**TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH MỤC TIÊU 7-8 ĐIỂM**

## Dạng 1. Tìm m để hàm số đơn điệu trên các khoảng xác định của nó

**Xét hàm số bậc ba** $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m$ ?

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m$ ?

**Lưu ý**: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Để $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. • $f(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo Lần 2 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.



**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 2.** **(Mã 123 - 2017)** Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

**A.** 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 7

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3(4m+9) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in [-9; -3] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$. Tìm tất cả giá trị của $m$ để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\ge -1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.   **B.** $-2\le m\le -1$.   **C.** $-2<m<-1$.   **D.** $\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn B**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=-x^2+2mx+3m+2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=m^2+3m+2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m\le -1$.

**Câu 4.** Tìm $m$ để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(2m-1)+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** Không có giá trị $m$ thỏa mãn.   **B.** $m\ne 1$.

**C.** $m=1$.   **D.** Luôn thỏa mãn với mọi $m$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$y'=3x^2-6mx+3(2m-1)$

Ta có: $\Delta'=(-3m)^2-3.3.(2m-1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta'\le 0$

$\Leftrightarrow 9m^2-18m+9<0 \Leftrightarrow 9(m^2-2m+1)\le 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2\le 0 \Leftrightarrow m=1$.

**Câu 5.** Tìm điều kiện của tham số thực $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m\ge 2$.   **B.** $m<2$.   **C.** $m<0$.   **D.** $m\ge 0$.



**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+3(m+1)$

$YCBT \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'=-9m\le 0 \Leftrightarrow m\ge 0$.

**Câu 6.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x-m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**A.** $[-2;2]$.   **B.** $(-\infty;2)$.   **C.** $(-\infty;-2]$.   **D.** $[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $y'=x^2+2mx+4$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0, \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

**Câu 7.** Giá trị của $m$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m+3)x-5+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là.

**A.** $-\frac{3}{4}\le m\le 1$.   **B.** $m\le -\frac{3}{4}$.   **C.** $-\frac{3}{4}<m<1$.   **D.** $m\ge 1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2-4mx+(m+3)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-4mx+(m+3)=0$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow \Delta'\leq 0\Leftrightarrow (-2m)^2-1.(m+3)\leq 0\Leftrightarrow 4m^2-m-3\leq 0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\leq m\leq 1$.

Vậy $-\frac{3}{4}\leq m\leq 1$.

**Câu 8.** **(Chuyên KHTN - Hà Nội - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

**A.** $[-4;2]$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2+2(m+1)x+3$.

Hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-9\leq 0\Leftrightarrow m^2+2m-8\leq 0\Leftrightarrow -4\leq m\leq 2$.

Vậy $m\in[-4;2]$.

***Nếu hệ số $a$ chứa tham số thì phải xét trường hợp $a=0$ và $a\neq 0$***

**Câu 9.** **(Đề Tham Khảo - 2017)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**A.** 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

**Lời giải**

**Chọn C**

TH1: $m=1$. Ta có: $y=-x+4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.

TH2: $m=-1$. Ta có: $y=-2x^2-x+4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.

TH3: $m\neq\pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\leq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)^2+3(m^2-1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)(4m+2)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ -\frac{1}{2}\leq m\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$.

Vậy có $2$ giá trị $m$ nguyên cần tìm là $m=0$ hoặc $m=1$.

**Câu 10.** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-m)x^3+2mx^2+3x-2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$y' = \left(m^2 - m\right)x^2 + 4mx + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; +\infty\right) \Leftrightarrow y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m = 0$ ta có $y' = 3 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; +\infty\right)$.

+ Với $m = 1$ ta có $y' = 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{4} \Rightarrow m = 1$ không thảo mãn.

+ Với $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ ta có $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ -3 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0$.

Tổng hợp các trường hợp ta được $-3 \leq m \leq 0$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \left\{-3; -2; -1; 0\right\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn bài ra.

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m\left(m-1\right)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m \leq \dfrac{4}{3}$ và $m \neq 0$. **B.** $m = 0$ hoặc $m \geq \dfrac{4}{3}$.

**<u>C</u>.** $m \geq \dfrac{4}{3}$. **D.** $m \leq \dfrac{4}{3}$.

**Lời giải**



**Chọn C**

**TH1:** $m = 0 \Rightarrow y = 2$ là hàm hằng nên loại $m = 0$.

**TH2:** $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx + m\left(m-1\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m^2\left(m-1\right) \leq 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2\left(4 - 3m\right) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{4}{3}$$

**Câu 12.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + \left(3m+5\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **<u>D</u>.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left(2m\right)^2 - m\left(3m+5\right) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \left\{0; 1; 2; 3; 4; 5\right\}$.

**Câu 13.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $1<m\le 2$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $1\le m<2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y'=3(m-1)x^2-6(m-1)x+3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=0\\ \begin{cases}m-1>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m>1\\ 9(m-1)^2-9(m-1)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m>1\\ 1\le m\le 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 1\le m\le 2$.

**Câu 14.** **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Số giá trị nguyên của $m$ để hàm số $y=(4-m^2)x^3+(m-2)x^2+x+m-1$ $(1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Lời giải**

TH1: $4-m^2=0\Leftrightarrow m=\pm 2$.

$m=2$: $(1)\Leftrightarrow y=x+1$ $\Rightarrow$ hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow m=2$ (nhận).

$m=-2$: $(1)\Leftrightarrow y=-4x^2+x-3$ là hàm số bậc hai nên tăng trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{8}\right)$, giảm trên khoảng $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)\Rightarrow m=-2$ (loại).



TH2: $4-m^2\ne 0$.

$y'=3(4-m^2)x^2+2(m-2)x+1$. $\Delta'=(m-2)^2-3(4-m^2)=4m^2-4m-8$.

hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\ge 0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m^2>0\\ 4m^2-4m-8\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-2;2)\\ m\in[-1;2]\end{cases}\Leftrightarrow m\in[-1;2)$. $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-1$; $m=0$; $m=1$.

Vậy có $4$ giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 15.** **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

**A.** $200$. **B.** $99$. **C.** $100$. **D.** $201$.

**Lời giải**

Trường hợp 1: $m=0$. Ta có:

$y=x-3$ có $y'=1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Do đó loại $m=0$.

Trường hợp 2: $m\ne 0$. Ta có: $y'=3mx^2+2mx+m+1$, $\Delta'=-2m^2-3m=m(-2m-3)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m(-2m-3)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ -2m-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}$.

Vì $m$ là số nguyên thuộc đoạn $[-100;100]$ nên $m\in\{-2;-3;...;-99;-100\}$.

Vậy có $99$ giá trị $m$.

**Câu 16.** **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left(3m^2-12\right)x^3+3\left(m-2\right)x^2-x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

**A.** $9$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $14$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=9\left(m^2-4\right)x^2+6\left(m-2\right)x-1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0\forall x\in\mathbb{R}$ ( dấu "=" xãy ra tại hữu hạn $x\in\mathbb{R}$ )

TH1: $m^2-4=0\Leftrightarrow m=\pm 2$.

+ Với $m=2$ ta có $y'=-1\le 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$ nên $m=2$ thỏa mãn.

+ Với $m=-2$ ta có $y'=-24x-1\le 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{24}$(không thỏa với mọi $x\in\mathbb{R}$) nên loại $m=-2$.

TH2: $m^2-4\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 2$. Ta có

$$y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\left(m^2-4\right)<0\\ \Delta'=9\left(m-2\right)^2+9\left(m^2-4\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ 0\le m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<2\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{0;1\}$$ V

ậy $m\in\{0;1;2\}\Rightarrow 0^2+1^2+2^2=5$.



**Câu 17.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^3+\left(m-1\right)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y'=3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

* Trường hợp 1: $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.

+ Với $m=1$, ta được $-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (luôn đúng), suy ra $m=1$ (nhận).

+ Với $m=-1$, ta được $-4x-1\le 0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{4}$, suy ra $m=-1$ (loại).

* Trường hợp 2: $m^2-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 1$.

Ta có $\Delta'=\left(m-1\right)^2+3\left(m^2-1\right)=m^2-2m+1+3m^2-3=4m^2-2m-2$.

Để $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 4m^2 - 2m - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \le m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le m < 1$.

Tổng hợp lại, ta có tất cả giá trị $m$ cần tìm là $-\dfrac{1}{2} \le m \le 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, suy ra $m \in \{0;1\}$, nên có 2 giá trị nguyên của tham số $m$.

**Xét hàm số nhất biến** $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = \dfrac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m$ ?

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m$ ?

★ **Lưu ý**: Đối với hàm phân thức thì không có dấu "=" xảy ra tại vị trí $y'$.

**Câu 18.** **(Mã 105 - 2017)** Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn B**

$y' = \dfrac{-m^2 + 2m + 3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1 < m < 3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

**Câu 19.** **(Mã 104 - 2017)** Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4m}{x + m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** 4 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 5

**Lời giải**

**Chọn D**

$D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$; $y' = \dfrac{m^2 - 4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có $3$ giá trị thỏa mãn.

**Câu 20.** **(THPT Hoa Lư A - 2018)** Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x - 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$y'=\dfrac{-m^2-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của ta cần tìm $m$ để $y'\geq 0$ trên $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$ và dấu "$=$" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên các khoảng đó

ĐK: $-m^2-m+2>0 \Leftrightarrow -2<m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=-1,\ 0$.

**Câu 21.** **(SGD&ĐT Bắc Giang - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, $y'=\dfrac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4-m^2>0 \Leftrightarrow -2<m<2$.
Do đó có $3$ giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn.

**Câu 22.** **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

**A.** $m\leq 1$. **B.** $m\leq -3$. **C.** $m<-3$. **D.** $m<1$.

**Lời giải**

Với $m=1$ thì hàm số là hàm hằng $(\forall x\neq -1)$ nên không nghịch biến.

Ta có $y'=\dfrac{m-1}{(x+1)^2}$, $\forall x\neq -1$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định khi và chỉ khi $y'<0,\ x\neq -1 \Leftrightarrow m<1$.

**Câu 23.** **(SỞ GD&ĐT Yên Bái - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -2 \\ m\geq 2\end{array}\right.$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2\end{array}\right.$. **D.** $-2\leq m\leq 2$.

**Lời giải**

Tập xác định $D=(-\infty;m)\cup(m;+\infty)$.

Ta có $y=\dfrac{mx-4}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$. Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó nên

$-m^2+4<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2\end{array}\right.$.

**Câu 24.** **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{2x-m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -2 \\ m\geq 2\end{array}\right.$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2\end{array}\right.$. **D.** $-2\leq m\leq 2$.

**Lời giải**

Ta có: $y' = \dfrac{-m^2+4}{(2x-m)^2}, \forall x \neq \dfrac{m}{2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $-m^2+4>0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

## Dạng 2. Tìm m để hàm số nhất biến đơn điệu trên khoảng cho trước

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo Lần 1 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx-4}{x-m}$ ($m$ là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **<u>D</u>.** $2$.

**Lời giải**

**<u>Chọn D</u>**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x)>0\,\forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases}-m^2+4>0\\ m\notin(0;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<m<2\\ m\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow -2<m\leq 0.$$

Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=\{-1;0\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn đề bài.



**Câu 2.** **(Mã 101 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

**A.** $[4;7)$. **<u>B</u>.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Lời giải**

**<u>Chọn B</u>**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ $\Leftrightarrow y'>0$, $\forall x\in(-\infty;-7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m-4>0\\ -m\notin(-\infty;-7)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>4\\ -m\geq -7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>4\\ m\leq 7\end{cases} \Leftrightarrow 4<m\leq 7.$$

**Câu 3.** **(Mã 102 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

**A.** $(5;+\infty)$. **<u>B</u>.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $x \neq -m$.

Ta có $y' = \dfrac{m-5}{(x+m)^2}$

Để hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ thì

$$\begin{cases} y' > 0 \\ -m \notin (-\infty;-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-5 > 0 \\ -m \geq -8 \end{cases} \Rightarrow 5 < m \leq 8.$$

**Câu 4.** **(Mã 103 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

**A.** $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m-2}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \forall x \in (-\infty;-5) \\ -m \notin (-\infty;-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ -m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$.

**Câu 5.** **(Mã 104- 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

**A.** $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định khi: $x + m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -m$.

$$y = \frac{x+3}{x+m} \Rightarrow y' = \frac{m-3}{(x+m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty;-6) \\ -m \notin (-\infty;-6) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ -m \in [-6;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m \leq 6.$$

Vậy: $m \in (3;6]$.

**Câu 6.** **(Mã 104-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$.

**A.** 2 **B.** 6 **C.** Vô số **D.** 1

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: $D=(-\infty;-3m)\cup(-3m;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)\Leftrightarrow\begin{cases}3m-2>0\\-6\le-3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{3}\\m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<m\le 2$.

Mà $m$ nguyên nên $m=\{1;2\}$.

**Câu 7.** **(Mã 103-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?

**A.** 0 **B.** 6 **C.** 3 **D.** Vô số

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-3m\}$; $y'=\dfrac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases}y'<0\\(6;+\infty)\subset D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m-1<0\\-3m\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{3}\\m\ge-2\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m<\dfrac{1}{3}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.



**Câu 8.** **(Mã 101- 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

**A.** 2 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}5m-2>0\\-5m\in[-10;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{5}\\-5m\ge-10\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}<m\le 2$.

Vì $m$ nguyên nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của tham số $m$.

**Câu 9.** **(Mã 102 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

**A.** Vô số **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'<0, \forall x\in D \\ -5m\notin(10;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5m-6<0\\ -5m\le 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{6}{5} \\ m\ge -2\end{cases}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

**Câu 10.** **(Chuyên KHTN - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

**A.** $(-2;1]$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;-1]$. **D.** $(-2;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đạo hàm $y'=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}>0, \forall x\neq m$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ khi $y'>0, \forall x\in(-1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases}-m^2+4>0\\ x-m\neq 0, \forall x\in(-1;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-m^2+4>0\\ x\neq m, \forall x\in(-1;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2<m<2\\ m\le -1\end{cases} \Leftrightarrow -2<m\le -1$.



**Câu 11.** **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$.

**A.** $m>2$. **B.** $1\le m<2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(m-4x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m^2-4<0\\ \dfrac{m}{4}\notin\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<m<2\\ \dfrac{m}{4}\ge\dfrac{1}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2<m<2\\ m\ge 1\end{cases} \Rightarrow 1\le m<2$.

Vậy $1\le m<2$.

**Câu 12.** **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hàm số $y=\frac{mx-2m+3}{x+m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định: $x\neq -m$.

Ta có: $y'=\frac{m^2+2m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$$\begin{cases} y'<0;\forall x\in(2;+\infty) \\ x\neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3<0 \\ -m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ m\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m<1.$$

Vậy giá trị nguyên của $m$ là $S=\{-2;-1;0\}$.

**Câu 13.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

**A.** Vô số. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $x\neq -4m$.

Ta có $y=\frac{x+18}{x+4m}\Rightarrow y'=\frac{4m-18}{(x+4m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'<0 \\ -4m\notin(2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-18<0 \\ -4m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{9}{2} \\ m\ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<\frac{9}{2}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3;4\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**Câu 14.** **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

**A.** 5. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x \neq -\dfrac{m}{4}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2 - 36}{(4x+m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow y' < 0,\ \forall x \in (0;4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ -\dfrac{m}{4} \notin (0;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{4} \leq 0 \\ -\dfrac{m}{4} \geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 6.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Vậy có $6$ giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 15.** **(Sở Yên Bái - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y = \dfrac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

**A.** $-1 < m < 4$. **B.** $-1 < m \leq 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 4 \end{array}\right.$. **D.** $1 \leq m < 4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$y' = \frac{m^2 - 3m - 4}{(x-m)^2}$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' < 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1;4) \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 1.$$

**Câu 16.** **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020;2020)$ sao cho hàm số $y = \dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

**A.** $2020$. **B.** $2026$. **C.** $2018$. **D.** $2023$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x \neq m$ nên $m \notin (-\infty;-3)$

$$y = \frac{3x+18}{x-m} \Rightarrow y' = \frac{-3m-18}{(x-m)^2}$$

Để hàm số $y = \dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $-3m - 18 < 0 \Leftrightarrow m > -6$

Vì $m \in (-2020;2020)$ và $m \notin (-\infty;-3)$ nên $m \in [-2;2020]$

Vậy có 2023 giá trị $m$ nguyên thoả mãn.

**Câu 17.** **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;4)$.

**A.** Vô số. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

Có $y'=-\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(-3;4)\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in(-3;4)\Leftrightarrow -\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}<0\ \forall x\in(-3;4)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-(m+8)<0\\ \dfrac{m}{2}\notin(-3;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-8\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}\le -3\\ \dfrac{m}{2}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-8<m\le -6\\ m\ge 8\end{array}\right..$$

Do $m$ nguyên âm nên $m\in\{-7;-6\}$, gồm $2$ giá trị thỏa mãn.

**Câu 18.** **(Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn B**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y'<0,\forall x>0\\ -m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\ -m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<2.$$

Vậy số giá trị nguyên của tham số $m$ là $2$.

## Dạng 3. Tìm m để hàm số bậc 3 đơn điệu trên khoảng cho trước

**Câu 1.** **(Mã 101 – 2020 -Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có.

$y'=3x^2-6x+4-m$. $ycbt\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+4-m\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow m\le 3x^2-6x+4,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Ta có.

$g'(x) = 6x - 6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $0$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | | | $4 \nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \le 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty; 4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**Câu 2.** **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty; 2)$. **B.** $(-\infty; 5)$. **C.** $(-\infty; 5]$. **D.** $(-\infty; 2]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \ge 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên khoảng $(2;+\infty)$.

Có $f'(x) = 6x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).



Bảng biến thiên

| $x$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $5 \nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có $m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \le 5$.

Vậy $m \in (-\infty; 5]$.

**Câu 3.** **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty; -1]$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(-\infty; 2]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - m \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$ $m \le 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2;+\infty)$.

$f'(x)=6x-6$; $f'(x)=0\Rightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy $m\le 2$. Vậy $m\in(-\infty;2]$.

**Câu 4.** **(Mã 104 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y'=3x^2-6x+1-m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+1-m\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+1\ge m,\ \forall x\in(2;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x)=3x^2-6x+1$ với $\forall x\in(2;+\infty)$.

$g'(x)=6x-6$; $g'(x)>0,\ \forall x\in(2;+\infty)$.

Bảng biến thiên $g(x)$:

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy $m\le 1$.

**Câu 5.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

**A.** $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$ **B.** $[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $y'=-3x^2-6x+4m-9\le 0\quad \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m\le 3x^2+12x+9\quad \forall x\in(-\infty;-1)\ \Leftrightarrow\ 4m\le \min\limits_{(-\infty;-1]} f(x),\quad f(x)=3x^2+12x+9$

Ta có $f'(x)=6x+12$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x) = -3 \Rightarrow 4m \le -3 \Leftrightarrow m \le \dfrac{-3}{4}$.

**Câu 6.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ là

**A.** $(-1;5)$. **B.** $(-\infty;-3]$. **C.** $(-\infty;-4]$. **D.** $(-1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ thì $y' \ge 0,\ \forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \ge 0, \forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty;0)$.

Đặt $g(x) = 3x^2 + 6x$, hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty;0) \Leftrightarrow m \le -3$.

**Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

**A.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **B.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2 + 14mx + 14 \le 0, \forall x \ge 1$, tương đương với $g(x) = \dfrac{-14}{x^2 + 14x} \ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\ge 1} g(x) = g(1) = -\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $(1) \Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} g(x) \ge m \Leftrightarrow -\dfrac{14}{15} \ge m$

**Câu 8.** Xác định các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

**A.** $m \ge 0$. **B.** $m < \dfrac{1}{2}$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m \ge \dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m \\ x = 0 \end{array}\right.$

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow 2m \ge 1 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{1}{2}$

**Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**A.** $m \le 0$. **B.** $m \ge -2$. **C.** $m \le -3$. **D.** $m \le -1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$, $\forall x < 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \ge 0$, $\forall x < 0$.

**Cách 1:**

$3x^2 + 6x - m \ge 0$, $\forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \ge m$, $\forall x < 0$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có:

$f'(x) = 6x + 6$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Ta có $f(-1) = -3$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $m \le -3$.

**Cách 2:**

Ta có $\Delta' = 9 + 3m$.

Nếu $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \le -3$ thì $y' \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \ge 0$ $\forall x < 0$.

Nếu $\Delta' > 0$ thì $y'$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$. Khi đó để $y' \ge 0$ $\forall x < 0$ thì ta phải có $0 \le x_1 < x_2$. Điều này không thể xảy ra vì $S = x_1 + x_2 = -2 < 0$.

Vậy $m \le -3$.

**Cách 3:**

Phương án B: Với $m = -3$ ta có $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Khi đó $y' = 3(x+1)^2 \ge 0$ $\forall x$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. Vậy B là đáp án đúng.

**Câu 10.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**A.** $-1 < m < \dfrac{1}{3}$. **B.** $m > \dfrac{1}{3}$.

**C.** $m < -1$. **D.** $m \ge \dfrac{1}{3}$ hoặc $m \le -1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6mx-9m^2$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx-9m^2=0\Leftrightarrow x^2-2mx-3m^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-m\\x=3m\end{array}\right.$.

•Nếu $-m=3m\Leftrightarrow m=0$ thì $y'\ge 0;\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

•Nếu $-m<3m\Leftrightarrow m>0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m;3m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}-m\le 0\\3m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m\ge\dfrac{1}{3}$.

•Nếu $-m>3m\Leftrightarrow m<0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m;-m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3m\le 0\\-m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le -1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m\le -1$.



Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi $m\le -1$ hoặc $m\ge\dfrac{1}{3}$.

**Câu 11.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$..

**A.** $m=0$. **B.** $m>1$. **C.** $m\le -\dfrac{1}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $y'=x^2-2mx+2m-1$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2m-1\end{array}\right.$.

Nếu $1\le 2m-1$ thì ta có biến đổi $y'\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2m-1$.

(trường hợp này hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$).

Xét $2m-1<1$ ta có biến đổi $y'\le 0\Leftrightarrow x\in[2m-1;1]$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2m-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ thì $(-2;0)\subset[2m-1;1]$.

$\Leftrightarrow 2m-1\le -2 \Leftrightarrow m\le -\dfrac{1}{2}$..

**Câu 12.** Tìm tất cả các giá trị $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+2$ tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

**A.** $m<3$. **B.** $m\ge 3$. **C.** $m\ne 3$. **D.** $m\le 3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đạo hàm : $y'=3x^2-6x+m$

YCBT $\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+m\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m\ge -3x^2+6x,\forall x\in(1;+\infty)$

Xét hàm số: $f(x)=-3x^2+6x,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow f'(x)=-6x+6\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $f(1)=3$. Do đó : $m\ge f(x),x\in(1;+\infty)\Rightarrow m\ge 3$.

**Câu 13.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-mx^2-(m-6)x+1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

**A.** $(-\infty;3)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[3;6]$. **D.** $(-\infty;6]$.



**Lời giải**

**Chọn B**

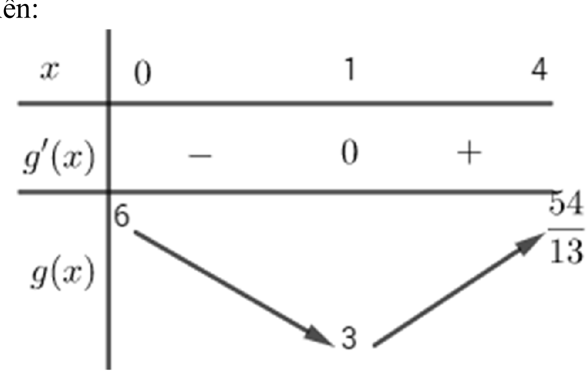
$y'=3x^2-2mx-(m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y'\ge 0$, $\forall x\in(0;4)$.

tức là $3x^2-2mx-(m-6)\ge 0\ \forall x\in(0;4)\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+6}{2x+1}\ge m\ \forall x\in(0;4)$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$g'(x)=\dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;4)\\ x=-2\notin(0;4)\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:




Vậy để $g(x)=\dfrac{3x^2+6}{2x+1}\ge m\ \forall x\in(0;4)$ thì $m\le 3$.

**Câu 14.** Tìm tất cả các giá thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y=2x^3-3x^2-6mx+m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**A.** $m\le -\dfrac{1}{4}$. **B.** $m\ge \dfrac{1}{4}$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\ge 0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y'=6x^2-6x-6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0$ với $\forall x\in(-1;1)$ hay $m\ge x^2-x$ với $\forall x\in(-1;1)$.

Xét $f(x)=x^2-x$ trên khoảng $(-1;1)$ ta có $f'(x)=2x-1$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $2$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m\ge f(x)$ với $\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\ge 2$.

* Có thể sử dụng $y'\le 0$ với $\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1)\le 0\\ y'(1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-6m\le 0\\ 12-6m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge 0\\ m\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 2$.

**Câu 15.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $m\ge 12$. **B.** $m\le 12$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\le 0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

***Cách 1:***Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-12x+m$

Trường hợp 1:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\ (hn)\\ 36-3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 12$

Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa $x_1<x_2\le 0\,(*)$

Trường hợp 2.1: $y'=0$ có nghiệm $x=0$ suy ra $m=0$. Nghiệm còn lại của $y'=0$ là $x=4$ (không thỏa (*))

Trường hợp 2.2: $y'=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa

$x_1<x_2<0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S<0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}36-3m>0\\ 4<0(vl)\\ \dfrac{m}{3}>0\end{cases}\Rightarrow$ không có $m$.Vậy $m\ge 12$

*Cách 2:* Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $12$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**Câu 16.** Tìm $m$ để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

**A.** $m \leq -1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m > -1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m = 3(-x^2 + 2x + m)$.

Vì hàm số liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ cũng tương đương hàm số nghịch trên $[0;+\infty)$ khi chỉ khi $y' \leq 0,\ \forall x \in [0,+\infty)$.

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + m \leq 0\ \forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x = f(x)\ \forall x \in [0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(1) = -1$



**Câu 17.** **(THPT Chuyên Hạ Long - 2018)** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$.

$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2;+\infty)$.

$g'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0$ với $\forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m \leq g(x), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{12}$.

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 18.** **(Chuyên KHTN - 2018).** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

**A.** $(-\infty;6]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $[3;6]$.

**Lời giải**

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y' \ge 0$, $\forall x \in (0;4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \ge 0\ \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \ge m\ \forall x \in (0;4)$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$g'(x) = \dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;4) \\ x = -2 \notin (0;4) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $6$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $\dfrac{54}{13}$ |

Vậy để $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \ge m\ \forall x \in (0;4)$ thì $m \le 3$.

**Câu 19.** **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** 9. **<u>B</u>.** 10. **C.** 6. **D.** 5.



**Lời giải.**

**<u>Chọn B</u>**

Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$

Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ trong 3 trường hợp:

***Trường hợp 1***: $m = 0$

$y = f'(x) = x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Lúc này hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng đồng biến trên $(0;+\infty)$ $(1)$.

***Trường hợp 2***: $m < 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $m$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-m^2+m+6$ | $\nearrow$ | $m+6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f'(x) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 \ge 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \le m < 0$ $(2)$.

***Trường hợp 3***: $m > 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $m+6$ | $\searrow$ | $-m^2+m+6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+m+6\ge 0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\le 3$ $(3)$.

Từ $(1),(2)$ và $(3)$ suy ra có 10 giá trị nguyên của $m$ để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+\frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**Câu 20.** **(Chuyên Sơn La - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

**A.** $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$. **B.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $y'=-3x^2-12x+4m-9$.

Ycbt $\Leftrightarrow -3x^2-12x+4m-9\le 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m\le\frac{3}{4}\left(x^2+4x+3\right),\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m\le\frac{3}{4}\left[(x+2)^2-1\right],\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m\le\min\limits_{x\in(-\infty;-1)}\left\{\frac{3}{4}\left[(x+2)^2-1\right]\right\}=-\frac{3}{4}$.



**Câu 21.** **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m-1)x^2+3(m-1)x+1$. Số các giá trị nguyên của $m$ để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là

**A.** 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $y'=x^2-2(m-1)x+3(m-1)$.

Ycbt $\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+3(m-1)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-3(m-1)=m^2-5m+4$.

Trường hợp 1: $\Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow m\in[1;4]$. Ta được 4 giá trị nguyên của $m$.

Trường hợp 2:

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-5m+4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>4\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $x^2-2(m-1)x+3(m-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\le 1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1-1)+(x_2-1)<0\\ (x_1-1)(x_2-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1+x_2)-2<0\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(m-1)-2<0\\ 3(m-1)-2(m-1)+1\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0\le m<2$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0 \le m < 1$. Khi đó có 1 giá trị nguyên của $m$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của $m$.

**Câu 22.** **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020;2020)$ của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2019$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

**A.** $2018$. **B.** $2019$. **C.** $2020$. **D.** $2017$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khi $y' \ge 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \ge m, \forall x \in (0;+\infty) \quad (1)$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = -3$

$(1) \Leftrightarrow m \le -3$. Kết hợp với giả thiết ta được $m \in (-2020;-3]$. Nên có 2017 số nguyên thỏa mãn

Vậy chọn **D.**

**Câu 23.** **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc $[-2020;2020]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

**A.** $2004$. **B.** $2017$. **C.** $2020$. **D.** $2009$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y' \ge 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + m \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Do đó $m \ge -3x^2 + 12x, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{(0;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = -3x^2 + 12x$.

Ta có: $g(x) = -3(x-2)^2 + 12 \le 12, \forall x \in (0;+\infty)$ nên $\max\limits_{(0;+\infty)} g(x) = 12 = g(2)$.

Vậy $m \ge 12$.

Số các số nguyên $m$ cần tìm là: $2020 - 12 + 1 = 2009$.

**Câu 24.** **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$

Nhận xét $2m^2 - 3m + 2 > 0 \; \forall m \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2) = 0$

luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in(2;+\infty)$

Điều này xảy ra khi $\begin{cases}3.f'(2)\ge 0\\ x_1<x_2<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3.\left[3.4-4(m+1)-\left(2m^2-3m+2\right)\right]\ge 0\\ \dfrac{S}{2}<2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2m^2-m+6\ge 0\\ \dfrac{(m+1)}{3}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le m\le\dfrac{3}{2}\\ m<5\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le\dfrac{3}{2}$

Do $m$ nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

**Câu 25.** **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=2x^3+mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Tính số phần tử của tập hợp $S$.

**A.** $2025$. **B.** $2016$. **C.** $2024$. **D.** $2023$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y=2x^3+mx^2+2x\Rightarrow y'=6x^2+2mx+2$.

Hàm số đã cho đồng biên trên khoảng $(-2;0)\Leftrightarrow y'=6x^2+2mx+2\ge 0,\forall x\in(-2;0)$

$\Leftrightarrow m\le -3x-\dfrac{1}{x},\forall x\in(-2;0)$.

Xét hàm số $g(x)=-3x-\dfrac{1}{x},\forall x\in(-2;0)$

$\Rightarrow g'(x)=-3+\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow -3+\dfrac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $0$ |
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $\frac{13}{2}$ | ↘ | $-2\sqrt{3}$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le -2\sqrt{3}$. Mà $m\in\mathbb{Z},m\in(-2020;2020)$ nên $m\in\{-2019;-2018;...;-4\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=2x^3+mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

**Câu 26.** **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Với mọi giá trị $m \ge a\sqrt{b}$, $(a,b \in \mathbb{Z})$ thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x + 5$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Khi đó $a - b$ bằng

**A.** $1$. **B.** $-2$. **C.** $3$. **D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $y' = 6x^2 - 2mx + 2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ khi $y' \ge 0, \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - mx + 1 \ge 0, \forall x \in (-2;0)$

$3x^2 + 1 \ge mx \Leftrightarrow 3x + \dfrac{1}{x} \le m$.

Xét hàm số $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$; $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

| $x$ | $-2$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $-2\sqrt{3}$ | ↘ | |

Từ bảng biến thiên để $f(x) \le m$, $\forall x \in (-2;0)$

thì $\max\limits_{(-2;0)} f(x) \le m \Rightarrow m \ge -2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a - b = -5$.

**Dạng 4. Tìm m để hàm số khác đơn điệu trên khoảng cho trước**

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**A.** $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$ **B.** $m \le 0$ **C.** $1 \le m < 2$ **D.** $m \ge 2$

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t-2}{t-m} \forall t \in (0;1)$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $f'(t) = \dfrac{2-m}{(t-m)^2}$.

Ta thấy hàm số $t(x) = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Nên để hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t) > 0 \forall t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-m}{(t-m)^2}>0\,\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0]\cup[1;2)$

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

**A.** 0 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn B**

$y'=3x^2+m+\dfrac{1}{x^6}$

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'=3x^2+m+\dfrac{1}{x^6}\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -3x^2-\dfrac{1}{x^6}\le m,\forall x\in(0;+\infty)$. Xét hàm số $g(x)=-3x^2-\dfrac{1}{x^6}\le m$, $x\in(0;+\infty)$

$g'(x)=-6x+\dfrac{6}{x^7}=\dfrac{-6(x^8-1)}{x^7}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1(\text{loai})\end{array}\right.$

**Bảng biến thiên:**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Dựa vào BBT ta có $m\ge -4$, suy ra các giá trị nguyên âm của tham số $m$ là $-4;-3;-2;-1$

**Câu 3.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5}m^2x^5-\dfrac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc $S$ bằng

**A.** $\dfrac{5}{2}$. **B.** $-2$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

Ta có $f'(x)=m^2x^4-mx^2+20x-(m^2-m-20)=m^2(x^4-1)-m(x^2-1)+20(x+1)$

$=m^2(x-1)(x+1)(x^2+1)-m(x-1)(x+1)+20(x+1)$

$=(x+1)\left[m^2(x-1)(x^2+1)-m(x-1)+20\right]$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ m^2(x-1)(x^2+1)-m(x-1)+20=0\,(*)\end{array}\right.$

Ta có $f'(x)=0$ có một nghiệm đơn là $x=-1$, do đó nếu $(*)$ không nhận $x=-1$ là nghiệm thì $f'(x)$ đổi dấu qua $x=-1$. Do đó để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ hay $(*)$ nhận $x=-1$ làm nghiệm (bậc lẻ).

Suy ra $m^2(-1-1)(1+1)-m(-1-1)+20=0\Leftrightarrow -4m^2+2m+20=0$.

Tổng các giá trị của $m$ là $\frac{1}{2}$.

**Câu 4.** **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tập hợp các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x+1+\frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

**A.** $[0;1)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)\setminus\{1\}$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Lời giải**

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$y'\geq 0,\forall x\in D\Leftrightarrow 1-\frac{m}{(x-2)^2}\geq 0,\forall x\in D$

$\Leftrightarrow m\leq (x-2)^2,\forall x\in D$

Xét hàm số $f(x)=(x-2)^2$ ta có:

$f'(x)=2x-4\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m\leq 0$.

**Câu 5.** **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y=\frac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

**A.** $\left[\begin{array}{l}0\leq m<3\\ m\leq -1\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-1\end{array}\right.$. **C.** $m\leq 3$. **D.** $m<3$.

**Lời giải**

Điều kiện: $\cos x\neq m$. Ta có: $y'=\frac{(-m+3)}{(\cos x-m)^2}.(-\sin x)=\frac{(m-3)}{(\cos x-m)^2}.\sin x$

Vì $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\sin x>0$, $(\cos x-m)^2>0,\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right):\cos x\neq m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng

$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m-3<0\\ \cos x\neq m\ \ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-3<0\\ m\notin(-1;0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\ \left[\begin{array}{l}m\leq -1\\ m\geq 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\leq m<3\\ m\leq -1\end{array}\right.$.

Chú ý : Tập giá trị của hàm số $y=\cos x,\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ là $(-1;0)$.

**Câu 6.** **(Hoàng Hoa Thám 2019)** Cho hàm số $y=\frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

**A.** $14$. **B.** $13$. **C.** $12$. **D.** $15$.

**Lời giải**

Đặt $t=-\sqrt{6-x}$ vì $x\in(-8;5)$ $\Rightarrow t\in\left(-\sqrt{14};-1\right)$ và $t=-\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8;5)$.

Hàm số trở thành $y=\dfrac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$ $\Rightarrow y'=\dfrac{m^2-4m+3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{14};-1\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3>0 \\ \left[\begin{array}{l} m\le -\sqrt{14} \\ m\ge -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -\sqrt{14} \\ -1\le m<1 \\ m>3 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow m=\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-1,0,4,5,6,7,8,9\}$ có 14 giá trị.

**Câu 7.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4+mx-\dfrac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$. $y'=x^3+m+\dfrac{3}{2x^2}$.

Ta có: hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^3+m+\dfrac{3}{2x^2}\ge 0,\forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow x^3+\dfrac{3}{2x^2}\ge -m,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -m\le \underset{(0;+\infty)}{\text{Min}}\, f(x)$,với $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2x^2}(1)$.



**Cách 1:**

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2x^2}=\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\ge 5\sqrt[5]{\dfrac{1}{2^5}}=\dfrac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Do đó $\underset{(0;+\infty)}{\text{Min}}\, f(x)=\dfrac{5}{2}(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có $-m\le\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{5}{2}$. Do $m$ nguyên âm nên $m=-1$ hoặc $m=-2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số $m$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

**Cách 2:**

Xét hàm số $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2x^2},\forall x\in(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}, f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\dfrac{5}{2}$ | $\nearrow$ | |

Từ bảng biến thiên ta có $-m\le\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{5}{2}$. Do $m$ nguyên âm nên $m=-1$ hoặc $m=-2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số $m$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

**Câu 8.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn C**

$y=f(x)=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$

Đặt $t=\ln x$, điều kiện $t\in(0;1)$

$g(t)=\dfrac{t-4}{t-2m}$; $g'(t)=\dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2}$

Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;e)$ thì hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0;1)$

$\Leftrightarrow g'(t)>0,\mathrm{t}\in(0;1)$ $\Leftrightarrow \dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2}>0, t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2m+4>0\\ 2m\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<m<2\\ m<0\end{array}\right.$

$S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương $\Rightarrow S=\{1\}$.

Vậy số phần tử của tập $S$ là $1$.

**Câu 9.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

**A.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -2\end{array}\right.$ **B.** $m>2$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ 1\le m<2\end{array}\right.$ **D.** $-1<m<1$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y'=\dfrac{2-m}{(\cos x-m)^2}.(-\sin x), \sin x>0\,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}2-m>0\\ \cos x-m\ne 0\,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<2\\ m\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ 1\le m<2\end{array}\right.$.

**Câu 10.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số

$y=\dfrac{3}{4}x^4-\dfrac{9}{2}x^2+(2m+15)x-3m+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=3x^3-9x+2m+15\ge 0\ \forall x\in(0;+\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0;+\infty)\Leftrightarrow 3x^3-9x+15\ge -2m\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Xét hàm số: $g(x)=3x^3-9x+15$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=9x^2-9$

$g'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $15$ | $\searrow$ | $9$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ BBT ta có: $-2m \le 9 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

**Câu 11.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{3(x+1)^2-(m^2+3m)}{(x+1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y'\ge 0$,

$\forall x \ne -1 \Leftrightarrow m^2+3m \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 0$.

Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0\}$.

Vậy có $4$ giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 12.** Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

**A.** $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$. **C.** $m<2$. **D.** $m\le 2$.

**Lời giải**

Đặt $t=\cos x$.

Ta có: $t'=-\sin x<0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ hàm số $t=\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$ hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow y'=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}>0,\forall t\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ \left[\begin{array}{l}1\le m\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}1\le m\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le m<2\\ m\le 0\end{array}\right..$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ 1\le m<2\end{array}\right.$ thì hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Câu 13.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5 2018)** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=8^{\cot x}+(m-3).2^{\cot x}+3m-2$ (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

**A.** $-9\le m<3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\le -9$. **D.** $m<-9$.

**Lời giải**

Đặt $2^{\cot x}=t$ vì $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ nên $0<t\le 2$. Khi đó ta có hàm số: $y=t^3+(m-3)t+3m-2$ (2).

$\Rightarrow y'=3t^2+m-3$.

Để hàm số (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ thì hàm số (2) phải nghịch biến trên $(0;2]$ hay $3t^2+m-3\le 0,\forall t\in(0;2]\Leftrightarrow m\le 3-3t^2,\forall t\in(0;2]$.

Xét hàm số: $f(t)=3-3t^2$, $\forall t\in(0;2]\Rightarrow f'(t)=-6t$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$.

Ta có bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $3$ | $\searrow$ | $-9$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $-9\le f(t)<3,\forall t\in(0;2]$.

Vậy hàm số (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ khi $m\le -9$.

**Câu 14.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Điều kiện $\ln x-2m\ne 0\Leftrightarrow m\ne\dfrac{1}{2}\ln x$.

Do $x\in(1;\mathrm{e})$ nên $\ln x\in(0;1)\Rightarrow m\in(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}(4-2m)}{(\ln x-2m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì $y'>0$ với mọi $x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{1}{x}(4-2m)}{(\ln x-2m)^2}>0\ 4-2m>0\Leftrightarrow m<2$.

Do $m$ là số nguyên dương nên $m=1$.

**Câu 15.** **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $\left(e^2;+\infty\right)$.

**A.** $m\le-2$ hoặc $m=1$. **B.** $m<-2$ hoặc $m=1$.

**C.** $m<-2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

**Lời giải**

Tập xác định $D=(0;+\infty)\backslash\left\{e^{m+1}\right\}$.

**Cách 1:** $y'=\dfrac{-m^2-m+2}{x(\ln x-m-1)^2}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases}-m^2-m+2<0\\ e^{m+1}\notin\left(e^2;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-2\end{array}\right.\\ m+1\le2\end{cases}\Leftrightarrow m<-2$

**Cách 2:** Đặt $t=\ln x$, ta biết rằng hàm số $f(x)=\ln x$ đồng biến trên $\left(e^2;+\infty\right)$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{mt-2}{t-m-1}$ với $t\in(2;+\infty)$, ta có $g'(t)=\dfrac{-m^2-m+2}{(t-m-1)^2}$.

Vậy hàm số ban đầu nghịch biến trên $\left(e^2;+\infty\right)$ $\Leftrightarrow$ hàm số $g$ nghịch biến trên

$(2;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}g'(t)<0\\ m+1\notin(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2-m+2<0\\ m+1\le2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-2\end{array}\right.\\ m+1\le2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\le1\end{cases}\Leftrightarrow m<-2$

**Câu 16.** **(Chuyên Lương Thế Vinh - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên âm $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{3}\cos^3x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

**A.** $5$. **B.** $2$. **C.** vô số. **D.** $3$.

**Lời giải**

- Ta có: $y'=-\cos^2x.\sin x+\dfrac{4}{\sin^2x}+(m+1).\sin x=\sin^3x+\dfrac{4}{\sin^2x}+m.\sin x$.

- Hàm số đồng biến trên $(0;\pi)$ khi và chỉ khi $y'\ge0$, $\forall x\in(0;\pi)$

$\Leftrightarrow\sin^3x+\dfrac{4}{\sin^2x}+m.\sin x\ge0$, $\forall x\in(0;\pi)$

$\Leftrightarrow\sin^2x+\dfrac{4}{\sin^3x}\ge-m$, $\forall x\in(0;\pi)$ $(1)$.

- Xét hàm số: $g\left(x\right)=\sin^2 x+\dfrac{4}{\sin^3 x}$, trên $\left(0;\pi\right)$.

Có $g'\left(x\right)=2\sin x.\cos x-\dfrac{12\cos x}{\sin^4 x}=2\cos x.\left(\sin x-\dfrac{6}{\sin^4 x}\right)=2\cos x.\dfrac{\sin^5 x-6}{\sin^4 x}$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\in\left(0;\pi\right)$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Do đó: $\left(1\right)\Leftrightarrow -m\le \min\limits_{x\in\left(0;\pi\right)} g\left(x\right)\Leftrightarrow -m\le 5\Leftrightarrow m\ge -5$.

Lại do $m$ nguyên âm nên $m\in\left\{-5;-4;-3;-2;-1\right\}$. Vậy có 5 số nguyên âm.

**Câu 17.** **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m$ để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$?

**A.** $10$. **B.** $8$. **C.** $9$. **D.** $11$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$. Đạo hàm: $y'=1+\dfrac{m-1}{\left(x-2\right)^2}=\dfrac{x^2-4x+m+3}{\left(x-2\right)^2}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+3$ trên $\left[5;+\infty\right)$.

Đạo hàm: $f'\left(x\right)=2x-4$. Xét $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-1$. Ta có: $f\left(5\right)=8$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Do $\left(x-2\right)^2>0$ với mọi $x\in\left[5;+\infty\right)$ nên $y'\ge 0$, $\forall x\in\left[5;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $f\left(x\right)\ge -m$, $\forall x\in\left[5;+\infty\right)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m\le 8\Leftrightarrow m\ge -8$.

Mà $m$ nguyên âm nên ta có: $m\in\left\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\right\}$.

Vậy có $8$ giá trị nguyên âm của $m$ để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$.

**Câu 18.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-\left(m-1\right)x^2-\dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

Ta có $y'=3x^3-2\left(m-1\right)x+\dfrac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$ với $\forall x \in (0;+\infty)$.

$y' \ge 0 \Leftrightarrow 2(m-1) \le 3x^2 + \dfrac{1}{x^6}$.

Xét $g(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^6}$ với $\forall x \in (0;+\infty)$. Ta có $g'(x) = 6x - \dfrac{6}{x^7}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$2(m-1) \le g(x) \Leftrightarrow 2(m-1) \le 4 \Leftrightarrow m \le 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1,2,3\}$.

Vậy có $3$ giá trị $m$ nguyên dương thỏa mãn bài toán.

**Câu 19.** **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Ta có $y' = x - m + \dfrac{1}{x-1}$.

Để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' \ge 0$ với $\forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x-1} \ge m$ với $\forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow m \le \min\limits_{(1;+\infty)} f(x)$.



Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có

$f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + 1 \ge 2\sqrt{(x-1)\dfrac{1}{(x-1)}} + 1 \ge 3 \Rightarrow \min\limits_{(1;+\infty)} f(x) = 3$. Do $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1;2;3\}$.

**Câu 20.** **(Chuyên Vinh - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** $15$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $16$.

**Lời giải**

+ Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = 2x^2 + 1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, do đó $m = 0$ thỏa mãn.

+ Với $m \ne 0$, hàm số đã cho làm hàm số trùng phương với hệ số $a = m^2 > 0$.

$y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x = 4x(m^2x^2 - 4m + 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{4m-1}{m^2} \end{array}\right.$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì phương trình $x^2 = \dfrac{4m-1}{m^2}$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ sao cho $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m-1\le 0 \\ \begin{cases} 4m-1>0 \\ \sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}}\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le \dfrac{1}{4} \\ \begin{cases} m>\dfrac{1}{4} \\ -m^2+4m-1\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le \dfrac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{4}<m<2-\sqrt{3} \\ m>2+\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Vậy điều kiện để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là $m\in\left(-\infty;2-\sqrt{3}\right)\cup\left(2+\sqrt{3};+\infty\right)$.

Vì $m$ nguyên, $m\in(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;...;0;4;5;...;9\}$, có $16$ giá trị.

**Câu 21.** **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

**A.** $2017$. **B.** $2019$. **C.** $2020$. **D.** $2018$.

**Lời giải**

$TXĐ$: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\le \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $(1)$.

Xét $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

$f'(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

Ta có: $m\le \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\le -1$.

Mặt khác $m\in[-2018;2018]\Rightarrow m\in[-2018;-1]$.

Vậy có $2018$ số nguyên $m$ thoả điều kiện.

**Câu 22.** **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị- 2018)** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

**A.** $m\in(-1;1)$. **B.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $m\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right)$.

**Lời giải**

Hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$, ta có: $y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ -m\le\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ m\ge-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m<1$.

**Câu 23.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-2-m}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} y'\le0,\forall x\in(1;3) \\ y'\ge0,\forall x\in(4;6) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2-m\le0,\forall x\in(1;3) \\ x^2-2x-2-m\ge0,\forall x\in(4;6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge x^2-2x-2,\forall x\in(1;3) \\ m\le x^2-2x-2,\forall x\in(4;6) \end{cases}$ (*)

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-2, g'(x)=2x-2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

| **x** | $-\infty$ | **1** | **3** | **4** | **6** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **g'(x)** | - | **0** | + | | | |
| **g(x)** | $+\infty$ | **-3** | **3** | **6** | **18** | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*)\Leftrightarrow 3\le m\le 6$, và vì $m$ là số nguyên nên chọn $m\in\{3;4;5;6\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 24.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $[-5;5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$.

**A.** $7$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có đạo hàm của $y=\dfrac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$ là $y'=\dfrac{1-m}{2x\sqrt{1-\ln x}(\sqrt{1-\ln x}+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$ khi và chỉ khi $y'>0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ \sqrt{1-\ln x}+m\neq 0, \forall x\in\left(\dfrac{1}{e^3};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \sqrt{1-\ln x}+m\neq 0, \forall x\in\left(\dfrac{1}{e^3};1\right) \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{1-\ln x}, x\in\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$, ta có $g'(x)=\dfrac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}<0, \forall x\in\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$ do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | $\dfrac{1}{e^3}$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $-$ | | |
| $g(x)$ | | $2$ | $\searrow$ | $1$ | |

Qua bảng biến thiên ta có $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\notin(-2;-1) \end{cases}$, kết hợp với $m\in[-5;5]$ ta có 6 giá trị nguyên của $m$ là $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

**Câu 25.** **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$?

**A.** 2 . **B.** 1. **C.** 4 . **D.** 3 .



**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\ln x$ thì $t=\ln x$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ và $t\in(0;1)$

Ta được hàm số $f(t)=\dfrac{t-6}{t-2m}$. Điều kiện $t\neq 2m$ và $f'(t)=\dfrac{6-2m}{(t-2m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t)=\dfrac{t-6}{t-2m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\notin(0;1) \\ f'(t)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2m\geq 1 \\ 2m\leq 0 \end{array}\right. \\ 6-2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\geq \dfrac{1}{2} \\ m\leq 0 \end{array}\right. \\ m<3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\leq m<3 \\ m\leq 0 \end{array}\right.$.

Vì $m$ nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$.

**Câu 26.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

Hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$f'(x)\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m(2\sin x+1)+cosx-1\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2m\sin x+cosx\le 1-m\ \ (1)\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

Ta lại có:

$2m\sin x+co\,s\,x\le\sqrt{(4m^2+1)(\sin^2 x+co\,s^2x)}=\sqrt{4m^2+1}$

$\Rightarrow 2m\sin x+co\,s\,x\le\sqrt{4m^2+1}$. Dấu bằng xảy ra khi $2m\,cosx=\sin x$

Do đó

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{4m^2+1}\le 1-m\Leftrightarrow\begin{cases}1-m\ge 0\\4m^2+1\le 1-2m+m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\3m^2+2m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-2}{3}\le m\le 0$

**Câu 27.** **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2+4)+mx+12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

**A.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

**Lời giải**

**Chọn A**

+ TXĐ: $\mathbb{R}$

+ Ta có $y'=\frac{2x}{x^2+4}+m$ .Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\frac{2x}{x^2+4}+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\ge\frac{-2x}{x^2+4},\forall x\in\mathbb{R}$

Xét $f(x)=\frac{-2x}{x^2+4}$. Ta có: $f'(x)=\frac{2(x^2-4)}{(x^2+4)}=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

Bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | 0 |

Vậy giá trị m cần tìm là $m\ge\frac{1}{2}$

**Câu 28.** **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét $f(x)=x^3-mx^2+12x+2m$. Ta có $f'(x)=3x^2-2mx+12$ và $f(1)=13+m$.

Để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

**Trường hợp 1:** Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\le 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-mx^2+12x+2m\right)=+\infty$.

**Trường hợp 2:** Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\ge 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-2mx+12\ge 0,\forall x>1\\ 13+m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1\\ m\ge -13 \qquad (*)\end{cases}.$$

Xét $g(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$: $g'(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{6}{x^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}-\dfrac{6}{x^2}=0\Rightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\dfrac{15}{2}$ | $\searrow$ | $6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le \dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1 \Leftrightarrow m\le 6$.

Kết hợp $(*)$ suy ra $-13\le m\le 6$. Vì $m$ nguyên nên $m\in\{-13;-12;-11;...;5;6\}$. Vậy có $20$ giá trị nguyên của $m$.

**Câu 29.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc khoảng $(-8;8)$ sao cho hàm số $y=\left|-2x^3+3mx-2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.



**Lời giải**

**Chọn B**

$f(x)=-2x^3+3mx-2$

$f'(x)=-6x^2+3m$

Nếu $m\le 0$: $f'(x)\le 0,\forall x\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow f(1)\le 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{4}{3}\Rightarrow m\le 0.$

Nếu $m>0$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\dfrac{m}{2}}$ | | $\sqrt{\dfrac{m}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2m\sqrt{\dfrac{m}{2}}-2$ | $\nearrow$ | $2m\sqrt{\dfrac{m}{2}}-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\sqrt{\dfrac{m}{2}}>1\\ f\left(\sqrt{\dfrac{m}{2}}\right)=0\end{cases} \\ \begin{cases}\sqrt{\dfrac{m}{2}}=1\\ f\left(\sqrt{\dfrac{m}{2}}\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{\dfrac{m}{2}}<1\\ f(1)\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{\dfrac{m}{2}}>1\\ m=\sqrt[3]{2} \quad (L)\end{cases}\\ \begin{cases} m=2 \quad (L)\\ 2m\sqrt{\dfrac{m}{2}}-2\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}m<2\\ m\le \dfrac{4}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow 0<m\le\dfrac{4}{3}.$

$m\in\mathbb{Z},\ m\in(-8;8)\Rightarrow m\in\{-7;-6;...;-1;0;1\}$.

**Câu 30.** **(Sở Ninh Bình)** Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của $T$ bằng

**A.** $9$. **B.** $45$. **C.** $55$. **D.** $36$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$



Theo đề $m>0$ nên $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-\sqrt{m}, x=0, x=\sqrt{m}$.

| x | $-\infty$ | | $-\sqrt{m}$ | | $0$ | | $\sqrt{m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)\Leftrightarrow \sqrt{m}\le 3\Leftrightarrow m\le 9$

Vì $m$ nguyên dương nên $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ ( là cấp số cộng )

Vậy Tổng giá trị các phần tử của $T$ bằng $\dfrac{9}{2}(1+9)=45$.

**Câu 31.** **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

**A.** $m\ge 1$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\le\dfrac{5}{4}$. **D.** $m\le 0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y'=\dfrac{-\cos^2 x+2m\sin x-2\sin^2 x}{\cos^3 x}=\dfrac{-1+2m\sin x-\sin^2 x}{\cos^3 x}$

Để hàm số nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ thì

$y' \leq 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -\sin^2 x + 2m\sin x - 1 \leq 0$ , $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right)$, vì $\cos^3 x > 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ $(1)$

Đặt $\sin x = t, t \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow -t^2 + 2mt - 1 \leq 0, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2+1}{2t}, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ $(2)$

Ta xét hàm $f(t) = \frac{t^2+1}{2t}, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$

Ta có $f'(t) = \frac{2(t^2-1)}{4t^2} < 0, \forall t \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | |
| $f(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{5}{4}$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$.

**Câu 32.** **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020;2020)$ của tham số $m$ để hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0;2)$?

**A.** $2008$. **B.** $2007$. **C.** $2018$. **D.** $2019$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g'(x) = f'(x) - (2m+4)$.

Hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0;2)$ khi $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x) - (2m+4) \leq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 4 \leq 2m + 4, \forall x \in (0;2)$.

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow h'(x) = 6x + 6$. Ta có BBT:

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $4$ ↗ | $28$ |

Vậy $2m+4\ge 28 \Leftrightarrow m\ge 12$. Vì $m$ nguyên thuộc $(-2020;2020)$ nên có 2008 giá trị thỏa mãn.

**Câu 33.** **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}-\frac{mx^3}{3}-\frac{x^2}{2}+mx+2020$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

**A.** 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta có $y'=x^3-mx^2-x+m$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in(0;1)$ hay $x^3-x\le m(x^2-1),\forall x\in(0;1)$.

Vì $\forall x\in(0;1): x^2-1<0$ nên $x^3-x\le m(x^2-1),\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\le x,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\le 0$.

Mặt khác $m\in[-10;10]\cap\mathbb{Z}$ nên có $0-(-10)=11$ giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 34.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** Vô số. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f(x)=\sin x-2m\cos x+(m-1)x+2020m$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cần tìm $m$ nguyên để $f'(x)=\cos x+2m\sin x+m-1\le 0,\forall x$

$\Leftrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}}[\cos x+2m\sin x+m-1]\le 0\Leftrightarrow \sqrt{1+4m^2}+m-1\le 0\Leftrightarrow \sqrt{1+4m^2}\le 1-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-m\ge 0\\ 1+4m^2\le 1-2m+m^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\le 1\\ -\frac{2}{3}\le m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le m\le 0$. Kết hợp $m$ nguyên có $m=0$.

**Câu 35.** **(Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực $m$ để hàm số $y=\ln(x^2+4)+mx+12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

**A.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y'=\frac{2x}{x^2+4}+m,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\forall x\in\mathbb{R}$ (vì $y'=0$ chỉ có hữu hạn nghiệm)

$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+4}+m\ge 0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\ge -\frac{2x}{x^2+4}\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $-\frac{1}{2}-\frac{2x}{x^2+4}=-\frac{(x+2)^2}{2(x^2+4)}\le 0 \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -\frac{2x}{x^2+4}\le\frac{1}{2}\forall x\in\mathbb{R}$ trên $\mathbb{R}$.

Do đó, $m\ge -\frac{2x}{x^2+4}\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$.

**Câu 36.** **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx+1}$ đồng biến trên $(1;2)$.

**A.** $m>-8$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m\le -8$. **D.** $m<-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $y'=\left(3x^2-2x+m\right).2^{x^3-x^2+mx+1}.\ln 2$

Hàm số đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow\left(3x^2-2x+m\right).2^{x^3-x^2+mx+1}.\ln 2\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x+m\ge 0,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow m\ge -3x^2+2x,\ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(1;2)}\left(-3x^2+2x\right)$.

Xét hàm số $f(x)=-3x^2+2x$, với $x\in(1;2)$.

Ta có: $f'(x)=-6x+2$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow -6x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.



Bảng biến thiên:

| $x$ | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-8$ |

Vậy $m\ge -1$ thỏa yêu cầu bài toán.