

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

① Số phức $z = a + bi$ có phần thực là a , phần ảo là b .

② Số phức liên hợp $\bar{z} = a - bi$ và cần nhớ $i^2 = -1$.

③ Số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$.

Số phức liên hợp $\bar{z} = a - bi$ có điểm biểu diễn $N(a; -b)$.

Hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục hoành Ox .

• $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$;

$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

④ Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.

⑤ Mô đun của số phức z là: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

• $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

• $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ • $||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$

♦ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$. Khi đó

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad \text{♦ Phép trừ hai số phức}$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

♦ **Phép nhân hai số phức** $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

$$k \cdot z = k \cdot (a + bi) = ka + kbi$$

♦ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Dạng toán. Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K ?

— **Bước 1.** Gọi số phức cần tìm là $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

— **Bước 2.** Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến mô đun, biểu thức có chứa $z, \bar{z}, |z|, \dots$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình $\Rightarrow x, y$.

🔍 **Lưu ý**

Trong trường phức \mathbb{C} , cho số phức $z = x + yi$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x, y \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Khi đó, ta cần nhớ:

— Mô đun của số phức $z = x + yi$ là $|z| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{thực})^2 + (\text{ảo})^2}$.

— Số phức liên hợp của $z = x + yi$ là $\bar{z} = x - yi$ (ngược dấu ảo).

— Hai số phức $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ (hai số phức bằng nhau khi thực = thực và ảo = ảo).

Dạng 1. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

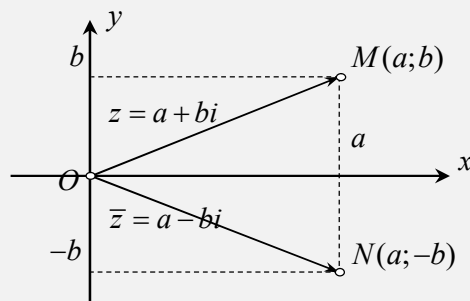
Câu 1. (Đề Tham Khảo 2017) Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4

B. 0

C. 2

D. 3



- Câu 2. (Mã 110 2017)** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$. Tính $S = 4a + b$.
- A. $S = -4$ B. $S = 2$ C. $S = -2$ D. $S = 4$
- Câu 3. (Đề Tham Khảo 2018)** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.
- A. $P = -1$ B. $P = -5$ C. $P = 3$ D. $P = 7$
- Câu 4. (Mã 110 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo?
- A. 0 B. 2 C. 4 D. 3
- Câu 5. (Mã 104 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?
- A. 1 B. 3 C. 4 D. 2
- Câu 6. (Mã 103 2018)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?
- A. 1 B. 4 C. 2 D. 3
- Câu 7. (Mã 102 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 3 - i) + 2i = (4 - i)z$?
- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4
- Câu 8. (Mã 105 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| = 5$ và $|z - 2i| = |z - 2 - 2i|$. Tính $|z|$.
- A. $|z| = 17$ B. $|z| = \sqrt{17}$ C. $|z| = \sqrt{10}$ D. $|z| = 10$
- Câu 9. (Mã 105 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z + 2}$ là số thuần ảo?
- A. 0 B. 2 C. Vô số D. 1
- Câu 10. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z\bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 11. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i\sqrt{5}| + |z - i\sqrt{5}| = 6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?
- A. 3 B. 4 C. 2 D. 0
- Câu 12. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = |z_2| = 2$ và $|z_1 + 2z_2| = 4$. Giá trị của $|2z_1 - z_2|$ bằng
- A. $2\sqrt{6}$. B. $\sqrt{6}$. C. $3\sqrt{6}$. D. 8.
- Câu 13.** Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Môđun của số phức $w = 1 - z + z^2$ bằng
- A. $|w| = \sqrt{445}$. B. $|w| = \sqrt{425}$. C. $|w| = \sqrt{37}$. D. $|w| = \sqrt{457}$
- Câu 14.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4|i + |z - 2i| = \sqrt{5}(1 + i)$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b$.
- A. $T = 2$. B. $T = 3$. C. $T = 1$. D. $T = -1$.
- Câu 15.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3 + 2i|z|^2 = 0$.

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 6
- Câu 16.** Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z+1-2i| = |\bar{z}+3+4i|$ và $\frac{z-2i}{z+i}$ là một số thuần ảo
 A. 0. B. Vô số. C. 1. D. 2.
- Câu 17.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)| = \sqrt{10}$ và $z.\bar{z} = 25$.
 A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 18.** (THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2 + |z-\bar{z}|i + (z+\bar{z})i^{2019} = 1$?
 A. 4 B. C. 1 D. 3
- Câu 19.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = |z+\bar{z}| + |z-\bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo
 A. 4 B. 2 C. 3 D. 5
- Câu 20.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3 + 2i|z|^2 = 0$.
 A. 4 B. 3 C. 2 D. 6
- Câu 21.** (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019) Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-3| = |z-1|$ và $(z+2)(\bar{z}-i)$ là số thực. Tính $a+b$.
 A. -2. B. 0. C. 2. D. 4.
- Câu 22.** (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z+1+3i - |z|i = 0$. Tính $S = 2a+3b$.
 A. $S = -6$. B. $S = 6$. C. $S = -5$. D. $S = 5$.
- Câu 23.** Cho ba số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$
 A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.
- Câu 24.** (THPT Chuyên Hạ Long - Lần 2 - 2018) Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $|z+2+5i| = 5$ và $z.\bar{z} = 82$. Tính giá trị của biểu thức $P = a+b$.
 A. 10. B. -8. C. -35. D. -7.
- Câu 25.** (Đồng Tháp - 2018) Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i| = |2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.
 A. $P = \sqrt{3}$. B. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $P = \sqrt{2}$. D. $P = 2$.
- Câu 26.** (Chuyên Quang Trung - 2018) Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó:

A. $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $m_0 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $m_0 \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 27. (Chuyên Quang Trung - 2018) Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z - m| = 6$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S .

A. 10. B. 0. C. 16. D. 8.

Câu 28. (Cần Thơ - 2018) Cho số phức z thỏa mãn $z - 4 = (1+i)|z| - (4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. B. 1. C. 16. D. 4.

Câu 29. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa $z\bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 - 10i$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -17$. B. $S = 5$. C. $S = 7$. D. $S = 17$.

Câu 30. (Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018) Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{iz - (3i+1)\bar{z}}{1+i} = |z|^2$. Số phức $w = \frac{13}{3}iz$ có môđun bằng

A. 26. B. $\sqrt{26}$. C. $\frac{3\sqrt{26}}{2}$. D. 13.

Câu 31. (Toán Học Tuổi Trẻ - 2018) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 + z_2| = 3$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. một giá trị khác.

Câu 32. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 7 + i - |z|(2+i) = 0$ và $|z| < 3$. Tính $P = a + b$.

A. 5. B. $-\frac{1}{2}$. C. 7. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 33. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 2\sqrt{3}, |z_2| = 3\sqrt{2}$. Hãy tính giá trị biểu thức $P = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2$.

A. $P = 60$. B. $P = 20\sqrt{3}$. C. $P = 30\sqrt{2}$. D. $P = 50$.

Câu 34. (Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018) Cho số phức $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|w^2 + 4| = 2|w|$. Đặt $P = 8(x^2 - y^2) + 12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P = -(|w|^2 - 2)^2$. B. $P = -(|w|^2 - 2)$. C. $P = -(|w| - 4)^2$. D. $P = -(|w|^2 - 4)^2$.

Câu 35. Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 8| + |z - 6i| = 5(1+i)$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

A. $P = 1$. B. $P = 14$. C. $P = 2$. D. $P = 7$.

Câu 36. (Chuyên Đại học Vinh 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2 + |z-\bar{z}|i + (z+\bar{z})i^{2019} = 1$?

A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

- Câu 37. (Thpt Hàm Rồng 2019)** Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.
- A. $P = 3$. B. $P = -1$. C. $P = -5$. D. $P = 7$.
- Câu 38. (Sở GD Kon Tum - 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = |z + 1 - i|$ và $|z|^2 + 2(z + \bar{z}) = 5$?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.
- Câu 39. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa mãn $z\bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 - 10i$. Tính $S = a + b$.
- A. $S = -17$. B. $S = 5$. C. $S = 7$. D. $S = 17$.
- Câu 40. (SGD Điện Biên - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và $|z + 2|^2 - |z - i|^2 = 33$. Module của số phức $z - 2 - i$ bằng
- A. $\sqrt{5}$. B. 9. C. 25. D. 5.
- Câu 41. (Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(z + 1 + i)(\bar{z} - i) + 3i = 9$ và $|\bar{z}| > 2$. Tính $P = a + b$.
- A. 2. B. 1. C. -3. D. -1.
- Câu 42. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3$, $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2}$ và $|z_1 - iz_2| = 6$. Biết $|z_2| > |z_1|$, tính $|z_2|$.
- A. $3\sqrt{7}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{3}$.
- Câu 43.** Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$.
- A. 3. B. -2. C. -3. D. 2.

Dạng 2. Một số bài toán liên quan đến số phức có lũy thừa bậc cao, chứa tham số

- Câu 44. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức $z = (1 + i)^{2019}$. Phần thực của z bằng
- A. -2^{1009} . B. 2^{2019} . C. -2^{2019} . D. 2^{1009} .
- Câu 45. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Số phức $z = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{2018}$ có phần ảo bằng
- A. $2^{1009} + 1$. B. $1 - 2^{1009}$. C. $2^{1009} - 1$. D. $-(2^{1009} + 1)$.
- Câu 46. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Gọi T là tổng phần thực, phần ảo của số phức $w = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2018i^{2018}$. Tính giá trị của T .
- A. $T = 0$. B. $T = -1$. C. $T = 2$. D. $T = -2$.
- Câu 47.** Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $S = z_1^{2019} + z_2^{2019} + z_3^{2019}$.
- A. $S = -1$. B. $S = 2^{2019}$. C. $S = 1$. D. $S = 2^{-2019}$.

Câu 48. Tính $S = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2019i^{2019}$

- A. $S = -1010 - 1010i$. B. $S = 1010 - 1010i$. C. $S = 2019i$. D. $S = 1010 + 1010i$.

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + \dots + \left(z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}\right)^2.$$

- A. $P = 4038$. B. $P = 2019$. C. $P = 673$. D. $P = 6073$.

Câu 50. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018) Khai triển của biểu thức $(x^2 + x + 1)^{2018}$ được viết thành

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}. \text{ Tổng } S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4034} + a_{4036} \text{ bằng}$$

- A. 2^{1009} . B. -2^{1009} . C. 0. D. -1.

Câu 51. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Câu 52. (Mã 104 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 53. (THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức

$$z = \frac{m+2i}{m-2i} \text{ có phần thực dương}$$

- A. $m > 2$. B. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $-2 < m < 2$. D. $m < -2$.

Câu 54. (Kon Tum - 2019) Cho hai số phức $z = 3 - 4i$ và $z' = (2 + m) + mi$ ($m \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z'| = |iz|$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng

- A. -1. B. $\frac{\sqrt{46}}{2}$. C. 0. D. -2.

Câu 55. Biết rằng $z = m^2 - 3m + 3 + (m-2)i$, với $m \in \mathbb{R}$, là một số thực. Giá trị của biểu thức $P = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2019}$ bằng

- A. 1. B. 2020. C. 2019. D. 0.

Câu 56. (Chuyên Quang Trung - 2018) Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó:

- A. $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $m_0 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $m_0 \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 57. (Chuyên Quang Trung - 2018) Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m| = 6$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S .

- A. 10. B. 0. C. 16. D. 8.

Câu 58. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z}+2) - (z+\bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là

A. 1.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI**<https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing>**Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>**Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương**https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber**Tải nhiều tài liệu hơn tại:** <http://diendangiaovientoan.vn/>**ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!**

Nguyễn Bảo Vương