TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

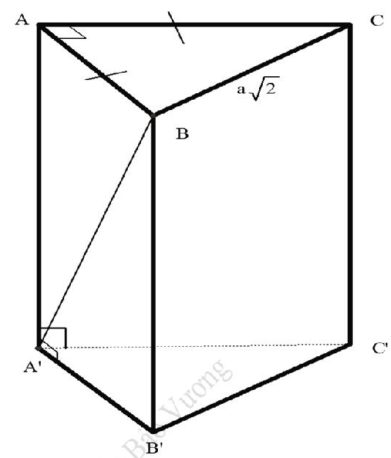
Dạng 1. Thể tích khối lăng trụ đứng

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}\Rightarrow AB=AC=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.a=\frac{1}{2}a^2$.

$A'B$ tạo với đáy một góc bằng $60^0\Rightarrow \widehat{BA'B'}=60^0$.

$\Delta_v BA'B'$: $\tan\widehat{BA'B'}=\frac{BB'}{A'B'}=\sqrt{3}\Rightarrow BB'=\sqrt{3}A'B'=a\sqrt{3}$.

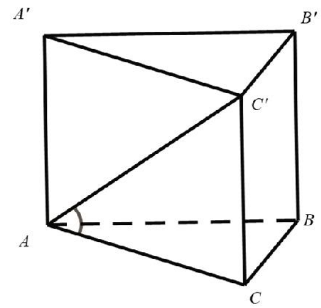
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'}=BB'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 2. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A. Cho $AC=AB=2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=2a^2$.

Hình chiếu vuông góc của AC' lên (ABC) là AC.

$\Rightarrow$ Góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và AC hay $\widehat{C'AC}$

Theo bài ra có $\widehat{C'AC}=30°$.

Xét tam giác $C'CA$ vuông tại C có $CC'=AC.\tan 30°=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

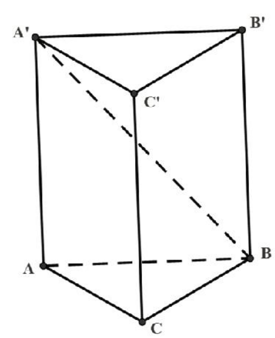
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=CC'.S_{ABC}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}.2a^2=\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{A'BA}=60^0 \Rightarrow A'A=AB.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

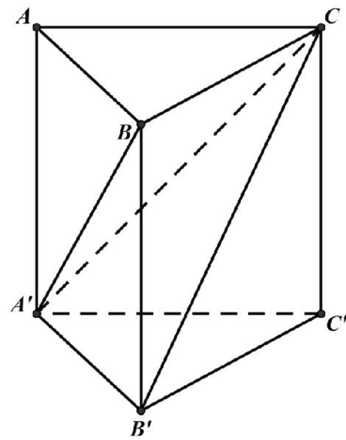
Có $S_{ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{a^2}{2}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.A'A=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. **(SGD Nam Định)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB}=30°$, biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{5}}$. Cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



* Ta có: $CC'//AA' \Rightarrow CC'//\left(AA'B'B\right)$

Mà $A'B \subset \left(AA'B'B\right)$, nên

$d\left(CC';A'B\right) = d\left(CC';\left(AA'B'B\right)\right) = C'A' = a\sqrt{3}$

* Ta có: $AC = A'C' = a\sqrt{3}$; $AB = A'B' = a$;

Diện tích đáy là $B = dt\left(ABC\right) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

* Dễ thấy $A'B' \perp \left(ACC'A'\right)$

Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ là $\widehat{B'CA'} = \alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{A'B'}{B'C} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow B'C = 2a\sqrt{5}$

$CC' = \sqrt{B'C^2 - B'C'^2} = \sqrt{20a^2 - 4a^2} = 4a$

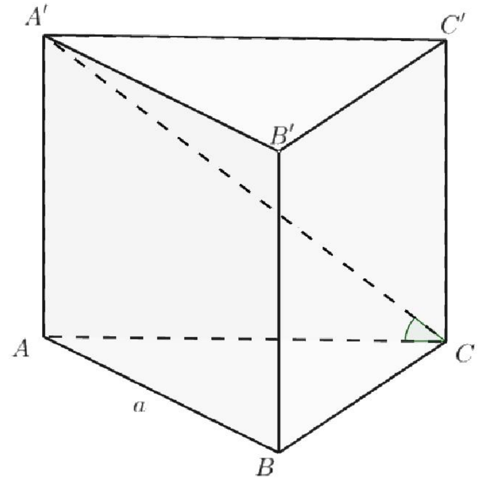
* Thể tích lăng trụ là $V = B.h$ với $h = CC'$ $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.4a = 2a^3\sqrt{3}.$

Câu 5. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Có: $\widehat{\left(A'C,\left(ABC\right)\right)}=\widehat{A'CA}=45°$.

Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{A'CA}=\dfrac{AA'}{AC}\Rightarrow AA'=a.$

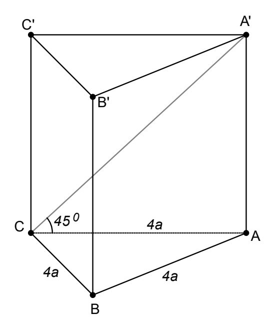
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V=AA'.S_{\Delta ABC}=a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 6. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 45^{o}. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **<u>C</u>.** $16a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>



$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.

Ta có:

$A'A\perp\left(ABC\right)\Rightarrow\left(\widehat{A'C,\left(ABC\right)}\right)=\widehat{A'CA}=45^{\text{o}}\Rightarrow\Delta A'AC$ vuông cân tại $A\Rightarrow A'A=AC=4a$.

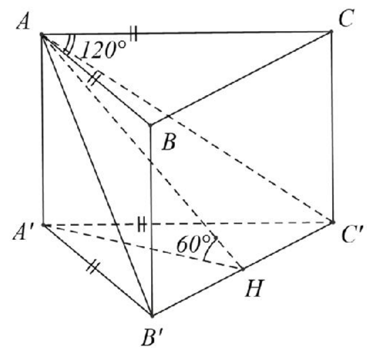
$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\left(AB\right)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\left(4a\right)^2\sqrt{3}}{4}=4a^2\sqrt{3}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=4a.4a^2\sqrt{3}=16a^3\sqrt{3}$.

Câu 7. **(Mã 104 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$ **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $B'C'$, khi đó góc giữa mp $(AB'C')$ và đáy là góc $\widehat{AHA'}=60°$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.AB.\sin 120°=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$B'C'=BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 120°}=\sqrt{a^2+a^2-2.a.a.\dfrac{-1}{2}}=a\sqrt{3}\Rightarrow A'H=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{B'C'}=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow AA'=A'H.\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

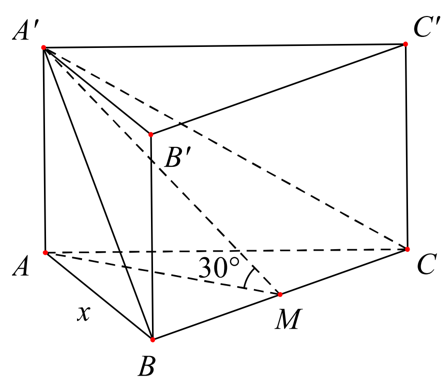
Vậy $V=S_{\Delta ACB}.AA'=\dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $AB=x,(x>0)$, gọi M là trung điểm BC.

Ta có $\begin{cases}(A'BC)\cap(ABC)=BC\\ AM\perp BC\\ A'M\perp BC\end{cases}\Rightarrow \widehat{((A'BC),(ABC))}=\widehat{A'MA}=30°$.

Xét $\Delta A'AM$, có $A'M = \dfrac{AM}{\cos 30°} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = x$.

$S_{A'BC} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}A'M.BC = 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

Suy ra $A'A = AM.\tan 30° = \dfrac{4.\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$; $S_{ABC} = \dfrac{16.\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

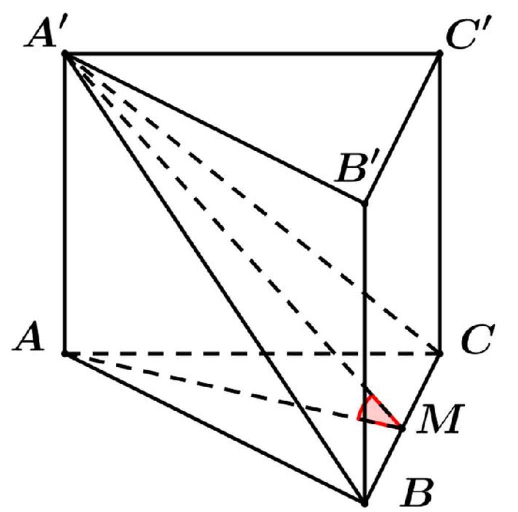
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{ABC} = 2.4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Câu 9. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

Chọn A



Vì đáy ABC là tam giác đều có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ cạnh đáy bằng a.

Gọi M trung điểm BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$

Từ đó ta có $\widehat{((A'BC),(ABC))} = \widehat{(A'M, AM)} = \widehat{A'MA} = 60^0$.

Xét $\Delta A'AM$ ta có $AA' = AM.\tan 60^0 = \dfrac{3a}{2}$

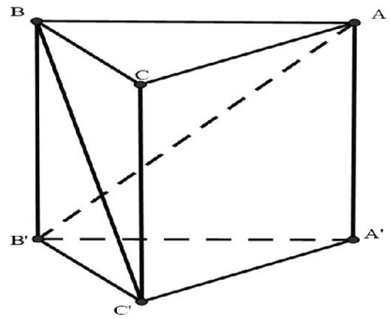
Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 10. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và AB' vuông góc với BC'. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $V = a^3\sqrt{6}$. **D.** $V = \dfrac{7a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{BB'}$, theo giả thiết $AB' \perp BC'$ nên

$$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{z} - \vec{x}\right)\left(\vec{y} + \vec{z}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{z}.\vec{y} + \left|\vec{z}\right|^2 - \vec{x}.\vec{y} - \vec{x}.\vec{z} = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{z}\right|^2 = \vec{x}.\vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{z}\right|^2 = \left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|\cos 60^o = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \left|\vec{z}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

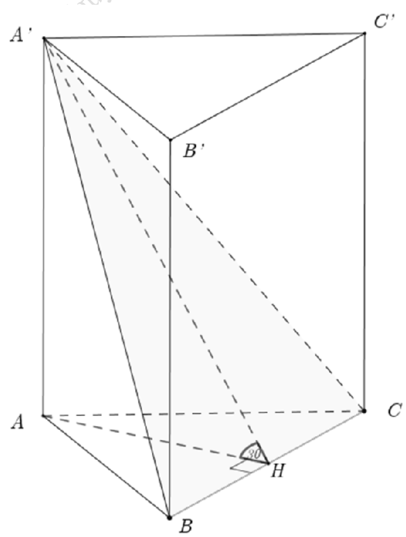
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^o.BB' = \frac{\sqrt{6}a^3}{8}$

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $\left(A'BC\right)$ hợp với mặt đáy ABC một góc $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Suy ra $AH \perp BC$.

$A'H \perp BC$.

Mà $\left(ABC\right) \cap \left(A'BC\right) = BC$

$\Rightarrow$ Góc giữa $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng góc $\left(AH; A'H\right) = \widehat{AHA'} = 30°$.

Ta có: ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'A = AH.\tan 30° = \frac{a}{2}$.

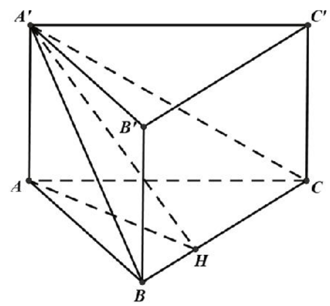
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'A.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 12. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



* Xác định góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy:

Trong mặt phẳng (ABC), dựng $AH \perp BC$ với H nằm trên cạnh BC. Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $A'H \perp BC$. Vậy $\widehat{((A'BC);(ABC))} = \widehat{A'HA} = 30°$

* Xét tam giác ABC có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích B của tam giác ABC là: $B = \frac{AB.AC}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

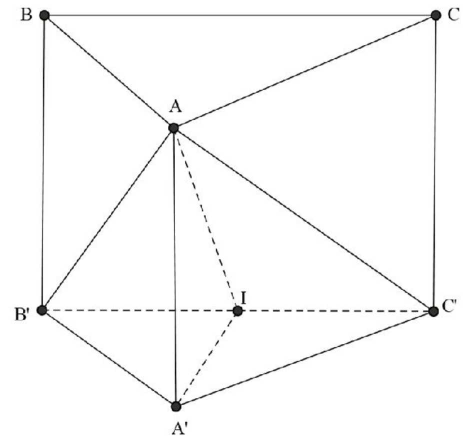
* Xét tam giác $A'HA$ vuông tại A, ta có: $A'A = AH.\tan 30° = \frac{a}{2}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, góc giữa mp$(AB'C')$ và mp(ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $3a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** a^3. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Ta có góc giữa mp$(AB'C')$ và mp(ABC) bằng góc giữa mp$(AB'C')$ và mp$(A'B'C')$

Ta có $B'C' = (AB'C') \cap (A'B'C')$

Vì ABC là tam giác vuông cân tại A nên hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai hình chữ nhật bằng nhau, do đó $AC' = AB' \Rightarrow \Delta AB'C'$ là tam giác cân tại A $\Rightarrow AI \perp B'C'$

Vì $\Delta A'B'C'$ là tam giác vuông cân tại A' nên $A'I \perp B'C'$. Như vậy góc giữa mp$(AB'C')$ và mp(ABC) bằng $\widehat{AIA'} = 60^0$

Ta có $A'I = \dfrac{1}{2}BC = a \Rightarrow AA' = A'I.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

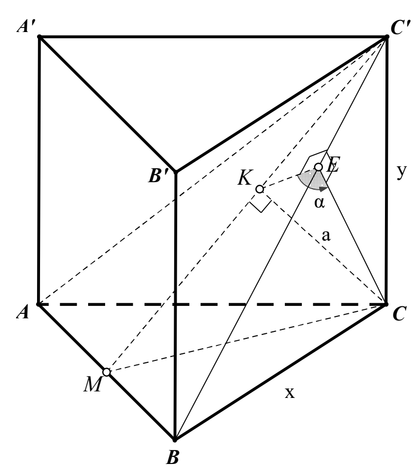
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = a^3\sqrt{3}$

Câu 14. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC

Do $\begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCC') \Rightarrow (ABC') \perp (MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp (ABC')$, do đó $CK = d(C;(ABC')) = a$.

Đặt $BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0)$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$ (1).

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC} = \alpha$, $EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2}$ (2).

Giải $(1),(2)$ ta được $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

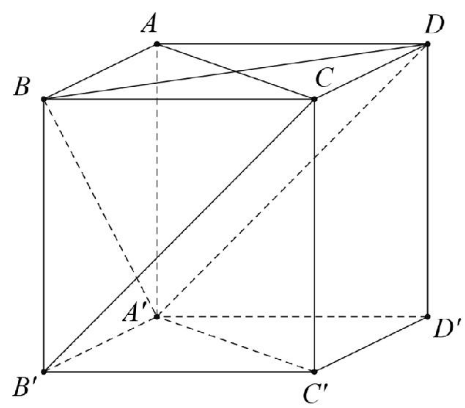
$V = y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$

Câu 15. **(THPT Minh Khai - 2019)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'B = a\sqrt{6}$, đường thẳng $A'B$ vuông góc với đường thẳng $B'C$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{9a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình hộp $ABCD.ABCD$ khi đó tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Đặt $AB = x \Rightarrow AD = x$

Tam giác ABD có góc $\widehat{BAD} = 120°$ áp dụng định lý côsin ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos BAD = x^2 + x^2 - 2x.x.\cos 120 = 3x^2$

Ta có: $A'B = a\sqrt{6} \Rightarrow A'D = a\sqrt{6}$

Ta có: $A'D // B'C \Rightarrow A'B \perp A'D \Rightarrow \Delta A'BD$ vuông tại A'

$\Rightarrow BD^2 = A'B^2 + A'D^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 12a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Rightarrow x = 2a$

Chiều cao hình trụ $AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2 \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$

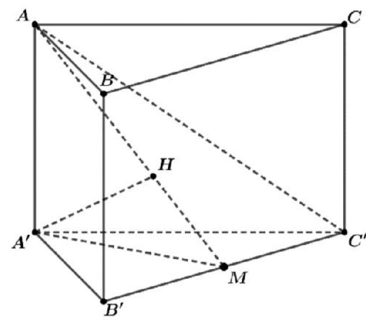
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.2a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 16. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{3a^3}{2}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $\begin{cases} AA' \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M) \Rightarrow (AB'C') \perp (AA'M)$ theo giao tuyến AM.

Kẻ $A'H \perp AM$ trong mặt phẳng $(AA'M)$, suy ra $\Rightarrow A'H \perp (AB'C')$.

Vậy khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ là $A'H = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

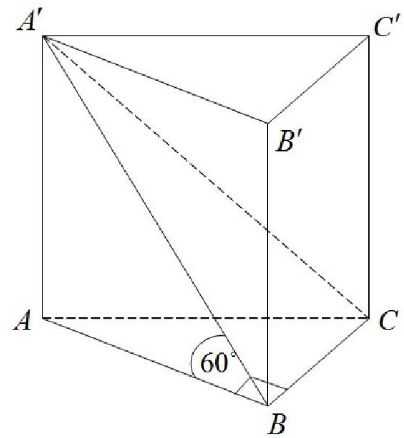
Ta có $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{A'H^2} - \frac{1}{A'M^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow A'A = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{A'B'C'} = 2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)**Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{2}$.

Góc giữa $(A'BC)$ và đáy là góc $\widehat{A'BA} = 60^\circ$.

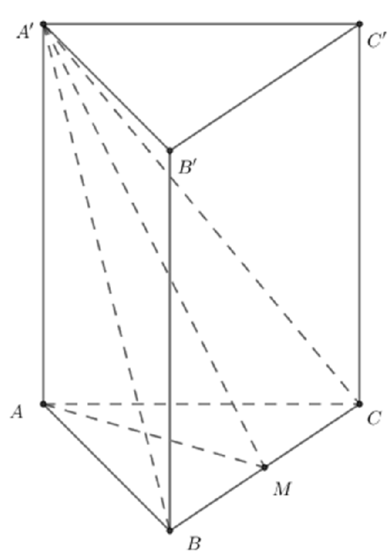
$A'A = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \dfrac{a^2}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18. **(Liên Trường - Nghệ An 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$, cạnh $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **B.** $V = \dfrac{3}{4}a^3$. **C.** $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. **D.** $V = \sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC suy ra $AM \perp BC$ (1)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$ (2)

Mặt khác $(ABC)\cap(A'BC)=BC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\left(\widehat{(ABC);(A'BC)}\right)=\widehat{A'MA}=60°$.

Vì tam giác ABC đều nên $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

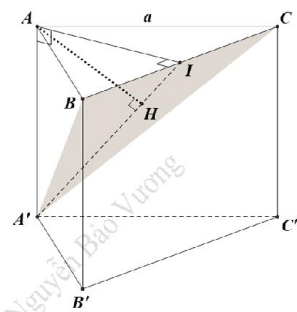
Ta có $AA'=AM.\tan 60°=\dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 19. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'I$. Khi đó ta có:

$d(A,(A'BC))=AH=\dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $AA'I$ ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{a^2}-\frac{4}{3a^2}=\frac{8}{3a^2}$$

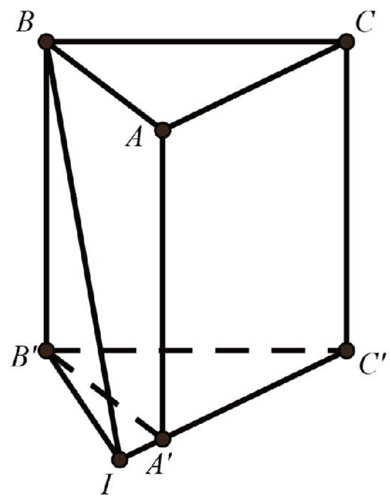
Suy ra: $AA'=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V=S_{\Delta ABC}.AA'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 20. **(THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải



Hạ $B'I \perp A'C'$. Khi đó ta có $\left(\widehat{(A'BC'),(ABC)}\right) = \widehat{B'IB} = 60°$

Vì $\widehat{B'A'C'} = 120° \Rightarrow \widehat{B'A'I} = 60°$. Do đó $\sin 60° = \dfrac{B'I}{B'A} \Leftrightarrow B'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\widehat{B'IB} = \dfrac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow \tan 60° = \dfrac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow BB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$

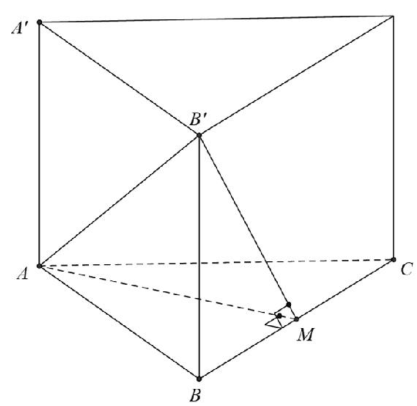
Mặt khác $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AI.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a3}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 21. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên ta có $AM \perp (BCC'B') \Rightarrow (AB',(BCC'B')) = \widehat{AB'M} = 30°$.

Xét tam giác vuông $AB'M$ ta có $\tan 30° = \dfrac{AM}{AB'} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{AM}{\tan 30°} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác vuông $B'BM$ ta có $BB' = \sqrt{B'M^2 - BM^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 60°.BB'=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 22. **(THPT Xuân Hòa - 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

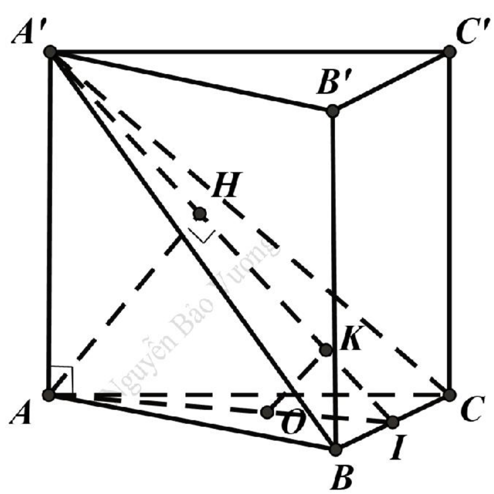
A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Diện tích đáy là $B=S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao là $h=d\left((ABC);(A'B'C')\right)=AA'$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$ ta có $AH\perp(A'BC)\Rightarrow d\left(A;(A'BC)\right)=AH$

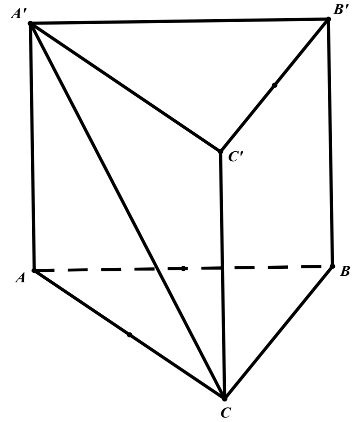


$$\frac{d\left(O;(A'BC)\right)}{d\left(A;(A'BC)\right)}=\frac{IO}{IA}=\frac{1}{3}\Rightarrow d\left(O;(A'BC)\right)=\frac{d\left(A;(A'BC)\right)}{3}=\frac{AH}{3}=\frac{a}{6}\Rightarrow AH=\frac{a}{2}$$

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

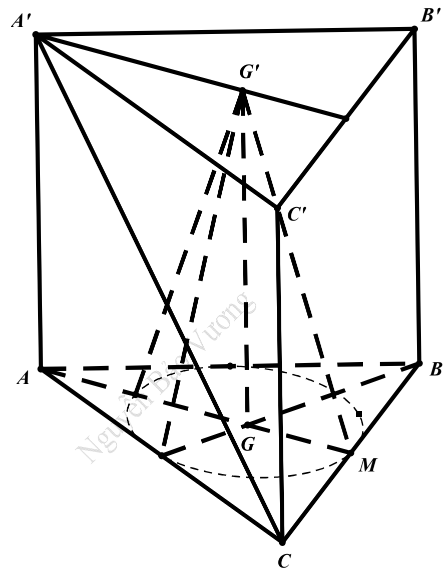
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$$

Câu 23. **(THPT Hoàng Mai - Nghệ An - 2018)** Cho một lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xp} của hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đỉnh là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.



A. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{6}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{6}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{36}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{\left(A'C;\left(ABC\right)\right)}=\widehat{A'CA}=60^\circ$ suy ra $AA'=AC.\tan 60^\circ=\sqrt{3}a$.

Có $r=GM=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ và $l=G'M=\sqrt{G'G^2+GM^2}=\sqrt{3a^2+\dfrac{3a^2}{36}}=\dfrac{\sqrt{111}a}{6}$.

Vậy $S_{xp}=\pi rl=\pi.\dfrac{\sqrt{3}}{6}a.\dfrac{\sqrt{111}}{6}a=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$.

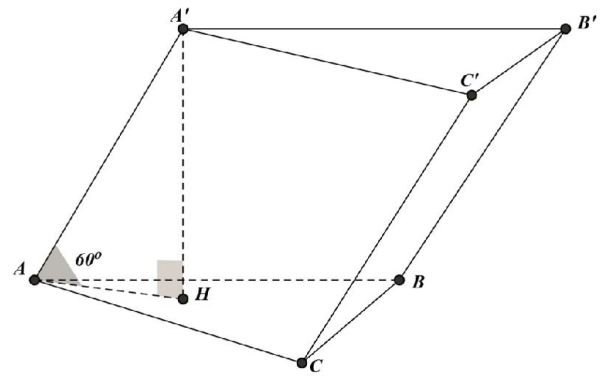
Dạng 2. Thể tích khối lăng trụ xiên

Câu 1. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3}{8}$

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH' \perp (ABC) \Rightarrow (A'A,(ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°$.

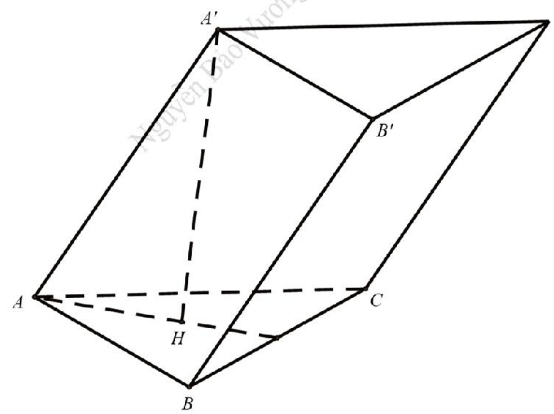
Xét $\Delta AHA'$: $\sin 60° = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA'.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C' : V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 2. **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, biết $A'A = A'B = A'C = a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Theo giả thiết ta có ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $A'A = A'B = A'C = a$ nên $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ hay $A'H$ là đường cao của khối chóp $A'.ABC$.

Xét tam giác vuông $A'HA$ ta có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

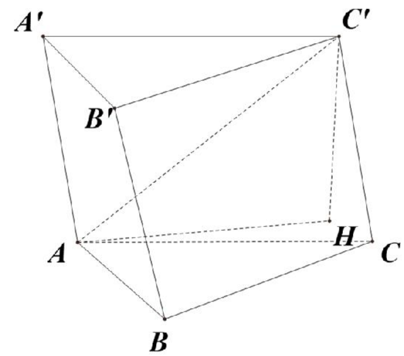
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.a.\sin 60° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 3. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC = 2\sqrt{2}$, biết góc giữa AC' và (ABC) bằng 60^0 và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{8}{3}$ **B.** $V=\frac{16}{3}$ **C.** $V=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $8\sqrt{3}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC), khi đó $C'H$ là đường cao

$\Rightarrow \widehat{AC',(ABC)}=\widehat{C'AH}=60^0$

Xét tam giác vuông $AC'H$ ta có $C'H=C'A.\sin 60^0=2\sqrt{3}$

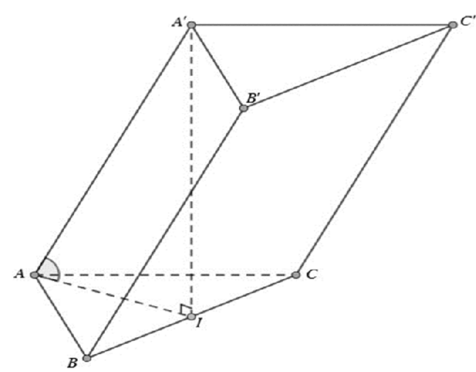
Khi đó $V_{ABC.A'B'C}=S_d.C'H=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

Câu 4. **(Gia Bình 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Tính thể tích khối lăng trụ

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{13}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $A'I\perp(ABC)\Rightarrow AI$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC)

Nên $\left(\widehat{AA',(ABC)}\right)=\left(\widehat{AA',AI}\right)=\widehat{A'AI}=30^0$

Ta có $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A'I=AI\tan 30^0=\frac{a}{2}, S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

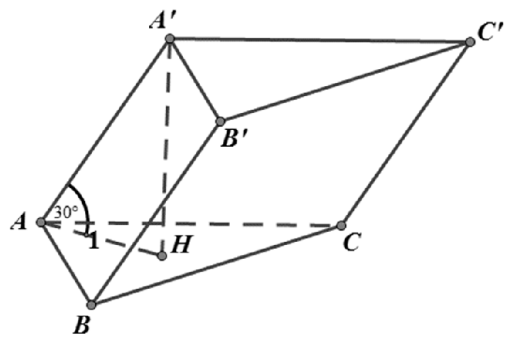
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 5. **(Nguyễn Khuyến 2019)** Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là:

A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{27}{4}$ **C.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt đáy. Suy ra góc $\widehat{A'AH} = 30°$

$\sin 30° = \frac{A'H}{A'A} \Rightarrow A'H = A'A.\sin 30° = 2\sqrt{3}.\frac{1}{2} = \sqrt{3}$

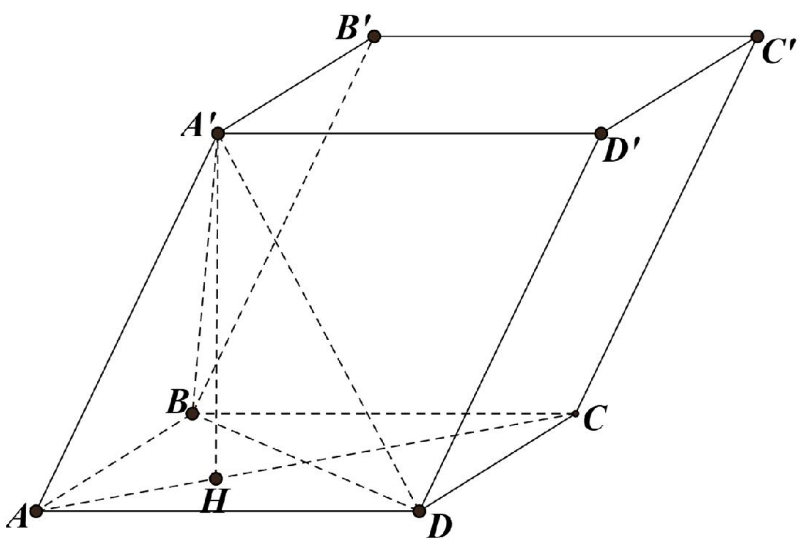
Khi đó: $V_{ABC.A'B'C} = 3^2.\frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3} = \frac{27}{4}$.

Câu 6. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thuyết ta có các tam giác ΔABD, $\Delta A'AD$ và $A'AB$ là các tam giác đều.

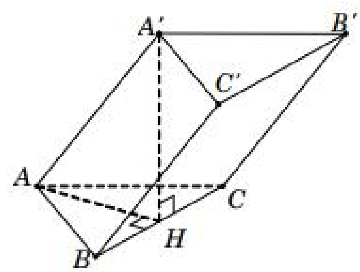
$\Rightarrow A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu H của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD.

$\Rightarrow AH = \frac{2}{3}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = A'H.S_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a.2.\dfrac{4a^2.\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{2}a^3$.

Câu 7. **(SGD Gia Lai 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Góc tạo bởi cạnh bên $A'A$ với đáy bằng 45^0 (hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



A. $V = \dfrac{\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V = 1$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = 3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H$

Ta có

$S_{ABC} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$$\begin{cases} AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \tan 45^0 = \dfrac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = AH = \sqrt{3} \end{cases}$$

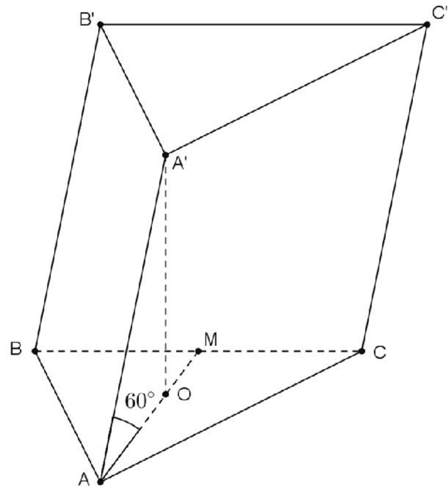
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$

Câu 8. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết AA' hợp với đáy (ABC) một góc 60°, thể tích khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm cạnh BC. Khi đó $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $A'O \perp (ABC)$ tại điểm O nên AO là hình chiếu vuông góc của AA' xuống (ABC). Suy ra góc giữa đường thẳng AA' và (ABC) là góc $\widehat{A'AO}$, suy ra $\widehat{A'AO} = 60^\circ$.

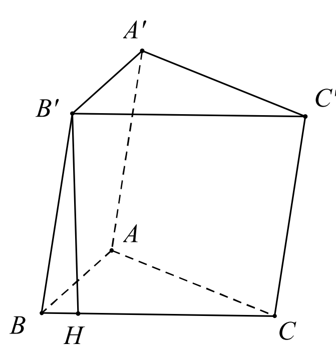
Xét $\Delta A'AO$ vuông tại O ta có $A'O = AO.\tan 60 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = A'O \cdot S_{\Delta ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 9. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC} = 30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Chọn D

Ta có $(BCC'B') \perp (ABC)$ (gt).

Hạ $B'H \perp BC \Rightarrow B'H \perp (ABC)$ và $\widehat{B'BH} = \widehat{B'BC} = 30°$

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $h = B'H = BB'.\sin 30° = 2a$.

Diện tích đáy là $S_{đáy} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối lăng trụ là: $V_{LT} = S_{đáy}.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

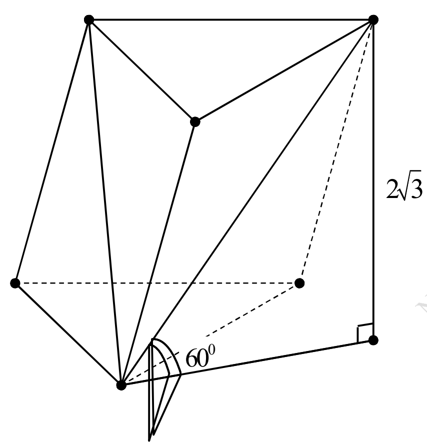
Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là: $V = \dfrac{1}{3}V_{LT} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 10. **(Đề thử nghiệm 2017)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \dfrac{8}{3}$ **B.** $V = \dfrac{16}{3}$ **C.** $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Phân tích: Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$.

Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$. Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'AH} = 60°$.

Ta có: $\sin 60° = \dfrac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}; S_{\Delta ABC} = 4$; $V_{ABC.A'B'C'} = C'H.S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\sqrt{3}$.

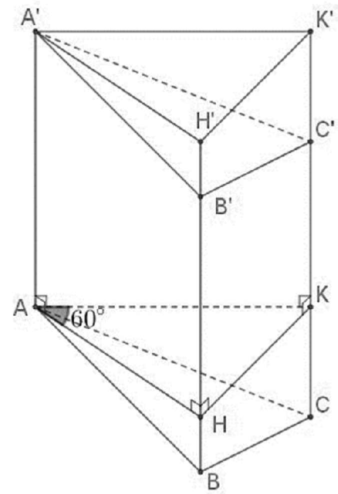
$V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}C'H.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$; $V_{ABB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $8a$ và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng $2a$ và $4a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{16}{3}\sqrt{3}a^3$. **B.** $8\sqrt{3}a^3$. **C.** $24\sqrt{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC'.

Ta có $HA \perp BB'$, $KA \perp CC' \Rightarrow A'A \perp (AHK)$ do đó $\angle AHK = 60°$.

Khi đó $HK^2 = AK^2 + AH^2 - 2AK.AH.\cos 60° = 12a^2 \Rightarrow AK^2 = HK^2 + AH^2$. Suy ra tam giác AHK vuông tại H.

Gọi H', K' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên BB', CC'. Ta có $V_{A.BCKH} = V_{A.B'C'K'H'}$

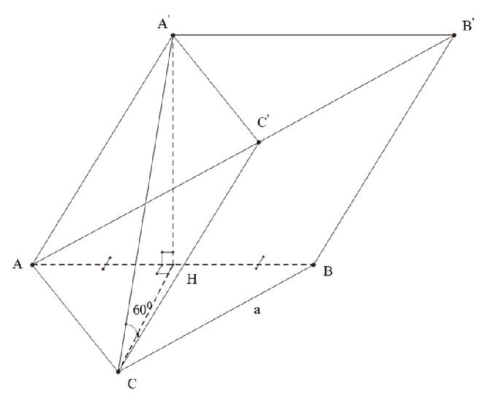
Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = V_{AHK.A'H'K'} = AA'.S_{AHK} = 16\sqrt{3}a^3$.

Câu 12. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \widehat{(A'C,(ABC))} = \widehat{(A'C,HC)} = \widehat{A'CH} = 60^0$.

$CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác vuông $A'HC$, ta có: $A'H = CH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$, $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

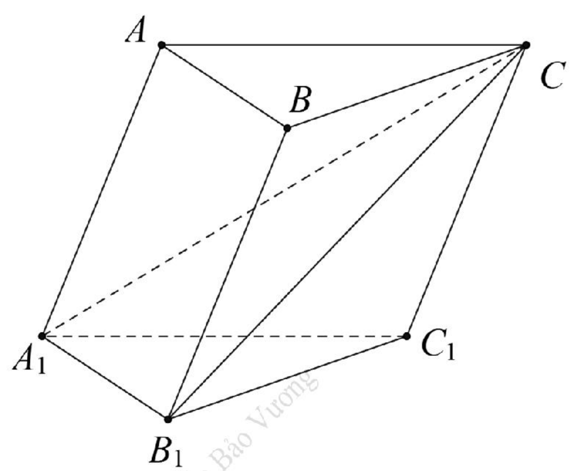
Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 13. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên (ABB_1A_1) bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V_{C.ABB_1A_1} = \frac{1}{3}d\left(C,\left(ABB_1A_1\right)\right).S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{3}.4.6 = 8$ (đvtt)

$V_{C.ABB_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - V_{C.C_1B_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - \frac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{2}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1}$

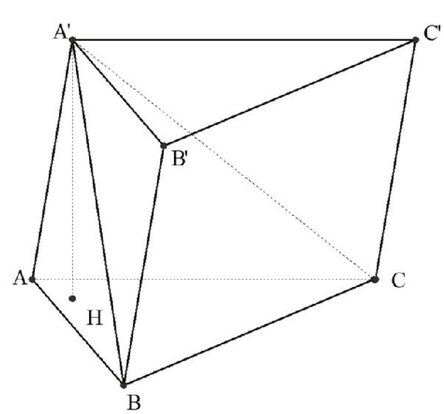
$\Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3}{2}.V_{C.ABB_1A_1} = \frac{3}{2}.8 = 12$ (đvtt)

Câu 14. **(chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mp(ABC) suy ra $A'H$ là chiều cao của lăng trụ.

Xét khối chóp $A.A'BC$ có diện tích đáy $B=S_{A'BC}=1$, chiều cao $h=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=2$ suy ra thể

tích của khối chóp $A.A'BC$ là $V_{A.A'BC}=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.1.2=\frac{2}{3}$.

Mặt khác $\begin{cases} V_{A.A'BC}=V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.A'H=\frac{2}{3} \\ V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.A'H \end{cases} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=3V_{A.A'BC}=3.\frac{2}{3}=2$.

<u>*</u> <u>Cách</u> <u>khác.</u>

Ta thấy lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối chóp có thể thích bằng nhau là $A'.ABC,\ A'.BCB',\ A'.B'C'C$.

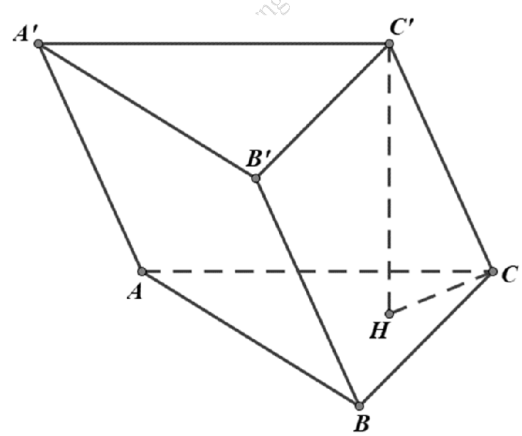
Mà $V_{A'.ABC}=V_{A.A'BC}=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.1.2=\frac{2}{3}$ suy ra $V_{ABC.A'B'C'}=3V_{A.A'BC}=3.\frac{2}{3}=2$.

Câu 15. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa – 2019)** Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **<u>C</u>.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

<u>Chọn</u> <u>C</u>



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' xuống $mp(ABC)$, khi đó góc hợp bởi CC' và $mp(ABC)$ là $\widehat{C'CH}$. Theo đề bài: $\widehat{C'CH}=60°$ $\Rightarrow C'H=C'C.\sin 60°=2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

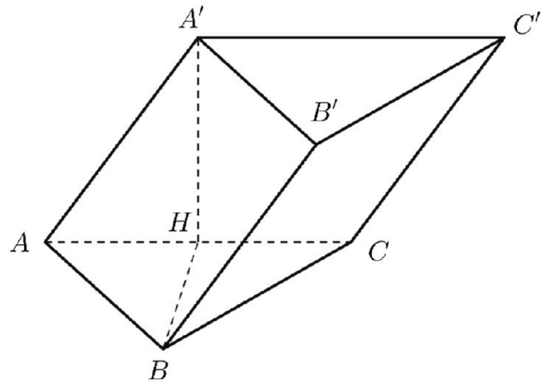
Lại có ΔABC đều cạnh bằng 3 nên $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}.3^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.C'H=\frac{9\sqrt{3}}{4}.3=\frac{27\sqrt{3}}{4}$. Chọn **C.**

Câu 16. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đường cao BH. Biết $A'H\perp(ABC)$ và $AB=1, AC=2, AA'=\sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{21}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **<u>C</u>.** $\frac{\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1; AC = 2$ nên $BC = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$.

Độ dài của đường cao BH : $BH = \frac{AB.BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $AH = \frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3} = \frac{1}{2}$.

Khi đó độ dài đường cao $A'H$ của hình lăng trụ bằng : $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

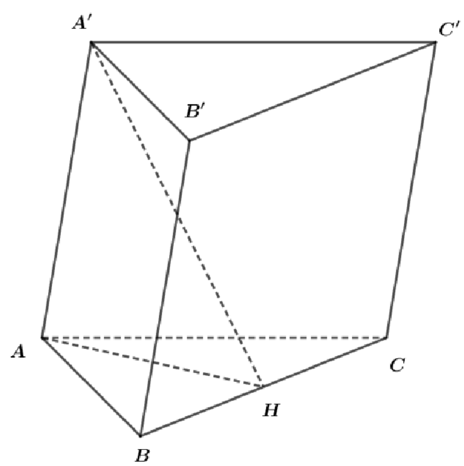
Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng : $V = \frac{1}{2} AB.BC.A'H = \frac{1}{2}.1.\sqrt{3}\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{4}$.

Câu 17. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm BC suy ra $A'H \perp (ABC)$

Ta có $(A'A,(ABC)) = (A'A, AH) = \widehat{A'AH} = 30^0$

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $A'H = AH.\tan 30^0 = \frac{a}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

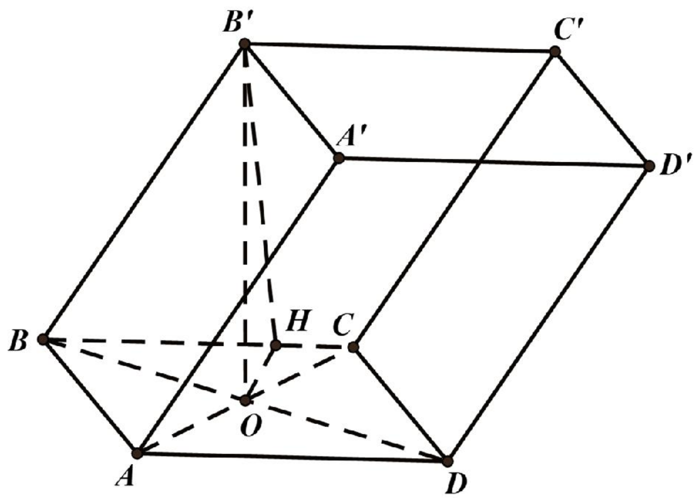
Vậy $V = A'H.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

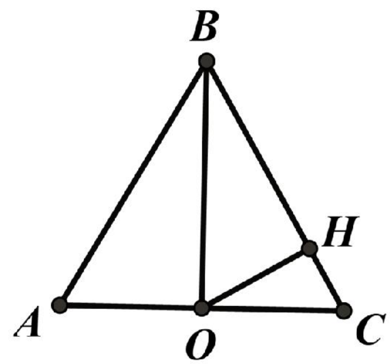
Câu 18. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng:

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn D





$ABCD$ là hình thoi nên $AB=BC$. Lại có $\widehat{ABC}=60°$ nên ΔABC là tam giác đều. $OH\perp BC$.

Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy khi đó là $\widehat{B'HO}=60°$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}}+\dfrac{1}{\frac{a^2}{4}}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{4}{a^2}=\dfrac{16}{3a^2}.\Rightarrow OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Theo giả thiết, $B'O$ là đường cao lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

$B'O=OH.\tan\widehat{B'HO}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\tan 60°=\dfrac{3a}{4}$.

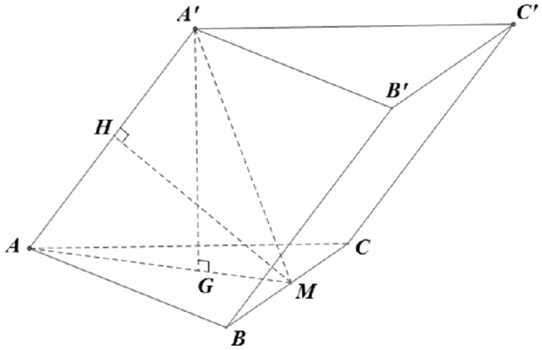
$V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{day}.h=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 19. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp A'\text{G} \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp AA'$

Kẻ $MH \perp AA'$ tại H, suy ra MH là đoạn vuông góc chung của giữa hai đường thẳng AA’ và BC

Tam giác MHA vuông tại H có $AH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \dfrac{3}{4}a$

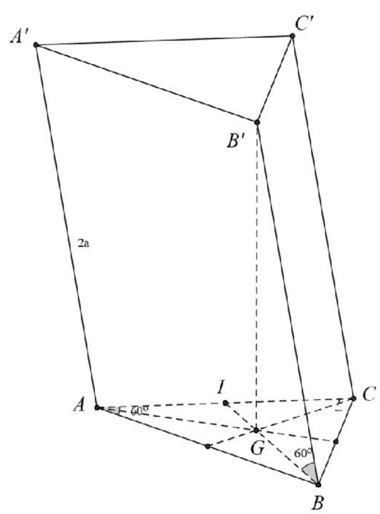
Tam giác $A'GA$ đồng dạng tam giác MHA nên $\dfrac{A'G}{MH} = \dfrac{GA}{HA} \Rightarrow A'G = \dfrac{MH.GA}{HA} = \dfrac{a}{3}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.A'G = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 20. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60°$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng $60°$**.** Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC**.** Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\dfrac{9a^3}{208}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{26}$. **C.** $\dfrac{9a^3}{26}$. **D.** $\dfrac{27a^3}{208}$.

Lời giải



Ta có

$B'G = BB'\sin 60° = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$BG = BB'\cos 60° = 2a.\dfrac{1}{2} = a \Rightarrow BI = \dfrac{3}{2}BG = \dfrac{3a}{2}$.

Đặt $AC = 2x\ (x > 0) \Rightarrow CI = x; BC = AC.\tan 60° = 2x\sqrt{3}$.

Khi đó

$x^2+\left(2x\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{3a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x=\frac{3a\sqrt{13}}{26} \Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}.2.\frac{3a\sqrt{13}}{26}.2.\frac{3a\sqrt{13}}{26}.\sqrt{3}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{26}$.

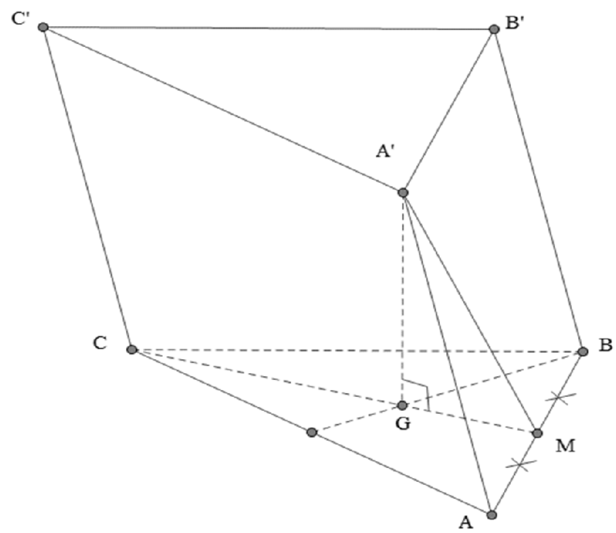
Vậy $V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{26}.a\sqrt{3}=\frac{9a^3}{26}$

Câu 21. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng vào trọng tâm G của tam giác ABC. Biết tam giác $A'BB'$ có diện tích bằng $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{6a^3\sqrt{2}}{7}$ **B.** $\frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{5}}{8}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Lời giải

Chọn B



+ Ta có $\begin{cases} AB\perp CM \\ AB\perp A'M \end{cases} \Rightarrow AB\perp (A'CM) \Rightarrow AB\perp A'M$

Nên $S_{\Delta A'AB}=\frac{1}{2}A'M.AB=\frac{2a^2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow A'M=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

Do ΔABC đều cạnh bằng a nên $GM=\frac{1}{3}CM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

+ Trong $\Delta A'GM$ vuông tại G ta có $A'G=\sqrt{A'M^2-GM^2}=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

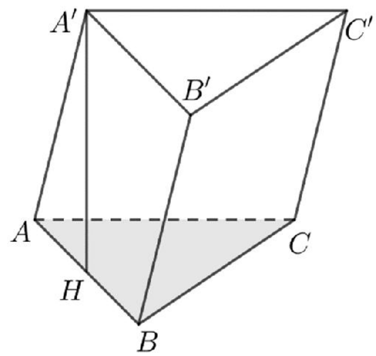
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=A'G.\mathrm{dt}(\Delta ABC)=\frac{a\sqrt{21}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$

Câu 22. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA'=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=2a^2\sqrt{2}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác ABC vuông cân tại B cạnh $AC=2a$ nên suy ra $AB=a\sqrt{2}$, có diện tích đáy

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=a^2$.

H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) nên $A'H$ là chiều cao của khối lăng trụ. Thể tích là $V=A'H.S_{\Delta ABC}$.

H là trung điểm của cạnh $AB \Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{2a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

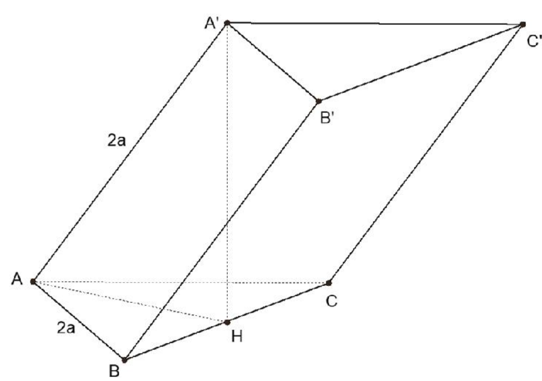
Suy ra $V=A'H.S_{\Delta ABC}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 23. **(THPT Trần Phú 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên $AA'=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $2a^3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC), suy ra H là trung điểm của BC.

Tam giác ABC đều cạnh $2a$, suy ra $AH=a\sqrt{3}$.

Đường cao hình lăng trụ: $h=A'H=\sqrt{4a^2-3a^2}=a$

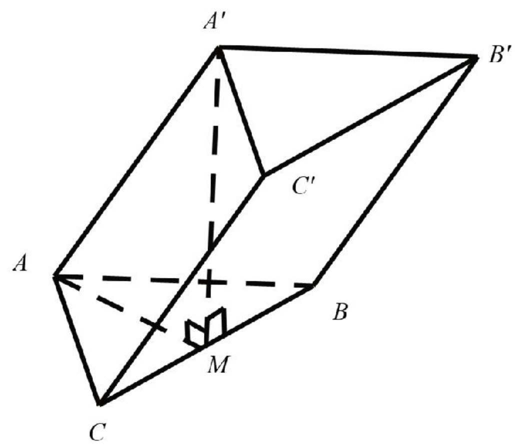
Vậy thể tích lăng trụ: $V=S_{\Delta ABC}.h=\frac{1}{2}AH.BC.A'H=\frac{1}{2}a\sqrt{3}.2a.a=a^3\sqrt{3}$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

A. $V=a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$. **B.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V=a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC.

Theo bài ra ABC là tam giác đều cạnh a nên: $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của cạnh BC nên có: $A'M\perp(ABC)$; $A'M\perp BC$.

Xét tam giác $A'MA$ vuông tại M: $A'M=\sqrt{AA'^2-AM^2}=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

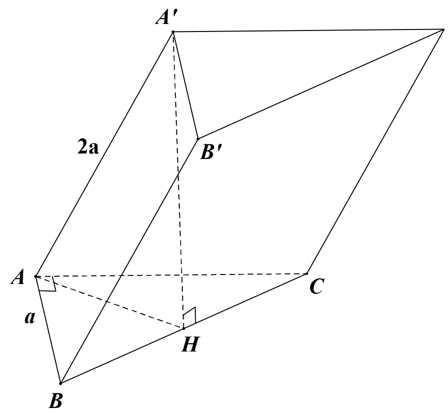
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'}=A'M.S_{ABC}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.

Câu 25. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB=a$, $AA'=2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC = a\sqrt{2}; AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AH$

Trong tam giác $AA'H$ vuông tại H ta có: $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{2a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{14}}{2}$.

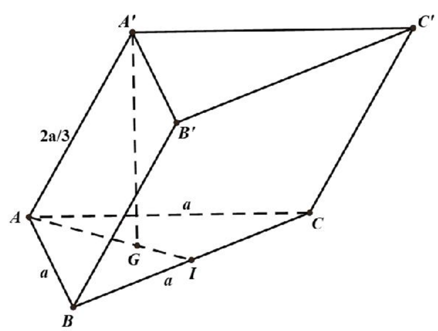
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a\frac{\sqrt{14}}{2}.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3\sqrt{14}}{4}$.

Câu 26. **(SGD Hưng Yên)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên bằng $\frac{2a}{3}$, hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có:

$AG = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $A'G^2 = A'A^2 - AG^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow A'G = \frac{a}{3}$.

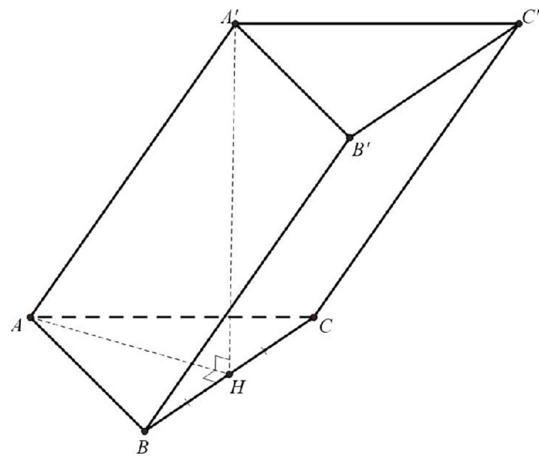
$V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 27. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3.\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3.\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^3.\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm BC, vì tam giác ABC đều nên ta có $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$.

Theo đề: $A'H\perp(ABC)\Rightarrow A'H\perp AH$. Trong tam giác vuông $A'AH$ có

$$A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

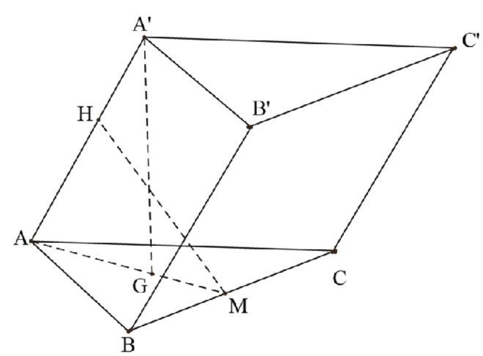
Suy ra $V_{ABC.A'B'C'}=B.h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3a^3.\sqrt{2}}{8}$.

Câu 28. **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa BC và AA' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $B'.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC, $MH \perp AA'$ tại H.

Ta có $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp HM$. Do đó $HM = d(AA', BC)$.

$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \widehat{HAM} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAM} = 30^0$.

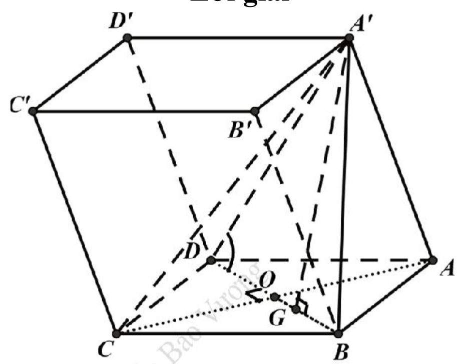
$A'G = AG.\tan 30^0 = \frac{a}{3}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}A'G.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 29. **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ACBD$ là hình thoi cạnh a, biết $A'.ABC$ là hình chóp đều và $A'D$ hợp với mặt đáy một góc $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là :

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{(A'D,(ABCD))} = \widehat{A'DG} = 45°$.

Ta giác ABC đều cạnh a nên $BG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $DB = a\sqrt{3}$, $DG = 2BG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

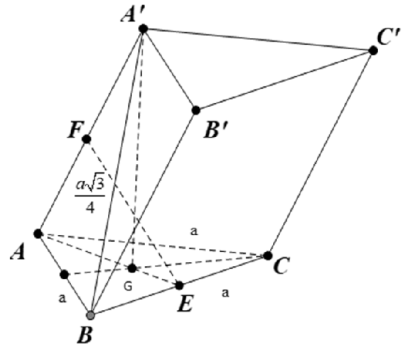
Tam giác $A'DG$ vuông cân tại G nên $A'G = DG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AG = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = a^3$.

Câu 30. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Vì $A'G \perp (ABC)$ và tam giác ABC đều nên $A'ABC$ là hình chóp đều. Kẻ $EF \perp AA'$ và $BC \perp (AA'E)$ nên $d(AA', BC) = EF = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Đặt $A'G = h$

Ta có $A'A = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$.

Tam giác $A'AG$ đồng dạng với tam giác EAF nên

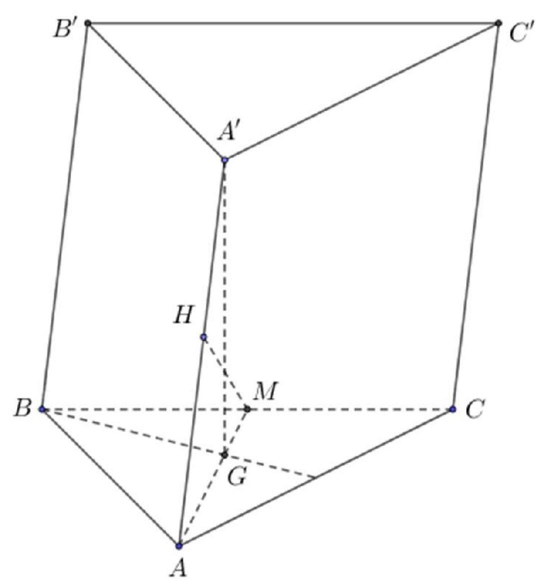
$$\frac{A'A}{EA} = \frac{AG}{FA} = \frac{A'G}{FE} \Rightarrow A'G.EA = A'A.FE \Leftrightarrow h.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}.\frac{a\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{a}{3}.$$

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AG.S_{ABC} = \frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 31. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $MH \perp AA'$ $(H \in BC)$.

Ta có $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AG) \Rightarrow BC \perp MH \Rightarrow d(AA', BC) = MH$.

$AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{16}} = \dfrac{3a}{4}$.

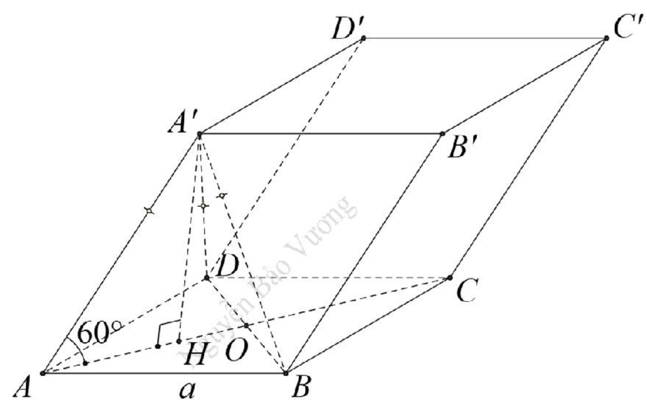
Ta có $\dfrac{MH}{AH} = \dfrac{A'G}{AG} = \tan\widehat{GAH} \Rightarrow A'G = \dfrac{MH.AG}{AH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3a}{4}} = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $V = S_{ABC}.A'G = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 32. **(THPT Hà Huy Tập - Hà Tĩnh - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120°$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có tam giác ABD cân tại A và $\widehat{BAD} = 60°$ nên ABD là tam giác đều.
Gọi H là trọng tâm tam giác ABD. Vì A' cách đều A, B, D nên $A'H$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Do đó $A'H \perp (ABD)$.

Suy ra góc giữa $A'A$ và đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'AH} = 60°$.

Ta có $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $A'H = AH.\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.

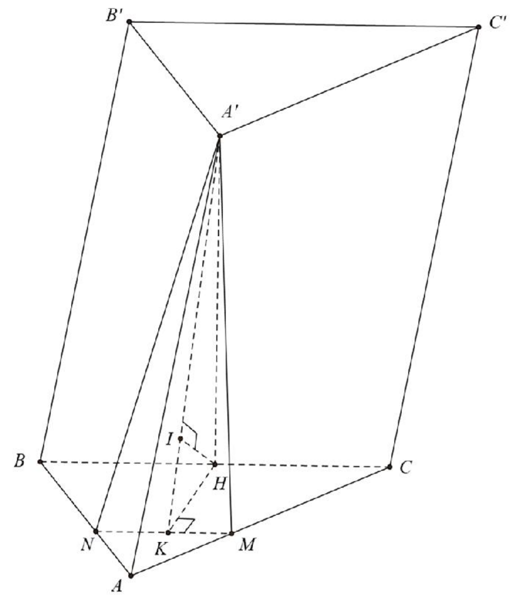
Ngoài ra $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

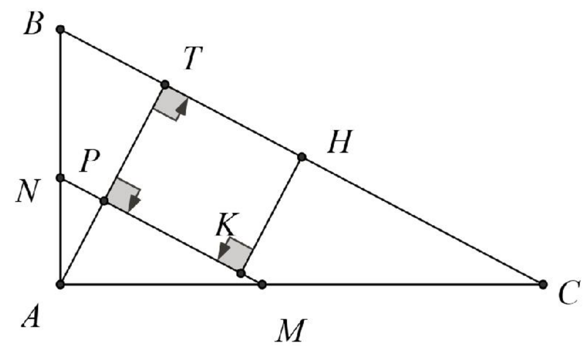
Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = S_{ABCD}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 33. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải





Kẻ $MN // BC$, $N \in AB$. $HK \perp MN$, $HI \perp A'K$.

$d\left(A'M;BC\right) = d\left(BC;\left(A'MN\right)\right) = d\left(H;\left(A'MN\right)\right) = HI \Rightarrow HI = \dfrac{a}{2}$.

Kẻ $AT // HK$, $AT \cap MN = P \Rightarrow HK = PT = \dfrac{2}{3}AT$

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AT^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}AT = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác $A'HK$ vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{HI^2} - \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{3}{a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow A'H = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = A'H.S_{ABC} = a.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.