Chuyên đề 40 TIẾP TUYẾN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

I – Kiến thức cần nhớ

— Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ **tại** điểm $M(x_o; y_o)$ có dạng:

$\Delta: \boxed{y = k(x - x_o) + y_o}$ Với $k = y'(x_o)$ là hệ số góc tiếp tuyến.

— Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ ***tiếp xúc nhau*** $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm ***(nhớ: "hàm = hàm, đạo = đạo")***

II – Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_o)$.

— Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc k $\Rightarrow y'(x_o) = k$ (i)

— Giải (i) tìm được $x_o \longrightarrow y_o = f(x_o) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

Lưu ý. Hệ số góc $k = y'(x_o)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\dfrac{1}{a}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan\alpha$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left|\dfrac{k - a}{1 + k.a}\right| = \tan\alpha$

② **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua (kẻ từ) điểm $A(x_A; y_A)$**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y_o = f(x_o)$ và $k = y'(x_o)$ theo x_o.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_o; y_o)$ là $\Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

— Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_o) + y_o$ (i)

— Giải phương trình $(i) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ.

③ **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo x_o.

— Đề cho $\left[\begin{array}{ll} \Delta OAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với Ox một góc } 45^o \text{ và } O \notin \Delta & (i) \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA.OB = 2S & (ii) \end{array}\right.$

— Giải (i) hoặc $(ii) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ.

④ **Tìm những điểm trên đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ mà từ đó vẽ được $1, 2, 3, ..., n$ tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$**

— Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax + by + c = 0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x)=f'(x).(x-x_M)+y_M \qquad (iii)$

— Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = số nghiệm x của (iii).

⑤ **Tìm những điểm $M(x_M;y_M)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau**

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y=k(x-x_M)+y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (i) \\ f'(x)=k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x)=f'(x).(x-x_M)+y_M \qquad (iii)$

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow (iii)$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

— Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1$.

✍ **Lưu ý**.

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (iii): \text{có hai nghiệm phân biệt } x_1,x_2. \\ f(x_1).f(x_2)<0. \end{cases}$

— Đối với bài toán tìm điểm $M\in(C): y=f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o;y_o)$ và Δ là tiếp tuyến với $k=f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k=f'(x_o)=k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o).k_d=-1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o;y_o)$.

Câu 1. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3+3x^2-2$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là

A. $y=9x+7$. **B.** $y=-9x-7$. **C.** $y=-9x+7$. **D.** $y=9x-7$.

Lời giải

Xét hàm $y=f(x)=x^3+3x^2-2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f'(1)=9$.

Ta có $x_0=1 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow M_0(1;2)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(1;2)$ có dạng:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-2=9(x-1) \Leftrightarrow y=9x-7.$$

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=0$ là

A. $y=-2x+3$. **B.** $y=-2x-3$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=2x+3$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{-x+3}{x-1}$.

Ta có $x_0=0$ thì $y_0=-3$ nên $M(0;-3)$.

Mà $y'(0)=-2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0;-3)$ là $y=-2x-3$.

Câu 3. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị (C).Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là:

A. $k = 0$ **B.** $k = -2$ **C.** $k = 6$ **D.** $k = 9$

Lời giải

Chọn C

Ta có hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $x^3 + 3x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có $y' = 3x^2 + 3$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(1) = 6$.

Câu 4. **(GKI THPT Việt Đức Hà Nội -2019)** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;0)$ là

A. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ **B.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ **C.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ **D.** $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;0)$ là

$y = \frac{1}{2}(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Thánh Tông -2019)** Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

A. $m \neq 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \neq 1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ là

$$y' = 3x^2 - 2mx + 2m - 3$$

Vì hệ số góc dương với mọi x nên ta có

$$y' = 3x^2 - 2mx + 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 < 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 < 0 \Rightarrow m \in \varnothing.$$

Câu 6. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến Năm 2019)** Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{1-x}{x+1}$ tại điểm có tung độ bằng 1 song song với đường thẳng

A. $(d): y = 2x - 1$. **B.** $(d): y = -x + 1$. **C.** $(d): y = x - 1$. **D.** $(d): y = -2x + 2$.

Lời giải

$y' = \frac{-2}{(x+1)^2}$.

Gọi $A(x_0;1) \in (C)$ thì $\frac{1-x_0}{x_0+1} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm A có phương trình: $y = y'(0)(x-0) + y(0) = -2x + 1$.

Suy ra tiếp tuyến song song với $(d): y = -2x + 2$.

Câu 7. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y = 4x + 2\cos 2x$ có đồ thị là (C). Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$. **C.** $x = \pi + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Ta có $y' = 4 - 4\sin 2x$.

Khi đó, hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là nghiệm của phương trình:

$y' = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Câu 8. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

A. Có hệ số góc bằng -1. **B.** Song song với trục hoành.

C. Có hệ số góc dương. **D.** Song song với đường thẳng $x = 1$.

Lời giải

Gọi x_0 là hoành độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là: $y'(x_0) = 0$.

Vậy ta loại đáp án A, C, D và chọn đáp án **B.**

Câu 9. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3$ tại điểm cực tiểu của đồ thị cắt đồ thị ở A, B khác tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = -x^3 + 4x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

BBT:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Từ BBT suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(0;3)$.

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm cực tiểu là đường thẳng $y = 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và tiếp tuyến là:

$-\dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow A\left(-2\sqrt{2};3\right);\text{B}\left(2\sqrt{2};3\right)\Rightarrow AB=4\sqrt{2}$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x-m+1}$ tiếp xúc với parabol $y=x^2+7$.

A. $m=7$. **B.** $m=\sqrt{7}$. **C.** $m=4$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m\left(1-m\right)+2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\ m\neq 2\end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=m\left(\Delta\right)$.

$\left(\Delta\right)$ tiếp xúc với parabol $y=x^2+7\Leftrightarrow m=7$.

Câu 11. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng tất cả các giá trị các phần tử của S là

A. 1 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x\neq 1$; $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

Đường thẳng d qua A có hệ số góc k là $y=k(x-a)+1$

d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow\begin{cases}k(x-a)+1=\dfrac{-x+2}{x-1}\left(1\right)\\ k=\dfrac{-1}{(x-1)^2}\left(2\right)\end{cases}$ có nghiệm.

Thế $\left(2\right)$ vào $\left(1\right)$ ta có: $\dfrac{-1}{(x-1)^2}(x-a)+1=\dfrac{-x+2}{x-1}\Leftrightarrow -x+a+x^2-2x+1=-x^2+3x-2, x\neq 1$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x+a+3=0\left(3\right)$

Để đồ thị hàm số có một tiếp tuyến qua A thì hệ là số nghiệm của hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(3\right)$ có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x+a+3=0\,(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'=9-2a-6=0\\ 1-6+a+3\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta'=9-2a-6>0\\ 2-6+a+3=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{3}{2}\\ a=1\end{array}\right.$$

Cách 2: TXĐ : $D=\mathbb{R}\backslash\left\{1\right\}$; $y'=\dfrac{-1}{\left(x-1\right)^2}$

Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(a;1)$ là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{-x_0+2}{x_0-1}\,(d)$

Vì $A\in d$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d ta có :

$$1=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(a-x_0)+\frac{-x_0+2}{x_0-1}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_0^2-6x_0+3+a=0\,(1)\\x_0\neq 1\end{cases}$$

Để chỉ có một tiếp tuyến duy nhất đi qua A thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'=9-2a-6=0\\1-6+a+3\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta'=9-2a-6>0\\2-6+a+3=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{3}{2}\\a=1\end{array}\right.$$

Câu 12. **(Mã 102 2018)** Cho hàm số $y=\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$; $N(x_2;y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=3(x_1-x_2)$.

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng MN có dạng $\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}\Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng MN là $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=3$.

Vậy tiếp tuyến tại $A\left(x_0;\frac{1}{8}x_0^4-\frac{7}{4}x_0^2\right)$ có hệ số góc

$$k=3\Leftrightarrow f'(x_0)=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0^3-\frac{7}{2}x_0=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0^3-\frac{7}{2}x_0-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\\x_0=-2\end{array}\right..$$

+) Với $x_0=-1\Rightarrow A\left(-1;-\frac{13}{8}\right)\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=3x+\frac{11}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2=3x+\frac{11}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2-3x-\frac{11}{8}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow A\left(-1;-\frac{13}{8}\right)\text{ thỏa mãn đề bài.}$$

+) Với $x_0=3\Rightarrow A\left(3;-\frac{171}{8}\right)\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=3x-\frac{195}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2=3x-\frac{195}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2-3x+\frac{195}{8}=0\Leftrightarrow(x-3)^2(x^2+6x+13)=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow$ Tiếp tuyến cắt đồ thị tại một điểm $\Rightarrow A\left(3;-\frac{171}{8}\right)$ Không thỏa mãn.

+) Với $x_0=-2\Rightarrow A(-2;-5)\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y=3x+1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2=3x+1\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2-3x-1=0\Leftrightarrow(x+2)^2(x^2-4x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2+\sqrt{6}\\x=2-\sqrt{6}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$A(-2;-5)$ Thỏa mãn đề bài.

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13. **(Mã 101 2018)** Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$ khác A thỏa mãn $y_1-y_2=6(x_1-x_2)$

A. 0 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có $A\in(C)\Rightarrow A\left(t;\frac{1}{4}t^4-\frac{7}{2}t^2\right)$

$y'=x^3-7x\Rightarrow y'(t)=t^3-7t$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là

$$y=(t^3-7t)(x-t)+\frac{1}{4}t^4-\frac{7}{2}t^2\Leftrightarrow y=(t^3-7t)x-\frac{3}{4}t^4+\frac{7}{2}t^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2=(t^3-7t)x-\frac{3}{4}t^4+\frac{7}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-14x^2-4(t^3-7t)x+3t^4-14t^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x-t)^2(x^2+2tx+3t^2-14)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=t\\x^2+2tx+3t^2-14=0\ (1)\end{array}\right.$$

Tiếp tuyến cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$ khác A khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác t

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-(3t^2-14)>0\\t^2+2t^2+3t^2-14\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{7}<t<\sqrt{7}\\t\neq\pm\frac{\sqrt{21}}{3}\end{cases}\quad(2)$$

Khi đó

$$\begin{cases}x_1+x_2=-2t\\x_1x_2=3t^2-14\end{cases}\text{ và }\begin{cases}y_1=(t^3-7t)x_1-\frac{3}{4}t^4+\frac{7}{2}t^2\\y_2=(t^3-7t)x_2-\frac{3}{4}t^4+\frac{7}{2}t^2\end{cases}\Rightarrow y_1-y_2=(t^3-7t)(x_1-x_2)$$

Ta có $y_1-y_2=6(x_1-x_2)\Leftrightarrow(t^3-7t)(x_1-x_2)=6(x_1-x_2)$

$\Leftrightarrow t^3-7t-6=0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2-t-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \\ t^2-t-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (n) \\ t=-2\ (n)\ (\text{do } (2)) \\ t=3\quad (l) \end{array}\right.$

□Với $t=-1$ ta có $A\left(-1;-\dfrac{13}{4}\right)$

□Với $t=-2$ ta có $A(-2;-10)$

$\Rightarrow$ có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 14. **(Mã 103 -2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=8(x_1-x_2)$?

A. 0 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại A.

$y'=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{28}{3}x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{7} \\ x=0 \\ x=\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Do tiếp tuyến tại A cắt (C) tại M, $N \Rightarrow x_A \in \left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)$.

Ta có: $y_1-y_2=8(x_1-x_2) \Rightarrow \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=8 \Rightarrow k_d=8$. Suy ra $\dfrac{4}{3}x_A^3-\dfrac{28}{3}x_A=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A=3 \\ x_A=-1 \\ x_A=-2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x_A=-1 \\ x_A=-2 \end{array}\right.$. Vậy có 2 điểm A thỏa ycbt.

Cách 2:

Gọi $A\left(a;\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến tại A là $d: y=\left(\dfrac{4}{3}a^3-\dfrac{28}{3}a\right)(x-a)+\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{28}{3}x^2=\left(\dfrac{4}{3}a^3-\dfrac{28}{3}a\right)(x-a)+\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-14\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x^2+2ax+3a^2-14=0 (1) \end{array}\right.$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ 6a^2-14\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)\backslash\left\{\pm\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$.

Theo đề bài: $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x_1 - x_2) = 8(x_1 - x_2)$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -1 \\ a = -2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện: $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -2 \end{array}\right.$. Vậy có 2 điểm A thỏa đề bài.

Câu 15. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$, $(ab \neq -2)$. Biết rằng a, b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1;-2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng

A. -2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

Có $y' = \frac{-ab-2}{(ax-2)^2}$.

Do $A(1;-2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\frac{1+b}{a-2} = -2 \Leftrightarrow b = 3 - 2a$.

Do tiếp tuyến tại $A(1;-2)$ song song với $d: 3x + y - 4 = 0$ nên $y'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-ab-2}{(a-2)^2} = -3$

Thay $b = 3 - 2a$ ta được phương trình

$-a(3-2a) - 2 = -3(a-2)^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 15a + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}\right.$.

Với $a = 2 \Rightarrow b = -1$ (loại, do $ab \neq -2$)

Với $a = 1 \Rightarrow b = 1$. Phương trình tiếp tuyến tại $A(-1;2)$ là $y = -3(x+1) + 2$ song song với d.

Vậy $a = 1$, $b = 1$, suy ra $a - 3b = -2$.

Câu 16. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$ Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 10. **B.** 9. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện $m \neq 0$.

Phương trình tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là: $x + 2 = 0$ và $y - 1 = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$ là: (d): $y = \frac{3x}{m^2} + \frac{m^2 - 6m + 6}{m^2}$. Đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(-2; \frac{m-6}{m}\right)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(2m-2;1)$

theo giả thiết ta có $2m-2+\dfrac{m-6}{m}=-5\Rightarrow m=1;\ \mathrm{m}=-3$.

Vậy bằng tổng bình phương các phần tử của S bằng 10.

Câu 17. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}\ (1)$. Đường thẳng $d: y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB cân tại O. Khi đó $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(2x+3)^2}<0, \forall x\in D$.

Mặt khác, ΔOAB cân tại $O\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1.

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0;y_0)$, với $x_0\neq-\dfrac{3}{2}$.

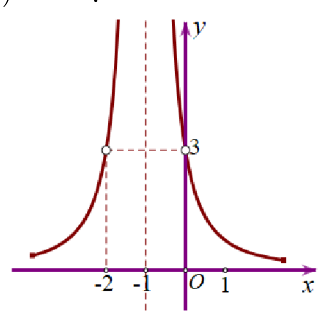
Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=-2\vee x_0=-1$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=-x$ loại vì $A\equiv B\equiv O$.

Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=-x-2$ thỏa mãn.

Vậy $d: y=ax+b$ *hay* $d: y=-x-2\Rightarrow a=-1;\ b=-2\Rightarrow a+b=-3$.

Câu 18. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},(a,b,c,d\in\mathbb{R};c\neq0,d\neq0)$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.



A. $x-3y+2=0$. **B.** $x+3y-2=0$. **C.** $x+3y+2=0$. **D.** $x-3y-2=0$.

Lời giải

(C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên với $x=0$ có $f(0)=-2$

$\Rightarrow \frac{b}{d}=-2 \Rightarrow b=-2d$ (1).

Có $y=f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ không xác định tại điểm duy nhất $x=-\frac{d}{c}$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ở trên ta thấy hàm số $y=f'(x)$ không xác định tại điểm duy nhất $x=-1$. Vậy $-\frac{d}{c}=-1 \Rightarrow c=d$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} c=d \\ b=-2d=-2c \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{ax-2c}{cx+c}$ và $f'(x)=\frac{ac+2c^2}{(cx+c)^2}=\frac{a+2c}{c(x+1)^2}$.

Ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục tung tại điểm $y=3$ nên $x=0 \Rightarrow f'(0)=3$

$\Rightarrow \frac{a+2c}{c}=3 \Rightarrow a=c \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ và $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$

Giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)=\frac{x-2}{x+1}$ với trục hoành ứng với $y=0 \Rightarrow x=2$ và $f'(2)=\frac{1}{3}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=\frac{1}{3}(x-2)+0 \Leftrightarrow x-3y-2=0$

Câu 19. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Gọi M,N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x^2-x+4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau. Hỏi khi M,N thay đổi, đường thẳng MN luôn đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. Điểm $N(-1;-5)$ **B.** Điểm $M(1;-5)$ **C.** Điểm $Q(1;5)$ **D.** Điểm $P(-1;5)$

Lời giải

Ta có $y'=-3x^2+6x-1$; $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'+\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$. Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $\Delta: y=\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$.

Do M,N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x^2-x+4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau, nên ta xét trường hợp M,N là hai điểm cực trị của đồ thị, khi đó phương trình MN chính là phương trình đường thẳng Δ.

Thử trực tiếp ta được điểm $Q(1;5)\in\Delta$, các điểm còn lại không thuộc Δ.

Câu 20. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x+1}$ đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận đứng $d_1: x+1=0$, tiệm cận ngang $d_2: y-1=0 \Rightarrow$ tâm đối xứng là $I(-1;1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(a;\frac{a+2}{a+1}\right)\in(C)$ là: $y=\frac{-1}{(a+1)^2}(x-a)+\frac{a+2}{a+1}$ (d).

Khi đó $d\left(I,d\right)=\dfrac{\left|\dfrac{-1}{\left(a+1\right)^2}\left(-1-a\right)+\dfrac{a+2}{a+1}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(a+1\right)^4}+1}}=\dfrac{\left|\dfrac{2}{a+1}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(a+1\right)^4}+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{\left(a+1\right)^2+\dfrac{1}{\left(a+1\right)^2}}}\le\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Câu 21. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

A. 5 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

$y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}=x-3m+\dfrac{3m^2+m}{x+m}\Rightarrow y'=1-\dfrac{3m^2+m}{\left(x+m\right)^2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox.

$\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=x^2-2mx+m=0\ \left(*\right)\ \left(x\ne -m\right)$.

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác $-m$ và $y'\left(x_1\right).y'\left(x_2\right)=-1$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m>0\\ f\left(-m\right)=3m^2+m\ne 0\\ y'\left(x_1\right).y'\left(x_2\right)=\left(1-\dfrac{3m^2+m}{\left(x_1+m\right)^2}\right)\left(1-\dfrac{3m^2+m}{\left(x_2+m\right)^2}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<0\end{array}\right.\\ m\ne 0\\ m\ne -\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=5.$$

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ (M,N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=5(x_1-x_2)$

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lờigiải

Chọn B

$y'=x^3-6x$

Gọi $A(x_0;\frac{1}{4}x_0^4-3x_0^2)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến tại **A.** Phương trình tiếp tuyến tại A là đường thẳng (d) có phương trình:

$y=(x_0^3-6x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{4}x_0^4-3x_0^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$(x_0^3-6x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{4}x_0^4-3x_0^2=\dfrac{1}{4}x^4-3x^2\Leftrightarrow(x-x_0)^2(x^2+2x_0x+3x_0^2-12)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-x_0=0 \\ x^2+2x_0x+3x_0-12=0 \ \ (2) \end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác A khi và chỉ chi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 \neq \pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6}<x_0<\sqrt{6} \end{array}\right. \qquad (3)$$

Khi đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ trong đó:

$$y_1=(x_0^3-6x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{4}x_0^4-3x_0^2 \ \ y_2=(x_0^3-6x_0)(x_2-x_0)+\frac{1}{4}x_0^4-3x_0^2$$

$$\Rightarrow y_1-y_2=(x_0^3-6x_0)(x_1-x_2)$$

Từ giả thiết ta suy ra:

$(x_0^3-6x_0)(x_1-x_2)=5(x_1-x_2) \Leftrightarrow x_0^3-6x_0=5$ (Vì $x_1 \neq x_2$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x_0=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (3) có hai giá trị x_0 thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$

Câu 23. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$ đi qua giao điểm của hai đường tiệm cận?

A. 1. **B.** Không có. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}=-2$ làm tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}=2$ làm tiệm cận ngang.

Vậy $I(-2;2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

TXĐ: $D=$

$$y'=\frac{7}{(x+2)^2}$$

Gọi tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)$ của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$ có dạng:

$\Delta: y=y'(x_0).(x-x_0)+y_0$ hay $\Delta: y=\dfrac{7}{(x_0+2)^2}.(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0+2}$

Vì Δ đi qua $I(-2;2) \Rightarrow 2=\dfrac{7}{(x_0+2)^2}.(-2-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0+2}$

$\Leftrightarrow 2=\dfrac{-7}{(x_0+2)^2}.(x_0+2)+\dfrac{2x_0-3}{x_0+2}\Leftrightarrow 2=\dfrac{-7}{(x_0+2)}+\dfrac{2x_0-3}{x_0+2}$

$\Leftrightarrow 2=\dfrac{2x_0-10}{x_0+2}\Leftrightarrow 4=-10$, phương trình vô nghiệm.

Vậy không tồn tại tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$ mà đi qua giao điểm của hai tiệm cận.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A,B sao cho ΔOAB cân tại O. Khi đó $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(2x+3)^2}<0, \forall x\in D$.

Mặt khác, ΔOAB cân tại $O\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1.

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0;y_0)$, với $x_0\neq-\dfrac{3}{2}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=-2\vee x_0=-1$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=-x$ loại vì $A\equiv B\equiv O$.

Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=-x-2$ thỏa mãn.

Vậy $d: y=ax+b$ hay $d: y=-x-2\Rightarrow a=-1;\ b=-2\Rightarrow a+b=-3$.

Câu 25. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2\,(C)$. Xét hai điểm $A(a;y_A)$ và $B(b;y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$. Phương trình của AB là

A. $x-y-2=0$. **B.** $x+y-8=0$. **C.** $x-3y+4=0$. **D.** $x-2y+1=0$.

Lời giải

Chọn D

$+\ y=f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2-3x$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(a;y_A)$ của đồ thị (C) là $f'(a)=\dfrac{3}{2}a^2-3a$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại $B(b;y_B)$ của đồ thị (C) là $f'(b)=\frac{3}{2}b^2-3b$

($a\neq b$ vì A và B phân biệt).

Mà tiếp tuyến tại A và B song song nên $f'(a)=f'(b)\Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2-3a=\frac{3}{2}b^2-3b$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(a^2-b^2)-3(a-b)=0\Leftrightarrow 3(a-b)\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\,(l)\\a+b=2\end{array}\right.\Leftrightarrow b=2-a$.

+ $A\left(a;\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2+2\right);B\left(b;\frac{1}{2}b^3-\frac{3}{2}b^2+2\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}\left(a-b;\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}b^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2\right)=\frac{1}{2}(a-b)\left(2;a^2+ab+b^2-3a-3b\right)$

$\Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n}\left(a^2+ab+b^2-3a-3b;-2\right)=\left(a^2-2a-2;-2\right)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $A\left(a;\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2+2\right)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ là

$\left(a^2-2a-2\right)(x-a)-2.\left[y-\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2+2\right)\right]=0$.

Mà đường thẳng AB đi qua $D(5;3)\Rightarrow \left(a^2-2a-2\right)(5-a)-2.\left[3-\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2+2\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow a^2-2a-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-1\\a=3\end{array}\right.$.

Với $a=-1$, phương trình đường thẳng AB là $x+1-2y=0\Leftrightarrow x-2y+1=0$.

Với $a=3$, phương trình đường thẳng AB là $x-3-2.(y-2)=0\Leftrightarrow x-2y+1=0$.

Cách trắc nghiệm

Dễ thấy AB đi qua điểm uốn $I(1;1)\Rightarrow$ đường thẳng AB trùng với đường thẳng ID.

$\Rightarrow \overrightarrow{ID}(4;2)=2(2;1)\Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của đường thẳng AB là $\vec{n}\,(1;-2)$.

Câu 26. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm *M* thay đổi thuộc đường thẳng $d:y=1-2x$ sao cho qua *M* có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là *A*, ***B***. Biết rằng đường thẳng *AB* luôn đi qua một điểm cố định là *H*. Tính độ dài đường thẳng *OH*.

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Lời giải

Chọn D

• $M\in d:y=1-2x\Rightarrow M(m;1-2m)$.

• Phương trình đường thẳng đi qua *M* có dạng: $y=kx+1-2m-km$.

• Điều kiện để qua *M* có hai tiếp tuyến với (C) là:

$$\begin{cases}\frac{x+3}{x-1}=kx+1-2m-km\\ k=-\frac{4}{(x-1)^2}\end{cases}$$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x-1}=-\dfrac{4x}{(x-1)^2}+1-2m+\dfrac{4m}{(x-1)^2}$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow mx^2+2(2-m)x-m-2=0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -1 \end{cases}$

• Khi đó, 2 nghiệm của phương trình (*) là hoành độ của hai điểm *A*, ***B***.

+) Cho $m=2$: $2x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow A\left(\sqrt{2};5+4\sqrt{2}\right), B\left(-\sqrt{2};5-4\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng *AB:* $y=4x+5$.

+) Cho $m=3$: $3x^2-2x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Rightarrow A'(-1;-1), B'\left(\dfrac{5}{3};7\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng *A'B':* $y=3x+2$.

• *H* là điểm cố định nên *H* là giao điểm của hai đường thẳng *AB* và *A'B'*:

$$\begin{cases} 4x_H-y_H=-5 \\ 3x_H-y_H=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=3 \\ y_H=7 \end{cases} \Rightarrow H(3;7)$$

$\Rightarrow OH=\sqrt{58}$

Câu 27. **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{5}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1$ là:

$x^3+3x^2+mx+1=1 \Leftrightarrow x^3+3x^2+mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+3x+m=0 \end{array}\right.$.

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2+3x+m=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^2-4.1.m>0 \\ 0^2+3.0+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m>-9 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{cases}$.

Với điều kiện trên, hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, ở đó x_B, x_C là nghiệm của phương trình $x^2+3x+m=0$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+6x+m$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại B, C lần lượt là

$k_B=f'\left(x_B\right)=3x_B^2+6x_B+m$; $k_C=f'\left(x_C\right)=3x_C^2+6x_C+m$.

Để hai tiếp tuyến này vuông góc thì $k_B.k_C=-1$.

Suy ra: $\left(3x_B^2+6x_B+m\right)\left(3x_C^2+6x_C+m\right)=-1$

$$\Leftrightarrow 9\left(x_Bx_C\right)^2+18x_B^2x_C+3mx_B^2+18x_Bx_C^2+36x_Bx_C+6mx_B+3mx_C^2+6mx_C+m^2=-1$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x_Bx_C\right)^2+18x_Bx_C\left(x_B+x_C\right)+3m\left(x_B^2+x_C^2\right)+36x_Bx_C+6m\left(x_B+x_C\right)+m^2+1=0.$$

Ta lại có theo Vi-et: $\begin{cases}x_B+x_C=-3\\x_Bx_C=m\end{cases}$. Từ đó $x_B^2+x_C^2=\left(x_B+x_C\right)^2-2x_Bx_C=9-2m$.

Suy ra: $9m^2+18m\left(-3\right)+3m\left(9-2m\right)+36m+6m\left(-3\right)+m^2+1=0 \Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{9+\sqrt{65}}{8}\\m=\dfrac{9-\sqrt{65}}{8}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $S=\dfrac{9+\sqrt{65}}{8}+\dfrac{9-\sqrt{65}}{8}=\dfrac{9}{4}$.

Câu 28. **(Chuyên Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$, $y=\dfrac{f\left(x\right)+3}{g\left(x\right)+1}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f\left(1\right)>-3$. **B.** $f\left(1\right)<-3$. **C.** $f\left(1\right)\le -\dfrac{11}{4}$. **D.** $f\left(1\right)\ge -\dfrac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{f'(x)\left[g\left(x\right)+1\right]-g'(x)\left[f\left(x\right)+3\right]}{\left[g\left(x\right)+1\right]^2}\Rightarrow y'(1)=\dfrac{f'(1)\left[g\left(1\right)+1\right]-g'(1)\left[f\left(1\right)+3\right]}{\left[g\left(1\right)+1\right]^2}$

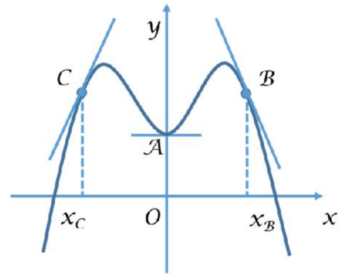
Vì $y'(1)=f'(1)=g'(1)\ne 0$ nên ta có

$$\frac{f'(1)\left[g(1)+1\right]-g'(1)\left[f(1)+3\right]}{\left[g(1)+1\right]^2}=f'(1)\Leftrightarrow \frac{g(1)+1-\left[f(1)+3\right]}{\left[g(1)+1\right]^2}=1$$

$$\Rightarrow g(1)+1-\left[f(1)+3\right]=\left[g(1)+1\right]^2\Rightarrow f(1)=-\left[g(1)\right]^2-g(1)-3=-\frac{11}{4}-\left[g(1)+\frac{1}{2}\right]^2$$

$$\Rightarrow f(1)\le -\frac{11}{4}$$

Câu 29. **(Sở Nam Định - 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, biết tại các điểm A,B,C đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây ***đúng***?



A. $f'(x_C) < f'(x_A) < f'(x_B)$. **B.** $f'(x_A) < f'(x_B) < f'(x_C)$.

C. $f'(x_A) < f'(x_C) < f'(x_B)$. **D.** $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$

Lời giải

Chọn D

Ý nghĩa hình học, đạo hàm cấp 1 của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 là hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; f(x_0))$. Quan sát hình vẽ ta thấy hệ số góc tiếp tuyến tại A bằng 0

Hệ số góc tiếp tuyến tại B dương *(tiếp tuyến đi lên từ trái qua phải)*;

Hệ số góc tiếp tuyến tại C âm *(tiếp tuyến đi xuống từ trái qua phải)*

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+3)x^2 + 3$ (C). Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn qua $A(-1;-1)$ kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) là $\Delta_1 : y = -1$ và Δ_2 tiếp xúc với (C) tại N và cắt (C) tại điểm P $(P \neq N)$ có hoành độ là $x = 3$.

A. Không tồn tại m. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 0$; $m = -2$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Đồ thị hàm số không thể có tiếp tuyến là đường thẳng song song với trục tung.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng Δ đi qua A.

Phương trình đường thẳng Δ: $y = k(x+1) - 1$

Để Δ tiếp xúc với (C) thì hệ sau phải có nghiệm:

$$(I): \begin{cases} x^3 - 3(m+3)x^2 + 3 = k(x+1) - 1 & (1) \\ 3x^2 - 6(m+3)x = k & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow x^3 - 3(m+3)x^2 + 4 = 3x^2(x+1) - 6(m+3)x(x+1)$

$\Leftrightarrow 2x^3 - (3m+6)x^2 - 6(m+3)x - 4 = 0 \quad (*)$

Một tiếp tuyến $\Delta_1 : y = -1$, suy ra: $k = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6(m+3)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2(m+3) \end{array}\right.$$

Với $x = 0$, $k = 0$ thay vào (1), không thỏa mãn.

Với $x = 2(m+3)$, $k = 0$ thay vào (1) ta được:

$8(m+3)^3 - 12(m+3)^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow (m+3)^3 = 1 \Leftrightarrow m = -2$

Thử lại, với $m = -2$ thay vào hệ (I), ta được:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3 = k(x+1) - 1 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases}$$

$\Rightarrow x^3-3x^2+3=(3x^2-6x)(x+1)-1 \Leftrightarrow x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Với $x=2 \Rightarrow k=0$, tiếp tuyến: $y=-1$.

Với $x=-1 \Rightarrow k=9$, tiếp tuyến: $y=9(x+1)-1=9x+8$.

Với $m=-2$ xét sự tương giao của đồ thị hàm số với đường thẳng $\Delta_2: y=9x+8$.

Xét phương trình:

$x^3-3x^2+3=9x+8 \Leftrightarrow x^3-3x^2-9x-5=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Tọa độ giao điểm còn lại có hoành độ bằng 5. Không thỏa mãn đề bài.

Câu 31. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1;m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C). Số phần tử của S là

A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5

Lời giải

Chọn B.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d qua A.

Ta có phương trình của d có dạng: $y=kx+m-k$.

d tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} kx+m-k=x^3+3x^2+1 \\ k=3x^2+6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2x^3+6x+1 \; (*) \\ k=3x^2+6x \end{cases}$

Để qua A có thể được đúng 3 tiếp tuyến tới (C) thì phương trình (*) phải có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \; y_{CT}<m<y_{CD}$ với $f(x)=-2x^3+6x+1$.

Ta có $f'(x)=-6x^2+6; f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

$f(1)=5=f_{CD}; f(-1)=-3=f_{CT}$.

Suy ra $-3<m<5$.

Vậy số phần tử của S là 7.