

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM****Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản có điều kiện**

<i>Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với <math>C</math> là hằng số tùy ý)</i>	
① $\int 0 dx = C.$	$\longrightarrow \int k dx = kx + C.$
② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x dx = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$
♦ <b>Nhận xét.</b> Khi thay $x$ bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$ .	

**Một số nguyên tắc tính cơ bản**

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa  $\xrightarrow{PP}$  khai triển.
- Tích các hàm mũ  $\xrightarrow{PP}$  khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của sin và cosin  $\Rightarrow$  Hạ bậc:  $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$ ,  $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$ .
- Chứa tích các căn thức của  $x$   $\xrightarrow{PP}$  chuyển về lũy thừa.

**Câu 1. (Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0)=1, f(1)=2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1)+f(3) \text{ bằng}$$

A.  $2 + \ln 15$

B.  $3 + \ln 15$

C.  $\ln 15$

D.  $4 + \ln 15$

**Lời giải****Chọn C**

$$\int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = f(x)$$

Với  $x < \frac{1}{2}$ ,  $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$  nên  $f(-1) = 1 + \ln 3$

Với  $x > \frac{1}{2}$ ,  $f(1) = 2 \Rightarrow C = 2$  nên  $f(3) = 2 + \ln 5$

Nên  $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$

**Câu 2. (Sở Phú Thọ 2019)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  thỏa mãn  $F(e+1) = 4$  Tìm  $F(x)$ .

A.  $2 \ln(x-1) + 2$

B.  $\ln(x-1) + 3$

C.  $4 \ln(x-1)$

D.  $\ln(x-1) - 3$

Lời giải

**Chọn B**

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx + C = \ln|x-1| + C$$

$$F(e+1) = 4. \text{ Ta có } 1 + C = 4 \Rightarrow C = 3$$

**Câu 3. (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ , biết  $F(1) = 2$ . Giá trị của  $F(0)$  bằng

A.  $2 + \ln 2$ .

B.  $\ln 2$ .

C.  $2 + \ln(-2)$ .

D.  $\ln(-2)$ .

Lời giải

**Cách 1:**

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + C, C \in \mathbb{R}.$$

Giả sử  $F(x) = \ln|x-2| + C_0$  là một nguyên hàm của hàm số đã cho thỏa mãn  $F(1) = 2$ .

$$\text{Do } F(1) = 2 \Rightarrow C_0 = 2 \Rightarrow F(x) = \ln|x-2| + 2. \text{ Vậy } F(0) = 2 + \ln 2.$$

**Câu 4. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ; biết  $F(0) = 2$ . Tính  $F(1)$ .

A.  $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$ .

B.  $F(1) = \ln 3 + 2$ .

C.  $F(1) = 2 \ln 3 - 2$ .

D.  $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

$$\text{Do } F(0) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 0 + 1| + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

**Câu 5. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019)** Hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{1}{x}$  trên  $(-\infty; 0)$  thỏa mãn  $F(-2) = 0$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$   
**B.**  $F(x) = \ln|x| + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$  với  $C$  là một số thực bất kì.  
**C.**  $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ .  
**D.**  $F(x) = \ln(-x) + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$  với  $C$  là một số thực bất kì.

**Lời giải**

Ta có  $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$  với  $\forall x \in (-\infty; 0)$ .

Lại có  $F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$ . Do đó  $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$ .

Vậy  $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ .

**Câu 6. (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $f(0) = 2017$ ,  $f(2) = 2018$ . Tính  $S = f(3) - f(-1)$ .

- A.**  $S = \ln 4035$ .      **B.**  $S = 4$ .      **C.**  $S = \ln 2$ .      **D.**  $S = 1$ .

**Lời giải**

Trên khoảng  $(1; +\infty)$  ta có  $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x-1) + C_1$ .

Mà  $f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$ .

Trên khoảng  $(-\infty; 1)$  ta có  $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(1-x) + C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x) + C_2$ .

Mà  $f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$ .

Vậy  $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2018 & \text{ khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 2017 & \text{ khi } x < 1 \end{cases}$ . Suy ra  $f(3) - f(-1) = 1$ .

**Câu 7. (Mã 105 2017)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + 2x$  thỏa mãn  $F(0) = \frac{3}{2}$ .

Tìm  $F(x)$ .

- A.**  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$       **B.**  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$   
**C.**  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$       **D.**  $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có:  $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$ .

- Câu 8. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{2x}$  và  $F(0) = 0$ . Giá trị của  $F(\ln 3)$  bằng
- A. 2.                                      B. 6.                                      C. 8.                                      D. 4.

Lời giải

$$F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C; F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } F(\ln 3) = \frac{1}{2} e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4.$$

- Câu 9. (Sở Bình Phước 2019)** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $e^{2x}$  và  $F(0) = \frac{201}{2}$ . Giá trị

$$F\left(\frac{1}{2}\right) \text{ là}$$

- A.  $\frac{1}{2}e + 200$                                       B.  $2e + 100$                                       C.  $\frac{1}{2}e + 50$                                       D.  $\frac{1}{2}e + 100$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C.$$

$$\text{Theo đề ra ta được: } F(0) = \frac{201}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^0 + C = \frac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + 100 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot \frac{1}{2}} + 100 = \frac{1}{2} e + 100.$$

- Câu 10. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và:  $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$ . Hàm  $f(x)$  là

- A.  $y = 2e^x + 2x$ .                                      B.  $y = 2e^x + 2$ .                                      C.  $y = e^{2x} + x + 2$ .                                      D.  $y = e^{2x} + x + 1$ .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int f'(x) dx = \int (2e^{2x} + 1) dx = e^{2x} + x + C.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = e^{2x} + x + C.$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy: } f(x) = e^{2x} + x + 1.$$

- Câu 11. (Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số  $f(x) = 2x + e^x$ . Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $F(0) = 2019$ .

- A.  $F(x) = x^2 + e^x + 2018$ .                                      B.  $F(x) = x^2 + e^x - 2018$ .  
C.  $F(x) = x^2 + e^x + 2017$ .                                      D.  $F(x) = e^x - 2019$ .

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C.$$

$$\text{Có } F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) \text{ và } F(0) = 2019.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2019 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^2 + e^x + 2018.$$

**Câu 12.** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$ , thỏa mãn  $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$ . Tính giá trị biểu thức  $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$ .

**A.**  $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$ .      **B.**  $T = 2^{2019 \cdot 2020}$ .

**C.**  $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$ .      **D.**  $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = 2^x, \text{ ta có } F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C \text{ mà } F(0) = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

$$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$$

**Câu 13.** (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

**A.**  $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

**B.**  $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

**C.**  $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

**D.**  $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$$

**Câu 14.** (Mã 123 2017) Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 3 - 5 \sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

**B.**  $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$

**C.**  $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$

**D.**  $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$$

$$\text{Theo giả thiết } f(0) = 10 \text{ nên } 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5.$$

$$\text{Vậy } f(x) = 3x + 5 \cos x + 5.$$

**Câu 15. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 2 - 5 \sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.**  $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$ .

**B.**  $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$ .

**C.**  $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$ .

**D.**  $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 5 \sin x) dx = 2x + 5 \cos x + C$ .

Mà  $f(0) = 10$  nên  $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$ .

Vậy  $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$ .

**Câu 16. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019)** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm

$f(x) = \cos 3x$  và  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$ .

**A.**  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{6}$

**B.**  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{6}$

**C.**  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$

**D.**  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{6}$

**Lời giải**

$F(x) = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 3x}{3} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$ .

**Câu 17. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Biết  $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$  với mọi  $k \in \mathbb{Z}$ . Tính  $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$ .

**A.** 55.

**B.** 44.

**C.** 45.

**D.** 0.

**Lời giải**

Ta có  $\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ .

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Vậy  $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44$ .

**Câu 18. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$ , thỏa mãn

$$F(0) = \frac{1}{\ln 2}. \text{ Tính giá trị biểu thức } T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019).$$

**A.**  $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$ .      **B.**  $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$ .      **C.**  $T = 2^{2019 \cdot 2020}$ .      **D.**  $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $F(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ .

Theo giả thiết  $F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^0}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = 0$ . Suy ra:  $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$

Vậy  $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019) = \frac{2^0}{\ln 2} + \frac{2^1}{\ln 2} + \frac{2^2}{\ln 2} + \dots + \frac{2^{2019}}{\ln 2}$   
 $= \frac{1}{\ln 2} (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 1 \cdot \frac{1 - 2^{2020}}{1 - 2} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$ .

**Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số**

“Nếu  $\int f(x) dx = F(x) + C$  thì  $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$ ”.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm  $I = \int f(x) dx$ , trong đó ta có thể phân tích

$f(x) = g(u(x))u'(x) dx$  thì ta thực hiện phép đổi biến số  $t = u(x)$

$\Rightarrow dt = u'(x) dx$ . Khi đó:  $I = \int g(t) dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$

**Chú ý:** Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo  $t$  thì ta phải thay  $t = u(x)$

**1. Đổi biến số với một số hàm thường gặp**

- $\int f(ax+b)^n x dx \xrightarrow{PP} t = ax+b$ . •  $\int_a^b \sqrt[n]{f(x)} f'(x) dx \xrightarrow{PP} t = \sqrt[n]{f(x)}$ .
- $\int_a^b f(\ln x) \frac{1}{x} dx \xrightarrow{PP} t = \ln x$ . •  $\int_a^b f(e^x) e^x dx \xrightarrow{PP} t = e^x$ .
- $\int_a^b f(\sin x) \cos x dx \xrightarrow{PP} t = \sin x$ . •  $\int_a^b f(\cos x) \sin x dx \xrightarrow{PP} t = \cos x$ .
- $\int_a^b f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \xrightarrow{PP} t = \tan x$ . •  $\int_a^b f(\sin x \pm \cos x) \cdot (\sin x \pm \cos x) dx \Rightarrow t = \sin x \pm \cos x$ .
- $\int_a^\beta f(\sqrt{a^2 - x^2}) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \sin t$ . •  $\int_a^\beta f((\sqrt{x^2 + a^2})^m) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \tan t$ .
- $\int_a^\beta f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right) dx \xrightarrow{PP} x = a \cos 2t$ . •  $\int_a^\beta \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \Rightarrow t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$ .
- $\int_a^\beta R[\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[k]{ax+b}] dx \Rightarrow t^n = ax+b$ . •  $\int_a^\beta \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}} \xrightarrow{PP} x = \frac{1}{t}$ .

**2. Đổi biến số với hàm ẩn**

- **Nhận dạng tương đối:** Đề cho  $f(x)$ , yêu cầu tính  $f(\neq x)$  hoặc đề cho  $f(\neq x)$ , yêu cầu tính  $f(x)$ .
- **Phương pháp:** Đặt  $t = (\neq x)$ .

• Lưu ý: Đối biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: “Tích phân không phụ thuộc vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận”, nghĩa là  $\int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(x)dx = \dots$

**Câu 19. (Mã 101 – 2020 Lần 2)** Biết  $F(x) = e^x + x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó  $\int f(2x)dx$  bằng

- A.  $2e^x + 2x^2 + C$ .      B.  $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C$ .      C.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$ .      D.  $e^{2x} + 4x^2 + C$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $F(x) = e^x + x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int f(2x)dx = \frac{1}{2} \int f(2x)d2x = \frac{1}{2} F(2x) + C = \frac{1}{2} e^{2x} + 2x^2 + C.$$

**Câu 20. (Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết  $F(x) = e^x - 2x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó  $\int f(2x)dx$  bằng

- A.  $2e^x - 4x^2 + C$ .      B.  $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C$ .      C.  $e^{2x} - 8x^2 + C$ .      D.  $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $F(x) = e^x - 2x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$

Suy ra:

$$f(x) = F'(x) = (e^x - 2x^2)' = e^x - 4x \Rightarrow f(2x) = e^{2x} - 8x$$

$$\Rightarrow \int f(2x)dx = \int (e^{2x} - 8x)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C.$$

**Câu 21. (Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết  $F(x) = e^x - x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó  $\int f(2x)dx$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$ .      B.  $e^{2x} - 4x^2 + C$ .      C.  $2e^x - 2x^2 + C$ .      D.  $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } \int f(2x)dx = \frac{1}{2} \int f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} F(2x) + C = \frac{1}{2} e^{2x} - 2x^2 + C.$$

**Câu 22. (Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết  $F(x) = e^x + 2x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó  $\int f(2x)dx$  bằng

- A.  $e^{2x} + 8x^2 + C$ .      B.  $2e^x + 4x^2 + C$ .      C.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$ .      D.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 4x^2 + C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$



$$\int f(2x) dx = \frac{1}{2} \int f(t) dt = \frac{1}{2} F(t) + C = \frac{1}{2} [e^t + 2t^2] + C = \frac{1}{2} e^{2x} + (2x)^2 + C = \frac{1}{2} e^{2x} + 4x^2 + C.$$

**Câu 28.** [DS12.C3.1.D09.b] (Thi thử Lâmônôxốp - Hà Nội lần V 2019) Biết

$$\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x + C. \text{ Tìm nguyên hàm } \int f(x) dx ?$$

**A.**  $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C.$

**B.**  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x + C.$

**C.**  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C.$

**D.**  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x + C.$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int f(2x) d(2x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \ln(2x) - \ln 2 + C$$

$$\Leftrightarrow \int f(2x) d(2x) = 1 - \cos 2x + 2 \ln(2x) - 2 \ln 2 + 2C$$

$$\Leftrightarrow \int f(x) dx = 1 - \cos x + 2 \ln x - 2 \ln 2 + 2C \Leftrightarrow \int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C'.$$

**Câu 46.** [DS12.C3.1.D09.b] Cho  $\int f(4x) dx = x^2 + 3x + c$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C.$

**B.**  $\int f(x+2) dx = x^2 + 7x + C.$

**C.**  $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

**D.**  $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C.$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Từ giả thiết bài toán } \int f(4x) dx = x^2 + 3x + c.$$

$$\text{Đặt } t = 4x \Rightarrow dt = 4dx \text{ từ đó ta có } \frac{1}{4} \int f(t) dt = \left(\frac{t}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{t}{4}\right) + c \Rightarrow \int f(t) dt = \frac{t^2}{4} + 3t + c.$$

$$\text{Xét } \int f(x+2) dx = \int f(x+2) d(x+2) = \frac{(x+2)^2}{4} + 3(x+2) + c = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$$

$$\text{Vậy mệnh đề đúng là } \int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$$

**Câu 5.** [DS12.C3.1.D09.b] Cho  $\int f(x) dx = 4x^3 + 2x + C_0$ . Tính  $I = \int xf(x^2) dx$ .

**A.**  $I = 2x^6 + x^2 + C.$     **B.**  $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C.$

**C.**  $I = 4x^6 + 2x^2 + C.$     **D.**  $I = 12x^2 + 2.$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } I = \int xf(x^2) dx = \frac{1}{2} \int f(x^2) dx^2 = \frac{1}{2} \left( 4(x^2)^3 + 2(x^2) \right) + C = 2x^6 + x^2 + C.$$

**Câu 23.** (Sở Bắc Ninh 2019) Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C.$

B.  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

C.  $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C.$  D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$

**Lời giải**

$$\int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

**Câu 24. (THPT Hà Huy Tập - 2018)** Nguyên hàm của  $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$  là

A.  $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x-1} + C.$

B.  $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1} + C.$

C.  $e^{\sin^2 x} + C.$

D.  $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1} + C.$

**Lời giải**

Ta có  $\int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x} dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$

**Câu 25.** Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

A.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

B.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

C.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

D.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{x^9 + 3x^5} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2 (x^4 + 3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2 (x^4 + 3)} = \frac{1}{12} \int \frac{(x^4 + 3) - x^4}{(x^4)^2 (x^4 + 3)} dx^4 \\ &= \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2} - \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{x^4 (x^4 + 3)} = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left( \frac{x^4}{x^4 + 3} \right) + C \end{aligned}$$

**Câu 26. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tìm hàm số  $F(x)$  biết  $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$  và  $F(0) = 1.$

A.  $F(x) = \ln(x^4+1) + 1.$  B.  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + \frac{3}{4}.$

C.  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + 1.$

D.  $F(x) = 4 \ln(x^4+1) + 1.$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $F(x) = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^4+1} d(x^4+1) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + C.$

Do  $F(0) = 1$  nên  $\frac{1}{4} \ln(0+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$

Vậy:  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + 1.$

**Câu 27.** Biết  $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^b + C, x \neq -1$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $a = 2b$ .

**B.**  $b = 2a$ .

**C.**  $a = 2018b$ .

**D.**  $b = 2018a$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017} d\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{4036} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018} + C.$$

$$\Rightarrow a = 4036, b = 2018$$

Do đó:  $a = 2b$ .

**Câu 28.** (Chuyên Quốc Học Huế - 2018) Biết rằng  $F(x)$  là một nguyên hàm trên  $\mathbb{R}$  của hàm số

$$f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}} \text{ thỏa mãn } F(1) = 0. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất } m \text{ của } F(x).$$

**A.**  $m = -\frac{1}{2}$ .

**B.**  $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$ .

**C.**  $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$ .

**D.**  $m = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int f(x) dx &= \int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2+1)^{-2018} d(x^2+1) = \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + C = F(x) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$$

$$\text{Do đó } F(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}} \text{ suy ra}$$

$$F(x) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi } \frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow (x^2+1) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}.$$

**Câu 29.** Cho  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$  và  $F(0) = -\ln 2e$ . Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $F(x) + \ln(e^x+1) = 2$  là:

**A.**  $S = \{3\}$

**B.**  $S = \{2; 3\}$

**C.**  $S = \{-2; 3\}$

**D.**  $S = \{-3; 3\}$

**Lời giải**

**Chọn A.**

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = x - \ln(e^x+1) + C$$

$$F(0) = -\ln 2 + C = -\ln 2e \Rightarrow C = -1$$

$$PT: F(x) + \ln(e^x+1) = 2 \Leftrightarrow x - \ln(e^x+1) - 1 + \ln(e^x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

**Câu 30. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{2019}$  là

- A.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right]$ .  
 B.  $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020}$ .  
 C.  $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} + C$ .  
 D.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right] + C$ .

**Lời giải**

$$\text{Xét } \int f(x) dx = \int x^3 (x^2 + 1)^{2019} dx = \int x^2 (x^2 + 1)^{2019} x dx.$$

Đổi biến  $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$ , ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \int (t-1)t^{2019} dt = \frac{1}{2} \int (t^{2020} - t^{2019}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t^{2021}}{2021} - \frac{t^{2020}}{2020} \right] + C = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right] + C. \end{aligned}$$

**Câu 31. (THPT Hà Huy Tập - 2018)** Nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x}$  là:

- A.  $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| + C$ .  
 B.  $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x^2 \ln x| + C$ .  
 C.  $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C$ .  
 D.  $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x \ln x| + C$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } I = \int f(x) dx = \int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx.$$

$$\text{Đặt } x \ln x = t \Rightarrow (\ln x + 1) dx = dt. \text{ Khi đó ta có } I = \int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x \ln x| + C.$$

**Câu 32. (Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

- A.  $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$ .  
 B.  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$ .  
 C.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$ .  
 D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$\text{Do đó, ta có } \int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

$$\text{Vậy } \int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

**Câu 33. (Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019)** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$  là

- A.  $\int f(x) dx = (3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C$ .  
 B.  $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C$ .

$$\text{C. } \int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} d(3x+1) = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

**Câu 34.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{3x+2}$  là

$$\text{A. } \frac{2}{3} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C \quad \text{B. } \frac{1}{3} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C$$

$$\text{C. } \frac{2}{9} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C \quad \text{D. } \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3x+2}} + C$$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Do } \int \sqrt{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int (3x+2)^{\frac{1}{2}} d(3x+2) = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C$$

**Câu 35.** (HSG Bắc Ninh 2019) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  là

$$\text{A. } -\frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{B. } \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{C. } \frac{2}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{D. } \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C.$$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \Rightarrow t dt = dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \sqrt{2x+1} dx = \int t^2 dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (2x+1)^2 \sqrt{2x+1} + C.$$

**Câu 36.** (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Cho hàm số  $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$ . Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ ?

$$\text{A. } F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C \quad \text{B. } F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$$

$$\text{C. } F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$$

$$\text{D. } F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Vậy } F(x) = 2 \ln 2 \cdot \int 2^u \cdot du = 2 \ln 2 \cdot \frac{2^u}{\ln 2} + C = 2^{\sqrt{x}+1} + C.$$

$$\text{Phương án B: } F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} - 2 + C \text{ thỏa.}$$

$$\text{Phương án C: } F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + 2 + C \text{ thỏa.}$$

**Câu 37. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Khi tính nguyên hàm  $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$ , bằng cách đặt

$u = \sqrt{x+1}$  ta được nguyên hàm nào?

- A.**  $\int 2(u^2 - 4) du$ .      **B.**  $\int (u^2 - 4) du$ .      **C.**  $\int (u^2 - 3) du$ .      **D.**  $\int 2u(u^2 - 4) du$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt  $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u du$ .

Khi đó  $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$  trở thành  $\int \frac{u^2-4}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2 - 4) du$ .

**Câu 38. (Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ .

- A.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C$ .      **B.**  $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C$ .  
**C.**  $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C$ .      **D.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C$ .

**Lời giải**

Đặt  $\sqrt{2x+1} = t \Rightarrow 2x+1 = t^2 \Rightarrow dx = t dt$ .

Khi đó ta có  $\int \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C$ .

**Câu 39. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$  là

- A.**  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \sqrt{x^2+1} + C$ .      **B.**  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C$ .  
**C.**  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$ .      **D.**  $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})(x - \sqrt{x^2+1})}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{1}{t} = \sqrt{x^2+1} - x$ .

$t - \frac{1}{t} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$ ;  $t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{x^2+1}$

$\int f(x) dx = \int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx = \frac{1}{2} \int \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \ln t dt = \frac{1}{2} \int \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \ln t dt = I$ .

Đặt  $u = \ln t \rightarrow du = \frac{1}{t} dt$

$dv = \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \rightarrow v = t - \frac{1}{t}$ ;

$I = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \left( t - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) + C$

$= x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C$ .

- Câu 40. (Chuyên Hạ Long - 2018)** Biết rằng trên khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ , hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$  có một nguyên hàm  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$  ( $a, b, c$  là các số nguyên). Tổng  $S = a + b + c$  bằng
- A. 4.                                      **B. 3.**                                      C. 5.                                      D. 6.

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x-3} \Rightarrow t^2 = 2x-3 \Rightarrow dx = t dt$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2+3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt = t^5 + 5t^3 + 7t + C \\ &= \sqrt{(2x-3)^5} + 5\sqrt{(2x-3)^3} + 7\sqrt{2x-3} + C = (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + 5(2x-3)\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x-3} + C \\ &= (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}. \text{ Suy ra } S = a + b + c = 3.$$

- Câu 41. (Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$ .                                      B.  $\int f(x) dx = \ln|1+3\cos x| + C$ .
- C.  $\int f(x) dx = 3 \ln|1+3\cos x| + C$ .                                      **D.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$ .**

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{1+3\cos x} d(1+3\cos x) = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C.$$

- Câu 42. (Sở Thanh Hóa 2019)** Tìm các hàm số  $f(x)$  biết  $f'(x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$ .

- A.  $f(x) = \frac{\sin x}{(2+\sin x)^2} + C$ .                                      B.  $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)} + C$ .
- C.  $f(x) = -\frac{1}{2+\sin x} + C$ .**                                      D.  $f(x) = \frac{\sin x}{2+\sin x} + C$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2} dx = \int \frac{d(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2} = -\frac{1}{2+\sin x} + C.$$

- Câu 43. (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019)** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x} \text{ và } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \text{ Tính } F(0).$$

- A.  $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2$ .                                      **B.  $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2$ .**                                      C.  $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2$ .                                      D.  $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{3\cos x + 1} = -\frac{1}{3} \ln|3\cos x + 1| + C.$$

$$\text{mà } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \ln \left| 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \right| + C = 2 \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Do đó, } F(0) = -\frac{1}{3} \ln |3 \cos(0) + 1| + 2 = -\frac{1}{3} \ln 4 + 2 = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$$

$$\text{Vậy } F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$$

**Câu 44. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019)** Biết  $\int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$ . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A.**  $\int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C$

**B.**  $\int f(3x) dx = 9x \cos(6x-5) + C$

**C.**  $\int f(3x) dx = 9x \cos(2x-5) + C$

**D.**  $\int f(3x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$

**Lời giải**

**Cách 2:**

$$\text{Đặt } x = 3t \Rightarrow dx = 3dt.$$

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$$

$$\Leftrightarrow 3 \int f(3t) dt = 3 \cdot (3t) \cos(2 \cdot 3t - 5) + C \Leftrightarrow \int f(3t) dt = 3t \cos(6t-5) + C$$

$$\Leftrightarrow \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

**Câu 45. (Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \tan^5 x$ .

**A.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$

**B.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

**C.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$

**D.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

**Lời giải**

$$I = \int f(x) dx = \int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \quad I = \int \frac{(1-t^2) \cdot (1-t^2)}{t^5} (-dt) = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} (-dt)$$

$$= \int \left( -\frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left( -t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln |t| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cos^4 x - \cos^2 x - \ln |\cos x| + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\tan^2 x + 1)^2 - (\tan^2 x + 1) - \ln |\cos x| + C$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) - \ln |\cos x| + C \\
&= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + \frac{1}{4} + C \\
&= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.
\end{aligned}$$

**Câu 46. (Hồng Bằng - Hải Phòng - 2018)** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x \text{ và } F(0) = \pi. \text{ Tính } F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

A.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$ .      B.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ .      C.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$ .      D.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 0}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} + \pi = \frac{1}{4} + \pi.$$

**Câu 47.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  thỏa mãn  $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$  và  $F(e) = \ln 2$ .

Giá trị của biểu thức  $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2)$  bằng

A.  $3 \ln 2 + 2$ .      B.  $\ln 2 + 2$ .      C.  $\ln 2 + 1$ .      D.  $2 \ln 2 + 1$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C, \quad x > 0, \quad x \neq 1.$$

$$\text{Nên: } F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + C_2 & \text{khi } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Mà } F\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \text{ nên } \ln\left(-\ln \frac{1}{e}\right) + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2; \quad F(e) = \ln 2 \text{ nên } \ln(\ln e) + C_1 = \ln 2 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + \ln 2 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + 2 & \text{khi } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2) = \ln\left(-\ln \frac{1}{e^2}\right) + 2 + \ln(\ln e^2) + \ln 2 = 3 \ln 2 + 2.$$

**Câu 48. (Chuyên Nguyễn Huệ-HN 2019)** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$  thỏa

mãn  $F(2) = 0$ . Khi đó phương trình  $F(x) = x$  có nghiệm là:

A.  $x = 0$ .      B.  $x = 1$ .      C.  $x = -1$ .      D.  $x = 1 - \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $\int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (8-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(8-x^2) = -\sqrt{8-x^2} + C.$

Mặt khác:  $F(2) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{8-2^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = 2.$

Nên  $F(x) = -\sqrt{8-x^2} + 2.$

$F(x) = x \Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2} = 2-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 8-x^2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ -2x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$

**Câu 49.** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$ . Biết  $F(3) = 6$ , giá trị của  $F(8)$  là

**A.**  $\frac{217}{8}.$

**B.** 27.

**C.**  $\frac{215}{24}.$

**D.**  $\frac{215}{8}.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\int f(x) dx = \int \left( \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left( \frac{2(x+1)-2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

$= 2 \int \sqrt{x+1} dx - 2 \int \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx - \int \frac{1}{x^2} dx$

$= 2 \int (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) - 2 \int (x+1)^{-\frac{1}{2}} d(x+1) - \int x^{-2} dx$

$= \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$

Suy ra  $F(x) = \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$

Mặt khác:  $F(3) = 6 \Leftrightarrow 6 = \frac{4(3+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{3+1} + \frac{1}{3} + C \Leftrightarrow C = 3.$

Vậy  $F(8) = \frac{4(8+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{8+1} + \frac{1}{8} + 3 = \frac{217}{8}.$

**Câu 50.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$  trên khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$  là

**A.**  $(4x^2 + 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C.$

**B.**  $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}.$

**C.**  $(3x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}.$

**D.**  $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét trên khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ , ta có:

$\int f(x) dx = \int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{10x(2x-3) + 7}{\sqrt{2x-3}} dx.$

Đặt  $u = \sqrt{2x-3} \Rightarrow u^2 = 2x-3 \Rightarrow 2udu = 2dx \Rightarrow udu = dx.$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \frac{10x(2x-3)+7}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \frac{5(u^2+3)u^2+7}{u} u du = \int [5(u^2+3)u^2+7] du = \int [5u^4+15u^2+7] du \\ &= u^5+5u^3+7u+C = (u^4+5u^2+7)u+C = [(2x-3)^2+5(2x-3)+7]\sqrt{2x-3}+C \\ &= (4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}+C.\end{aligned}$$

### Dạng 3. Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ

#### 1. Công thức thường áp dụng

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$ . •  $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$ .
- $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ . •  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ .
- $\ln a^n = n \ln a$ . •  $\ln 1 = 0$ .

#### 2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ .

- Nếu bậc của tử số  $P(x) \geq$  bậc của mẫu số  $Q(x) \xrightarrow{PP}$  Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số  $P(x) <$  bậc của mẫu số  $Q(x) \xrightarrow{PP}$  phân tích mẫu  $Q(x)$  thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.
- Nếu mẫu không phân tích được thành tích số  $\xrightarrow{PP}$  thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt  $X = a \tan t$ , nếu mẫu đưa được về dạng  $X^2 + a^2$ .

**Câu 51. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  trên khoảng

$(1; +\infty)$  là

- A.**  $x+3\ln(x-1)+C$ .      **B.**  $x-3\ln(x-1)+C$ .  
**C.**  $x-\frac{3}{(x-1)^2}+C$ .      **D.**  $x+\frac{3}{(x-1)^2}+C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Trên khoảng  $(1; +\infty)$  thì  $x-1 > 0$  nên

$$\int f(x) dx = \int \frac{x+2}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x-1}\right) dx = x + 3\ln|x-1| + C = x + 3\ln(x-1) + C.$$

**Câu 52. (Mã đề 104 - BGD - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$  trên khoảng

$(2; +\infty)$  là

- A.**  $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$       **B.**  $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$   
**C.**  $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$       **D.**  $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$ . Do đó

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2} dx = \int \left( \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx = 3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$$

**Câu 53. (Mã đề 101 - BGD - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$  trên

khoảng  $(-1; +\infty)$  là

A.  $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$

B.  $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

C.  $2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$

D.  $2 \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\int f(x) dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \left[ \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = 2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

**Câu 35.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$  là

A.  $\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + C.$

B.  $2 \ln|x+1| + \ln|x+2| + C.$

C.  $2 \ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$

D.  $-\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + C.$

**Lời giải**

Ta có  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$

Suy ra họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$  là

**Câu 54. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số

$f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$ , biết rằng  $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

A.  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$

B.  $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$

C.  $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$

D.  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$

**Lời giải**

Ta có  $F(x) = \int f(x) dx = \int \left( ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{b}{x} + C.$

Theo bài ra  $\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + b + C = 1 \\ \frac{1}{2}a - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}.$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

**Câu 55.** Cho biết  $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$ .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $a+2b=8$ .      **B.**  $a+b=8$ .      **C.**  $2a-b=8$ .      **D.**  $a-b=8$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left( \frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 5 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + C.$$

Suy ra  $a=5$ ;  $b=-3$  nên  $a-b=8$ .

**Câu 56.** Cho biết  $\int \frac{1}{x^3-x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C$ . Tính giá trị biểu thức:  $P = 2a + b$ .

- A.** 0.      **B.** -1.      **C.**  $\frac{1}{2}$ .      **D.** 1.

**Lời giải**

Ta có:

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Dx(x-1)}{x^3-x} = \frac{(A+B+D)x^2+(B-D)x-A}{x^3-x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \int \frac{1}{x^3-x} dx = \int \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|(x-1)(x+1)| - \ln|x| + C.$$

Suy ra  $a=\frac{1}{2}$ ;  $b=-1$  nên  $P=2a+b=0$ .

**Câu 57.** Cho biết  $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C$ . Tính giá trị biểu thức:  $P = a^2 + ab + b^2$ .

- A.** 12.      **B.** 13.      **C.** 14.      **D.** 15.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = \int \left( \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = 3 \ln|x+2| + \ln|x+3| + C.$$

Suy ra  $a = 3; b = 1$  nên  $P = a^2 + ab + b^2 = 13$ .

- Câu 58.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$ ,  $f'(1) = 3$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$ . Khi đó  $2a + b$  bằng
- A.  $-\frac{3}{2}$ .                      B. 0.                      C. 5.                      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có  $f'(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$  (1).

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ , các điểm  $x = 1$ ,  $x = \frac{1}{2}$  đều thuộc  $(0; +\infty)$  nên

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left( ax^2 + \frac{b}{x^3} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C.$$

$$+ f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \quad (2).$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ C = \frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

- Câu 59. (Mã 102 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  là

- A.  $3 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C$ .    B.  $3 \ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + C$ .  
C.  $3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$ .    D.  $3 \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x-3+2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int f(x) dx &= \int \left( \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = 3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 2 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= 3 \ln|x-1| + 2 \int (x-1)^{-2} d(x-1) = 3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C \text{ vì } x > 1. \end{aligned}$$

- Câu 60. (Mã 103 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$  trên khoảng  $(-2; +\infty)$  là

- A.  $2 \ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$ .                      B.  $2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$ .

C.  $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C.$

D.  $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C.$

Lời giải

**Chọn B**Đặt  $x+2=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$  với  $t>0$ 

Ta có  $\int f(x)dx = \int \frac{2t-1}{t^2}dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = 2\ln t + \frac{1}{t} + C$

Hay  $\int f(x)dx = 2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$

**Câu 61.** (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} \text{ trên khoảng } (0; +\infty) \text{ thỏa mãn } F(1) = \frac{1}{2}.$$
 Giá trị của biểu thức

$$S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) \text{ bằng}$$

A.  $\frac{2019}{2020}.$

B.  $\frac{2019.2021}{2020}.$

C.  $2018\frac{1}{2020}.$

D.  $-\frac{2019}{2020}.$

Lời giải

Ta có  $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.$

Đặt  $t = x(x+1) = x^2 + x \Rightarrow dt = (2x+1)dx.$

Khi đó  $F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C.$

Mặt khác,  $F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1.$

Vậy  $F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1.$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) = -\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2020}\right) + 2019 \\
 &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) + 2019 = -\left(1 - \frac{1}{2020}\right) + 2019 \\
 &= 2018 + \frac{1}{2020} = 2018\frac{1}{2020}.
 \end{aligned}$$

**Câu 62.** Giả sử  $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$  ( $C$  là hằng số).Tính tổng các nghiệm của phương trình  $g(x) = 0.$ 

A.  $-1.$

B.  $1.$

C.  $3.$

D.  $-3.$

Lời giải

Ta có  $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = [(x^2+3x)+1]^2.$

Đặt  $t = x^2 + 3x$ , khi đó  $dt = (2x + 3)dx$ .

Tích phân ban đầu trở thành  $\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C$ .

Trở lại biến  $x$ , ta có  $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$ .

Vậy  $g(x) = x^2 + 3x + 1$ .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng  $-3$ .

**Câu 63. (Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho  $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$ . Khi

đó  $S = a + b + c$  bằng

- A.  $-\frac{1}{4}$ .      B.  $\frac{3}{4}$ .      C.  $\frac{7}{4}$ .      D. 2.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{x^4(1+x^2)} dx \\ t &= 1+x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t-1)^2 t} dt = \frac{1}{2} \int \left( \frac{-1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left( -\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t| \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left( -\ln|x^2| - \frac{1}{x^2} + \ln|1+x^2| \right) + C = -\frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \\ \Rightarrow &\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

**Câu 64. (Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  thỏa mãn

$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$ . Biết  $f(3) + f(-3) = 4$  và  $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$ . Giá trị của biểu thức

$f(-5) + f(0) + f(2)$  bằng

- A.  $5 - \frac{1}{2} \ln 2$ .      B.  $6 - \frac{1}{2} \ln 2$ .      C.  $5 + \frac{1}{2} \ln 2$ .      D.  $6 + \frac{1}{2} \ln 2$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $f'(x) = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$  với  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .



$$\text{Khi đó: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{khi } x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3) + f(-3) = C_1 + C_3 = 4 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(-5) + f(0) + f(2) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + C_3 + C_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + C_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + 5 = 5 - \frac{1}{2} \ln 2.$$

**Câu 65. (Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$  thỏa

$$\text{mãn } f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}, \quad f(-3) - f(3) = 0 \quad \text{và} \quad f(0) = \frac{1}{3}. \quad \text{Giá trị của biểu thức}$$

$$f(-4) + f(-1) - f(4) \text{ bằng}$$

**A.**  $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$ .      **B.**  $\ln 80 + 1$ .      **C.**  $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$ .      **D.**  $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$ .

**Lời giải**

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1, \forall x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_2, \forall x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_3, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-3) = \frac{1}{3} \ln 4 + C_1, \forall x \in (-\infty; -2), \quad f(0) = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2, \forall x \in (-2; 1),$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + C_3, \forall x \in (1; +\infty),$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3}(1 + \ln 2).$$

$$\Rightarrow f(-1) = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Và } f(-3) - f(3) = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{10}.$$

$$\text{Vậy } f(-4) + f(-1) - f(4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - C_2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}.$$

**Câu 66. (Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{thỏa mãn } f'(x) = \frac{1}{x-1}, \quad f(0) = 2017, \quad f(2) = 2018. \quad \text{Tính } S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017).$$

**A.**  $S = 1$ .      **B.**  $S = 1 + \ln^2 2$ .      **C.**  $S = 2 \ln 2$ .      **D.**  $S = \ln^2 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Lại có } f(0) = 2017 \Rightarrow \ln(1-0) + C_2 = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017.$$

$$f(2) = 2018 \Rightarrow \ln(2-1) + C_1 = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018.$$

$$\text{Do đó } S = [\ln(3-1) + 2018 - 2018] [\ln(1-(-1)) + 2017 - 2017] = \ln^2 2.$$

**Câu 67. (Sở Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ ,

$$f(-2) + f(2) = 0 \text{ và } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \text{ Tính } f(-3) + f(0) + f(4) \text{ được kết quả}$$

**A.**  $\ln \frac{6}{5} + 1.$

**B.**  $\ln \frac{6}{5} - 1.$

**C.**  $\ln \frac{4}{5} + 1.$

**D.**  $\ln \frac{4}{5} - 1.$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x < -1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} f(-2) + f(2) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 3 + C_1 + \ln \frac{1}{3} + C_3 = 0 \\ \ln 3 + C_2 + \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(-3) + f(0) + f(4) = \ln 2 + C_1 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_3 = \ln \frac{6}{5} + 1.$$

#### **Dạng 4. Nguyên hàm từng phần**

Cho hai hàm số  $u$  và  $v$  liên tục trên  $[a; b]$  và có đạo hàm liên tục trên  $[a; b]$ . Khi đó:

$$\int u dv = uv - \int v du (*)$$

Để tính tích phân  $I = \int_a^b f(x) dx$  bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

**Bước 1:** Chọn  $u, v$  sao cho  $f(x) dx = u dv$  (chú ý:  $dv = v'(x) dx$ ).

Tính  $v = \int dv$  và  $du = u' dx$ .

**Bước 2:** Thay vào công thức (\*) và tính  $\int v du$ .

Cần phải lựa chọn  $u$  và  $dv$  hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được  $v$  và tích phân  $\int v du$  dễ tính hơn

$\int u dv$ . Ta thường gặp các dạng sau

**Dạng 1:**  $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức

Với dạng này, ta đặt  $u = P(x)$ ,  $dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$ .

**Dạng 2:**  $I = \int (x) e^{ax+b} dx$

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức

**Dạng 3 :**  $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$ .

**Dạng 4 :**  $I = \int \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx$

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$  để tính  $\int v du$  ta đặt  $\begin{cases} u = \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$ .

**Câu 68. (Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ . Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1) \cdot f'(x)$  là

- A.  $\frac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$ .    B.  $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C$ .    C.  $\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}} + C$ .    D.  $\frac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$ .

**Lời giải**

**Chọn B.**

$$\begin{aligned} \text{Tính } g(x) &= \int (x+1)f'(x) dx = (x+1)f(x) - \int (x+1)' f(x) dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int f(x) dx \\ &= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2} + C = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C. \end{aligned}$$

**Câu 69. (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ . Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$  là

- A.  $\frac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$ .    B.  $\frac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$ .    C.  $\frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}} + C$ .    D.  $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \int (x+1)f'(x) dx = (x+1)f(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} dx = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C.$$

**Câu 70. (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ . Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$

- A.  $\frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$ .    B.  $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$ .    C.  $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$ .    D.  $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Xét } \int g(x) dx = \int (x+1)f'(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \int g(x)dx &= (x+1)f(x) - \int f(x)dx \Rightarrow \int g(x)dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ \Rightarrow \int g(x)dx &= \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} + C \Rightarrow \int g(x)dx = \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} + C \\ \Rightarrow \int g(x)dx &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C.\end{aligned}$$

**Câu 71. (Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ . Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$  là

A.  $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$ .      B.  $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$ .      C.  $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$ .      D.  $\frac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x' \cdot \sqrt{x^2+4} - (\sqrt{x^2+4})' \cdot x}{x^2+4} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+4} - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot x}{x^2+4} = \frac{\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = \frac{4}{(\sqrt{x^2+4})^3}\end{aligned}$$

Suy ra:  $g(x) = (x+1)f'(x) = x.f'(x) + f'(x)$

$$\begin{aligned}\int g(x)dx &= \int [x.f'(x) + f'(x)]dx = \int x.f'(x)dx + \int f'(x)dx \\ &= \int \frac{4x}{(\sqrt{x^2+4})^3} dx + \int f'(x)dx\end{aligned}$$

$$\text{Xét: } I = \int \frac{4x}{(\sqrt{x^2+4})^3} dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 4 \Rightarrow dt = 2xdx$$

$$\text{Suy ra: } I = \int \frac{2dt}{(\sqrt{t})^3} = \int \frac{2dt}{t^{\frac{3}{2}}} = 2 \int t^{-\frac{3}{2}} dt = 2 \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C_1 = \frac{-4}{\sqrt{t}} + C_1 = \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}} + C_1$$

$$\text{và: } J = \int f'(x)dx = f(x) + C_2$$

$$\text{Vậy: } \int g(x)dx = \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C.$$

**Cách 2:**  $g(x) = (x+1)f'(x)$

$$\Rightarrow \int g(x)dx = \int (x+1)f'(x)dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \int g(x) dx &= (x+1)f(x) - \int f(x) dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+4}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx \\ &= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}} - \int \frac{d(x^2+4)}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4} + C = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C. \end{aligned}$$

**Câu 72. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\cos 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^x$  là:

- A.**  $-\sin 2x + \cos 2x + C$  . **B.**  $-2 \sin 2x + \cos 2x + C$  .  
**C.**  $-2 \sin 2x - \cos 2x + C$  . **D.**  $2 \sin 2x - \cos 2x + C$  .

**Lời giải**

**Chọn C**

Do  $\cos 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$

$$\text{nên } f(x)e^x = (\cos 2x)' \Leftrightarrow f(x)e^x = -2 \sin 2x.$$

$$\text{Khi đó ta có } \int f(x)e^x dx = \cos 2x + C.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int f(x)e^x dx &= \cos 2x + C \Leftrightarrow \int f(x) d(e^x) = \cos 2x + C \\ \Leftrightarrow f(x)e^x - \int f'(x)e^x dx &= \cos 2x + C \Leftrightarrow \int f'(x)e^x dx = -2 \sin 2x - \cos 2x + C. \end{aligned}$$

Vậy tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^x$  là  $-2 \sin 2x - \cos 2x + C$ .

**Câu 73. (Đề Tham Khảo 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 4x(1 + \ln x)$  là:

- A.**  $2x^2 \ln x + 3x^2$  . **B.**  $2x^2 \ln x + x^2$  .  
**C.**  $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$  . **D.**  $2x^2 \ln x + x^2 + C$  .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } f(x) = 4x(1 + \ln x) \Rightarrow F(x) = \int (4x(1 + \ln x)) dx$$

đặt

$$\begin{cases} u = 1 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \\ dv = 4x \Rightarrow v = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = 2x^2(1 + \ln x) - \int 2x dx = 2x^2(1 + \ln x) - x^2 + C = 2x^2 \ln x + x^2 + C$$

**Câu 74.** Họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x \sin x$  là

- A.**  $F(x) = x \cos x + \sin x + C$  . **B.**  $F(x) = x \cos x - \sin x + C$  .  
**C.**  $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$  . **D.**  $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$  .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

**Câu 75. (Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x.e^{2x}$  là :

**A.**  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$

**B.**  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$

**C.**  $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$

**D.**  $F(x) = 2e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$$

**Câu 76. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (2x - 1)e^x$  là

**A.**  $(2x - 3)e^x + C.$

**B.**  $(2x + 3)e^x + C.$

**C.**  $(2x + 1)e^x + C.$

**D.**  $(2x - 1)e^x + C.$

Lời giải

$$\text{Gọi } I = \int (2x - 1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = (2x - 1)e^x - 2 \int e^x dx = (2x - 1)e^x - 2e^x + C = (2x - 3)e^x + C.$$

**Câu 77. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = xe^{2x}$ ?

**A.**  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C.$

**B.**  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C.$

**C.**  $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C.$

**D.**  $F(x) = 2e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int xe^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$$

**Câu 78. (Chuyên Sơn La 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x(1 + \sin x)$  là

A.  $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C.$

B.  $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

C.  $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$

D.  $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int f(x) dx &= \int x(1 + \sin x) dx = \int x dx + \int x \cdot \sin x dx = \int x dx - \int x d(\cos x) \\ &= \frac{x^2}{2} - \left( x \cos x - \int \cos x dx \right) = \frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

**Câu 79. (Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Giả sử  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 e^x$ . Tính tích  $P = abc$ .

A. -4.

B. 1.

C. -5.

D. -3.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta đặt: } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

$$\text{Ta đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x.$$

$$\text{Vậy } a = 1, b = -2, c = 2 \Rightarrow P = abc = -4.$$

**Câu 80.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x(1 + e^x)$  là

A.  $(2x - 1)e^x + x^2.$

B.  $(2x + 1)e^x + x^2.$

C.  $(2x + 2)e^x + x^2.$

D.  $(2x - 2)e^x + x^2.$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int 2x(1 + e^x) dx = 2 \int x dx + 2 \int x e^x dx.$$

$$\text{Gọi } I = 2 \int x \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = 2x e^x - 2 \int e^x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int 2x(1 + e^x) dx &= 2 \int x dx + x e^x - 2 \int e^x dx = x^2 + x e^x - 2x + C \\ &= (2x - 2)e^x + x^2 + C. \end{aligned}$$

**Câu 81.** Họ nguyên hàm của  $f(x) = x \ln x$  là kết quả nào sau đây?

A.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 + C.$

B.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.$

C.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$

D.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x + C.$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int x \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

**Câu 82. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (3x^2 + 1) \cdot \ln x$ .

- A.  $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C$ .      B.  $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$ .  
 C.  $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$ .      D.  $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $I = \int (3x^2 + 1) \ln x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (3x^2 + 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = (x^3 + x) \ln x - \int (x^3 + x) \frac{1}{x} dx = x(x^2 + 1) \ln x - \int (x^2 + 1) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$$

**Câu 83. (Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$  trên khoảng  $(0; \pi)$  là

- A.  $-x \cot x + \ln(\sin x) + C$ .      B.  $x \cot x - \ln|\sin x| + C$ .  
 C.  $x \cot x + \ln|\sin x| + C$ .      D.  $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cdot \cot x + \int \cot x dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \\ = -x \cdot \cot x + \ln|\sin x| + C. \text{ Với } x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x).$$

$$\text{Vậy } F(x) = -x \cot x + \ln(\sin x) + C.$$

**Câu 84. (Sở Phú Thọ 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = 3x(x + \cos x)$  là

- A.  $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$       B.  $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$   
 C.  $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$       D.  $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \int 3x(x + \cos x) dx = \int 3x^2 dx + \int 3x \cos x dx$$



$$\bullet \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$$

$$\bullet \int 3x \cos x dx = \int 3x \cdot d(\sin x) = 3x \cdot \sin x - \int 3 \sin x dx = 3x \cdot \sin x + 3 \cos x + C_2$$

$$\text{Vậy } \int 3x(x + \cos x) dx = x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$$

**Câu 85.** (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + xe^x$  là

**A.**  $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$ . **B.**  $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$ .

**C.**  $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$ . **D.**  $4x^3 + (x+1)e^x + C$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int (x^4 + xe^x) dx = \int x^4 dx + \int xe^x dx.$$

$$+) \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C_1.$$

$$+) \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_2 = (x-1)e^x + C_2.$$

$$\text{Vậy } \int (x^4 + xe^x) dx = \frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C.$$

**Câu 86.** Cho hai hàm số  $F(x), G(x)$  xác định và có đạo hàm lần lượt là  $f(x), g(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng

$$F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1) \text{ và } F(x).g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}. \text{ Họ nguyên hàm của } f(x).G(x) \text{ là}$$

**A.**  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$ .

**B.**  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$ .

**C.**  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C$ .

**D.**  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có

$$F(x).G(x) = \int (F(x).G(x))' dx = \int (F'(x).G(x) + F(x).G'(x)) dx.$$

$$\Rightarrow \int (F'(x).G(x)) dx = F(x).G(x) - \int (F(x).G'(x)) dx$$

$$= x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \left( \frac{2x^3}{x^2 + 1} \right) dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - (x^2 + 1) + \ln(x^2 + 1) + C$$

$$= (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$$

**Câu 33.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x.e^{2x}$  là

**A.**  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$ .

**B.**  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x-2) + C$ .

**C.**  $F(x) = 2e^{2x} (x-2) + C$ .

**D.**  $F(x) = 2e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$$

$$F(x) = x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C.$$

**Câu 87. (Sở Bắc Ninh 2019)** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $\int x e^x dx = e^x + x e^x + C.$       B.  $\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C.$   
 C.  $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$       D.  $\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + C.$

**Lời giải**

Sử dụng công thức:  $\int u dv = u.v - \int v du.$

Ta có:  $\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$

**Câu 88. (Sở Bắc Giang 2019)** Cho hai hàm số  $F(x), G(x)$  xác định và có đạo hàm lần lượt là  $f(x), g(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$  và  $F(x)g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ . Tìm họ nguyên hàm của  $f(x)G(x)$ .

- A.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C.$       B.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C.$   
 C.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$       D.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C.$

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)G(x)dx &= \int G(x)d(F(x)) \\ &= G(x).F(x) - \int F(x)d(G(x)) = G(x).F(x) - \int F(x)g(x)dx. \\ \Leftrightarrow \int f(x)G(x)dx &= x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^3}{x^2 + 1} dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \left( 2x - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \int \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \ln(x^2 + 1) + C \\ &= (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C. \end{aligned}$$

**Câu 89.** Cho biết  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$ . Tìm nguyên hàm của  $g(x) = x \cos ax$ .

- A.  $x \sin x - \cos x + C$       B.  $\frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$   
 C.  $x \sin x + \cos x + C$       D.  $\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } F'(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2}.$$

Do  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$  nên  $a = 1$ .

$$\int g(x)dx = \int x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\int g(x) dx = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

**Câu 90.** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$  là

**A.**  $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

**B.**  $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C.$

**C.**  $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$

**D.**  $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

**Lời giải**

Ta có:  $\int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = \int (2x + 1) \ln x dx + \int \frac{1}{x} dx = I_1 + I_2.$

$I_1 = \int (2x + 1) \ln x dx.$  Đặt  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x + 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 + x \end{cases}.$

$$I_1 = (x^2 + x) \ln x - \int (x^2 + x) \frac{1}{x} dx = (x^2 + x) \ln x - \int (x + 1) dx$$

$$= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2.$$

$$\int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = I_1 + I_2$$

$$= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1 + \ln x + C_2 = (x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

**Câu 91.** (Mã 104 2017) Cho  $F(x) = \frac{1}{2x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$ .

**A.**  $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

**B.**  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

**C.**  $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$

**D.**  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2}.$  Chọn  $f(x) = \frac{-1}{x^2}.$

Suy ra  $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{2}{x^3} \ln x dx.$  Đặt  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2}{x^3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x^2} \end{cases}.$

$$\text{Khi đó: } \int f'(x) \ln x \, dx = \int \frac{\ln x}{x^3} \, dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \int \frac{1}{x^3} \, dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$$

**Câu 92. (Mã 105 2017)** Cho  $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$

- A.  $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$       B.  $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$   
 C.  $\int f'(x) \ln x \, dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$       D.  $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = x.F'(x) = x.\left(-\frac{1}{3}.x^{-3}\right)' = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} \Rightarrow f'(x) \ln x = -3x^{-4} \ln x$$

$$\text{Vậy } \int f'(x) \ln x \, dx = \int (-3x^{-4} \ln x) \, dx = -3 \int \ln x . x^{-4} \, dx$$

$$\text{Đặt } u = \ln x; dv = x^{-4} \, dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^{-3}}{-3}$$

$$\text{Nên } \int f'(x) \ln x \, dx = -3 \int \ln x . x^{-4} \, dx = -3 \left( \frac{\ln x}{-3x^3} + \int \frac{x^{-4}}{3} \, dx \right) = \frac{\ln x}{x^3} - \int x^{-4} \, dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

**Câu 93. (Mã 110 2017)** Cho  $F(x) = (x-1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

- A.  $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (4-2x)e^x + C$       B.  $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (x-2)e^x + C$   
 C.  $\int f'(x)e^{2x} \, dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$       D.  $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (2-x)e^x + C$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Theo đề bài ta có } \int f(x).e^{2x} \, dx = (x-1)e^x + C, \text{ suy ra } f(x).e^{2x} = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1).e^x$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x} + (x-1).e^{-x} = x.e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x).e^{-x}$$

$$\text{Suy ra } K = \int f'(x)e^{2x} \, dx = \int (1-x)e^x \, dx = \int (1-x)d(e^x) = e^x(1-x) + \int e^x \, dx = (2-x)e^x + C.$$

**Câu 94.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = xe^x$  và  $f(0) = 2$ . Tính  $f(1)$ .

- A.  $f(1) = 3$ .      B.  $f(1) = e$ .      C.  $f(1) = 5 - e$ .      D.  $f(1) = 8 - 2e$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$f(x) = \int f'(x) \, dx = \int x.e^x \, dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \rightarrow f(x) = x.e^x - \int e^x \, dx = x.e^x - e^x + C$$

Theo đề:  $f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -1 + C \Leftrightarrow C = 3$

$$\Rightarrow f(x) = x.e^x - e^x + 3$$

$$\Rightarrow f(1) = 3.$$

**Câu 95. (Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 2$ . Tất cả các nguyên hàm của  $f(x)e^{2x}$  là

- A.  $(x-2)e^x + e^x + C$     B.  $(x+2)e^{2x} + e^x + C$     C.  $(x-1)e^x + C$     **D.  $(x+1)e^x + C$**

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C_1$ .

Vì  $f(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x \Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.$$

**Câu 96. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = (x+1)e^x, f(0) = 0$  và  $\int f(x) dx = (ax+b)e^x + c$  với  $a, b, c$  là các hằng số. Khi đó:

- A.  $a+b=2$ .    B.  $a+b=3$ .    C.  $a+b=1$ .    **D.  $a+b=0$ .**

**Lời giải**

Theo đề:  $f'(x) = (x+1)e^x$ . Nguyên hàm 2 vế ta được

$$\int f'(x) dx = \int (x+1)e^x dx \Leftrightarrow f(x) = (x+1)e^x - \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

Mà  $f(0) = 0 \Rightarrow 0.e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = xe^x$ .

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Suy ra  $a=1; b=-1 \Rightarrow a+b=0$ .

**Câu 97. (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = xe^{-x}$ . Tính  $F(x)$  biết  $F(0) = 1$ .

- A.  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$ .**    B.  $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ .  
C.  $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$ .    D.  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = F(x; C).$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow -e^{-0} + C = 1 \Leftrightarrow C = 2. \text{ Vậy } F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2.$$

**Câu 98. (Sở Quảng Nam - 2018)** Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ.

Tính tích  $ab$ ?

A.  $ab = \frac{1}{8}$ .

B.  $ab = \frac{1}{4}$ .

C.  $ab = -\frac{1}{8}$ .

D.  $ab = -\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

Khi đó  $\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$ .

Vậy  $ab = \frac{1}{8}$ .

**Câu 99. (Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$  sao cho

$F(-2) + F(1) = 0$ . Giá trị của  $F(-1) + F(2)$  bằng

A.  $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$ .

B. 0.

C.  $\frac{7}{3} \ln 2$ .

D.  $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$ .

**Lời giải**

Tính  $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+3} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có  $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \int \frac{dx}{x(x+3)} = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C = F(x, C)$ .

Lại có  $F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{3} \ln 2 + C \right) + \left( -\ln 4 + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} + C \right) = 0 \Leftrightarrow 2C = \frac{7}{3} \ln 2$ .

Suy ra  $F(-1) + F(2) = \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + 2C = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$ .

**Câu 100. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Gọi  $g(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \ln(x-1)$ . Cho biết  $g(2) = 1$  và  $g(3) = a \ln b$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của  $T = 3a^2 - b^2$

A.  $T = 8$ .

B.  $T = -17$ .

C.  $T = 2$ .

D.  $T = -13$ .

**Lời giải**

Đặt  $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} \\ v = x-1 \end{cases}$

$g(x) = \int \ln(x-1) dx = (x-1) \ln(x-1) - \int \frac{x-1}{x-1} dx = (x-1) \ln(x-1) - x + C$

Do  $g(2) = 1 \Leftrightarrow 1 \ln 1 - 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow g(x) = (x-1) \ln(x-1) - x + 3$

Suy ra:  $g(3) = 2 \ln 2 - 3 + 3 = 2 \ln 2 = \ln 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow 3a^2 - b^2 = -13$

**Câu 101. (Sở Quảng Nam - 2018)** Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ.

Tính tích  $ab$ ?

**A.**  $ab = \frac{1}{8}$ .

**B.**  $ab = \frac{1}{4}$ .

**C.**  $ab = -\frac{1}{8}$ .

**D.**  $ab = -\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

**BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI**

<https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKIG?usp=sharing>

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

**Tham gia ngay: Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)**

<https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

**Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương**

[https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view\\_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber)

**Tải nhiều tài liệu hơn tại:** <http://diendangiaovientoan.vn/>

**ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!**

Nguyễn Bảo Vương