

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM**Dạng 1. Tính toán liên quan đến logarit dùng đẳng thức**

♦ Định nghĩa logarit:

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$, $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$:

♦ Các tính chất logarit: Cho ba số thực dương a, b, c với $0 < a, b, c \neq 1$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \log_a b + \log_a c = \log_a bc; \log_a b - \log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c};$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

♦ Phương trình mũ cơ bản nhất $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (0 < a \neq 1; b > 0)$.

♦ Cách giải phương trình mũ có dạng $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$ trong đó $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ là hệ số, cơ số $0 < a, b \neq 1$

B1: Biến đổi phương trình về dạng: $2\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^x + \alpha_3 = 0 \quad (*)$.

B2: Đặt ẩn phụ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t, t > 0$, phương trình (*) trở thành $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$.

B3: Giải tìm t thỏa mãn $t > 0$.

B4: Giải phương trình mũ cơ bản $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t$. Tìm được x .

Câu 1. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 x = \log_6 y = \log_4 (2x + y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$. D. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Câu 2. (Chuyên Lào Cai - 2020) các số thực a, b, c thỏa mãn $(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 8$ và $2^a = 3^b = 6^{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

- A. 2. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. 8.

Câu 3. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Khi đó biểu thức $P = \frac{5 - 2^x - 2^{-x}}{8 + 4 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{-x}} = \frac{a}{b}$ với

$\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng

- A. 10. B. -8. C. 8. D. -10.

Câu 4. (Sở Ninh Bình 2019) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 9^b = 6^c$. Khi đó $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\sqrt{6}$. D. 2.

Câu 5. Biết $a = \log_{30} 10$, $b = \log_{30} 150$ và $\log_{2000} 15000 = \frac{x_1 a + y_1 b + z_1}{x_2 a + y_2 b + z_2}$ với $x_1; y_1; z_1; x_2; y_2; z_2$ là các số

nguyên, tính $S = \frac{x_1}{x_2}$.

- A. $S = \frac{1}{2}$. B. $S = 2$. C. $S = \frac{2}{3}$. D. $S = 1$.

Câu 6. Cho các số thực dương x, y khác 1 và thỏa mãn $\begin{cases} \log_x y = \log_y x \\ \log_x (x - y) = \log_y (x + y) \end{cases}$.

Giá trị của $x^2 + xy - y^2$ bằng

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 7. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} = 100$ và $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log \sqrt{a}$, $\log \sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương. Tính $P = ab$.

- A. 10^{164} . B. 10^{100} . C. 10^{200} . D. 10^{144} .

Câu 8. Cho $\log_9 5 = a$; $\log_4 7 = b$; $\log_2 3 = c$. Biết $\log_{24} 175 = \frac{mb + nac}{pc + q}$. Tính $A = m + 2n + 3p + 4q$

- A. 27 B. 25 C. 23 D. 29

Câu 9. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 - 6y^2 = xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12} (x + 3y)}$.

- A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = \frac{1}{3}$.

Câu 10. Cho $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log e)) = 2$. Tính $f(\log(\ln 10))$.

- A. 4. B. 10. C. 8. D. 2.

Câu 11. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$ và $\frac{6 + 3(3^x + 3^{-x})}{2 \cdot 3^{x+1} - 3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = ab$.

- A. $P = 10$. B. $P = -45$. C. $P = -10$. D. $P = 45$.

Câu 12. Cho hai số thực dương a, b thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a + b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 13. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x + 2y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

- A. $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. B. $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$. C. $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$. D. $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Câu 14. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương, tính $a + b$.

- A. $a + b = 14$. B. $a + b = 3$. C. $a + b = 21$. D. $a + b = 34$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3 (2u_5 - 63) = 2 \log_4 (u_n - 8n + 8)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 19.

Dạng 2. Bài toán tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất mũ – logarit (sử dụng phương pháp bất đẳng thức – biến đổi)**① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)**

• $\forall a, b \geq 0$, thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi: $a = b$.

• $\forall a, b, c \geq 0$, thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

② Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpki)

• $\forall a, b, x, y$, thì: $(a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu "=" khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

• $\forall a, b, c, x, y, z$ thì: $(a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $|a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Hệ quả. Nếu a, b, c là các số thực và x, y, z là các số dương thì:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad \text{và} \quad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} : \text{bất đẳng thức cộng mẫu số.}$$

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. C. $[3; 4)$. D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 2. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2 + y^2)$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Câu 3. (Mã 103 2018) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. 6 B. $\frac{27}{4}$ C. $\frac{20}{3}$ D. 9

Câu 4. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

- A. $\frac{33}{4}$. B. $\frac{65}{8}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.

Câu 5. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4y}{2x + y + 1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây?}$$

- A. -2. B. -3. C. -5. D. -4.

Câu 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ là

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2+\sqrt{10}}{4}$. C. $\frac{5+\sqrt{10}}{4}$. D. $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

Câu 7. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Cho các số thực a, b thay đổi, thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi biểu thức $P = \log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

- A. $3 + 9^{\sqrt{2}}$ B. $9 + 2^{\sqrt{3}}$ C. $2 + 9\sqrt{2}$ D. $3 + 3\sqrt{2}$

Câu 8. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a < 1; \frac{1}{8} < b < 1; \frac{3}{8} < c < 1$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{16} \log_a \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{4} \log_b \left(\frac{c}{2} - \frac{3}{16} \right) + \frac{1}{3} \log_c a.$$

- Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\sqrt{3} \leq M < 2$. B. $M \geq 2$. C. $\sqrt{2} \leq M < \sqrt{3}$. D. $M < \sqrt{2}$.

Câu 9. Cho các số thực a, b, m, n sao cho $2m + n < 0$ và thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \log_2(a^2 + b^2 + 9) = 1 + \log_2(3a + 2b) \\ 9^{-m} \cdot 3^{-n} \cdot 3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln[(2m + n + 2)^2 + 1] = 81 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2}$

- A. $2\sqrt{5} - 2$. B. 2 . C. $\sqrt{5} - 2$. D. $2\sqrt{5}$

Câu 10. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a < 1; \frac{1}{8} < b < 1; \frac{3}{8} < c < 1$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{3}{16} \log_a \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{4} \log_b \left(\frac{c}{2} - \frac{3}{16} \right) + \frac{1}{3} \log_c a.$$

- Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\sqrt{3} \leq M < 2$. B. $M \geq 2$. C. $\sqrt{2} \leq M < \sqrt{3}$. D. $M < \sqrt{2}$.

Câu 11. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Xét các số thực dương a, b, c lớn hơn 1 (với $a > b$) thỏa mãn $4(\log_a c + \log_b c) = 25 \log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a + \log_a c + \log_c b$ bằng

- A. 5. B. 8. C. $\frac{17}{4}$. D. 3.

Câu 12. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4xy + 2x - y$ có dạng $m + n\sqrt{165}$ (với m, n là các số tự nhiên), tính $S = m + n$.

- A. 58. B. 54. C. 56. D. 60

Câu 13. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$?

- A. $T = 9$. B. $T = \frac{7}{3}$. C. $T = \frac{5}{3}$. D. $T = 7$.

- Câu 14. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng
- A. $\frac{27}{4}$. B. 6. C. $\frac{20}{3}$. D. 9.
- Câu 15. (Chuyên Sơn La - 2020)** Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4040}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1010}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8080}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}$ bằng
- A. 2020. B. 16160. C. 20200. D. 13130.
- Câu 16. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a b - \log_b c$. Giá trị của biểu thức $S = 3m - M$ bằng
- A. -16. B. 4. C. -6. D. 6.
- Câu 17. (Sở Hưng Yên - 2020)** Cho các số thực $x, y \geq 1$ và thỏa mãn điều kiện $xy \leq 4$. Biểu thức $P = \log_{4x} 8x - \log_{2y^2} \frac{y^2}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0, y = y_0$. Đặt $T = x_0^4 + y_0^4$ mệnh đề nào sau đây đúng
- A. $T = 131$. B. $T = 132$. C. $T = 129$. D. $T = 130$.
- Câu 18. (Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 10$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 5 \log a \cdot \log b + 2 \log b \cdot \log c + \log c \cdot \log a$ bằng $\frac{m}{n}$ với m, n nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tổng $m + n$ bằng
- A. 13. B. 16. C. 7. D. 10.
- Câu 19. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$. Giá trị biểu thức $a + 2b$ bằng?
- A. 6. B. $\frac{11}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. 22.
- Câu 20. (Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho các số thực dương $a; b; c$ khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c + 2 \log_b \frac{c}{b} = \log_a \frac{c}{a^3 b}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a ab - \log_b bc$. Tính giá trị biểu thức $S = 2m^2 + 9M^2$.
- A. $S = 28$. B. $S = 25$. C. $S = 26$. D. $S = 27$.
- Câu 21. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng
- A. 9. B. 6. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{20}{3}$.
- Câu 22. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Xét các số thực a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. C. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 23. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho biểu thức $P = 3^{y-2x+3}(1+4^{2x-y-1}) - 2^{2x-y-1}$ và biểu thức $Q = \log_{y-3-2x} 3y$. Giá trị nhỏ nhất của y để tồn tại x đồng thời thỏa mãn $P \geq 1$ và $Q \geq 1$ là số y_0 . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $4y_0 + 1$ là số hữu tỷ. B. y_0 là số vô tỷ.
C. y_0 là số nguyên dương. D. $3y_0 + 1$ là số tự nhiên chẵn.

Câu 24. (Trường VINSCHOOL - 2020) Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1 \neq 1$ thỏa mãn $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng:

- A. 11. B. 8. C. 9. D. 10.

Câu 25. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$.

- A. $T = 9$. B. $T = \frac{7}{3}$. C. $T = \frac{5}{3}$. D. $T = 7$.

Câu 26. Xét các số thực $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(-1; 2)$. B. $[-5; -1)$. C. $[2; 4)$. D. $[4; 6)$.

Câu 27. Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $[10; 13)$. B. $[7; 10)$. C. $[3; 5)$. D. $[5; 7)$.

Câu 28. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x.y$ là

- A. $P = \frac{9}{4}$. B. $P = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $P = \frac{3}{2}$. D. $P = \frac{4}{9}$.

Câu 29. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{\frac{x^2}{y}} = b^{\frac{y^2}{x}} = ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x.y$ là

- A. $P = 2$. B. $P = 4$. C. $P = 3$. D. $P = 1$.

Câu 30. Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1, y > 2$ và $a^{x+1} = b^{y-2} = c^{z+1} = abc$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$ là

- A. $P = 13$. B. $P = 3$. C. $P = 9$. D. $P = 1$.

Dạng 3. Sử dụng phương pháp hàm số (hàm đặc trưng) giải các bài toán logarit

1. Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên $(a; b)$ thì

* $\forall u; v \in (a; b): f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

* Phương trình $f(x) = k$ ($k = \text{const}$) có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

2. Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên $(a; b)$, đồng thời

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < 0 \text{ thì phương trình } f(x) = k \text{ (} k = \text{const) có duy nhất nghiệm trên } (a; b).$$

3. Tính chất của logarit:

1.1. So sánh hai logarit cùng cơ số: Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c . ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.	1.2. Hệ quả: Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c . ◦ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$. ◦ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$. ◦ $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.
2. Logarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$	3. Logarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$ Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.
4. Logarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α , ta có $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$. Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ (n nguyên dương).	5. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_a b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

Câu 1. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4 (x^2 + y) \geq \log_3 (x + y)$?

A. 55. B. 28. C. 29. D. 56.

Câu 2. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4 (x^2 + y) \geq \log_3 (x + y)$?

A. 59. B. 58. C. 116. D. 115.

Câu 3. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3 (x^2 + y) \geq \log_2 (x + y)$?

A. 89. B. 46. C. 45. D. 90.

Câu 4. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng

A. $\frac{65}{8}$. B. $\frac{33}{4}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.

Câu 5. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3 (3x + 3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Câu 6. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{21}{4}$.

D. $\frac{41}{8}$.

Câu 7. (Mã 104 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 80.

B. 79.

C. 157.

D. 158

Câu 8. (Mã 104 - 2020 Lần 1) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{21}{4}$.

D. $\frac{41}{8}$.

Câu 9. (Mã 102 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 16$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m - n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 16.

B. 14.

C. 15.

D. 13.

Câu 10. (Mã 102 - 2020 Lần 2) Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 9

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 11. (Mã 103 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 10$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 7.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

Câu 12. (Mã 103 - 2020 Lần 2) Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 14$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng ba số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 14.

B. 12.

C. 11.

D. 13.

Câu 14. (Mã 104 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 12$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1, 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 12.

B. 10.

C. 11.

D. 9.

Câu 15. (Mã 104 - 2020 Lần 2) Xét các số thực x và y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{4y}{2x+y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 16. (Mã 123 2017) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị

nhỏ nhất P_{\min} của $P = x + y$

A. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$ B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$

C. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{21}$ D. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$

Câu 17. (Mã 110 2017) Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị

nhỏ nhất P_{\min} của $P = a + 2b$.

A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}$ B. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$ C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$ D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$

Câu 18. (Chuyên Lê Thánh Tông 2019) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y$.

A. $P_{\max} = 10$. B. $P_{\max} = 0$. C. $P_{\max} = 1$. D. $P_{\max} = \ln 2$.

Câu 19. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \frac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$.

A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

Câu 20. (Chuyên Hạ Long 2019) Cho các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức

$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là sai

A. $k \in [2; 3]$. B. $k \in (0; 1)$. C. $k \in [0; 1]$. D. $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 21. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1} (2a-8b) = 1$. Tính $P = \frac{a}{b}$ khi biểu thức $S = 4a + 6b - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{8}{5}$ B. $\frac{-13}{2}$ C. $\frac{-13}{4}$ D. $\frac{17}{44}$

Câu 22. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho a, b là các số dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \frac{a}{b} + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b}\right)$.

A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.

Câu 23. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019) Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

- Câu 24. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Với hai số thực a, b bất kì, ta kí hiệu $f_{(a,b)}(x) = |x-a| + |x-b| + |x-2| + |x-3|$. Biết rằng luôn tồn tại duy nhất số thực x_0 để $\min_{x \in \mathbb{R}} f_{(a,b)}(x) = f_{(a,b)}(x_0)$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $a^b = b^a$ và $0 < a < b$. Số x_0 bằng
- A. $2e-1$ B. $2,5$ C. e D. $2e$
- Câu 25. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số thực $a > 1, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.
- A. $3\sqrt[3]{4}$. B. 4 C. $3\sqrt[3]{2}$. D. $\sqrt[3]{4}$.
- Câu 26. (Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x (e^x)^{e^y} \geq x^y (e^y)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
- Câu 27.** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{\min} của $P = x + y$.
- A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$. D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.
- Câu 28. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{\min} của biểu thức $P = x + 3y$.
- A. $P_{\min} = 9$ B. $P_{\min} = 8$ C. $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$ D. $P_{\min} = \frac{17}{2}$
- Câu 29. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019} x + \log_{2019} y \geq \log_{2019} (x^2 + y)$. Gọi T_{\min} là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x + y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $T_{\min} \in (7; 8)$ B. $T_{\min} \in (6; 7)$ C. $T_{\min} \in (5; 6)$ D. $T_{\min} \in (8; 9)$
- Câu 30. (Mã 105 2017)** Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .
- A. 0 B. Vô số C. 1 D. 2
- Câu 31. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , có bảng biến thiên như hình vẽ và có đạo hàm cấp hai $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	n^2	$+\infty$

Gọi a, b, c, n là các số thực và biểu thức: $P = -\left(e^{f(a)} + e^{f(b)} + e^{f(c)}\right) + \frac{3}{2} \left[f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + 1 \right]^2$. Khẳng

định đúng với mọi $a, b, c, n \in \mathbb{R}$ là

- A. $0 < P < 3$. B. $7 - 3e \leq P \leq 0$. C. $P \geq 3$. D. $P < 7 - 3e$.

Câu 32. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in [1513; 2019)$ B. $m_0 \in [1009; 1513)$ C. $m_0 \in [505; 1009)$ D. $m_0 \in [1; 505)$

Câu 33. (Việt Đức Hà Nội 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = m \log_2^2 x - 2 \log_2 x + 2m + 1$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất có hoành độ thuộc khoảng $[1; +\infty)$.

- A. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. B. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
 C. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 34. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x \neq y$ và

$\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y < \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 3y^2}{xy - y^2}$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. -2 . D. 6 .

Câu 35. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$2(x^2 + y^2 + 4) + \log_2 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) = \frac{1}{2}(xy - 4)^2$. Khi $x + 4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

- A. 2 . B. 4 . C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 36. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$

- A. $T_{\min} = \frac{4}{3}$. B. $T_{\min} = 4$. C. $T_{\min} = 2$. D. $T_{\min} = \frac{8}{3}$.

Câu 37. (Chuyên KHTN - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$\log_2 \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1) - 4(xy+1). \text{ Giá trị lớn nhất của biểu thức}$$

$$P = \frac{5x+3y-2}{2x+y+1}.$$

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 38. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và

$$\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } P \text{ với } P = 2x + y$$

- A. 2. B. 1. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 39. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3x^4y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}.$

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 40. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = (ab)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\sqrt{2}x + y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $[10; 15)$. B. $[6; 10)$. C. $(1; 4)$. D. $[4; 6)$.

Câu 41. (Chuyên Lào Cai - 2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_\pi x + \log_\pi y \geq \log_\pi (x + y^2)$. Biểu thức $P = x + 8y$ đạt giá trị nhỏ nhất của bằng:

- A. $P_{\min} = 16$. B. $P_{\min} = \frac{33}{2}$. C. $P_{\min} = 11\sqrt{2}$. D. $P_{\min} = \frac{31}{2}$.

Câu 42. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$?

- A. $T = 9$. B. $T = \frac{7}{3}$. C. $T = \frac{5}{3}$. D. $T = 7$.

Câu 43. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+2} (4a+6b-7) = 1$ và $27^c \cdot 81^d = 6c + 8d + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-c)^2 + (b-d)^2$.

- A. $\frac{49}{25}$. B. $\frac{64}{25}$. C. $\frac{7}{5}$. D. $\frac{8}{5}$.

Câu 44. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^3 + 3y$ là

- A. 16. B. 18. C. 12. D. 20.

Câu 45. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Xét các số thực dương a, b thỏa mãn

$$\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất } P_{\min} \text{ của } P = a + b.$$

- A. $P_{\min} = -1 + 2\sqrt{5}$. B. $P_{\min} = 2 + \sqrt{5}$. C. $P_{\min} = -1 + \sqrt{5}$. D. $P_{\min} = 1 + 2\sqrt{5}$.

Câu 46. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{2-x}{2+x} \right) - \log_2 y = 2x + 2y + xy - 5$.

Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + xy$ là bao nhiêu?

- A. $30 - 20\sqrt{2}$. B. $33 - 22\sqrt{2}$. C. $24 - 16\sqrt{2}$. D. $36 - 24\sqrt{2}$.

Câu 47. (Sở Bình Phước - 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2 (x^2 + 2y).$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + 2y$ bằng

- A. $2\sqrt{2} + 3$. B. $2 + 3\sqrt{2}$. C. $3 + \sqrt{3}$. D. 9.

Câu 48. (Sở Yên Bái - 2020) Cho các số thực x, y thuộc đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022}$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^3 + 6y^3 + 3x^2 - 9xy$. Tính $M.m$.

- A. $-\frac{5}{2}$. B. -5. C. 5. D. -3.

Câu 49. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất P_{\min} của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. $P_{\min} = \frac{17}{2}$. B. $P_{\min} = 8$. C. $P_{\min} = 9$. D. $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Câu 50. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 1$. Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$Q = f\left(\frac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right).$$

Tổng $M + m$ bằng

- A. $-4 - 3\sqrt{2}$. B. $-4 - 5\sqrt{2}$. C. $-4 - 2\sqrt{2}$. D. $-4 - 4\sqrt{2}$.

Câu 51. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hai số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b}.$$

- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{11}{4}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{7}{4}$.

Câu 52. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Với các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho

$$\log_2 \left(\frac{x + 2y + 2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = x(x - 4) + y(y - 8) + z(z - 8) - 2,$$

gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 7y - 11z + 8}{6x + 5y - 86}$ thứ tự là M và m . Khi đó $M + m$ bằng:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. 1. C. $-\frac{5}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

- Câu 53. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $\ln y \geq \ln(x^3 + 2) - \ln 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = e^{4y-x^3-x-2} - \frac{x^2+y^2}{2} + x(y+1) - y$.
- A. 1. B. 0. C. e . D. $\frac{1}{e}$.
- Câu 54. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y} = \frac{8-8xy}{x+y}$. Khi $P = 2xy^2 + xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.
- Câu 55. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log(x+2y) = \log(x) + \log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x}$ là:
- A. $\frac{31}{5}$. B. 6. C. $\frac{29}{5}$. D. $\frac{32}{5}$.
- Câu 56. (Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Cho các số thực x, y thay đổi, thỏa mãn $x > y > 0$ và $\ln(x-y) + \frac{1}{2}\ln(xy) = \ln(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của $M = x + y$ là
- A. $2\sqrt{2}$. B. 2. C. 4. D. 16.
- Câu 57. (Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Xét x, y, z là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $xyz = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_2^3 x + \log_2^3 y + \frac{1}{4}\log_2^3 z$ bằng
- A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{8}$.
- Câu 58.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+2y^2)$?
- A. 1 B. 3 C. 2 D. Vô số
- Câu 59.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$?
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 60.** Có bao nhiêu số nguyên $y < 10$ sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $5^{\sqrt{2}^y+x-2} + \sqrt{2}^y = 5^{x^2-x-1} + (x-1)^2$?
- A. 10 B. 1 C. 5 D. Vô số
- Câu 61.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$
- A. 2021. B. 10. C. 2020. D. 11.
- Câu 62.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x+y) - \log_2(1+\sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2-1)$
- A. 1 B. 3 C. 2 D. 5

Câu 63. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_3 \left(\frac{2^x - 1}{y} \right) = y + 1 - 2^x$?

A. 2019.

B. 11.

C. 2020.

D. 4.

Câu 64. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Xét các số thực a, b, x thỏa mãn $a > 1, b > 1, 0 < x \neq 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a (x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

A. $\frac{1-3\sqrt{3}}{4}$.B. $\frac{e}{2}$.C. $\frac{1}{4}$.D. $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI

☞ <https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing>

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ☞ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ☞ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ☞ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương

☞ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

Tải nhiều tài liệu hơn tại: <http://diendangiaovientoan.vn/>

ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!