TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán liên quan đến mặt cầu – mặt phẳng – đường thẳng

Câu 1. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$ và $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=\sqrt{3}$ **B.** $R=2$ **C.** $R=1$ **D.** $R=\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;2;1)$

$$d(I;(P))=\frac{|3+2+1|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R'=\frac{AB}{2}=3\sqrt{2}$

Ta có $H\in(S)$. Mặt khác $H\in(P)$ nên $H\in(C)=(S)\cap(P)$

Bán kính của đường tròn (C) là $R=\sqrt{(R')^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P): 2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d: \frac{x-5}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36.$ **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9.$

C. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9.$ **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36.$

Lời giải

Chọn B

$(P)\cap Oz=A(0;0;3)$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+6y+z-3=0\\ \frac{x-5}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6y+z-3=0\\ 2x-y-10=0\\ y+2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-2\\ z=7\end{cases}\Rightarrow B(4;-2;7).$$

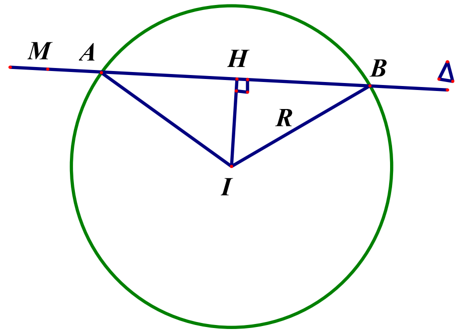
Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I(2;-1;5)\Rightarrow IA=\sqrt{4+1+4}=3.$

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9.$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta: \begin{cases}x=4+2t\\ y=3+t\\ z=3+2t\end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Giá trị của m là

A. $m=5$. **B.** $m=12$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=-10$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow IH \perp AB$, $HA=4$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2\,;3\,;0)$, bán kính $R=\sqrt{13-m}$, $(m<13)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(4\,;3\,;3)$ và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2\,;1\,;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(6\,;0\,;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-3;-6\,;6) \Rightarrow IH=d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3$.

Ta có: $R^2=IH^2+HA^2 \Leftrightarrow 13-m=3^2+4^2 \Leftrightarrow m=-12$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z=0$; $(Q):x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S). Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(S):(x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=1$. **B.** $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=6$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{7}$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I\in(d)\Rightarrow I(2t;3+t;2+t)$.

$I\in(P)\Rightarrow(P):2t-2(3+t)+2(2+t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(2;4;3)$

(Q) tiếp xúc với (S) nên $R=d(I,(Q))=\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

Vậy $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{7}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=14$ và mặt phẳng $(\alpha):x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}=(4;-2;1)$. **B.** $\vec{v}=(2;0;-1)$. **C.** $\vec{m}=(-3;1;0)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{14}$.

Ta có $d(I,(\alpha))=\sqrt{14}=R\Rightarrow(\alpha)$ tiếp xúc với (S).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(\alpha)\Rightarrow H(1;0;2)$

Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A(a;0;0)$ và $\overrightarrow{AH}=(a-1;0;-2)$

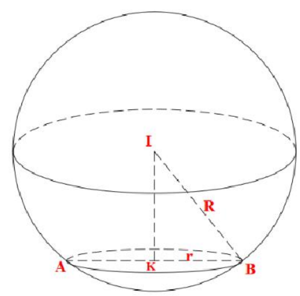
Đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) nên $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{n_\alpha}$. Tức là

$a-1+0-4=0\Leftrightarrow a=5\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(4;0;-2)$ cùng phương với $\vec{v}=(2;0;-1)$.

Câu 6. **(Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

A. $K(3;-2;1)$, $r=10$. **B.** $K(-1;2;3)$, $r=8$. **C.** $K(1;-2;3)$, $r=8$. **D.** $K(1;2;3)$, $r=6$.

Lời giải



- Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$; $R=10$.
- Khoảng cách từ I đến (P) là $IK=d(I;(P))=\dfrac{|6+4-1+9|}{3}=6$.
- Đường thẳng qua $I(3;-2;1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2-2t\\z=1-t\end{cases}$ khi đó

Tọa độ tâm K là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2-2t\\z=1-t\\2x-2y-z+9=0\end{cases}\Rightarrow K(-1;2;3)$.

- Bán kính: $r=\sqrt{R^2-IK^2}=\sqrt{100-36}=8$.

Câu 7. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A,B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Có $A(1;1;1), B(2;2;1)$ $\Rightarrow$ Phương trình AB: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}$

Gọi K là giao điểm của AB và (P) $\Rightarrow$ $K(-1;-1;1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H.

$\Rightarrow$ HK là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow$ $KH^2 = \overline{KA}.\overline{KB} = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$ không đổi

$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=4$.

Mặt phẳng (β) song song với (α) nên có phương trình dạng $4x+3y-12z+c=0\,(c\neq 10)$.

(β) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I;(\beta)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1+3.2-12.3+c|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{|-26+c|}{13} = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -26+c=52 \\ -26+c=-52 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=78 \\ c=-26 \end{array}\right.$

Nếu $c=78$ thì $(\beta): 4x+3y-12z+78=0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0;0;\dfrac{13}{2}\right)$ có cao độ dương.

Nếu $c=-26$ thì $(\beta): 4x+3y-12z-26=0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0;0;-\dfrac{13}{6}\right)$ có cao độ âm.

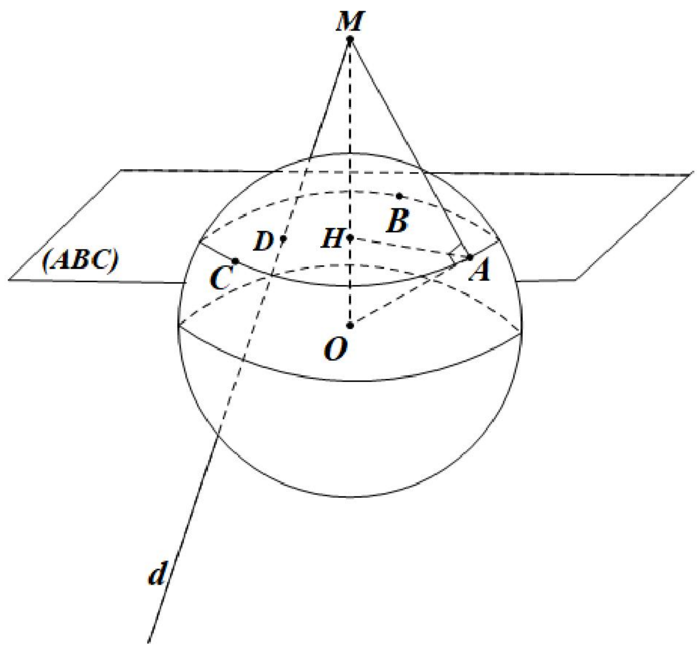
Vậy $(\beta): 4x+3y-12z+78=0$.

Câu 9. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B



* Ta có: $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4$.

* Mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2=9\Rightarrow$ tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.

* MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu $\Rightarrow MO\perp(ABC)$.

$\Rightarrow(ABC)$ đi qua $D(1;1;2)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}(x_0;y_0;z_0)$ có phương trình dạng:

$x_0(x-1)+y_0(y-1)+z_0(z-2)=0$.

* MA là tiếp tuyến của mặt cầu tại $A\Rightarrow\Delta MOA$ vuông tại $A\Rightarrow OH.OM=OA^2=R^2=9$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) $(OH+OM=HM)$, ta có:

$$d(O;(ABC))=OH=\frac{|-x_0-y_0-2z_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{|x_0+y_0+z_0+z_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{|z_0+4|}{OM}\Rightarrow OH.OM=|z_0+4|.$$

$\Rightarrow|z_0+4|=9\Leftrightarrow z_0=5\vee z_0=-13$.

* Với $z_0=5\Rightarrow M(0;-1;5)\Rightarrow T=26$ nhận do: $OM=\sqrt{26};OH=\dfrac{|z_0+4|}{OM}=\dfrac{9}{\sqrt{26}}$;

$pt(ABC):-y+5z-9=0\Rightarrow MH=d(M;(ABC))=\dfrac{17}{\sqrt{26}}$.

$\Rightarrow OH + HM = OM$.

* Với $z_0 = -13 \Rightarrow M(6;11;-13) \Rightarrow$ loại do: $OM = \sqrt{326}; OH = \dfrac{9}{\sqrt{326}}$;

$(ABC): 6x + 11y - 13z + 9 = 0 \Rightarrow MH = d(M;(ABC)) = \dfrac{335}{\sqrt{326}}$.

$\Rightarrow OH + HM \neq OM$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\dfrac{7}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R = 1$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (1;1;-1)$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d, ta có $K(t;2+t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t-1;2+t;-t+1)$.

Vì $IK \perp d$ nên $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{IK} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + 2 + t - (-t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IK}(-1;2;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng IK là $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2t' \\ z = -1 + t' \end{cases}$

Khi đó, trung điểm H của TT' nằm trên IK nên $H(1-t';2t';-1+t') \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-t';2t';t')$. Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK} = IT^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK} = 1 \Leftrightarrow t' + 4t' + t' = 1 \Leftrightarrow t' = \dfrac{1}{6} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R = 6$.

$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{EI}\right] = (5;-5;0) = 5(1;-1;0)$.

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$. **B.** $x + 3y + 5z + 2 = 0$. **C.** $x - 2y - 3 = 0$. **D.** $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Lời giải

Chọn A

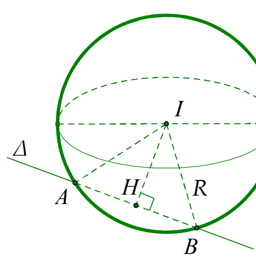
Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu $I(3;1;0)$ lên d, từ đó ta tìm được $H(3;0;-1)$. Thấy $IH \le R$ nên d cắt (S). Vậy mặt phẳng cần tìm nhận $\overrightarrow{IH} = (0;-1;-1)$ làm VTPT nên pt mặt phẳng là $y + z + 1 = 0$.

Câu 13. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D



$(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$ Tâm $I(0;0;0)$; bán kính $R = 2$.

$(P): x - 3y + 5z - 3 = 0 \Rightarrow$ véctơ pháp tuyến của $(P): \vec{n}_P = (1;-3;5)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta \Rightarrow AH = BH = \dfrac{AB}{2} = 1$.

Xét ΔIAH vuông tại $H \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{IE} = (1;1;1) \Rightarrow IE = \sqrt{3} = IH \Rightarrow H \equiv E \Rightarrow IE \perp \Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;1;1)$; vuông góc với IE và chứa trong (P) nên:

Véctơ chỉ phương của $\Delta: \vec{n}_\Delta = \left[\vec{n}_P; \overrightarrow{IE}\right] = (-8;4;4)$.

$\Rightarrow$ véctơ $\vec{u} = (2;-1;-1)$ cũng là véctơ chỉ phương của Δ.

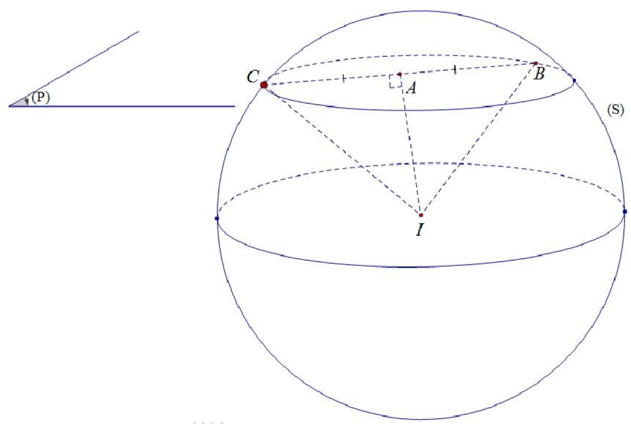
Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 14. **(SGD Cần Thơ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-7=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S). Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



(S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+7}=2\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AI}=(1;1;2) \Rightarrow AI=\sqrt{6}<R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S) và A nằm trên dây cung BC (1).

$S_{\Delta IBC}=\frac{1}{2}IB.IC.\sin\widehat{BIC}=\frac{R^2}{2}\sin\widehat{BIC}\le\frac{R^2}{2}$ nên diện tích ΔIBC đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{2} \Leftrightarrow \sin\widehat{BIC}=1 \Rightarrow \widehat{BIC}=90^\circ \Rightarrow \Delta IBC$ vuông cân tại $I \Rightarrow BC=IC\sqrt{2}=R\sqrt{2}=2\sqrt{6}$

Gọi J là trung điểm của BC. Ta có $IJ\perp BC$ và $IJ=\frac{BC}{2}=\sqrt{6}$ (2).

ΔAIJ vuông tại $J \Rightarrow$ $AI\ge IJ$, kết hợp thêm với (1) và (2) ta có $IJ=AI \Rightarrow A\equiv J \Rightarrow A$ là trung điểm của BC và $IA\perp BC$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$ có giá vuông góc với Δ.

Vậy Δ nhận $\vec{u}=\left[\vec{n}_{(P)},\overrightarrow{AI}\right]=(1;-1;0)$ làm vectơ chỉ phương và đi qua $A(0;1;-2)$

$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-2 \end{cases}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): z+2=0$, $K(0;0;-2)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K, bán kính $r=\sqrt{5}$ là

A. $x^2+y^2+(z-2)^2=16$. **B.** $x^2+y^2+z^2=16$.

C. $x^2+y^2+(z-2)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2=9$.

Lời giải

Chọn D

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;0;1)$.

Viết lại phương trình của đường thẳng d dưới dạng tham số: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$.

Gọi I là tâm của mặt cầu cần lập. Vì $I \in d$ nên giả sử $I(t;t;t)$. Có $\overrightarrow{IK}=(-t;-t;-2-t)$.

Thiết diện của mặt cầu và mặt phẳng (P) là đường tròn tâm K nên ta có $IK \perp (P)$. Suy ra $\overrightarrow{IK}$ và $\vec{n}=(0;0;1)$ cùng phương. Do đó tồn tại số thực k để $\overrightarrow{IK}=k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -t=k.0 \\ -t=k.0 \\ -2-t=k.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ k=-2 \end{cases}$.

Suy ra $I(0;0;0)$. Tính được $d(I,(P))=2$.

Gọi R là bán kính mặt cầu. Ta có: $R=\sqrt{r^2+\left[d(I,(P))\right]^2}=3$.

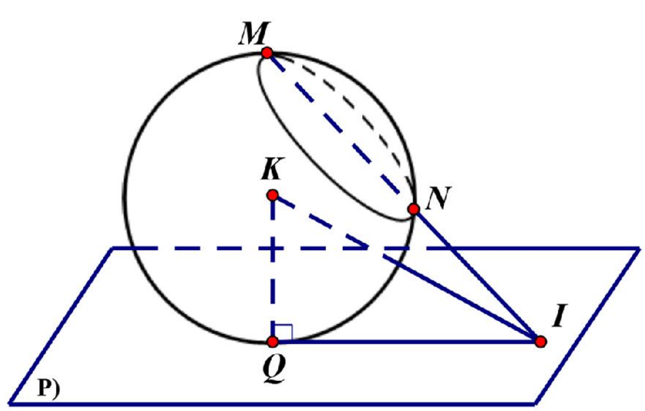
Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình: $x^2+y^2+z^2=9$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\frac{2\sqrt{11}}{3}$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\frac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=4$.

Lời giải

Chọn B



* Đường thẳng MN có phương trình là: $MN:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$.

* Gọi $I=MN\cap(P)$ khi đó tọa độ điểm I ứng với t thỏa mãn:

$1+t+1+t-1-t-3=0\Leftrightarrow t-2=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow I(3;3;3)\Rightarrow IM=2\sqrt{3},\ IN=6\sqrt{3}$.

* Do mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với đường thẳng IQ tại điểm Q nên ta có:

$IQ^2=IM.IN=KI^2-R^2\Rightarrow IQ^2=IM.IN=36\Leftrightarrow IQ=6$

Vậy Q luôn thuộc đường tròn tâm I bán kính $R=6$.

Câu 17. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$ và đường thẳng $d:\frac{x}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;0)$, bán kính $R=3$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2t\\y=-2+t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=-2t\\y=-2+t\\z=-1+2t\\(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9\end{cases}\Rightarrow 9t^2+2t-6=0\ (1)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt.

$d(I,(P))=\frac{|2.1-2.(-3)+0+3|}{3}=\frac{11}{3}>R\Rightarrow$ (P) và (S) không có điểm chung.

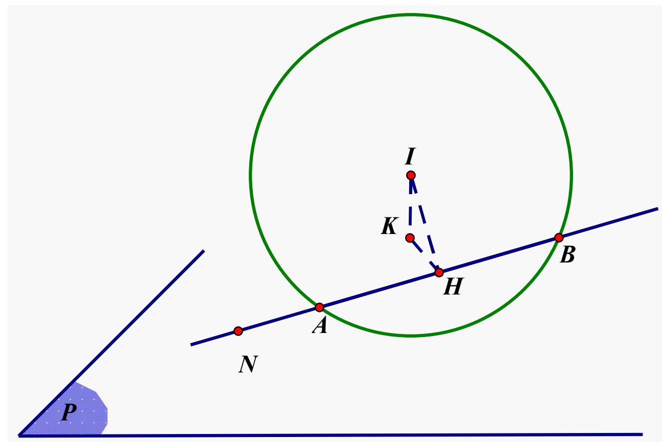
Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=-2t\\y=-2+t\\z=-1+2t\\2x-2y+z+3=0\end{cases}\Rightarrow t=\frac{3}{2}$. d cắt (P) tại một điểm.

Vậy có 3 phát biểu đúng.

Câu 18. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2019)** Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3^2$, mặt phẳng $(P):x-y+z+3=0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P). Một đường thẳng Δ đi qua *N* nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm *A*, *B* thỏa mãn $AB=4$. Gọi $\vec{u}(1;b;c)$, $(c>0)$ là một vecto chỉ phương của Δ, tổng $b+c$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 45.

Lời giải



Chọn D

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ bán kính $R=3$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

Suy ra H là trung điểm của đoạn AB nên AH = $2 \Rightarrow d(I,\Delta)=IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5}$ và $IK=d(I,(P))=\dfrac{|1-2+1+3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

Ta có $\left.\begin{matrix} IK\perp(P) \\ \Delta\subset(P)\end{matrix}\right\}\Rightarrow IK\perp\Delta$ mà $IH\perp\Delta \Rightarrow \Delta\perp KH$

hay $KH=d(K,\Delta)$ và $KH=\sqrt{IH^2-IK^2}=\sqrt{2}$.

Do $IK\perp(P)$ nên phương trình tham số đường thẳng $IK:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=1+t\end{cases} \Rightarrow K(1+t;2-t;1+t)$.

Mà $K\in(P)\Rightarrow 1+t-2+t+1+t+3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow K(0;3;0)$

Từ đây ta có $KH=d(K,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{KN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{(4b-3c)^2+(-c-4)^2+(b+3)^3}}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=\sqrt{2}$ (*).

Mặt khác ta có $\Delta\subset(P)\Rightarrow \vec{u}\perp\overrightarrow{n_P}\Rightarrow \vec{u}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow 1-b+c=0 \Leftrightarrow b=c+1$.

Thay vào (*) ta được

$\sqrt{(c+4)^2+(-c-4)^2+(c+4)^3}=\sqrt{2}\sqrt{1+(c+1)^2+c^2}$

$\Leftrightarrow 3c^2-24c+48=4c^2+4c+4$

$\Leftrightarrow c^2-20c-44=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=22\,(N) \\ c=-2\,(L) \end{array}\right.$

Suy ra $b=23 \Rightarrow b+c=45$.

Câu 19. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

A. $\frac{16}{17}\pi$ (đvdt). **B.** $\frac{4}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **C.** $\frac{16}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **D.** $\frac{4}{17}\pi$ (đvdt).

Lời giải

Gọi $A;B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường. Gọi M là trung điểm AB. Dễ có mặt cầu tâm M bán kính $R=\frac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A;B$ lần lượt là:

$A(2t_1-1;t_1-1;2t_1-1)$ và $B(2t_2+1;2t_2+1;t_2+1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}(2t_2-2t_1+2;2t_2-t_1+2;t_2-2t_1+2)$.

Có $\overrightarrow{u_1}(2;1;2)$ và $\overrightarrow{u_2}(2;2;1)$ lần lượt là 2 vecto chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).1+(t_2-2t_1+2).2=0 \\ (2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).2+(t_2-2t_1+2).1=0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t_2-9t_1+10=0 \\ 9t_2-8t_1+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\frac{10}{17} \\ t_2=\frac{-10}{17} \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{17};\frac{-7}{17};\frac{3}{17})$; B$(\frac{-3}{17};\frac{-3}{17};\frac{7}{17})$ $\overrightarrow{AB}(\frac{-6}{17};\frac{4}{17};\frac{4}{17})$.

$R=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{(-6)^2+4^2+4^2}}{17}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

Diện tích mặt cầu cần tính là $S=4\pi.R^2=4.\pi.\frac{1}{\sqrt{17}^2}=\frac{4\pi}{17}$ (đvdt).

Câu 20. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4 \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x=3-t' \\ y=t' \\ z=0 \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$. **B.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;1;0)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-1;1;0)$.

Để phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 khi và chỉ khi:

Tâm mặt cầu (S) nằm trên đoạn thẳng vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2, đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung.

Gọi điểm $M(2t;t;4)$ thuộc d_1; gọi điểm $N(3-t';t';0)$ thuộc d_2 với MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(3-t'-2t;t'-t;-4)$.

MN là đoạn thẳng vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2.(3-t'-2t)+t'-t=0\\ (-1).(3-t'-2t)+t'-t=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t'+5t=6\\ 2t'+t=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\ t'=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M(2;1;4)\\ N(2;1;0)\end{cases}$.

Gọi điểm I là tâm mặt cầu (S), do đó điểm I là trung điểm MN.

$\Rightarrow I(2;1;2) \Rightarrow R=IM=IN=2$.

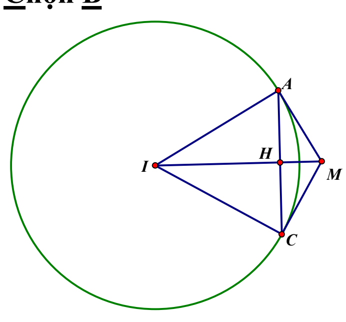
Suy ra mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

Câu 21. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c),(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^0$, $\widehat{BMC}=60^0$, $\widehat{CMA}=120^0$. Tính $a^3+b^3+c^3$.

A. $a^3+b^3+c^3=\frac{173}{9}$. **B.** $a^3+b^3+c^3=\frac{112}{9}$. **C.** $a^3+b^3+c^3=-8$. **D.** $a^3+b^3+c^3=\frac{23}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+13}=3\sqrt{3}$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S).

Đặt $MA=MB=MC=x$ khi đó $AB=x; BC=x\sqrt{2}; CA=x\sqrt{3}$ do đó tam giác ABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

Vì $\widehat{AMC}=120^0$ nên tam giác AIC đều do đó $x\sqrt{3}=R \Leftrightarrow x=3$ suy ra $IM=2AM=2x=6$.

Lại có $M\in d$ nên $M(-1+t;-2+t;1+t),(t>1)$ mà $IM=6$ nên $(t-2)^2+(t-4)^2+(t+4)^2=36$

$\Leftrightarrow 3t^2-4t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{4}{3} \end{array}\right.$.

Mà a > 0 nên $t=\frac{4}{3}$ suy ra $H\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$ nên $a^3+b^3+c^3=\frac{112}{9}$.

Câu 22. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$. **B.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

C. $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$. **D.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{8}$.

Lời giải

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$.

$d(I,(\alpha))=\frac{|2.2-2.3+5+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=6<R \Rightarrow (\alpha)\cap(S)=C(H;r), H$ là hình chiếu của I lên (α).

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(2;-2;1)$.

$\Rightarrow$ PTTS $\Delta_1:\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{cases}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(-2;7;3)$.

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{MH}=(1;4;6)$.

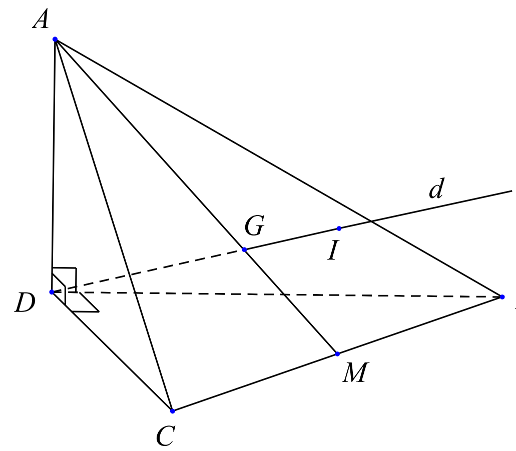
Suy ra phương trình $\Delta:\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

Câu 23. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=-4$ **B.** $S=-1$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=-3$

Lời giải

Chọn B



Gọi d là trục của ΔABC, ta có $(ABC): x+y+z+2=0$.

Do ΔABC đều nên d đi qua trọng tâm $G\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;1;1)$, suy ra

$$d:\begin{cases} x=-\frac{2}{3}+t \\ y=-\frac{2}{3}+t \\ z=-\frac{2}{3}+t \end{cases}.$$

Ta thấy $\Delta DAB=\Delta DBC=\Delta DCA$, suy ra $DA=DB=DC \Rightarrow D\in d$ nên giả sử $D\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{4}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right);\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{2}{3}+t;\frac{4}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right);\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;\frac{4}{3}+t\right)$

Có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{2}{3}\Rightarrow D\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right) \\ t=\frac{2}{3}\Rightarrow D(0;0;0)\,(loai)\end{array}\right.$.

Ta có $I\in d \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right)$, do tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm I nên

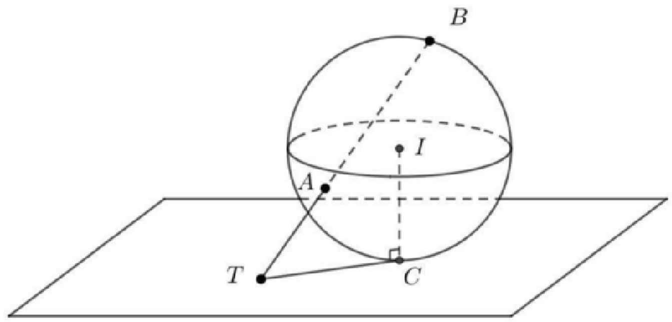
$IA=ID \Rightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow S=-1$.

Câu 24. (Chuyên Hạ Long 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x+y+2z-1=0$, $A(0;0;4), B(3;1;2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C. Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. Đáp án khác. **B.** $r=\frac{2\sqrt[4]{244651}}{3}$. **C.** $r=\frac{2\sqrt{244651}}{9}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{2024}}{3}$.

Lời giải

Cách 1:



Ta có $\overrightarrow{AB}(3;1;-2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$.

Giả sử AB cắt (P) tại $T(3t;t;4-2t)$. Do $T \in (P): 2x + y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-7}{3}$.

Khi đó

$T\left(-7;\dfrac{-7}{3};\dfrac{26}{3}\right)$; $\overrightarrow{TA}\left(7;\dfrac{7}{3};\dfrac{-14}{3}\right) \Rightarrow TA = \dfrac{7\sqrt{14}}{3}$; $\overrightarrow{TB}\left(10;\dfrac{10}{3};\dfrac{-20}{3}\right) \Rightarrow TB = \dfrac{10\sqrt{14}}{3}$.

Ta có $TC^2 = TA.TB = \dfrac{980}{9} \Rightarrow TC = \dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và cách điểm T cố định một khoảng $\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r = \dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Cách 2:

Ta có $\dfrac{TA}{TB} = \dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \dfrac{7}{10}$; $AB = \sqrt{14}$.

Giả sử AB cắt (P) tại T. Suy ra A nằm giữa B và T (vì A, B cùng phía so với (P)).

Khi đó ta có

$$\begin{cases} TB - TA = \sqrt{14} \\ TA = \dfrac{7}{10}TB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TA = \dfrac{7\sqrt{14}}{3} \\ TB = \dfrac{10\sqrt{14}}{3} \end{cases} \Rightarrow TC^2 = TA.TB = \dfrac{980}{9} \Rightarrow TC = \dfrac{14\sqrt{5}}{3}$$

Câu 25. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ với $S(1;-1;6)$, $A(1;2;3)$, $B(3;1;2)$, $C(4;2;3)$, $D(2;3;4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD).

A. $d = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-1;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (1;1;1)$ và $\overrightarrow{DC} = (2;-1;-1)$.

Ta thấy: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=2.1-1.1-1.1=0$ và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Gọi M là trung điểm của AC. Ta có: $M\left(\frac{5}{2};2;3\right)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(0;-3;3)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\vec{u}=(0;-1;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}$.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=(0;3;-3)$. Ta thấy $\overrightarrow{SA}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên suy ra $SA\perp(ABCD)$.

Gọi N là trung điểm của SA, ta có: $N\left(1;\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Do $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nên $\begin{cases} I\in d \\ NI\perp d \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} I\left(\frac{5}{2};2-t;3+t\right) \\ \overrightarrow{NI}\perp\vec{u} \end{cases}$.

Mà: $\overrightarrow{NI}=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}-t;-\frac{3}{2}+t\right)$. Suy ra: $\overrightarrow{NI}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t-\frac{3}{2}+t-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}\Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AD}\right]=(6;-3;-3)$.

Một vectơ pháp tuyến của (SAD) là: $\vec{n}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AD}\right]=(2;-1;-1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (SAD) là:

$2(x-1)-(y-2)-(z-3)=0\Leftrightarrow 2x-y-z+3=0$.

Vậy $d\left(I,(SAD)\right)=\dfrac{\left|2.\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+3\right|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+10=0$ và $(\beta):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $R=d\left(I,(\alpha)\right)=d\left(I,(\beta)\right)$.

Mà $d\left(I,(\beta)\right)=\dfrac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{1-m}+c-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1-m)^2}+1}}$

Ta có

$$\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1-m)^2}+1}=\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{1-m}\right)^2-2\frac{1}{m}.\frac{1}{1-m}+1}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{1}{m(1-m)}\right]^2-2\frac{1}{m}.\frac{1}{1-m}+1}=\frac{1}{m(1-m)}-1(\text{do }m\in(0;1)$$

Nên

$$R=\frac{\left|\frac{a(1-m)+bm+cm(1-m)-m(1-m)}{m(1-m)}\right|}{\frac{1}{m(1-m)}-1}$$

$$\Leftrightarrow R=\frac{\left|a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\right|}{m^2-m+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R-Rm+Rm^2=a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\\-R+Rm-Rm^2=a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2(R+c-1)+m(a-b-c-R+1)+R-a=0(1)\\m^2(R+c-1)+m(b+c-a-R-1)+R+a=0(2)\end{array}\right.$$

Xét (1) do mặt cầu tiếp xúc với tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ với mọi $m\in(0;1)$ nên pt (1) nghiệm đúng với mọi $m\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}R+c-1=0\\a-b-c-R+1=0\\R-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=R\\b=R\\c=1-R\end{cases}\Rightarrow I(R;R;1-R).$$

Mà $R=d(I,(\alpha))\Leftrightarrow R=\frac{|2R-R+2(1-R)+10|}{3}\Leftrightarrow 3R=|12-R|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=3\\R=-6(l)\end{array}\right.$

Xét (2) tương tự ta được

$$\Leftrightarrow\begin{cases}R+c-1=0\\b+c-a-R-1=0\\R+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-R\\b=-R\\c=R+1\end{cases}\Rightarrow I(-R;-R;R+1)$$

Mà $R=d(I,(\alpha))\Leftrightarrow R=\frac{|-2R+R+2(1+R)+10|}{3}\Leftrightarrow 3R=|12+R|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=6\\R=-3(l)\end{array}\right.$.

Vậy $R_1+R_2=9$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B. Tính OA biết $AB=4$.

A. $OA=\sqrt{11}$. **B.** $OA=5$. **C.** $OA=3$. **D.** $OA=\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách từ điểm I đến mp(P) là: $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|5-2.(-3)+2.5-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=6$.

AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B, do đó ta có:

$IA=\sqrt{IB^2+AB^2}=\sqrt{R^2+AB^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+4^2}=6=d\left(I;(P)\right)\Rightarrow A$ là hình chiếu của I lên (P)

Đường thẳng IA đi qua $I(5;-3;5)$ có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-2;2)$ có phương trình $\begin{cases}x=5+t\\y=-3-2t\\z=5+2t\end{cases}$

Có $A=IA\cap(P)\Rightarrow 5+t-2(-3-2t)+2(5+2t)-3=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow A(3;1;1)\Rightarrow OA=\sqrt{11}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thuộc $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30 **B.** 26 **C.** 20 **D.** 21

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính R. Gọi $M\left(1+t_0;1+2t_0;2-3t_0\right)\in d$.

Gỉa sử $T(x;y;z)\in(S)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến MT với mặt cầu (S). Khi đó

$OT^2+MT^2=OM^2$

$\Leftrightarrow 9+\left[x-\left(1+t_0\right)\right]^2+\left[y-\left(1+2t_0\right)\right]^2+\left(z-\left(2-3t_0\right)\right)^2=\left(1+t_0\right)^2+\left(1+2t_0\right)^2+\left(2-3t_0\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(1+t_0\right)x+\left(1+2t_0\right)+\left(2-3t_0\right)z-9=0$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\left(1+t_0\right)x+\left(1+2t_0\right)y+\left(2-3t_0\right)z-9=0$

Do $D(1;1;2)\in(ABC)$ nên $1+t_0+1+2t_0+2.(2-3t)-9=0\Leftrightarrow t_0=-1\Rightarrow M(0;-1;5)$.

Vậy $T=0^2+(-1)^2+5^2=26$.

Câu 29. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3),B(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Gọi (P) mặt phẳng trung trực của AB, khi đó phương trình của (P) là: $x+z-1=0$.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(1;0;1),\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-1;2)$ nên $\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_\alpha}\right]=(1;0;-1)$.

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (α). Chọn $\overrightarrow{u_d}=(1;0;-1)$

và điểm $M(1;10;0)\in d$ nên phương trình tham số của d là: $\begin{cases}x=1+t\\y=10\\z=-t\end{cases}$.

Do tam giác ABC đều nên $CA=CB$ hay C thuộc mặt phẳng trung trực của AB mà $C\in(\alpha)$ nên $C\in(P)\cap(\alpha)=d$ suy ra tọa độ C có dạng $C(1+t;10;-t)$.

Do ΔABC đều nên $AC = AB$, thay tọa độ các điểm ta có:

$\sqrt{(1+t-0)^2+(10-0)^2+(-t-3)^2}=\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2+(1-3)^2} \Leftrightarrow t^2+4t+51=0(*)$

Do phương trình $(*)$ vô nghiệm nên không tồn tại điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$. Ba điểm $A,\ B,\ C$ phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho $MA,\ MB,\ MC$ là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;\ 1;\ 2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Mặt cầu (S_1): $x^2+y^2+z^2=9$ có tâm $O(0;\ 0;\ 0)$, bán kính $R_1=3$.

$M\in d \Leftrightarrow M(1+a\,;\ 1+2a\,;\ 2-3a)$.

Do $MA,\ MB,\ MC$ là những tiếp tuyến tại $A,\ B,\ C$ với mặt cầu (S_1).

Suy ra $MA^2=MB^2=MC^2=OM^2-9$.

Khi đó $A,\ B,\ C\in(S_2)$ có tâm là M, bán kính $R_2=\sqrt{OM^2-9}$.

Ta có phương trình (S_2): $(x-(a+1))^2+(y-(2a+1))^2+(z-(2-3a))^2=OM^2-9$.

$\Leftrightarrow (S_2)$: $x^2+y^2+z^2-2(a+1)x-2(2a+1)y-2(2-3a)z+9=0$.

Mặt khác theo giả thiết $A,\ B,\ C$ cùng thuộc mặt cầu (S_1).

Suy ra tọa độ A, B, C thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-9=0 \\ x^2+y^2+z^2-2(a+1)x-2(2a+1)y-2(2-3a)z+9=0 \end{cases}$.

Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $2(a+1)x+2(2a+1)y+2(2-3a)z-18=0$.

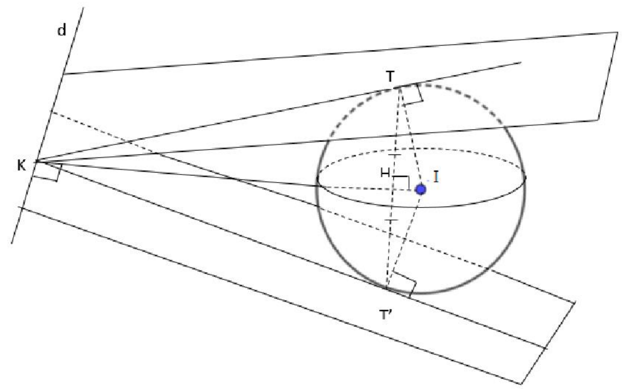
$D\in(ABC) \Leftrightarrow 2(a+1)+2(2a+1)+4(2-3a)-18=0 \Leftrightarrow a=-1$.

Với $a=-1$, ta có $M(0;-1;5)$. Khi đó $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2=26$.

Câu 31. **(Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2-1}=1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d.

$K\in d$ nên ta có thể giả sử $K(t;2+t;-t)$

$\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$, $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-1)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d

$IK\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=0 . \Rightarrow K(0;2;0)$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2=IH.IK$.

$\Leftrightarrow IH=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ \left(IK=\sqrt{6}\right)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x;y;z)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-1=\dfrac{1}{6}.(-1) \\ y-0=\dfrac{1}{6}.2 \\ z+1=\dfrac{1}{6}.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{6} \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{-5}{6} \end{cases} \text{ Vậy } H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{-5}{6}\right)$$

Câu 32. Cho hai đường thẳng $d:\begin{cases} x=-2 \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$, $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$. Gọi d', Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P). Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ'. Biểu thức $a+b.c$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Do d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) khi đó d' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(-3;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(-2;0;2)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(-3;2;-1)$ là $3x-2y+z+4=0$.

Do Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (P) khi đó Δ' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (β) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;-2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua $B(3;1;4)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=(0;-2;-2)$ là $y+z-5=0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 3x-2y+z+4=0 \\ y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$.

Vậy $M(-1;2;3) \Rightarrow a+b.c=-1+2.3=5$.

Câu 33. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-my+z+2m-1=0$ và $(\beta): mx+y-mz+m+2=0$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy). Biết rằng với mọi số thực m thay đổi thì đường thẳng Δ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(\alpha): x-my+z+2m-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;-m;1)$.

Mặt phẳng $(\beta): mx+y-mz+m+2=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(m;1;-m)$.

Ta có $M\left(-m-\dfrac{1}{m};0;-m+\dfrac{1}{m}+1\right)\in d=(\alpha)\cap(\beta)$.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=\left(m^2-1;2m;m^2+1\right)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Khi đó (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{u};\vec{k}\right]=\left(2m;1-m^2;0\right)$(với $\vec{k}=(0;0;1)$).

Phương trình mặt phẳng (P) là $2mx+\left(1-m^2\right)y+2m^2+2=0$.

Trong mặt phẳng (Oxy), gọi $I(a;b;0)$ là tâm đường tròn.

Theo giả thiết Δ là tiếp tuyễn của đường tròn$\Rightarrow d(I;d)=d(I;(P))=R$ (cố định)

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2ma+\left(1-m^2\right)b+2m^2+2\right|}{\sqrt{4m^2+\left(1-m^2\right)^2}}=R>0 \Leftrightarrow \frac{\left|2am+(2-b)m^2+b+2\right|}{m^2+1}=R>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2am+(2-b)m^2+b+2=R\left(m^2+1\right) \\ 2am+(2-b)m^2+b+2=-R\left(m^2+1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a=0 \\ 2-b=R \\ b+2=R \end{cases} \\ \begin{cases} 2a=0 \\ 2-b=-R \\ b+2=-R \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ R=2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ R=-2<0 \end{cases} \end{array}\right..$$

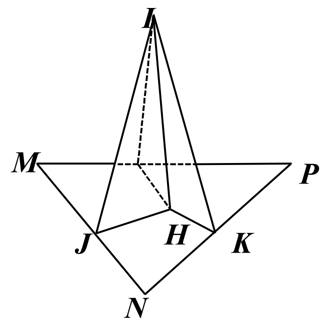
Vậy $R=2$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Nếu điểm $A(x;y;z)$ thuộc (C) thì

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0 \\ x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-2y-z=0.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) chứa đường tròn (C) là $3x-2y-z=0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $x+y+z-6=0$.

Gọi I là tâm mặt cầu thỏa bài toán, H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (MNP), J, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng MN, NP, PM. Ta có $IJ = IK = IL \Rightarrow HJ = HK = HL$.

Suy ra I thuộc đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP).

Hình chóp $O.MNP$ là hình chóp đều nên đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) cũng chính là đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (MNP).

Phương trình đường thẳng d là $x=y=z$.

Dễ thấy $d\subset(\alpha)$ suy ra mọi điểm thuộc d đều là tâm của một mặt cầu thỏa bài toán. Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Câu 35. Trong không gian cho mặt phẳng $(P): x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2): x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

A. $\frac{7}{3}\pi$. **B.** $\frac{7}{9}\pi$. **C.** $\frac{9}{7}\pi$. **D.** $\frac{7}{6}\pi$.

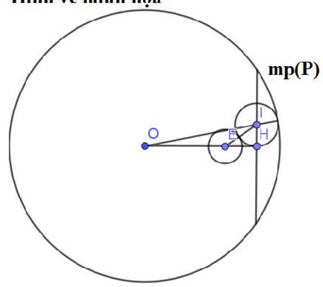
Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1=5$. Mặt cầu (S) có tâm $E(-2;0;2)$ bán kính $R_2=1$. Ta có $d(O,(P))=\frac{6}{\sqrt{2}}<R_1$ và $d(\mathrm{E},(P))=\sqrt{2}>R_2$, $OE=2\sqrt{2}$, $OE+R_2<R_1$ nên mặt cầu (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1). Như vậy mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với cả (S_1) và (S_2) thì

(S) tiếp xúc trong mặt cầu (S_1) và tiếp xúc ngoài với (S_2). Gọi R là bán kính của (S) khi đó ta có hệ $\begin{cases} OI+R=R_1 \\ EI-R=R_2 \end{cases} \Rightarrow OI+EI=R_1+R_2 \Rightarrow OI+EI=6$.

Hình vẽ minh họa



Nhận xét: $\overrightarrow{OE}=(-2;0;2)$ nên OE vuông góc với $(P): x-z+6=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P), đặt $IH=x$, điều kiện $x>0$. Khi đó ta có

$$OI+EI=6 \Leftrightarrow \sqrt{OH^2+HI^2}+\sqrt{EH^2+HI^2}=6 \Leftrightarrow \sqrt{18+x^2}+\sqrt{2+x^2}=6 \Leftrightarrow x^2=\frac{7}{9} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm H bán kính $r=\frac{\sqrt{7}}{3}$. Nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn là: $S=\pi r^2=\frac{7\pi}{9}$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu: $(S_m): x^2+y^2+z^2+(m+2)x+2my-2mz-m-3=0$.

Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\frac{1}{3}$. **D.** $r=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S_m) có tâm $I\left(-\frac{m+2}{2};-m;m\right)$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{9m^2+8m+16}}{2}$.

Với m_1, m_2 tùy ý và khác nhau, ta được hai phương trình mặt cầu tương ứng:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+(m_1+2)x+2m_1y-2m_1z-m_1-3=0 & (1) \\ x^2+y^2+z^2+(m_2+2)x+2m_2y-2m_2z-m_2-3=0 & (2) \end{cases}.$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được:

$(m_1-m_2)x+2(m_1-m_2)y-2(m_1-m_2)z-(m_1-m_2)=0$

$\Leftrightarrow (m_1-m_2).(x+2y-2z-1)=0$

$\Leftrightarrow x+2y-2z-1=0 \quad (3)$.

Dễ thấy (3) là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Họ mặt cầu (S_m) có giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) cố định có phương trình: $x+2y-2z-1=0$.

Mặt khác, đặt $d = d\left[I,(P)\right] = \dfrac{\left|-\dfrac{m+2}{2} - 2m - 2m - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|-9m-4|}{6}$.

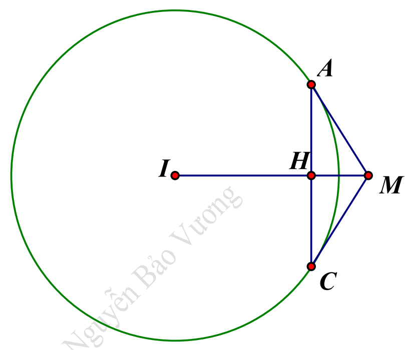
$\Rightarrow r^2 = R^2 - d^2 = \dfrac{9m^2+8m+16}{4} - \dfrac{(-9m-4)^2}{36} = \dfrac{32}{9}$ $\forall m \in \mathbb{R}$. Vậy $r = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt câu $(S): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S)(A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60°$, $\widehat{BMC} = 90°$, $\widehat{CMA} = 120°$ .Tính $Q = a + b + c$.

A. $Q = 3$. **B.** $Q = \dfrac{10}{3}$. **C.** $Q = 2$. **D.** $Q = 1$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 13} = 3\sqrt{3}$.

Gọi đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (ABC) với mặt câu (S).

Đặt $MA = MB = MC = x$ $(x > 0)$.

Áp dụng định lý cosin trong ΔAMB và ΔCMA, ta có:

$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB.\cos\widehat{AMB} = 2x^2 - 2x^2\cos 60° = x^2 \Rightarrow AB = x$.

$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA.MC.\cos\widehat{AMC} = 2x^2 - 2x^2\cos 120° = 3x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{3}$.

Vì ΔBMC vuông tại M nên: $BC = \sqrt{MB^2 + MC^2} = x\sqrt{2}$.

Mặt khác $AB^2 + BC^2 = x^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = 3x^2 = \left(x\sqrt{3}\right)^2 = AC^2$ nên ΔABC vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC thì H là tâm của đường tròn (C) và ba điểm H, I, M thẳng hàng.

Do $\widehat{AMC} = 120°$ nên $\widehat{AIC} = 60°$, suy ra ΔAIC đều và $AC = IA = IC = R = 3\sqrt{3}$.

Suy ra $x\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 3$ và $IA = IM\cos 30° \Leftrightarrow IM = \dfrac{2IA}{\sqrt{3}} = \dfrac{2.3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$.

Điểm $M \in d$ nên $M(t-1;t-2;t+1) \Rightarrow IM^2 = (t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 3t^2 - 4t + 36$.

Mà $IM^2=36 \Leftrightarrow 3t^2-4t+36=36 \Leftrightarrow 3t^2-4t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow M(-1;-2;1) \\ t=\frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right) \end{array}\right.$

Vì $x_M>0$ nên điểm cần tìm là $M\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$, suy ra $Q=2$.