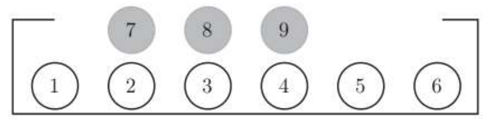
CHUYÊN ĐỀ TỔ HỢP – XÁC SUẤT

A. PHÉP ĐẾMok

I. QUY TẮC CỘNG

Ví dụ 1: Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?



🕮 QUY TẮC CỘNG.

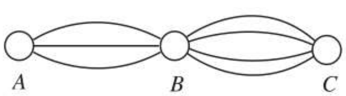
Một công việc được hoàn thành bởi **một trong hai hành động**. Nếu hành động này có *m* cách thực hiện, hành động kia có *n* cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có .... cách thực hiện.

☞ **CHÚ Ý.** Quy tắc cộng có thể **mở rộng cho nhiều hành động**.

Ví dụ 2: Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ôtô, 5 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến máy bay. Hỏi một ngày có bao nhiêu cách lựa chọn chuyến đi từ tỉnh A đến tỉnh B?

II. QUY TẮC NHÂN

Ví dụ 3: Bạn A đến nhà bạn B để cùng B đến nhà bạn C. Từ nhà A đến nhà B có 3 con đường, từ nhà B đến nhà C có 4 con đường. Hỏi bạn A có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà đến nhà bạn C?



🕮 QUY TẮC NHÂN.

Một công việc được hoàn thành bởi **hai hành động liên tiếp**. Nếu có *m* cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có *n* cách thực hiện hành động thứ hai thì có .... cách hoàn thành công việc.

☞ **CHÚ Ý.** Quy tắc nhân có thể **mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp**.

Ví dụ 4: Lớp 11A2 có 50 học sinh. Tập thể lớp muốn bầu ra một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự lớp như trên? Biết rằng mỗi bạn chỉ có thể kiêm nhiệm tối đa một chức vụ.

B. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

I. Hoán vị

Ví dụ 5: Cho 3 người (A, B, C) sắp vào hàng ghế gồm 3 chỗ, có bao nhiêu cách xếp.

a) Hãy giải theo cách liệt kê.

b) Hãy giải theo quy tắc nhân.

Tổng quát cho n người sắp vào n chỗ. Hỏi :

1. Điều kiện của n là gì?

2. Có bao nhiêu cách xếp?

Hoán vị (không lặp)

Một tập hợp gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số các hoán vị của n phần tử là: $P_n = n!$

II. Chỉnh hợp

Ví dụ 6: Cho 3 người (A, B, C) lựa chọn ra 2 người xếp vào hàng ghế hàng ngang 2 chỗ, có bao nhiêu cách xếp.

a) Hãy giải theo cách liệt kê.

b) Hãy giải theo quy tắc nhân.

c) So với ví dụ 1, đem cả 3 người sắp xếp vào 3 nghế thì số cách xếp giảm đi bao nhiêu lần?

Cho n người lựa ra k người xếp vào hàng ghế hàng ngang gồm k ghế.

1. Điều kiện của n và k là gì?

2. Có bao nhiêu cách xếp?

3. So với việc hoán vị n phần tử thì số cách giảm đi bao nhiêu lần?

Chỉnh hợp (không lặp)

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A (1 ≤ k ≤ n) theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Công thức trên cũng đúng cho trường hợp k = 0 hoặc k = n.
- Khi k = n thì $A_n^n = P_n = n!$

III. Tổ hợp

Ví dụ 7: Cho 3 người chọn ra 2 người bất kỳ

a) Nếu đem 2 người ấy xếp vào 2 ghế hàng ngang, có bao nhiêu cách (gồm 2 giai đoạn chọn và xếp)?

b) Nếu đem 2 người ấy không xếp vào 2 ghế hàng ngang thì số cách xếp so với câu a thì hơn kém bao nhiêu lần. (bỏ đi giai đoạn xếp, chỉ còn giai đoạn chọn)

c) Vậy số cách chọn 2 người từ 3 người là bao nhiêu (chỉ có giai đoạn chọn mà không có giai đoạn xếp)?

Cho n người chọn ra k người bất kỳ.

1. Điều kiện của n và k là gì?

2. Nếu đem k người ấy xếp vào k ghế hàng ngang, có bao nhiêu cách (gồm 2 giai đoạn chọn và xếp)?

3. Nếu đem k người ấy không xếp vào k ghế hàng ngang thì số cách xếp so với câu a thì ít hơn bao nhiêu lần. (bỏ đi giai đoạn xếp, chỉ còn giai đoạn chọn)

c) Vậy số cách chọn k người từ n người là bao nhiêu?

Tổ hợp (không lặp)

Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k ($1 \le k \le n$) phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

• Qui ước: $C_n^0 = 1$

Tính chất:

$$C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k; \quad C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

Quy tắc	Điều kiện	Công thức	Đặc trưng
Hoán vị			Số người = số ghế, có thứ tự, có giai thừa
Chỉnh hợp			Số người >= số ghế, có thứ tự, có giai thừa
Tổ hợp			Số người >= số ghế, không có thứ tự nên thêm 1 giai thừa dưới mẫu.

C. ĐẠI SỐ TỔ HỢP NÂNG CAO.

I. Hoán vị lặp

Ví dụ 8: Xếp 3 chữ cái A, B, C vào 3 vị trí.

a) Có bao nhiêu cách, hãy liệt kê tất cả các cách có thể.

b) Thay chữ C bằng chữ A, có bao nhiêu cách sẽ trở nên trùng nhau?

Mở rộng cho n phần tử xếp vào n vị trí.

a) Có bao nhiêu cách xếp nếu các phần tử này đều khác nhau.

b) Số cách xếp giảm đi bao nhiêu lần nếu trong n phần tử này có n_1 phần tử a1 và $(n-n_1)$ phần tử còn lại khác nhau.

c) Có bao nhiêu cách xếp nếu có n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2, …, n_k phần tử a_k $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$

Cho k phần tử khác nhau: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử $a_2, \ldots, n_k$ phần tử a_k $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ của k phần tử.

Số các hoán vị lặp cấp n kiểu $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ của k phần tử là:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

II. Hoán vị vòng quanh

Ví dụ 9: Cho 3 người (A, B, C) xếp vào một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp

a) Hãy giải theo cách liệt kê.

b) Hãy giải theo kiến thức em đã học (phép đếm, hoán vị,…)

Cho n người xếp vào một bàn tròn n vị trí, hỏi có bao nhiêu cách xếp?

Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.

Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là: $Q_n = (n-1)!$

Hoán vị (không lặp)	***Hoán vị lặp***	***Hoán vị vòng quanh***
Xếp hàng ngang	*Xếp hàng ngang*	*Xếp vòng tròn*
Các phần tử khác nhau	n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử $a_2, \ldots, n_k$ phần tử a_k $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$	*Các phần tử khác nhau*

III. Chỉnh hợp lặp:

Ví dụ 10: Cho 3 chữ cái (A, B, C) xếp vào một dãy gồm 5 vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

Cho n phần tử xếp vào một dãy gồm k vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

Cho tập A gồm n phần tử. Một dãy gồm k phần tử của A, trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập A.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{A_n^k} = n^k$

Chỉnh hợp không lặp	Chỉnh hợp lặp
0≤k≤n	k có thể lớn hơn hoặc nhỏ hơn n hoặc bằng
Các phần tử khác nhau	Các phần tử có thể giống nhau.

IV. Tổ hợp lặp

Ví dụ 11: Cho 3 viên kẹo giống nhau, chia cho 2 người. Hỏi có bao nhiêu cách chia:

a) có thể có người không có kẹo?

b) ai cũng có kẹo?

Cho n cái kẹo giống nhau chia cho k người hỏi có bao nhiêu cách chia

a) có thể có người không có kẹo?

b) ai cũng có kẹo?

Cho tập A = $\{a_1; a_2; ...; a_n\}$ và số tự nhiên k bất kì. Một tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một hợp gồm k phần tử, trong đó mỗi phần tử là một trong n phần tử của A.

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{m-1}$.

V. **Phương án 2:** Đếm gián tiếp (đếm phần bù)

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất T hay không) ta được a phương án.

- Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa tính chất T ta được b phương án.

Khi đó, số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: $a-b$.

NHỊ THỨC NEWTON

V. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Nhị thức Newton. Cho a, b là các số thực và $n\in\mathbb{N}^*$. Ta có:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k = \text{..}$$

Hệ quả.

- Với $a=b=1$, ta có ....
- Với $a=1;\ b=-1$, ta có ....

Ví dụ 1: Khai triển các nhị thức sau:

- $(x+1)^4=$.
- $(x+2y)^5=$.
- $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6=$
- $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^6=$

☞ **CHÚ Ý.** Trong khai triển $(a+b)^n$:

☐ Có .... số hạng.

☐ Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì

....

☐ Số hạng tổng quát dạng: ....

☐ Số mũ của a ...., số mũ của b .... nhưng tổng số mũ a và b bằng ....

Bài tập

Câu 1. **(HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019)** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$, $x\neq 0$.

Câu 2. **(HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019)** Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển:

$\left(\dfrac{2}{x}-3x^2\right)^{10}$ $(x\neq 0)$.

Câu 3. **(HSG12 Quảng Ngãi 2018-2019)** Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7\left(n+3\right)$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Niu-tơn

$P=\left(2x^2-\dfrac{3}{x^3}\right)^n,\ \left(x\neq 0\right)$.

Câu 4. **(HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019)** Chứng minh rằng C_{3n}^{n} chia hết cho 3 với mọi n nguyên dương.

Câu 5. **(HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019)** Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển Newton của biểu thức $\left(2+3x\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức

$C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+\ldots+C_{2n+1}^{n}=2^{20}-1$.

Câu 6. **(HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019)** Cho khai triển nhị thức Newton $(x^2-x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$, (n $\in N^*$) . Tìm hệ số a_{10} .Biết rằng $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=21$

Câu 7. **(HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019)** Cho nhị thức $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ trong đó tổng 3 hệ số đầu tiên của khai triển của nhị thức đó là 36. Khi đó tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức.

Câu 8. **(HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019)** Cho $T\left(x\right)=\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^{20}+\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{22}\left(x\neq 0\right)$. Sau khi khai triển và rút gọn $T\left(x\right)$ có bao nhiêu số hạng?

Câu 9. **(HSG11 Hà Tĩnh 2018-2019)** Cho n là số nguyên dương thỏa mãn C_n^1; C_n^2; C_n^3 lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ 5 và thứ 15 của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$\left(C_{2n+1}^{0}\right)^2+\left(C_{2n+1}^{2}\right)^2+\left(C_{2n+1}^{4}\right)^2+\ldots.+\left(C_{2n+1}^{2n}\right)^2=\dfrac{1}{2}C_{46}^{23}$

Câu 10. **(HSG11 THuận Thành 2018-2019)** Tính tổng

$S=2\cdot 1C_n^2+3\cdot 2C_n^3+4\cdot 3C_n^4+\cdots+n(n-1)C_n^n$.

Câu 11. **(HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019)** Cho k là số tự nhiên thỏa mãn: $5\leq k\leq 2014$.

Chứng minh rằng:

$C_5^0.C_{2014}^{k}+C_5^1.C_{2014}^{k-1}+...+C_5^5.C_{2014}^{k-5}=C_{2019}^{k}$

Câu 12. **(HSG12 THPT Thuận Thành năm 2018-2019)** Tính tổng

$S=2.1C_n^2+3.2C_n^3+4.3C_n^4+...+n(n-1)C_n^n$.

Câu 13. **(HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019)** Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(1+x+x^2\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+...+C_{2n}^{2n}=512$.

Câu 14. **(HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019)** Cho n là một số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3}=26n$?.

Câu 15. **(HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019)** Cho khai triển

$\left(3x^2-2\right)^3\left(2x-3\right)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{14}x^{14}$. Tìm a_{11}

Câu 16. **(HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019)** Cho khai triển

$(1+x+x^2)^{2019}=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_{4038}x^{4038}$.

Tính $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{4038}$.

Câu 17. **(HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019)** Cho khai triển $(3x+2)^{15}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{15}x^{15}$. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển.

Câu 18. Cho $(3-2x)^{100}=a_{100}x^{100}+a_{99}x^{99}+\cdots+a_1x+a_0$.

Tìm số lớn nhất trong các hệ số $a_0,a_1,\ldots,a_{100}$.

Câu 19. **(HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019)** Tìm số tự nhiên n thỏa mãn:

$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=(n-304).2^n$

Câu 20. **(HSG12 tỉnh Lào Cai năm 2018-2019)** Tính tổng

$S=\frac{1}{2019}\left(C_{2019}^1\right)^2+\frac{2}{2018}\left(C_{2019}^2\right)^2+...+\frac{2018}{2}\left(C_{2019}^{2018}\right)^2+\frac{2019}{1}\left(C_{2019}^{2019}\right)^2$.

C. Xác suất

1. Biến cố

- Không gian mẫu *Ω:* là tập các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.
- Biến cố *A:* là tập các kết quả của phép thử làm xảy ra *A*. $A\subset\Omega$.
- Biến cố không: $\varnothing$ • Biến cố chắc chắn: Ω
- Biến cố đối của *A:* $\overline{A}=\Omega\setminus A$
- Hợp hai biến cố: $A\cup B$
- Giao hai biến cố: $A\cap B$ (hoặc *A.B*)
- Hai biến cố xung khắc: $A\cap B=\varnothing$
- Hai biến cố độc lập: nếu việc xảy ra biến cố này không ảnh hưởng đến việc xảy ra biến cố kia.

2. Xác suất

- Xác suất của biến cố: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$
- $0\le P(A)\le 1;\ P(\Omega)=1;\ P(\varnothing)=0$
- Quy tắc cộng: Nếu $A\cap B=\varnothing$ thì $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Mở rộng: *A, B* bất kì: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A.B)$

- $P(\overline{A})=1-P(A)$
- Quy tắc nhân: Nếu *A, B* độc lập thì $P(A.\ B)=P(A).\ P(B)$

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU VÀ BIẾN CỐ

Phương pháp: Để xác định không gian mẫu và biến cố ta thường sử dụng các cách sau

Cách 1: Liệt kê các phần tử của không gian mẫu và biến cố rồi chúng ta đếm.

Cách 2: Sử dụng các quy tắc đếm để xác định số phần tử của không gian mẫu và biến cố.

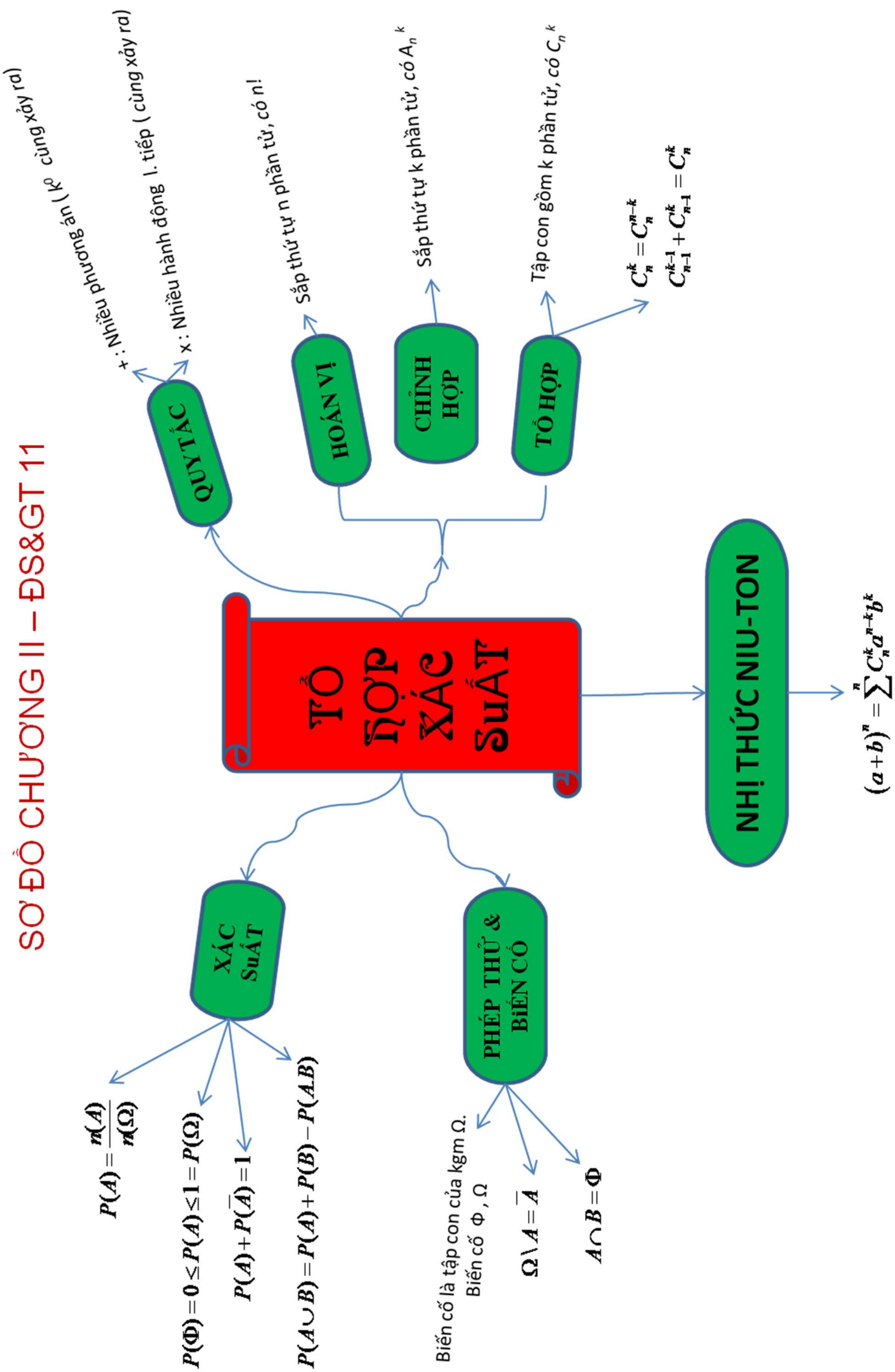
DẠNG 2: TÌM XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Phương pháp:

- Tính xác suất theo thống kê ta sử dụng công thức:

$P(A)=\frac{\text{So lan xuat hien cua bien co A}}{N}$.

- Tính xác suất của biến cố theo định nghĩa cổ điển ta sử dụng công thức: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.



CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT THI HỌC SINH GIỎI

Dạng 1. Bài toán chia hết

Bài 1. Từ các chữ số 1, 3, 4, 8 lập các số tự nhiên có sáu chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Trong các số được tạo thành nói trên, chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 4? **ĐS:** P = 1/5

Bài 2. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A. Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 3. **ĐS:** P = 11/27

Bài 3. Gọi S là tập hợp các ước số nguyên dương của số 43200. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử thuộc S. Tính xác suất lấy được hai phần tử là hai số không chia hết cho 5. **ĐS:** P = 9/23

Bài 4. Từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau đôi một sao cho các số này là số lẻ và chữ số đứng ở vị trí thứ 3 luôn chia hết cho 6? **ĐS:** 640.

Bài 5. Trong tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số ta chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1. **ĐS:** P = 43/3000

Bài 6. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A, tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1. **ĐS:** $P \approx 0{,}015$.

Bài 7. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số không chia hết cho 3. **ĐS:** P = 0,6.

Bài 8. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số chia hết cho 1111. **ĐS:** P = 1/105

Bài 9. Một hộp đựng 20 viên bi khác nhau được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ba viên bi từ hộp trên rồi cộng số ghi trên đó lại. Hỏi có bao nhiêu cách lấy để kết quả thu được là một số chia hết cho 3. **ĐS:** 384.

Bài 10. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập S. Tính xác suất để chọn được một số thuộc S và số đó chia hết cho 9. **ĐS:** P = 1/9

Dạng 2. Số lần xuất hiện của chữ số

Bài 1 (Thi HSG Quảng Nam lớp 11, 2016- 2017). Từ 10 chữ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên thỏa điều kiện là số có 8 chữ số, trong đó có 2 chữ số lẻ khác nhau và 3 chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần. **ĐS:** 428400

Bài 2 (Thi HSG Thanh Hóa lớp 12, 2013-2014). Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau. **ĐS:** 12600/5904

Bài 3 (Thi HSG Bắc Giang lớp 11, 2012-2013). Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó có một chữ số xuất hiện hai lần, các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần? **ĐS:**3888.

Bài 4 (Thi HSG Nam Định lớp 11, 2012-2013). Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập hợp $A = \{1; 2; 3; \ldots; 20\}$. Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số tự nhiên liên tiếp.**ĐS:** 68/95

Bài 5 (Thi HSG Thanh Hóa lớp 12, 2008-2009). Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau mà trong đó có đúng một chữ số lẻ? **ĐS:** 3000.

Bài 6 (Thi HSG Nam Định lớp 12, 2013-2014). Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó luôn có mặt chữ số 6. **ĐS:** 1560.

Bài 8 (Thi HSG Diễn Châu-Nghệ An lớp 11, 2016-2017). Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn một số ngẫu nhiên từ X tính xác suất để số đó có đúng ba chữ số lẻ. **ĐS:** 10/21

Bài 9 (Thi HSG Đà Nẵng lớp 11, 2010- 2011). Từ tập hợp các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy chỉ có mặt ba chữ số khác nhau. **ĐS:** 12600

Dạng 3. Liên quan đến vị trí

Bài 1 (Thi HSG Vĩnh Phúc lớp 12, 2017-2018). Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau trong đó hai số đứng kề nhau không là số lẻ? **ĐS:** 37800.

Bài 2 (Thi HSG Thái Nguyên lớp 12, 2011-2012). Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được thành lập từ các số đã cho, trong đó hai chữ số 0 và 1 không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 240.

Bài 3 (Thi HSG Vĩnh Long lớp 11, 2015- 2016). Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số sao cho trong mỗi số đó có đúng ba chữ số 1, các chữ số còn lại đôi một khác nhau và hai chữ số chẵn không đứng cạnh nhau. **ĐS:** 2400.

Bài 4 (Thi HSG Lào Cai lớp 11, 2017-2018). Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số khác nhau sao cho ba số lẻ không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 2736

Bài 5 (Thi HSG Đông Anh-Hà Nội lớp 11, 2017-2018). Từ hai số 1 và 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số sao cho số tạo thành không có số nào có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau?**ĐS:** 143.

Bài 6. Từ các chữ số 1 và 4 thiết lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số sao cho số tạo thành không có số nào có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau? **ĐS:** 143

Bài 7. Trong hộp chứa các thẻ được ghi dãy số gồm sáu chữ số khác nhau. Tính xác suất để rút được một thẻ có ghi các chữ số 1, 2, 3, 4, trong đó các chữ số 1, 2 không đứng cạnh nhau và các chữ số 3, 4 không đứng cạnh nhau. **ĐS:** 242/315

Bài 8. Gọi E là tập các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập E. Tính xác suất để số được chọn là số chẵn, có đúng hai chữ số 0 và không đứng cạnh nhau, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần. **ĐS:** 1/45

Dạng 4. Liên quan đến lớn hơn nhỏ hơn

Bài 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $a \le b \le c < d$? **ĐS:** 330

Bài 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không lớn hơn 2503. **ĐS:** 202

Bài 3. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 lập các số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được một số lớn hơn 2012. **ĐS:** 7/10

Bài 4. Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau và có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$. **ĐS:** 37/34020

Bài 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập ra tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên hai số trong các số được lập. Tính xác suất để trong hai số được chọn có ít nhất một số lớn hơn 2015. **ĐS:** 14299/14950

Bài 6. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu cách chọn một bộ 3 số phân biệt của A (không tính thứ tự) để hiệu của 2 số bất kỳ trong 3 số đó có giá trị tuyệt đối không nhỏ hơn 2. **ĐS:** 56

Bài 7. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \le a \le b \le c \le d \le 9$. **ĐS:** $0,055$

Dạng 5. Các bài toán đếm số phương án, tính xác suất liên quan đến người và đồ vật

Bài 1. Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh (trong đó có hai học sinh A và B) mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh A và B nhận được phần thưởng giống nhau.

ĐS: 5/18

Bài 2. Một trường học có 25 giáo viên nam và 15 giáo viên nữ trong đó có đúng hai cặp vợ chồng. Nhà trường chọn ngẫu nhiên 5 người trong số 40 giáo viên trên đi công tác. Tính xác suất sao cho trong 5 người được chọn có đúng một cặp vợ chồng. ĐS: $\dfrac{2\left(C_{38}^{3}-C_{36}^{1}\right)}{C_{40}^{5}}$

Bài 3. Chi đoàn lớp 12A gồm 40 đoàn viên, trong đó có một người tên là An và một người tên là Bình. Ban chấp hành chi đoàn bao gồm một bí thư, một phó bí thư và n ủy viên được bầu từ 40 đoàn viên của chi đoàn.
a) Có thể lập được bao nhiêu ban chấp hành chi đoàn 12A với số ủy viên $n = 7$, còn An và Bình mỗi người giữ một chức vụ là bí thư hoặc phó bí thư?
b) Một ban chấp hành của chi đoàn 12A được gọi là đạt chuẩn A0 nếu An và Bình đều là ủy viên ban chấp hành, đồng thời không giữ chức vụ bí thư và phó bí thư. Xác định giá trị n, biết xác suất lấy ngẫu nhiên được một ban chấp hành đạt chuẩn A0 là 1/78. ĐS: $2.A_{38}^{7}, n=5$

Bài 4. Một đề thi có 10 câu trắc nghiệm, mỗi câu có bốn phương án trả lời, các phương án trả lời đôi một khác nhau, trong đó có một phương án đúng, ba phương án sai, trả lời đúng mỗi câu được 1,0 điểm, trả lời sai không được điểm và không bị trừ điểm. Một thí sinh là cả 10 câu, mỗi câu chọn một phương án ngẫu nhiên. Tính xác suất để thí sinh đó đạt từ 7,0 điểm trở lên. ĐS $\dfrac{3676}{4^{10}}$

Bài 5. Một học sinh tham dự kỳ thi môn Toán. Học sinh đó phải làm một đề trắc nghiệm khách quan gồm 10 cầu hỏi. Mỗi câu có 4 đáp án khác nhau, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Học sinh sẽ được chấm đỗ nếu trả lời đúng ít nhất 6 câu. Vì học sinh đó không học bài nên chỉ chọn ngẫu nhiên đáp án trong cả 10 câu hỏi. Tính xác suất để học sinh thi đỗ. ĐS: $\dfrac{20686}{4^{10}}$

Bài 6. Một công ty nhận được 30 hồ sơ của 30 người muốn xin việc vào công ty, trong đó có 15 người biết tiếng Anh, 8 người biết tiếng Pháp và 14 người không biết tiếng Anh và tiếng Pháp. Công ty cần tuyển 5 người biết ít nhất tiếng Anh hoặc tiếng Pháp. Tính xác suất để trong 5 người được chọn có 3 người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp. **ĐS:** 15/52

Bài 7. Thầy X có 15 quyển sách gồm 4 cuốn sách Văn, 5 cuốn sách Sử và 6 cuốn sách Địa. Các cuốn sách đôi một khác nhau. Thầy X chọn ngẫu nhiên 8 cuốn sách để làm phần thưởng cho một học sinh. Tính xác suất để số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn. **ĐS:** 5949/6435

Bài 8. Một đoàn tàu có 4 toa chở khách với mỗi toa còn ít nhất 5 chỗ trống. Trên sân ga có 5 hành khách chuẩn bị lên tàu. Tính xác suất để trong 5 hành khách lên tàu đó có một toa có 3 khách lên, hai toa có một khách lên và một toa không có khách nào lên tàu. **ĐS:** 15/64

Bài 9. Một dãy phố có 5 cửa hàng bán quần áo. Có 5 người khách đến mua quần áo, mỗi người khách vào ngẫu nhiên một trong năm cửa hàng đó. Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào. **ĐS:** 181/625

Bài 10. Một khóa số với mật khẩu là 3 số tăng dần từ 0 đến 9 có tổng bằng 10. Một người không nhớ mật khẩu mà chỉ nhớ tăng dần nên bấm bừa 3 số bất kì tăng dần. Khóa sẽ bị block nếu quá 3 lần bấm sai.

Tính xác suất để người này mở được khóa biết rằng người này chỉ nhớ được kết quả bấm của mình ở lần kế trước (trí nhớ ngắn hạn) để tránh kết quả đó cho lần sau.

ĐS: 8/120 + 112/120·8/119+112/120·111/119·8/118

Dạng 6. Các bài toán đếm số phương án, tính xác suất liên quan đến đa giác

Bài 1. Cho đa giác đều (*H*) có *n* đỉnh ($n\in N,\ n>4$). Tìm *n* biết rằng số các tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (*H*) và không có cạnh nào là cạnh của (*H*) gấp 5 lần số tam giác có ba đỉnh là đỉnh của (*H*) và có đúng một cạnh là cạnh của (*H*). **ĐS:** *n* = 35

Bài 2. Cho đa giác lồi 14 đỉnh. Gọi *X* là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong *X* một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho. **ĐS:** 15/26

Bài 3. Cho đa giác lồi *A*1*A*2*A*3 . .. *A*10. Gọi *X* là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong *X* một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho. **ĐS:** 5/12

Bài 4. Cho (*H*) là đa giác đều 2*n* đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm *O* ($n\in N^*,\ n\geq 2$). Gọi *S* là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác (*H*). Chọn ngẫu nhiên một đa giác thuộc tập *S*, biết rằng xác suất chọn được một tam giác vuông trong tập *S* là 1/13. Tìm *n*. **ĐS:** *n* = 20

Bài 5. Cho đa giác đều có 15 đỉnh. Gọi *M* là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc *M*, tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều. **ĐS:** 18/91

Bài 6. Cho đa giác đều *H* có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của hình *H*. Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật không phải là hình vuông. **ĐS:** 1/161.

Bài 7. Cho đa giác lồi (*H*) có 22 cạnh. Gọi *X* là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (*H*). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong *X*. Tính xác suất để chọn được một tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác (*H*) và một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (*H*). **ĐS:** 748/1195

Bài 8. Một đa giác đều 24 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi *X* là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ *X* một tam giác, tính xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu. **ĐS:** 190/253

Bài 9. Cho đa giác đều 2*n* đỉnh, lấy ngẫu nhiên một đường chéo của đa giác này, thì xác suất để đường chéo được chọn có độ dài lớn nhất bằng 1/9. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^3+\frac{1}{x}+2\right)^n$. **ĐS:** 480

Bài 10. Có năm đoạn thẳng có độ dài 1, 3, 5, 7, 9. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng từ năm đoạn thẳng đó. Tính xác suất để ba đoạn được chọn có thể xếp thành một hình tam giác. **ĐS:** 2/5

Dạng 7. Các bài toán đếm, sắp xếp liên quan đến vị trí, xếp chỗ

Bài 1 (Đề thi học sinh giỏi Bến Tre lớp 12 năm học 2017 − 2018). Trong một lớp học có 2*n* + 3 học sinh gồm An, Bình, Chi cùng 2*n* học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến 2*n* + 3, mỗi học sinh ngồi 1 ghế thì xác suất để số ghế của Bình bằng trung bình cộng số ghế An và số ghế của Chi là 12/575. Tính số học sinh của lớp. **ĐS:** 25

Bài 2 (Đề thi học sinh giỏi Thanh Hóa lớp 11 năm học 2017 − 2018). Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 11*A* và 3 học sinh lớp 11*B* và 5 học sinh của lớp 11*C* thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có học sinh nào của cùng một lớp đứng cạnh nhau. **ĐS:** 1/26

Bài 3 (Đề thi học sinh giỏi Bắc G iang lớp 12 năm học 2016 − 2017). Một nhóm học sinh gồm 9 bạn nam, trong đó có bạn Hải và 4 bạn nữ trong đó có bạn Minh xếp vào 13 cái ghế trên một hàng ngang. Tính xác suất để giữa hai bạn nữ có đúng ba bạn nam, đồng thời bạn Hải và bạn Minh nêu ở trên không ngồi cạnh nhau. **ĐS:** 1/858

Bài 4 (Đề thi học sinh giỏi Thành phố Hồ Chí Minh lớp 12 năm học 2017 − 2018). Trong một phòng học, có 36 cái bàn rời nhau được đánh số từ 1 đến 36, mỗi bàn dành cho 1 học sinh. Các bàn được xếp thành một hình vuông có kích thước 6 × 6. Cô giáo xếp tùy ý 36 học sinh của lớp trong đó có hai em là Hạnh và Phúc vào các bàn. Tính xác suất để Hạnh và Phúc ngồi ở hai bàn xếp cạnh nhau theo hàng dọc hoặc hàng ngang. **ĐS:** 2/21

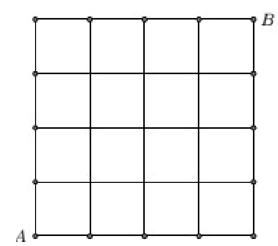
Bài 5 (Đề thi học sinh giỏi Chu Văn An lớp 11 năm học 2015 − 2016). Trong một cuộc thi chọn học sinh giỏi toán khối 11 trường THPT Chu Văn An, có 52 học sinh đăng ký dự thi trong đó có một em tên Thành và một em tên Đạt. Dự kiến ban tổ chức sắp xếp làm 3 phòng thi (phòng 1 và phòng 2 có 18 thí sinh, phòng 3 có 16 thí sinh). Nếu phòng thi được sắp xếp một cách ngẫu nhiên, hãy tính xác suất để Thành và Đạt ngồi chung một phòng. **ĐS:** 71/221

Bài 6 (Đề thi học sinh giỏi Chuyên Bắc Ninh lớp 11). Có 6 viên bi gồm 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 viên bi thành một hàng sao cho không có hai viên bi cùng màu xếp cạnh nhau? **ĐS:** 30

Bài 7 (Đề thi học sinh giỏi Triệu Sơn lớp 11 năm học 2017 − 2018). Từ 2012 số nguyên dương đầu tiên lấy ra 6 số xếp thành dãy số có dạng $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Hỏi có bao nhiêu dãy số có dạng trên biết u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. **ĐS:** $2012.1005.A^3_{2009}$

Bài 8 (Đề thi giữa kì 2 Yên Phong 1 - Bắc Ninh lớp 12 năm học 2017 − 2018). Có 6 xe xếp cạnh nhau thành hàng ngang gồm: 1 xe màu xanh, 2 xe màu vàng và 3 xe màu đỏ. Tính xác suất để hai xe cùng màu không xếp cạnh nhau. **ĐS:** 1/6

Bài 9 (Đề thi học sinh giỏi Phú Thọ lớp 12 năm học 2017 − 2018).
Cho một lưới ô vuông gồm 16 ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông nhỏ có kích thước 1 × 1 (mét) như hình vẽ bên. Con kiến thứ nhất ở vị trí *A* muốn di chuyển lên vị trí *B*, con kiến thứ hai ở vị trí *B* muốn di chuyển xuống vị trí *A*. Biết rằng con kiến thứ nhất chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên phải hoặc lên trên, con kiến thứ hai chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên trái hoặc xuống dưới (theo cạnh của các hình vuông). Hai con kiến xuất phát cùng một thời điểm và có cùng vận tốc di chuyển là 1 mét/phút. Tính xác suất để hai con kiến gặp nhau trên đường đi. **ĐS:** 35/128



Bài 10 (Đề thi học sinh giỏi Hà Tĩnh lớp 11 năm học 2016 − 2017). Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp. **ĐS:** 397/1728