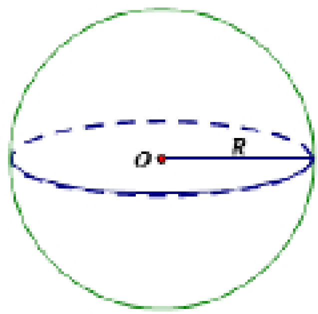
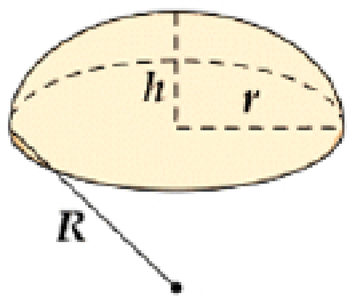
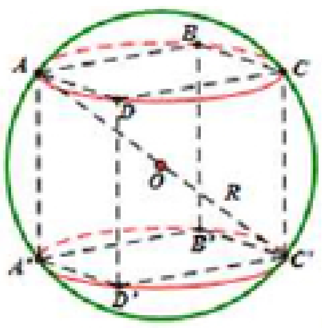
CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Hình Không Gian — Siêu dễ nhớ

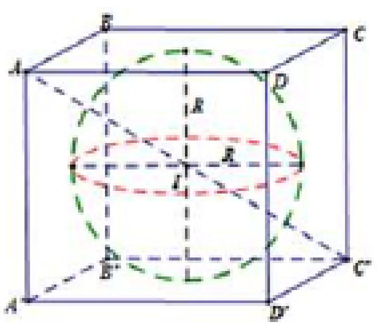
Hình cầu

Hình cầu	$\begin{cases} S_{xq} = 4\pi R^2 \\ V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$	
Chõm cầu	$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2) \\ V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right) = \dfrac{\pi h}{6}(h^2 + 3r^2) \end{cases}$	



- Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'

  Bán kính $R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Đặc biệt: là hình lập phương cạnh a $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$



- Mặt cầu (S) tâm I bán kính R, nội tiếp hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

  Tâm I là trung điểm của AC' (hoặc lấy trung điểm của đoạn thẳng nối tâm của 2 mặt đối diện).
- Bán kính $R = \dfrac{a}{2}$

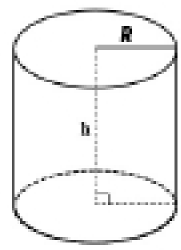
CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Hình Không Gian — Siêu dễ nhớ

Hình trụ

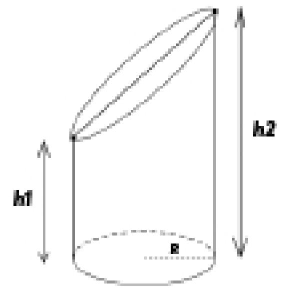
Hình trụ

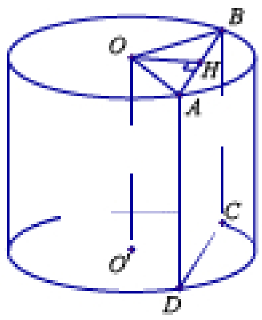
$$S_{xq} = 2\pi Rh$$
$$V = \pi R^2 h$$



Hình trụ cụt

$$S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2)$$
$$V = \pi R^2\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

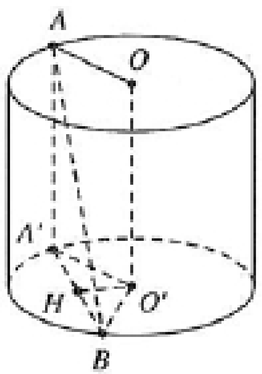




Khoảng cách trong bài toán trụ:

<u>**Bài 1:**</u> $V_T = \pi R^2 h, S_{xq} = 2\pi rh, S_{tp} = 2\pi R(R + h)$

- Thiết diện vuông góc với trục là đường tròn bán kính R.
- Thiết diện chứa trục là hình chữ nhật ABCD diện tích S = 2Rh
- Thiết diện song song với trục là hình chữ nhật AEFD có khoảng cách giữa trục và thiết diện là d(OO',AEFD) =OI



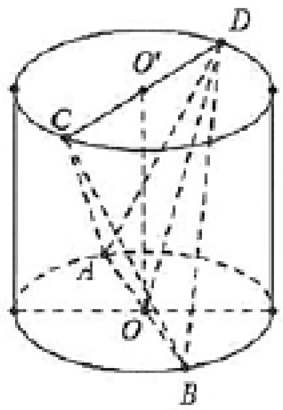
<u>**Bài 2:**</u> A, B lần lượt là các điểm trên các đường tròn đáy của hình trụ ta có:

- Góc giữa AB và trục OO': $(\widehat{AB,OO'}) = A'AB$
- Khoảng cách giữa AB và OO'; d(AB,OO') = O'H

CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Hình Không Gian — Siêu dễ nhớ

Hình trụ

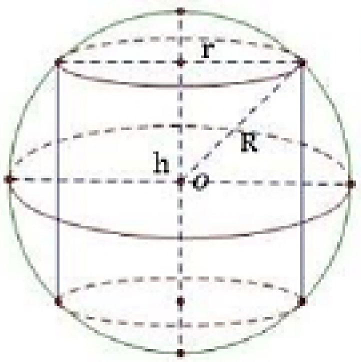


☆ Thể tích chóp trong hình trụ

- Gọi AB, CD là hai đường kính trên hai mặt đáy của hình trụ ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin\left(\widehat{AB,CD}\right)$$

Đặc biệt: Nếu $AB \perp CD$ ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'$



☆ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp trụ

- Mặt cầu ngoại tiếp hình nón bán kính r đường cao h:

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} \quad \text{và} \quad V = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}\right)^3$$

- Trong các hình trụ nội tiếp mặt cầu thì hình trụ có thiết diện qua trục lớn nhất khi:

$$r = \frac{R\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow R = r\sqrt{2} \Rightarrow h = r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Tức là khi đó thiết diện là một hình vuông

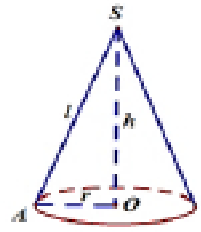
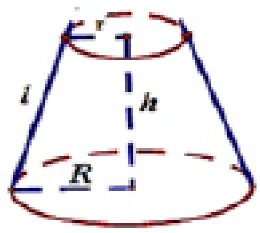
- Trong các hình trụ có đường cao h và bán kính r nội tiếp mặt cầu thì hình trụ có thể tích lớn nhất khi:

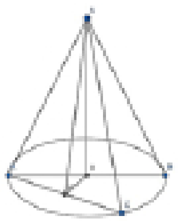
$$h^2 = 2r^2 \Leftrightarrow h = r\sqrt{2}$$

CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Hình Không Gian | Siêu dễ nhớ

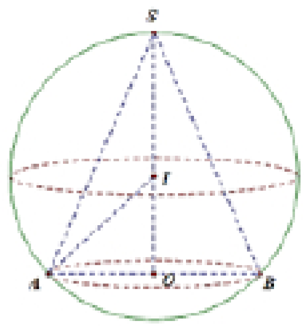
Hình nón

Hình nón thường	$\begin{cases} S_{xq} = \pi Rl \\ S_{tp} = \pi R(R+l) \\ V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \end{cases}$	
Hình nón cụt	$\begin{cases} S_{xq} = \pi l(R+r) \\ S_{tp} = \pi l(R+r) + \pi(R^2+r^2) \\ V = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr) \end{cases}$	



Thiết diện

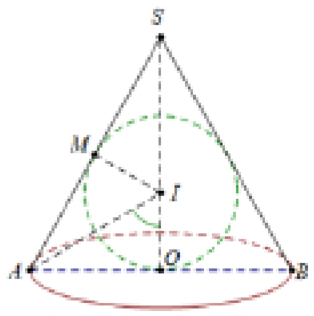
- Thiết diện qua trục là tam giác SAB cân tại S và $S_{SAB} = Rh$ (h là chiều cao, R bán kính đáy)
- Thiết diện qua đỉnh không chứa trục là tam giác cân SAC, thiết diện cắt đáy theo dây cung AC ta có:



☆ ***Mặt cầu (S) tâm I bán kính R, ngoại tiếp hình nón bán kính r đường cao h:*** $R = \dfrac{h^2+r^2}{2h}$

- Trong các khối nón nội tiếp mặt cầu (S) tâm I, bán kính không đổi R. Khối nón có thể tích lớn nhất khi

$$h = \frac{4}{3}R,\ r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R \quad \text{Khi đó} \quad V\pi = \frac{32}{81}R^3$$



☆ ***Mặt cầu (S) tâm I, bán kính r nội tiếp trong mặt nón (N) bán kính R, đường cao h, đường sinh L. Ta có:***

- Dựng tâm I: $M \in SA$ sao cho $OA = OM$

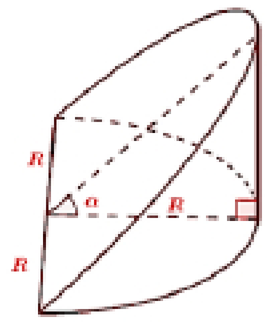
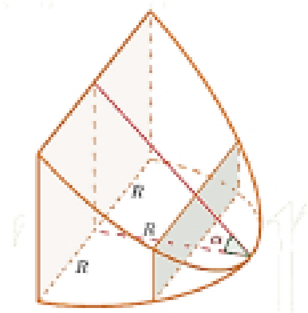
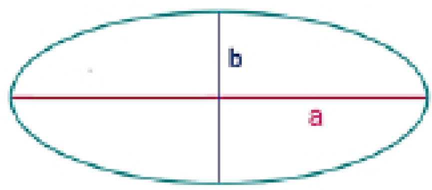
  Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với SA và cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón (N).

- Bán kính mặt cầu (S): $r = \dfrac{hR}{l+R}$

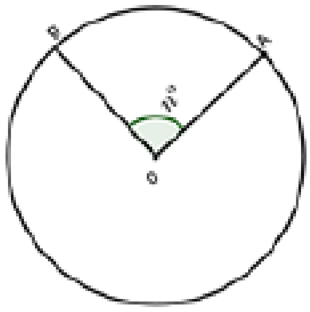
CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Hình Không Gian | Siêu dễ nhớ

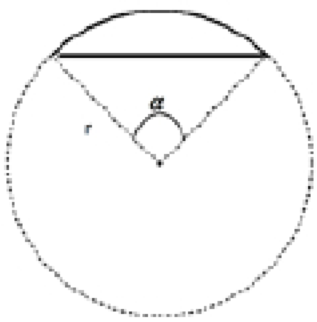
Hình nêm

Hình nêm	$\boxed{V=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha}$	
	$\boxed{V=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3\tan\alpha}$	
Diện tích Elip và Thế tích khối tròn xoay sinh bởi Elip	$S_{elip}=\pi ab$ $V_{xoay\ quanh\ 2a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$ $V_{xoay\ quanh\ 2b}=\frac{4}{3}\pi a^2b$	

Diện tích Hình tròn - Hình Viên Phân - Hình Quạt Tròn



Hình quạt



Hình viên phân

- Diện tích hình tròn bán kính : $R: S_T=\pi R^2$
- Diện tích hình quạt tròn:

$$S_{qt}=\frac{\alpha R^2}{2}(\alpha:\text{radial})$$

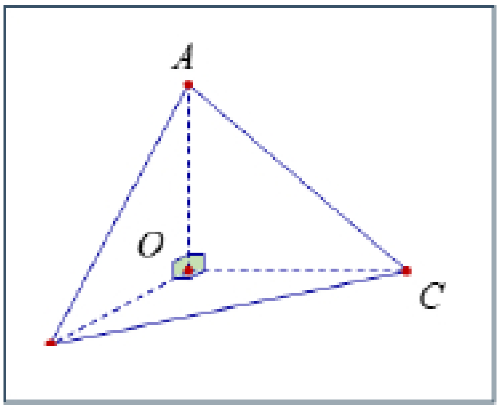
- Diện tích hình viên phân:

$$S_{vp}=\frac{\alpha-\sin\alpha}{2}R^2$$

CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH

Hình chóp ĐẶC BIỆT

❖ **Dạng 1:** Cho hình chóp R với các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OAC) vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích tam giác (OAB), (OBC), (OAC) lần lượt là S_1, S_2, S_3.



Khi đó: $V_{O.ABC} = \dfrac{\sqrt{2.S_1.S_2.S_3}}{3}$

- ***Chứng minh:***

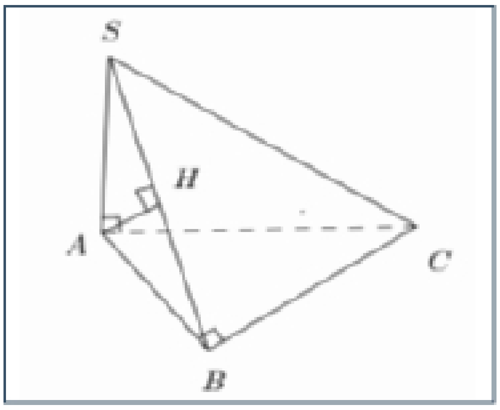
Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$

$\Rightarrow S_1 = \dfrac{1}{2}ab, S_2 = \dfrac{1}{2}bc, S_3 = \dfrac{1}{2}ca$.

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{\sqrt{a^2b^2c^2}}{6} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}ab\right)\left(\frac{1}{2}bc\right)\left(\frac{1}{2}ca\right)}}{3} = \frac{\sqrt{2.S_1.S_2.S_3}}{3}$$

❖ **Dạng 2**: cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \beta; \widehat{ASC} = \alpha$

khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$



- ***Chứng minh:***

$SA = SB.\cos\alpha$

(SAB) và (SBC) vuông góc với nhau

Nên BC vuông góc (SBC)

Tam giác SBC vuông tại B nên

$BC = SB.\tan\beta \Rightarrow S_{SBC} = \dfrac{1}{2}.SB.BC = \dfrac{1}{2}SB^2.\tan\beta$

Kẻ AH vuông góc SB. Lúc này SH sẽ là khoảng cách từ A đến SBC. Do SH vuông góc BC và SB.

Ta có $AK = SA.\sin\alpha = SB.\cos\alpha.\sin\alpha$

$AK = \dfrac{SB.\sin 2\alpha}{2}$

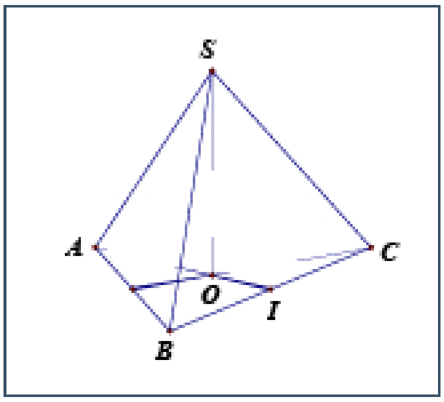
$V_{S.ABC} = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$

CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH

Hình chóp ĐẶC BIỆT

❖ **Dạng 3:** cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$



- ***Chứng minh:***

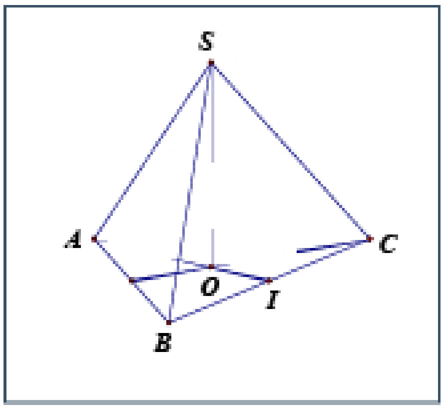
$$AO = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$SG = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$$

❖ **Dạng 4**: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\tan\alpha}{24}$



- ***Chứng minh:***

$$OI = \frac{1}{3}.AI = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$SO = \frac{\sqrt{3}}{6}a.\tan\alpha$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\frac{\sqrt{3}}{6}a.\tan\alpha = \frac{a^3\tan\alpha}{24}$$

CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH

Hình chóp ĐẶC BIỆT

❖ **Dạng 5:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc

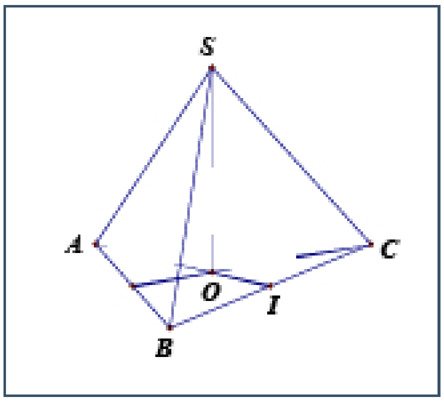
Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.\cos^2\beta}{4}$

- ***Chứng minh:***

$SO = b.\sin\beta$

$AI = \dfrac{3}{2}AO = \dfrac{3}{2}b.\cos\beta \Rightarrow BC = \sqrt{3}.b.\cos\beta$

$S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}b^2\cos^2\beta \Rightarrow V_{S.ACB} = \dfrac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.\cos^2\beta}{4}$



❖ **Dạng 6:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA = SB = SC = SD = b$

Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$

- ***Chứng minh:***

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{2}}$

$V_{S.ACBD} = \dfrac{1}{3}.a^2.\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$