

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC ĐỘ 9-10 ĐIỂM

**Dạng 1. Định m để GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước**

**Dạng 1:** Tìm  $m$  để  $\max_{[a;b]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$ .

**Phương pháp:**

**Cách 1:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

$$\text{Kiểm tra } \max\{|m+K|, |m+k|\} \geq \frac{|m+K| + |m+k|}{2} \geq \frac{|m+K-m-k|}{2} = \frac{|K-k|}{2}.$$

$$\text{TH1: } \frac{|K-k|}{2} \leq a. \text{ Để } \max_{[a;b]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = -a \\ m+K = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -a-k \\ m = a-K \end{cases} \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}.$$

$$\text{TH2: } \frac{|K-k|}{2} > a \Rightarrow m \in \emptyset.$$

**Cách 2:** Xét trường hợp

$$\text{TH1: } \max = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \geq |m+k| \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \max = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \geq |m+K| \end{cases}$$

**Dạng 2:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$ .

**Phương pháp:**

Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

$$\text{Để } \min_{[a;b]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = a \\ m+k > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K = -a \\ m+K < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a-k \\ m > -k \end{cases} \vee \begin{cases} m = -a-K \\ m < -K \end{cases}. \text{ Vậy } m \in S_1 \cup S_2.$$

**Dạng 3:** Tìm  $m$  để  $\max_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  không vượt quá giá trị  $M$  cho trước.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

$$\text{Để } \max_{[a;b]} y \leq M \Rightarrow \begin{cases} m+k \geq -M \\ m+K \leq M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \leq m \leq M-K.$$

**Dạng 4:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  không vượt quá giá trị  $a$  cho trước.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

Để

$$\min_{[a;b]} y \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \leq a \\ m+k \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \geq -a \\ m+K \leq 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a-k \\ m \geq -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \geq -a-K \\ m \leq -K \end{cases} \vee -K < m < -k.$$

**Dạng 5:** Tìm  $m$  để  $\max_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  đạt min.

**Phương pháp:**

Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K$ ;  $\min_{[a;b]} f(x) = k$  ( $K > k$ ).

Đề hỏi tìm  $m \Rightarrow m = -\frac{K+k}{2}$ . Đề hỏi tìm min của  $\max_{[a;b]} y \Rightarrow$  giá trị này là  $\frac{K-k}{2}$ .

**Dạng 6:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  đạt min.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K$ ;  $\min_{[a;b]} f(x) = k$  ( $K > k$ ).

Đề hỏi tìm  $m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k$ . Đề hỏi tìm min của  $\min_{[a;b]} y \Rightarrow$  giá trị này là 0.

**Dạng 7:** Cho hàm số  $y = |f(x) + m|$ . Tìm  $m$  để  $\max_{[a;b]} y \leq h$ .  $\min_{[a;b]} y$  ( $h > 0$ ) hoặc  $\text{Min} + \text{max} =$

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K$ ;  $\min_{[a;b]} f(x) = k$  ( $K > k$ ).

**TH1:**  $|K + m| \leq h \mid k + m \mid \xrightarrow{K+m \text{ cùng dấu } k+m} m \in S_1$ .

**TH2:**  $|k + m| \leq h \mid K + m \mid \xrightarrow{K+m \text{ cùng dấu } k+m} m \in S_2$ .

Vậy  $m \in S_1 \cup S_2$ .

**Dạng 8:** Cho hàm số  $y = |f(x) + m|$ .

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K$ ;  $\min_{[a;b]} f(x) = k$  ( $K > k$ ).

**BT1:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y + \max_{[a;b]} y = \alpha \Leftrightarrow |m+K| + |m+k| = \alpha$ .

**BT2:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y * \max_{[a;b]} y = \beta \Leftrightarrow |m+K| * |m+k| = \beta$ .

**Câu 1. (Đề Tham Khảo 2018)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là

- A. 0 B. 6 C. 1 D. 2

**Câu 2. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 3]$  bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  là:

- A. -16. B. 16. C. -12. D. -2.

**Câu 3. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  sao cho  $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$ . Số phần tử của  $S$  là

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 4.

**Câu 4. (THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Tìm  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$  trên đoạn  $[0; 2]$  là nhỏ nhất. Giá trị của  $m$  thuộc khoảng nào?

- A.  $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ . B.  $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ . C.  $[-1; 0]$ . D.  $(0; 1)$ .

**Câu 5. (Số Vĩnh Phúc 2019)** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^2 - 2x + m|$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng 5.

- A. -1. B. 2. C. -2. D. 1.

- Câu 6. (THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho hàm số  $y = |x^2 + 2x + a - 4|$  ( $a$  là tham số). Tìm  $a$  để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-2; 1]$  đạt giá trị nhỏ nhất
- A.  $a = 1$ .                      B.  $a = 3$ .                      C.  $a = 2$ .                      D.  $a = 5$ .
- Câu 7. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$  trên  $[1; 2]$  bằng 2. Số phần tử của tập  $S$
- A. 3.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 2.
- Câu 8. (HSG Bắc Ninh 2019)** Xét hàm số  $f(x) = |x^2 + ax + b|$ , với  $a, b$  là tham số. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$ . Khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính  $a + 2b$ .
- A. 2.                      B. 4.                      C. -4.                      D. 3.
- Câu 9.** Cho hàm số  $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$ . Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-3; -1]$  có giá trị nhỏ nhất bằng
- A. 26.                      B. 18.                      C. 28.                      D. 16.
- Câu 10. (Sở Quảng Nam - 2018)** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^2 + 2x + m - 4|$  trên đoạn  $[-2; 1]$  bằng 4?
- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.
- Câu 11. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng 16. Số phần tử của  $S$  là
- A. 0.                      B. 2.                      C. 4.                      D. 1.
- Câu 12. (Chuyên Hạ Long 2018)** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 20. Tổng các phần tử của  $S$  bằng
- A. 210.                      B. -195.                      C. 105.                      D. 300.
- Câu 13.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |\sin^2 x - 2\sin x + m|$  bằng 1. Số phần tử của  $S$  là
- A. 0                      B. 1                      C. 4                      D. 3
- Câu 14. (Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số  $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x + 1} \right|$ , với  $a$  là tham số thực. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[1; 2]$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $a$  để  $M \geq 2m$ ?
- A. 10.                      B. 14.                      C. 5.                      D. 20.
- Câu 15. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp  $S$  bằng bao nhiêu?
- A. 120.                      B. 210.                      C. 108.                      D. 136.
- Câu 16. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số  $f(x) = |3e^{4x} - 4e^{3x} - 24e^{2x} + 48e^x + m|$ . Gọi  $A, B$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

của hàm số đã cho trên  $[0; \ln 2]$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-23; 10]$  thỏa mãn  $A \leq 3B$ . Tổng các phần tử của tập  $S$  bằng

- A. -33. B. 0. C. -111. D. -74.

**Câu 17. (Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số  $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$ . Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = 10$ ?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 1.

**Câu 18. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[1; 3]$  không lớn hơn 2020?

- A. 4045. B. 4046. C. 4044. D. 4042.

**Câu 19. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét hàm số  $f(x) = \left| \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \right|$ , với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên  $m$  thỏa mãn điều kiện  $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$ ?

- A. 4. B. 8. C. 2. D. 1.

**Câu 20. (Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi  $S$  là tập hợp những giá trị của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = |x^3 - 12x + m|$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng 12. Tổng tất cả các phần tử của tập  $S$  bằng

- A. 25. B. 4. C. 15. D. 21.

**Câu 21. (Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi  $S_0$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m \right|$  trên đoạn  $[2; 4]$  không vượt quá 30. Số phần tử của  $S$  là

- A. 50. B. 49. C. 66. D. 73.

**Câu 22. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$  trên đoạn  $[0; \ln 4]$  bằng 6?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

**Câu 23. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10 \right|$  trên đoạn  $[0; 3]$  không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của  $S$  bằng bao nhiêu?

- A. -7. B. 0. C. 3. D. 12.

**Câu 24. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của  $S$  là

- A. 180. B. 136. C. 120. D. 210.

**Câu 25. (Liên trường Nghệ An - 2020)** Biết giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$  trên  $[0; 3]$  bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực  $m$ .

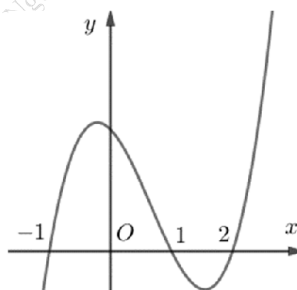
- A. 48. B. 5. C. 6. D. 62.

**Câu 26. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là

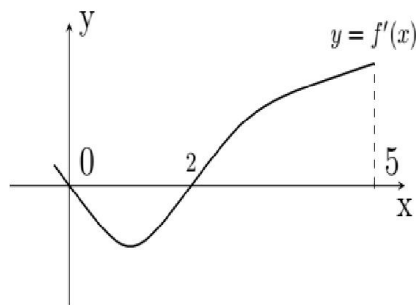
- A. 2.                                      B. 6.                                      C. 1.                                      D. 0.
- Câu 27.** (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số  $f(x) = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  sao cho  $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10$ . Số phần tử của  $S$  là?
- A. 2.                                      B. 3.                                      C. 5.                                      D. 1.
- Câu 28.** (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \left| \frac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2} \right|$  có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[-1;1]$  là  $a$  thỏa mãn  $0 < a < 1$ .
- A. 3.                                      B. 4.                                      C. 5.                                      D. 2.
- Câu 29.** (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số  $y = |x^4 - 2x^2 + 3m|$  với  $m$  là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị  $m_1, m_2$  của  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên  $[-1;2]$  bằng 2021. Tính giá trị  $|m_1 - m_2|$ .
- A.  $\frac{1}{3}$ .                                      B.  $\frac{4052}{3}$ .                                      C.  $\frac{8}{3}$ .                                      D.  $\frac{4051}{3}$ .
- Câu 30.** (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  thuộc đoạn  $[-2020;2020]$  sao cho  $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$ . Số phần tử của  $S$  là
- A. 4003.                                      B. 4002.                                      C. 4004.                                      D. 4001.

### Dạng 2. Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất hàm ẩn, hàm hợp

- Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.

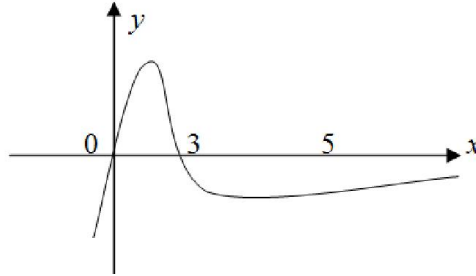


- Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1;2]$  là
- A.  $f(1)$ .                                      B.  $f(-1)$ .                                      C.  $f(2)$ .                                      D.  $f(0)$ .
- Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là hàm  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ. Biết rằng  $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ . Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0;5]$  lần lượt là:



- A.  $f(2); f(5)$ . B.  $f(0); f(5)$ . C.  $f(2); f(0)$ . D.  $f(1); f(5)$ .

**Câu 3.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ bên. Biết rằng  $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  và giá trị lớn nhất  $M$  của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 5]$ .



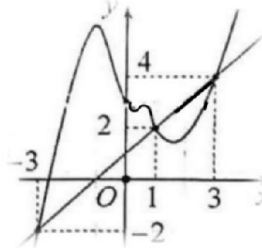
- A.  $m = f(5), M = f(3)$  B.  $m = f(5), M = f(1)$   
C.  $m = f(0), M = f(3)$  D.  $m = f(1), M = f(3)$

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$  trên đoạn  $[1; 3]$ .

$x$	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-3		5		$-\infty$

- A. 15. B.  $\frac{25}{3}$ . C.  $\frac{19}{3}$ . D. 12.

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Đặt  $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ . Mệnh đề dưới đây đúng.



- A.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$ . B.  $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$ . C.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(0)$ . D.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$ .

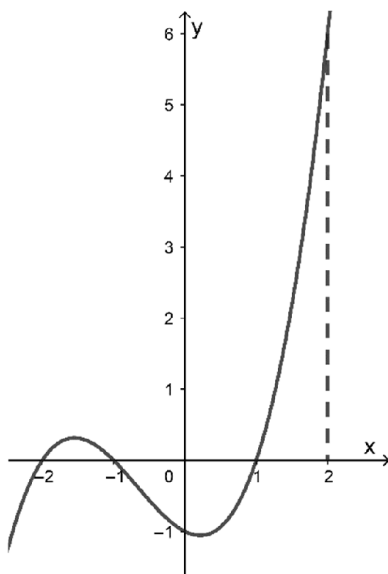
**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f'(0) = 3$ ,  $f'(2) = -2018$  và bảng xét dấu của  $f''(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số  $y = f(x + 2017) + 2018x$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x_0$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -2017)$  B.  $(2017; +\infty)$  C.  $(0; 2)$  D.  $(-2017; 0)$

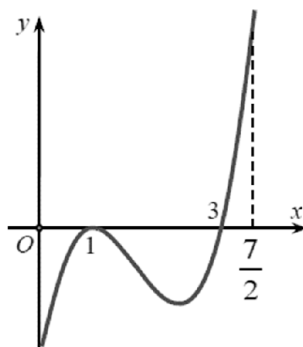
**Câu 7.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng  $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2)$ . Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 2]$  lần lượt là:

- A.  $f(1); f(2)$ .      B.  $f(2); f(0)$ .      C.  $f(0); f(2)$ .      D.  $f(1); f(-1)$ .

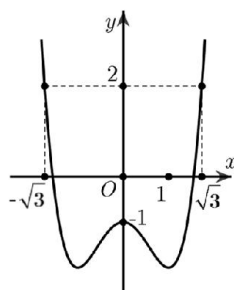
**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$  tại điểm  $x_0$  nào dưới đây?

- A.  $x_0 = 0$ .      B.  $x_0 = \frac{7}{2}$ .      C.  $x_0 = 1$ .      D.  $x_0 = 3$ .

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ



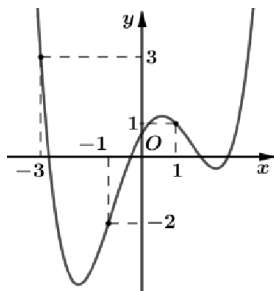
Đặt  $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$ . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A.  $\max_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$ . B.  $\max_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$ .

C.  $\max_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(\sqrt{3})$ . D.  $\max_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  ở hình vẽ bên. Xét hàm số

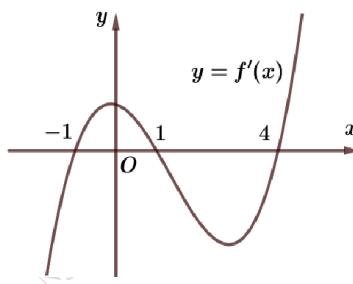
$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?



A.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$ . B.  $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$ .

C.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$ . D.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $R$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

- 1) Hàm số  $y = f(x)$  có hai cực trị
- 2) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$
- 3)  $f(1) > f(2) > f(4)$ .
- 4) Trên đoạn  $[-1; 4]$ , giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  là  $f(1)$ .

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

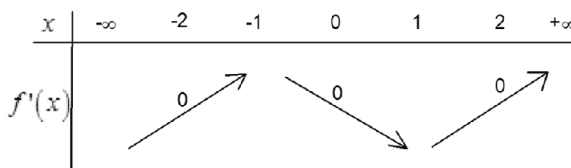
$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$  trên đoạn  $[1; 3]$ .

$x$	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
$y'$		-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$		5		$-\infty$	

- A.  $\frac{25}{3}$ . B. 15. C.  $\frac{19}{3}$ . D. 12.

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$  trên đoạn  $[-1; 1]$  là



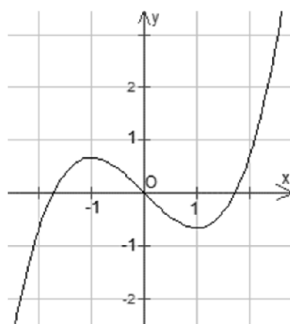


- A.  $f(-1)$ .      B.  $f(0)$ .      C.  $f(2)$ .      D.  $f(1)$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$ . Xét hàm số  $g(x) = f(3x-1) + m$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $\max_{[0;1]} g(x) = -10$ .

- A. 13.      B. -7.      C. -13.      D. -1.

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



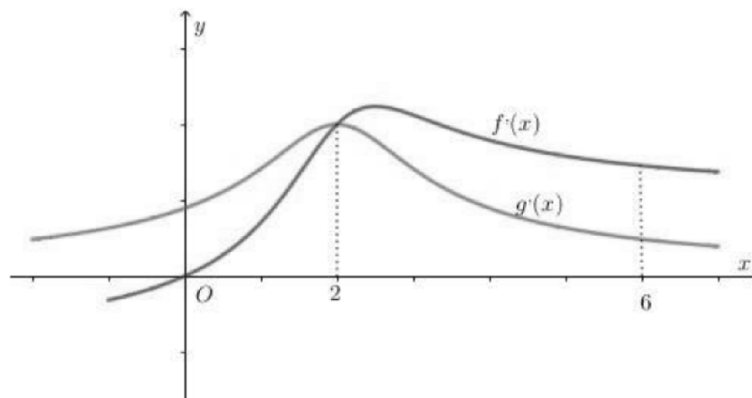
Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right)$  trên đoạn  $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$  bằng

- A.  $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ .      B.  $f(0)$ .      C.  $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ .      D.  $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ .

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$ . Xét hàm số  $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$ . Giá trị của tham số  $m$  để  $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$  là

- A. 5.      B. 4.      C. -1.      D. 3.

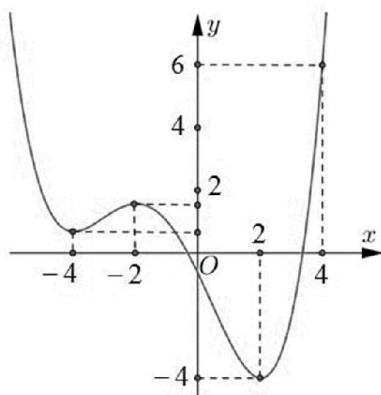
**Câu 17.** Cho hai hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và  $g'(x)$  được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng  $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$ . Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $h(x) = f(x) - g(x)$  trên đoạn  $[0;6]$  lần lượt là:

- A.  $h(6), h(2)$ .      B.  $h(2), h(6)$ .      C.  $h(0), h(2)$ .      D.  $h(2), h(0)$ .

**Câu 18. (Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1 \right|$  có giá trị

lớn nhất không vượt quá 2020?

A. 4029.

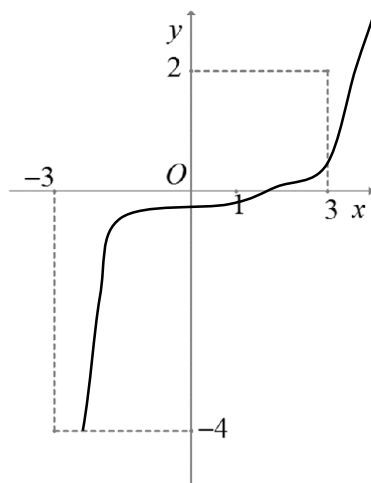
B. 4035.

C. 4031.

D. 4041.

**Câu 19. (Sở Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình bên.

Đặt  $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$ .



Khi đó  $y = g(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[-3; 3]$  tại

A.  $x = -3$ .

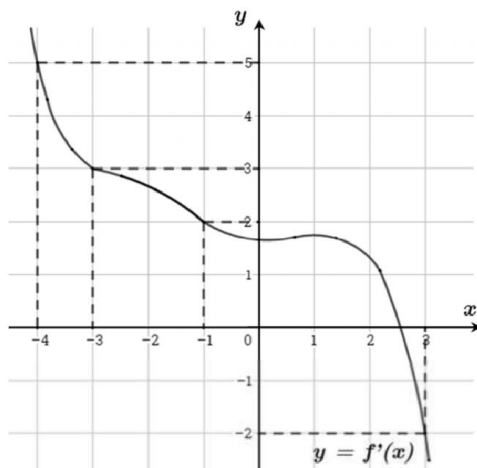
B.  $x = 3$ .

C.  $x = 0$ .

D.  $x = 1$ .

**Câu 20. (Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình dưới đây.

Trên  $[-4; 3]$ , hàm số  $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A.  $x = -3$ .

B.  $x = -4$ .

C.  $x = 3$ .

D.  $x = -1$ .

- Câu 21. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f'(0) = 3, f'(2) = f'(-2018) = 0$ , và bảng xét dấu của  $f''(x)$  như sau

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Hàm số  $y = f(|x-1|-2018)$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x_0$  thuộc khoảng nào sau đây?

A.  $(-\infty; -2015)$ .

B.  $(1; 3)$ .

C.  $(-1009; 2)$ .

D.  $(-2015; 1)$ .

- Câu 22. (THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f'(0) = 3, f'(2) = -2020, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  và bảng xét dấu của  $f''(x)$  như hình sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Hàm số  $y = f(x+2019) + 2020x$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x_0$  thuộc khoảng nào sau đây?

A.  $(-\infty; -2019)$ .

B.  $(0; 2)$ .

C.  $(-2019; 0)$ .

D.  $(2019; +\infty)$ .

### Dạng 3. Ứng dụng gtln-gtnn giải bài toán thực tế

- Câu 1. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Cho số  $a > 0$ . Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng  $a$ , tam giác có diện tích lớn nhất bằng

A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$ .

B.  $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$ .

D.  $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$ .

- Câu 2. (Mã 101 2018)** Ông A dự định dùng hết  $6,5m^2$  kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A.  $2,26 m^3$

B.  $1,61 m^3$

C.  $1,33 m^3$

D.  $1,50 m^3$

- Câu 3. (Mã 104 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 (m/s)

B. 27 (m/s)

C. 144 (m/s)

D. 36 (m/s)

- Câu 4. (Mã 103 2018)** Ông A dự định sử dụng hết  $5m^2$  kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A.  $1,01 m^3$

B.  $0,96 m^3$

C.  $1,33 m^3$

D.  $1,51 m^3$

- Câu 5.** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$  (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

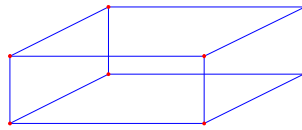
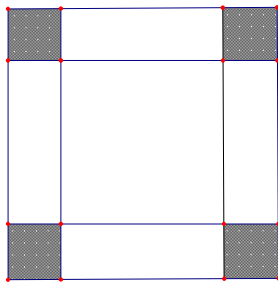
A. 4 giờ.

B. 1 giờ.

C. 3 giờ.

D. 2 giờ.

- Câu 6. (Đề Minh Họa 2017)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$  (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A.  $x = 3$

B.  $x = 2$

C.  $x = 4$

D.  $x = 6$

**Câu 7. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một sợi dây có chiều dài  $28m$  được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

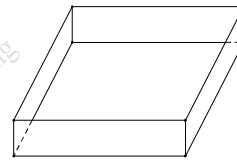
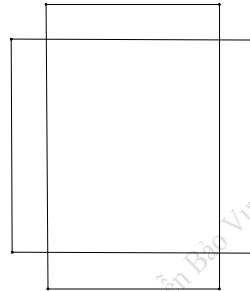
A.  $\frac{56}{4+\pi}$ .

B.  $\frac{112}{4+\pi}$ .

C.  $\frac{84}{4+\pi}$ .

D.  $\frac{92}{4+\pi}$ .

**Câu 8. (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng  $10cm$  và chiều rộng bằng  $8cm$ . Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x(cm)$ , rồi gấp tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A.  $x = \frac{8-2\sqrt{21}}{3}$

B.  $x = \frac{10-2\sqrt{7}}{3}$

C.  $x = \frac{9+\sqrt{21}}{9}$ .

D.  $x = \frac{9-\sqrt{21}}{3}$

**Câu 9. (Mã 103 2018)** Ông A dự định sử dụng hết  $5m^2$  kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

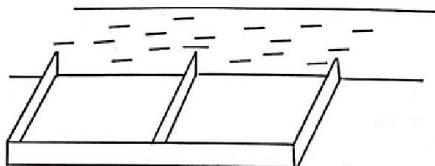
A.  $1,01m^3$ .

B.  $0,96m^3$ .

C.  $1,33m^3$ .

D.  $1,51m^3$ .

**Câu 10.** Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



A.  $3125m^2$ .

B.  $50m^2$ .

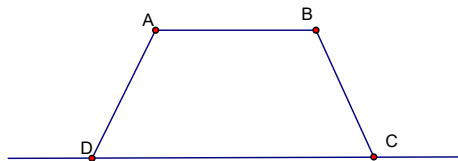
C.  $1250m^2$ .

D.  $6250m^2$ .

**Câu 11. (Chuyên Long An-2019)** Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $288m^3$ . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là  $500000$  đồng/ $m^2$ . Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể)?

- A. 90 triệu đồng. B. 168 triệu đồng. C. 54 triệu đồng. D. 108 triệu đồng.

**Câu 12. (Kinh Môn - Hải Dương L2 2019)** Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài  $12(m)$  và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân  $ABCD$  như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng  $DC$  không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu  $m^2$ ?

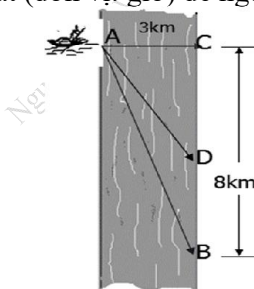


- A.  $100\sqrt{3}$ . B.  $106\sqrt{3}$ . C.  $108\sqrt{3}$ . D.  $120\sqrt{3}$ .

**Câu 13. (Sở GD Quảng Nam - 2019)** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2$  và hai điểm  $C, D$  thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho  $ABCD$  là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang  $ABCD$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}$ . B.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ . C. 1. D.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 14. (THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình 2018)** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí  $A$  tới điểm  $B$  về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến  $C$  và sau đó chạy đến  $B$ , hay có thể chèo trực tiếp đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm  $D$  giữa  $C$  và  $B$  và sau đó chạy đến  $B$ . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường  $BC = 8$  km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến  $B$ .



- A.  $\frac{3}{2}$ . B.  $\frac{9}{\sqrt{7}}$ . C.  $\frac{\sqrt{73}}{6}$ . D.  $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ .

**Dạng 4. Dùng phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức**

**Câu 1. (HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1$ ,  $x + y + z = 2$ . Biết giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = xyz$  bằng  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Giá trị của  $2a + b$  bằng

- A. 5. B. 43. C. 9. D. 6.

**Câu 2. (Chuyên Bắc Giang Nam 2019)** Cho  $x^2 - xy + y^2 = 2$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = x^2 + xy + y^2$  bằng:

- A.  $\frac{2}{3}$  B.  $\frac{1}{6}$  C.  $\frac{1}{2}$  D. 2

**Câu 3. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$ . Tính giá trị  $M + m$

**Câu 4. (Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị -2019)** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x + y = \frac{3}{2}$  và biểu thức

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính } x^2 + y^2.$$

A.  $\frac{153}{100}$ .

B.  $\frac{5}{4}$ .

C.  $\frac{2313}{1156}$ .

D.  $\frac{25}{16}$ .

**Câu 5. (Chuyên Hà Tĩnh - 2019)** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi thỏa mãn  $x^2 + y^2 - xy = 1$  và hàm số  $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ . Gọi  $M, m$  tương ứng là GTLN và GTNN của  $Q = f\left(\frac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right)$ . Tổng

$M + m$  bằng:

A.  $-4 - 3\sqrt{2}$ .

B.  $-4 - 5\sqrt{2}$ .

C.  $-4 - 4\sqrt{2}$ .

D.  $-4 - 2\sqrt{2}$ .

**Câu 6. (Sở Lào Cai - 2019)** Cho hàm số  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ . Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A.  $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{4}{3}$ . B.  $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{4}{3}$ . C.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ . D.  $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{4}{3}$ .

**Câu 7. (THPT Trần Nhân Tông 2018)** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

A.  $\frac{296\sqrt{15} - 18}{9}$ .

B.  $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$ .

C.  $\frac{36 - 4\sqrt{6}}{9}$ .

D.  $\frac{-4\sqrt{6} + 18}{9}$ .

**Câu 8. (THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho  $x, y > 0$  và  $x + y = \frac{5}{4}$  sao cho biểu thức

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó}$$

A.  $x^2 + y^2 = \frac{25}{32}$ .

B.  $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}$ .

C.  $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ .

D.  $x^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ .

**Câu 9. (Xuân Trường - Nam Định -2018)** Cho  $x, y$  là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện  $(xy + 1)(\sqrt{xy + 1} - \sqrt{y}) \leq 1 - x - \frac{1}{y}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x - 2y}{6(x + y)}?$$

A.  $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$ .

B.  $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

C.  $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$ .

D.  $\frac{\sqrt{5} + 7}{30}$ .

**Câu 10. (THPT Lê Xoay - 2018)** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y + 1 = 2(\sqrt{x - 2} + \sqrt{y + 3})$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 3^{x+y-4} + (x + y + 1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$  bằng

A.  $-\frac{9476}{243}$ .

B.  $-76$ .

C.  $\frac{193}{3}$ .

D.  $\frac{148}{3}$ .

**Câu 11. (Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$

A.  $\sqrt{2} - 1$ .

B.  $2\sqrt{2} + 1$ .

C.  $\sqrt{2} + 1$ .

D.  $2\sqrt{2} - 1$ .

**Câu 12. (Sở Phú Thọ - 2018)** Xét các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 4$  và  $xy + yz + zx = 5$ .

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$  bằng:

- A. 20. B. 25. C. 15. D. 35.

**Câu 13. (Sở Bắc Ninh - 2018)** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$  trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó:

- A.  $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$ . B.  $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$ . C.  $M = 1, m = 0$ . D.  $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$ .

**Câu 14. (Chuyên Long An - 2018)** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ .

- A.  $\min P = -80$ . B.  $\min P = -91$ . C.  $\min P = -83$ . D.  $\min P = -63$ .

**Câu 15. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + 2y$ .

- A.  $P = 10$  B.  $P = 4$ . C.  $P = 6$ . D.  $P = 8$ .

**Câu 16. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018)** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}.$$

$$P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$$

- A. 8. B. 0. C. 12. D. 4.

**Câu 17. (Sở Nam Định - 2018)** Biết rằng bất phương trình

$$m(|x| + \sqrt{1-x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2-x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2$$

có nghiệm khi và chỉ khi  $m \in (-\infty; a\sqrt{2} + b]$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của  $T = a + b$ .

- A.  $T = 3$ . B.  $T = 2$ . C.  $T = 0$ . D.  $T = 1$ .

**Câu 18. (THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn

$$2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2).$$

$$P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

- A.  $-\frac{25}{4}$ . B. 5. C.  $-\frac{23}{4}$ . D. -13.

**Câu 19. (THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2x + y = \frac{5}{4}$ . Tìm giá

trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}$ .

- A.  $P_{\min} = \frac{34}{5}$ . B.  $P_{\min} = \frac{65}{4}$ . C.  $P_{\min}$  không tồn tại. D.  $P_{\min} = 5$ .

**BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI**

<https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKIG?usp=sharing>

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Tải nhiều tài liệu hơn tại: <http://diendangiaovientoan.vn/>

ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!

Nguyễn Bảo Vương