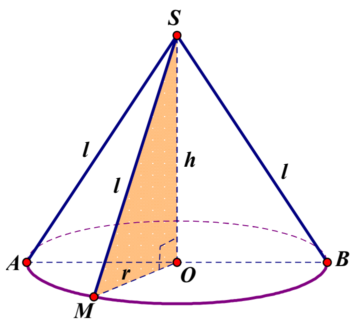
Chuyên đề 21 KHỐI NÓN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 ☞**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	□ **Đường cao**: $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). □ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = OM}$. □ **Đường sinh**: $\boxed{l = SA = SB = SM}$. □ **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$ □ **Thiết diện qua trục**: ΔSAB cân tại S. □ **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	□ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. □ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. □ **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *(liên tưởng đến thể tích khối chóp).* □ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. □ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

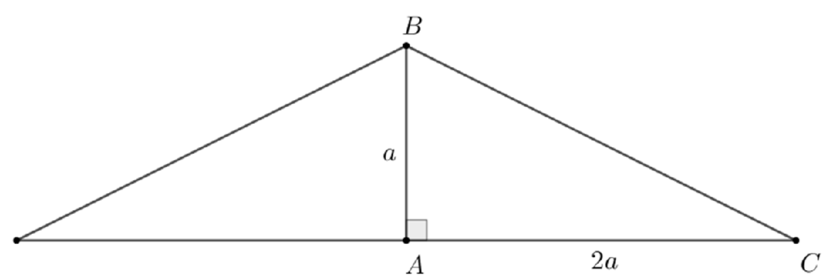
Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh hình nón đó bằng

A. $5\pi a^2$. **B.** $\sqrt{5}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{5}\pi a^2$. **D.** $10\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C



$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$.

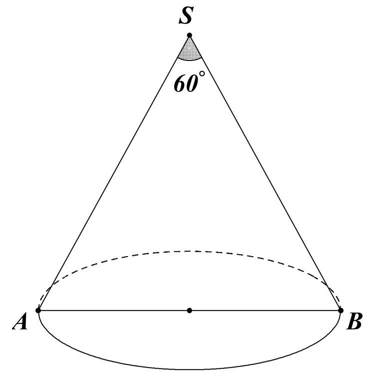
Diện tích xung quanh hình nón cần tìm là $S = \pi.AC.BC = \pi.2a.a\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\pi a^2$.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 16π.

Lời giải

Chọn A



Gọi S là đỉnh của hình nón và AB là một đường kính của đáy.
Theo bài ra, ta có tam giác SAB là tam giác đều $\Rightarrow\ l = SA = AB = 2r = 4$.
Vậy diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq} = \pi rl = 8\pi$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính bằng 5 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 50π. **B.** $\frac{100\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{50\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 100π.

Lời giải

Chọn A

Ta có độ dài đường sinh là $l = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{5}{\sin 30°} = 10$.

Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi rl = 50\pi$.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính bằng 3 và góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 18π. **B.** 36π. **C.** $6\sqrt{3}\pi$. **D.** $12\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A

Gọi l là đường sinh, r là bán kính đáy ta có $r = 3$.

Gọi α là góc ở đỉnh. Ta có $\sin\alpha = \frac{r}{l} \Rightarrow l = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin 30^0} = 6$.

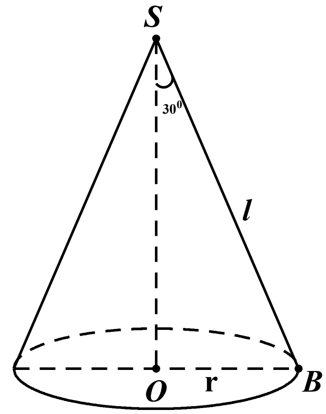
Vậy diện tích xung quanh $S = \pi rl = \pi.3.6 = 18\pi$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 4 và góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** 64π. **D.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có Góc ở đỉnh bằng $60^0 \Rightarrow \widehat{OSB}=30^0$.

Độ dài đường sinh: $l=\dfrac{r}{\sin 30^0}=\dfrac{4}{\frac{1}{2}}=8$.

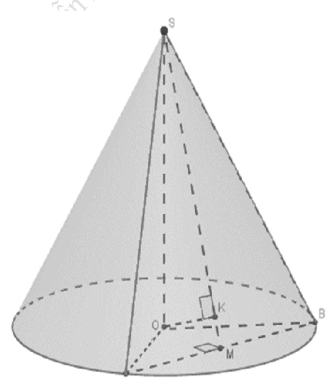
Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq}=\pi rl=\pi.4.8=32\pi$.

Câu 6. **(Mã 123 2017)** Cho một hình nón có chiều cao $h=a$ và bán kính đáy $r=2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ **B.** $d=\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$ **C.** $d=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ **D.** $d=a$

Lời giải

Chọn C



Có $(P)\equiv(SAB)$.

Ta có $SO=a=h, OA=OB=r=2a, AB=2a\sqrt{3}$, gọi M là hình chiếu của O lên AB suy ra M là trung điểm AB, gọi K là hình chiếu của O lên SM suy ra $d(O;(SAB))=OK$.

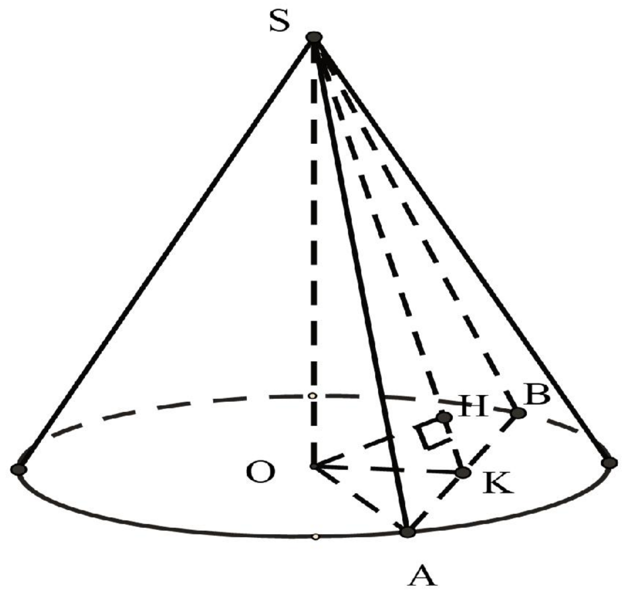
Ta tính được $OM=\sqrt{OA^2-MA^2}=a$ suy ra SOM là tam giác vuông cân tại O, suy ra K là trung điểm của SM nên $OK=\dfrac{SM}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 7. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0, \widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK \perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOK) \Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$ mà $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$ nên từ O dựng $OH \perp SK$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB))$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin\widehat{SAO} = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin\widehat{SAB} = \dfrac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$

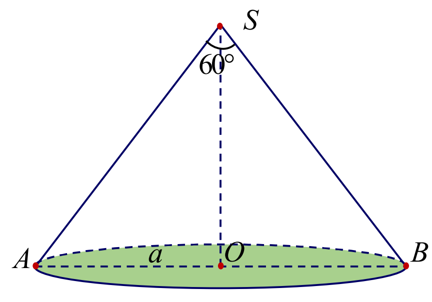
Xét tam giác SOK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{SK^2 - SO^2} + \dfrac{1}{SO^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{SA^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3SA^2}{4} - \frac{SA^2}{4}} = \frac{4}{SA^2} + \frac{2}{SA^2} \Rightarrow \frac{6}{SA^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

Câu 8. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A. $S_{xq} = 4\pi a^2$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **D.** $S_{xq} = 2\pi a^2$.

Lời giải



Giả sử hình nón có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy và AB là một đường kính của đáy.

$r = OA = a$, $\widehat{ASB} = 60° \Rightarrow \widehat{ASO} = 30°$.

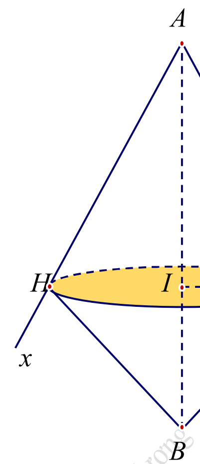
Độ dài đường sinh là $l = SA = \dfrac{OA}{\sin 30^\circ} = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi.a.2a = 2\pi a^2$.

Câu 9. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$.

Lời giải



Xét tam giác AHB vuông tại H. Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác AHB vuông tại H, $HI \perp AB$ tại I ta có $HI = \dfrac{AH.HB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay (có diện tích xung quanh là S) là hợp của hai mặt xung quanh của hình nón (N_1) và (N_2).

Trong đó:

(N_1) là hình nón có được do quay tam giác AHI quanh trục AI có diện tích xung quanh là

$S_1 = \pi.HI.AH = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3\pi a^2}{2}$

(N_2) là hình nón có được do quay tam giác BHI quanh trục BI có diện tích xung quanh là

$S_2 = \pi.HI.BH = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$

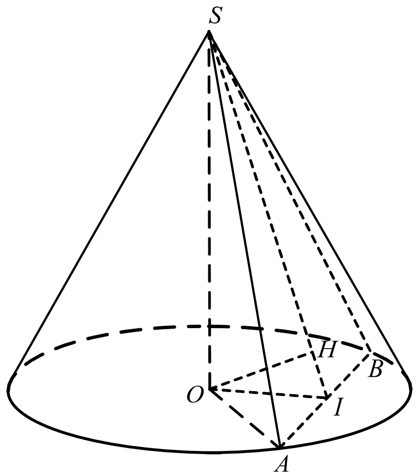
$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \dfrac{3\pi a^2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$.

Câu 10. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình nón có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S = 500$ **B.** $S = 400$ **C.** $S = 300$ **D.** $S = 406$

Lời giải

Giả sử hình nón đỉnh S, tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là ΔSAB (hình vẽ).



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.
Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.
Ta chứng minh được $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 12$.

Xét tam giác vuông SOI có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225}$.

$\Rightarrow OI^2 = 225 \Rightarrow OI = 15$.

Xét tam giác vuông SOI có $SI = \sqrt{OS^2 + OI^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

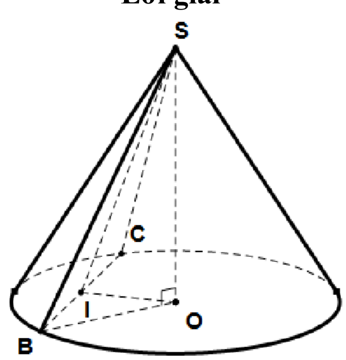
Xét tam giác vuông OIA có $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 40$.

Ta có $S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.SI = \frac{1}{2}.40.25 = 500$.

Câu 11. **(Liên Trường THPT TP Vinh Nghệ An 2019)** Cắt hình nón (N) đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung đường tròn của đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy của hình nón một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$ **C.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$

Lời giải



Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân, suy ra $r = SO = a\sqrt{2}$

Ta có góc giữa mặt phẳng (SBC) tạo với đáy bằng góc $\widehat{SIO} = 60^0$

Trong tam giác SIO vuông tại O có $SI=\dfrac{SO}{\sin\widehat{SIO}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$ và $OI=SI.\cos\widehat{SIO}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

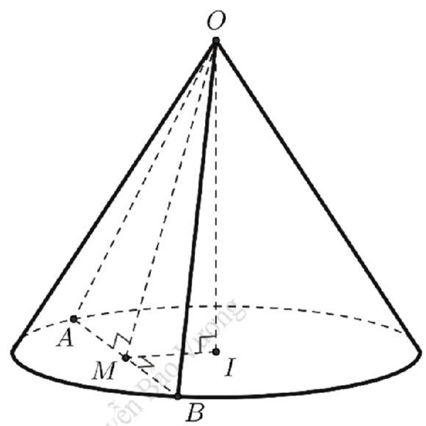
Mà $BC=2\sqrt{r^2-OI^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$

Diện tích tam giác SBC là $S=\dfrac{1}{2}SI.BC=\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$

Câu 12. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 4 và bán kính bằng 3. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có độ dài cạnh đáy bằng 2. Diện tích của thiết diện bằng.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có: $h=OI=4, R=IA=IB=3, AB=2$.

Gọi M là trung điểm AB $\Rightarrow MI\perp AB\Rightarrow AB\perp(SMI)\Rightarrow AB\perp SM$.

Lại có: $SB=\sqrt{OI^2+IB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$; $SM=\sqrt{SB^2-MB^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$.

Vậy: $S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}.SM.AB=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{6}.2=2\sqrt{6}$.

Câu 13. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cắt hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được một thiết diện là một tam giác vuông cân cạnh bên $a\sqrt{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình nón.

A. $4a^2\pi$ (đvdt). **B.** $4\sqrt{2}a^2\pi$ (đvdt). **C.** $a^2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$ (đvdt). **D.** $2\sqrt{2}a^2\pi$ (đvdt).

Lời giải

Giả sử hình nón đã cho có độ dài đường sinh l, bán kính đáy là R.

Thiết diện của hình nón qua trục là tam giác OAB vuông cân tại O và $OA=a\sqrt{2}$.

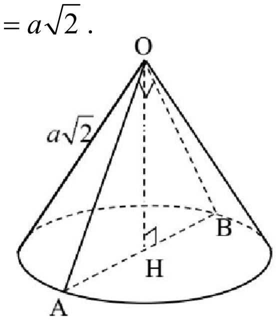
Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông cân OAB ta có:

$AB^2=OA^2+OB^2=4a^2\Rightarrow AB=2a$.

Vậy: $l=a\sqrt{2},\ R=a$.

Diện tích toàn phần của hình nón là:

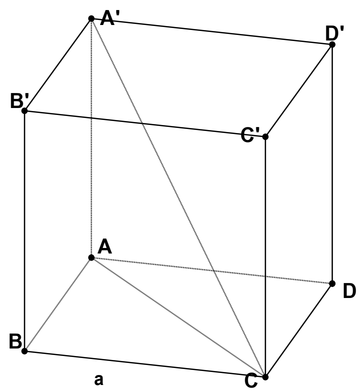
$S_{TP}=S_{xq}+S_{§,y}=\pi Rl+\pi R^2=\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$ (đvdt).

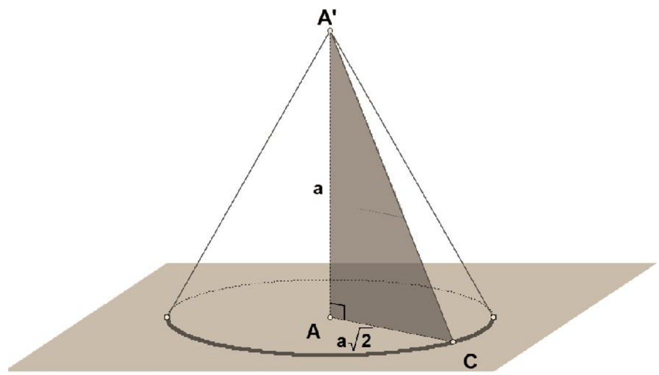


Câu 14. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của vật tròn xoay thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA'.

A. $\pi\left(\sqrt{3}+2\right)a^2$. **B.** $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$. **C.** $2\pi\left(\sqrt{6}+1\right)a^2$. **D.** $\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$.

Lời giải





Quay tam giác $AA'C$ một vòng quanh trục AA' tạo thành hình nón có chiều cao $AA'=a$, bán kính đáy $r=AC=a\sqrt{2}$, đường sinh $l=A'C=\sqrt{AA'^2+AC^2}=a\sqrt{3}$.

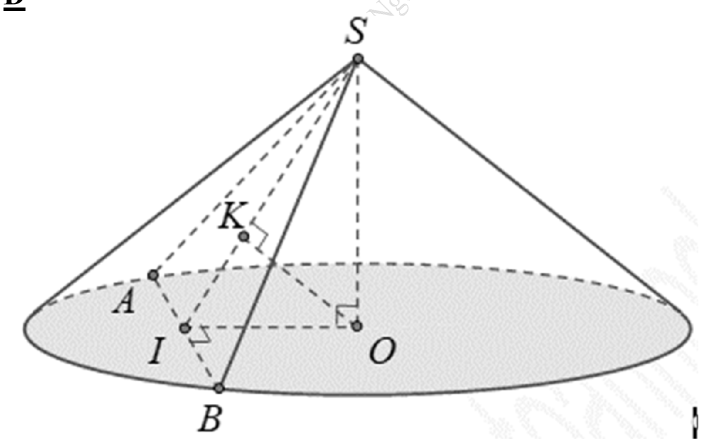
Diện tích toàn phần của hình nón: $S=\pi r\left(r+l\right)=\pi a\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}+a\sqrt{3}\right)=\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$.

Câu 15. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng $\left(P\right)$ qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng $\left(P\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $l=h=1$

Mặt phẳng $\left(P\right)$ qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung AB có độ dài bằng 1. I, K là hình chiếu O lên AB; SI. Ta có $AB\perp\left(SIO\right)\Rightarrow OK\perp\left(SAB\right)$

ta có $IO=\sqrt{R^2-OA^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

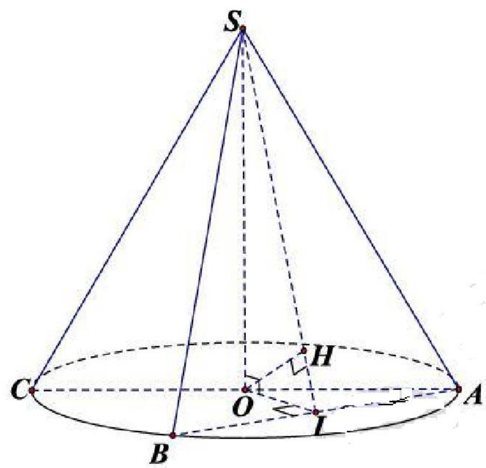
$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OS^2}\Rightarrow OK=\frac{OI.\text{SO}}{\sqrt{OI^2+OS^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 16. Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn $(O;5)$.Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA = AB = 8$. Tính khoảng cách từ O đến (SAB).

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm AB.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SAB) \perp (SOI)$.

Trong (SOI), kẻ $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB)$.

$\Rightarrow d(O;(SAB)) = OH$.

Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{8.5}{5}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{39}$.

Ta có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{4.5}{5}\right)^2} = 3$.

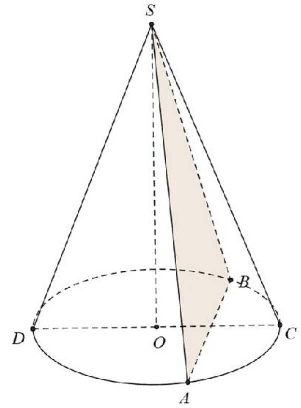
Tam giác vuông SOI có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Vậy $d(O;(SAB)) = OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Câu 17. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính, $R = 3cm$, góc ở đỉnh hình nón là $\varphi = 120°$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB, trong đó A, B thuộc đường tròn đáy. Diện tích tam giác SAB bằng

A. $3\sqrt{3}$ cm^2. **B.** $6\sqrt{3}$ cm^2. **C.** 6 cm^2. **D.** 3 cm^2.

Lời giải



Theo đề bài ta có góc ở đỉnh hình nón là $\varphi = 120°$ và khi cắt hình nón bởi mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB nên mặt phẳng không chứa trục của hình nón.

Do góc ở đỉnh hình nón là $\varphi = 120°$ nên $\widehat{OSC} = 60°$.

Xét tam giác vuông SOC ta có $\tan\widehat{OSC} = \dfrac{OC}{SO} \Rightarrow SO = \dfrac{OC}{\tan\widehat{OSC}} = \dfrac{3}{\tan 60°} = \sqrt{3}$.

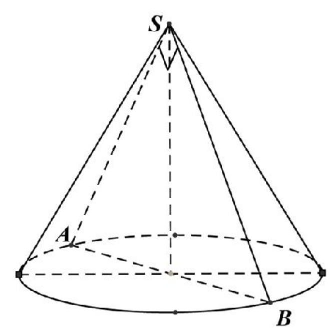
Xét tam giác vuông SOA ta có $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = 2\sqrt{3}$.

Do tam giác SAB đều nên $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{3}\right)^2.\sin 60° = 3\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **<u>B</u>.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi S là đỉnh hình nón, thiết diện qua trục là tam giác SAB.

Ta có $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = a$, suy ra $l = SA = a$; $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

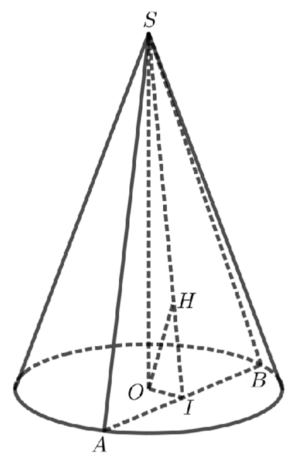
Vậy $S_{xq} = \pi rl = \pi.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60°, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h=R\sqrt{3}$. **B.** $h=R\sqrt{2}$. **C.** $h=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=\frac{R\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm AB.

Kẻ OH vuông góc với SI.

$d(O,(SAB))=OH=\frac{R}{2}$.

Ta có cung AB bằng 60° nên $\widehat{AOB}=60^\circ$.

Tam giác AOI vuông tại I, ta có $\cos\widehat{IOA}=\frac{OI}{OA}\Leftrightarrow OI=OA.\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}R}{2}$.

Tam giác SOI vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2}=\frac{8}{3R^2}\Rightarrow SO=\frac{\sqrt{6}R}{4}.$$

Câu 20. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng $3a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $\frac{3a}{2}$. Diện tích của thiết diện đó bằng

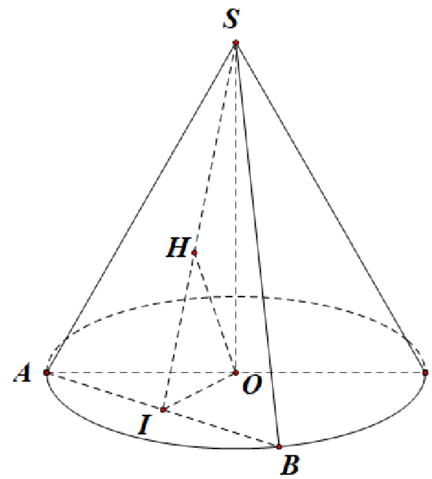
A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$. **B.** $12a^2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{12a^2}{7}$. **D.** $\frac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hình nón đỉnh S có chiều cao $SO=2a$, bán kính đáy $OA=3a$.

Thiết diện đi qua đỉnh của hình nón là tam giác SAB cân tại S.



+ Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trong tam giác SOI, kẻ $OH \perp SI$, $H \in SI$.

+ $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$.

+ $\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O,(SAB)) = OH = \dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác SOI vuông tại O, ta có $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{4}{9a^2} - \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{7}{36a^2} \Rightarrow OI = \dfrac{6a}{\sqrt{7}}$.

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{36a^2}{7}} = \dfrac{8a}{\sqrt{7}}$.

Xét tam giác AOI vuông tại I, $AI = \sqrt{AO^2 - OI^2} = \sqrt{9a^2 - \dfrac{36a^2}{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow AB = 2AI = \dfrac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

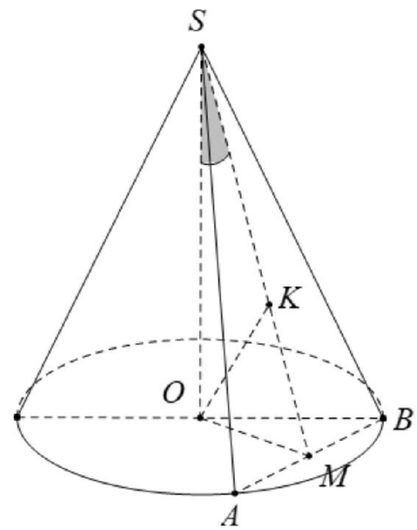
Vậy diện tích của thiết diện là: $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}.SI.AB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{8a}{\sqrt{7}}.\dfrac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{7}} = \dfrac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Câu 21. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $2\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{10}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB, tam giác OAB cân đỉnh O nên $OM \perp AB$ và $SO \perp AB$ suy ra $AB \perp (SOM)$.

Dựng $OK \perp SM$.

Theo trên có $OK \perp AB$ nên $OK \perp (SAB)$.

Vậy góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{OSM} = 30°$.

Tam giác vuông cân SAB có diện tích bằng $4a^2$ suy ra $\frac{1}{2}SA^2 = 4a^2 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SM = 2a$.

Xét tam giác vuông SOM có $\cos\widehat{OSM} = \frac{SO}{SM} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{3}}{2}.2a = \sqrt{3}a$.

Cuối cùng $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = a\sqrt{5}$.

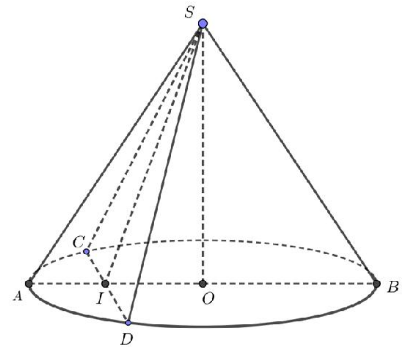
Vậy diện tích xung quanh của hình nón bằng $S_{xq} = \pi rl = \pi.a\sqrt{5}.2a\sqrt{2} = 2a^2\sqrt{10}\pi$.

Câu 22. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích của thiết diện này bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2a^2$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình nón có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O. Thiết diện qua trục là ΔSAB, thiết diện qua đỉnh là ΔSCD; gọi I là trung điểm của CD.

Theo giả thiết ta có ΔSAB vuông cân tại S, cạnh huyền $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow r = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$SA = SB = l = a \Rightarrow h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta lại có $\widehat{SIO} = 60° \Rightarrow \sin 60° = \dfrac{SO}{SI} \Rightarrow SI = \dfrac{SO}{\sin 60°} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$;

$$ID = \sqrt{SD^2 - SI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Diện tích thiết diện cần tìm là $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}.CD.SI = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

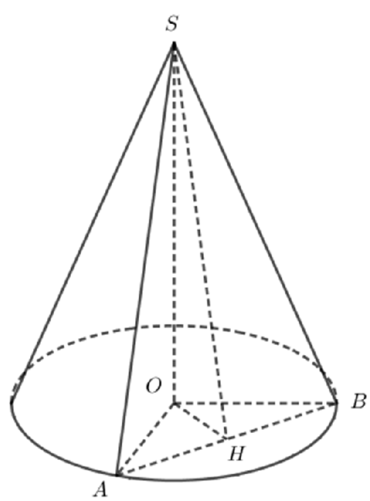
Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết tam giác SAB đều, $S_{\Delta SAB}=9\sqrt{3}$ và $SO=2\sqrt{5}$.

$S_{\Delta SAB}=9\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\Leftrightarrow AB=6$.

ΔSAB đều $SA=AB=6$.

Xét ΔSOA vuông tại O, theo định lý Pytago ta có: $OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=4$.

Thể tích hình nón bằng $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi.OA^2.SO=\dfrac{1}{3}\pi 4^2.2\sqrt{5}=\dfrac{32\sqrt{5}}{3}\pi$.

Câu 2. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tính thể tích của hình nón có góc ở đỉnh bằng 60^o và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$.

A. $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $V=3\pi a^3$ **C.** $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ **D.** $V=\pi a^3$

Lời giải

Chọn B

Khối nón có góc ở đỉnh bằng 60^o nên góc tạo bởi đường sinh và đáy bằng 60^o.

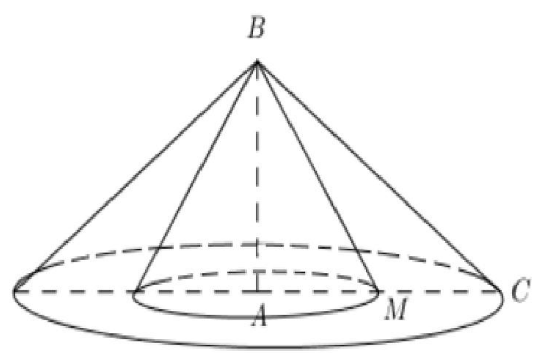
Vậy $R=\dfrac{l}{2}$; lại có $S_{xq}=\pi Rl=\pi R.2R=6\pi a^2$ nên $R=a\sqrt{3}$; vậy $h=\sqrt{l^2-R^2}=R\sqrt{3}=3a$

Vậy $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=3\pi a^3$.

Câu 3. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB=6$, $AC=8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh quanh AB là

A. 86π **B.** 106π **C.** 96π **D.** 98π

Lời giải



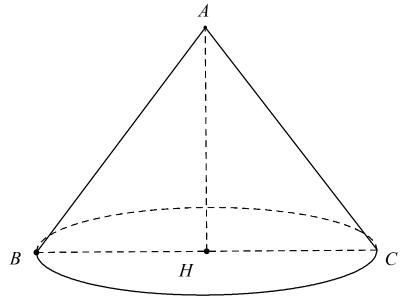
Khi tam giác BMC quanh quanh trục AB thì thể tích khối tròn xoay tạo thành là hiệu của thể tích khối nón có đường cao AB, đường sinh BC và khối nón có đường cao AB, đường sinh BM.

Nên $V=\dfrac{1}{3}AB.\pi.AC^2-\dfrac{1}{3}AB.\pi.AM^2=\dfrac{1}{4}AB.\pi.AC^2=96\pi$. Đáp án C

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng $2\,\text{cm}$, góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính thể tích của khối nón đó.

A. $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}\text{cm}^3$. **B.** $8\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được thiết diện là tam giác ABC cân tại đỉnh A của hình nón.

Do góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{BAC}=60°$, suy ra $\widehat{HAC}=30°$. Bán kính đáy $R=HC=2$ cm.

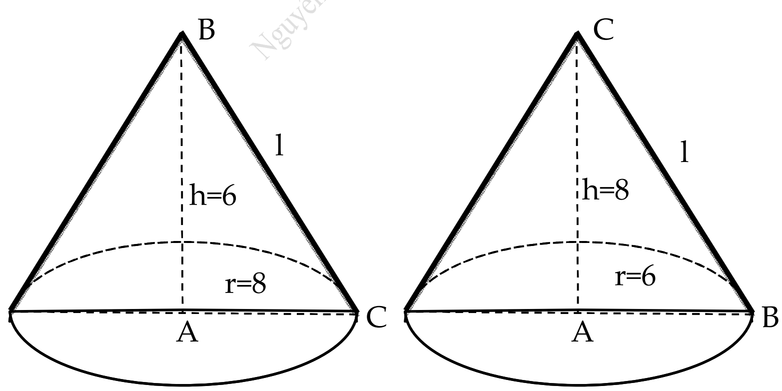
Xét ΔAHC vuông tại H, ta có $AH=\dfrac{HC}{\tan 30°}=\dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}$ cm.

Thể tích của khối nón: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2.AH=\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3.

Câu 5. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=6cm, AC=8cm$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó, tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{9}$. **D.** $\dfrac{9}{16}$.

Lời giải



Ta có công thức tính thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính r là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì:

$h=AB=6cm$ và $r=AC=8cm$ thì $V_1=\dfrac{1}{3}\pi.8^2.6=128\pi$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC thì:

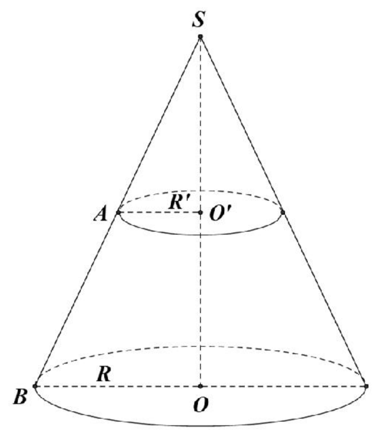
$h=AC=8cm$ và $r=AB=6cm$ thì $V_2=\dfrac{1}{3}\pi.6^2.8=96\pi$

Vậy: $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{3}$ đáp án **B.**

Câu 6. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình nón N_1 đỉnh S đáy là đường tròn $C(O;R)$, đường cao $SO = 40\,\text{cm}$. Người ta cắt nón bằng mặt phẳng vuông góc với trục để được nón nhỏ N_2 có đỉnh S và đáy là đường tròn $C'(O';R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} = \frac{1}{8}$. Tính độ dài đường cao nón N_2.

A. $20\,\text{cm}$. **B.** $5\,\text{cm}$. **C.** $10\,\text{cm}$. **D.** $49\,\text{cm}$.

Lời giải



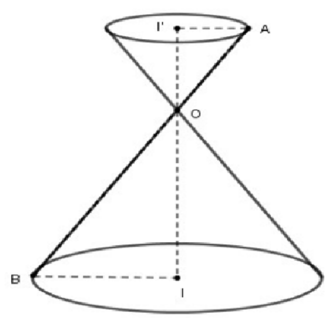
Ta có: $V_{N_1} = \frac{1}{3}\pi R^2.SO$, $V_{N_2} = \frac{1}{3}\pi R'^2.SO'$.

Mặt khác, $\Delta SO'A$ và ΔSOB đồng dạng nên $\frac{R'}{R} = \frac{SO'}{SO}$.

Suy ra: $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} == \frac{R'^2.SO'}{R^2.SO} = \left(\frac{SO'}{SO}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Suy ra $\frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow SO' = \frac{1}{2}.40 = 20\,\text{cm}$. Do đó chọn **A.**

Câu 7. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho một đồng hồ cát như bên dưới (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60°. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là $30\,cm$ và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\,cm^3$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần bên trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ số thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?



A. $\frac{1}{64}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi r_1, h_1, r_2, h_2 lần lượt là bán kính, đường cao của hình nón trên và hình nón dưới.

Do đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60°.

Suy ra: $\widehat{OAI'} = \widehat{OBI} = 60^\circ$, khi đó ta có mối liên hệ: $h_1 = \sqrt{3}r_1$, $h_2 = \sqrt{3}r_2$.

Theo đề ta có: $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(h_1r_1^2 + h_2r_2^2\right) = \frac{1}{9}\pi\left(h_1^3 + h_2^3\right) = 1000\pi$.

Mà: $\left(h_1^3 + h_2^3\right) = \left(h_1 + h_2\right)^3 - 3\left(h_1 + h_2\right).h_1h_2 \Rightarrow h_1.h_2 = 200$.

Kết hợp giả thiết: $h_1 + h_2 = 30$ ta được $\begin{cases} h_1 = 10 \\ h_2 = 20 \end{cases}$.

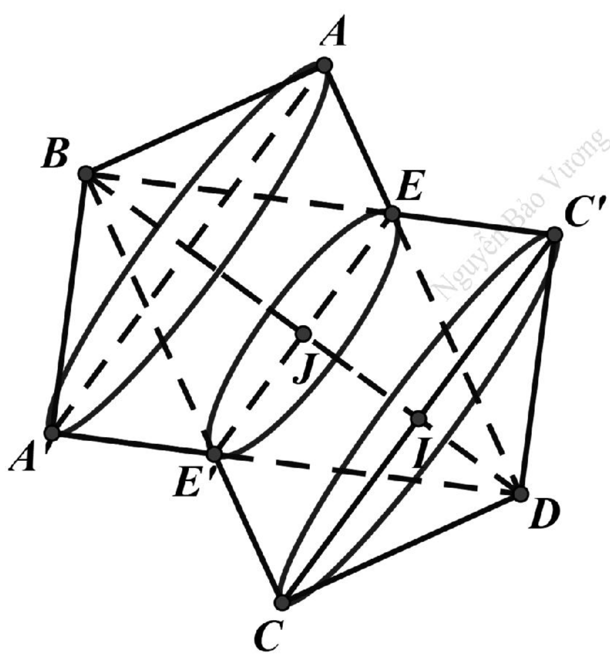
Từ đó tỉ lệ cần tìm là $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(10\sqrt{3}\right)^2.h_1}{\left(20\sqrt{3}\right)^2.h_2} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Câu 8. Cho hinh chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, AD = 2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\frac{28\pi}{9}$ **B.** $\frac{28\pi}{3}$ **C.** $\frac{56\pi}{9}$ **D.** $\frac{56\pi}{3}$

Lời giải

Chọn C



Khối nón đỉnh D, tâm đáy I có thể tích V_1

Ta có $BD = 4$ mà $IC'.BD = BC'.C'D \Rightarrow IC' = \sqrt{3}$

$ID = \frac{DC'^2}{BD} = 1$ nên $V_1 = \frac{1}{3}\pi.IC'^2.ID = \pi$

Khối nón cụt có tâm đáy J, I có thể tích V_2

Ta có $DI = 3, DJ = 2$, $\frac{JE}{IC'} = \frac{DJ}{DI} = \frac{2}{3} \Rightarrow JE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(IC'^2.DI - JE^2.DJ\right) = \frac{19\pi}{9}$

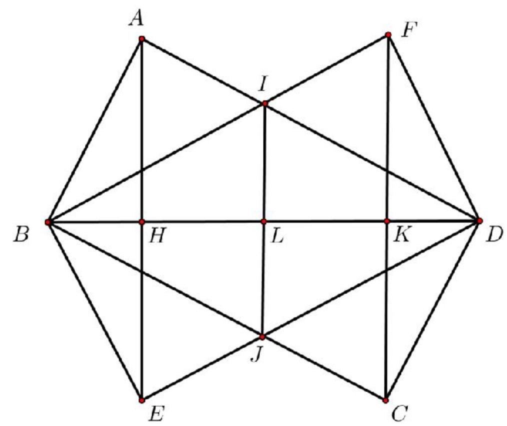
Vậy thể tích cần tìm là $V = 2\left(V_1 + V_2\right) = \frac{56}{9}\pi$. Đáp án **C.**

Câu 9. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\frac{28\pi}{9}$. **B.** $\frac{28\pi}{3}$. **C.** $\frac{56\pi}{9}$. **D.** $\frac{56\pi}{3}$.

Lời giải

Gọi điểm như hình vẽ



V_1, V_2 lần lượt là thể tích khói nón, nón cụt nhận được khi quay tam giác ABH và tứ giác $AHLT$ quay BD.

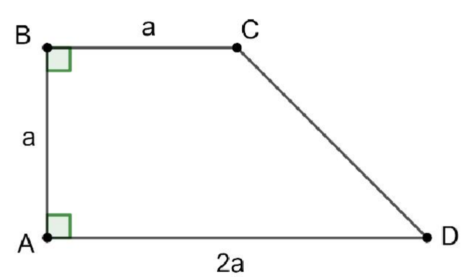
Ta có: $AH=\sqrt{3}, IL=\frac{2}{\sqrt{3}}, BH=HL=1$.

Ta có:

$V=2(V_1+V_2)=2\left[\frac{1}{3}BH.\pi.AH^2+\frac{1}{3}HL.\pi.\left(IL^2+IL.AH+AH^2\right)\right]$

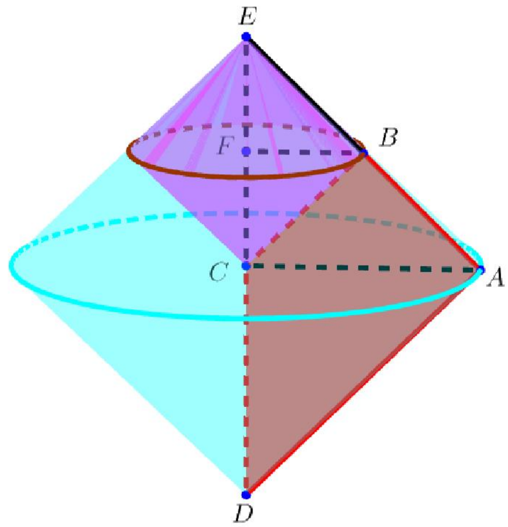
$=2\left[\frac{1}{3`}.1.\pi.3+\frac{1}{3}.1.\pi.\left(\frac{4}{3}+2+3\right)\right]=\frac{56\pi}{9}$.

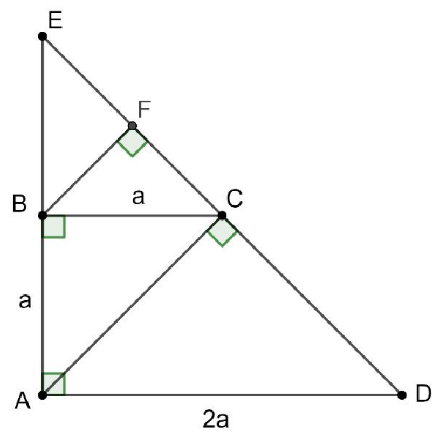
Câu 10. **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A}=\hat{B}=90°$, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD.



A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. **C.** $\frac{7\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{7\pi a^3}{12}$.

Lời giải





Gọi E là giao điểm của AB và CD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE.

Ta có: $\Delta BCF = \Delta BEF$ nên tam giác ΔBCF và ΔBEF quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1.

$\Delta ADC = \Delta AEC$ nên tam giác ΔADC và ΔAEC quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V.

Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng:

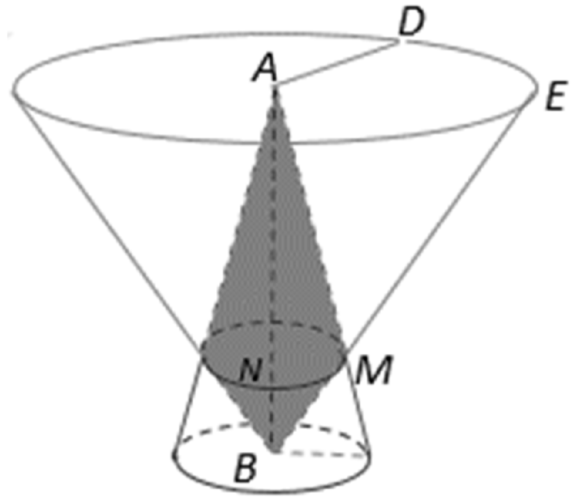
$$2V - 2V_1 = 2.\frac{1}{3}\pi\left(CD.AC^2 - CF.BF^2\right) = \frac{2}{3}\pi\left[\left(a\sqrt{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}.$$

Câu 11. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC = 2(cm)$, $AB = 2\sqrt{3}(cm), AD = 6(cm)$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A. $\sqrt{3}\pi(cm^3)$ **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi(cm^3)$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi(cm^3)$. **D.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi(cm^3)$.

Lời giải

Chọn C



Dễ thấy $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD = R_1$

Gọi $\{M\} = BD \cap AC$ và N là hình chiếu của M trên A**B.** Dễ dàng chứng minh được tỉ lệ:

$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB}(1)$; và $\frac{MN}{AD} = \frac{BN}{AB}(2)$ $\Rightarrow \frac{(1)}{(2)} = \frac{AD}{BC} = \frac{AN}{BN} = 3 \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{3}{4}; \frac{BN}{AB} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}; BN = \frac{\sqrt{3}}{2}; MN = \frac{3}{2}$

Phần thể tích chung của 2 khối tròn xoay là phần thể tích khi quay tam giác $\triangle AMB$ xung quanh trục A**B.** Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác $\triangle BMN$ xung quanh AB

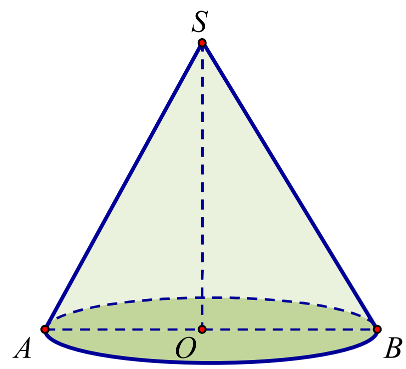
Và V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác $\triangle AMN$ xung quanh AB

Dễ tính được: $V_1 = \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}(dvtt)$ và $V_2 = \frac{9\sqrt{3}\pi}{8}(dvtt) \Rightarrow V_1 + V_2 = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}(dvtt)$. **Chọn C.**

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = 3\pi a^3$. **D.** $V = \pi a^3$.

Lời giải



Thể tích $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO.$

Ta có $\widehat{ASB} = 60° \Rightarrow \widehat{ASO} = 30° \Rightarrow \tan 30° = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO = OA\sqrt{3}.$

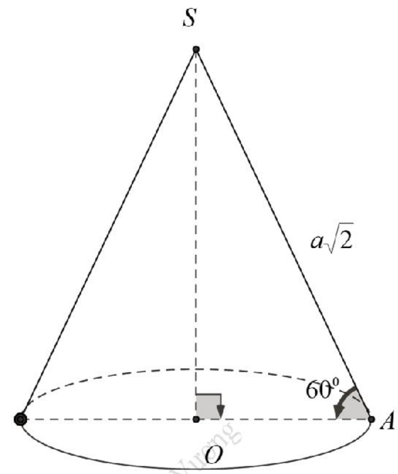
Lại có $S_{xq} = \pi Rl = \pi.OA.SA = \pi.OA\sqrt{OA^2 + SO^2} = 6\pi a^2$

$\Rightarrow OA\sqrt{OA^2+3OA^2}=6a^2 \Rightarrow 2OA^2=6a^2 \Rightarrow OA=a\sqrt{3} \Rightarrow SO=3a \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi.3a^2.3a=3\pi a^3$.

Câu 13. **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón và thể tích V của khối nón tương ứng là

A. $S_{xq}=\pi a^2$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$.
B. $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{2}$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.
C. $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{2}$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.
D. $S_{xq}=\pi a^2$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Dựa vào hình vẽ ta có: góc giữa đường sinh và mặt đáy là $\widehat{SAO}=60°$.
Tam giác SAO vuông tại O:

$R=OA=SA.\cos\widehat{SAO}=a\sqrt{2}.\cos 60°=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$h=SO=SA.\sin\widehat{SAO}=a\sqrt{2}.\sin 60°=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

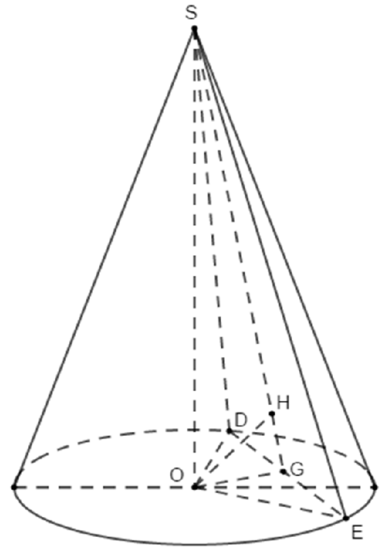
Vậy $S_{xq}=\pi Rl=\pi a^2$ và $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 14. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách đến tâm là $3a$, thiết diện thu được là một tam giác vuông cân. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $150\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$. **C.** $108\pi a^3$. **D.** $120\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SDE. Theo giả thiết, tam giác SDE vuông cân tại đỉnh S. Gọi G là trung điểm DE, kẻ $OH \perp SG \Rightarrow OH = 3a$.

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OG^2} \Rightarrow \frac{1}{OG^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OG = 2a\sqrt{3}$.

Do $SO.OG = OH.SG \Rightarrow SG = \frac{SO.OG}{SG} = \frac{6a.2a\sqrt{3}}{3a} = 4a\sqrt{3} \Rightarrow DE = 8a\sqrt{3}$.

$OD = \sqrt{OG^2 + DG^2} = \sqrt{12a^2 + 48a^2} = 2\sqrt{15}a$.

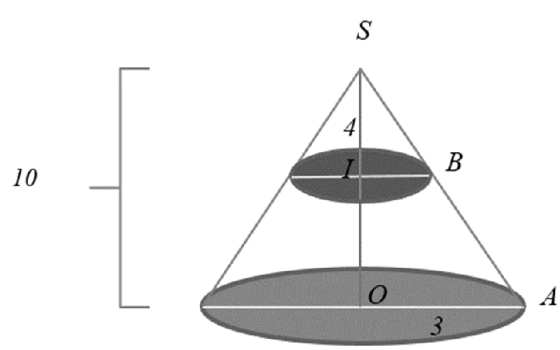
Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{15}a\right)^2 \cdot 6a = 120\pi a^3$

Câu 15. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 10. Mặt phẳng (α) vuông góc với trục và cách đỉnh của hình nón một khoảng bằng 4, chia hình nón thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh của hình nón đã cho, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

A. $\frac{4}{25}$. **B.** $\frac{21}{25}$. **C.** $\frac{8}{117}$. **D.** $\frac{4}{21}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $IB \,//\, OA \Rightarrow \frac{IB}{OA} = \frac{SI}{SO} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Khi đó, $\frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{3}\pi.IB^2.SI}{\frac{1}{3}\pi.OA^2.SO}=\left(\frac{IB}{OA}\right)^2.\left(\frac{SI}{SO}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$

Suy ra: $\frac{V_2}{V}=1-\frac{8}{125}=\frac{117}{125}$

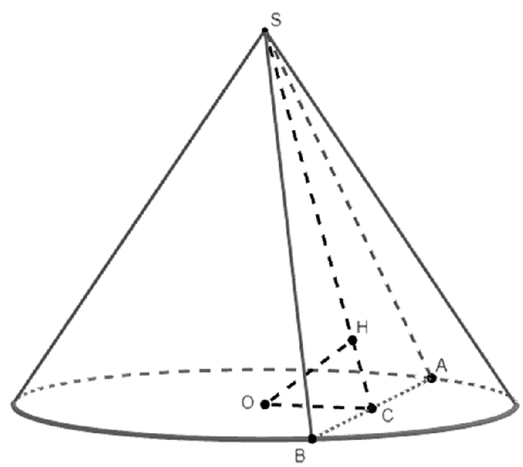
Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{V}:\frac{V_2}{V}=\frac{8}{125}:\frac{117}{125}=\frac{8}{117}$

Câu 16. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh (S) của hình nón, cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn B



Gọi C là trung điểm của AB, O là tâm của đáy. Khi đó $\begin{cases} SO\perp AB \\ OC\perp AB \end{cases}\Rightarrow (SOC)\perp AB$. Gọi H là hình chiếu của O lên SC thì $OH\perp(SAB)$ nên $OH=a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$OB=2a, BC=a\sqrt{3}\Rightarrow OC=a$. Xét tam giác vuông SOC: $\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow SO=a$.

Vậy thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho là $\frac{1}{3}\pi.(2a)^2.a=\frac{4\pi a^3}{3}$.

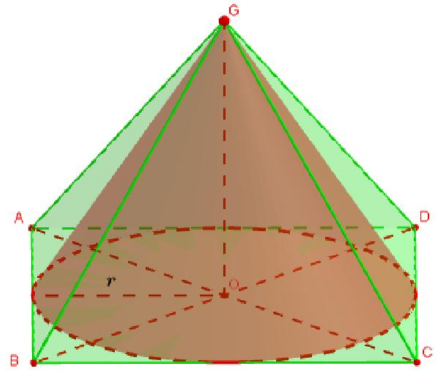
Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Trong hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$

A. $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$ **B.** $V=\frac{\pi a^3}{2}$ **C.** $V=\frac{\pi a^3}{6}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Lại có

$OC = \dfrac{AC}{2} = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OC^2} = a$.

Bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Suy thể tích khối nón là:

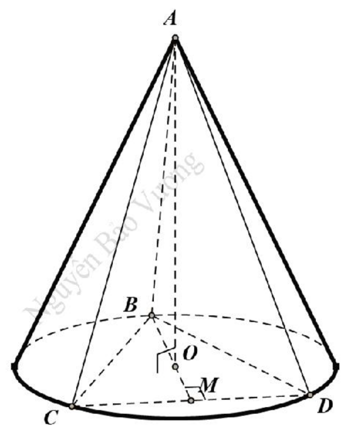
$V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 .a = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N).

A. $S_{xq} = 12\pi a^2$ **B.** $S_{xq} = 6\pi a^2$ **C.** $S_{xq} = 3\sqrt{3}\pi a^2$ **D.** $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi a^2$

Lời giải

Chọn C



Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

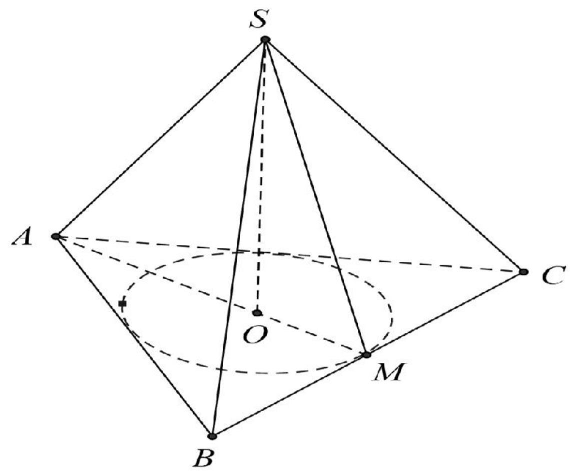
Ta có $BM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$; $r = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$S_{xq} = \pi.r.l = \pi r.AB = \pi a\sqrt{3}.3a = 3\sqrt{3}.\pi a^2$.

Câu 3. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC.

Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $SO \perp (ABC)$ tại O.

Suy ra, O là tâm đường tròn nội tiếp và cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi a là độ dài cạnh của tam giác ABC.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

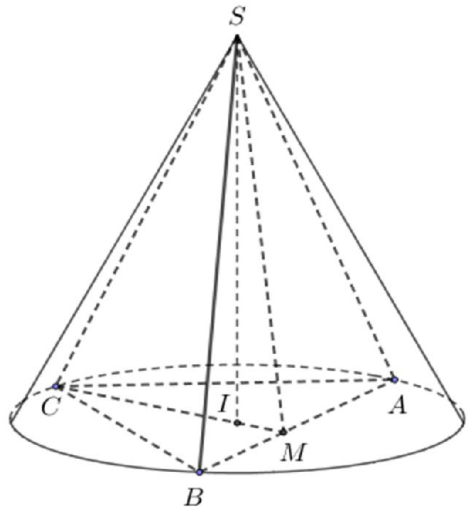
Do $OM = \frac{1}{2}OA$ nên ta có:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}.\pi.OM^2.SO}{\frac{1}{3}.\pi.OA^2.SO} = \frac{OM^2}{OA^2} = \left(\frac{OM}{OA}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Câu 4. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$. **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn (ABC) $\Rightarrow IA = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow AB \perp (SMC)$

$\Rightarrow$ Góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc $\widehat{SMC} = 60^{\circ}$ $\Rightarrow SM = 2IM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

$\Rightarrow SA = \sqrt{SM^2 + MA^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

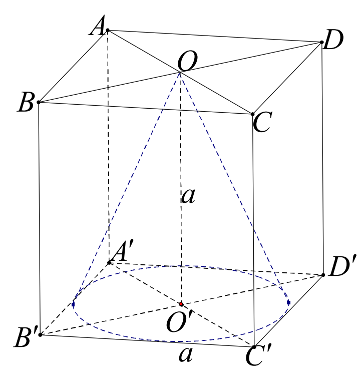
Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi r l = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{6} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích toàn phần của khối nón đó là

A. $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{2}\left(\sqrt{3}+2\right)$. **<u>B.</u>** $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **C.** $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+2\right)$. **D.** $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>



Bán kính của đường tròn đáy là $r = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích đáy nón là: $S_1 = \pi r^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{a^2 + r^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

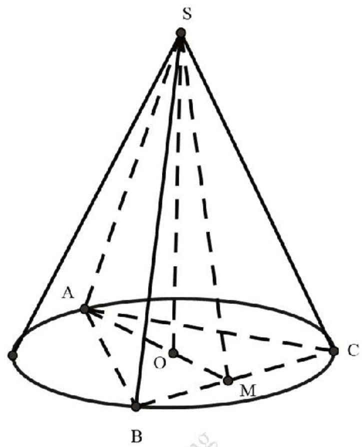
Diện tích xung quanh của khối nón là: $S_2 = \pi rl = \dfrac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$.

Vậy, diện tích toàn phần của khối nón đó là: $S_{tp} = S_1 + S_2 = \dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điêmt cạnh BC, ta có

$OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SMO} = 60°$

Trong tam giác vuông SMO: $SO = OM.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

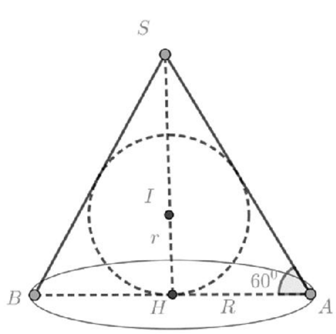
Vậy $S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 7. **(Mã 105 2017)** Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N).

A. $V = 9\pi$ **B.** $V = 3\sqrt{3}\pi$ **C.** $V = 9\sqrt{3}\pi$ **D.** $V = 3\pi$

Lời giải

Chọn D



Hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$ nên $\widehat{SAH} = 60°$

Ta có ΔSAB cân tại S có $\widehat{A} = 60°$ nên ΔSAB đều. Do đó tâm I của đường tròn nội tiếp ΔSAB cũng là trọng tâm của ΔSAB.

Suy ra $SH = 3IH = 3$. Mặt khác $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3} \Rightarrow S_{Đáy} = \pi R^2 = 3\pi.$

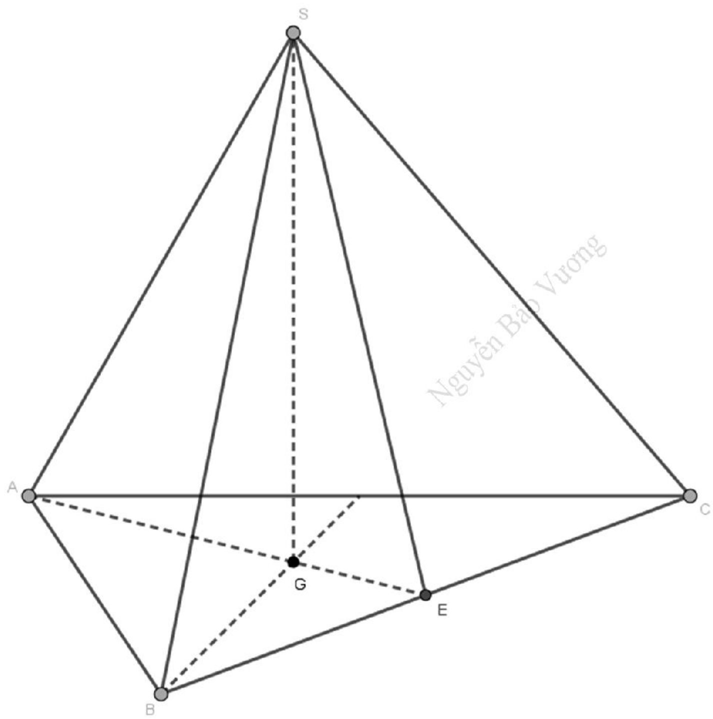
Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{Đáy} = \dfrac{1}{3}3.3\pi = 3\pi.$

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm BC. Theo giả thiết $\widehat{SEA} = 60^0$.

Suy ra: $SA = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = l$.

$S_{xq} = \pi Rl = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$

Câu 9. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy là a và (N) là hình nón có đỉnh là S với đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Tỉ số thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khối nón (N) là

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{\pi}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Lời giải

Gọi h là chiều cao của khối chóp và đồng thời là đường cao của khối nón.

Thể tích của khối chóp là $V_1 = \frac{1}{3}a^2h$.

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ là $r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{2}.h$.

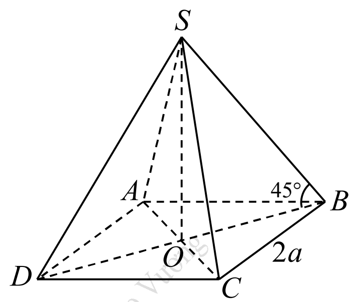
Tỉ số thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khối nón (N) là $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi}$.

Câu 10. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên tạo với đáy góc $45°$. Thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp trên là:

A. $\frac{8}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **B.** $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $2\pi a^3\sqrt{2}$ **D.** $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều, gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow$ Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là $\widehat{SBO} = 45°$

$ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ $\Rightarrow BD = 2\sqrt{2a}$

Khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính đường tròn đáy $R = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2}$

ΔSOB vuông cân tại O

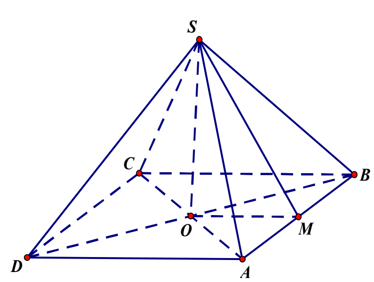
$\Rightarrow$ Chiều cao khối nón $h = SO = OB = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow$ Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2.a\sqrt{2} = \frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm AB. Hình nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ có bán kính đáy là $R = OM = \dfrac{a}{2}$ và có chiều cao là $h = SO$.

Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}Bh$ trong đó $B = \pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

Diện tích tam giác SAB là $2a^2$ nên $\dfrac{1}{2}SM.AB = 2a^2 \Leftrightarrow SM = 4a$.

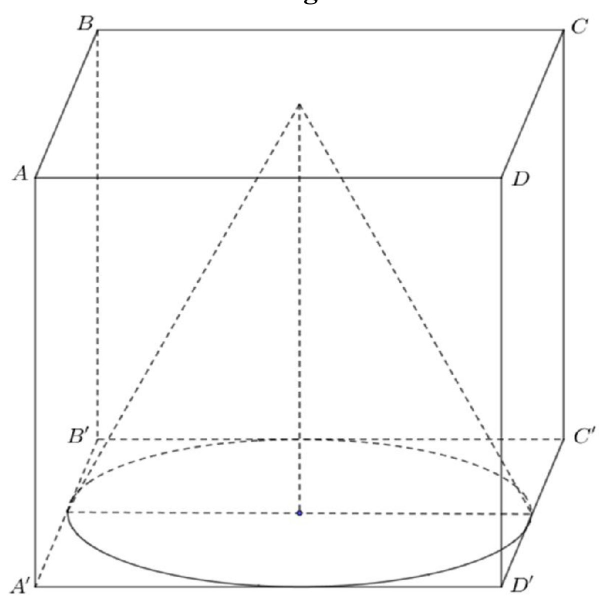
Trong tam giác vuông SOM ta có $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{16a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{2}$ hay $h = \dfrac{3a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy thể tích của khối nón $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$.

Câu 12. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối nón đó có dạng bằng $\dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{b} + c\right)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b > 1$. Tính bc.

A. $bc = 5$. **B.** $bc = 8$. **C.** $bc = 15$. **D.** $bc = 7$.

Lời giải

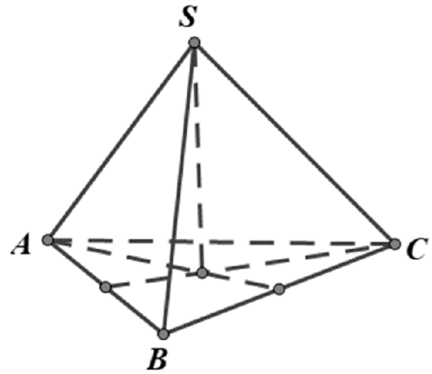


Ta có bán kính hình nón $r = \dfrac{a}{2}$, đường cao $h = a$, đường sinh $l = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích toàn phần $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4} + \pi\dfrac{a^2}{4} = \dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right) \Rightarrow b = 5, c = 1$.

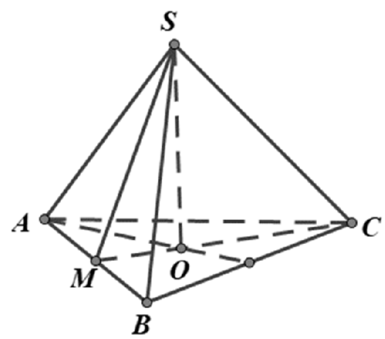
Vậy $bc = 5$.

Câu 13. **(Chuyên Đh Vinh -2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB = a$, góc tạo bởi (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC bằng



A. $\dfrac{\sqrt{7}\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{6}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB và gọi O là tâm của tam giác ABC ta có :

$\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCM) \Rightarrow AB \perp SM$ và $AB \perp CM$

Do đó góc giữa (SAB) và (ABC) là $\widehat{SMO} = 60°$.

Mặt khác tam giác ABC đều cạnh a nên $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $OM = \dfrac{1}{3}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

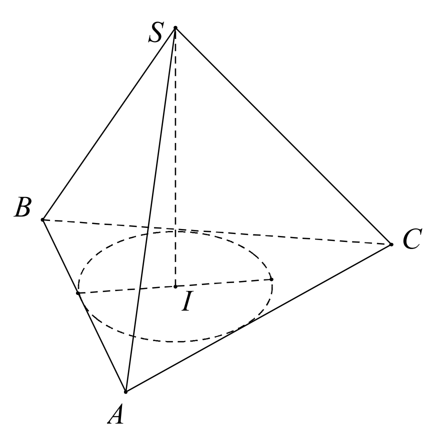
$SO = OM.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.

Hình nón đã cho có chiều cao $h = SO = \dfrac{a}{2}$, bán kính đáy $R = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, độ dài đường sinh

$l = \sqrt{h^2 + R^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi.R.l = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{6} = \dfrac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$

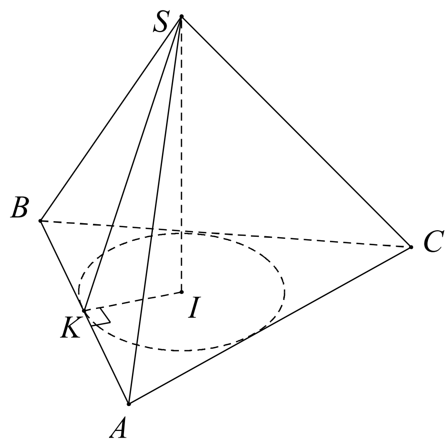
Câu 14. **(Nam Định - 2018)** Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC. Biết rằng $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.



A. $V = 3\pi a^3$. **B.** $V = 9\pi a^3$.

C. $V = 27\pi a^3$. **D.** $V = 12\pi a^3$.

Lời giải



Dựng $IK \perp AB$ suy ra góc giữa (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{SKI} = 45°$.

Xét ΔABC có:

$p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{10a + 10a + 12a}{2} = 16a$.

Suy ra

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$= \sqrt{16a.6a.6a.4a} = 48a^2$.

Bán kính đường tròn nội tiếp $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{48a^2}{16a} = 3a$.

Xét ΔSIK có $SI = IK = r = 3a$.

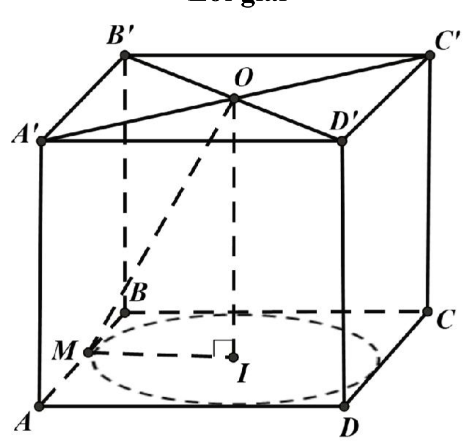
Thể tích khối nón là:

$V = \dfrac{1}{3}h.\pi r^2 = \dfrac{1}{3}.3a.\pi.(3a)^2 = 9\pi a^3$.

Câu 15. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và cạnh bên bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $A'B'C'D'$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.

A. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{17}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. **D.** $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{17}$.

Lời giải



Bán kính đáy của hình nón: $R=\frac{a}{2}$.

Đường sinh của hình nón: $l=OM \Leftrightarrow l=\sqrt{MI^2+OI^2} \Leftrightarrow l=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+4a^2} \Leftrightarrow l=a\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Diện tích xungquanh của hình nón là $S=\pi.R.l \Leftrightarrow S=\pi.\frac{a}{2}.a\frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow S=\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$.