrow \frac{4-h}{4} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = 4 - h$.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(4-h)^2.h = \frac{1}{6}\pi(4-h)(4-h).2h \le \frac{1}{6}\pi\left(\frac{4-h+4-h+2h}{3}\right)^3 = \frac{256\pi}{81}.$$

Vậy $V_{\max} = \frac{1}{3}\pi.\frac{256}{27} = \frac{256\pi}{81}$.

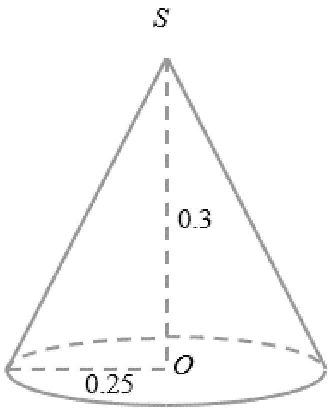
Câu 9. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13\,m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón $50\,cm$, chiều cao $30\,cm$ thì cần khối lượng lá gần nhất với con số nào dưới đây? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

A. $50\,kg$. **B.** $76\,kg$. **C.** $48\,kg$. **D.** $38\,kg$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết mỗi chiếc nón lá là một hình nón có bán kính đáy $R = \frac{50}{2} = 25(cm) = 0,25(m)$ và đường cao $h = 30(cm) = 0,3(m)$.



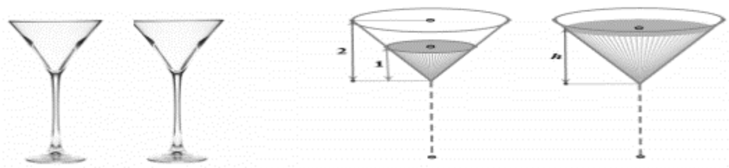
Gọi l là chiều cao của hình nón $\Rightarrow l=\sqrt{R^2+h^2}=\frac{\sqrt{61}}{20}\,(m)$.

Diện tích xung quanh của 1 chiếc nón lá là $S_{xq}=\pi Rl=\pi.0,25.\frac{\sqrt{61}}{20}=\frac{\pi\sqrt{61}}{80}\,(m^2)$

Tổng diện tích xung quanh của 1000 chiếc nón là $S=1000.\frac{\pi\sqrt{61}}{80}=\frac{25\pi\sqrt{61}}{2}\,(m^2)$

Do đó khối lượng lá cần dùng là $\frac{S}{6,13}\approx 50,03(kg)$.

Câu 10. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2\,dm$ (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn $1dm$. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá $0,01dm$).



A. $h\approx 1,41dm$. **B.** $h\approx 1,89\,dm$. **C.** $h\approx 1,91dm$. **D.** $h\approx 1,73dm$.

Lời giải

Chọn C

Gọi bán kính đáy, thể tích (phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2\,dm$) của khối nón lần lượt là r ; V .

Gọi bán kính đáy, thể tích (tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng của ly thứ nhất sau khi rót sang ly thứ hai) của khối nón lần lượt là r_1 ; V_1.

Gọi bán kính đáy, chiều cao, thể tích (tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng của ly thứ hai) của khối nón lần lượt là $r_2; h;\ V_2$.

Ta có: Thể tích chất lỏng ban đầu là: $V=\frac{2}{3}\pi r^2$.

Thể tích chất lỏng còn lại sau khi rót sang ly thứ hai là: $V_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2$.

mà $\frac{r_1}{r}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow r_1=\frac{r}{2}\Rightarrow V_1=\frac{1}{12}\pi r^2$.

Thể tích chất lỏng ly thứ hai là: $V_2=\frac{1}{3}\pi r_2^2h=V-V_1\Leftrightarrow\frac{1}{3}\pi r_2^2h=\frac{7}{12}\pi r^2\Leftrightarrow r_2^2h=\frac{7}{4}r^2$.

mà $\frac{r_2}{r}=\frac{h}{2}\Leftrightarrow r_2=\frac{hr}{2}\Rightarrow h^3=7\Rightarrow h\approx 1,91dm.$

Kết luận: $h\approx 1,91dm.$

Câu 11. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50 cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là:

A. $10\sqrt{2}(\text{cm})$. **B.** $50\sqrt{2}(\text{cm})$. **C.** $20(\text{cm})$. **D.** $25(\text{cm})$.

Lời giải

Ta có diện tích miếng tôn là $S=\pi.2500\ (\text{cm}^2)$.

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp}=\pi R^2+\pi.R.l$.

Thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có: $\pi R^2+\pi.R.l=2500\pi\Leftrightarrow R^2+R.l=2500=A\Leftrightarrow l=\frac{A}{R}-R$.

Thể tích khối nón là:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.h\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{l^2-R^2}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{\left(\frac{A}{R}-R\right)^2-R^2}$$

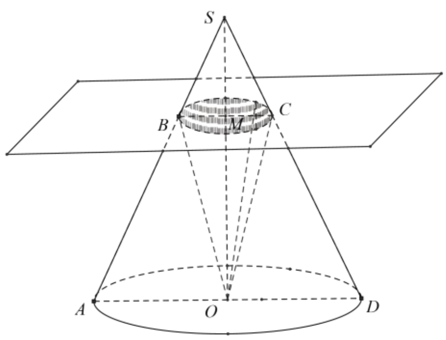
$$\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{\frac{A^2}{R^2}-2A}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{A^2.R^2-2A.R^4}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{\frac{A^3}{8}-2A\left(R^2-\frac{A}{4}\right)^2}$$

$\Leftrightarrow V\le\frac{1}{3}\pi.\frac{A}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}$. Dấu bằng xảy ra khi $R=\sqrt{\frac{A}{4}}=25$, vậy V đạt GTLN khi $R=25$.

Câu 12. **(Phan Dăng Lưu - Huế - 2018)** Cho hình nón (N) có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM=x$, $0<x<h$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M, với hình nón (N). Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

A. $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{h\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{h}{3}$.

Lời giải



Ta có BM là bán kính đường tròn (C).

Do tam giác $\Delta SBM \backsim \Delta SAO$ nên $\frac{BM}{AO}=\frac{SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{AO.SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là:

$$V=\frac{1}{3}\pi BM^2.OM=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{R(h-x)}{h}\right]^2 x=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$, $(0<x<h)$ ta có

Ta có $f'(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)\Leftrightarrow x=\frac{h}{3}$.

Lập bảng biến thiên ta có

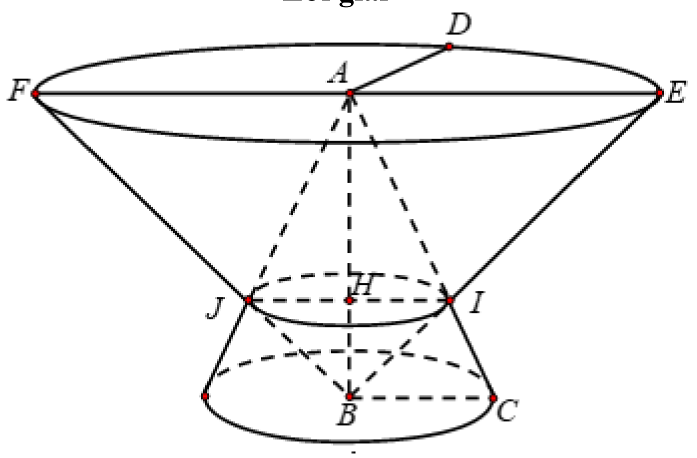
x	0		$\frac{h}{3}$		h
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗		$\frac{4\pi R^2 h}{81}$		↘

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x=\frac{h}{3}$.

Câu 13. (THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018) Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC=a$, $AB=a\sqrt{3}$, $AD=3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (Bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Lời giải



Khi quay tam giác ABD quanh AB ta được khối nón đỉnh B có đường cao BA, đáy là đường tròn bán kính $AE=3$ cm. Gọi $I=AC\cap BE$, $IH\perp AB$ tại H. Phần chung của 2 khối nón khi quay tam giác ABC và tam giác ABD quanh AB là 2 khối nón đỉnh A và đỉnh B có đáy là đường tròn bán kính IH.

Ta có ΔIBC đồng dạng với ΔIEA $\Rightarrow\frac{IC}{IA}=\frac{BC}{AE}=\frac{1}{3}\Rightarrow IA=3IC$.

Mặt khác $IH//BC$ $\Rightarrow\frac{AH}{AB}=\frac{IH}{BC}=\frac{AI}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow IH=\frac{3}{4}BC=\frac{3a}{4}$.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A và B có đáy là hình tròn tâm H

$V_1 = \frac{1}{3}\pi.IH^2.AH$.

$V_2 = \frac{1}{3}\pi.IH^2.BH$.

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}.IH^2.AB \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}.\frac{9a^2}{16}.a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 14. (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018) Cho tam giác nhọn ABC, biết rằng khi quay tam giác này quanh các cạnh AB, BC, CA ta lần lượt được các hình tròn xoay có thể tích là 672π, $\frac{3136\pi}{5}$, $\frac{9408\pi}{13}$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S = 1979$. **B.** $S = 364$. **<u>C</u>.** $S = 84$. **D.** $S = 96$.

Lời giải

Vì tam giác ABC nhọn nên các chân đường cao nằm trong tam giác.

Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC, và a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB.

Khi đó

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh AB là $\frac{1}{3}.\pi.{h_c}^2.c = 672\pi$.

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh BC là $\frac{1}{3}.\pi.{h_a}^2.a = \frac{3136\pi}{5}$.

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh CA là $\frac{1}{3}.\pi.{h_b}^2.b = \frac{9408\pi}{13}$.

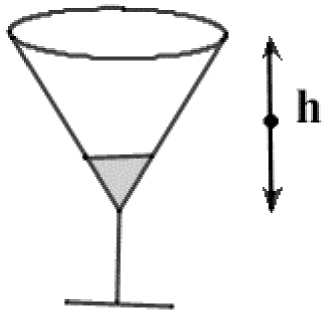
Do đó

$$\begin{cases} \frac{1}{3}c.h_c^2 = 672 \\ \frac{1}{3}a.h_a^2 = \frac{3136}{5} \\ \frac{1}{3}b.h_b^2 = \frac{9408}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{S^2}{c} = 672 \\ \frac{4}{3}\frac{S^2}{a} = \frac{3136}{5} \\ \frac{4}{3}\frac{S^2}{b} = \frac{9408}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{4S^2}{3.672} \\ a = \frac{20S^2}{3.3136} \\ b = \frac{52S^2}{3.9408} \end{cases}$$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = S^8.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{9408}.\frac{1}{28812} \Leftrightarrow 16S^2 = S^8.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{9408}.\frac{1}{28812}$

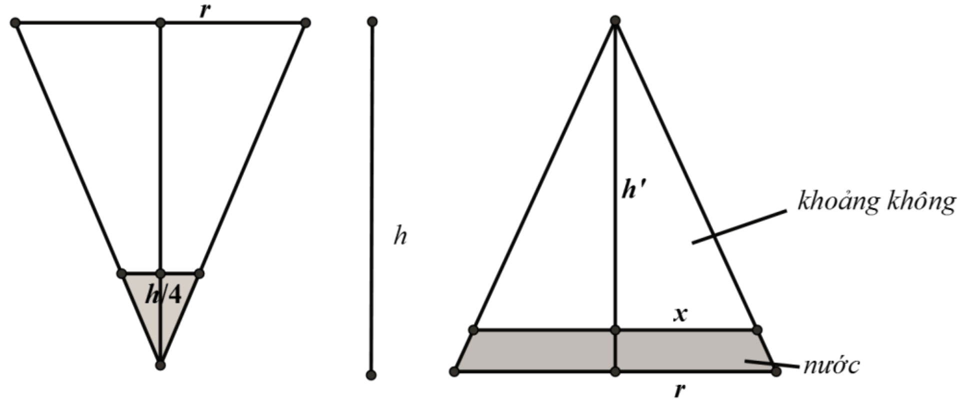
$\Leftrightarrow S^6 = 16.81.9408.28812 \Leftrightarrow S = 84$.

Câu 15. (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Một chiếc ly dạng hình nón (như hình vẽ với chiều cao ly là h). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao của ly. Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi úp ngược ly lại thì tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng bao nhiêu?



A. $\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}$.   B. $\frac{\sqrt[3]{63}}{4}$.   C. $\frac{4-\sqrt{63}}{4}$.   D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải



Giả sử ly có chiều cao h và đáy là đường tròn có bán kính r, nên có thể tích $V=\frac{1}{3}\pi hr^2$.

Khối nước trong ly có chiều cao bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao của ly nên khối nước tạo thành khối nón có chiều cao bằng $\frac{h}{4}$ và bán kính đáy $\frac{r}{4}$ thể tích nước bằng $\frac{1}{3}.\frac{h}{4}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2=\frac{1}{64}.\left(\frac{1}{3}\pi hr^2\right)=\frac{1}{64}V$.

Do đó thể tích khoảng không bằng $V-\frac{1}{64}V=\frac{63}{64}V$.

Nên khi úp ngược ly lại thì ta có các tỉ lệ: $\frac{x}{r}=\frac{h'}{h}\Rightarrow x=\frac{r.h'}{h}$.

Suy ra: thể tích khoảng không bằng: $\frac{1}{3}h'.\pi x^2=\frac{1}{3}.h'.\pi.\left(\frac{r.h'}{h}\right)^2=\frac{1}{3}\pi hr^2.\left(\frac{h'}{h}\right)^3=\left(\frac{h'}{h}\right)^3.V$.

$\Rightarrow\frac{63}{64}V=\left(\frac{h'}{h}\right)^3V\Rightarrow\left(\frac{h'}{h}\right)^3=\frac{63}{64}\Rightarrow\frac{h'}{h}=\sqrt[3]{\frac{63}{64}}=\frac{\sqrt[3]{63}}{4}\Rightarrow h'=\frac{\sqrt[3]{63}}{4}h$.

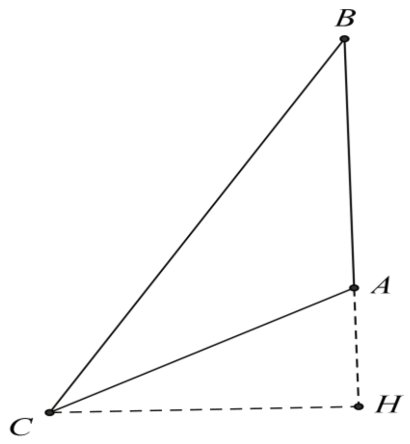
Nên chiều cao mực nước bằng: $h-h'=h-\frac{\sqrt[3]{63}}{4}h=\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}h$.

Vậy tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng $\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}$.

Câu 16. **(Nam Định - 2018)** Cho tam giác ABC có $A=120°$, $AB=AC=a$. Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng:

A. $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



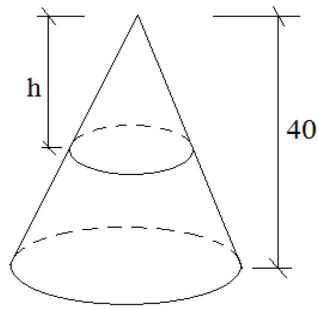
Theo định lý cosin ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A}=a\sqrt{3}$.

Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích $V=V_1-V_2$ với V_1,V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác vuông BCH và tam giác ACH quay xung quanh với HB (H là hình chiếu vuông góc của C lên AB)

Ta tính được $CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; AH=\dfrac{a}{2}$. Khi đó, ta có:

$$V=\frac{1}{3}\pi.CH^2.BH-\frac{1}{3}\pi.CH^2.AH=\frac{1}{3}\pi.CH^2.AB=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.a=\frac{\pi a^3}{4}$$

Câu 17. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Một vật N_1 có dạng hình nón có chiều cao bằng $40cm$. Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\dfrac{1}{8}$

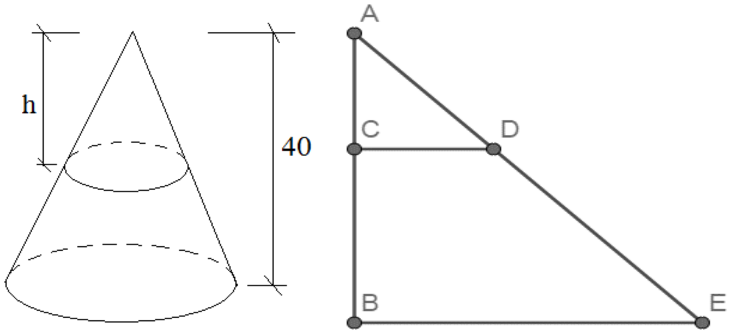


thể tích N_1.Tính chiều cao h của hình nón N_2?

A. $10cm$ **B.** $20cm$ **C.** $40cm$ **D.** $5cm$

Lời giải

Chọn B



Gọi $r_1 = BE$, $h_1 = AB$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón N_1

Gọi $r_2 = CD$, $h = AC$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón N_2

Khi đó thể tích của hai khối nón lần lượt là

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h$

Theo đề bài ta có

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{1}{8} \quad (1)$$

Xét hai tam giác đồng dạng ACD, ABE có:

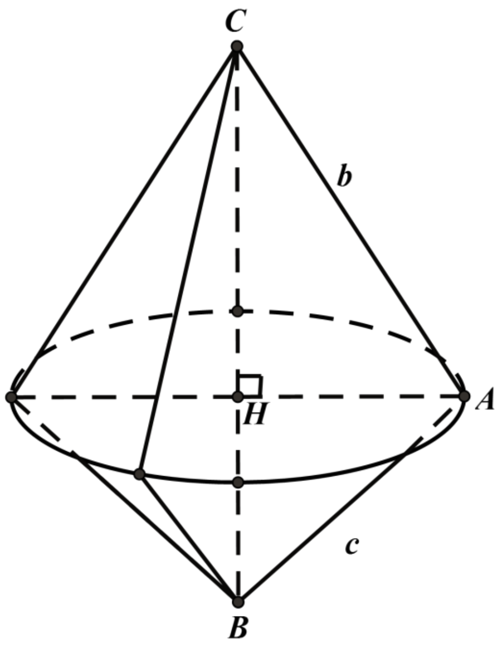
$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{h}{h_1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}h_1 = 20$

Câu 18. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho một tấm bìa hình dạng tam giác vuông, biết b và c là độ dài cạnh tam giác vuông của tấm một khối tròn xoay. Hỏi thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi tấm bìa bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{b^2c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$. **B.** $V = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$. **C.** $V = \frac{2\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$. **D.** $V = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{2(b^2 + c^2)}}$.

Lời giải



Gọi tam giác vuông là ABC, kẻ $AH \perp BC$, H là chân đường cao.

Khi đó $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

Thể tích khối tròn xoay cần tính bằng tổng thể tích 2 khối nón tạo bởi hai tam giác vuông ACH và ABH khi quay quanh trục BC.

Khối nón tạo bởi tam giác vuông ACH khi quay quanh trục BC có thể tích $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi CH.AH^2$

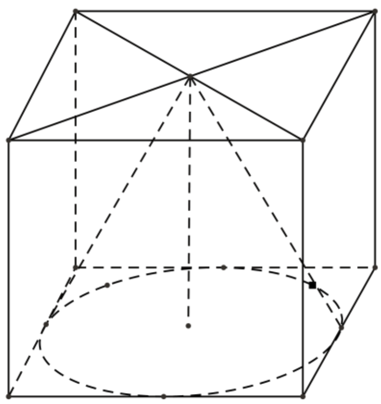
Khối nón tạo bởi tam giác vuông ABH khi quay quanh trục BC có thể tích $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi BH.AH^2$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi CH.AH^2 + \frac{1}{3}\pi BH.AH^2$$

$$= \frac{1}{3}\pi BC.AH^2 = \frac{1}{3}\pi\sqrt{b^2 + c^2}.\left(\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}\right)^2 = \frac{\pi b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Câu 19. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.



A. $\dfrac{\pi}{12 - \pi}$. **B.** $\dfrac{1}{11}$. **C.** $\dfrac{\pi}{12}$. **D.** $\dfrac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Coi khối lập phương có cạnh 1. Thể tích khối lập phường là $V=1$.

Từ giả thiết ta suy ra khối nón có chiều cao $h=1$, bán kính đáy $r=\frac{1}{2}$.

Thể tích lượng nước trào ra ngoài là thể tích V_1 của khối nón.

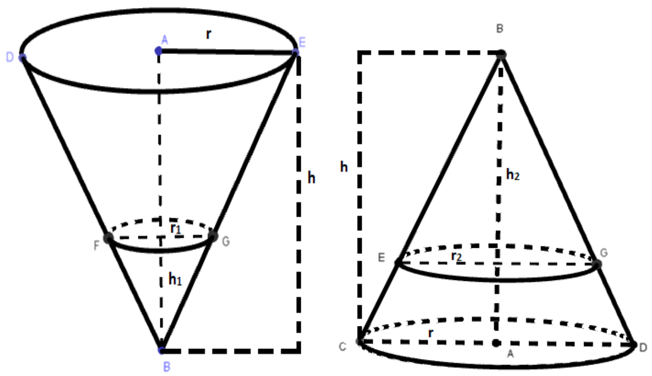
Ta có: $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}.1=\frac{\pi}{12}$.

Thể tích lượng nước còn lại trong thùng là: $V_2=V-V_1=1-\frac{\pi}{12}=\frac{12-\pi}{12}$.

Do đó: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi}{12-\pi}$.

Câu 20. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm.

A. $0,501(\text{cm})$. **B.** $0,302(\text{cm})$. **C.** $0,216(\text{cm})$. **D.** $0,188(\text{cm})$.



Lời giải

Gọi h_1 là chiều cao của nước ta có $h_1=\frac{1}{3}h$. Từ hình vẽ ta có: $\frac{h_1}{h}=\frac{r_1}{r}\Rightarrow r_1=\frac{1}{3}r$;

$\frac{h_2}{h}=\frac{r_2}{r}\Leftrightarrow\frac{h_2}{r_2}=\frac{h}{r}\Leftrightarrow\frac{r}{h}h_2=r_2$.

Ta có thể tích của nước trước và sau khi lôn ngược là như nhau:

$h_1.\pi r_1^2=h.\pi r^2-h_2.\pi r_2^2$

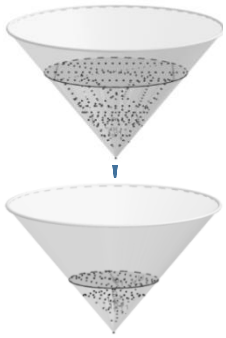
$\Leftrightarrow h_2=\frac{h\pi r^2-h_1\pi r_1^2}{\pi r_2^2}\Leftrightarrow h_2=\frac{hr^2-h_1.r_1^2}{r_2^2}\Leftrightarrow h_2=\frac{hr^2}{r_2^2}-\frac{h_1.r_1^2}{r_2^2}\Leftrightarrow h_2=\frac{h^3}{h_2^2}-\frac{h_1.\frac{1}{9}r^2}{\frac{r^2}{h^2}h_2^2}$

$\Leftrightarrow h_2=\frac{h^3}{h_2^2}-\frac{h_1.\frac{1}{9}}{\frac{1}{h^2}h_2^2}\Leftrightarrow h_2=\frac{15^3}{h_2^2}-\frac{5.\frac{1}{9}.15^2}{h_2^2}\Leftrightarrow h_2^3=15^3-5.\frac{1}{9}.15^2\Leftrightarrow h_2^3=3250\Leftrightarrow h_2=\sqrt[3]{3250}$ Vậ

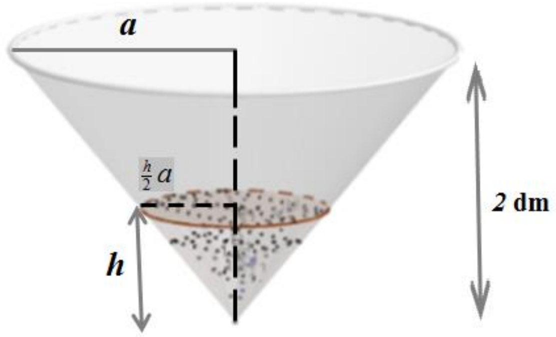
y bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng: $0,188(\text{cm})$.

Câu 21. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A. $\sqrt[3]{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.



Lời giải



Gọi a là bán kính đáy hình nón;

V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón trên lúc chứa đầy nước và khi chiều cao của nước bằng 1 dm;

h, V_3 lần lượt là chiều cao của nước, thể tích của hình nón dưới khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm;

R, r lần lượt là bán kính của hình nón trên của nước, bán kính của hình nón dưới của nước khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

Ta có: $\frac{R}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{a}{2}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi chiều cao bằng 1 là $V_2 = \frac{1}{3}.1.\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$.

Mặt khác: $\frac{r}{a} = \frac{h}{2} \Rightarrow r = \frac{ah}{2}$.

Do đó thể tích nước hình nón dưới $V_3 = \frac{1}{3}.h.\pi\left(\frac{h}{2}a\right)^2 = \frac{\pi a^2 h^3}{12}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước $V_1 = \frac{1}{3}.2.\pi a^2$.

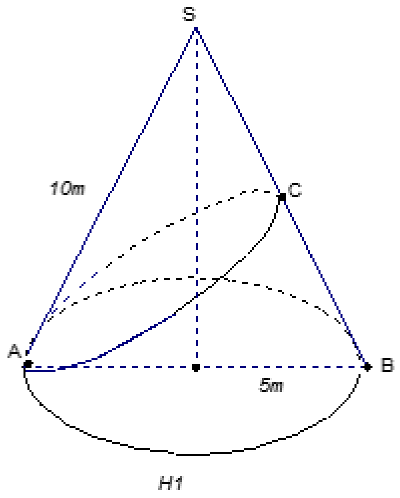
Lại có: $V_3 = V_1 - V_2 \Rightarrow \frac{\pi a^2 h^3}{12} = \frac{1}{3}.2.\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{12} \Leftrightarrow 1 + h^3 = 8 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7}$.

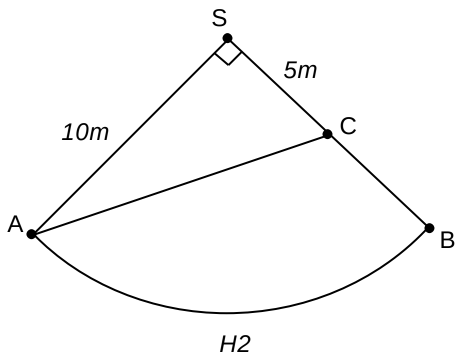
Câu 22. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tại trung tâm thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: chiều dài đường sinh $l = 10\,\text{m}$, bán kính đáy $R = 5\,\text{m}$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Xác định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. 15 m. **B.** 10 m. **C.** $5\sqrt{3}\,\text{m}$. **D.** $5\sqrt{5}\,\text{m}$.

Lời giải

• Cắt hình nón theo hai đường sinh *SA*, *SB* rồi trải ra ta được hình (*H2*) như sau:





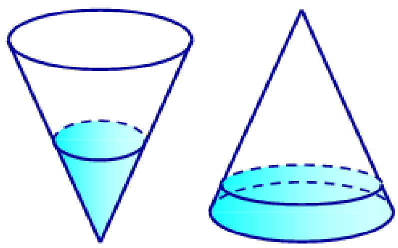
Khi đó, chiều dài dây đèn ngắn nhất là độ dài đoạn thẳng *AC* trên hình *H2*.

• Chu vi cung tròn AB: $C=\frac{1}{2}.2\pi.5=5\pi$.

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại *S*.

$\Rightarrow AC=\sqrt{SA^2+SC^2}=\sqrt{10^2+5^5}=5\sqrt{5}\,\text{m}$.

Câu 23. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là $10cm$. Nếu bịt kím miệng phễu rồi lật ngược lên chiều cao của cột nước trong phễu gần nhất với giá trị nào sau đây.



A. $1,07cm$. **B.** $0,97cm$. **C.** $0,67cm$. **D.** $0,87cm$.

Lời giải

Chọn D

Gọi R là bán kính đáy của cái phễu ta có $\frac{R}{2}$ là bán kính của đáy chứa cột nước

Ta có thể tích phần nón không chứa nước là $V=\frac{1}{3}\pi\left(R\right)^2.20-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2.10=\frac{35}{6}\pi R^2$.

Khi lật ngược phễu Gọi h chiều cao của cột nước trong phễu.phần thể tích phần nón không chứa nước là $V=\frac{1}{3}\pi\left(20-h\right)\left(\frac{R\left(20-h\right)}{20}\right)^2=\frac{1}{1200}\pi\left(20-h\right)^3R^2$.

$\frac{1}{1200}\pi\left(20-h\right)^3R^2=\frac{35}{6}\pi R^2\Rightarrow\left(20-h\right)^3=7000\Rightarrow h\approx 0,87$

Câu 24. Giả sử đồ thị hàm số $y=\left(m^2+1\right)x^4-2mx^2+m^2+1$ có 3 điểm cực trị là A,B,C mà $x_A<x_B<x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây:

A. $(4;6)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

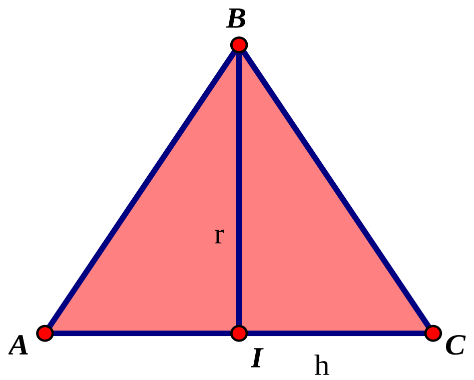
$y'=4(m^2+1)x^3-4mx=4x\left[(m^2+1)x^2-m\right]$

$+\ y'=0 \Leftrightarrow 4x\left[(m^2+1)x^2-m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}}\ (m>0) \end{array}\right.$

+ Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A<x_B<x_C$) là:

$A(-\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}};-\dfrac{m^2}{m^2+1}+m^2+1)$; $B(0;m^2+1)$; $C(\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}};-\dfrac{m^2}{m^2+1}+m^2+1)$.

+ Quay ΔABC quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích là:



$$V=2.\frac{1}{3}.\pi r^2h=\frac{2}{3}\pi BI^2.IC=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)^2.\sqrt{\frac{m}{m^2+1}}=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}}.$$

+ Xét hàm số $f(x)=\dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}$

Có: $f'(x)=\dfrac{m^8(9-m^2)}{\left(m^2+1\right)^6}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow m=3\ (m>0)$.

Ta có BBT:

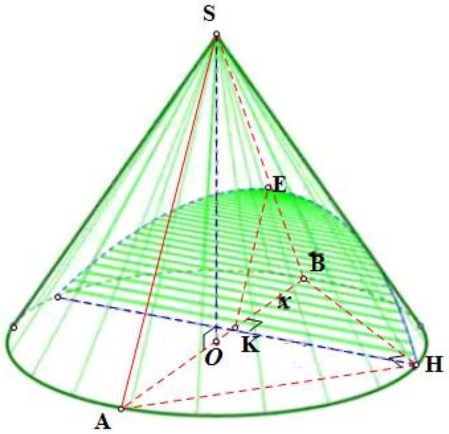
x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m=3$.

Câu 25. Khi cắt hình nón có chiều cao $16\ cm$ và đường kính đáy $24\ cm$ bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

Lời giải



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB, $KE // SA, E \in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán. (Thiết diện này song song với đường sinh SA)

Đặt $BK = x$ (với $0 < x < 24$).

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK.AK = x(24 - x)$.

Trong tam giác SAB có: $\frac{KE}{SA} = \frac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{BA}.SA \Leftrightarrow KE = \frac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \frac{4}{3}KH.KE$.

Ta có: $S^2 = \frac{16}{9}KH^2.KE^2 = \frac{16}{9}.x(24-x).\frac{25x^2}{36} = \frac{100}{81}.(24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \frac{10}{9}.\sqrt{24x^3 - x^4}$

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có: $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 18 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		18		24
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	34992	$\searrow$	

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\frac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207,8\ cm^2$

Câu 26. Một hình nón tròn xoay có đường sinh $2a$. Thể tích lớn nhất của khối nón đó là

A. $\frac{16\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{16\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{8\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Fb: Bi Trần

Gọi hình nón tròn xoay có đường sinh $l = 2a$ có bán kính đáy là R và đường cao là h.

Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$. Ta có: $R^2+h^2=4a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $4a^2=R^2+h^2=\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{2}+h^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{R^4h^2}{4}}$.

$\Rightarrow \frac{R^4h^2}{4}\le\frac{64}{27}a^6\Rightarrow\frac{1}{3}\pi R^2h\le\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{R^2}{2}=h^2\\ h^2+R^2=4a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h=\frac{2\sqrt{3}}{3}a\\ R=\frac{2\sqrt{6}}{3}a\end{cases}$.

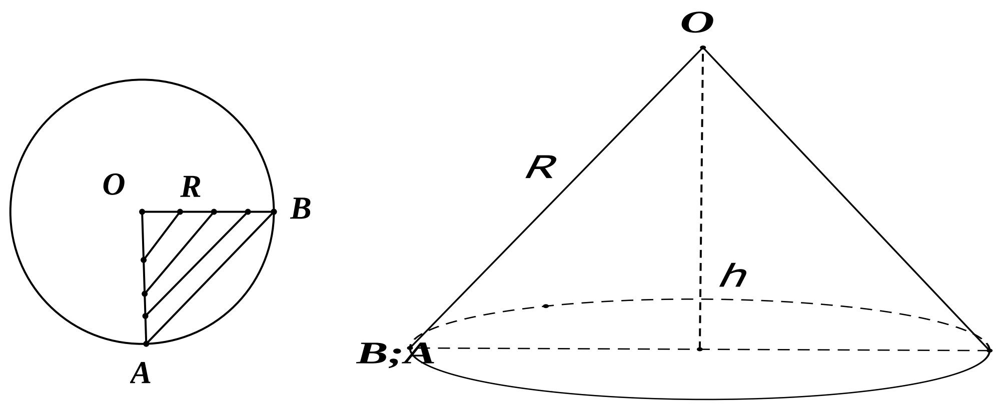
Khi đó $V_{\max}=\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Câu 27. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Huyền có một tấm bìa như hình vẽ, Huyền muốn biến đường tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán OA, OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}$

Lời giải

Chọn A



Ta có diện tích của hình phểu $S_{xq}=\frac{R^2x}{2}\Rightarrow r=\frac{xR}{2\pi}$ là bán kính của đáy phểu; $\Rightarrow x=\frac{2\pi r}{R}$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{r^4.R^2-r^6}$ là thể tích của phểu

Xét hàm số phụ $y=r^4.R^2-r^6\Rightarrow y'=4r^3.R^2-6r^5$

$y'=0\Leftrightarrow 2.R^2-3r^2=0\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$

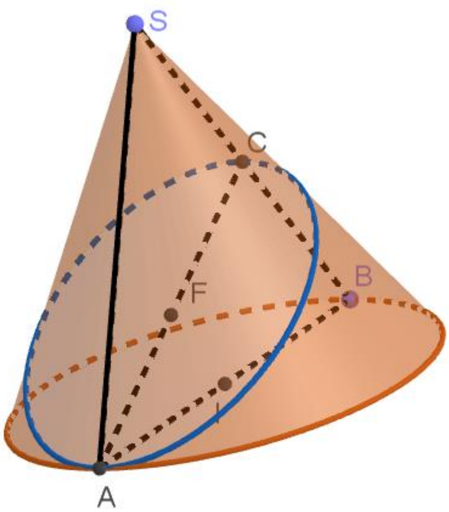
r	0		$\frac{R\sqrt{6}}{3}$		R
$y'(r)$		$+$	0	$-$	
$y(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy y max thì V và V max khi $r=\frac{R\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi r}{R} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi R\sqrt{6}}{3R} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$

Câu 28. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l=10m,$ bán kính đáy $R=5m.$ Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của $SB.$ Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. $15m$. **B.** $10m$. **C.** $5\sqrt{3}m$. **D.** $5\sqrt{5}m$.

Lời giải



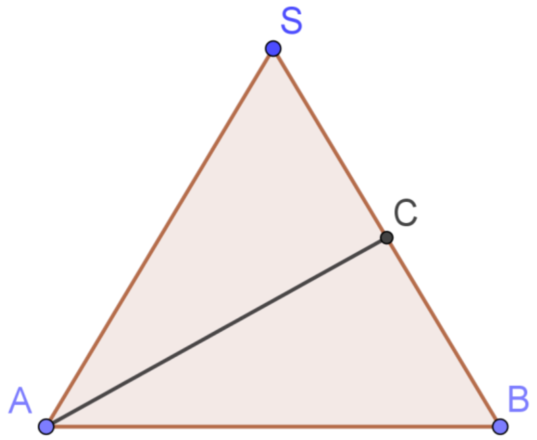
Ta có: ΔSAB cân và $SB=AB \Rightarrow \Delta SAB$ đều

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq}=\pi Rl=50\pi\left(m^2\right)$

Vẽ (P) đi qua C và vuông góc với $AB.$ Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là một Elip

Khi đó, chiều dài dây đèn điện tử ngắn nhất chính là chiều dài dây cung AC trên Elip.

* Ta dùng phương pháp trải hình ra sẽ thấy ngay như sau



Hình trải dài là một hình quạt với AB là độ dài nửa đường tròn và $AB = R.\pi = 5\pi(m)$

$S_{ABS} = \frac{1}{2}S = 25\pi \Leftrightarrow \frac{ASB.\pi R_1^2}{360} = 25\pi \Leftrightarrow ASB = \frac{360.25\pi}{\pi.10^2} = 90^0$

Vậy ΔSAC vuông tại S và $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 5\sqrt{5}.$