Chuyên đề 12 MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÓ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP - LĂNG TRỤ

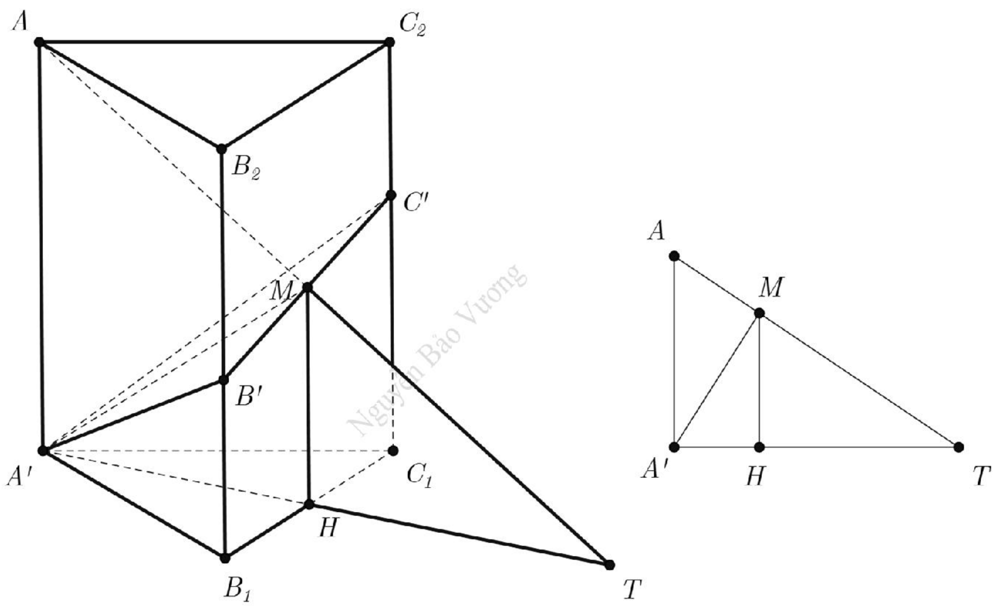
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Mã 101 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Cắt lăng trụ bởi một mặt phẳng qua A' và vuông góc với AA' ta được thiết diện là tam giác $A'B_1C_1$ có các cạnh $A'B_1=1$; $A'C_1=\sqrt{3}$; $B_1C_1=2$.

Suy ra tam giác $A'B_1C_1$ vuông tại A' và trung tuyến $A'H$ của tam giác đó bằng 1.

Gọi giao điểm của AM và $A'H$ là T.

Ta có: $A'M=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $A'H=1 \Rightarrow MH=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\widehat{MA'H}=30^\circ$.

Do đó $\widehat{MA'A}=60^\circ \Rightarrow AA'=\dfrac{A'M}{\cos\widehat{MA'A}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng thể tích khối lăng trụ $A'B_1C_1.AB_2C_2$ và bằng

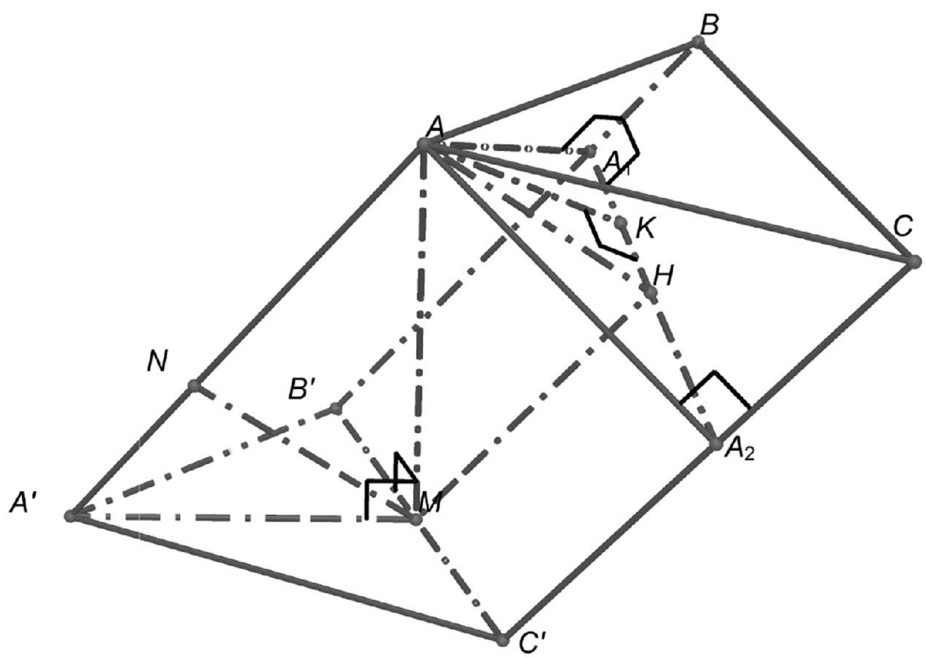
$V=AA'.S_{A'B_1C_1}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2$.

Câu 2. **(Mã 103 -2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn D



Gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên BB', CC'. Theo đề ra $AA_1 = 1; AA_2 = \sqrt{3}; A_1A_2 = 2.$

Do $AA_1^2 + AA_2^2 = A_1A_2^2$ nên tam giác AA_1A_2 vuông tại A.

Gọi H là trung điểm A_1A_2 thì $AH = \frac{A_1A_2}{2} = 1$.

Lại có $MH \parallel BB' \Rightarrow MH \perp (AA_1A_2) \Rightarrow MH \perp AH$ suy ra $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{3}$.

nên $\cos((ABC),(AA_1A_2)) = \cos(MH, AM) = \cos HMA = \frac{MH}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $S_{ABC} = \frac{S_{AA_1A_2}}{\cos((ABC),(AA_1A_2))} = 1$. Thể tích lăng trụ là $V = AM \cdot S_{ABC} = 2$.

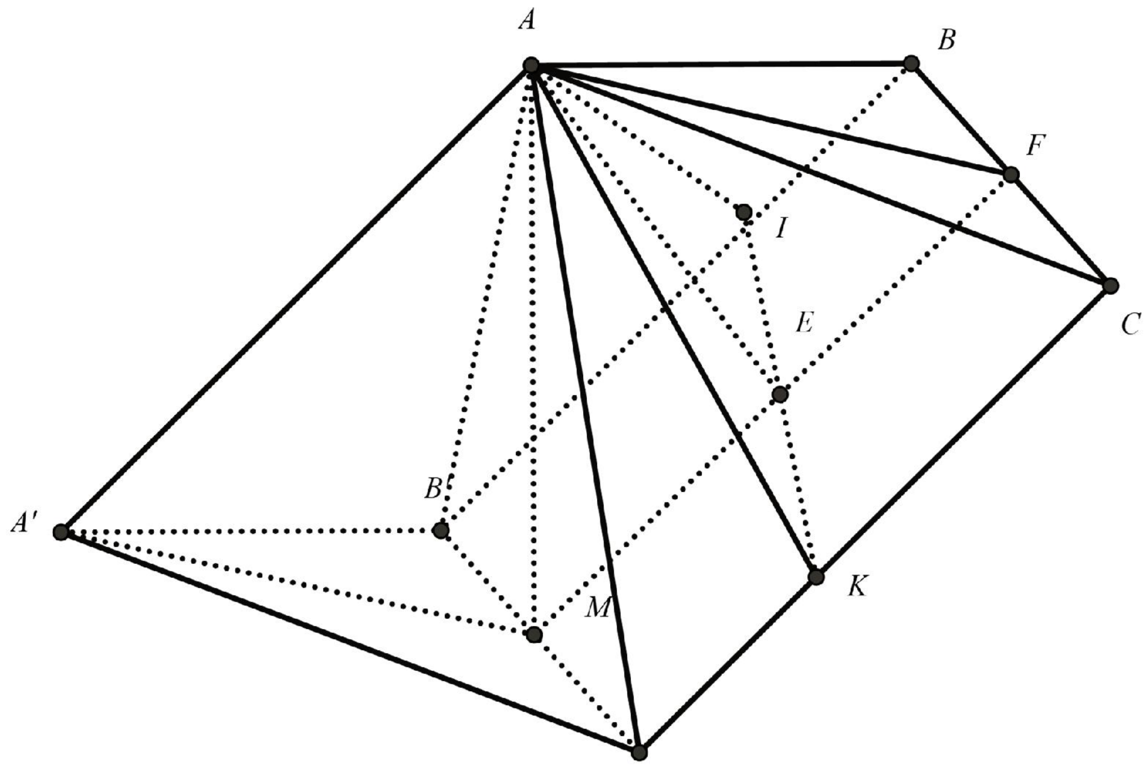
Nhận xét. Ý tưởng câu này là dùng diện tích hình chiếu $S' = S\cos\alpha$.

Câu 3. **(Mã 102 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$ (hình vẽ).

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2 $\Rightarrow AI = 1,\ AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC. $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Ta có $\left.\begin{matrix} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow \Delta AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của IK $\Rightarrow EF \parallel BB'$ $\Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AIK) là góc giữa EF và AM bằng góc $\widehat{AME} = \widehat{FAE}$. Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30^\circ$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là ΔAIK nên ta có: $S_{AIK} = S_{ABC}\cos\widehat{EAF} \Rightarrow 1 = S_{ABC}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}$.

Xét ΔAMF vuông tại A: $\tan\widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$.

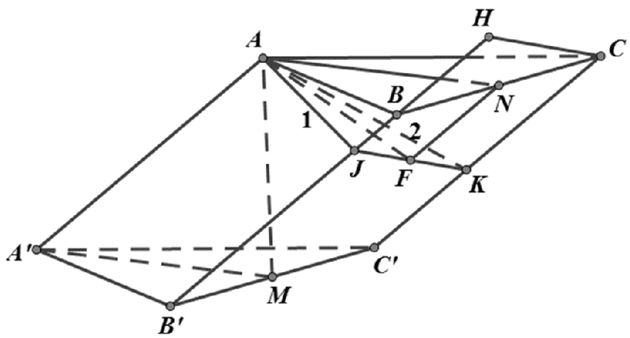
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5}.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB' và CC', H là hình chiếu vuông góc của C lên BB'

Ta có $AJ \perp BB'$ (1).

$AK \perp CC' \Rightarrow AK \perp BB'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BB' \perp (AJK) \Rightarrow BB' \perp JK \Rightarrow JK//CH \Rightarrow JK = CH = \sqrt{5}$.

Xét ΔAJK có $JK^2 = AJ^2 + AK^2 = 5$ suy ra ΔAJK vuông tại A.

Gọi F là trung điểm JK khi đó ta có $AF = JF = FK = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC, xét tam giác vuông ANF ta có:

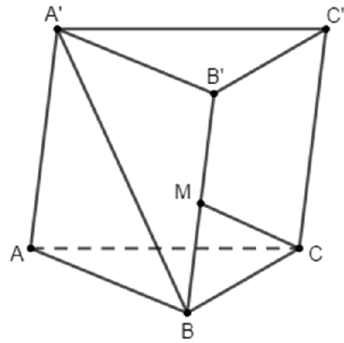
$\cos\widehat{NAF} = \frac{AF}{AN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NAF} = 60^\circ$. ($AN = AM = \sqrt{5}$ vì $AN//AM$ và $AN = AM$).

Vậy ta có $S_{\Delta AJK} = \frac{1}{2}AJ.AK = \frac{1}{2}.1.2 = 1 \Rightarrow S_{\Delta AJK} = S_{\Delta ABC}.\cos 60^\circ \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta AJK}}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Xét tam giác AMA' vuông tại M ta có $\widehat{MAA'} = \widehat{AMF} = 30^\circ$ hay $AM = A'M.\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AM.S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{15}}{3}.2 = \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

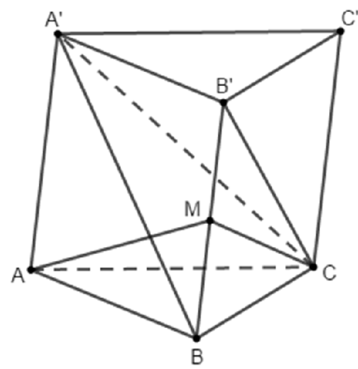
Câu 5. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$. Góc $\widehat{CAA'}=90^\circ$, $\widehat{BAA'}=120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' (*tham khảo hình vẽ*). Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



A. $V=\dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{8}$. **B.** $V=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{4}$. **D.** $V=\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Do $AC\perp AB$, $AC\perp AA'$ nên $AC\perp\left(ABB'A'\right)$. Mà $A'B\subset\left(ABB'A'\right)$ nên $AC\perp A'B$.

Có $A'B\perp AC$, $A'B\perp CM$ nên $A'B\perp\left(AMC\right)\Rightarrow A'B\perp AM$.

Đặt $AA'=x\ \left(x>0\right)$. Ta có $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Suy ra $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}\right)=AB^2-\dfrac{1}{2}AA'^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}$

$=AB^2-\dfrac{1}{2}AA'^2-\dfrac{1}{2}AB.AA'.\cos\widehat{BAA'}=2^2-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}.2.x.\cos120°=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+4$

Do $A'B\perp AM$ nên $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+4=0\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$.

Lại có $S_{ABB'A'}=AB.AA'.\sin\widehat{BAA'}=2.\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}.\sin120°=\dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{33}\right)}{2}$ (đvdt).

Do $AC\perp\left(ABB'A'\right)$ nên $V_{C.ABB'A'}=\dfrac{1}{3}.AC.S_{ABB'A'}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{33}\right)}{2}=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$ (đvtt).

Mà $V_{C.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow V_{C.ABB'A'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{C.A'B'C'}=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

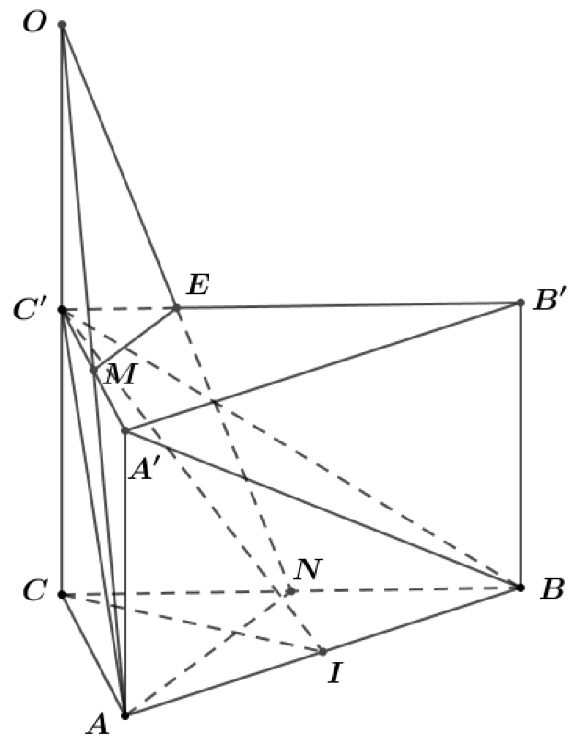
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{3}{2}V_{C.ABB'A'}=\dfrac{3}{2}.\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}=\dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{4}$ (đvtt).

Câu 6. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **C.** $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $AB \perp (CIC')$ nên góc giữa $(C'AB)$ và (ABC) là góc $(CI, C'I)$, suy ra $\widehat{C'IC} = 60°$.

Tam giác $C'IC$ vuông tại C nên $C'C = CI \cdot \tan \widehat{C'IC} = \frac{AB}{2} \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CI = a^2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = CC' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$.

Trong $(ACC'A')$, kéo dài AM cắt CC' tại O.

Suy ra $C'M$ là đường trung bình của ΔOAC, do đó $OC = 2CC' = 2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{O.ACN} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACN} \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} \cdot 2CC' = \frac{1}{3}V$.

Thể tích khối chóp $V_{O.C'ME} = \frac{1}{3} \cdot S_{C'ME} \cdot OC' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} S_{A'B'C'} \cdot OC' = \frac{1}{24}V$.

Do đó $V_{C'EM.CAN} = V_{O.ACN} - V_{O.C'ME} = \frac{1}{3}V - \frac{1}{24}V = \frac{7}{24}V = \frac{7}{24} \cdot a^3\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

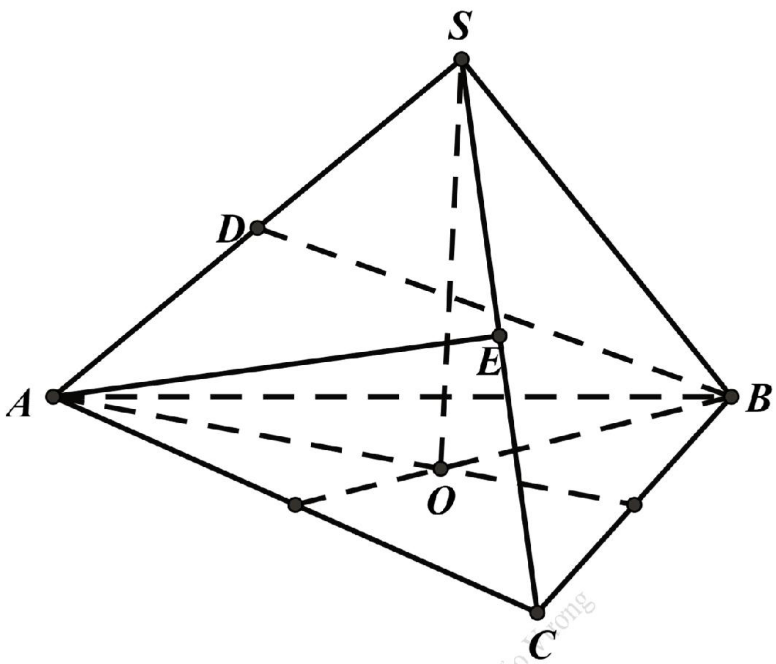
Vậy phần thể tích nhỏ hơn là $V_{C'EM.CAN} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 7. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=2$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD\perp AE$.

A. $\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{9}$. **<u>D</u>.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{27}$.

Lời giải

<u>Chọn D</u>



Gọi O là tâm tam giác đều ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên ta có $SO\perp(ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{SE}-\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$.

Đặt $\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=\widehat{ASB}=\alpha$.

$BD\perp AE\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AE}=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha-2-2\cos\alpha+4\cos\alpha=0\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

Áp dụng định lý hàm số côsin trong tam giác SAC, ta có:

$AC^2=SA^2+SC^2-2SA.SC.\cos\alpha=\frac{8}{3}\Rightarrow AC=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$AO=\frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

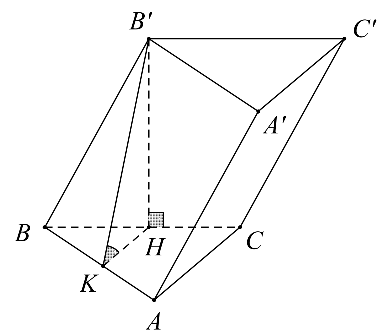
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{4\sqrt{21}}{27}$.

Câu 8. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^0$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{7}a^3}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}a^3}{7}$. **C.** $\frac{6\sqrt{7}a^3}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}a^3}{21}$.

Lời giải

Chọn B



Có $\begin{cases}(BCC'B') \perp (ABC) \\ (BCC'B') \cap (ABC) = BC\end{cases}$. Do đó trong $(BCC'B')$ kẻ $B'H$ vuông góc với BC tại H

thì $B'H \perp (ABC)$ hay $B'H$ là chiều cao của hình lăng trụ.

Trong (ABC) kẻ HK vuông góc với AB tại K. Khi đó $AB \perp (B'HK)$.

Ta có $\begin{cases}(ABB'A') \cap (ABC) = AB \\ (B'HK) \perp AB \\ (B'HK) \cap (ABB'A') = B'K,\ (B'HK) \cap (ABC) = KH\end{cases}$

$\Rightarrow$ Góc giữa $(ABB'A')$ và (ABC) chính là góc giữa $B'K$ và KH.

$\Delta B'HK$ vuông tại H nên $\widehat{B'KH}$ là góc nhọn. Do đó $\widehat{B'KH} = 45°$.

$\Delta B'HK$ vuông tại H có $\widehat{B'KH} = 45° \Rightarrow \Delta B'HK$ vuông cân tại $H \Rightarrow B'H = KH$.

Xét hai tam giác vuông $B'BH$ và BKH, ta có

$$\tan\widehat{B'BH} = \frac{B'H}{BH} = \frac{KH}{BH} = \sin\widehat{ABC} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{B'H}{B'B} = \sin\widehat{B'BH} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{B'BH}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\tan^2\widehat{B'BH}+1}\right)} = \sqrt{1-\frac{1}{\frac{3}{4}+1}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$\Rightarrow B'H = B'B.\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$ (vì $BCC'B'$ là hình thoi có cạnh $BC = 2a$).

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}(BC.\cos 60^0)(BC.\sin 60^0) = \frac{1}{2}.2a.\frac{1}{2}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

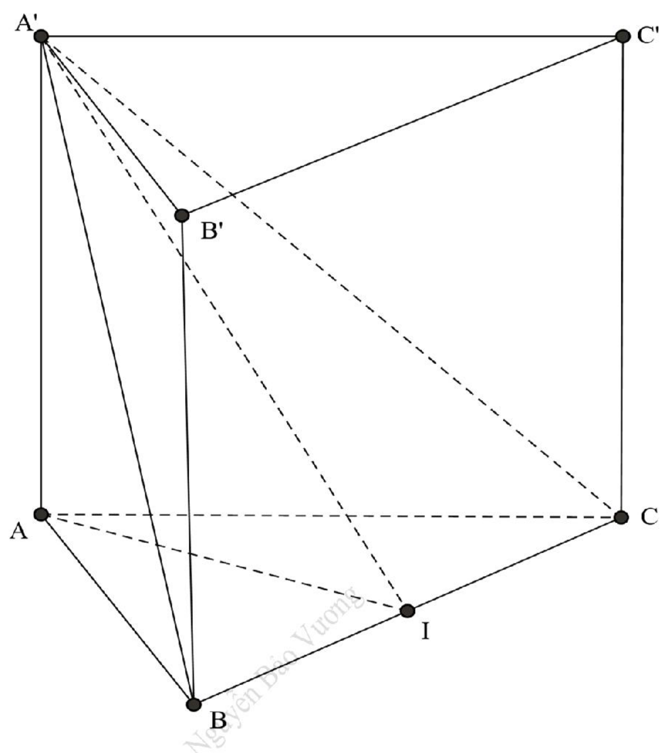
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = B'H.S_{ABC} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{7}a^3}{7}$.

Câu 9. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30^0 và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $64\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm cạnh BC.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều nên $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đều.

Do đó ta có: $A'B = A'C$. Suy ra tam giác $A'BC$ cân tại A' $\Rightarrow A'I \perp BC$.

Mặt khác: tam giác ABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (A'IA)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy bằng góc $\widehat{A'IA} = 30^0$.

Ta có: tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'BC$ trên mặt đáy nên

$S_{ABC} = S_{A'BC}.\cos\alpha = 8.\cos 30^0 = 4\sqrt{3}$.

Đặt $AB = x \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4$.

Ta có: $AI = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AA' = AI.\tan\widehat{AIA'} = 2$.

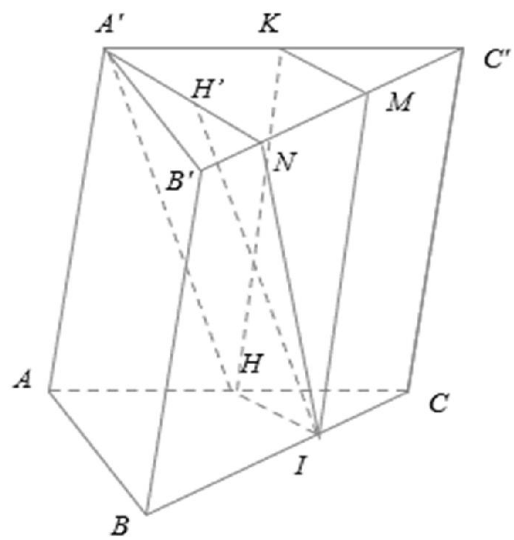
Suy ra: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 2.4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Câu 10. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh H của cạnh AC. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $BC = a\sqrt{3}$. Từ H kẻ HI vuông góc với BC.

Ta có $\Delta HIC \sim \Delta BAC$ nên $\frac{HI}{AB} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow HI = \frac{AB.HC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là trung điểm của $A'C'$. từ K kẻ KM vuông góc với $B'C'$.

Tứ giác $KMIH$ là hình bình hành nên $KM = IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi N là điểm trên $B'C'$ sao cho M là trung điểm của $C'N$ $\Rightarrow A'N = 2KM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $A'H \perp (ABC)$ nên $(A'NIH) \perp (ABC)$. Mà $A'N > HI$ nên $\widehat{HIN}$ là góc tù. Suy ra

$\widehat{HIN} = 120^0 \Rightarrow \widehat{A'NI} = 60^0$.

Gọi H' là hình chiếu của I lên $A'N$ suy ra H' là trung điểm của $A'N$.

$\Rightarrow A'H = IH' = NH'.\tan 60^0 = \frac{3a}{4}$.

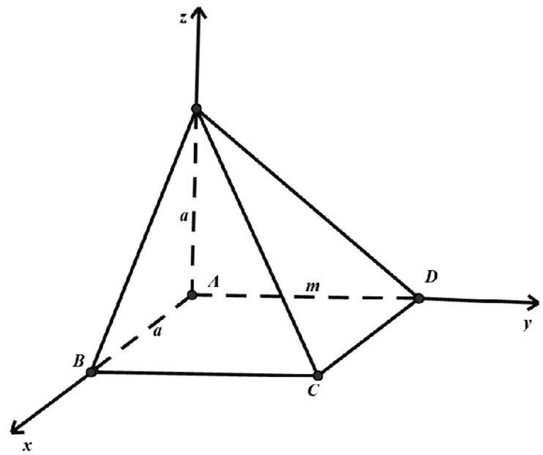
$\Rightarrow V = A'H.S_{ABC} = \frac{3a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 11. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $AD = m$, $m > 0$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc tọa độ trùng với A, tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia $AB, AD,$ AS.Khi đó tọa độ của các điểm là:

$B(a;0;0); D(0;m;0); C(a;m;0); S(0;0;a)$

$\overrightarrow{SB} = (a;0;-a); \overrightarrow{BC} = (0;m;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}\right] = (ma;0;ma)$

$\overrightarrow{SD} = (0;m;-a); \overrightarrow{DC} = (a;0;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{DC}\right] = (0;-a;-ma)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}\right] = (ma;0;ma)$, của mặt phẳng (SCD) là $\left[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{DC}\right] = (0;-a^2;-ma)$.

Theo giả thiết: $cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{m^2a^2}{a\sqrt{a^2+m^2}.ma.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3m^2 = 2\left(a^2+m^2\right) \Rightarrow m = a\sqrt{2}.$

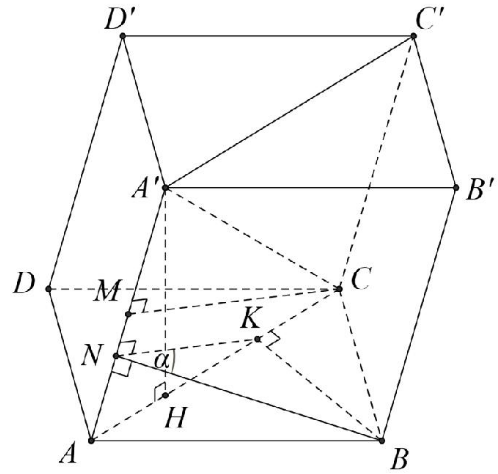
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12. **(Sở Ninh Bình)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $V = 12$. **B.** $V = 6$. **C.** $V = 8$. **D.** $V = 10$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của AA'. Kẻ $A'H$ vuông góc với AC tại H, BK vuông góc với AC tại K, KN vuông góc với AA' tại N.

Do $(AA'C'C)\perp(ABCD)$ suy ra $A'H\perp(ABCD)$ và $BK\perp(AA'C'C)\Rightarrow BK\perp AA'$

$\Rightarrow AA'\perp(BKN)\Rightarrow AA'\perp NB$ suy ra $\left(\widehat{(AA'C'C),(AA'B'B)}\right)=\widehat{KNB}=\alpha$.

Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6}$, $AD=\sqrt{3}$ suy ra $BD=3=AC$

Suy ra $\Delta ACA'$ cân tại C. Suy ra $CM\perp AA'\Rightarrow KN // CM$

$\Rightarrow \dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{NK}{MC}$.

Xét ΔABC vuông tại B có BK là đường cao suy ra $BK=\dfrac{BA.BC}{AC}=\sqrt{2}$ và

$AB^2=AK.AC\Rightarrow AK=\dfrac{AB^2}{AC}=2$

Xét ΔNKB vuông tại K có $\tan\alpha=\tan\widehat{KNB}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{KB}{KN}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow KN=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét ΔANK vuông tại N có $KN=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $AK=2$ suy ra $AN=\dfrac{2}{3}$.

$$\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{\frac{2}{3}}{AM}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{MC}\Rightarrow\begin{cases}AM=1\Rightarrow AA'=2\\ CM=2\sqrt{2}\end{cases}.$$

Ta lại có: $A'H.AC=CM.AA'\Rightarrow A'H=\dfrac{CM.AA'}{AC}=\dfrac{2\sqrt{2}.2}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

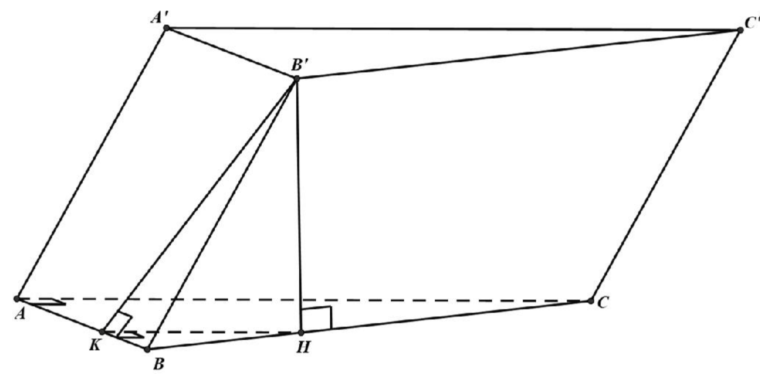
Suy ra thể tích khối lăng trụ cần tìm là: $V=A'H.AB.AD=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}.\sqrt{6}.\sqrt{3}=8$.

Câu 13. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60°$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là chân đường cao hạ từ B' của tam giác $B'BC$. Do góc $\widehat{B'BC}$ là góc nhọn nên H thuộc cạnh BC. $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) suy ra $B'H$ là đường cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$BCC'B'$ là hình thoi suy ra $BB' = BC = 2a$. Tam giác ABC vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60°$ suy ra $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi K là hình chiếu của H lên AB, do tam giác ABC là tam giác vuông tại A nên $HK // AC \Rightarrow \dfrac{BK}{BA} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BH = 2BK$.

Khi đó mặt phẳng $(B'HK)$ vuông góc với AB nên góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{B'KH}$. Theo giả thiết, $\widehat{B'KH} = 45° \Rightarrow B'K = h\sqrt{2}$, với $B'H = h$.

Xét tam giác vuông $B'BH$ có $B'H^2 + BH^2 = B'B^2$ hay $h^2 + 4BK^2 = 4a^2\,(1)$.

Xét tam giác vuông $B'BK : B'K^2 + BK^2 = B'B^2$ hay $2h^2 + BK^2 = 4a^2\,(2)$.

Từ (1) và (2) ta có $h = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

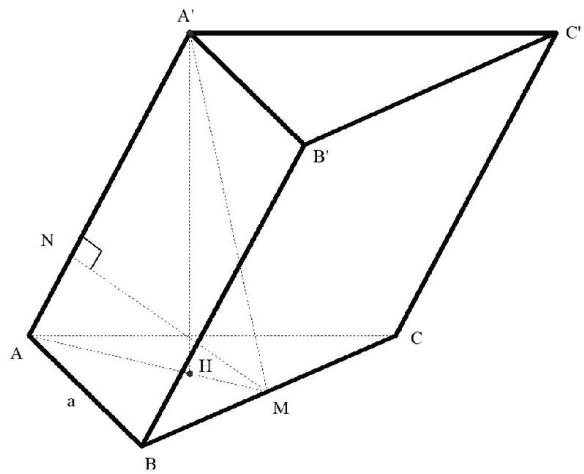
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V = S_{ABC}.h = \dfrac{1}{2}AB.BC.h = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi M là trung điểm BC, H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

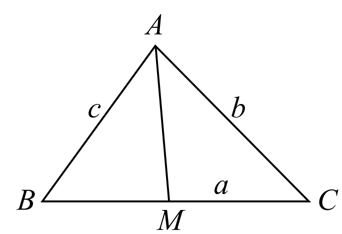
+ $AM \perp BC$

$AH \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (AA'M)$.

+ Trong tam giác $AA'M$, kẻ $MN \perp AA'$ tại N

$MN \perp BC$ tại M vì $BC \perp (AA'M)$.



$\Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AA' và $BC \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

+ Tam giác $AA'M$ có $S_{\Delta AA'M} = \dfrac{1}{2}A'H.AM = \dfrac{1}{2}MN.AA'$

$\Rightarrow A'H.AM = MN.AA' \Leftrightarrow A'H.AM = MN.\sqrt{A'H^2 + AH^2}$

$$\Rightarrow A'H = \frac{MN.\sqrt{A'H^2+AH^2}}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{A'H^2+\left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{A'H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2}.$$

$$\Rightarrow 4A'H^2 = A'H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A'H = \frac{a}{3}.$$

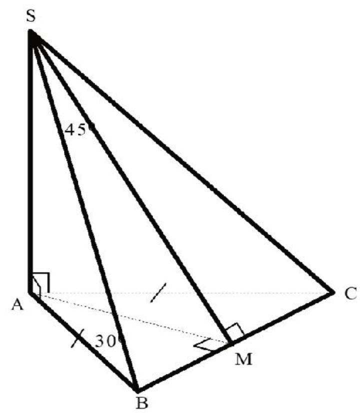
Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 15. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC cân tại A. Cạnh bên SB lần lượt tạo với mặt phẳng đáy, mặt phẳng trung trực của BC các góc bằng 30^0 và 45^0, khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng a. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{6}$. **D.** $V_{S.ABC} = a^3$.

Lời giải

Chọn C



+ Lấy M là trung điểm của BC, tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow AM \perp BC$.

$SA \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAM)$ tại trung điểm M $\Rightarrow (SAM)$ là mặt phẳng trung trực cạnh BC.

Góc giữa SB và mặt phẳng (SAM)= góc giữa SB và $SM = \widehat{BSM} = 45^0$.

Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC)= góc giữa SB và $AB = \widehat{SBA} = 30^0$.

$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM \Rightarrow$ khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng $SM = a$.

+ Tam giác vuông cân SBM có $BM = a, SB = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow BC = 2BM = 2a$.

Tam giác vuông SAB có $\sin 30^0 = \frac{SA}{SB} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác vuông ABM có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

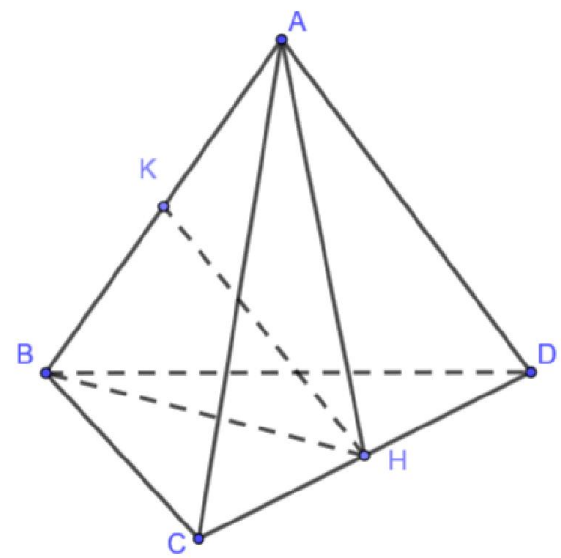
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}.2a.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{6}$.

Câu 16. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = BD = AC = AD = 1, (ACD) \perp (BCD)$ và $(ABD) \perp (ABC)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.

Đặt $AH = x, (x > 0)$

 ΔACD và ΔBCD lần lượt cân tại A và D nên AH và BH là hai đường cao tương ứng.

$$\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \Rightarrow AH \perp (BCD) \\ (ACD) \supset AH \perp CD \end{cases}$$

Do đó $AH \perp BH$ (1)

$\Delta ACD = \Delta BCD (c.c.c)$ do đó $AH = BH$ (2 đường cao tương ứng) (2)

Từ (1), (2) suy ra ΔAHB vuông cân tại H.

$\Rightarrow AB = AH\sqrt{2} = x\sqrt{2}$. (3)

 Chứng minh tương tự ta được ΔCKD vuông cân tại K.

$$\Rightarrow CK = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{2.\text{HD}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{2}.\sqrt{1-x^2}$$

Mặt khác, ΔACD cân tại A có CK là đường cao nên:

$AB = 2AK = 2\sqrt{AC^2 - CK^2} = 2\sqrt{1 - 2(1-x^2)}$ (4)

Từ (3), (4) ta có:

$$x\sqrt{2} = 2\sqrt{1-2(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 4(2x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (x > 0)$$

$$CD = 2.HD = 2\sqrt{1 - AH^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

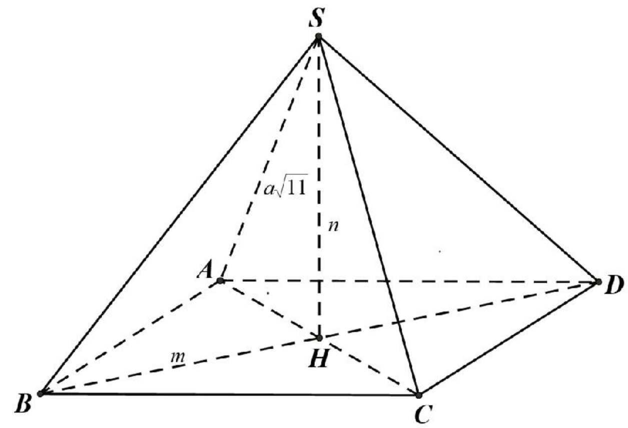
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH.S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{27}.$$

Câu 17. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $12a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $SH\perp(ABCD)$. Đặt $m=HA$, $n=SH$. Do tam giác SAH vuông tại H nên $m^2+n^2=11a^2$

Xây dựng hệ trục tọa độ như sau: $H(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(-m;0;0)$, $C(0;m;0)$, $S(0;0;n)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (SBC) là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1$ hay véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\overrightarrow{n_1}=(n;n;m)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (SCD) là: $\frac{x}{-m}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1$ hay véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\overrightarrow{n_2}=(n;-n;-m)$

Do cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$ nên $\frac{1}{10}=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}$ hay

$\frac{m^2}{2n^2+m^2}=\frac{1}{10}$ mà $n^2=11a^2-m^2$

Vậy $\frac{m^2}{2n^2+m^2}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{m^2}{22a^2-m^2}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow m^2=2a^2\Rightarrow m=a\sqrt{2}\Rightarrow SH=3a$

$m=HA=a\sqrt{2}$ nên $AB=2a$,

Chiều cao của hình chóp là $SH=3a$.

Diện tích của hình vuông là $S_{ABCD}=4a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.4a^2.3a=4a^3$.

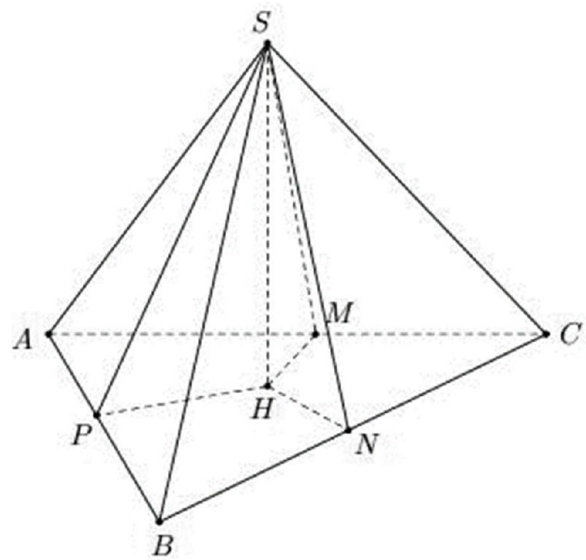
Câu 18. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB)

là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

A. $\frac{1}{36}$ **B.** $\frac{1}{48}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC,BC,AB.

Đặt $SH=h \Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.h.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{h\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $AP=\frac{2S_{SAB}}{AB}=2S_{SAB}=\frac{6V_{S.ABC}}{d\left(C;(SAB)\right)}=\frac{h\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{30}}{20}=h\sqrt{10}$

Tương tự, tính được $HM=2h, HN=h$

$\Rightarrow PH=\sqrt{SP^2-SH^2}=3h$

Ta có $S_{ABC}=S_{HAB}+S_{HAC}+S_{HBC}=\frac{1}{2}\left(HP+HM+HN\right) \Leftrightarrow 3h=\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{12}$

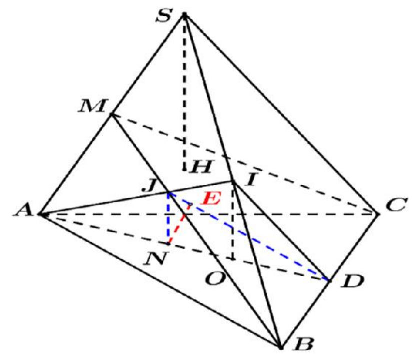
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{48}$.

Câu 19. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\frac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{12}$ **B.** $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$ **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ **D.** $V=\frac{7\sqrt{3}a^3}{12}$

Lời giải

Chọn B



Vì $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$ $\Rightarrow S,A,B,C$ cùng thuộc mặt cầu đường kính SB.

Gọi D là trung điểm BC, I là trung điểm SB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có $OI\perp(ABC)$.

Gọi H là điểm đối xứng với B qua O $\Rightarrow SH\perp(ABC)$(vì OI là đường trung bình ΔSHB).

Gọi $BM\cap AI=J$, ta có J trọng tâm ΔSAB.

Trong ΔAID, kẻ $JN//IO$. Khi đó, vì $BC\perp(JND)$ nên $(JND)\perp(MBC)$.

Kẻ $NE\perp JD$, ta có $NE\perp(MBC)$. Do đó $d\left(N;(MBC)\right)=NE$.

Ta có $\dfrac{d\left(A,(MBC)\right)}{d\left(N,(MBC)\right)}=\dfrac{AD}{ND}=\dfrac{AD}{AD-AN}=\dfrac{AD}{AD-\frac{2}{3}AO}=\dfrac{AD}{AD-\frac{4}{9}AD}=\dfrac{9}{5}$.

Suy ra, $d\left(N,(MBC)\right)=\dfrac{5}{9}d\left(A,(MBC)\right)=\dfrac{10a}{21}$.

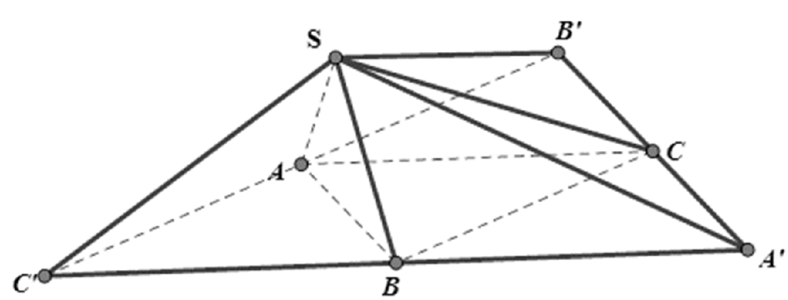
Xét ΔJND có $\dfrac{1}{NE^2}=\dfrac{1}{ND^2}+\dfrac{1}{NJ^2}$ nên $NJ=\dfrac{10a}{3}\Rightarrow OI=\dfrac{3}{2}NJ=5a\Rightarrow SH=10a$.

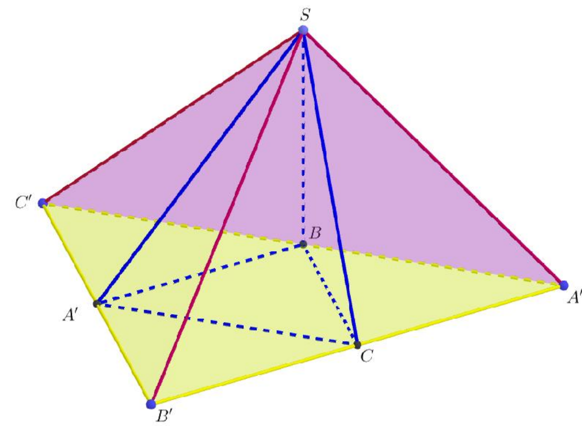
Vậy $V_{SABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.10a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 20. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA=BC=3$; $SB=AC=4$; $SC=AB=2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{390}}{12}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{390}}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{390}}{6}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{390}}{8}$

Lời giải.





+ Dựng hình chóp $S.A'B'C'$ sao cho A là trung điểm $B'C'$, B là trung điểm $A'C'$, C là trung điểm $A'B'$.

+ Khi đó $SB = AC = BA' = BC' = 4$ nên $\Delta SA'C'$ vuông tại S và

$SA'^2 + SC'^2 = (2.SB)^2 = 64 \quad (1)$.

+ Tương tự $\Delta SB'C'$, $\Delta SA'B'$ vuông tại S và $\begin{cases} SA'^2 + SB'^2 = 80 & (2) \\ SB'^2 + SC'^2 = 36 & (3) \end{cases}$.

+ Từ $(1);(2);(3)$ ta suy ra $SC' = \sqrt{10}$; $SB' = \sqrt{26}$; $SA' = \sqrt{54}$.

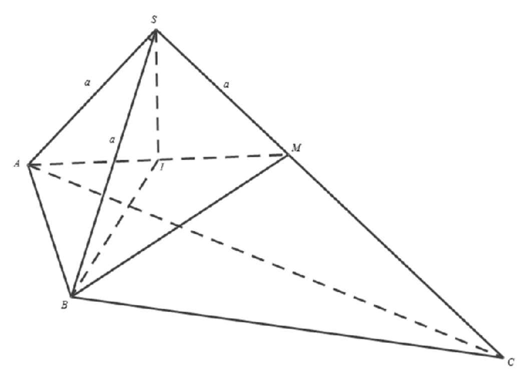
+ Ta tính được $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}SC'.\frac{1}{2}.SA'.SB' = \sqrt{390}$ và $V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.A'B'C'} = \frac{\sqrt{390}}{4}$ (đvtt).

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$, $SA = SB = a$, $SC = 3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

Gọi M là điểm nằm trên SC sao cho $SM = \frac{1}{3}SC = a$.

Ta có:

Tam giác SAM vuông tại S $\Rightarrow AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBM là tam giác đều có độ dài cạnh $SM = SB = BM = a$.

Tam giác SAB là tam giác đều có độ dài cạnh $SA = SB = AB = a$.

Vậy $AB^2 + BM^2 = AM^2 \Rightarrow$ Tam giác ABM là tam giác vuông tại B.

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ASM \;\Rightarrow\; SI = IB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IB^2 + SI^2 = SB^2 \Rightarrow$ Tam giác SIB vuông tại I

$\Rightarrow \begin{cases} SI \perp IB \\ SI \perp AM \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABM) \Rightarrow SI$ là đường cao của khối chóp $SABM$

Thể tích của khối chóp $S.ABM$ là $V_{S.ABM} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABM}.SI = \dfrac{1}{6}.AB.BM.SI = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt).

Mà $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = 3.V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Cách 2: Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}.\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta - 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\delta}$

Trong đó $a = SA$; $b = SB$; $c = SC$; $\alpha = \widehat{ASB}$; $\beta = \widehat{ASC}$; $\delta = \widehat{BSC}$

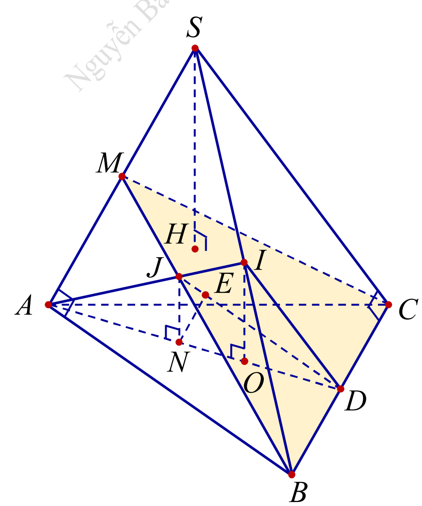
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{a.a.3a}{6}.\sqrt{1-\cos^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ - \cos^2 90^\circ - 2\cos 60^\circ.\cos 60^\circ.\cos 90^\circ} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$ (đvtt).

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$, biết khoảng cách từ A đến (MBC) bằng $\dfrac{6a}{\sqrt{21}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{10a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{39}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^3\sqrt{13}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Vì $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90° \Rightarrow S, A, B, C$ cùng thuộc mặt cầu đường kính SB.

Gọi D là trung điểm BC, I là trung điểm SB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có $OI \perp (ABC)$.

Gọi H là điểm đối xứng với B qua $O \Rightarrow SH \perp (ABC)$ (vì OI là đường trung bình ΔSHB).

Gọi $BM \cap AI = J$, ta có J trọng tâm ΔSAB.

Trong ΔAID, kẻ $JN \,//\, IO$. Khi đó, vì $BC \perp (JND)$ nên $(JND) \perp (MBC)$.

Kẻ $NE \perp JD$, ta có $NE \perp (MBC)$. Do đó $d(N;(MBC)) = NE$.

Ta có $\dfrac{d\left(A,\left(MBC\right)\right)}{d\left(N,\left(MBC\right)\right)}=\dfrac{AD}{ND}=\dfrac{AD}{AD-AN}=\dfrac{AD}{AD-\dfrac{2}{3}AO}=\dfrac{AD}{AD-\dfrac{4}{9}AD}=\dfrac{9}{5}$.

Suy ra, $d\left(N,\left(MBC\right)\right)=\dfrac{5}{9}d\left(A,\left(MBC\right)\right)=\dfrac{10a}{3\sqrt{21}}$.

Xét ΔJND có $\dfrac{1}{NE^2}=\dfrac{1}{ND^2}+\dfrac{1}{NJ^2}$ nên $NJ=\dfrac{10a}{9}\Rightarrow OI=\dfrac{3}{2}NJ=\dfrac{5a}{3}\Rightarrow SH=\dfrac{10a}{3}$.

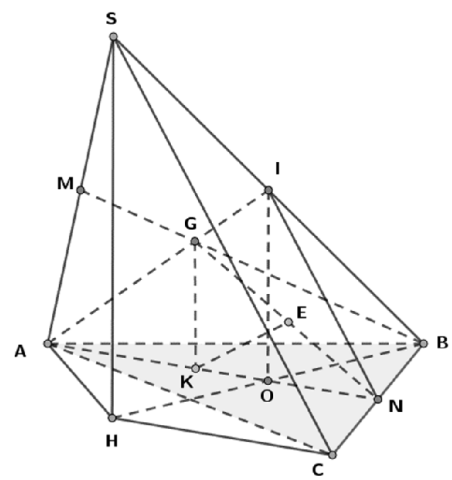
Vậy $V_{SABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{10a}{3}.\dfrac{\left(2a\right)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{10\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 23. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của SB.

Do $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi O là tâm của đáy ABC $\Rightarrow OI\perp(ABC)$.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Ta có $AB\perp(SAH)\Rightarrow AB\perp AH$. Tương tự, $BC\perp CH$. Suy ra H thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có tâm là O nên O là trung điểm của BH. Do đó, $SH=2OI$.

Gọi N là trung điểm của $BC\Rightarrow IN // SC$ nên $BC\perp IN\Rightarrow BC\perp\left(AIN\right)(*)$

Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và K là hình chiếu của G lên mặt phẳng $\left(ABC\right)\Rightarrow K\in AO$ và $GK // OI\Rightarrow AK=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{4}{9}AN\Rightarrow KN=\dfrac{5}{9}AN$.

$\Rightarrow d\left[K,\left(MBC\right)\right]=\dfrac{5}{9}d\left[A,\left(MBC\right)\right]=\dfrac{10a}{21}$.

Kẻ $KE\perp GN\overset{(*)}{\Rightarrow}KE\perp BC\Rightarrow KE\perp\left(MBC\right)\Rightarrow d\left[K,\left(MBC\right)\right]=KE=\dfrac{10a}{21}$.

Tam giác GKN vuông tại K có

$$\frac{1}{KE^2}=\frac{1}{GK^2}+\frac{1}{KN^2}\Rightarrow GK=\frac{10a}{3}\Rightarrow SH=2OI=3GK=10a.$$

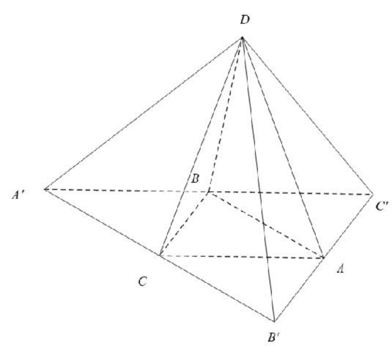
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.10a=\frac{5a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD=BC=3$, $AC=BD=4$, $AB=CD=2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{2740}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2474}}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{2047}}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{2470}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng tứ diện $D.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$.

Theo cách dựng và theo bài ra có: $AC=BC'=BD$.

Xét tam giác $DA'C'$ có: BD là đường trung tuyến và $A'B=BC'=BD\Rightarrow\Delta DA'C'$ vuông tại D.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\Delta DB'C'$, $\Delta DA'B'$ vuông tại D.

Khi đó tứ diện $D.A'B'C'$ có các cạnh DA', DB', DC' đôi một vuông góc với nhau.

Ta có: $V_{ABCD}=\frac{1}{4}V_{D.A'B'C'}=\frac{1}{24}DA'.DB'.DC'$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}DA'^2+DB'^2=48\\DA'^2+DC'^2=64\\DB'^2+DC'^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}DA'^2=38\\DB'^2=10\\DC'^2=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}DA'=\sqrt{38}\\DB'=\sqrt{10}\\DC'=\sqrt{26}\end{cases}$

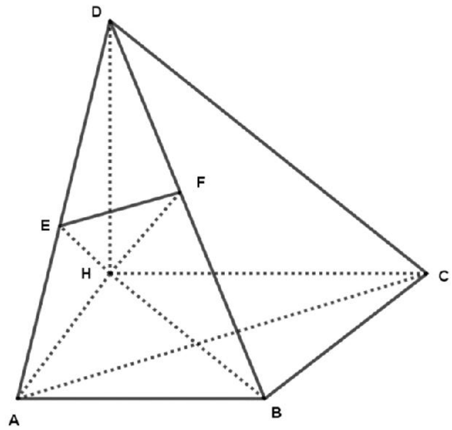
Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{24}DA'.DB'.DC'=\frac{1}{24}.\sqrt{38}.\sqrt{10}.\sqrt{26}=\frac{\sqrt{2470}}{12}$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90°$; $AB=a$; $AC=a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC}=135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H thuộc mặt phẳng (ABC) và $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp BD \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác ABH có $AB = a$; $\widehat{ABC} = 135°$; $\widehat{CBH} = 90° \Rightarrow \widehat{ABH} = 45°$ suy ra ΔABH vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý côsin ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}.\mathrm{BA}.\mathrm{BC}.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với DA, DB.

Suy ra $HE \perp (ABD)$, $HF \perp (BCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng góc $\widehat{EHF}$.

Tam giác EHF vuông tại E, ta có $HE = \frac{a.DH}{\sqrt{a^2 + DH^2}}$, $HF = \frac{DH.a.\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + DH^2}}$.

Mặt khác: $\cos\widehat{EHF} = \frac{HE}{HF} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{DH^2 + 2a^2}}{\sqrt{2.DH^2 + 2a^2}} \Rightarrow DH = a.$

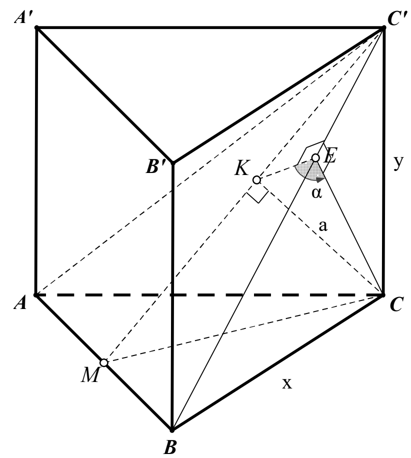
Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.DH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{6}$.

Câu 26. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC

Do $\begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCC') \Rightarrow (ABC') \perp (MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp (ABC')$, do đó $CK = d(C;(ABC')) = a$.

Đặt $BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0)$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$ (1).

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC} = \alpha$, $EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2}$ (2).

Giải $(1),(2)$ ta được $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

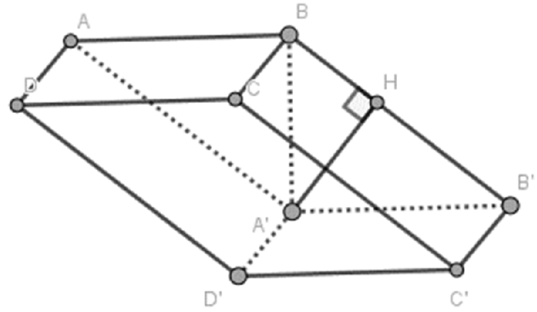
$V = y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$

Câu 27. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Góc giữa AA' với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và DD' bằng 1. Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng 60^0, Tính thể tích khối hộp đã cho.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $A'B\perp(ABCD)\Rightarrow(AA',ABCD)=\widehat{AA'B}=\widehat{B'BA}=45^0$

Vì $d(A,BB')=d(A',BB')=A'H=1$ (H là hình chiếu của A lên BB'). Suy ra ta có

$A'B'=\dfrac{A'H}{\sin(BB'A)}=\sqrt{2}$ và $A'B=A'B'.\tan(BB'A')=\sqrt{2}$

Gán hệ trục tọa độ gốc A' với điểm $B\in Oz,B'\in Oy$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')\equiv(Oxy)$. Ta có tọa độ các điểm $A'(0,0,0),B\left(0,0,\sqrt{2}\right),B'\left(0,\sqrt{2},0\right)$.

Ta có $D\in(Oxy)$, giả sử $D'(a,b,0);a\geq 0\Rightarrow C'\left(a,b+\sqrt{2},0\right)$.

Chọn $\vec{n}_{(BB'C'C)}=(-b,a,a)$ và $\vec{n}_{(DD'C'C)}=(1,0,0)$.

Vì góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng 60^0. Ta có

$\cos(60^0)=\dfrac{|-b|}{\sqrt{b^2+2a^2}}\Leftrightarrow b=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

Mặt khác ta có đường thẳng DD' có phương trình $\begin{cases}x=a\\y=b-t\\z=t\end{cases}$ 4. Vì khoảng cách từ A đến đường thẳng DD' bằng 1. Ta có:

$d(A,DD'0)=d(A',DD')=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'D'},\vec{u}_{DD'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{DD'}\right|}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{b^2+2a^2}}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow\sqrt{b^2+2a^2}=\sqrt{2}\Rightarrow b=\pm\sqrt{2}$

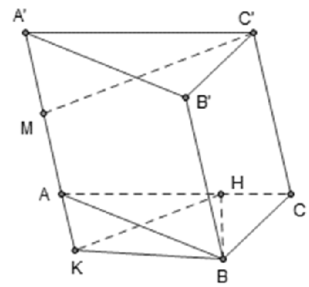
Trường hợp 1: $D\left(\sqrt{3},\sqrt{2},0\right)\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=A'B.S_{A'B'C'D'}=\sqrt{2}.\left|\left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'D'}\right]\right|=2\sqrt{3}$

Trường hợp 2. $D\left(\sqrt{3},-\sqrt{2},0\right)\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=A'B.S_{A'B'C'D'}=\sqrt{2}.\left|\left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'D'}\right]\right|=2\sqrt{3}$

Câu 28. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6},AD=\sqrt{3},A'C=3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C),(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V=8$. **B.** $V=12$. **C.** $V=10$. **D.** $V=6$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của B lên $\left(ACC'A'\right)$, vậy $BH \perp \left(ACC'A'\right)$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3$; $BH = \dfrac{AB.BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{6}.\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$; $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 1$;

$AH = AC - HC = 2$.

Kẻ $HK \perp AA', \left(K \in AA'\right)$, $AA' \perp BH$ vì $BH \perp \left(ACC'A'\right)$ nên $AA' \perp BK$.

$\left(\widehat{\left(ABB'A'\right);\left(ACC'A'\right)}\right) = \widehat{BKH}$; ΔBKH vuông tại H.

$\tan \widehat{BKH} = \dfrac{BH}{KH} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{KH} \Rightarrow KH = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; $AK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{2}{3}$.

Gọi M là trung điểm AA'. Tam giác $A'C'A$ cân tại C', $\left(AC = A'C' = AC' = 3\right)$

$\Rightarrow C'M \perp AA' \Rightarrow KH // C'M$.

$\triangle A'C'M \backsim AHK \Rightarrow A'M = \dfrac{AK.A'C'}{AH} = 1 \Rightarrow AA' = 2$; $C'M = \dfrac{A'C'.KH}{AH} = 2\sqrt{2}$.

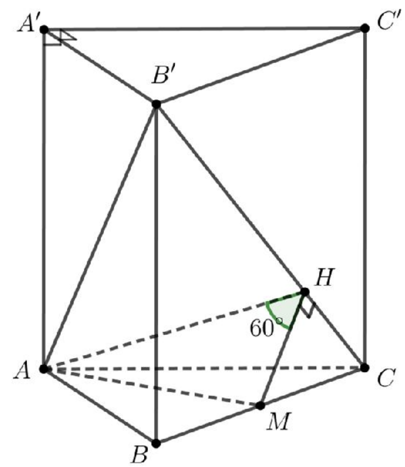
$S_{ACC'A'} = C'M.AA' = \mathrm{d}\left(A';AC\right).AC = 4\sqrt{2} \Rightarrow d\left(A';AC\right) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = d\left(A';\mathrm{AC}\right).S_{ABCD} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}.\sqrt{6}.\sqrt{3} = 8$.

Câu 29. (Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - 2018) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $\left(AB'C\right)$ và mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Khối đa diện $AB'CA'C'$ là hình chóp $B'.ACC'A'$ có $A'B' \perp (ACC'A')$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$ ta suy ra $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C$ (1).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $B'C$, suy ra $MH \perp B'C$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $B'C \perp (AMH)$. Từ đó suy ra góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa AH và MH. Mà tam giác AMH vuông tại H nên $\Rightarrow \widehat{AHM} = 60°$.

$\Rightarrow MH = AM.\cot 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác $B'BC$ đồng dạng với tam giác MHC nên suy ra $\sin\widehat{HCM} = \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\widehat{MCH} = \dfrac{1}{1 - \sin^2\widehat{MCH}} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \tan\widehat{MCH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow BB' = BC.\tan\widehat{MCH} = a\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{AB'CA'C'} = V_{B'.ACC'A'} = \dfrac{1}{3}B'A'.AC.AA' = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.