

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM**Dạng 1. Tích phân cơ bản có điều kiện**

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K ; a, b là hai phần tử bất kì thuộc K , $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Hiệu số $F(b) - F(a)$ gọi là tích phân của của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

2. Các tính chất của tích phân:

$+ \int_a^a f(x) dx = 0$	$+ \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
$+ \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$	$+ \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
$+ \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$	$+ \text{Nếu } f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$
$\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$

☞ **Nhận xét.** Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

- Câu 1. (Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.
 A. $\ln 8 + 1$. B. $4\ln 2 + 1$. C. $2\ln 3 + 2$. D. $2\ln 4$.
- Câu 2. (Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng
 A. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$. B. $\frac{\pi^2 - 4}{16}$. C. $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$. D. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.
- Câu 3. (Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\sin^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng
 A. $\frac{\pi^2 - 2}{8}$. B. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}$. C. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}$. D. $\frac{3\pi^2 + 2\pi - 3}{8}$.
- Câu 4. (Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng?
 A. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$. B. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$. C. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$. D. $\frac{\pi^2 + 2}{8}$.
- Câu 5.** Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3, \int_0^2 f(x) dx = 8$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?
 A. $m + n = 4$. B. $m + n = -4$. C. $m + n = 2$. D. $m + n = -2$.
- Câu 6.** Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x) dx = -2$ và
 A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.
- Câu 7. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$. Hãy tính $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$.
 A. $T = 26$. B. $T = 12$. C. $T = 13$. D. $T = 28$.
- Câu 8. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?
 A. $(-1; 2)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; 4)$. D. $(-3; 1)$.

- Câu 9.** (Thi thử Lâmônôxốp - Hà Nội 2019) Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?
- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.
- Câu 10.** (Sở GD Kon Tum - 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$?
- A. 5. B. 6. C. 4. D. 3.
- Câu 11.** (THPT Lương Thế Vinh - HN 2018). Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?
- A. 8. B. 2. C. 4. D. 6.
- Câu 12.** (Cần Thơ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$, $f(-3) + f(3) = f(-1) + f(1) = 2$. Giá trị biểu thức $f(-4) + f(0) + f(4)$ bằng
- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 13.** (Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018) Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$
- A. $T = -3$. B. $T = 3$. C. $T = -4$. D. $T = -5$.
- Câu 14.** (Sở Bạc Liêu - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng
- A. $\frac{6 \ln 2 - 3}{4}$. B. $\frac{6 \ln 2 + 3}{4}$. C. $\frac{8 \ln 2 + 3}{4}$. D. $\frac{8 \ln 2 - 3}{4}$.
- Câu 15.** (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng.
- A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$. B. $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. C. $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. D. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.
- Câu 16.** (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng
- A. $\frac{\pi^2 - 6}{18}$. B. $\frac{\pi^2 - 3}{32}$. C. $\frac{3\pi^2 - 16}{64}$. D. $\frac{3\pi^2 - 6}{112}$.

Dạng 2. Tích phân hàm số hữu tỷ

Tính $I = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$? với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không chứa căn.

□ Nếu bậc của tử $P(x) \geq$ bậc mẫu $Q(x) \xrightarrow{PP}$ chia đa thức.

□ Nếu bậc của tử $P(x) <$ bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu số **phân tích được thành tích số** \xrightarrow{PP} đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

$$+ \frac{1}{(ax+m)(bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \left(\frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right) \quad (1)$$

$$+ \frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$$+ \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

□ Nếu bậc tử $P(x) <$ bậc mẫu $Q(x)$ mà **mẫu không phân tích được thành tích số**, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

$$+ I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, (n \in \mathbb{N}^*) \xrightarrow{PP} x = a \cdot \tan t.$$

$$+ I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, (\Delta < 0) = \int \frac{dx}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a} \right) \right]}. \text{ Ta sẽ đặt } \longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} \tan t.$$

$$+ I_3 = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \cdot dx \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0. \text{ Ta sẽ phân tích:}$$

$$I_3 = \frac{p}{2a} \underbrace{\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}}_A + \left(q - \frac{b \cdot p}{2a} \right) \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2} \text{ và giải A bằng cách đặt } t = \text{mẫu số.}$$

Câu 1. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$. Khi đó giá trị

$a+b+c$ bằng

- A. -3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 2. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Biết $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b, (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó giá trị

của $a+4b$ bằng

- A. 50 B. 60 C. 59 D. 40

Câu 3. Biết $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $m+n$.

- A. $S=1$. B. $S=4$. C. $S=-5$. D. $S=-1$.

Câu 4. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a - \ln b$ trong đó a, b là

các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

- A. 1. B. 0. C. -1. D. 3.

- Câu 5. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.
- A. $S = 2$. B. $S = -2$. C. $S = 5$. D. $S = 10$.
- Câu 6. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$?
- A. $P = 1$. B. $P = 5$. C. $P = 7$. D. $P = 2$.
- Câu 7. (Chuyên Sơn La 2019)** Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 8. (Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng
- A. 12 B. 6 C. 1 D. 64
- Câu 9.** Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.
- A. $S = 2$. B. $S = -2$. C. $S = 5$. D. $S = 10$.
- Câu 10.** Biết rằng $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, a < 10$). Khi đó $a + b$ có giá trị bằng
- A. 14. B. 15. C. 13. D. 12.
- Câu 11. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Biết $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng
- A. -8. B. -10. C. -12. D. 16.
- Câu 12. (THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Giả sử rằng $\int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó, giá trị của $a + 2b$ là
- A. 30. B. 60. C. 50. D. 40.
- Câu 13. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a - b^2 - c^3$.
- A. -5. B. -4. C. 5. D. 0.
- Câu 14.** Cho $\int_0^1 \frac{4x^2 + 15x + 11}{2x^2 + 5x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T = a.c - b$ bằng
- A. 4. B. 6. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

- Câu 15. (SGD Bến Tre 2019)** Biết $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $S = m + n$.
- A. $S = -1$. B. $S = -5$. C. $S = 1$. D. $S = 4$.
- Câu 16. (THPT Cẩm Bình 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó $a + b$ bằng
- A. 0. B. 2. C. 1. D. -1.
- Câu 17. (Sở Hà Nam - 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a + b + c$ bằng
- A. 3. B. 2. C. 1. D. -1.
- Câu 18. (Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho biết $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a^2 + b^2$ bằng
- A. 13. B. 10. C. 25. D. 5.
- Câu 19. (Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng
- A. -8. B. -10. C. -12. D. 16.
- Câu 20. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P = a - b^2 - c^3$.
- A. -5. B. -3. C. 6. D. -4.
- Câu 21. (Bình Phước - 2019)** Cho $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b^2 - c^3$ bằng
- A. 3. B. 6. C. 5. D. 4.
- Câu 22. (SGD Đà Nẵng 2019)** Cho $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 7$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $2a + 3b + 7c$ bằng
- A. -9. B. 6. C. 15. D. 3.
- Câu 23. (SGD Điện Biên - 2019)** Cho $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị $6a + b + c$ bằng:
- A. -2. B. 1. C. 2. D. -1.
- Câu 24. (SP Đồng Nai - 2019)** Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.
- A. -11. B. -14. C. -2. D. 3.

Dạng 3. Tích phân đổi biến

② **Tích phân đổi biến:** $\int_a^b [f(x)] \cdot u'(x) \cdot dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)]$.

\swarrow Có sẵn \downarrow Tách từ hàm \searrow Nhân

Các bước tính tích phân đổi biến số

- **Bước 1.** Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) \cdot dx$ (quan trọng)
- **Bước 2.** Đổi cận: $\begin{cases} x = b \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = u(b) \\ t = u(a) \end{cases}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)
- **Bước 3.** Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

Một số phương pháp đổi biến số thường gặp

Đổi biến dạng 1. $I = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx = \underbrace{\int_a^b h(x) \cdot dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot dx}_{I_2}$ với

Đổi biến dạng 2.

Nghĩa là nếu gặp tích phân **chứa căn thức** thì có khoảng 80% sẽ đặt $t =$ căn trừ một số trường hợp ngoại lệ sau:

1/ $I_1 = \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) \cdot x^{\text{chẵn}} \cdot dx \longrightarrow$ đặt $x = a \cdot \sin t$ hoặc $x = a \cdot \cos t$.

(xuất phát từ công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{cases}$)

2/ $I_2 = \int f(\sqrt{x^2 + a^2}) \cdot x^{\text{chẵn}} \cdot dx \longrightarrow$ đặt $x = a \cdot \tan t$ hoặc $x = a \cdot \cot t$.

(mẫu chốt xuất phát từ công thức $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$)

3/ $I_3 = \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) \cdot x^{\text{chẵn}} \cdot dx \longrightarrow$ đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$.

4/ $I_4 = \int f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right) dx \longrightarrow$ đặt $x = a \cdot \cos 2t$.

5/ $I_5 = \int \frac{dx}{(a + bx^n)^n \sqrt[n]{a + bx^n}} \longrightarrow$ đặt $x = \frac{1}{t}$.

6/ $I_6 = \int R[\sqrt{s_1 ax + b}, \dots, \sqrt{s_k ax + b}] \cdot dx \longrightarrow$ đặt $t^n = ax + b$.

(trong đó n là bội số chung nhỏ nhất của $\{s_1; s_2; \dots; s_k\}$)

$$7/ \quad I_7 = \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \longrightarrow \text{đặt } t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}.$$

Đổi biến dạng 3. $\int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \longrightarrow t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Đổi biến dạng 4. $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx \longrightarrow t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi biến dạng 5. $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx \longrightarrow t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi biến dạng 6. $\int f(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \longrightarrow t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Đổi biến dạng 7. $\int f(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx \longrightarrow t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

Đổi biến dạng 8. $\begin{cases} \int f(\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x) dx \\ \int f(\sin x - \cos x) \cdot (\sin x + \cos x) dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = \sin x + \cos x \\ t = \sin x - \cos x \end{cases}$

Đổi biến dạng 9. $\begin{cases} \int f(ax^2 + b)^n \cdot x dx \longrightarrow t = ax^2 + b \Rightarrow dt = 2ax dx \\ \int f(ax + b)^n \cdot x dx \longrightarrow t = ax + b \Rightarrow dt = a dx \end{cases}$

Câu 1. (Đề Tham Khảo -2019) Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của

$3a + b + c$ bằng

- A. 2 B. 1 C. -2 D. -1

Câu 2. Tính $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$ bằng

- A. $K = \ln 2$. B. $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$. C. $K = 2 \ln 2$. D. $K = \ln \frac{8}{3}$.

Câu 3. (Chuyên Long An - 2018) Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$, giả sử đặt $t = 1 + x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$. B. $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$.
C. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$. D. $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$.

- Câu 4. (KTNL Gia Bình Năm 2019)** Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1$.
- A. 2 B. 1 C. 0 D. 3
- Câu 5. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=0$ và $f'(x) = 2019.2020.x(x-1)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $\frac{2}{2021}$. B. $\frac{1}{1011}$. C. $-\frac{2}{2021}$. D. $-\frac{1}{1011}$.
- Câu 6. (Đề Tham Khảo 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng
- A. -2 B. -1 C. 2 D. 1
- Câu 7. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B, C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A + 7B$.
- A. $\frac{23}{252}$ B. $\frac{241}{252}$ C. $\frac{52}{9}$ D. $\frac{7}{9}$
- Câu 8. (Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Biết $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.
- A. 13. B. 5. C. 4. D. 10.
- Câu 9. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m + p + q$ bằng
- A. 10. B. 6. C. $\frac{22}{3}$. D. 8.
- Câu 10.** Biết rằng $\int_0^1 xe^{x^2+2} dx = \frac{a}{2}(e^b - e^c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.
- Câu 11. (KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Biết $\int_1^e \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(ae + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 - ab + b^2$.
- A. 3. B. 1. C. 0. D. 8.
- Câu 12. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m, n, p, q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m + n + p + q$.
- A. $T = 11$. B. $T = 10$. C. $T = 7$. D. $T = 8$.

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{2tdt}{1+t^2}$ là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 14. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} đồng thời thỏa mãn $f(0) = f(1) = 5$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx$.

- A. $I = 10$ B. $I = -5$ C. $I = 0$ D. $I = 5$

Câu 15. (Đề Minh Hóa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x > 0$.

Khi đó $\int_3^8 f(x) dx$ bằng

- A. 7. B. $\frac{197}{6}$. C. $\frac{29}{2}$. D. $\frac{181}{6}$.

Câu 16. (Mã 102 2018) Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a - b = -2c$ B. $a + b = -2c$ C. $a + b = c$ D. $a - b = -c$

Câu 17. (Mã 101 2018) Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = 3c$ B. $a - b = -3c$ C. $a - b = -c$ D. $a + b = c$

Câu 18. (Đề Tham Khảo 2017) Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$ B. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$ C. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$ D. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$

Câu 19. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$. Lúc đó

- A. $a + b + c = \frac{5}{3}$. B. $a + b + c = \frac{4}{3}$. C. $a + b + c = \frac{7}{3}$. D. $a + b + c = \frac{8}{3}$.

Câu 20. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$ và $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}$, $\forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Khi đó $a + b$ bằng

- A. 250. B. 251. C. 133. D. 221.

Câu 21. (Nam Định - 2018) Biết tích phân $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = -1$.

B. $T = 0$.

C. $T = 2$.

D. $T = 1$.

Câu 22. (Chuyên Vinh - 2018) Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 23. (Đề Tham Khảo 2018) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$

A. $P = 18$

B. $P = 46$

C. $P = 24$

D. $P = 12$

Câu 24. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

A. $S = 1$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = \frac{3}{4}$.

D. $S = \frac{2}{3}$.

Câu 25. (Gang Thép Thái Nguyên 2019) Cho tích phân $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2} dx$ và $x = 4\sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$.

B. $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$.

C. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$.

D. $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$.

Câu 26. Biết $\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 27. Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{b}{c} + \sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

A. 12

B. 10

C. 18

D. 15

Câu 28. (Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018) Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản.

Tính $m - 7n$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 91.

Câu 29. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$

B. $-\frac{5}{3}$

C. $\frac{10}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

Câu 30. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 1$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = \frac{3}{4}$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Câu 31. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a + b + c$ bằng:

- A. 9 B. 2 C. 1 D. 7

Câu 32. (THPT Ba Đình 2019) Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{d} + b \ln 2 + c \ln d$, với a, b, c, d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

- A. 16. B. 4. C. 28. D. -2.

Câu 33. Tính $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

- A. $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1$. B. $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1]$.
C. $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1]$. D. $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1$.

Câu 34. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018) Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ bằng tích phân nào dưới đây?

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy$. B. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$. C. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 y dy$.

Câu 35. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018) Biết $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x^2 - 1} dx = \frac{b}{a} \ln 5 - c \ln 2$ với a, b, c là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $P = 3a + 2b + c$.

- A. 11. B. 12. C. 14. D. 13.

Câu 36. (Bình Giang - Hải Dương - 2018) Cho tích phân $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = a + b\sqrt{6} + c \ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right) + d \ln 2$ với a, b, c, d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a + b + c + d$.

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $-\frac{3}{25}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3}{20}$.

Câu 37. (Sở Hưng Yên - 2018) Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ nếu đổi biến số $x = 2 \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì ta được.

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$.

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt$.

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$.

Câu 38. (THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018) Biết $\int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{a\sqrt{b}+c}{15}$ với a, b, c là các số

nguyên và $b \geq 0$. Tính $P = a + b^2 - c$.

A. $P = 3$.

B. $P = 7$.

C. $P = -7$.

D. $P = 5$.

Câu 39. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$ theo n .

A. $I = \frac{1}{2n+2}$.

B. $I = \frac{1}{2n}$.

C. $I = \frac{1}{2n-1}$.

D. $I = \frac{1}{2n+1}$.

Câu 40. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Giả sử $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$ với a, b là số nguyên.

Khi đó giá trị $a - b$ là

A. -17 .

B. 5 .

C. -5 .

D. 17 .

Câu 41. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(\sqrt{2}) = -2$ và

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}, \forall x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6}). \text{ Khi đó } \int_0^{\sqrt{3}} f(x).dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{3\pi}{4}$.

B. $\frac{3\pi+6}{4}$.

C. $\frac{\pi+2}{4}$.

D. $-\frac{3\pi+6}{4}$.

Câu 42. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018) Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với a, b, c

là các số hữu tỷ, tính $P = a + 2b + c - 7$.

A. $-\frac{1}{9}$.

B. $\frac{86}{27}$.

C. -2 .

D. $\frac{67}{27}$.

Câu 43. (THPT Phan Chu Trinh - Đắk Lắk - 2018) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$ với $a,$

b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 44$.

B. $P = 42$.

C. $P = 46$.

D. $P = 48$.

Câu 44. (Sở Phú Thọ - 2018) Biết $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x + 3\sqrt{2x+1} + 3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = 2a + b + c$.

A. $T = 4$.

B. $T = 2$.

C. $T = 1$.

D. $T = 3$.

Câu 45. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\int_0^{\pi} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$.

B. $\frac{208}{225}$.

C. $\frac{242}{225}$.

D. $\frac{149}{225}$.

Câu 46. (Sở Bình Phước - 2020) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{b}$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 0. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 47. (Đề Minh Họa 2017) Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4}$ B. $I = -\frac{1}{4} \pi^4$ C. $I = -\pi^4$ D. $I = 0$

Câu 48. (THPT Kinh Môn - 2018) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$

A. $S = 1$. B. $S = 4$. C. $S = 3$. D. $S = 0$.

Câu 49. (Bình Dương 2018) Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

A. $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$. B. $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$. C. $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$. D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$.

Câu 50. (Đồng Tháp - 2018) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng cách đặt $u = \tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du$. B. $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du$. C. $I = -\int_0^1 u^2 du$. D. $I = \int_0^1 u^2 du$.

Câu 51. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội - 2018) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$. D. $I = \frac{9}{4}$.

Câu 52. (THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018) Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a + b = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $2a - b = 0$. D. $a + 2b = 0$.

Câu 53. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Có bao nhiêu số $a \in (0; 20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$.

A. 10. B. 9. C. 20. D. 19.

Câu 54. (HSG Bắc Ninh 2019) Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$ và $F(0) = 2$.

Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}-8}{3}$ B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}+8}{3}$ C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}-8}{3}$ D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Câu 55. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$ và a, b, c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

A. 5. B. 12. C. 7. D. -1.

Câu 56. Cho tích phân số $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a + b = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $2a - b = 0$. D. $a + 2b = 0$.

Câu 57. (THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c > 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 3$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 4$.

Câu 58. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 1$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a + \pi}{b}; a, b \in \mathbb{Q}$, khi đó $b - a$ bằng

A. 4. B. 12. C. 0. D. -4.

Câu 59. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4 \sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^{\pi} 16 f(x) dx$.

A. $I = 10\pi^2$. B. $I = 160\pi$. C. $I = 16\pi^2$. D. $I = -10\pi^2$.

Câu 60. (Đề Tham Khảo 2017) Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = -2$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Câu 61. (Cần Thơ - 2018) Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

A. $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$. B. $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt$. C. $I = \int_1^e (3t+1) dt$. D. $I = \int_0^1 (3t+1) dt$.

Câu 62. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. B. $a^2 + b^2 + c^2 = 11$. C. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. D. $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Câu 63. (Việt Đức Hà Nội 2019) Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ là:
A. $T = 11$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = 10$. **D.** $T = 8$.

Câu 64. Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ với $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $2ab = -1$. **B.** $2ab = 1$. **C.** $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$. **D.** $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$.

Câu 65. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Cho $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a + b + c + d$?
A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 66. (Kim Liên - Hà Nội - 2018) Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \ln \left(p + \frac{e}{e + \pi} \right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S = m + n + p$.
A. $S = 6$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 7$. **D.** $S = 8$.

Câu 67. (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019) Cho $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = a \cdot e^3 + b + c \cdot \ln(e + 1)$ với a, b, c là các số nguyên và $\ln e = 1$. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.
A. $P = 9$. **B.** $P = 14$. **C.** $P = 10$. **D.** $P = 3$.

Câu 68. Biết $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c} (\ln a - \ln b + \ln c)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = 2a - b + c$.
A. $P = -3$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 3$.

Câu 69. (Chuyên Hạ Long - 2018) Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2 + ab$.
A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 6.

Câu 70. (Chuyên Thái Bình 2018) Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a \cdot e + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.
A. $P = 1$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = -2$.

Câu 71. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f(0) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = xe^{x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 xf(x) dx$ bằng
A. $\frac{e+1}{4}$. **B.** $\frac{e-1}{4}$. **C.** $\frac{e-1}{2}$. **D.** $\frac{e+1}{2}$.

- Câu 72. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Biết rằng $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.
- A. $S = 3$. B. $S = 7$. C. $S = 10$. D. $S = 5$.

Dạng 4. Tích phân từng phần

Nếu u, v có đạo hàm liên tục trên $(a; b)$ thì $I = \int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$.

Chọn $\begin{cases} u = \dots\dots\dots & \xrightarrow{\text{Vi phân}} du = \dots\dots\dots dx \\ dv = \dots\dots\dots dx & \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v = \dots\dots\dots \end{cases}$

Nhận dạng: tích hai hàm khác loại nhân nhau (ví dụ: mũ nhân lượng giác,...)

Thứ tự ưu tiên chọn u là: "log – đa – lượng – mũ" và dv là phần còn lại.

Nghĩa là nếu có \ln hay $\log_a x$ thì chọn $u = \ln$ hay $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$ và $dv =$ còn lại. Nếu không có \ln ; \log thì chọn $u =$ đa thức và $dv =$ còn lại,...

CHÚ Ý: \int_a^b (hàm mũ). (lượng giác). $dx \longrightarrow$ tích phân từng phần luân hồi.

Nghĩa là sau khi đặt u, dv để tính tích phân từng phần và tiếp tục tính $\int u dv$ sẽ xuất hiện lại tích phân ban đầu. Giả sử tích phân được tính ban đầu là I và nếu lặp lại, ta sẽ không giải tiếp mà xem đây là phương trình bậc nhất ẩn là $I \xrightarrow{\text{giải}} I$.

- Câu 1. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét $\int_0^2 x e^{x^2} dx$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\int_0^2 x e^{x^2} dx$ bằng
- A. $2 \int_0^2 e^u du$. B. $2 \int_0^4 e^u du$. C. $\frac{1}{2} \int_0^2 e^u du$. D. $\frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$.
- Câu 2. (Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$:
- A. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$ B. $I = \frac{1}{2}$ C. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$ D. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$
- Câu 3. (Mã 103 2018)** Cho $\int_1^e (1 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a + b = c$ B. $a + b = -c$ C. $a - b = c$ D. $a - b = -c$
- Câu 4. (Mã 104 2018)** Cho $\int_1^e (2 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $a + b = c$ B. $a - b = c$ C. $a - b = -c$ D. $a + b = -c$
- Câu 5. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Biết $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P = 13a + 10b + 84c$.

A. 193.

B. 191.

C. 190.

D. 189.

Câu 6. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho a là số thực dương. Tính $I = \int_0^a \sin^{2016} x \cdot \cos(2018x) dx$ bằng:

A. $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \sin 2017a}{2016}$.

B. $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}$.

C. $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2016}$.

D. $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}$.

Câu 7. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$ và $f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x})$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $3e$.

B. $3e^{-1}$.

C. $4 - 3e^{-1}$.

D. $-3e^{-1}$.

Câu 8. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

A. $T = 9$.

B. $T = 11$.

C. $T = 8$.

D. $T = 10$.

Câu 9. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Xét hàm số $f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x) dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng

A. 5622.

B. 5620.

C. 5618.

D. 5621.

Câu 10. Tích phân $\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$ bằng

A. $\frac{-5-3e^2}{4}$.

B. $\frac{5-3e^2}{4}$.

C. $\frac{5-3e^2}{2}$.

D. $\frac{5+3e^2}{4}$.

Câu 11. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b \cdot e$, tích $a \cdot b$ bằng

A. -15.

B. -1.

C. 1.

D. 20.

Câu 12. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

A. $P = 6$.

B. $P = 5$.

C. $P = -6$.

D. $P = 4$.

Câu 13. (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019) Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$. Tìm đẳng thức đúng?

A. $I = -(x-1) \cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

B. $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

$$\text{C. } I = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx. \quad \text{D. } I = -(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx.$$

Câu 14. (Chuyên KHTN 2019) Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a, b, c sao cho

$$\int_2^3 (4x+2) \ln x dx = a + b \ln 2 + c \ln 3. \text{ Giá trị của } a + b + c \text{ bằng}$$

- A. 19. B. -19. C. 5. D. -5.

Câu 15. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính

$$P = a + 4b.$$

- A. $P = 0$ B. $P = 1$ C. $P = 3$ D. $P = -3$

Câu 16. Tính tích phân $I = \int_1^{2^{1000}} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$, ta được

$$\text{A. } I = -\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + 1001 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}.$$

$$\text{B. } I = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}.$$

$$\text{C. } I = \frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} - 1001 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}.$$

$$\text{D. } I = \frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} - \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}.$$

Câu 17. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

- A. $6a + 7b = 33$. B. $6a + 7b = 25$. C. $6a + 7b = 42$. D. $6a + 7b = 39$.

Câu 18. (Chuyên Hưng Yên 2019) Biết rằng $\int_1^a \ln x dx = 1 + 2a$, ($a > 1$). Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. $a \in (18; 21)$. B. $a \in (1; 4)$. C. $a \in (11; 14)$. D. $a \in (6; 9)$.

Câu 19. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 1. B. -3. C. 5. D. -1.

Câu 20. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh -2019) Tính tích phân $I = \int_1^2 x e^x dx$.

- A. $I = e^2$. B. $I = -e^2$. C. $I = e$. D. $I = 3e^2 - 2e$.

Câu 21. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Biết rằng $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Tính $m + n + 2p$

- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. 0. D. $-\frac{5}{4}$.

Câu 22. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Biết $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a + 4b$.

A. 42.

B. 21.

C. 12.

D. 32.

Câu 23. (Chuyên Quốc Học Huế 2019) Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 2a + 3b + c.$$

A. $P = 6$

B. $P = -6$

C. $P = 5$

D. $P = 4$

Câu 24. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$. Khi đó, giá trị của $a^2 + b$ bằng

A. 11.

B. 7.

C. 13.

D. 9.

Câu 25. Cho $\int \ln(x^2 - x) dx = F(x)$, $F(2) = 2 \ln 2 - 4$. Khi đó $I = \int_2^3 \left[\frac{F(x) + 2x + \ln(x-1)}{x} \right] dx$ bằng

A. $3 \ln 3 - 3$.

B. $3 \ln 3 - 2$.

C. $3 \ln 3 - 1$.

D. $3 \ln 3 - 4$

Câu 26. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b$.

A. $T = 9$.

B. $T = 13$.

C. $T = 7$.

D. $T = 11$.

Câu 27. (Thpt Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = \frac{a}{2} \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + 2(b+c)$ là:

A. 0.

B. 9.

C. 3.

D. 5.

Câu 28. Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P = ab$.

A. $P = \frac{3}{2}$.

B. $P = 0$.

C. $P = \frac{-9}{2}$.

D. $P = -3$.

Câu 29. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

A. 1.

B. -3.

C. 5.

D. -1.

Câu 30. (Sở Phú Thọ 2019) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2 \cos x)}{\cos^2 x} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$

B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{17}{8}$

Câu 31. (Chuyên Thái Bình 2019) Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \frac{a}{b} e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc - ad$.

- A. 12. B. 1. C. 24. D. 64.

Câu 32. (THPT Yên Khánh A 2018) Cho $\int_0^2 \frac{x + \ln(x+1)}{(x+2)^2} dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ln 3$ (với $a, c \in \mathbb{Z}; b, d \in \mathbb{N}^*; \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $P = (a+b)(c+d)$.

- A. 7. B. -7. C. 3. D. -3.

Câu 33. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ với

$x > -1$. Biết $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$ với a, b, c, d là các số nguyên dương, $b \leq 3$ và $\frac{b}{c}$ tối giản.

Khi đó $a+b+c+d$ bằng

- A. 8. B. 5. C. 6. D. 10.

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI

<https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing>

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bào Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương

https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

Tải nhiều tài liệu hơn tại: <http://diendangiaovientoan.vn/>

ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!