Chuyên đề 13 TỈ SỐ THỂ TÍCH VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

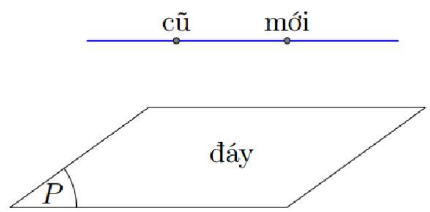
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

LÝ THUYẾT CHUNG

1. Kỹ thuật chuyển đỉnh

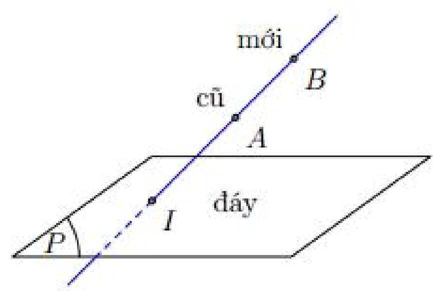
A. Song song đáy

$$\boxed{V_{cũ} = V_{mới}}$$



B. Cắt đáy

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{Giao\,cũ}{Giao\,mới} = \frac{IA}{IB}$$



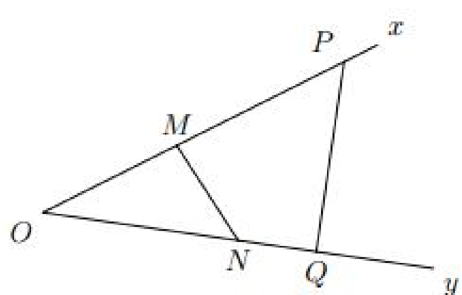
2. Kỹ thuật chuyển đáy (đường cao không đổi)

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{S_{đáy}}{S_{đáy\ mới}}$$

- Để kỹ thuật chuyển đáy được thuận lợi, ta nên chọn hai đáy có cùng công thức tính diện tích, khi đó ta sẽ dễ dàng so sánh tỉ số hơn.
- Cả hai kỹ thuật đều nhằm mục đích chuyển đa diện ban đầu về đa diện khác dễ tính thể tích hơn.

3. Tỉ số diện tích của hai tam giác

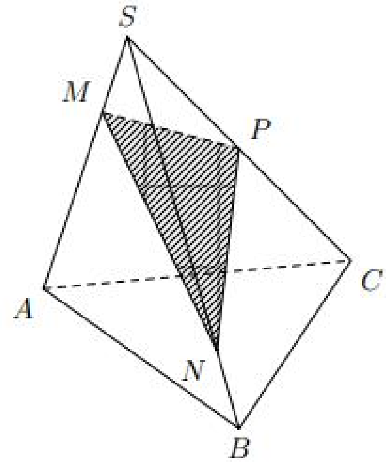
$$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{OM.ON}{OP.OQ}$$



4. Tỉ số thể tích của khối chóp

A. Công thức tỉ số thể tích của hình chóp tam giác

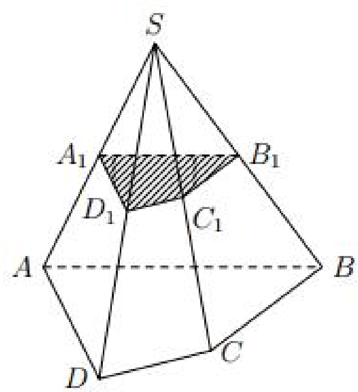
$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}$$



Công thức trên chỉ áp dụng cho hình chóp tam giác, do đó trong nhiều trường hợp ta cần hoạt phân chia hình chóp đã cho thành nhiều hình chóp tam giác khác nhau rồi mới áp dụng.

B. Một số trường hợp đặc biệt

Nếu $\left(A_1B_1C_1D_1\right) \| \left(ABCD\right)$ và $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=k$ thì $\frac{V_{S.A_1B_1C_1D_1}}{V_{S.ABCD}}=k^3$



Kết quả vẫn đúng trong trường hợp đáy là n − giác.

5. Tỉ số thể tích của khối lăng trụ

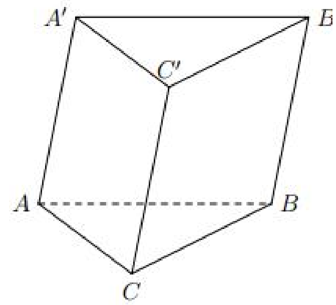
A. Lăng trụ tam giác

Gọi V là thể tích khối lăng trụ, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 6 đỉnh của lăng trụ, $V_{(5)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 5 trong 6 đỉnh của lăng trụ. Khi đó:

$$V_{(4)}=\frac{V}{3}$$

$$V_{(5)}=\frac{2}{3}V$$

Ví dụ: $V_{A'B'BC}=\frac{V}{3};V_{A'B'ABC}=\frac{2V}{3}$

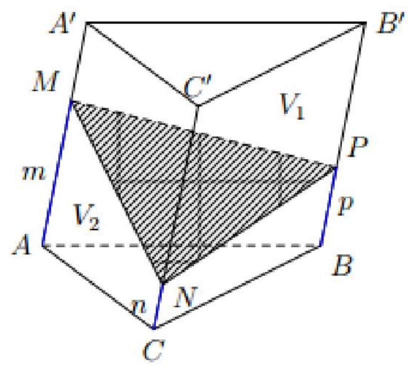


B. Mặt phẳng cắt các cạnh bên của lăng trụ tam giác

Gọi V_1, V_2 và V lần lượt là thể tích phần trên, phần dưới và lăng trụ. Giả sử

$\dfrac{AM}{AA'}=m,\dfrac{CN}{CC'}=n,\dfrac{BP}{BB'}=p$

Khi đó: $V_2=\dfrac{m+n+p}{3}.V$



Khi $M\equiv A',N\equiv C$ thì $\dfrac{AM}{AA'}=1,\dfrac{CN}{CC'}=0$

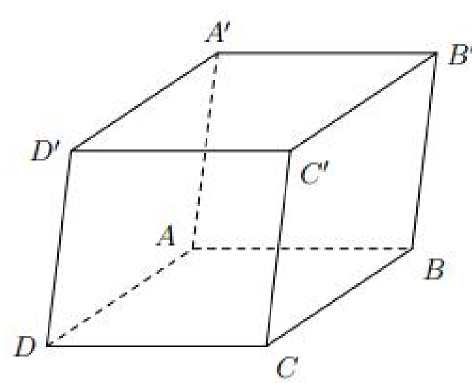
6. Khối hộp

A. Tỉ số thể tích của khối hộp

Gọi V là thể tích khối hộp, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 8 đỉnh của khối hộp. Khi đó:

$V_{(4)}$ (hai đường chéo của hai mặt phẳng song song) $=\dfrac{V}{3}$

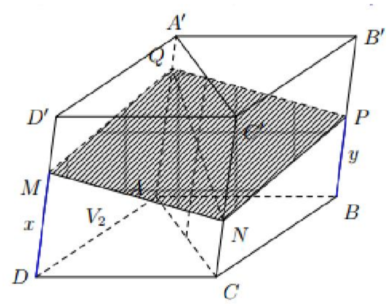
$V_{(4)}$ (trường hợp còn lại) $=\dfrac{V}{6}$



Ví dụ: $V_{A'C'BD}=\dfrac{V}{3},V_{A'C'D'D}=\dfrac{V}{6}$

B. Mặt phẳng cắt các cạnh của hình hộp (chỉ quan tâm tới hai cạnh đối nhau)

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{DM}{DD'}=x \\ \dfrac{BP}{BB'}=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_2=\frac{x+y}{2}.V$$

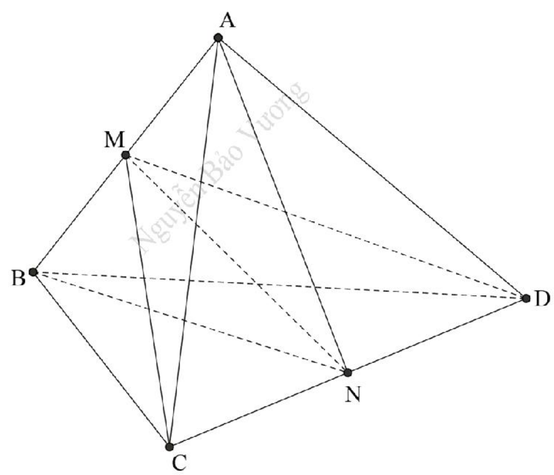


Câu 1. **(HSG 12-Sở Nam Định-2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V với M,N lần lượt là trung điểm AB,CD. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của $MNBC$ và $MNDA$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1+V_2}{V}$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì M,N lần lượt là trung điểm AB,CD nên ta có:

$d\left(A,(MCD)\right)=d\left(B,(MCD)\right); d\left(C,(NAB)\right)=d\left(D,(NAB)\right)$, do đó:

$$V_{A.MCD}=V_{B.MCD}=\frac{V}{2}; V_1=V_{MNBC}=V_{C.MNB}=V_{D.MNB}=\frac{V_{B.MCD}}{2}=\frac{V}{4};$$

$$V_2=V_{MNAD}=V_{D.MNA}=V_{C.MNA}=\frac{V_{A.MCD}}{2}=\frac{V}{4}.$$

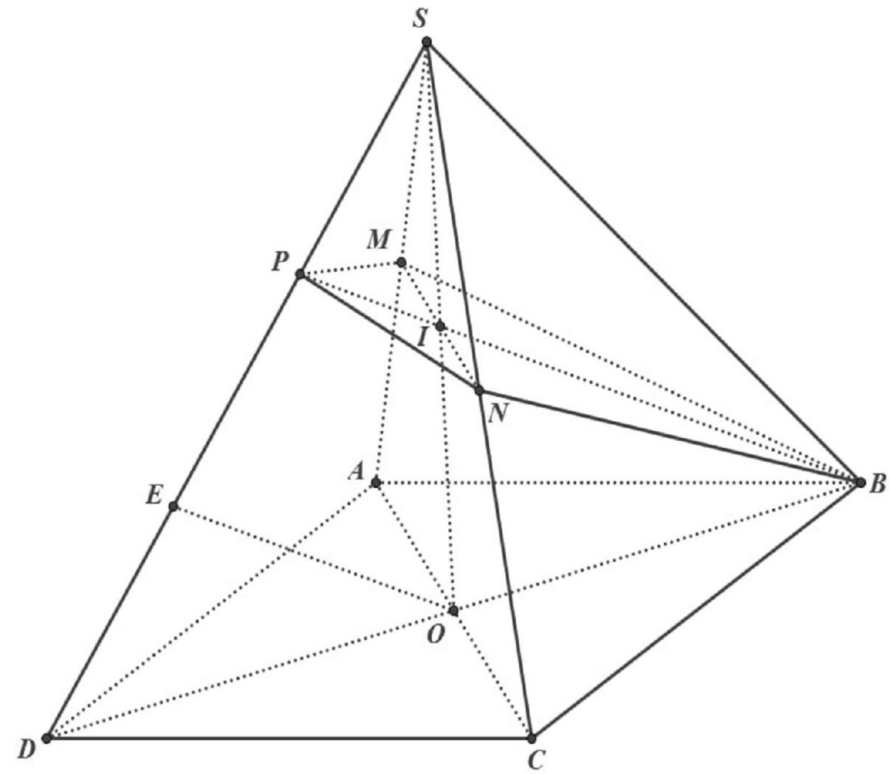
$$\Rightarrow \frac{V_1+V_2}{V}=\frac{\frac{V}{4}+\frac{V}{4}}{V}=\frac{1}{2}.$$

Câu 2. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M và N là trung điểm các cạnh SA,SC, mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại P. Tỉ số $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}$ bằng :

A. $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng $SO\cap MN=\{I\}$, $SI\cap SD=\{P\}$, $OE//BP$;

Khi đó: I là tung điểm của MN,SO nên $\dfrac{SP}{SE}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{DE}{DP}=\dfrac{DO}{DP}=\dfrac{1}{2}$

Vậy: $SP=PE=ED\Rightarrow\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{V_{SMPB}}{V_{SADB}}=\dfrac{SP}{SD}\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow\dfrac{V_{SMPB}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{12}$

$\dfrac{V_{SNPB}}{V_{SCDB}}=\dfrac{SP}{SD}\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow\dfrac{V_{SNPB}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{12}$

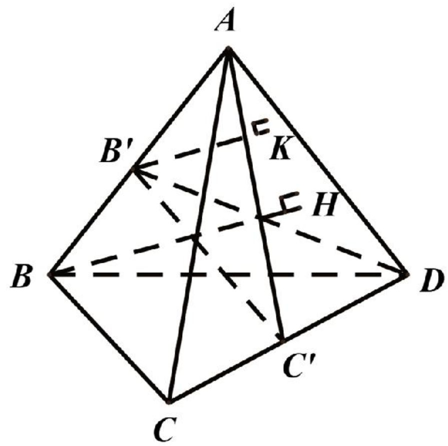
$V_{SBMPN}=V_{SBMP}+V_{SBPN}\Rightarrow\dfrac{V_{SMPNB}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B',C' lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó tỷ số thể tích của khối đa diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:.

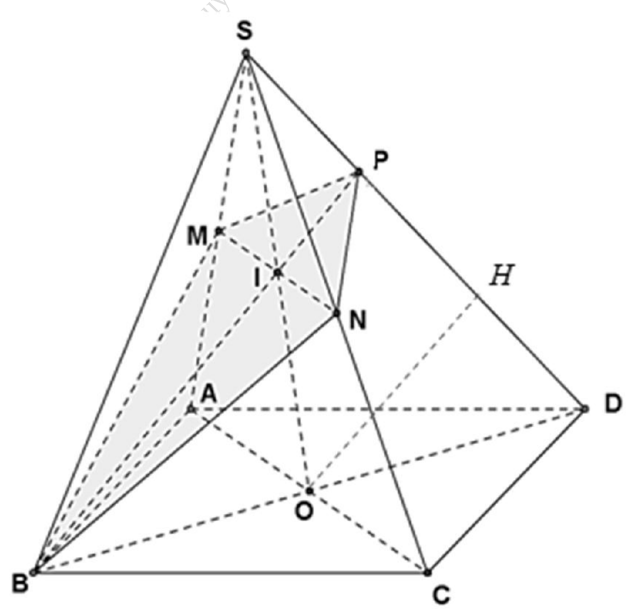
$$\frac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{V_{B'AC'D}}{V_{BACD}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\Delta DC'A}.d\left(B',\left(DC'A\right)\right)}{\frac{1}{3}S_{\Delta DCA}.d\left(B,\left(DCA\right)\right)}=\frac{\frac{1}{2}DC'.DA.\sin\widehat{ADC'}}{\frac{1}{2}DC.DA.\sin\widehat{ADC}}.\frac{d\left(B',\left(DC'A\right)\right)}{d\left(B,\left(DCA\right)\right)}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SC. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P. Tỉ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có M,N là trung điểm của SA,SC nên $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}$.

Cách 1: Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSOD ta có : $\frac{PS}{PD}\cdot\frac{BD}{BO}\cdot\frac{IO}{IS}=1\Rightarrow\frac{PS}{PD}\cdot2\cdot1=1\Rightarrow\frac{PS}{PD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SP}{SD}=\frac{1}{3}$.

Cách 2: Kẻ $OH\,//\,BP$, ta có O là trung điểm của BD nên H là trung điểm của PD.
Ta có $OH\,//\,IP$ mà I là trung điểm của SO nên P là trung điểm của SH.

Suy ra $SP = PH = HD \Rightarrow \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

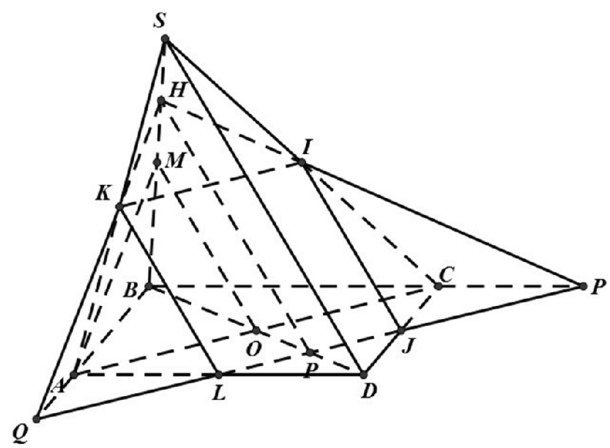
Theo công thức tỉ số thể tích ta có : $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{2V_{S.BMP}}{2V_{S.BAD}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$..

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K, M lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB, (α) là mặt phẳng qua K song song với AC và AM. Mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{25}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{11}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{17}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{23}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$; I, H lần lượt là trung điểm SC, SM. Do $(\alpha)\ //\ (ACM)$ nên (α) cắt $(SAD), (SBD), (SCD)$ lần lượt tại KL, HP, IJ cùng song song với OM.

Ta có $\dfrac{V_{B.HQP}}{V_{B.SAC}} = \dfrac{BH}{BS}.\dfrac{BQ}{BA}.\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{3}{2}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{27}{16}$. Suy ra $V_{B.HQP} = \dfrac{27}{16}V_{B.SAC} = \dfrac{27}{16}.\dfrac{1}{2}V = \dfrac{27}{32}V$.

$\dfrac{V_{A.KQL}}{V_{A.SBD}} = \dfrac{AK}{AS}.\dfrac{AQ}{AB}.\dfrac{AL}{AD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{A.KQL} = \dfrac{1}{8}V_{A.SBD} = \dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{2}V = \dfrac{1}{16}V$.

Tương tự: $\Rightarrow V_{C.IPJ} = \dfrac{1}{16}V$.

Do đó $V_2 = \left(\dfrac{27}{32} - \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16}\right)V = \dfrac{23}{32}V \Rightarrow V_1 = \dfrac{9}{32}V$.

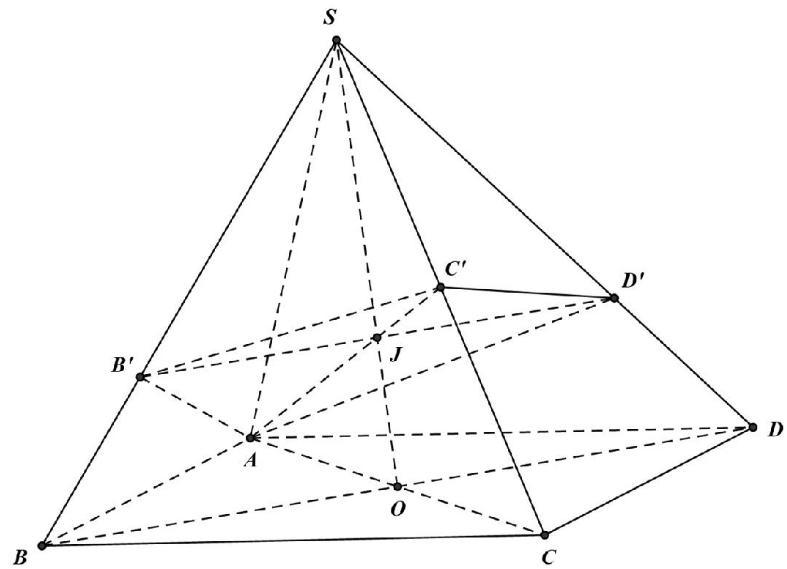
Vậy tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{23}$.

Câu 6. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết C' là trung điểm của SC. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $V_2 = 2.V_{S.ABC} = 2.V_{S.ACD}$. Gọi $O = AC \cap BD$, $J = SO \cap AC'$.

Vì C' là trung điểm của SC nên J là trọng tâm của ΔSAC.

Vì $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ mà (P) qua A và vuông góc với SC nên $(P) // BD$.

Trong (SBD) qua J kẻ đường thẳng song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại B', D'.

Ta có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SJ}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{V_{S.AB'C'}}{2V_{S.ABC}} + \dfrac{V_{S.AC'D'}}{2V_{S.ACD}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} + \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC}\right) = \dfrac{1}{2}.2.\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{8}$.

Mà $V_{S.ABCD} = V_{S.ABC} + V_{S.ACD}$, suy ra

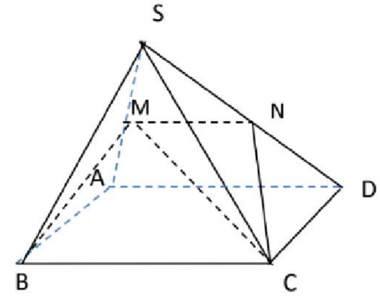
$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{8}\left(V_{S.ABC} + V_{S.ACD}\right)}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}.$$

Câu 8. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M và đặt $\dfrac{SM}{SA} = x$. Giá trị x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau là:

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$$\begin{cases} BC//(SAD) \\ BC\subset(BMC) \end{cases} \Rightarrow (SAD)\cap(BMC)=MN//BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SD}=x.$$

$$\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{2V_{S.MBC}}{V}=\dfrac{SM}{SA}=x$$

$$\dfrac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{2V_{S.MCN}}{V}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}=x^2$$

$$\Rightarrow \dfrac{2\left(V_{S.MCN}+V_{S.MBC}\right)}{V}=x+x^2 \Leftrightarrow \dfrac{2V_{S.MBCN}}{V}=x+x^2 \Leftrightarrow \dfrac{V_{S.MBCN}}{V}=\dfrac{x+x^2}{2} \quad (1)$$

Mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau $\dfrac{V_{S.MNBC}}{V}=\dfrac{1}{2}$ (2)

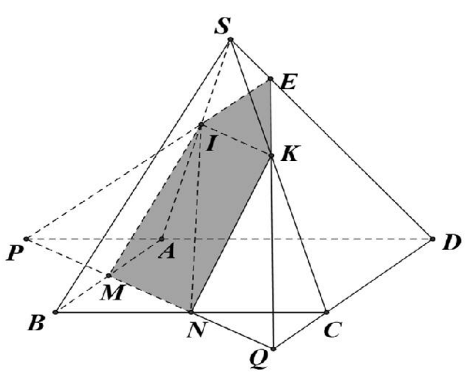
Từ (1) và (2) ta có: $1=x+x^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm I thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chọp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\dfrac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k=\dfrac{IA}{IS}$?

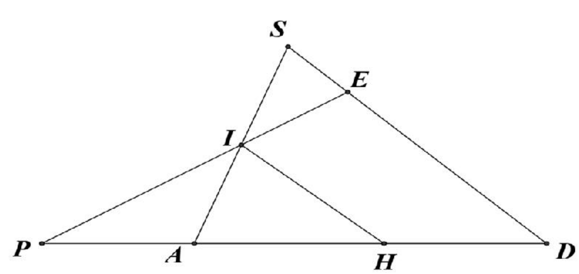
A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng (MNI) cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt $V_{S.ABCD}=V$.

Ta có $S_{\Delta APM}=S_{\Delta BMN}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{8}S_{ABCD}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APM}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{8}$.

$\frac{d(I,(ABCD))}{d(S,(ABCD))}=\frac{IA}{SA}=\frac{k}{k+1}$.

$\Rightarrow\frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{S_{\Delta APM}}{S_{ABCD}}.\frac{d(I,(ABCD))}{d(S,(ABCD))}=\frac{k}{8(k+1)}\Rightarrow V_{I.APM}=\frac{k}{8(k+1)}V$.

Do $MN//AC\Rightarrow IK//AC\Rightarrow IK//(ABCD)\Rightarrow d(I;(ABCD))=d(K;(ABCD))$.

Mà $S_{\Delta APM}=S_{\Delta NCQ}.\Rightarrow V_{I.APM}=V_{K.NCQ}=\frac{k}{8(k+1)}V$.

Kẻ $IH//SD$ ($H\in SD$) như hình 2. Ta có :

$\frac{IH}{SD}=\frac{AH}{AD}=\frac{AI}{AS}=\frac{k}{k+1}$.

$\frac{IH}{ED}=\frac{PH}{PD}=\frac{PA}{PD}+\frac{AH}{PD}=\frac{PA}{PD}+\frac{2AH}{3AD}=\frac{1}{3}+\frac{2k}{3(k+1)}=\frac{3k+1}{3(k+1)}$.

$\Rightarrow\frac{ED}{SD}=\frac{IH}{SD}:\frac{ID}{ED}=\frac{3k}{3k+1}\Rightarrow\frac{d(E,(ABCD))}{d(S,(ABCD))}=\frac{ED}{SD}=\frac{3k}{3k+1}$.

$\frac{S_{\Delta PQD}}{S_{ABCD}}=\frac{9}{8}\Rightarrow\frac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{27k}{24k+8}\Rightarrow V_{E.PQD}=\frac{27k}{24k+8}V$.

$V_{EIKAMNCD}=\frac{13}{20}V\Leftrightarrow V_{E.PDC}-V_{I.APM}-V_{K.NQC}=\frac{13}{20}V$

$\Leftrightarrow\frac{27k}{8(3k+1)}V-\frac{k}{8(k+1)}V-\frac{k}{8(k+1)}V=\frac{13}{20}V$

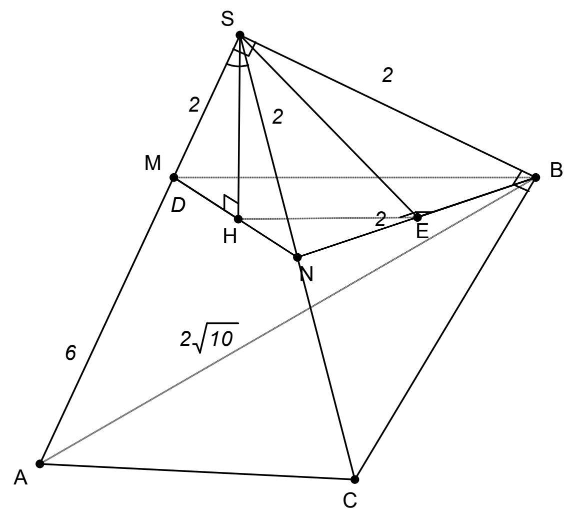
$\Leftrightarrow\frac{27k}{2(3k+1)}-\frac{k}{k+1}=\frac{13}{5}\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=6,SB=2,SC=4,AB=2\sqrt{10},\widehat{SBC}=90^\circ,\widehat{ASC}=120^\circ$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của SC đồng thời vuông góc với (SAC) cắt SA tại M. Tính tỉ số thể tích $k=\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $k=\frac{2}{5}$. **B.** $k=\frac{1}{4}$. **C.** $k=\frac{1}{6}$. **D.** $k=\frac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn C



o,

Ta có:

• $SA^2 + SB^2 = 6^2 + 2^2 = 40 = AB^2 \Rightarrow \widehat{ASB} = 90^{\circ}$.

• ΔSBC vuông tại $B \Rightarrow BN = \dfrac{1}{2}SC = 2$.

$\Rightarrow SN = NB = SB = 2 \Rightarrow \Delta SNB$ đều.

Gọi D là điểm thuộc cạnh SA sao cho $SD = 2$, ta có:

$DB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$DN^2 = 2^2 + 2^2 - 2.2.2.\cos 120^{\circ} = 12$

$NB^2 = 4$

$\Rightarrow DB^2 + NB^2 = DN^2 \Rightarrow \Delta DNB$ vuông tại B.

• Gọi H, E lần lượt là trung điểm của $DN, NB,$ ta có:

+) $\begin{cases} NB \perp SE \\ NB \perp HE \end{cases} \Rightarrow NB \perp (SHE) \Rightarrow NB \perp SH$.

+) $\begin{cases} SH \perp DN \\ SH \perp NB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (DNB) \Rightarrow (SDN) \perp (DNB) \Rightarrow D \equiv M \Rightarrow SM = 2$.

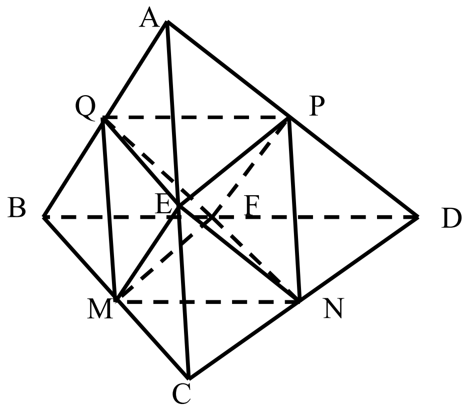
$\Rightarrow k = \dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{6}.\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$.

Câu 11. **(Đề tham khảo 2017)** Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a. Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V''=4.\frac{V}{8}=\frac{V}{2}$.

(Vì với tứ diện cạnh giảm nửa thì thể tích giảm $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$)

Vậy $V'=\frac{V}{2}\Leftrightarrow\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác (giống nhau) có cùng đáy là hình bình hành úp lại.

Suy ra: $V'=2V_{N.MEPF}=4.V_{N.MEP}=4.V_{P.MNE}=4.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}V=\frac{1}{2}V$

(Do chiều cao giảm một nửa, cạnh đáy giảm một nửa nên diện tích giảm 4)

Cách 3. Ta có $\frac{V'}{V}=\frac{V-V_{A.QEP}-V_{B.QMF}-V_{C.MNE}-V_{D.NPF}}{V}$

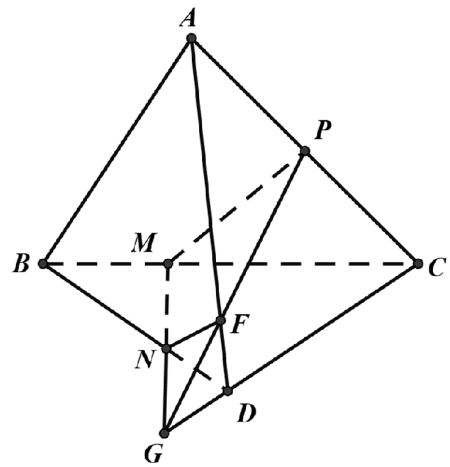
$=1-\frac{V_{A.QEP}}{V}-\frac{V_{B.QMF}}{V}-\frac{V_{C.MNE}}{V}-\frac{V_{D.NPF}}{V}=1-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC,BD,AC lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho $BC=3BM$, $BD=\frac{3}{2}BN, AC=2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1,V_2, trong đó khối đa diện chứa cạnh CD có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{26}{19}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{26}{13}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{15}{19}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng định lí Me-ne-la-uyt ta có : $\frac{MB}{MC}.\frac{ND}{NB}.\frac{GC}{GD}=1 \Rightarrow \frac{GC}{GD}=4$

và $\frac{GC}{GD}.\frac{FD}{FA}.\frac{PA}{PC}=1 \Rightarrow \frac{FD}{FA}=\frac{1}{4}$

$V_{DCPMNF}=V_{CPMF}+V_{CMNF}+V_{CNFD}$

$$\frac{V_{CPMF}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(F,(CPM)\right).S_{CPM}}{\frac{1}{3}d\left(\text{D},(ABC)\right).S_{ABC}}=\frac{4}{5}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{V_{CNMF}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(F,(CNM)\right).S_{CNM}}{\frac{1}{3}d\left(A,(CBD)\right).S_{CBD}}=\frac{1}{5}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{45}$$

$$\frac{V_{CNDF}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(C,(FND)\right).S_{FND}}{\frac{1}{3}d\left(C,(ABD)\right).S_{ABD}}=\frac{1}{5}.\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

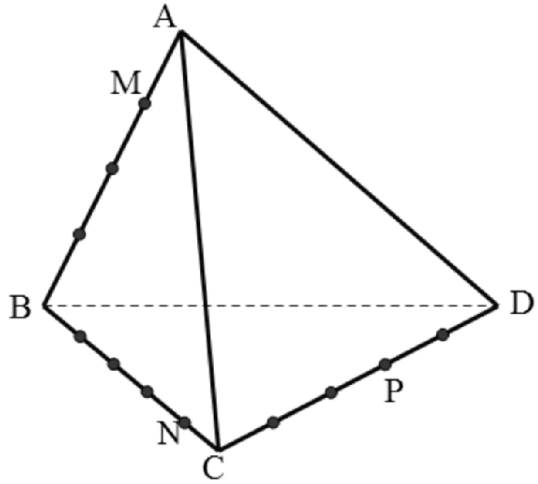
$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_{ABCD}}=\frac{4}{15}+\frac{4}{45}+\frac{1}{15}=\frac{19}{45} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{45-19}{19}=\frac{26}{19}$$

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Xét điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC, điểm P trên cạnh CD sao cho $\frac{MB}{MA}=3,\frac{NB}{NC}=4,\frac{PC}{PD}=\frac{3}{2}$. Gọi V_1,V_2 theo thứ tự là thể tích các khối tứ diện $MNBD$ và $NPAC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$V_1 = \frac{1}{3}h_1.S_1$ với $h_1 = d\left(M;(BCD)\right); S_1 = S_{\Delta NBD}$.

$V_2 = \frac{1}{3}h_2.S_2$ với $h_2 = d\left(A;(BCD)\right); S_2 = S_{\Delta CNP}$.

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1.S_1}{h_2.S_2} = 5$

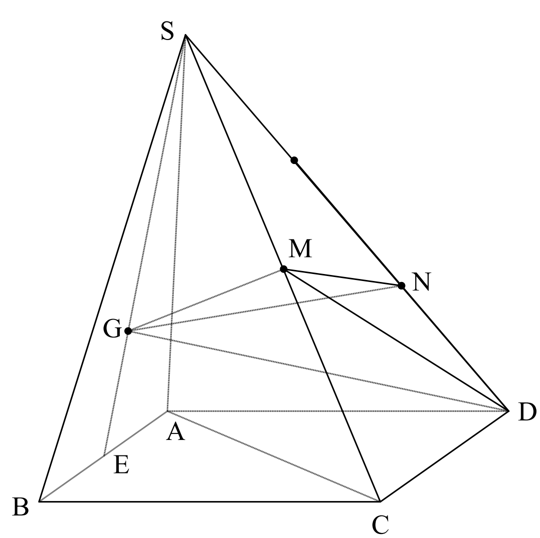
Vì $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}$ và $S_1 = \frac{4}{5}S_{\Delta BCD}; S_2 = \frac{1}{5}.\frac{3}{5}S_{\Delta BCD} = \frac{3}{25}S_{\Delta BCD} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{20}{3}$.

Câu 14. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{ND} = 2$, biết G là trọng tâm tam giác SAB. Tỉ số thể tích $\frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{m}{n}$, m, n là các số nguyên dương và $(m,n) = 1$. Giá trị của $m+n$ bằng:

A. 17 **B.** 19 **C.** 21 **D.** 7

Lời giải

Chọn B



$+\ S_{\Delta DMN}=\frac{1}{3}S_{\Delta SMD}=\frac{1}{6}S_{\Delta SCD}$

+ Gọi E là trung điểm của AB

$\Rightarrow d_{(G,(DMN))}=\frac{2}{3}.d_{(E,(DMN))}=\frac{2}{3}.d_{(A,(DMN))}=\frac{2}{3}.d_{(A,(SCD))}$

$\Rightarrow V_{G.MND}=\frac{1}{3}.S_{\Delta DMN}.d_{(G,(DMN))}$

$=\frac{1}{3}.\frac{1}{6}S_{\Delta SCD}.\frac{2}{3}.d_{(A,(SCD))}=\frac{1}{9}V_{S.ACD}=\frac{1}{18}V_{S.ABCD}$

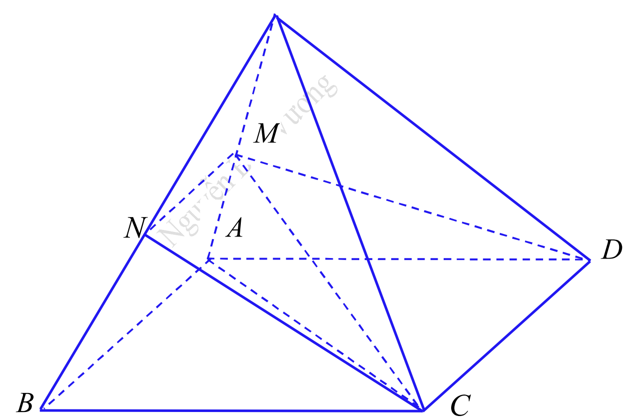
$\Rightarrow \frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{18}\Rightarrow m+n=19$

Câu 15. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SB. Mặt phẳng $(MNCD)$ chia hình chóp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần là (số bé chia số lớn)

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V, khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ là $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V$.

Ta có $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SC}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1=\frac{1}{4}$, do đó $V_{S.MNC}=\frac{1}{4}V_{S.ABC}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}V=\frac{1}{8}V$.

Ta có $\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD}=\frac{1}{2}.1.1=\frac{1}{2}$, do đó $V_{S.MCD}=\frac{1}{2}V_{S.ACD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}V=\frac{1}{4}V$.

Từ đó $V_{S.MNCD}=V_{S.MNC}+V_{S.MCD}=\frac{1}{8}V+\frac{1}{4}V=\frac{3}{8}V$, do đó $V_{MNABCD}=V-\frac{3}{8}V=\frac{5}{8}V$.

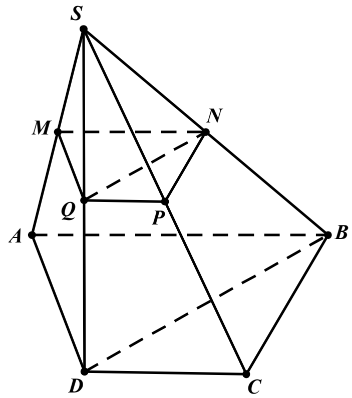
Vậy $\frac{V_{S.MNCD}}{V_{MNABCD}}=\frac{3}{8}V:\frac{5}{8}V=\frac{3}{5}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.MNPQ$ và $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

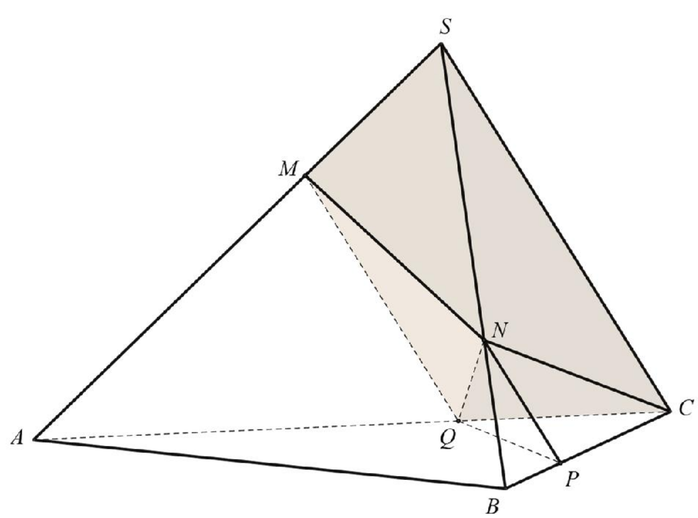
$\frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.MNQ}=\frac{1}{8}.V_{S.ABD}$; $\frac{V_{S.NPQ}}{V_{S.BCD}}=\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.NPQ}=\frac{1}{8}.V_{S.BCD}$.

Suy ra: $V_1=V_{S.MNPQ}=V_{S.MNQ}+V_{S.NPQ}=\frac{1}{8}\left(V_{S.ABD}+V_{BCD}\right)=\frac{1}{8}.V_{S.ABCD}=\frac{1}{8}.V_2\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{8}$.

Câu 17. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA=2SM$, $SN=2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với (H_1) là khối đa diện chứa điểm S, (H_2) là khối đa diện chứa điểm A. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải



Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC.

Ta có $NP\,//\,MQ\,//\,SC$.

Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\dfrac{d\left(N,(SAC)\right)}{d\left(B,(SAC)\right)}\cdot\dfrac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$.

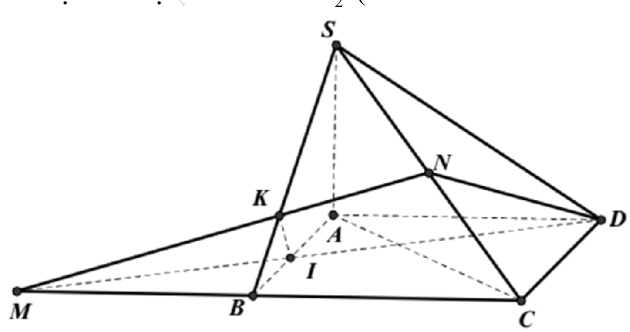
$\dfrac{d\left(N,(SAC)\right)}{d\left(B,(SAC)\right)}=\dfrac{NS}{BS}=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{S_{AMQ}}{S_{ASC}}=\dfrac{AM}{AS}\cdot\dfrac{AQ}{AC}=\left(\dfrac{AM}{AS}\right)^2=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\dfrac{S_{SMQC}}{S_{ASC}}=\dfrac{5}{9}$.

Do đó $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{27}$.

$\dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{d\left(N,(QPC)\right)}{d\left(S,(ABC)\right)}\cdot\dfrac{S_{QPC}}{S_{ABC}}=\dfrac{NB}{SB}\cdot\left(\dfrac{CQ}{CA}\cdot\dfrac{CP}{CB}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{27}$.

Do đó $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}+\dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{10}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_1+V_2}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow 5V_1=4V_2\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{5}$.

Câu 18. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ bên).



Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{12}{7}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{5}$.

Lời giải

Goi $O=AC\cap BD$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $45^\circ\Leftrightarrow\widehat{SOA}=45^\circ$.

ΔBAD đều $\Rightarrow AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SA=AO.\tan 45^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $V=\dfrac{1}{3}SA.2S_{\Delta ABD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Thể tích khối chóp $N.MCD$ bằng thể tích khối chóp $N.ABCD$ bằng: $V'=\frac{1}{2}V=\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

Thể tích khối chóp $KMIB$ bằng: $V''=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}SA.S\Delta_{MBI}=\frac{1}{9}.\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3\sqrt{2}}{96}$.

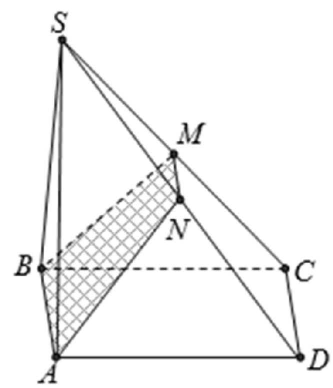
Khi đó: $V_2=V'-V''=\frac{a^3\sqrt{2}}{16}-\frac{a^3\sqrt{2}}{96}=\frac{5\sqrt{2}a^3}{96}$; $V_1=V-V_2=\frac{a^3\sqrt{2}}{8}-\frac{5\sqrt{2}a^3}{96}=\frac{7a^3\sqrt{2}}{96}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

Câu 19. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1<V_2$. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{8}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB\subset(\alpha) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SCD)=MN // AB // CD$.

$\Rightarrow(\alpha)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang $ABMN$.

Khi đó $(ABMN)$ chia hình chóp thành hai đa diện là $S.ABMN$ và $ABCDNM$ có thể tích lần lượt là V_1 và V_2.

Lại có

- $\frac{V_{SABM}}{V_{SABC}}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{SABM}=\frac{1}{2}V_{SABC}=\frac{1}{4}V_{SABCD}$.
- $\frac{V_{SAMN}}{V_{SACD}}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{1}{4}V_{SABC}=\frac{1}{8}V_{SABCD}$.

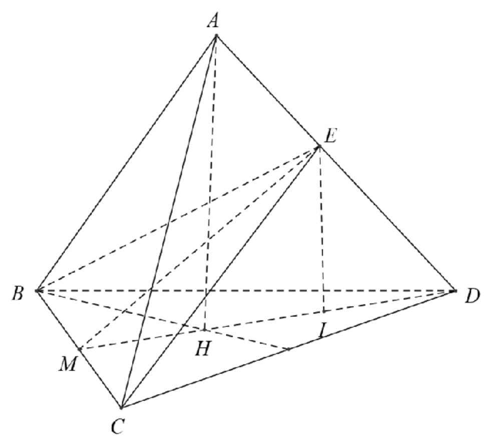
Mà $V_1=V_{SABM}+V_{SAMN}=\frac{3}{8}V_{SABCD}$ và $V_2=V_{SABCD}-V_{SABMN}=\frac{5}{8}V_{SABCD}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{5}$.

Câu 20. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải



Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, E trên mặt phẳng (BCD). Khi đó H, $I \in DM$ với M là trung điểm BC.

Ta tính được $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $MH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có góc giữa (P) với $(BCD) \Rightarrow ((P),(BCD)) = \widehat{EMD} = \alpha$. Khi đó $\tan\alpha = \frac{EI}{MI} = \frac{5\sqrt{2}}{7}$.

Gọi $DE = x \Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{EI}{AH} = \frac{DI}{DH} \Rightarrow \begin{cases} EI = \frac{DE.AH}{AD} = \frac{x.\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{x\sqrt{6}}{3} \\ DI = \frac{DE.DH}{AD} = \frac{x.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{x\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Khi đó $MI = DM - DI = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

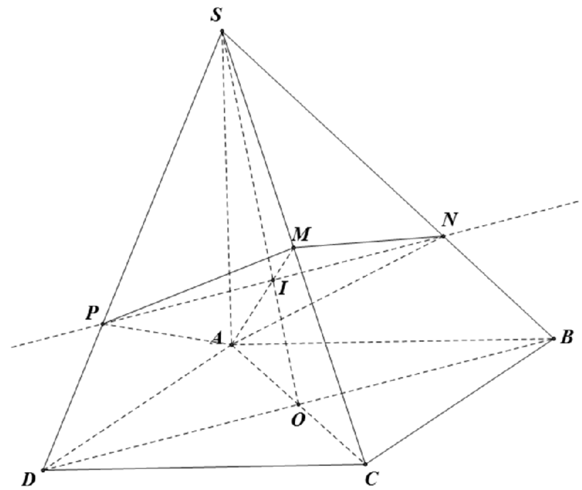
Vậy $\tan\alpha = \frac{EI}{MI} = \frac{5\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow \frac{\frac{x\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow x = \frac{5}{8}a$.

Khi đó: $\frac{V_{DBCE}}{V_{ABCD}} = \frac{DE}{AD} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{V_{ABCE}}{V_{BCDE}} = \frac{3}{5}$.

Câu 21. (**Thpt Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018**) Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện, đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ là:

A. $\frac{V_2}{V_1}=3$. **B.** $\frac{V_2}{V_1}=2$. **C.** $\frac{V_2}{V_1}=1$. **D.** $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3}{2}$.

Lời giải



Đặt $V_{S.ABCD}=V$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi I là giao điểm của SO và AM.

Do $(P)//BD$ nên (P) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến NP qua I và song song với BD; $(N\in SB;P\in SD)$.

Xét tam giác SAC có I là giao điểm hai trung tuyến nên I là trọng tâm.

Ta có $\frac{V_{S.APN}}{V_{S.ADB}}=\frac{SP.SN}{SD.SB}=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\Rightarrow V_{S.APN}=\frac{4}{9}V_{S.ADB}=\frac{4}{9}.\frac{1}{2}V=\frac{2}{9}V$.

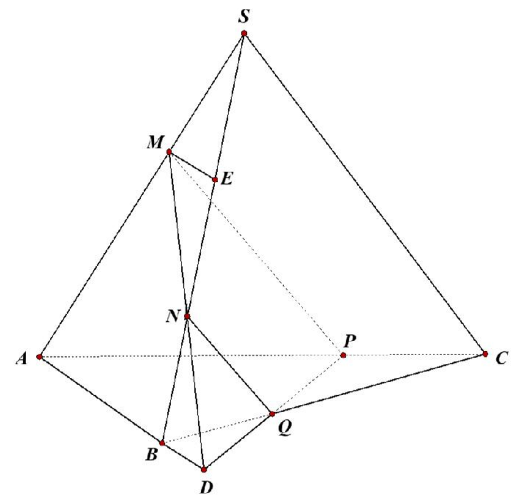
Tương tự $\frac{V_{S.PMN}}{V_{S.DCB}}=\frac{SP.SM.SN}{SD.SC.SB}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow V_{S.PMN}=\frac{2}{9}V_{S.DCB}=\frac{2}{9}.\frac{1}{2}V=\frac{1}{9}V$.

Từ đó $V_1=V_{S.APN}+V_{S.PMN}=\frac{1}{3}V$. Do đó $\frac{V_2}{V_1}=2$.

Câu 22. (**THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018**) Cho điểm M nằm trên cạnh SA, điểm N nằm trên cạnh SB của hình chóp tam giác $S.ABC$ sao cho $\frac{SM}{MA}=\frac{1}{2}$, $\frac{SN}{NB}=2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa A, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{6}{5}$.

Lời giải



- Trong mặt phẳng (SAC) dựng MP song song với SC cắt AC tại P. Trong mặt phẳng (SBC) dựng NQ song song với SC cắt BC tại Q. Gọi D là giao điểm của MN và PQ. Dựng ME song song với AB cắt SB tại E (như hình vẽ).

- Ta thấy: $\frac{SE}{SB}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3}\Rightarrow SN=NE=NB=\frac{1}{3}SB$

Suy ra N là trung điểm của BE và DM, đồng thời $DB=ME=\frac{1}{3}AB\Rightarrow\frac{DB}{DA}=\frac{1}{4},\ \frac{DN}{DM}=\frac{1}{2}$.

Do $NQ//MP\Rightarrow\frac{DQ}{DP}=\frac{DN}{DM}=\frac{1}{2}$.

- Nhận thấy: $V_1=V_{D.AMP}-V_{D.BNQ}$.

$\frac{V_{D.BNQ}}{V_{D.AMP}}=\frac{DB}{DA}.\frac{DN}{DM}.\frac{DQ}{DP}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}\Rightarrow V_{D.BNQ}=\frac{1}{16}V_{D.AMP}\Rightarrow V_1=\frac{15}{16}.V_{D.AMP}=\frac{15}{16}.V_{M.ADP}$.

- Do $NQ//SC\Rightarrow\frac{QB}{CB}=\frac{NB}{SB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{d(N;DB)}{d(C;AB)}=\frac{QB}{CB}=\frac{1}{3}\Rightarrow d(Q;DB)=\frac{1}{3}.d(C;AB)$

$\Rightarrow S_{QDB}=\frac{1}{2}.d(Q;DB).DB=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.d(C;AB).\frac{1}{3}AB=\frac{1}{9}S_{CAB}\Rightarrow S_{ADP}=\frac{8}{9}.S_{ABC}$

Và $d(M;(ADP))=\frac{2}{3}d(S;(ABC))$

$\Rightarrow V_{M.ADP}=\frac{1}{3}.d(M;(ADP)).S_{ADP}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}d(S;(ABC)).\frac{8}{9}S_{ABC}=\frac{16}{27}.V_{S.ABC}$

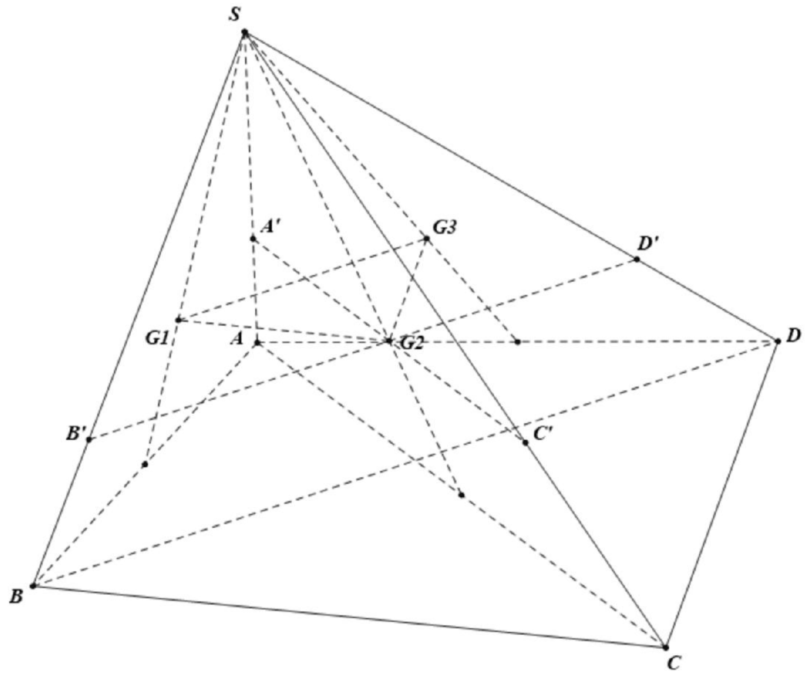
$\Rightarrow V_1=\frac{15}{16}.\frac{16}{27}.V_{S.ABC}=\frac{5}{9}.V_{S.ABC}\Rightarrow V_2=V_{S.ABC}-V_1=\frac{4}{9}.V_{S.ABC}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{4}$.

Câu 23. **(Chuyên KHTN - 2018)** Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD chia khối chóp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 $(V_1<V_2)$. Tính tỉ lệ $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{8}{27}$. **B.** $\frac{16}{81}$. **C.** $\frac{8}{19}$. **D.** $\frac{16}{75}$.

Lời giải



Cách 1.

Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD. Ta có $(G_1G_2G_3) \parallel (ABCD)$.

Gọi $(G_1G_2G_3)$ cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự lần lượt tại A', B', C', D', ta có $S.A'B'C'D'$ đồng dạng với $S.ABCD$ theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$ suy ra $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{8}{27} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8/27}{1 - 8/27} = \frac{8}{19}$.

Cách 2.

$V_{S.ABCD} = V_{S.ABC} + V_{S.ACD}$

$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{8}{27} V_{S.ABC}$

$\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{8}{27} V_{S.ACD}$

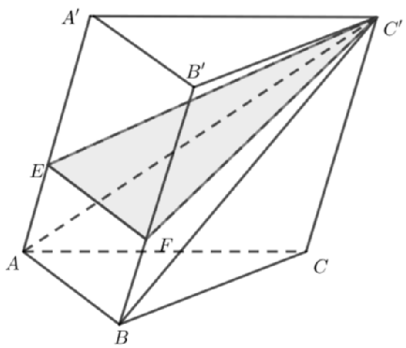
$V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{8}{27} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8/27}{1 - 8/27} = \frac{8}{19}$.

Câu 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E, BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $C'.A'B'FE$ có thể tích V_1 và khối đa diện $ABCEFC'$ có thể tích V_2. Biết rằng $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$, tìm k.

A. $k = 4$. **<u>B</u>.** $k = 3$. **C.** $k = 1$. **D.** $k = 2$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>



Ta có:

$AA' = kA'E$

$BB' = kB'F$

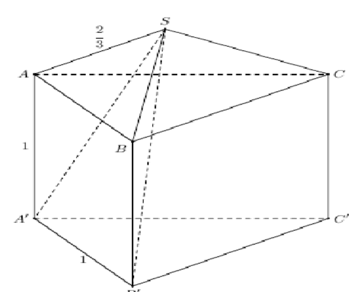
$S_{A'B'FE} = \frac{1}{k} S_{ABB'A'}$

$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.ABB'A'}} = \frac{1}{k}$;

$V_{C'.ABB'A'} = \frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{C'.A'B'FE} = \frac{2}{3k}.V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{ABCEFC'} = \left(1 - \frac{2}{3k}\right) V_{ABC.A'B'C'}$

$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABCEFC'}} = \frac{\frac{2}{3k}}{\left(1 - \frac{2}{3k}\right)} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{14}{3k} = 2\left(1 - \frac{2}{3k}\right) \Leftrightarrow k = 3.$

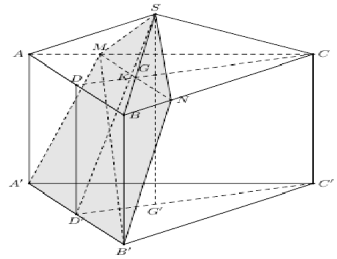
Câu 25. Cho khối đa diện như hình vẽ bên. Trong đó $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng 1, $S.ABC$ là khối chóp tam giác đều có cạnh bên $SA = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng $(SA'B')$ chia khối đa diện đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A, V_2 là thể tích phần khối đa diện không chứa đỉnh A. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $72V_1 = 5V_2$. **B.** $3V_1 = V_2$. **C.** $24V_1 = 5V_2$. **D.** $4V_1 = 5V_2$.

Lời giải

Chọn B



Dựng thiết diện $SMA'B'N$ tạo bởi mặt phẳng $(SA'B')$ và khối đa diện đã cho như hình vẽ.

$$SG=\sqrt{SC^2-GC^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3};\ GD=G'D'=\frac{1}{3}CD=\frac{\sqrt{3}}{6};\ GK=\frac{1}{4}G'D'=\frac{\sqrt{3}}{24}$$

$$DK=GD-GK=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{24}=\frac{\sqrt{3}}{8};\ MN=\frac{3}{4}.$$

Gọi V là thể tích toàn bộ khối đa diện: $V=V_{ABC.A'B'C'}+V_{S.A'B'C'}=\frac{\sqrt{3}}{4}.1+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$.

$$V_{B'.ABNM}=\frac{1}{3}BB'.S_{ABNM}=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\right).\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{7\sqrt{3}}{192}.$$

$$V_{B'.AA'M}=\frac{1}{3}d\left(B;(ACC'A')\right).S_{AA'M}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.1.\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{48}.$$

$$V_{S.ABNM}=\frac{1}{3}SG.S_{ABNM}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\right).\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{7\sqrt{3}}{576}.$$

$$V_1=\frac{7\sqrt{3}}{192}+\frac{\sqrt{3}}{48}+\frac{7\sqrt{3}}{576}=\frac{5\sqrt{3}}{72} \Rightarrow V_2=V-V_1=\frac{5\sqrt{3}}{18}-\frac{5\sqrt{3}}{72}=\frac{5\sqrt{3}}{24}.$$

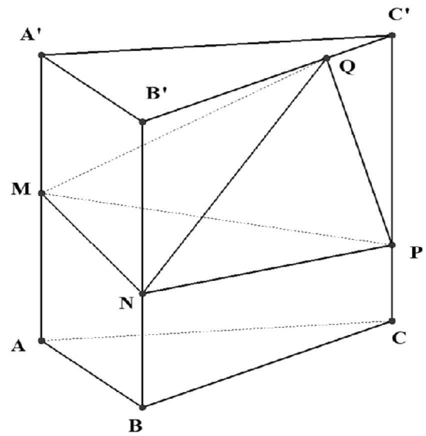
Suy ra $3V_1=V_2$.

Câu 26. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các điểm thuộc AA', AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'}=\frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CC'}=\frac{1}{4}$, $\frac{C'Q}{C'B'}=\frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{30}$.
B. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{45}$.
C. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{45}$.
D. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{22}{45}$.

Lời giải

Chọn B.



$$\frac{S_{C'PQ}}{S_{C'B'C}}=\frac{C'Q}{C'B'}.\frac{C'P}{C'C}=\frac{1}{5}.\frac{3}{4}=\frac{3}{20}\Rightarrow S_{C'PQ}=\frac{3}{40}S_{C'B'BC}.$$

$$\frac{S_{B'NQ}}{S_{B'BC'}}=\frac{B'Q}{B'C'}.\frac{B'N}{B'B}=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{8}{15}\Rightarrow S_{B'NQ}=\frac{4}{15}S_{C'B'BC}$$

$$\frac{S_{NPCB}}{S_{C'B'BC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{24}\Rightarrow S_{NPCB}=\frac{7}{24}S_{C'B'BC}$$

Suy ra, $\frac{S_{NPQ}}{S_{C'B'BC}}=1-\frac{S_{C'QP}+S_{B'NQ}+S_{CPNB}}{S_{BB'C'C}}=1-\left(\frac{3}{40}+\frac{4}{15}+\frac{7}{24}\right)=\frac{11}{30}$

Mặt khác $AM//CC'$ nên $d\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)=d\left(M,\left(BB'C'C\right)\right)$

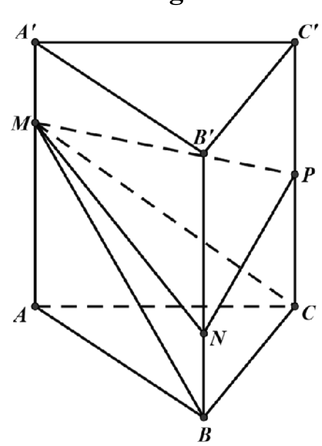
$$V_{M.NPQ}=\frac{11}{30}V_{A.BB'C'C}=\frac{11}{30}.\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$$

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{45}$.

Câu 27. **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM=2MA'$, $NB'=2NB$, $PC=PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=2$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$. **<u>C</u>.** $\frac{V_1}{V_2}=1$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$.

Lời giải



Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có $V_1 = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$.

$V_{M.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.d\left(M,\left(ABC\right)\right) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S_{ABC}.d\left(A',\left(ABC\right)\right) = \frac{2}{9}V$.

$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(M,\left(A'B'C'\right)\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(M,\left(A'B'C'\right)\right) = \frac{1}{9}V$.

Do $BCC'B'$ là hình bình hành và $NB' = 2NB$, $PC = PC'$ nên $S_{B'C'PN} = \frac{7}{5}S_{BCPN}$.

Suy ra $V_{M.B'C'PN} = \frac{7}{5}V_{M.BCPN}$, Từ đó $V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} + V_{M.A'B'C'} + V_{M.B'C'PN}$

$\Leftrightarrow V = \frac{2}{9}V + V_{M.BCPN} + \frac{1}{9}V + \frac{7}{5}V_{M.BCPN} \Leftrightarrow V_{M.BCPN} = \frac{5}{18}V$.

Như vậy $V_1 = \frac{2}{9}V + \frac{5}{18}V = \frac{1}{2}V \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2}V$. Bởi vậy: $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

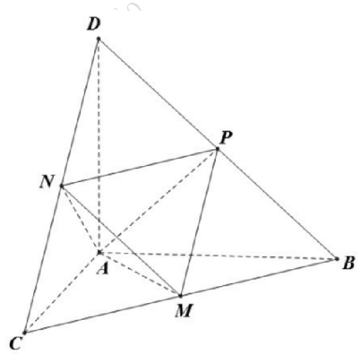
Dạng 2. Ứng dụng tỉ số thể tích để tính thể tích

Câu 1. **(Đề minh họa lần 1 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{7}{2}a^3$ **B.** $V = 14a^3$ **C.** $V = \frac{28}{3}a^3$ **D.** $V = 7a^3$

Lời giải

Chọn D



Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AB.\frac{1}{2}AD.AC = \frac{1}{6}6a.7a.4a = 28a^3$

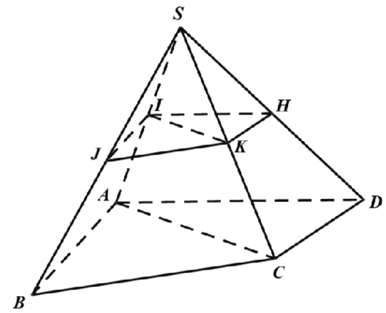
Ta nhận thấy $S_{MNP} = \frac{1}{2}S_{MNPD} = \frac{1}{4}S_{BCD} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = 7a^3$

Câu 2. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.IJKH$ bằng 1.

A. 16. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.IJK}}=\dfrac{SA}{SI}.\dfrac{SB}{SJ}.\dfrac{SC}{SK}=8\Rightarrow V_{S.ABC}=8V_{S.IJK}$.

$\dfrac{V_{S.ACD}}{V_{S.IKH}}=\dfrac{SA}{SI}.\dfrac{SC}{SK}.\dfrac{SD}{SH}=8\Rightarrow V_{S.ACD}=8V_{S.IKH}$

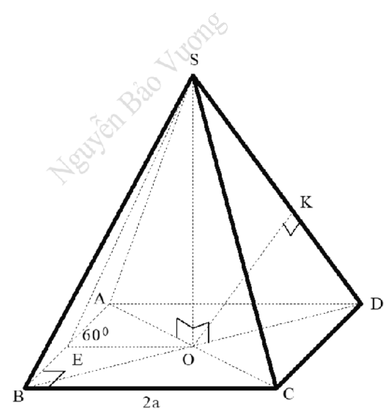
Do đó: $V_{S.ABCD}=8V_{S.IJKH}=8$.

Câu 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên tạo với đáy góc 60^0. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên SD. Tính theo a thể tích khối tứ diện $DKAC$

A. $V=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. **B.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{5}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{15}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi E là trung điểm của AB, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$\Rightarrow OE\perp AB$

$SO\perp AB$

$\Rightarrow AB\perp (SOE)$.

$\Rightarrow$ góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SEO}\Rightarrow \widehat{SEO}=60^0$.

$\Delta_v SEO:\tan 60^0=\dfrac{SO}{OE}\Rightarrow SO=OE.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

+ $\Delta_v SOD$ có đường cao $OK\Rightarrow SO^2=SK.SD\Rightarrow \dfrac{SO^2}{SD^2}=\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{3a^2+2a^2}=\dfrac{3}{5}$.

$\Rightarrow \dfrac{KD}{SD}=\dfrac{2}{5}$.

$\dfrac{d\left(K,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\dfrac{KD}{SD}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow d\left(K,(ABCD)\right)=\dfrac{2}{5}SO=\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$.

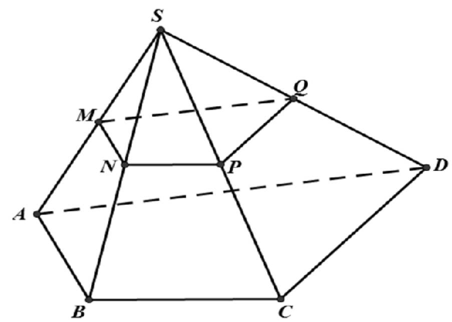
Vậy $V_{DKAC} = \frac{1}{3}d\left(K,\left(ABCD\right)\right).S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{5}.\frac{\left(2a\right)^2}{2} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$.

Câu 4. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 32. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm SA, SB, SC , SD. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{1}{8}V_{S.ABC}$.

$\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.MPQ} = \frac{1}{8}V_{S.ACD}$.

Do đó $V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \frac{1}{8}\left(V_{S.ABC} + V_{S.ACD}\right) = \frac{1}{8}V_{S.ABCD} = 4$

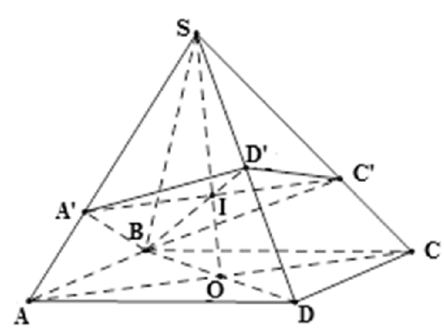
Vậy $V_{S.MNPQ} = 4$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi D' là trung điểm SD, mặt phẳng chứa BD' và song song với AC lần lượt cắt các cạnh SA, SC tại A' và C'. Biết thể tích khối chóp $S.A'BC'D'$ bằng 1, tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{9}{2}$. **B.** $V = \frac{3}{2}$. **C.** $V = 6$. **D.** $V = 3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình bình hành đáy và $\{I\} = SO \cap BD'$.

Mặt phẳng được nói đến đi qua I và song song AC nên cắt (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng $A'C'$ qua I và song song AC (với $A' \in SA, C' \in SC$).

I là trọng tâm tam giác SBD nên $\frac{SA'}{SA} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

Ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{V_{S.A'BD'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{V_{S.BC'D'}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{S.A'BD'} = \dfrac{1}{6}V \\ V_{S.BC'D'} = \dfrac{1}{6}V \end{cases} \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = V_{S.A'BD'} + V_{S.BC'D'} = \dfrac{1}{3}V$$

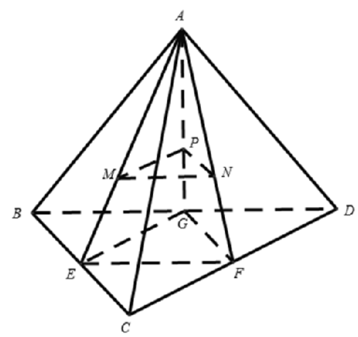
$\Rightarrow V = 3V_{S.AB'C'D'} = 3$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD, ABD. Tính thể tích của tứ diện $AMNP$.

A. $\dfrac{1}{27}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD và DB

Ta có $S_{\Delta EFG} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD} \Rightarrow V_{A.GEF} = \dfrac{1}{4}V_{A.BCD} = \dfrac{1}{4}$

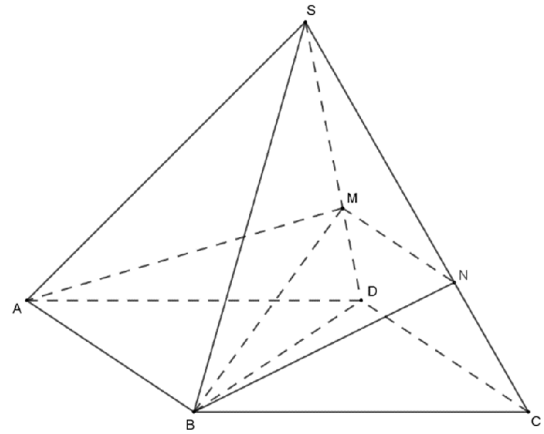
$$\frac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}} = \frac{AM}{AE}.\frac{AN}{AF}.\frac{AP}{AG} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{8}{27}V_{AEFG} = \frac{2}{27}.$$

Câu 7. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 18, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SC tại N. Thể tích khối chóp $S.ABNM$ bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Mặt phẳng (MAB) và mặt phẳng (SCD) có chung điểm M và lần lượt chứa hai đường thẳng song song AB và CD nên $MN // AB // CD$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ABD} = V_{S.BDC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = 9$.

Ta có:

- $\frac{V_{M.ABD}}{V_{S.ABD}} = \frac{d(M;(ABD))}{d(S;(ABD))} = \frac{MD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{M.ABD} = 3 \Rightarrow V_{S.ABM} = 6$.

- $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} = \frac{V_{B.SMN}}{V_{B.SDC}} = \frac{SM.SN}{SD.SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BMN} = 4$.

$\Rightarrow V_{S.ABNM} = V_{S.ABM} + V_{S.BMN} = 6 + 4 = 10$.

☞ ***Chú ý:*** Có thể áp dụng công thức tỉ số thể tích và tính như sau:

Ta có:

- $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{2}{3}.V_{S.ABD} = 6$.

- $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} = \frac{SM}{SD}.\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{4}{9}.V_{S.BDC} = 4$.

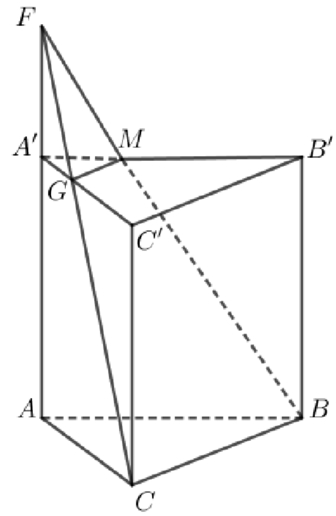
$\Rightarrow V_{S.ABNM} = V_{S.ABM} + V_{S.BMN} = 6 + 4 = 10$.

Câu 8. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Điểm M thuộc cạnh $A'B'$ sao cho $A'B' = 3A'M$. Đường thẳng BM cắt đường thẳng AA' tại F, và đường thẳng CF cắt đường thẳng $A'C'$ tại G, Tính tỉ số thể tích khối chóp $FA'MG$ và thể tích khối đa diện lồi $GMB'C'CB$

A. $\frac{1}{11}$. **B.** $\frac{1}{27}$. **C.** $\frac{3}{22}$. **D.** $\frac{1}{28}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $GM\ //\ C'B' \Rightarrow \dfrac{GM}{C'B'} = \dfrac{A'M}{A'B'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow S_{A'MG} = \dfrac{1}{9}S_{ABC}$.

Gọi h là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$, V là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có

$V = S_{ABC}.h$.

$$V_{A'MG.ABC} = \frac{h}{3}\left(S_{ABC} + S_{A'MG} + \sqrt{S_{ABC}.S_{A'MG}}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(S_{ABC} + \frac{1}{9}S_{ABC} + \sqrt{S_{ABC}.\frac{1}{9}S_{ABC}}\right) = \frac{13}{27}S_{ABC}.h = \frac{13}{27}V$$

$$\Rightarrow V_{GMB'C'CB} = V - V_{A'MG.ABC} = \frac{14}{27}V.$$

Mặt khác ta cũng có

$$\frac{FG}{FC} = \frac{GM}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FA'}{FA} = \frac{FG}{FC} = \frac{FM}{FB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{FA'GM}}{V_{FACB}} = \frac{FA'}{FA}.\frac{FG}{FC}.\frac{FM}{FB} = \frac{1}{27}.$$

$$\Rightarrow V_{FA'GM} = \frac{1}{27}V_{FACB} = \frac{1}{27}\left(V_{A'MG.ABC} + V_{FA'GM}\right) \Rightarrow V_{FA'GM} = \frac{1}{26}V_{A'MG.ABC} = \frac{1}{54}V.$$

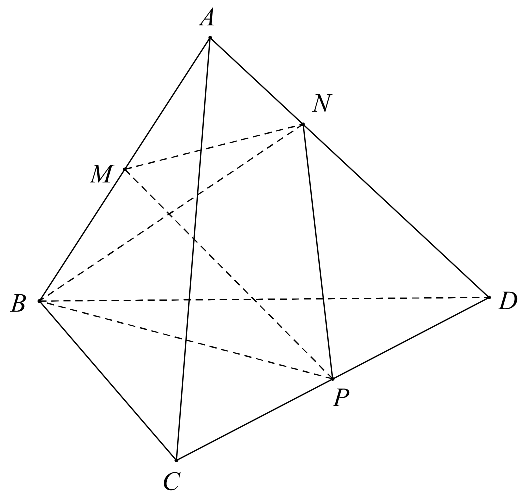
Vậy $\dfrac{V_{FA'GM}}{V_{A'MG.ABC}} = \dfrac{1}{28}$.

Câu 9. **(Sở GD Nam Định 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V, hai điểm M và P lần lượt là trung điểm của AB, CD; điểm N thuộc đoạn AD sao cho $AD = 3AN$. Tính thể tích tứ diện $BMNP$.

A. $\dfrac{V}{4}$. **B.** $\dfrac{V}{12}$. **C.** $\dfrac{V}{8}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$MB = \frac{AB}{2}, AN = \frac{AD}{3} \Rightarrow d(N, AB) = \frac{1}{3}d(D, AB) \Rightarrow S_{\Delta NMB} = \frac{1}{6}S_{\Delta DAB}$

$DP = \frac{CD}{2} \Rightarrow d(P,(MNB)) = \frac{1}{2}d(C,(ABD))$

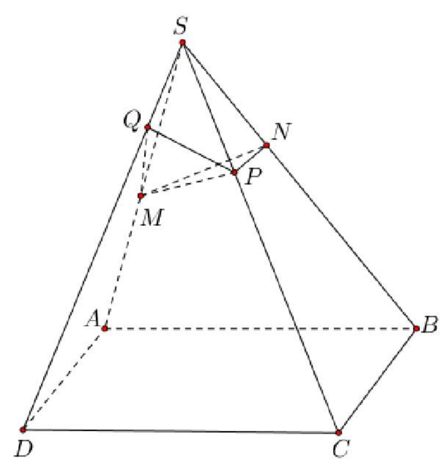
$\Rightarrow V_{P.MNB} = \frac{1}{3}d(P,(MNB)).S_{\Delta MNB} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}d(C,(ABD)).\frac{1}{6}S_{\Delta ABD} = \frac{1}{12}V$

Câu 10. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình 2019)**Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 48 và $ABCD$ là hình thoi. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, SB, SC, SD thỏa mãn $SA = 2SM$, $SB = 3SN$, $SC = 4SP$, $SD = 5SQ$. Tính thể tích khối đa diện $S.MNPQ$

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $ABCD$ là hình thoi nên $S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ABC}$.

Suy ra $V_{S.ACD} = V_{S.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = 24$.

$* \ \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5} \Rightarrow V_{S.MPQ} = \frac{3}{5}$.

$* \ \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4} \Rightarrow V_{SMNP} = 1$.

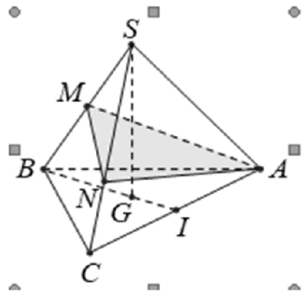
Vậy $V_{S.MNPQ}=V_{S.MPQ}+V_{S.MNP}=\frac{8}{5}$.

Câu 11. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS=2NC$. Thể tích của khối chóp $A.BCNM$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{11}}{18}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{16}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó $BO=\frac{2}{3}BI=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khối chóp $S.ABC$ đều và O là trọng tâm tam giác ABC lên $SO\perp(ABC)\Rightarrow SO\perp OB$

$\Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại O $\Rightarrow SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{4a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{33}}{3}$.

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{33}}{3}.\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.AMN}=\frac{1}{3}V_{S.ABC}$.

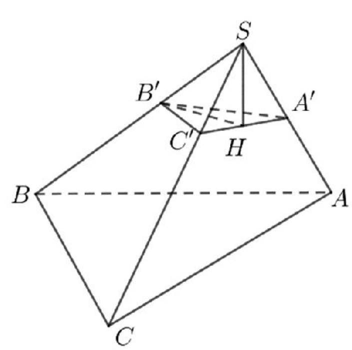
$V_{A.BCNM}=V_{S.ABC}-V_{S.AMN}=V_{S.ABC}-\frac{1}{3}V_{S.ABC}=\frac{2}{3}V_{S.ABC}=\frac{2}{3}.\frac{a^3\sqrt{11}}{12}=\frac{a^3\sqrt{11}}{18}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=2a$, $SB=3a$, $SC=4a$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=60^\circ$, $\widehat{ASC}=90^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$. **B.** $V=2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA'=SB'=SC'=a$, suy ra:

$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{24} \Rightarrow V_{S.ABC} = 24V_{S.A'B'C'}$.

(vì $SA = 2a = 2SA'$, $SB = 3a = 3SB'$, $SC = 4a = 4SC'$).

Theo giả thiết $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60°$ và $SA' = SB' = a$ suy ra hai tam giác $SA'B'$, $SB'C'$ đều và $A'B' = B'C' = a$.

$\widehat{ASC} = 90°$ và $SA' = SC' = a$ nên tam giác $A'SC'$ vuông cân tại S, do đó $A'C' = a\sqrt{2}$.

Gọi H là trung điểm $A'C'$ thì $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $SH \perp A'C'$ (1).

Tam giác $A'B'C'$ cân tại B' nên trung tuyến, cũng là đường cao $B'H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SHB' có $SH^2 + HB'^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = a^2$ suy ra $SH \perp HB'$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $SH \perp (A'B'C')$, nên SH là chiều cao khối chóp $S.A'B'C'$.

Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ là:

$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}A'C'.B'H = \frac{a\sqrt{2}}{12}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

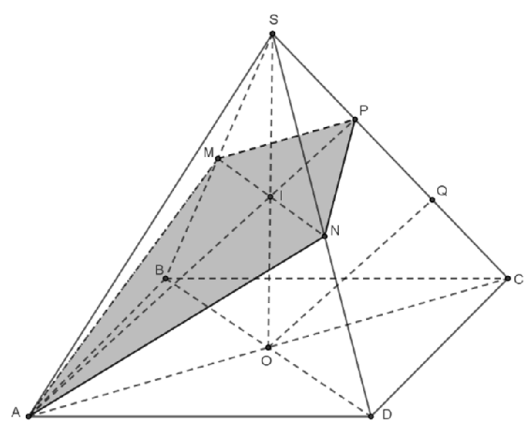
Suy ra $V_{S.ABC} = 24V_{S.A'B'C'} = 24.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 13. **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$, có đáy và cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Ta có V_2 bằng

A. $\frac{a^3}{18}$. **B.** $\frac{5a^3}{9}$. **C.** $\frac{8a^3}{15}$. **D.** $\frac{a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap MN, P = AI \cap SC$. Khi đó I là trung điểm của SO.

Gọi Q là trung điểm của $CP \Rightarrow IP // OQ \Rightarrow P$ là trung điểm của $SQ \Rightarrow SP = PQ = QC$.

Ta có $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}, V_2 = \frac{5}{6}V_{S.ABCD}$ (vì $V_1 < V_2$)

Mặt khác $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

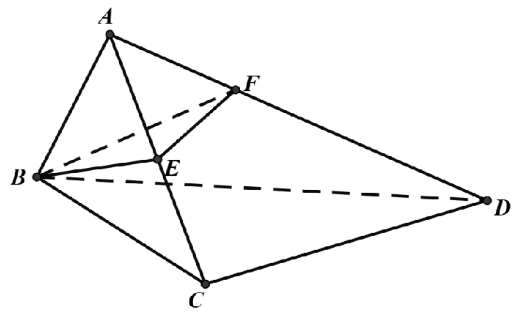
Do đó $V_2 = \frac{5}{6}.\frac{1}{3}a.2a^2 = \frac{5}{9}a^3$

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=1; AC=2; AD=3$ và $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=60^0$.Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Do $AB<AC<AD$ nên chọn $E\in AC, AE=1, F\in AD$, $AF=1$

Ta có $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=60°$ (giả thiết)

Suy ra tứ diện $ABEF$ là tứ diện đều cạnh bằng 1. Ta có $V_{ABEF}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác ta có $\frac{V_{ABCD}}{V_{ABEF}}=\frac{AB.AC.AD}{AB.AE.AF}=\frac{1.2.3}{1.1.1}=6$.

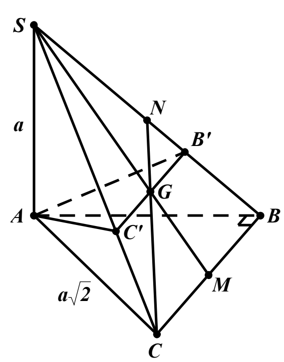
Từ đó $V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên chọn đáp án **A**

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Một mặt phẳng đi qua hai điểm A, G và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại B' và C'. Thể tích khối chóp $S.AB'C'$ bằng:

A. $\frac{2a^3}{27}$. **B.** $\frac{a^3}{9}$. **C.** $\frac{4a^3}{27}$. **D.** $\frac{2a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, SB. Khi đó, $G=SM\cap CN$.
Đặt $BA=BC=x>0$. Theo định lý Pitago trong tam giác ABC vuông tại B, ta có:

$$AC^2=BA^2+BC^2\Rightarrow\left(a\sqrt{2}\right)^2=x^2+x^2\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=a.$$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}.BA.BC = \frac{a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a = \frac{a^3}{6}$.

Mặt phẳng qua A, G song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại B', C' nên $B'C' // BC$. Khi đó ta có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3}$.

Ta lại có: $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = 1.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

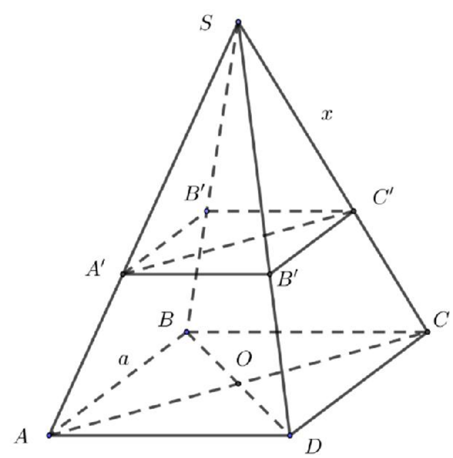
Suy ra, $V_{S.AB'C'} = \frac{4}{9}.V_{S.ABC} = \frac{4}{9}.\frac{a^3}{6} = \frac{2a^3}{27}$.

Câu 16. Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Người ta cưa viên đá đó theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

A. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{2}a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a.

Vì mặt phẳng cắt hình khối chóp song song với đáy nên thiết diện tạo bởi mặt cắt và khối chóp là một hình vuông $A'B'C'D'$.

Giả sử $\frac{SA'}{SA} = k$, ta có $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{A'B'}{AB} = k$ (định lí Talet).

Theo giả thiết $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Leftrightarrow 2V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{2}.2.V_{S.ABC}$

$\Leftrightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{2}.V_{S.ABC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (k)^3=\frac{1}{2} \Leftrightarrow k=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

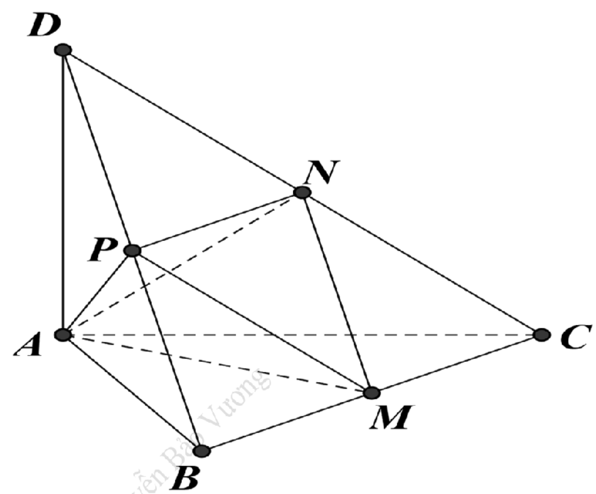
$\Rightarrow A'B'=\frac{a}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow S_{A'B'C'D'}=\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 17. **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một và $AB=3a, AC=6a, AD=4a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích khối đa diện $AMNP$.

A. $12a^3$ **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\frac{V_{D.APN}}{V_{D.ABC}}=\frac{DP}{DB}.\frac{DN}{DC}=\frac{1}{4}$; $\frac{V_{B.APM}}{V_{B.ACD}}=\frac{BP}{BD}.\frac{BM}{BC}=\frac{1}{4}$; $\frac{V_{C.AMN}}{V_{C.ABD}}=\frac{CM}{CB}.\frac{CN}{CD}=\frac{1}{4}$.

Mà $V_{AMNP}=V_{ABCD}-V_{DAPN}-V_{BAPM}-V_{CAMN}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}AB.AC.AD\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}3a.6a.4a\right)=3a^3$.

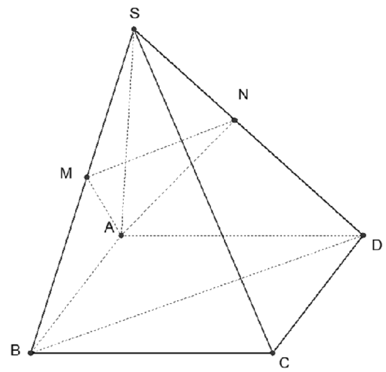
Câu 18. **(HKI-Chuyên Long An-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt

là các điểm trên cạnh SB và SD sao cho $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}=k$. Tìm giá trị của k để thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\frac{1}{8}$.

A. $k=\frac{1}{8}$. **B.** $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CBD} \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = 1$.

Mặt khác $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD} \Leftrightarrow V_{S.AMN} = k^2$, Có $V_{S.AMN} = \frac{1}{8}$

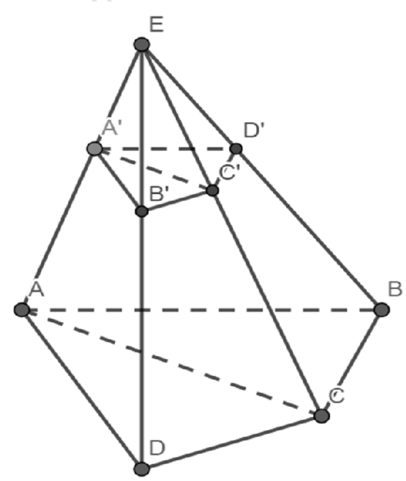
Suy ra $k^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (do $k > 0$). Vậy $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 19. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính theo V thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$?

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{V}{81}$. **C.** $\frac{V}{27}$. **D.** $\frac{V}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

$V_{S.ABC} + V_{S.ACD} = V_{S.ABCD}$; $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

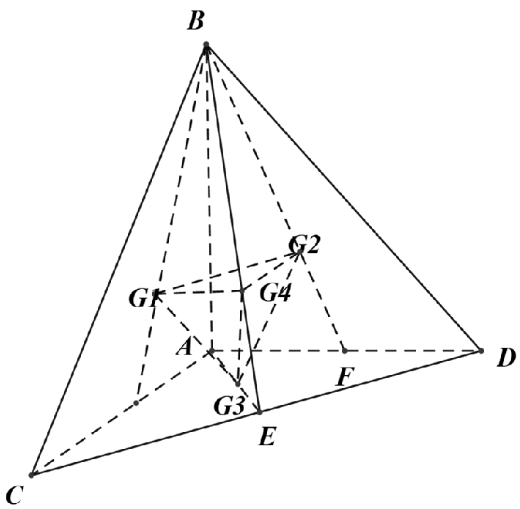
$\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA'}{SA}\frac{SD'}{SD}\frac{SC'}{SC} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$; $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{27}V_{S.ABCD}$.

Câu 20. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD, ACD và BCD. Biết $AB = 6a$, $AC = 9a$, $AD = 12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

A. $4a^3$. **B.** a^3. **C.** $108a^3$. **D.** $36a^3$.

Lời giải

Chọn A



$\Delta G_1G_2G_3$ đồng dạng với ΔACD theo tỉ số $\frac{1}{3}$ và nằm trong hai mặt phẳng song song.

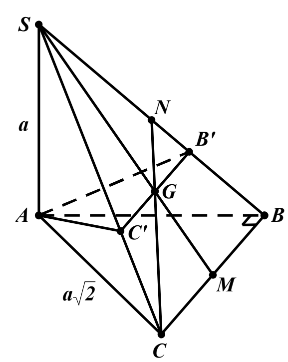
$S_{\Delta G_1G_2G_3} = \frac{1}{9}S_{\Delta ABD} = 6a^2$. $G_3G_4 // AB$ và $G_3G_4 = \frac{1}{3}AB = 2a$. $V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{1}{3}G_3G_4.S_{\Delta G_1G_2G_3} = 4a^3$.

Câu 21. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A. $\frac{4a^3}{9}$. **B.** $\frac{4a^3}{27}$. **C.** $\frac{5a^3}{54}$. **D.** $\frac{2a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong mặt phẳng (SBC) kẻ đường thẳng qua G song song với BC, cắt SB, SC lần lượt tại B', C'. Khi đó mặt phẳng (α) trùng với mặt phẳng $(AB'C')$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, SB.

Đặt $BA = BC = x > 0$. Theo định lý Pitago trong tam giác ABC vuông tại B, ta có:

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 \Rightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a.$$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}.BA.BC = \frac{a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a = \frac{a^3}{6}$.

Ta lại có: $\frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3}$.

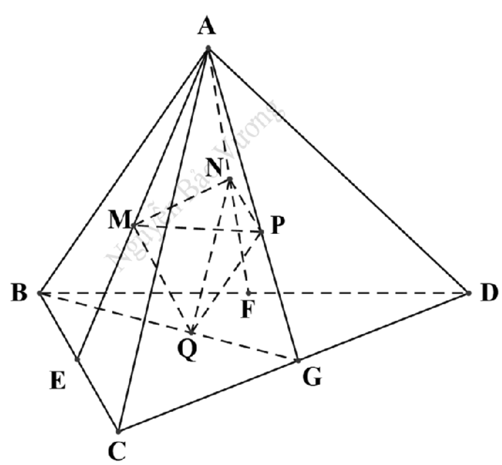
Suy ra: $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = 1.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Vì thế, $V_{S.AB'C'} = \frac{4}{9}.V_{S.ABC} = \frac{4}{9}.\frac{a^3}{6} = \frac{2a^3}{27}$.

Vậy $V = V_{S.ABC} - V_{S.AB'C'} = \frac{a^3}{6} - \frac{2a^3}{27} = \frac{5a^3}{54}$.

Câu 22. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD và M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ theo V.

A. $\frac{V}{9}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{2V}{9}$. **D.** $\frac{V}{27}$.



Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta MNP \sim \Delta EFG$ và $\frac{MN}{EF} = \frac{2}{3}$

$\Delta EFG \sim \Delta DCB$ và $\frac{EF}{DC} = \frac{1}{2}$

Do đó $\Delta MNP \sim \Delta DCB$ và $\frac{MN}{DC} = \frac{1}{3}$ □ $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{1}{9}S_{\Delta BCD}$

Mặt khác $d\left(Q,\left(MNP\right)\right) = \frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right)$

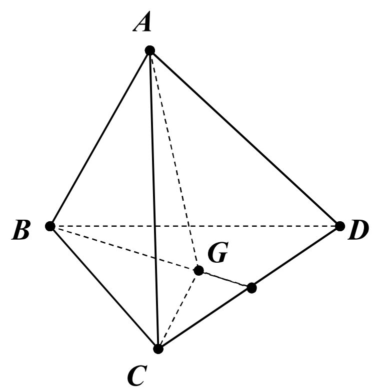
Suy ra $V_{MNPQ} = \frac{1}{27}V$.

Câu 23. **(THPT QG 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$

A. $V=3$ **B.** $V=4$ **C.** $V=6$ **D.** $V=5$

Lời giải

Chọn B



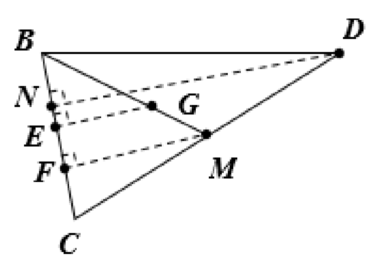
Cách 1:

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $A.GBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta BGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

$$\left.\begin{aligned} V_{ABCD}&=\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}\\ V_{A.GBC}&=\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}}=\frac{\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}}=\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=3\Rightarrow V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{3}.12=4.$$

Chứng minh: Đặt $DN=h; BC=a$.



+) $MF//ND\Rightarrow \frac{MF}{DN}=\frac{CM}{CD}=\frac{1}{2}\Rightarrow MF=\frac{1}{2}DN\Rightarrow MF=\frac{h}{2}$.

+) $GE//MF\Rightarrow \frac{GE}{MF}=\frac{BG}{BM}=\frac{2}{3}\Rightarrow GE=\frac{2}{3}MF=\frac{2}{3}.\frac{h}{2}=\frac{h}{3}$

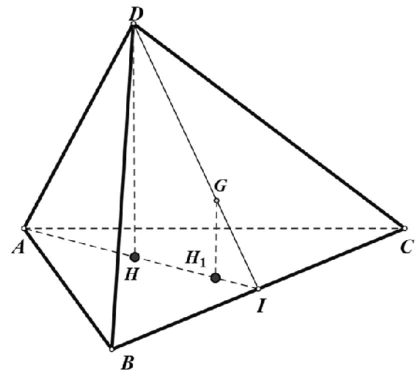
+) $\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=\frac{\frac{1}{2}DN.BC}{\frac{1}{2}GE.BC}=\frac{\frac{1}{2}ha}{\frac{1}{2}\frac{h}{3}a}=3\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBC}$

+) Chứng minh tương tự có $S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBD}=3S_{\Delta GCD}\Rightarrow S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}$

Cách 2:

Ta có $\dfrac{d\left(G;\left(ABC\right)\right)}{d\left(D;\left(ABC\right)\right)}=\dfrac{GI}{DI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow d\left(G;\left(ABC\right)\right)=\dfrac{1}{3}d\left(D;\left(ABC\right)\right)$.

Nên $V_{G.ABC}=\dfrac{1}{3}d\left(G;\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.V_{DABC}=4$

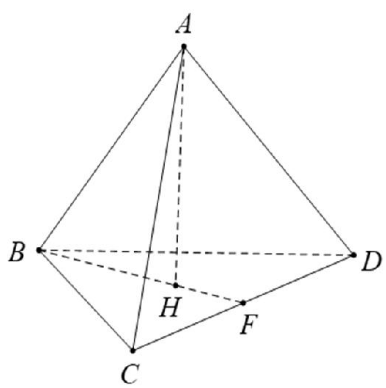


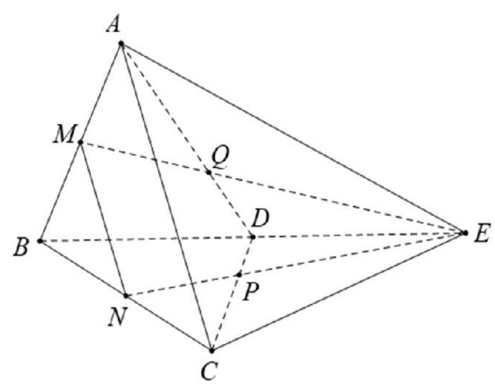
Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V. Tính V.

A. $\dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$ **B.** $\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$ **D.** $\dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$

Lời giải

Chọn D





Tính thể tích T có khối tứ diện $ABCD$. Gọi F là trung điểm BC và H trọng tâm tam giác BCD.

Ta có $BF=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BH=\dfrac{2}{3}BF=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ suy ra $BH=\sqrt{AB^2-BH^2}=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $T=\dfrac{1}{3}AH.S_{BCD}=\dfrac{1}{3}a\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Gọi diện tích một mặt của tứ diện là S. Gọi P là giao điểm của NE và CD, tương tự cho Q.

Ta thấy P,Q lần lượt là trọng tâm các tam giác BEC và BEA nên $PD=\dfrac{1}{3}DC,QD=\dfrac{1}{3}AD$

Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$\frac{V_{B.ACE}}{V_{B.ACD}}=2$ nên $V_{B.ACE}=2T$; $\frac{V_{E.BMN}}{V_{E.BAC}}=\frac{1}{4}$ nên $V_{E.BMN}=\frac{1}{4}.2T=\frac{T}{2}$.

Nên $V_{E.AMNC}=V_{E.ABC}-V_{B.EMN}=2T-\frac{T}{2}=\frac{3}{2}T$.

Tương tự: $\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.DCA}}=\frac{1}{9}$ nên $V_{E.DPQ}=\frac{1}{9}T$. Nên $V_{ACPQ}=T-\frac{1}{9}T=\frac{8}{9}T$

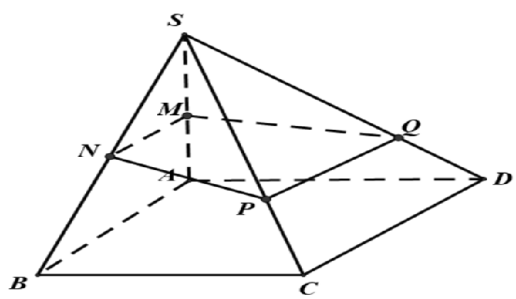
Suy ra $V=V_{E.AMNC}-V_{E.ACPQ}=\frac{3}{2}T-\frac{8}{9}T=\frac{11}{18}T=\frac{11a^3\sqrt{2}}{216}$

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích $V=12$. Gọi M,N lần lượt trung điểm $SA, SB; P$ là điểm thuộc cạnh SC sao cho $PS=2PC$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $PQ//CD\Rightarrow\frac{SQ}{SD}=\frac{SP}{SC}=\frac{2}{3}$.

Khi đó ta có: $\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow V_{SMNP}=\frac{1}{12}V$.

$\frac{V_{SMPQ}}{V_{SACD}}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow V_{SMPQ}=\frac{1}{9}V$.

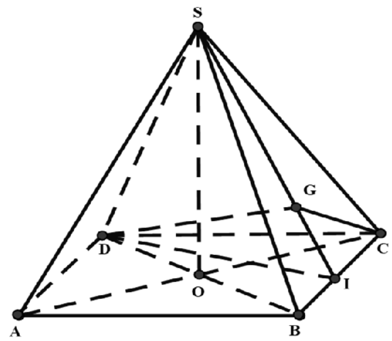
Vậy $V_{S.MNPQ}=\frac{7}{36}V=\frac{7}{3}$.

Câu 26. **(CHUYÊN Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019)**Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Thể tích khối tứ diện $SGCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{36}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$, I là trung điểm cạnh BC.

$OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

$V_{S.DCI} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$.

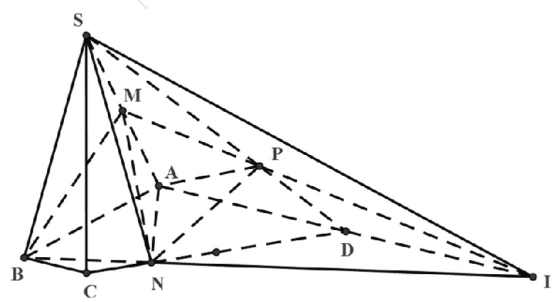
$\dfrac{V_{S.DCG}}{V_{S.DCI}} = \dfrac{SD}{SD} \cdot \dfrac{SC}{SC} \cdot \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.DCG} = \dfrac{2}{3} V_{S.DCI} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{24} = \dfrac{\sqrt{2}}{36}$.

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1, đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn là AD và $AD = 3BC$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, N là điểm thuộc cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại P. Thể tích khối chóp $A.MBNP$ bằng

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{12}$. **C.** $\dfrac{5}{16}$. **D.** $\dfrac{9}{32}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $V = V_{S.ABCD} = 1$.

Gọi I là giao điểm của BN với AD, suy ra P là giao điểm của MI với SD.

$BC \parallel DI$ và $ND = 3NC \Rightarrow DI = 3BC \Rightarrow D$ là trung điểm của AI.

Do đó P là trọng tâm của tam giác $SAI \Rightarrow \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

$S_{BCN} = \dfrac{1}{4} S_{BCD} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} S_{ABCD} = \dfrac{1}{16} S_{ABCD}$; $S_{ADN} = S_{NID} = 9S_{BCN} = \dfrac{9}{16} S_{ABCD}$.

$S_{ABN} = S_{ABCD} - S_{BCN} - S_{ADN} = \dfrac{3}{8} S_{ABCD}$. Suy ra $V_{S.ABN} = \dfrac{3}{8} V$; $V_{S.ADN} = \dfrac{9}{16} V$.

$V_{S.MBN}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABN}\Rightarrow V_{A.BMN}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABN}=\dfrac{3}{16}V$;

$V_{S.MNP}=\dfrac{1}{2}V_{S.ANP}\Rightarrow V_{A.MNP}=\dfrac{1}{2}V_{S.ANP}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{S.AND}=\dfrac{3}{16}V$.

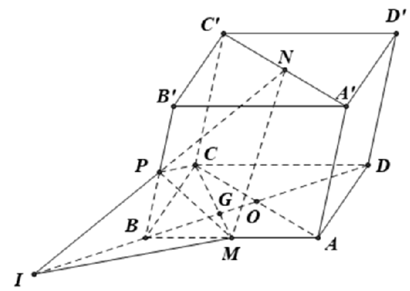
Do đó $V_{A.MBNP}=V_{A.BMN}+V_{A.MNP}=\dfrac{3}{8}V=\dfrac{3}{8}$.

Câu 28. **(THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'C'$, BB'. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

A. $\dfrac{1}{8}V$. **B.** $\dfrac{7}{48}V$. **C.** $\dfrac{5}{48}V$. **D.** $\dfrac{1}{6}V$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $G=CM\cap BD$, $I=PN\cap BD$, $O=AC\cap BD$. Dễ thấy BP là đường trung bình của ΔINO và G là trọng tâm ΔABC nên $BG=\dfrac{2}{3}BO=\dfrac{2}{3}BI$.

$\dfrac{V_{N.CMP}}{V_{N.CMI}}=\dfrac{NP}{NI}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{CMNP}=\dfrac{1}{2}V_{N.CMI}$.

Đặt $S=S_{ABCD}$ và h là chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có

$$\dfrac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta IMC}}=\dfrac{\frac{1}{2}d(B,MC).MC}{\frac{1}{2}d(I,MC).MC}=\dfrac{BG}{IG}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow S_{\Delta IMC}=\dfrac{5}{2}S_{\Delta BMC}=\dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{4}S=\dfrac{5}{8}S.$$

Mà $V_{N.IMC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta IMC}.d\left(N,(ABCD)\right)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{5}{8}S.h=\dfrac{5}{24}V$.

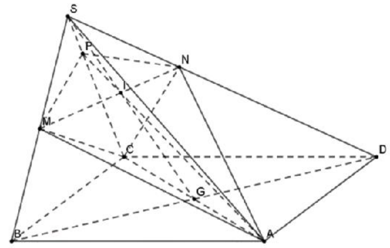
Vậy $V_{CMNP}=\dfrac{1}{2}V_{N.CMI}=\dfrac{5}{48}V$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Trên cạnh SB, SD lấy các điểm M, N sao cho $SM=MB$, $SD=3SN$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích V của khối tứ diện $SMNP$.

A. $V=\dfrac{1}{3}$. **B.** $V=\dfrac{1}{2}$. **C.** $V=2$. **D.** $V=1$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=\frac{SA}{SA}+\frac{SC}{SP}\Leftrightarrow 2+3=1+\frac{SC}{SP}\Rightarrow\frac{SC}{SP}=4$.

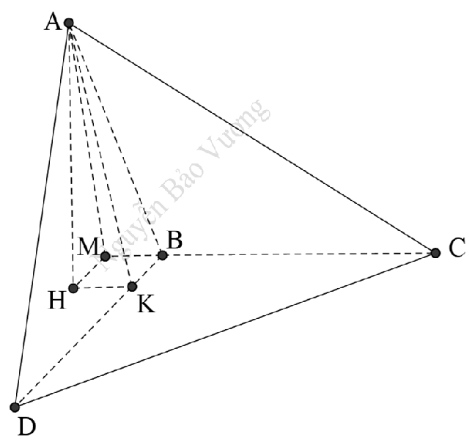
$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BCD}}=\frac{1}{2}\frac{SP}{SC}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{48}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{1}{48}V_{S.ABCD}=1$.

Câu 30. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90°$; $AB=a$; $AC=a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC}=135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Vẽ $AH\perp(BCD)$, $H\in(BCD)$.

Vẽ $HK\,//\,BC$, $K\in BD$, có $BD\perp BC\Rightarrow HK\perp BD$, mà $AH\perp BD$.

$\Rightarrow BD\perp(AHK)\Rightarrow BD\perp AK$.

Nên $\left(\widehat{(ABD),(BCD)}\right)=\widehat{AKH}=30°$

Vẽ $HM\,//\,BD$, $M\in BD$, có $BC\perp BD\Rightarrow HM\perp BC$, mà $AH\perp BC$.

$\Rightarrow BC\perp AM$, có góc $\widehat{ABC}=135°$.

Suy ra $\widehat{ABM}=45°$ (nên B ở giữa M và C).

ΔAMB vuông tại M có $\widehat{ABM}=45°$.

Suy ra ΔAMB vuông cân tại $B\Rightarrow AM=MB=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Tứ giác $BKHM$ là hình chữ nhật, nên $BM=HK$.

ΔAHK vuông tại H có $\widehat{AKH}=30°$, nên $AH=\frac{HK}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$, $AK=2AH=\frac{2a}{\sqrt{6}}$.

ΔBAD vuông tại A có AK là đường cao nên $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}$.

$\Rightarrow \frac{3}{2a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{AD^2}\Rightarrow \frac{1}{AD^2}=\frac{1}{2a^2}\Rightarrow AD=a\sqrt{2}$ và $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{3}$.

Có $BC=CM-BM$, $CM^2=CA^2-AM^2=5a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{9a^2}{2}$

$\Rightarrow BC=\frac{3a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$

Có $V=\frac{1}{3}AH.S_{BCD}=\frac{1}{6}AH.BD.BC=\frac{1}{6}\frac{a}{\sqrt{6}}.a\sqrt{3}.a\sqrt{2}=\frac{a^3}{6}$

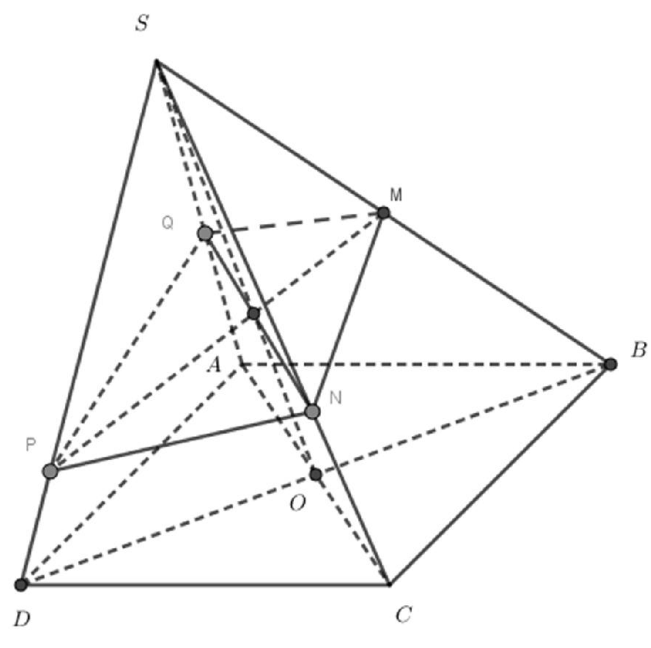
Vậy $V=\frac{a^3}{6}$.

Câu 31. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB. N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SN=2CN$, P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=3DP$. Mặt phẳng (MNP) cắt SA tại Q. Biết khối chóp $SMNPQ$ có thể tích bằng 1. Khối đa diện $ABCD.QMNP$ có thể tích bằng

A. $\frac{9}{7}$. **B.** $\frac{17}{5}$. **C.** 4. **D.** $\frac{14}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\frac{SA}{SQ}+\frac{SC}{SN}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SP}$ (Tham khảo bài tập 73 trang 64 SBT Hình 11 nâng cao).

Do đó ta có $\frac{SQ}{SA}=\frac{6}{11}$.

Ta có $\frac{V_{SMNQ}}{V_{SBCA}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.\frac{SQ}{SA}=\frac{2}{11}\Rightarrow V_{SMNQ}=\frac{1}{11}V_{SABCD}$.

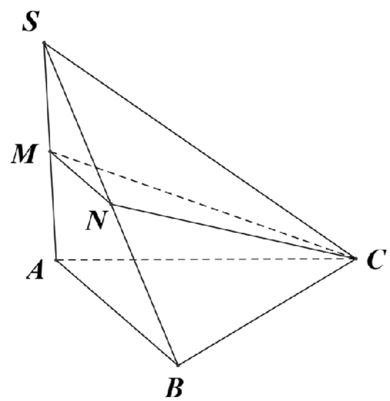
Tương tự: $V_{SQPN}=\frac{3}{22}V_{SABCD}$. Do đó $V_{SMNQ}+V_{SQPN}=\frac{5}{22}V_{SABCD}\Rightarrow V_{SABCD}=\frac{22}{5}$.

Vậy $V_{ABCD.QMNP}=\dfrac{17}{5}$..

Câu 32. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC đều, $AB=a$, góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính thể tích của khối chóp $S.MNC$.

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{16}$.

Lời giải



Chọn D

Ta có: $SA\perp(ABC)$

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow (SB,(ABC))=(SB,AB)=\widehat{SBA}=60°$.

$SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3}{4}$.

$\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SC}{SC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

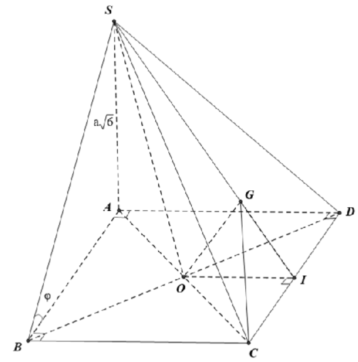
$\Rightarrow V_{S.MNC}=\dfrac{1}{4}.V_{S.ABC}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{a^3}{4}=\dfrac{a^3}{16}$.

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA=a\sqrt{6}$, SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc φ sao cho $\tan\varphi=\sqrt{6}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính thể tích khối tứ diện $SOGC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$

Như vậy $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \left(\widehat{AB;SB}\right) = \widehat{SBA} = \varphi.$

Trong tam giác SAB vuông tại A, $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AB} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{AB} \Leftrightarrow AB = a.$

Gọi I là trung điểm CD, trọng tâm G của tam giác SCD, G thuộc SI.

Có $V_{S.OCI} = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta OIC} = \dfrac{1}{3}SA.\dfrac{1}{2}.IO.IC = \dfrac{1}{6}.a.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{24}.$

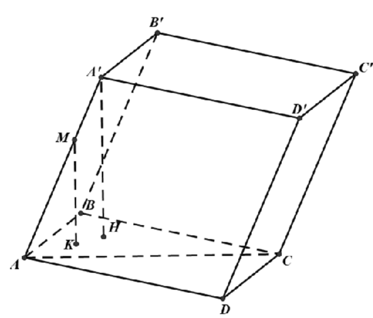
Khi đó: $\dfrac{V_{SOGC}}{V_{SOIC}} = \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{SOGC} = \dfrac{2}{3}V_{SOIC} = \dfrac{2}{3}\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}.$

Câu 34. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Lấy điểm M thuộc cạnh AA' sao cho $MA = 2MA'$. Thể tích của khối chóp $M.ABC$ bằng

A. $\dfrac{V}{3}$. **B.** $\dfrac{V}{9}$. **C.** $\dfrac{V}{18}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Thể tích hình hộp là $V = B.h$

Gọi diện tích tam giác ABC là B', ta có: $B' = \dfrac{1}{2}B$.

Gọi $A'H$ là đường cao hạ từ A' xuống mặt phẳng đáy: $A'H \perp (ABCD)$ tại H, đặt $h = A'H$. Dựng $MK \perp (ABCD)$ tại K, ta có $MK // A'H$ và có tỉ số $\dfrac{MK}{A'H} = \dfrac{MA}{A'A} = \dfrac{2}{3}\ (gt) \Rightarrow h' = \dfrac{2}{3}h$.

Gọi V là thể tích hình chóp $M.ABC$, ta có: $V' = \dfrac{1}{3}.B'.h' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}B.\dfrac{2}{3}h = \dfrac{1}{9}B.h = \dfrac{V}{9}$.

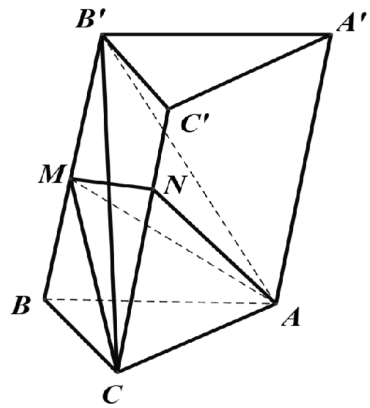
Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là trung điểm BB', điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích khối chóp $A.BCMN$ theo V.

A. $V_{A.BCMN} = \frac{7V}{12}$. **B.** $V_{A.BCMN} = \frac{7V}{18}$. **C.** $V_{A.BCMN} = \frac{V}{3}$. **D.** $V_{A.BCMN} = \frac{5V}{18}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



Ta có: $V_{B'BAC} = \frac{1}{3}.d(B',(ABC)).S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}V$.

Theo công thức tỷ số thể tích: $\frac{V_{B.MAC}}{V_{B.B'AC}} = \frac{BM}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{B.MAC} = \frac{1}{2}.V_{B.B'AC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}V = \frac{V}{6}$.

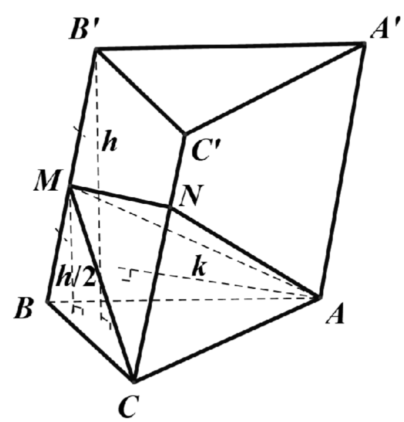
Ta có: $BB' = 2BM = \frac{3}{2}NC \Rightarrow BM = \frac{3}{4}NC$.

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta NMC}} = \frac{\frac{1}{2}.BM.d(C,BB')}{\frac{1}{2}.NC.d(M,CC')} = \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BCNM}}{S_{\Delta BMC}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{V_{A.BCNM}}{V_{A.BMC}} = \frac{7}{3}.$$

Vậy: $V_{A.BCNM} = \frac{7}{3}.V_{A.BMC} = \frac{7}{3}.\frac{V}{6} = \frac{7V}{18}$.

Cách 2:



Gọi h,k lần lượt là độ dài đường cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và hình chóp $A.BCMN$, S là diện tích tam giác ABC.

$\Rightarrow$ độ dài đường cao của hình chóp $M.ABC$ là: $\dfrac{h}{2}$

$V_{MABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{h}{2}.S=\dfrac{hS}{6}$ (1).

Mặt khác: $V_{MABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{h}{2}.S=\dfrac{1}{3}.k.S_{\Delta BCM} \Rightarrow k.S_{\Delta BCM}=\dfrac{hS}{2}$

Ta có $S_{\Delta MNC}=\dfrac{4}{3}S_{\Delta BCM}$ (vì 2 tam giác MNC và BCM có cùng chiều cao và $CN=\dfrac{4}{3}BM$).

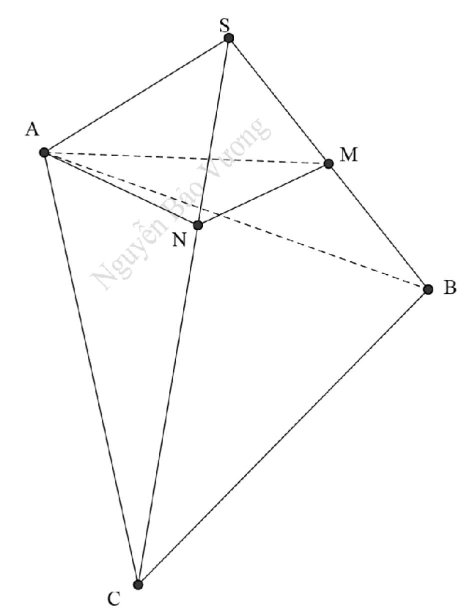
$V_{AMNC}=\dfrac{1}{3}.k.S_{\Delta MNC}=\dfrac{1}{3}.k.\dfrac{4}{3}.S_{\Delta BCM}=\dfrac{4}{9}.k.S_{\Delta BCM}=\dfrac{4}{9}.\dfrac{hS}{2}=\dfrac{2hS}{9}.$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $V_{A.BCMN}=V_{MABC}+V_{AMNC}=\dfrac{hS}{6}+\dfrac{2hS}{9}=\dfrac{7hS}{18}=\dfrac{7V}{18}$.

Câu 36. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60°$, $SA=a,\ SB=2a,\ SC=4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{8a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Lấy $M\in SB,\ N\in SC$ thoả mãn: $SM=SN=SA=a \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Theo giả thiết: $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60^0 \Rightarrow S.AMN$ là khối tứ diện đều cạnh a.

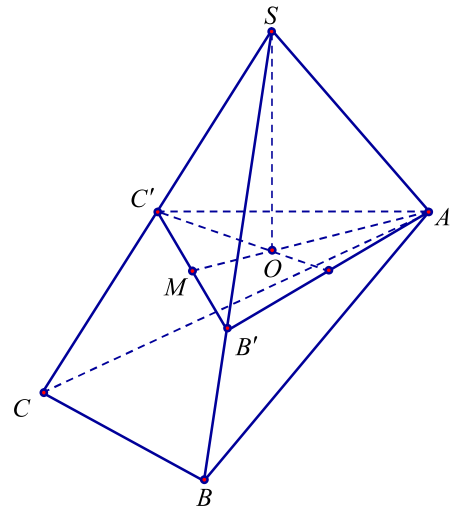
Do đó: $V_{S.AMN}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác : $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{S.ABC}=8V_{S.AMN}=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37. **(Chuyên Lê Hồng Phong 2018)** Cho khối chóp $S.ABC$ có góc $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60°$ và $SA=2$, $SB=3$, $SC=4$. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi B' trên SB sao cho $SB' = \frac{2}{3}SB$ và C' trên SC sao cho $SC' = \frac{1}{2}SC$.

Khi đó $SA = SB' = SC' = 2 \Rightarrow S.AB'C'$ là khối tứ diện đều.

Ta có: $AM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ và $S_{AB'C'} = \sqrt{3}$.

Khi đó $V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}S_{AB'C'}.SO = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Mà ta lại có: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'} = 3 \Rightarrow V_{S.ABC} = 3V_{S.AB'C'} = 2\sqrt{2}$.

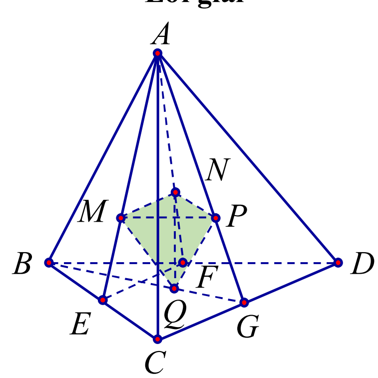
Cách khác:

$V_{S.ABC} = \frac{SA.SB.SC}{6}.\sqrt{1-\cos^2\widehat{ASB}-\cos^2\widehat{BSC}-\cos^2\widehat{CSB}+2\cos\widehat{ASB}.\cos.\widehat{BSC}.\cos\widehat{CSB}} = 2\sqrt{2}$

Câu 38. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích 2017. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD. Tính theo V thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{2017}{9}$. **B.** $\frac{4034}{81}$. **C.** $\frac{8068}{27}$. **D.** $\frac{2017}{27}$.

Lời giải



$\dfrac{V_{AEFG}}{V_{ABCD}}=\dfrac{S_{EFG}}{S_{BCD}}=\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow V_{AEFG}=\dfrac{1}{4}V_{ABCD}$

(Do E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD).

$\dfrac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}}=\dfrac{SM}{SE}.\dfrac{SN}{SE}.\dfrac{SP}{SG}=\dfrac{8}{27}\Rightarrow V_{AMNP}=\dfrac{8}{27}V_{AEFG}=\dfrac{8}{27}.\dfrac{1}{4}V_{ABCD}=\dfrac{2}{27}V_{ABCD}$

Do mặt phẳng $(MNP)//(BCD)$ nên $\dfrac{V_{QMNP}}{V_{AMNP}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow V_{QMNP}=\dfrac{1}{2}V_{AMNP}$

$V_{QMNP}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{27}V_{ABCD}=\dfrac{1}{27}V_{ABCD}=\dfrac{2017}{27}$.

Câu 39. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V=\dfrac{1}{12}a^3$ **B.** $V=\dfrac{1}{6}a^3$. **C.** $V=\dfrac{1}{8}a^3$. **D.** $V=\dfrac{1}{36}a^3$.

Lời giải

Cách 1. Ta có $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$

$V_{NDAC}=\dfrac{1}{3}NH.S_{\Delta DAC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}a.\left(\dfrac{1}{2}a^2\right)=\dfrac{a^3}{18}$

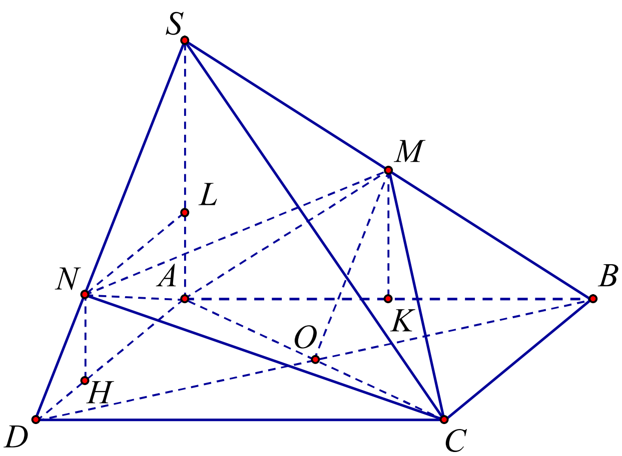
$V_{MABC}=\dfrac{1}{3}MK.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\left(\dfrac{1}{2}a^2\right)=\dfrac{a^3}{12}$

$\dfrac{1}{3}d\left(A,(SMN)\right).S_{\Delta SMN}=\dfrac{a^3}{18}$

Suy ra $V_{NSAM}=\dfrac{1}{3}NL.S_{\Delta SAM}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3}a.\left(\dfrac{1}{2}a.\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^3}{18}$.

Mặt khác $V_{C.SMN}=\dfrac{1}{3}d\left(C,(SMN)\right).S_{\Delta SMN}=\dfrac{1}{3}d\left(A,(SMN)\right).S_{\Delta SMN}=\dfrac{a^3}{18}$

Vậy $V_{ACMN}=V_{S.ABCD}-V_{NSAM}-V_{NADC}-V_{MABC}-V_{SCMN}=\dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a^3}{18}-\dfrac{a^3}{18}-\dfrac{a^3}{12}-\dfrac{a^3}{18}=\dfrac{1}{12}a^3$.



Cách 2. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$. Vì $OM//SD$ nên $SD//(AMC)$.

Do đó $d\left(N;\left(AMC\right)\right)=d\left(D;\left(AMC\right)\right)=d\left(B;\left(AMC\right)\right)$

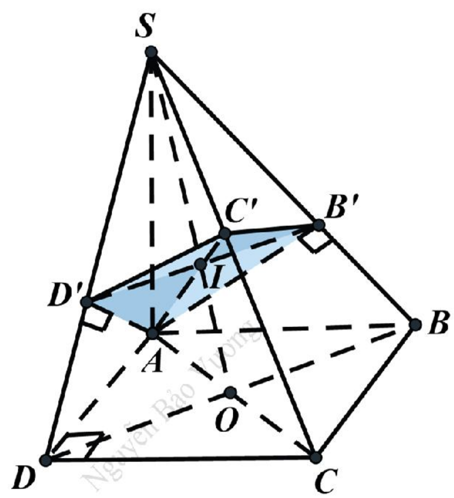
$\Rightarrow V_{ACMN}=V_{N.MAC}=V_{D.MAC}=V_{B.MAC}=V_{M.BAC}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{12}$.

(do $d\left(M;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(S;\left(ABC\right)\right)$ và $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$)

Câu 40. **(Chuyên Quốc Học Huế - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA=2a$. Gọi $B';D'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB,SD. Mặt phẳng $\left(AB'D'\right)$ cắt cạnh SC tại C'. Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$

A. $\frac{a^3}{3}$. **<u>B.</u>** $\frac{16a^3}{45}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

Lời giải



Ta có $V_{S.AB'C'D'}=2V_{S.AB'C'}$ (1) mà $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$ $(*)$

ΔSAC vuông tại A nên $SC^2=SA^2+AC^2=(2a)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=6a^2$ suy ra $SC=a\sqrt{6}$

Ta có $BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp AB'$ và $SB\perp AB'$ suy ra $AB'\perp\left(SBC\right)$ nên $AB'\perp BC$

Tương tự $AD'\perp SC$. Từ đó suy ra $SC\perp\left(AB'D'\right)\equiv\left(AB'C'D'\right)$ nên $SC\perp AC'$

Mà $SC'.SC=SA^2$ suy ra $\frac{SC'}{SC}=\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{4a^2}{6a^2}=\frac{2}{3}$. Ta cũng có

$\frac{SB'}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{4a^2}{4a^2+a^2}=\frac{4}{5}$

Từ $(*)\Rightarrow\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}}=\frac{8}{15}$ suy ra $V_{SAB'C'}=\frac{8}{15}V_{SABC}=\frac{8}{15}.\frac{1}{2}V_{SABCD}=\frac{8}{30}V_{SABCD}$ mà

$V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{2a^3}{3}$

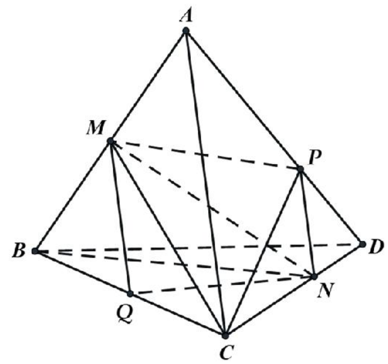
Suy ra $V_{SAB'C'}=\frac{8}{30}.\frac{2a^3}{3}=\frac{8a^3}{45}$

Từ (1) suy ra $V_{S.AB'C'D'}=2V_{S.AB'C'}=\frac{16a^3}{45}$.

Câu 41. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}=-2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V. Tính V.

A. $V=\frac{\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V=\frac{11\sqrt{2}}{216}$. **C.** $V=\frac{7\sqrt{2}}{216}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{108}$.

Lời giải



Từ N kẻ $NP//AC$, $N\in AD$

M kẻ $MQ//AC$, $Q\in BC$. Mặt phẳng (P) là $MPNQ$

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}AH.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}$

$V=V_{ACMPNQ}=V_{AMPC}+V_{MQNC}+V_{MPNC}$

Ta có $V_{AMPC}=\frac{AM}{AB}.\frac{AP}{AD}.V_{ABCD}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{ABCD}$

$V_{MQNC}=\frac{1}{2}V_{AQNC}=\frac{1}{2}\frac{CQ}{CB}.\frac{CN}{CD}.V_{ABCD}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{2}V_{ABCD}$

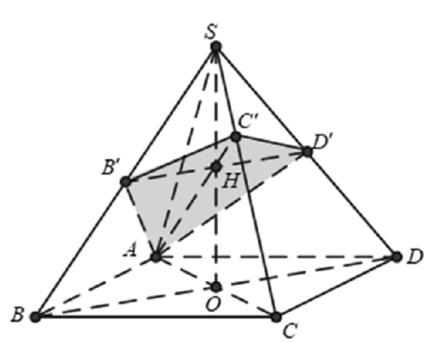
$V_{MPNC}=\frac{2}{3}V_{MPCD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}V_{MACD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}\frac{AM}{AB}.V_{ABCD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}\frac{1}{2}V_{ABCD}=\frac{1}{9}V_{ABCD}$

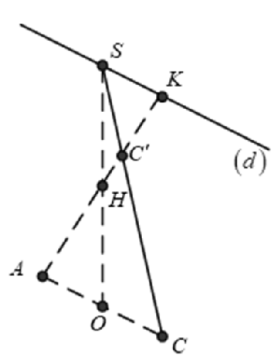
Vậy $V=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)V_{ABCD}\Rightarrow V=\frac{11}{18}V_{ABCD}=\frac{11\sqrt{2}}{216}$.

Câu 42. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy là hình bình hành có thể tích bằng V. Lấy điểm B', D' lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Mặt phẳng qua $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{2V}{3}$. **C.** $\frac{V^3}{3}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Lời giải





Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì $SO \cap B'D' = H$. Khi đó H là trung điểm của SO và $C' = AH \cap SO$.

Trong mặt phẳng (SAC): Ta kẻ $(d)//AC$ và AC' cắt (d) tại K. Khi đó áp dụng tính đồng dạng của các tam giác ta có: $\frac{OH}{SH} = \frac{OA}{SK} = 1 \Rightarrow SK = OA \Rightarrow \frac{SK}{AC} = \frac{1}{2}$; $\frac{SK}{AC} = \frac{SC'}{CC'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$.

Vì $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2}.V_{S.ABCD} = \frac{V}{2}$ nên ta có $\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow V_{S.AB'D'} = \frac{1}{8}V$ và

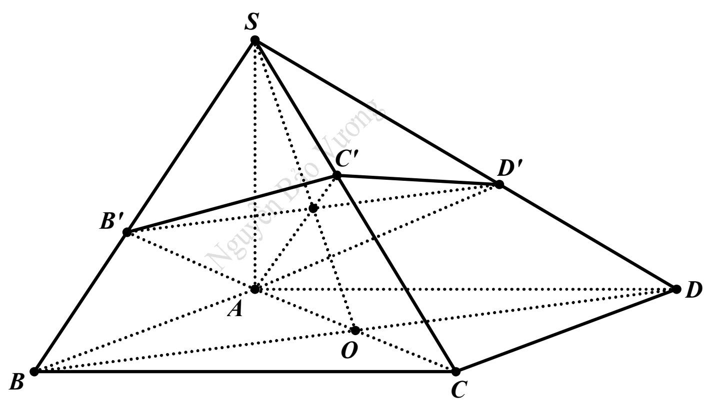
$\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow V_{S.B'C'D'} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{V}{8}$.

Suy ra $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \frac{1}{8}V + \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{8}\left(1 + \frac{SC'}{SC}\right) = \frac{V}{6}$.

Câu 43. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SD, SC lần lượt tại B', D', C'. Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là:

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.a^2.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $AD' \perp (SDC) \Rightarrow AD' \perp SD$; $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$.

Do $SC \perp (AB'D') \Rightarrow SC \perp AC'$.

Tam giác SAC vuông cân tại A nên C' là trung điểm của SC.

Trong tam giác vuông SAB' ta có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$.

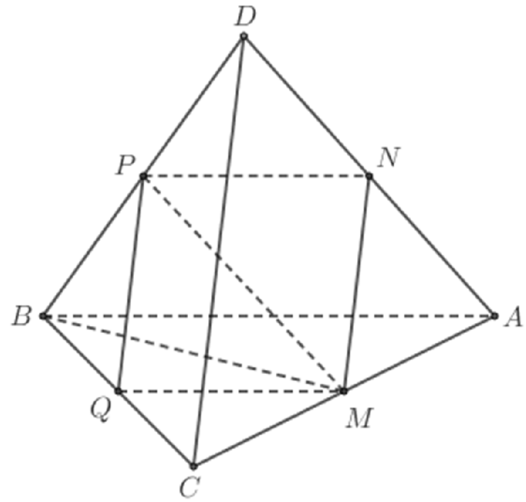
$\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{SAB'C'} + V_{SAC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC} + \frac{SD'}{SD}\frac{SC'}{SC}\right) = \frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Vậy $V_{SAB'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 44. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC. Thể tích khối chóp $AMNPQ$ là

A. $\frac{V}{6}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{4}$. **D.** $\frac{V\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

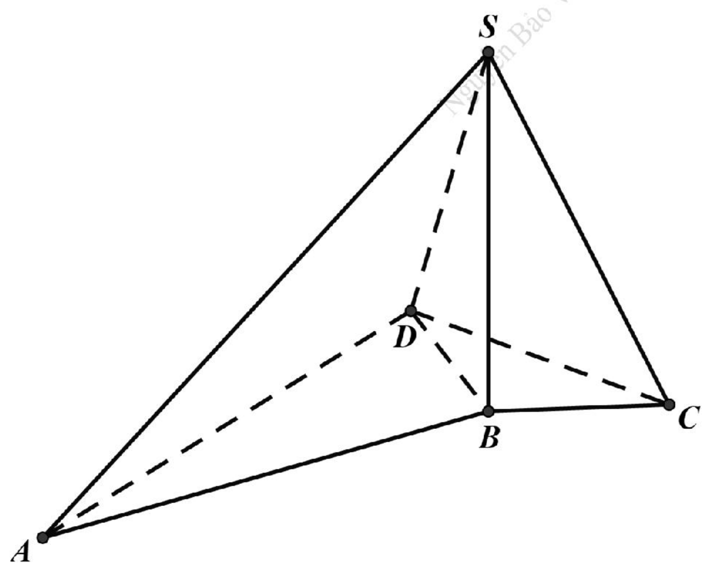


Ta có $V_{AMNPQ}=2V_{APMQ}$ (do $MNPQ$ là hình thoi), $AB\ //\ MQ\Rightarrow V_{APMQ}=V_{BPMQ}$

Mặt khác do P là trung điểm của BD nên $d\left(P,\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(D,\left(ABC\right)\right)$, đồng thời $S_{BQM}=\frac{1}{4}S_{ABC}\Rightarrow V_{BPMQ}=\frac{1}{3}d\left(P,\left(ABC\right)\right).S_{BQM}=\frac{1}{6}d\left(D,\left(ABC\right)\right).\frac{1}{4}S_{ABC}$

$=\frac{1}{8}.\frac{1}{3}d\left(D,\left(ABC\right)\right).S_{ABC}=\frac{V}{8}\Rightarrow V_{AMNPQ}=\frac{V}{4}$.

Câu 45. **(Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình đa diện như hình vẽ



Biết $SA=6$, $SB=3$, $SC=4$, $SD=2$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSD}=\widehat{DSA}=\widehat{BSD}=60^\circ$. Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $30\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{2}$.

Lời giải

Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA'=SB'=SC'=SD=2$. Ta có $A'B'=B'C'=C'D=DA'=2$. Khi đó hình chóp $S.A'B'D$ và hình chóp $S.CB'D$ là các hình chóp tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 2.

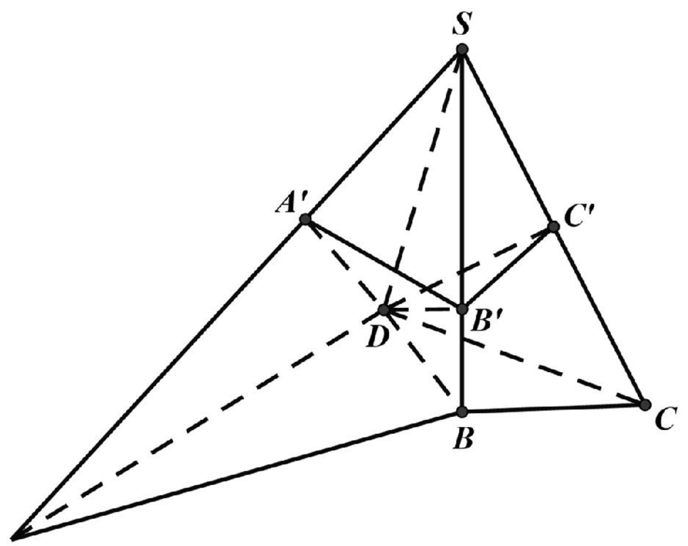
$V_{S.A'B'D}=V_{S.C'B'D}=\frac{2^3\sqrt{2}}{12}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{S.ABD}}{V_{S.A'B'D}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SD}{SD}=3.\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$, nên $V_{S.ABD}=\dfrac{9}{2}V_{S.A'B'D}=\dfrac{9}{2}.\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$.

$\dfrac{V_{S.CBD}}{V_{S.C'B'D}}=\dfrac{SC}{SC'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SD}{SD}=2.\dfrac{3}{2}=3$, nên $V_{S.CBD}=3V_{S.C'B'D}=3.\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$.

Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

$V=V_{S.ABD}+V_{S.CBD}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.



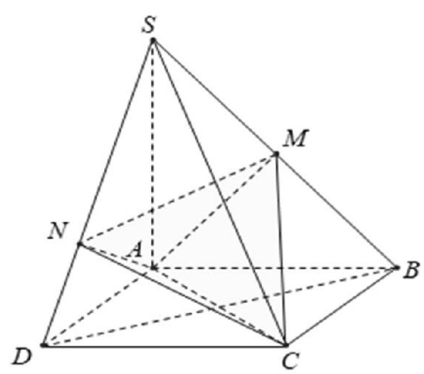
Câu 46. **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N thuộc cạnh SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

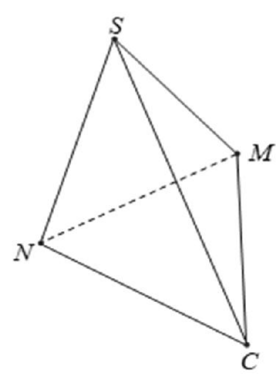
A. $V=\dfrac{1}{8}a^3$. **B.** $V=\dfrac{1}{6}a^3$. **C.** $V=\dfrac{1}{36}a^3$. **<u>D</u>.** $V=\dfrac{1}{12}a^3$.

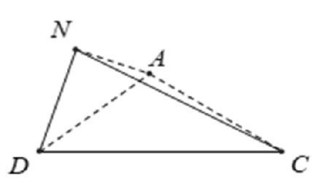
Lời giải

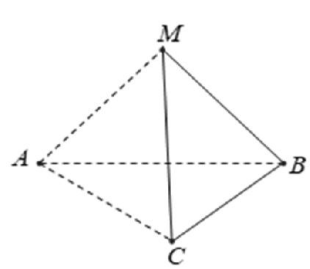
Cách 1: Phân rã hình:

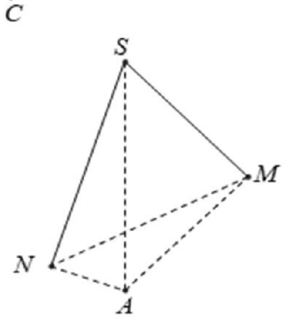
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\dfrac{1}{3}\cdot a^3=\dfrac{a^3}{3}$.











Thể tích tứ diện $SMNC$ là: $V_{SMNC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{S.BDC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{6} V$.

Thể tích tứ diện $NACD$ là: $V_{NADC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{6} V$.

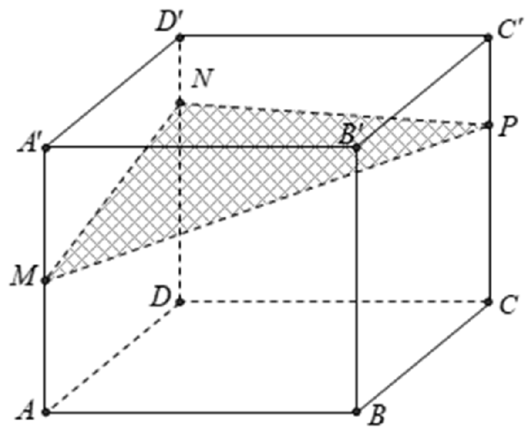
Thể tích tứ diện $MABC$ là: $V_{MABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{4} V$.

Thể tích tứ diện $SAMN$ là: $V_{SAMN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{S.BDC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{6} V$.

Mặt khác ta có: $V_{SMNC} + V_{NACD} + V_{MABC} + V_{SAMN} + V_{AMNC} = V_{S.ABCD}$

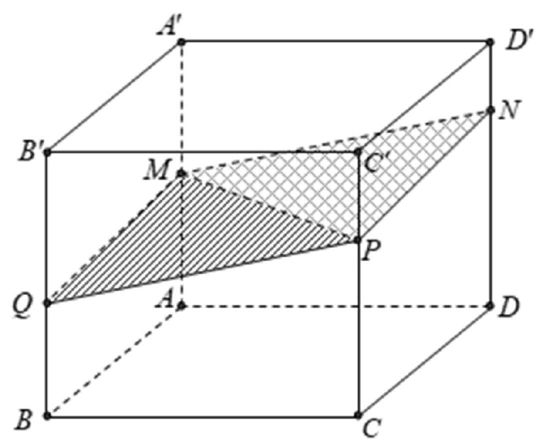
Suy ra $V_{AMNC} = V - \left(V_{SMNC} + V_{NACD} + V_{MABC} + V_{SAMN}\right) = V - \left(\frac{1}{6} V + \frac{1}{6} V + \frac{1}{4} V + \frac{1}{6} V\right) = \frac{1}{4} V = \frac{a^3}{12}$.

Câu 47. **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa - 2018)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{5275}{6}$. **B.** $\frac{8440}{9}$. **C.** $\frac{7385}{18}$. **D.** $\frac{5275}{12}$.

Lời giải



Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB'.

Giả sử $\frac{A'M}{AA'} = x$, $\frac{C'P}{CC'} = y$, $\frac{D'N}{DD'} = z$, $\frac{B'Q}{BB'} = t$. Khi đó $x + y = z + t$.

$\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'D'.ABD}} = \frac{x+z+t}{3} \Rightarrow \frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{x+z+t}{6}$

$\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}} = \frac{y+z+t}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{y+z+t}{6}$

$\Rightarrow \frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2}(x+y)$

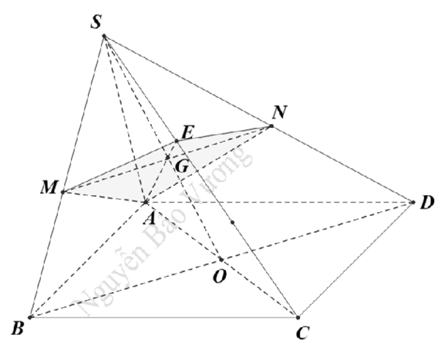
$\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'} = \frac{5}{12}.V_{ABCD.A'D'C'B'} = \frac{5275}{6}$.

Câu 48. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có thể tích bằng V. Gọi E là điểm trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AE và song song với BD, (α) cắt SB, SD lần lượt tại hai điểm M, N. Tính theo V thể tích của khối chóp $S.AMEN$.

A. $\frac{3V}{8}$. **B.** $\frac{V}{6}$. **C.** $\frac{3V}{16}$. **D.** $\frac{V}{9}$.

Lời giải



Gọi G là giao điểm của AE và SO.

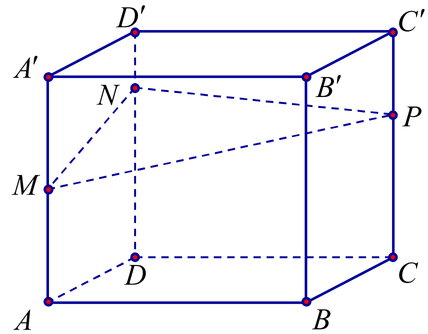
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có: $\frac{AC}{AO}.\frac{GO}{GS}.\frac{ES}{EC} = 1 \Rightarrow \frac{GO}{GS} = 1$

$\Rightarrow \frac{SG}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}$

Ta có: $\frac{V_{S.AMEN}}{V} = \frac{V_{S.AME}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AEN}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{2}.1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

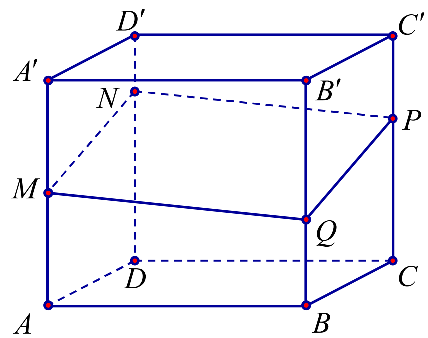
Vậy $V_{S.AMEN} = \frac{1}{6}V$.

Câu 49. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$; $DN = 3ND'$; $CP = 2PC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\dfrac{7385}{18}$. **B.** $\dfrac{5275}{12}$. **C.** $\dfrac{8440}{9}$. **D.** $\dfrac{5275}{6}$.

Lời giải



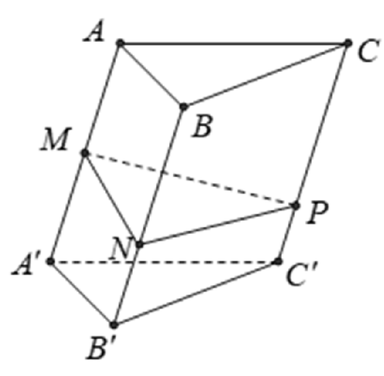
Ta có: $\dfrac{V_{MNPQ.A'B'C'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A'M}{A'A}+\dfrac{C'P}{C'C}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{12}$.

$V_{nho}=V_{MNPQ.A'B'C'D'}=\dfrac{5}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{5}{12}\cdot 2110=\dfrac{5275}{6}$.

Câu 50. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm AA'; N,P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BB', CC' sao cho $BN=2B'N$, $CP=3C'P$. Tính thể tích khối đa diện $ABC.MNP$.

A. $\dfrac{32288}{27}$. **B.** $\dfrac{40360}{27}$. **C.** $\dfrac{4036}{3}$. **D.** $\dfrac{23207}{18}$.

Lời giải



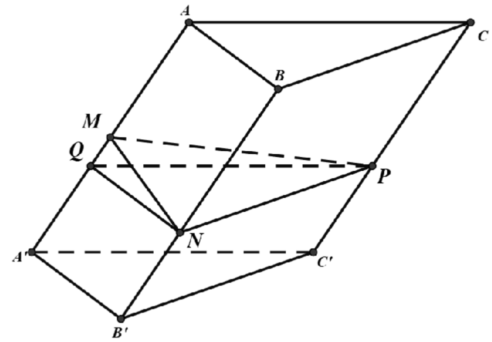
Ta có $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'}+\dfrac{BN}{BB'}+\dfrac{CP}{CC'}\right)=\dfrac{23}{36}$. Vậy $V_{ABC.MNP}=\dfrac{23207}{18}$.

Câu 51. **(Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $6a^3$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'}=\dfrac{CP}{CC'}=\dfrac{2}{3}$.

Tính thể tích V' của đa diện $ABC.MNP$

A. $V' = \frac{11}{27}a^3$. **B.** $V' = \frac{9}{16}a^3$. **C.** $V' = \frac{11}{3}a^3$. **D.** $V' = \frac{11}{18}a^3$.

Lời giải



Lấy điểm $Q \in AA'$ sao cho $PQ//AC$.

Ta có $MQ = AQ - AM = \frac{1}{6}AA'$.

Dễ thấy $V_{ABC.MNP} = \frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$, $V_{M.QNP} = \frac{1}{12}.V_{ABC.A'B'C'}$.

Vậy $V' = V_{ABC.MNP} - V_{M.QNP} = \frac{11}{18}V = \frac{11}{3}a^3$.