DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng. Xác định tiệm cận của đồ thị hàm số g khi biết bảng biến thiên hàm số f(x)

Câu 1. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}$?

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

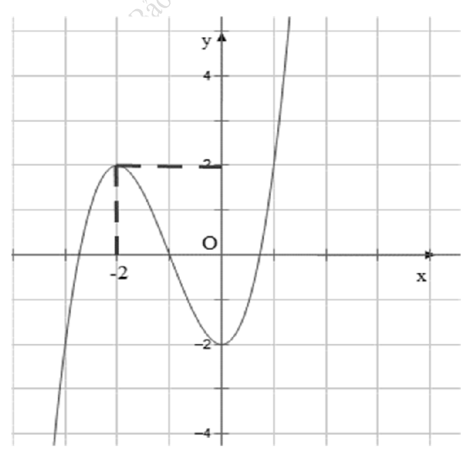
Lời giải

$f\left(x\right)=2\Leftrightarrow\dfrac{3x-1}{x-1}=2\Rightarrow 3x-1=2x-2\Leftrightarrow x=-1$.

Với $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}$ ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=+\infty$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f\left(x\right)-1}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $D=\mathbb{R}$

Do đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f\left(x\right)-1}$ chính là số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=1$.

Qua đồ thị ta có: Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f\left(x\right)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 3. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\left\{-1\right\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2 ↘ $-\infty$		||	$+\infty$ ↘ -2	

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-2\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x\right)}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$ và $y=-\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy: phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<-1<x_2$.

Khi đó: $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_1^-}f\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)>0\,khi\,x\to x_1^-\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_1^-}\dfrac{1}{f\left(x\right)}=+\infty$ và $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_2^-}f\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)>0\,khi\,x\to x_2^-\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_2^-}\dfrac{1}{f\left(x\right)}=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_1$ và $x=x_2$.

Do đó chọn **A.**

Câu 4. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x\right)+2}=1\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

TH 1: Nếu $m=-1$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x\right)+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x\right)+2}=1$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận.

TH 2: Nếu $m\neq-1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x\right)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$\Leftrightarrow m+2=0\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy khi $m\in\left\{-2;-1\right\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Câu 5. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m<0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m>0$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn B

$f(\tan x)=\cos^4 x\Leftrightarrow f(\tan x)=\dfrac{1}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}\Rightarrow f(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$

Hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}\Rightarrow g(x)=\dfrac{2019}{\dfrac{1}{(1+x^2)^2}-m}$

Hàm số $g(x)$ có hai tiện cận đứng khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1+x^2)^2=\dfrac{1}{m}>1\Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 6. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-1}$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $h\left(x\right)=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2f(x)-1} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2f(x)-1} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

*) Tiệm cận đứng:

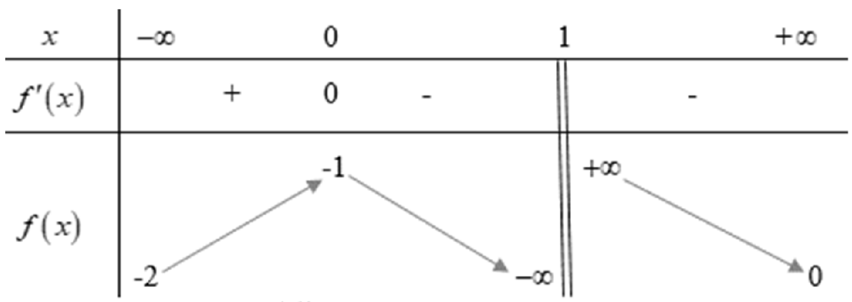
Xét phương trình: $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} h(x) = \lim\limits_{x\to b^-} h(x) = \lim\limits_{x\to c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là 4.

Câu 7. **(Bình Giang-Hải Dương -2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị $y = \dfrac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

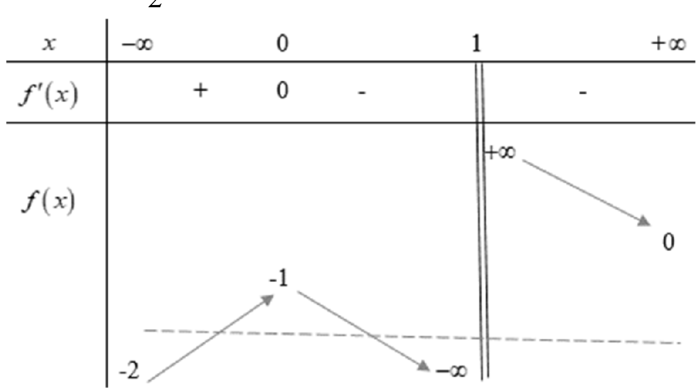
A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = g(x) = \dfrac{1}{2f(x)+3}$ có tử số là $1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

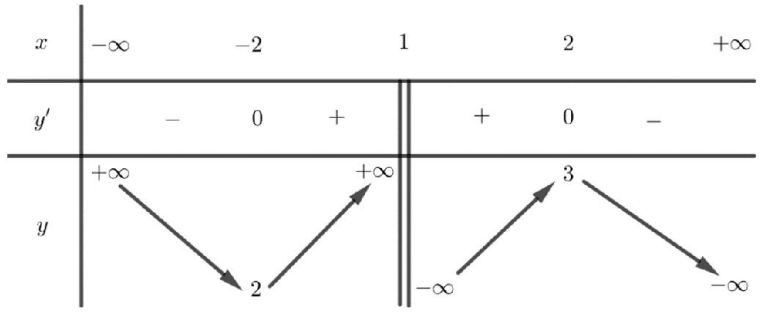
Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$ (1).



Từ bảng biến thiên có phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-\infty; 0), x_2 \in (0; 1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 8. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

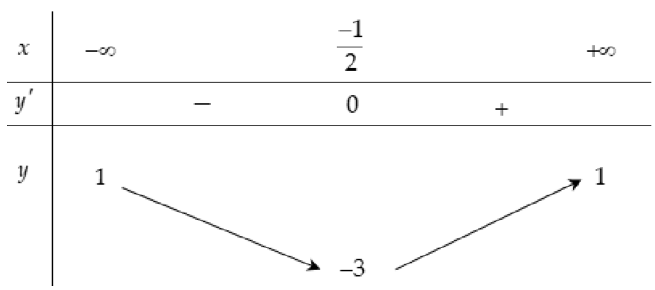
Lời giải

Ta có: $2f(x)-5=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{2}\,(1)$. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1,x_2,x_3,x_4\neq 1$ và giới hạn của hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ tại các điểm x_1,x_2,x_3,x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{1}{2f(x)-5}=0$ nên $x=1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 9. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình

$2f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Mà số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$.

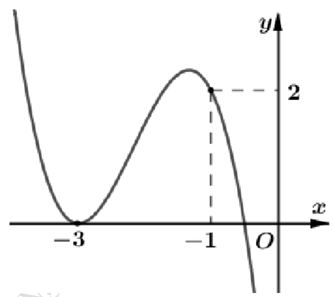
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2f\left(x\right)-1}=1\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-1}$ là 3.

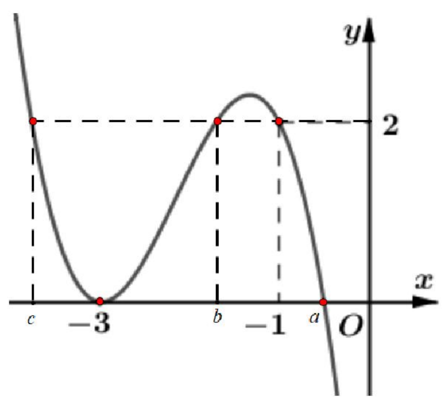
Câu 10. **(THPT Bạch Dằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải



$$y=\frac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]}=\frac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)\sqrt{x\left(x+1\right)}}{x.f\left(x\right).\left[f\left(x\right)-2\right]}$$

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2+x}:\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\x\le -1\end{array}\right.$.

Xét phương trình $x\left[f^2(x)-2f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$.

Với $x=0$ ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$. Suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x)=0 \Rightarrow x=-3$ (nghiệm bội 2) hoặc $x=a$ (loại vì $-1<a<0$).

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=-\infty$ nên $x=-3$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=b(-3<b<-1) \\ x=c(c<-3) \end{array}\right.$ (nghiệm bội 1). Ta có:

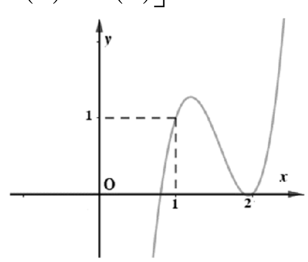
$\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0$ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0 \\ \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=0 \end{array}\right.$ nên $x=-1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$ (do $x\to b^+$ thì $f(x)\to 2^+$) nên $x=b$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$ (do $x\to c^+$ thì $f(x)\to 2^-$) nên $x=c$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Câu 11. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét 1: Với $x_0\ge 1$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)$ có kết quả là $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $x=x_0$ là tiệm cận đứng của của đồ thị hàm số $g(x)$.

Nhận xét 2: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $f(x)=a(x-x_1)(x-2)^2$.

Ta có $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1, 0<x_1<1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

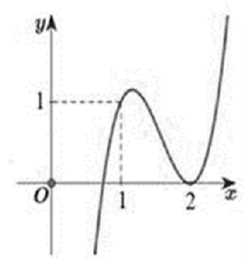
$f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_2, 1<x_2<2 \\ x=x_3, x_3>2 \end{array}\right.$ suy ra $f(x)-1=a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Khi đó ta có $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.f(x)\left[f(x)-1\right]}$.

$g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.a(x-x_1)(x-2)^2.a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}$.

$x=0, x=x_1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ không thỏa mãn điều kiện $x_0\geq 1$. Đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là: $x=2, x=x_2, x=x_3$.

Câu 12. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{(x+1)f(x)\left[f(x)-1\right]}$

Đkxđ: $\begin{cases} x\geq 1 \\ f(x)\neq 0 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=x_1 \end{array}\right.$ với $x=2$ là nghiệm kép, $x_1\in(0;1)$.

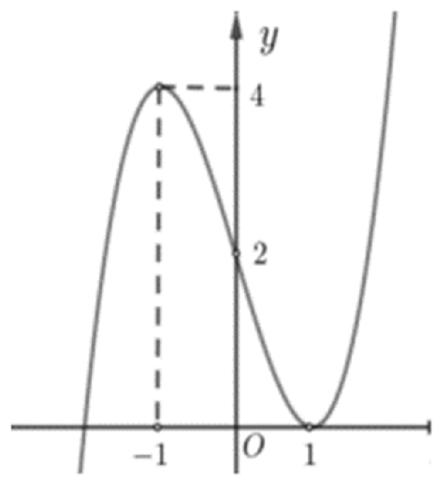
$f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$ với $x_2\in(1;2); x_3>2$.

Vậy $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)^2(x-x_1)(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}$

$=\dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$

Vậy đồ thị hàm số có 3 TCĐ $x=2; x=x_2; x=x_3$ (do $x\ge 1$ nên ta loại $x=-1; x=x_1$).

Câu 13. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thì như hình vẽ dưới đây, đặt $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}$. Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta xét phương trình $f^2(x)-2f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_1<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_2>1 \\ x=x_3<-1, x_3\ne x_1 \end{array}\right. \end{array}\right.$. Khi đó

$g(x)=\dfrac{x^2-x}{ax(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\dfrac{1}{a(x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$; $(a\ne 0)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tính tiệm cận ngang.

Ta có $x^3+x\xrightarrow{x\to+\infty}+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}=0$

$x^3+x\xrightarrow{x\to-\infty}-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}=0$

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Tính tiệm cận đứng.

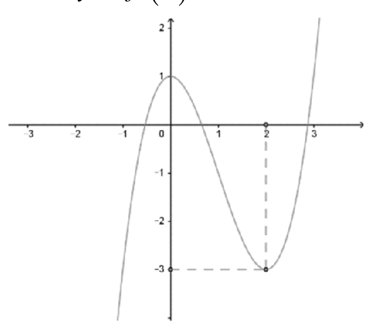
Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f\left(x^3+x\right)+3=0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f\left(x^3+x\right)+3=0\Leftrightarrow f\left(x^3+x\right)=-3\Leftrightarrow x^3+x=x_0\,;x_0\in\left(-\infty;1\right)$

Vì hàm số $y=x^3+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó $x^3+x=x_0\,;x_0\in\left(-\infty;1\right)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ có 1 tiệm cần đứng.

Câu 15. **(THPT Minh Khai 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{\left(x-3\right)\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x=0$, $x=2$. Do đó, ta có hệ

$$\begin{cases}y\left(0\right)=1\\y\left(2\right)=-3\\y'\left(0\right)=0\\y'\left(2\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=1\\c=0\\12a+4b=0\\8a+4b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=1\end{cases}.$$

Vậy $y=f\left(x\right)=x^3-3x^2+1$.

Khi đó $y=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{\left(x-3\right)\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]}=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{\left(x-3\right)\left(x^3-3x^2+1\right)\left(x^3-3x^2\right)}=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2\left(x-3\right)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}$.

Ta có $x^2\left(x-3\right)^2\left(x^3-3x^2+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=x_1\in\left(-1;0\right)\\x=x_2\in\left(0;1\right)\\x=x_3\in\left(2;3\right)\end{array}\right.$.

Hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2\left(x-3\right)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}$ có tập xác định $D=\left(-\infty;2\right]\backslash\left\{0;x_1;x_2\right\}$.

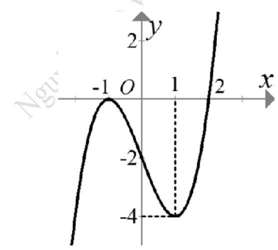
$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2\left(x-3\right)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\left(x-2\right)\sqrt{2-x}}{x^2\left(x-3\right)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(x-2\right)\sqrt{2-x}}{x\left(x-3\right)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}=-\infty$.

Suy ra $x=0$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2\left(x-3\right)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{x^2\left(x-3\right)^2\left(x^3-3x^2+1\right)}=+\infty$.

Suy ra $x=x_1$ và $x=x_2$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 16. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $\left(a\neq0\right)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{f\left(x\right)}}{\left(x+1\right)^2\left(x^2-4x+3\right)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

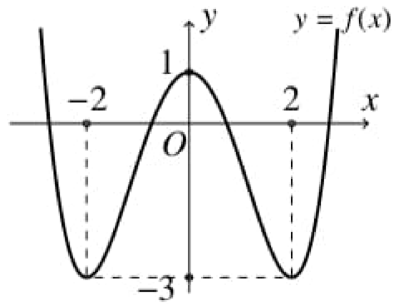
Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}f\left(x\right)\geq0\\x\neq-1\\x^2-4x+3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq2\\x\neq-1\\x\neq1\\x\neq3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq2\\x\neq3\end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to3^+}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{f\left(x\right)}}{\left(x+1\right)^2\left(x^2-4x+3\right)}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^-}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{f\left(x\right)}}{\left(x+1\right)^2\left(x^2-4x+3\right)}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{f\left(x\right)}}{\left(x+1\right)^2\left(x^2-4x+3\right)}$ có một đường tiệm cận đứng là: $x=3$.

Câu 17. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **<u>D</u>.** 4.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

$$y=\frac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}=\frac{x(x+2)^2(x-2)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$$

Ta có: $[f(x)]^2+2f(x)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m\,(m<-2) \\ x=0 \\ x=n\,(n>2) \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0; x=\pm 2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2) và đa thức $[f(x)]^2+2f(x)-3$ có bậc là 8 nên $y=\dfrac{x(x+2)^2(x-2)}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}$

Vậy hàm số có các tiệm cận đứng là $x=0; x=2; x=m; x=n$.