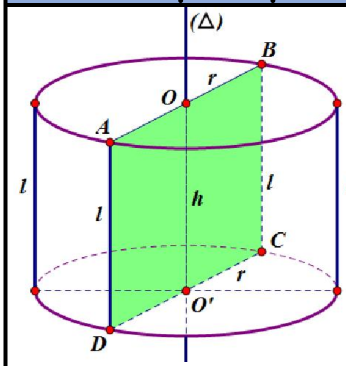
Chuyên đề 22 KHỐI TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SNH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

<table>
<tr><th>MẶT TRỤ</th><th>Các yếu tố mặt trụ:</th><th>Một số công thức:</th></tr>
<tr>
<td>

☞**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.</td>
<td>▪ **Đường cao**: $\boxed{h=OO'}$.
▪ **Đường sinh**: $\boxed{l=AD=BC}$. Ta có: $\boxed{l=h}$.
▪ **Bán kính đáy**:
$\boxed{r=OA=OB=O'C=O'D}$.
▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm $O,\ O'$.
▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.</td>
<td>▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p=2\pi r}$.
▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_{đ}=\pi r^2}$.
▪ **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V=h.S_{đ}=h.\pi r^2}$.
▪ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq}=2\pi r.h}$.
▪ **Diện tích toàn phần**:
$\boxed{S_{tp}=S_{xq}+2S_{đ}=2\pi r.h+2\pi r^2}$.</td>
</tr>
</table>

MỘT SỐ BÀI TOÁN VD – VDC LIÊN QUAN ĐẾN KHỐI TRỤ (CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ)

Câu 1. **(Mã 104 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể trích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 1,8 m. **B.** 2,1 m. **C.** 1,6 m. **D.** 2,5 m.

Lời giải

Chọn A

Gọi h là chiều cao của các bể nước và r là bán kính đáy của bể nước dự định làm.

Theo giả thiết, ta có $\pi r^2h=\pi.1^2.h+\pi.(1,5)^2.h \Leftrightarrow r^2=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$.

Suy ra $r=\frac{\sqrt{13}}{2}\approx 1,8$.

Câu 2. **(Mã 101 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,2m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $2,2m$. **B.** $1,6m$. **C.** $1,8m$. **D.** $1,4m$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $R_1;R_2;R$ lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và dự kiến sẽ làm,ta có:

$V=V_1+V_2=\pi R^2h=\pi R_1{}^2h+\pi R_2{}^2h \Leftrightarrow R^2=R_1{}^2+R_2{}^2$.

$\Rightarrow R=\sqrt{R_1{}^2+R_2{}^2}=\sqrt{1^2+(1,2)^2}\approx 1,56(m)$.

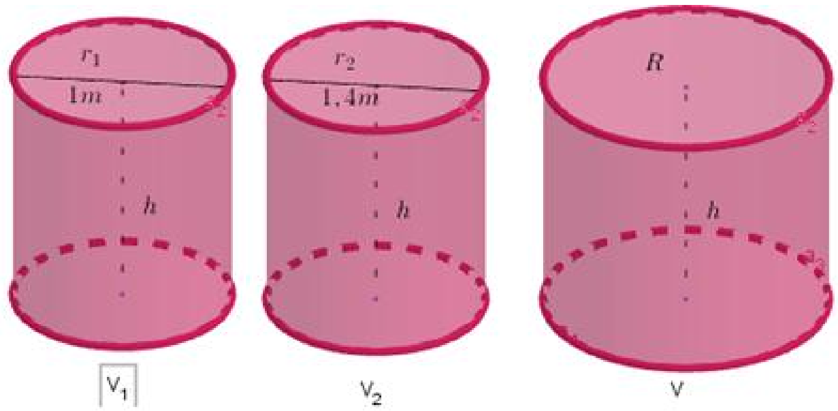
Vậy: Giá trị cần tìm là: $1,6m$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,4\ m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. $1,7\ m$. **B.** $1,5\ m$. **C.** $1,9\ m$. **D.** $2,4\ m$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow h\pi R^2 = h\pi r_1^2 + h\pi r_2^2$.

$\Rightarrow R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \approx 1,72\ m$.

Câu 4. **(Mã 103 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và $1,8\text{m}$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $2,8\text{m}$. **B.** $2,6\text{m}$. **C.** $2,1\text{m}$. **D.** $2,3\text{m}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi hai bể nước hìnhtrụ ban đầu lần lượt có chiều cao là h, bán kính r_1, r_2, thể tích là V_1, V_2.

Ta có một bể nước mới có chiều cao h, $V = V_1 + V_2$.

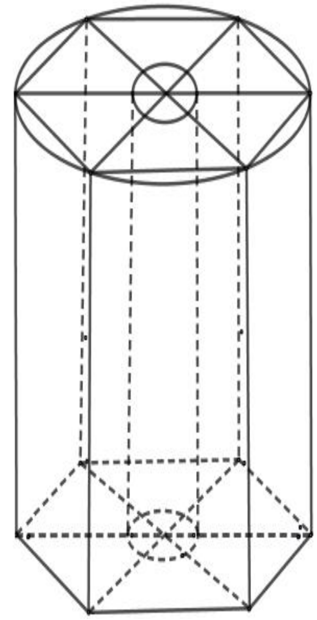
$\Rightarrow \pi r^2 h = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = \pi.1^2.h + \pi.1,8^2.h \Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{106}{25}} \approx 2,1\text{m}$.

Câu 5. **(Mã 102 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\ (mm)$ và chiều cao bằng $200\ (mm)$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1\ (mm)$. Giả định $1\ m^3$ gỗ có giá a triệu đồng, $1\ m^3$ than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $8,45.a$ đồng **B.** $7,82.a$ đồng **C.** $84,5.a$ đồng **D.** $78,2.a$ đồng

Lời giải

Chọn B



1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng suy ra $1\,mm^3$ gỗ có giá $\dfrac{a}{1000}$ đồng.

1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng suy ra $1\,mm^3$ than chì có giá $\dfrac{6a}{1000}$ đồng.

Phần chì của cái bút có thể tích bằng $V_1 = 200.\pi.1^2 = 200\pi\left(mm^3\right)$.

Phần gỗ của của bút chì có thể tích bằng $V_2 = 200.6.\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} - 200\pi = 2700\sqrt{3} - 200\pi\left(mm^3\right)$.

Số tiền làm một chiếc bút chì là $\dfrac{6a.V_1 + a.V_2}{1000} \approx 7,82a$ đồng.

Câu 6. **(Mã 101 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\,\text{mm}$ và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính đáy 1 mm. Giả định $1\,\text{m}^3$ gỗ có giá a (triệu đồng), $1\,\text{m}^3$ than chì có giá $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $9,07a$ (đồng) **B.** $97,03a$ (đồng) **C.** $90,7a$ (đồng) **D.** $9,7a$ (đồng)

Lời giải

Chọn.

D.

Diện tích của khối lăng trụ lục giác đều là $S = 6.\left(\left(3.10^{-3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\ (\text{m}^2)$

Thể tích của chiếc bút chì là: $V = S.h = 6.\left(\left(3.10^{-3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).200.10^{-3} = 27\sqrt{3}.10^{-7}\ (\text{m}^3)$.

Thể tích của phần lõi bút chì là $V_1 = \pi r^2 h = \pi.\left(10^{-3}\right)^2.200.10^{-3} = 2\pi.10^{-7}\ (\text{m}^3)$.

Suy ra thể tích phần thân bút chì là $V_2 = V - V_1 = \left(27\sqrt{3} - 2\pi\right).10^{-7}\ (\text{m}^3)$.

Giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên là:

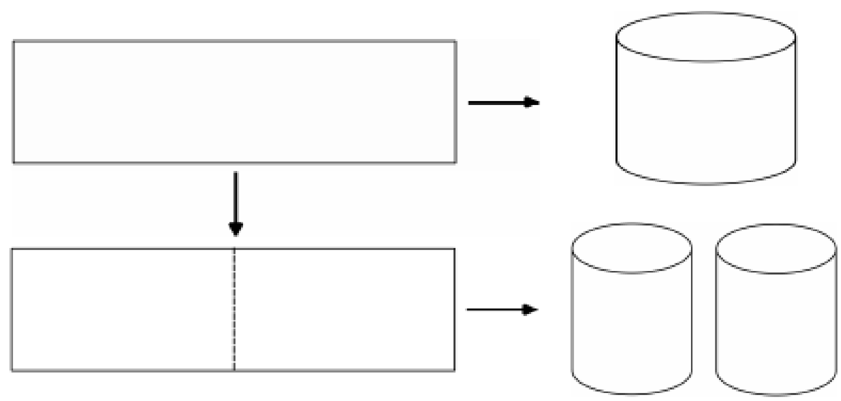
$V_2.a.10^6 + V_1.8a.10^6 = \left(27\sqrt{3} - 2\pi\right).10^{-7}.a.10^6 + 2\pi.10^{-7}.8a.10^6 = \left(2,7\sqrt{3} + 1,4\pi\right)a \simeq 9,07a$ (đồng).

Câu 7. **(Đề Minh Họa 2017)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm.240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):.

• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$

Lời giải

Chọn C

Ban đầu bán kính đáy là R, sau khi cắt tấm tôn bán kính đáy là $\frac{R}{2}$

Đường cao của các khối trụ là không đổi

Ta có $V_1=h\pi R^2$, $V_2=2.h\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=h\pi\frac{R^2}{2}$. Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2}=2$.

Câu 8. **(Mã 104 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\ mm$ và chiều cao $200\ mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1\ mm$. Giã định $1\ m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng), $1\ m^3$ than chì có giá $7a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $85,5.a$ (đồng) **B.** $9,07.a$ (đồng) **C.** $8,45.a$ (đồng) **D.** $90,07.a$ (đồng)

Lời giải

Chọn C

Thể tích phần lõi than chì: $V_1=\pi.0,001^2.0,2=2\pi.10^{-7}\ m^3$.

Số tiền làm lõi than chì $T_1=(2\pi.10^{-7})7a.10^6=1,4\pi a$ (đồng).

Thể tích phần thân bằng gỗ của bút

$$V_2=6.\frac{(0,003)^2\sqrt{3}}{4}.0,2-2\pi.10^{-7}=\left[\sqrt{3}.27.10^{-7}-2\pi.10^{-7}\right]m^3.$$

Số tiền làm phần thân bằng gỗ của bút

$T_2=\left[27\sqrt{3}.10^{-7}-\pi.2.10^{-7}\right]a.10^6=\left[2,7\sqrt{3}-\pi.0,2\right]a$ (đồng).

Vậy giá vật liệu làm bút chì là: $T=T_1+T_2\approx 8,45.a$ (đồng).

Câu 9. **(Mã 103 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng). $1m^3$ than chì có giá $9a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $103,3a$ đồng **B.** $97,03a$ đồng **C.** $10,33a$ đồng **D.** $9,7a$ đồng

Lời giải

Chọn D

$3mm = 0,003m; 200mm = 0,2m; 1mm = 0,001m$

Diện tích đáy của phần than chì: $S_1 = \pi r^2 = \pi.10^{-6}(m^2)$

Diện tích đáy phần bút bằng gỗ: $S_2 = 6S_{OAB} - S_1 = \left(6.\frac{3^2\sqrt{3}}{4} - \pi\right).10^{-6} = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).10^{-6}(m^2)$

Thể tích than chì cần dùng: $V_1 = S_1.h = \pi r^2 0,2 = 0,2\pi.10^{-6}(m^3)$

Thể tích gỗ làm bút chì: $V_2 = S_2.h = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).0,2.10^{-6}(m^3)$

Tiền làm một cây bút:

$V_1.9a + V_2.a = (9V_1 + V_2)a = \left(9.0,2\pi.10^{-6} + \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).0,2.10^{-6}\right)a = 9,7a$ (đồng)

Câu 10. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.

A. 108π. **B.** 6480π. **C.** 502π. **D.** 504π.

Lời giải

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$V_1 = h_1.\pi.R_1^2 = 6.\pi.6^2 = 216\pi$.

Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

$V_2 = h_2.\pi.R_2^2 = (30 - 2.6).\pi.2^2 = 72\pi$.

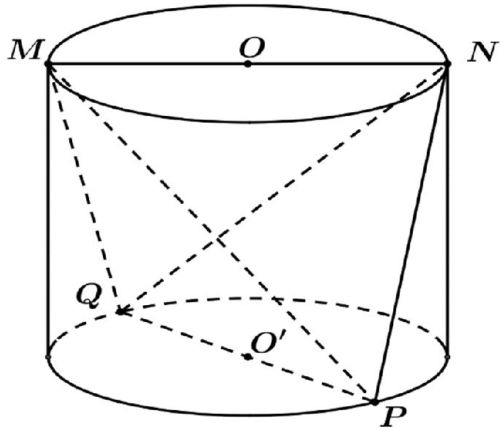
Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$.

Câu 11. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ = 30$ dm^3. Hãy tính thể tích lượng đá cắt bỏ (làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A. $101,3$dm^3 **B.** $111,4$dm^3 **C.** $121,3$dm^3 **D.** $141,3$dm^3

Lời giải

Chọn B



Gọi O và O' lần lượt là trung điểm MN và PQ.

Khi đó OO' là trục của hình trụ và $OO' \perp MN \Rightarrow MN \perp (OPQ)$.

$V_{MNPQ} = \frac{1}{3} MN.S_{OPQ} = \frac{OO'.6^2}{6} = 6OO' \ \left(\text{dm}^3\right)$.Theo bài ra ta có $V_{MNPQ} = 30\text{dm}^3 \Rightarrow OO' = 5\text{dm}$.

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = \pi.3^2.5 \approx 141,4\text{dm}^3$. Vậy thể tích lượng đá cắt bỏ

$V = V_{tru} - V_{MNPQ} \approx 111,4\text{dm}^3$.

Câu 12. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Công ty X định làm một téc nước hình trụ bằng inox (gồm cả nắp) có dung tích $1m^3$. Để tiết kiệm chi phí công ty X chọn loại téc nước có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Hỏi diện tích toàn phần của téc nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy)?

A. $5,59 \ m^2$ **B.** $5,54 \ m^2$ **C.** $5,57 \ m^2$ **D.** $5,52 \ m^2$

Lời giải

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow \begin{cases} \pi R h = \frac{1}{R} \\ \pi R^2 = \frac{1}{h} \end{cases}$

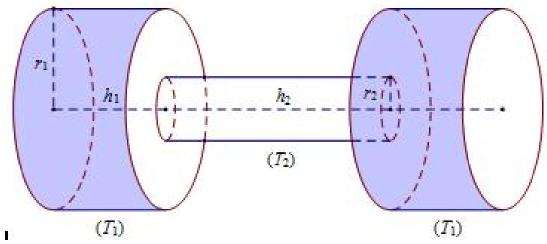
Diện tích toàn phần của téc nước: $S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$

Xét $S' = 4\pi R - \frac{2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Lập bảng biến thiên ta có S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất tại $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$\Rightarrow S_{(tp)\min} = 2\sqrt[3]{2\pi} + \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}} \approx 5,54$

Câu 13. **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng 30 (cm^3) và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7 g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

A. $3,927(kg)$. **B.** $2,927(kg)$. **C.** $3,279(kg)$. **D.** $2,279(kg)$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1):

$V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi(4r_2)^2 \frac{1}{2}h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16.30 = 480(cm^3)$.

Tổng thể tích của chiếc tạ tay: $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510(cm^3)$.

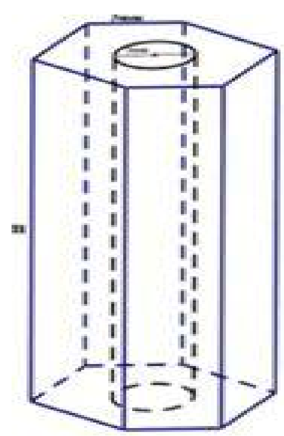
Khối lượng của chiếc tạ: $m = D.V = 7,7.510 = 3927(g) = 3,927(kg)$.

Câu 14. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao $18\,\text{cm}$ và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính $1\,\text{cm}$. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}\text{cm}$, giá thành 540 đồng/cm^3. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng/cm^3. Tính giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm $15,58\%$ giá thành sản phẩm.

A. 10000 đồng. **B.** 8000 đồng. **C.** 5000 đồng. **D.** 3000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều và bán kính của lõi than chì.

Ta có $R = \frac{1}{2}\text{cm}$ và $r = \frac{1}{8}\text{cm}$.

Suy ra diện tích của lục giác đều là $S = 6.R^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 6.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Gọi V là thể tích của khối lăng trụ lục giác đều. V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối than chì và bột gỗ dùng để làm ra một cây bút chì.

Ta có $V=S.h=\frac{3\sqrt{3}}{8}.18=\frac{27\sqrt{3}}{4}\left(\mathrm{cm}^3\right)$; $V_1=\pi r^2h=\pi.\frac{1}{8^2}.18=\frac{9\pi}{32}\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

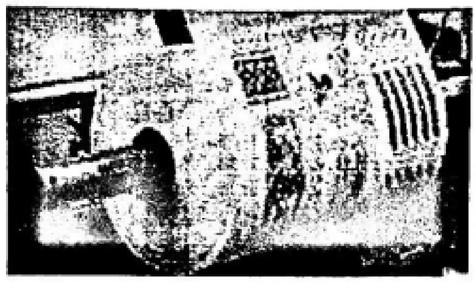
$\Rightarrow V_2=V-V_1=\frac{27\sqrt{3}}{4}-\frac{9\pi}{32}\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Do đó, giá nguyên vật liệu dùng để làm một cây bút chì là $540V_1+100V_2$ (đồng).

Vậy giá bán ra của cây bút chì là

$$\left(540V_1+100V_2\right).\frac{100}{15,58}=\left[540.\frac{9\pi}{32}+100\left(\frac{27\sqrt{3}}{4}-\frac{9\pi}{32}\right)\right].\frac{100}{15,58}\approx 10000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 15. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Một cuộn đề can hình trụ có đường kính 44,9 cm. Trong thời gian diễn ra AFF cup 2018, người ta đã sử dụng để in các băng rôn, khẩu hiệu cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam, do đó đường kính của cuộn đề can còn lại là 12,5 cm. Biết độ dày của tấm đề can là 0,06 cm, hãy tính chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng?(Làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $L=24344cm$ **B.** $L=97377cm$ **C.** $L=848cm$ **D.** $L=7749\,cm$

Lời giải

Chọn A

Ta có mỗi lần bán đi một vòng đề can thì bán kính của cuộn đề can giảm đi số cm là: $0,06cm$

Bán kính lúc đầu là 22,45 cm, bán kính lúc sau là 6,25 cm. Số vòng đề can đã bán đi là:

$\left(22,45-6,25\right);0,06=270$

Chu vi một vòng đề can bán kính r là chiều dài của vòng đề can đó. Nó bằng:

$L_r=2\pi r$

Chiều dài L của tấm đề can đã bán bằng $L=L_1+L_2+...+L_{270}$ với L_1 là độ dài vòng đầu tiên của cuộn đề can, bán kính là $r_1=22,45cm$. L_1 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r_1=22,45cm\Rightarrow L1=2\pi.r_1$. Vòng thứ 2, bán kính giảm đi 0,06cm do đó nó sẽ có bán kính bằng $r_2=22,45-0,06=22,39cm$, L_2 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r_2=22,39cm\Rightarrow L1=2\pi.r_1$

Suy ra $L=2\pi r_1+2\pi r_2+...+2\pi r_{270}=2\pi\left(r_1+r_2+...+r_{270}\right)$

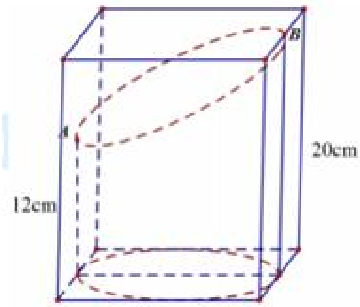
Trong đó $r_1,r_2,...,r_{270}$ là một cấp số cộng có $u_1=22,45;d=-0,06$, suy ra

$u_{270}=u_1+269d=22,45-269.0,06=6,25+0,06=6,31cm$

Tổng $r_1+r_2+...+r_{270}=\frac{\left(r_1+r_{270}\right)\times 270}{2}=\frac{\left(22,45+6,31\right)270}{2}=3882,6\text{ cm}$

Suy ra L$=2\pi.3882.6\approx 24382cm$.

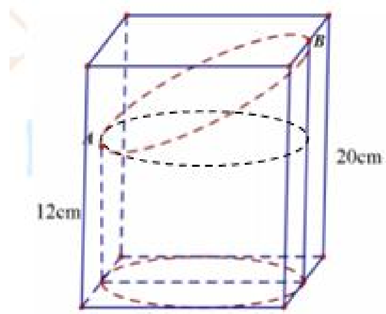
Câu 16. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh -1819)** Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là 12 cm, khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ (giả sử khúc gỗ không thấm nước và kết quả làm tròn đến phần hàng chục).



A. $R = 5,2$ cm. **B.** $R = 4,8$ cm. **C.** $R = 6,4$ cm. **D.** $R = 8,2$ cm.

Lời giải

Chọn D



Gọi bán kính đáy hình trụ là R.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tich hình hộp chữ nhật và khối gỗ.

Ta có $V_1 = B.h = 4R^2.20 = 80R^2$

Chia khối gỗ làm hai phần bằng một mặt phẳng qua A và song song đáy.

Ta có $V_2 = \pi R^2.h_1 + \frac{1}{2}\pi R^2.(h - h_1) = 16\pi R^2$.

h_1 là khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy, h khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy.

Thể tích nước còn lại là

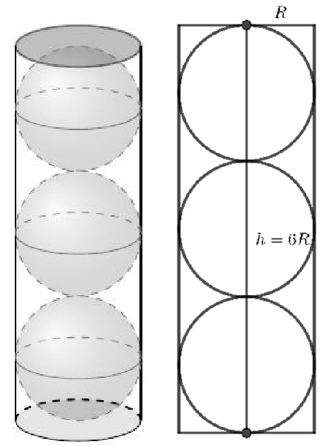
$V = V_1 - V_2 = 16R^2(5 - \pi) = 2000 \Rightarrow R \approx 8,2$.

Câu 17. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

A. 50. **B.** 66. **C.** 30. **D.** 33.

Lời giải

Chọn D



Đặt h, R lần lượt là đường cao và bán kính hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.

Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis và $h = 6R$.

Do đó ta có:

Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1 = 3.\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$;

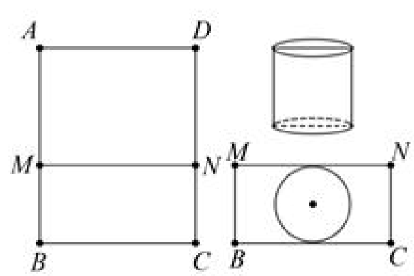
Thể tích của hình trụ (hộp đựng bóng) là $V_0 = \pi R^2 h = 6\pi R^3$;

Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2 = V_0 - V_1 = 2\pi R^3$.

Khi đó tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $\frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

Suy ra $a \approx 33$.

Câu 18. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $1\,\text{m}^2$ và cạnh $BC = x\,(\text{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành hai hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox còn thừa được bỏ đi). Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



A. $1,37\,\text{m}$. **<u>B</u>.** $1,02\,\text{m}$. **C.** $0,97\,\text{m}$. **D.** $1\,\text{m}$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Ta có $AB.BC = 1 \Rightarrow AB = \frac{1}{BC} = \frac{1}{x}\,(\text{m})$.

Gọi $R\,(\text{m})$ là bán kính đáy hình trụ inox gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC = x\,(\text{m})$.

Do đó $2\pi R = x \Leftrightarrow R = \frac{x}{2\pi}\,(\text{m})$; $BM = 2R = \frac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \frac{1}{x} - \frac{x}{\pi}\,(\text{m})$.

Thể tích khối trụ inox gò được là $V=\pi R^2h=\pi.\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2.\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\pi}\right)=\dfrac{1}{4\pi^2}x\left(\pi-x^2\right)$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(\pi-x^2\right)\,(x>0)\Rightarrow f'(x)=\pi-3x^2$.

$f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$; $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(0;\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

Suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)}f(x)=f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)=\dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}$.

Từ đó ta có thể tích V lớn nhất khi và chỉ khi $f(x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\approx 1,02\,(\text{m})$.

Câu 19. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích 16π (m^3). Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

A. 0,8 m. **B.** 1,2 m. **C.** 2 m. **D.** 2,4 m.

Lời giải

Chọn C

Để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} phải nhỏ nhất.

Gọi h $(h>0)$ là chiều cao của bồn dầu. Ta có: $S_{tp}=2\pi r^2+2\pi rh$.

Mặt khác, theo giả thiết: $V=16\pi\Leftrightarrow\pi r^2h=16\pi\Leftrightarrow h=\dfrac{16}{r^2}$.

$\Rightarrow S_{tp}=2\pi r^2+2\pi r\cdot\dfrac{16}{r^2}=2\pi\left(r^2+\dfrac{16}{r}\right)=2\pi\left(r^2+\dfrac{8}{r}+\dfrac{8}{r}\right)$.

Áp dụng BĐT *Cauchy* cho 3 số dương: r^2, $\dfrac{8}{r}$, $\dfrac{8}{r}$, ta được: $r^2+\dfrac{8}{r}+\dfrac{8}{r}\geq 3\sqrt[3]{r^2\cdot\dfrac{8}{r}\cdot\dfrac{8}{r}}=12$.

$\Rightarrow S_{tp}\geq 24\pi$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow r^2=\dfrac{8}{r}\Leftrightarrow r^3=8\Leftrightarrow r=2$.

$\Rightarrow\min\left(S_{tp}\right)=24\pi$.

Vậy để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì $r=2$ (m).

Câu 20. **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Anh H dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đậy thể tích $12m^3$. Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh H cần chọn chiều cao của thùng gần nhất với số nào sau đây? (*Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể*).

A. $1,24m$. **B.** $1,25m$. **C.** $2,50m$. **D.** $2,48m$.

Lời giải

Chọn D

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R. Ta có

$V=\pi R^2h\Rightarrow h=\dfrac{12}{\pi R^2}$.

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$$C=\pi R^2.400+\pi R^2.200+2\pi Rh.300$$
$$=600\left(\pi R^2+\frac{12}{R}\right)$$
$$=600\left(\pi R^2+\frac{6}{R}+\frac{6}{R}\right)\ge 600.3\sqrt[3]{\pi R^2.\frac{6}{R}.\frac{6}{R}}=1800\sqrt[3]{36\pi}$$

Dẫn đến

$\min C=1800\sqrt[3]{36\pi}\Leftrightarrow \pi R^2=\dfrac{6}{R}\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{6}{\pi}}$.

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là $h=\dfrac{12}{\sqrt[3]{36\pi}}\approx 2,48\,m$.

Câu 21. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính R của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa có giá trị nhỏ nhất.

A. $R=\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$. **B.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$. **D.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có 1000 lít = 1m^3.

Gọi h là chiều cao của hình trụ ta có $V=\pi R^2h=1\Rightarrow h=\dfrac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích toàn phần là: $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+2\pi R\dfrac{1}{\pi R^2}=2\pi R^2+\dfrac{2}{R}$

$$=2\left(\pi R^2+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}\right)\ge 2.3\sqrt[3]{\pi R^2.\frac{1}{2R}.\frac{1}{2R}}=6\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}.$$

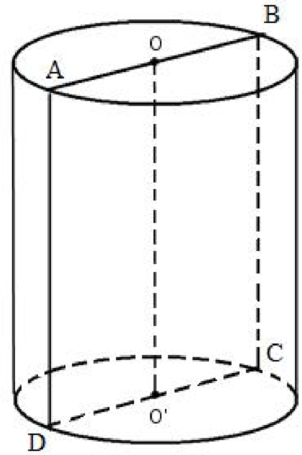
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\pi R^2=\dfrac{1}{2R}\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

Câu 22. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi bằng 12. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A. 16π. **B.** 32π. **C.** 8π. **D.** 64π.

Lời giải

Chọn C



Từ hình vẽ ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, gọi chiều cao của hình trụ là h và bán kính đáy của hình trụ là r, theo giả thiết ta có $2(h+2r)=12 \Leftrightarrow h+2r=6$.

Thể tích của khối trụ tương ứng là $V=\pi r^2 h$, theo bất đẳng thức Cô si ta có

$$r+r+h \geq 3\sqrt[3]{r^2.h} \Leftrightarrow V=\pi r^2 h \leq \pi.\left(\frac{2r+h}{3}\right)^3=8\pi$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $r=h=2$.
Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là 8π.

Câu 23. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi h,r là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của hình trụ.

Ta có $V=\pi r^2 h \Leftrightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có $S_{tp}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}=2\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số $2\pi r^2$, $\frac{V}{r}$, $\frac{V}{r}$ ta có

$S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2.\frac{V}{r}.\frac{V}{r}}=3\sqrt[3]{\frac{2\pi V^2}{r}}$ không đổi

Dấu bằng xảy ra khi $2\pi r^2=\frac{V}{r} \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ta có

Câu 24. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Trong các hình trụ có diện tích toàn phần bằng $1000cm^2$ thì hình trụ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu cm^3

A. 2428. **B.** 2532. **C.** 2612. **D.** 2740.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2 \Rightarrow Rh+R^2=\frac{S}{2\pi}$

Vậy thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h = \pi R\left(\frac{S}{2\pi} - R^2\right) = \frac{S}{2}R - \pi R^3 = F(R)$

Ta có: $F'(R) = \frac{S}{2} - 3\pi R^2 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

Bảng biến thiên

R	0		$R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$		$+\infty$
$F'(R)$		$+$	0	$-$	
$F(R)$		$\nearrow$	$F\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)$	$\searrow$	

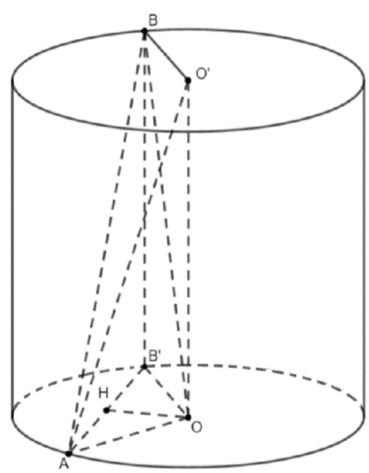
Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max} = \frac{S}{2}R - \pi R^3 = \frac{1000}{2}\sqrt{\frac{1000}{6\pi}} - \pi\sqrt{\frac{1000}{6\pi}}^3 \approx 2428.$

Câu 25. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O), khi đó AB' là hình chiếu của AB trên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Suy ra $\left(\widehat{AB,(OAB')}\right) = \left(\widehat{AB,AB'}\right) = \widehat{BAB'} = \alpha$, $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Xét tam giác vuông ABB' vuông tại B' có $\tan\widehat{BAB'} = \frac{BB'}{AB'} \Rightarrow AB' = \frac{BB'}{\tan\alpha} = \frac{2a}{\tan\alpha}$.

Gọi H là trung điểm AB', khi đó $OH \perp AB'$ và

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{R^2-\frac{AB'^2}{4}}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{\tan^2\alpha}}=a\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}$$

Lại có $S_{\Delta OAB'}=\frac{1}{2}OH.AB'=\frac{1}{2}.OB'.d(A,OB')$

$$\Rightarrow d(A,OB')=\frac{OH.AB'}{OB'}=\frac{a\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}.\frac{2a}{\tan\alpha}}{2a}=\frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}=d\left(A,(OO'BB')\right).$$

Vậy $V_{A.OO'B}=\frac{1}{3}d\left(A,(OO'BB')\right).S_{\Delta OO'B}=\frac{1}{3}.\frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}.\frac{1}{2}.2a.2a=\frac{2a^3}{3}.\frac{1}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $\frac{1}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}\le\frac{\frac{1}{\tan^2\alpha}+4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}{2}=2$

$\Rightarrow V_{A.OO'B}\le\frac{2a^3}{3}.2=\frac{4a^3}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\tan\alpha}=\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}\Leftrightarrow\frac{1}{\tan^2\alpha}=4-\frac{1}{\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{2}{\tan^2\alpha}=4$

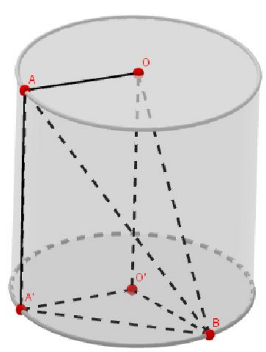
$\Leftrightarrow\tan^2\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ do $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 26. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha=1$. **D.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi A' là hình chiếu của A trên đường tròn tâm O' khi đó ta có

$V_{OO'AB}=\frac{1}{2}V_{B.OO'A'A}=\frac{1}{6}.S_{OO'A'A}.d\left(B,(OO'A'A)\right)$ với $d\left(B,(OO'A'A)\right)=OB.\sin\widehat{BO'A'}$

Do $S_{OO'A'A}$ là hằng số nên để thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất thì $d\left(B,(OO'A'A)\right)$ là lớn nhất hay $\widehat{BO'A'}=90^0$

Khi đó ta có $\tan\alpha=\tan\widehat{ABA'}=\frac{AA'}{A'B}=\frac{2a}{2a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Một xí nghiệp chế biến sữa bò muốn sản xuất lon đựng sữa có dạng hình trụ bằng thiếc có thể tích không đổi. Để giảm giá một lon sữa khi bán ra thị trường người ta cần chế tạo lon sữa có kích thước sao cho ít tốn kém vật liệu. Để thỏa mãn yêu cầu đặt ra (diện tích toàn phần bé nhất), người ta phải thiết kế lon sữa thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau:

A. Chiều cao bằng đường kính của đáy.
B. Chiều cao bằng bán kính của đáy.
C. Chiều cao bằng 3 lần bán kính của đáy.
D. Chiều cao bằng bình phương bán kính của đáy.

Lời giải

Chọn A

Gọi V, r, h, l lần lượt là thể tích, bán kính đáy, đường cao, đường sinh của lon sữa.

Ta có: $V=\pi.r^2.h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi.r^2}$ và $h=l$.

Mặt khác: $V=\pi.r^2.h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi.r^2}$.

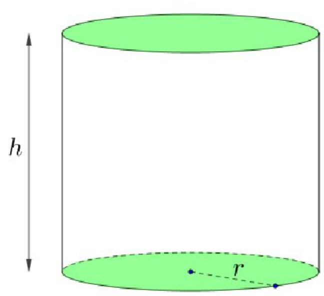
$S_{tp}=2\pi rl+2\pi r^2=2\pi r\cdot\dfrac{V}{\pi.r^2}+2\pi r^2=\dfrac{2V}{r}+2\pi r^2=\dfrac{V}{r}+\dfrac{V}{r}+2\pi r^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta được:

$S_{tp}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{V}{r}\cdot\dfrac{V}{r}\cdot 2\pi r^2}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{V}{r}=2\pi r^2 \Leftrightarrow \dfrac{V}{\pi}=2r^3$. Do $h=\dfrac{V}{\pi.r^2}$ nên $2r=h$.

Câu 28. **(SGD Nam Định 2019)** Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp ba lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\dfrac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?



A. $\dfrac{h}{r}=\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{h}{r}=2$. **C.** $\dfrac{h}{r}=6$. **D.** $\dfrac{h}{r}=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi x là giá vật liệu làm mặt xung quanh (cho mỗi đơn vị diện tích).

Thể tích của thùng $V=\pi r^2.h$ không đổi. Suy ra $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. (*)

Khi đó, chi phí để làm thùng bằng $P = S_{xq}.x + 2S_{đ}.3x = 2\pi rh.x + 2\pi r^2.3x = 2\pi x\left(3r^2 + rh\right)$.

$$\Rightarrow P = 2\pi x\left(3r^2 + \frac{V}{\pi r}\right) = 2\pi x\left(3r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r}\right) \geq 6\pi x.\sqrt[3]{\frac{3V^2}{4\pi^2}}.$$

$$P = 6\pi x.\sqrt[3]{\frac{3V^2}{4\pi^2}} \Leftrightarrow 3r^2 = \frac{V}{2\pi r} \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{6\pi}.$$

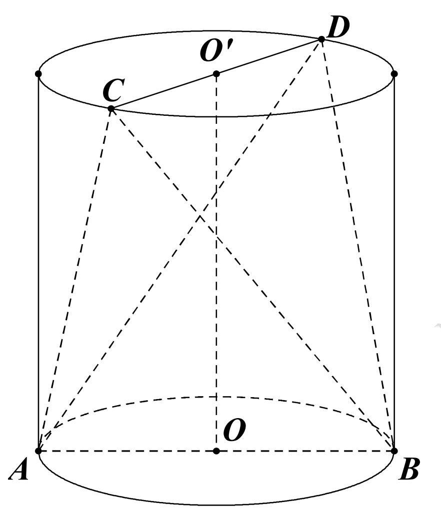
Từ (*) suy ra $\frac{h}{r} = \frac{V}{\pi r^3} = \frac{V}{\pi \frac{V}{6\pi}} = 6$.

Câu 29. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 3, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là đường kính cố định của $(O;1)$ và CD là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $V_{\max} = 2.$ **B.** $V_{\max} = 6.$ **C.** $V_{\max} = \frac{1}{2}.$ **D.** $V_{\max} = 1.$

Lời giải

Chọn A



Gọi α là số đo góc giữa AB và CD.

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB;\, CD\right).\sin\alpha = \frac{1}{6}.2.2.3.\sin\alpha = 2\sin\alpha \leq 2$.

Do đó V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt được khi $AB \perp CD$.

Câu 30. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

Lời giải

Giả sử vỏ hộp sữa có bán kính đáy là R, chiều cao là h ($R, h > 0$).

Vì thể tích vỏ hộp là V nên ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình trụ vỏ hộp sữa phải có diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$ nhỏ nhất.

Cách 1:

Ta có $S_{tp}=\dfrac{2V}{R}+2\pi R^2=\dfrac{V}{R}+\dfrac{V}{R}+2\pi R^2\ge 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{V}{R}=2\pi R^2 \Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Cách 2:

Xét hàm số $f(R)=\dfrac{2V}{R}+2\pi R^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(R)=-\dfrac{2V}{R^2}+4\pi R=\dfrac{4\pi R^3-2V}{R^2}$. $f'(R)=0\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0		$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(R)$		$-$	0	$+$	
$f(R)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ BBT ta thấy $f(R)$ đạt nhỏ nhất khi $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy vỏ hộp phải bằng $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Câu 31. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là $12\ \text{cm}$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là:

A. $64\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $16\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $8\pi\,\text{cm}^3$. **D.** $32\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là x, y $(x,y>0)$.

Khi đó ta có thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có kích thước lần lượt là x, $2y$

Theo giả thiết ta có $2.(x+2y)=12 \Leftrightarrow x+2y=6$.

Cách 1.

Thể tích khối trụ: $V=\pi y^2.x=\pi y^2(6-2y)=2\pi(-y^3+3y^2)$.

Vì $x+2y=6 \Rightarrow 0<2y<6\Leftrightarrow 0<y<3$.

Xét hàm số $f(y)=-y^3+3y^2$ trên khoảng $(0;3)$

Ta có $f'(y)=-3y^2+6y \Rightarrow f'(y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

y	0		2		3
$f'(y)$		$+$	0	$-$	
$f(y)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Suy ra $\max\limits_{(0;3)} f(y) = f(2) = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $2\pi.4 = 8\pi$ cm^3.

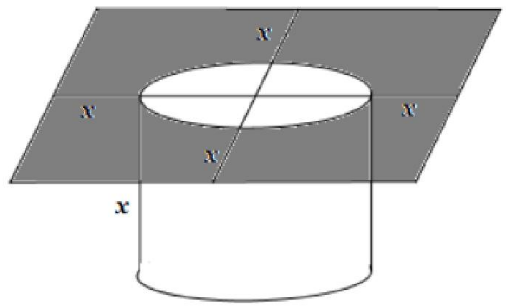
Cách 2.

Thể tích khối trụ: $V = \pi y^2 x = \pi.x.y.y \le \pi\left(\dfrac{x+y+y}{3}\right)^3 = \pi\left(\dfrac{x+2y}{3}\right)^3 = \pi\left(\dfrac{6}{3}\right)^3 = 8\pi$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $V = 8\pi$ cm^3.

Câu 32. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V = 13,5\pi\left(m^3\right)$. **B.** $V = 27\pi\left(m^3\right)$. **C.** $V = 36\pi\left(m^3\right)$. **D.** $V = 72\pi\left(m^3\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Phương pháp

Xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, sử dụng công thức $V = \pi R^2 h$ tính thể tích của hình trụ.

+) Lập BBT tìm GTLN của hàm thể tích.

Cách giải

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9-2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\dfrac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi\left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x = \dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2 x = \dfrac{\pi}{4} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}$ ta có:

$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

BBT:

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	54	$\searrow$	0

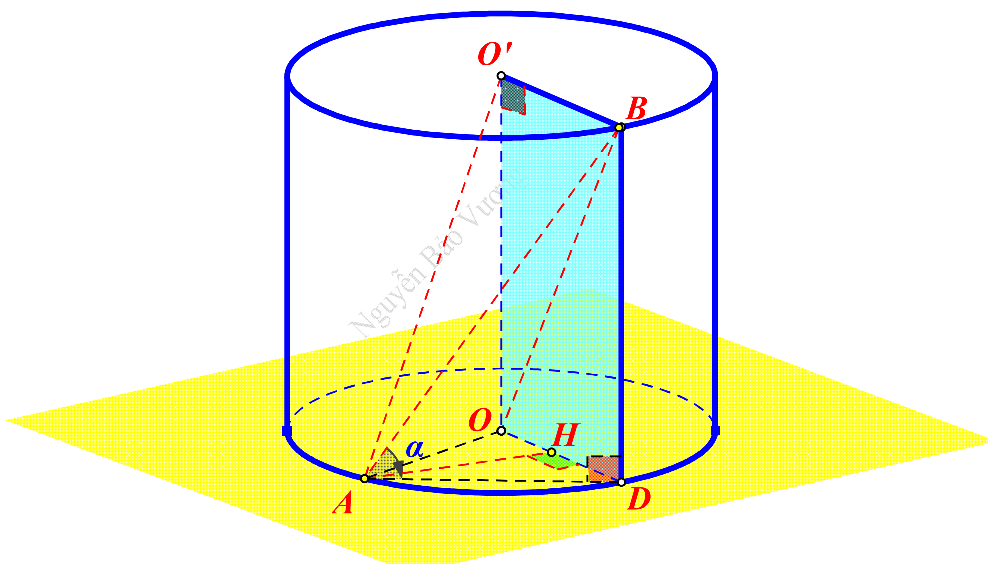
Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max}=54 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max}=\frac{\pi}{4}.54=\frac{27\pi}{2}=13,5\pi\left(m^3\right)$.

Câu 33. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}$ **B.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ **D.** $\tan\alpha=1$

Lời giải

Cách 1:



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (O).

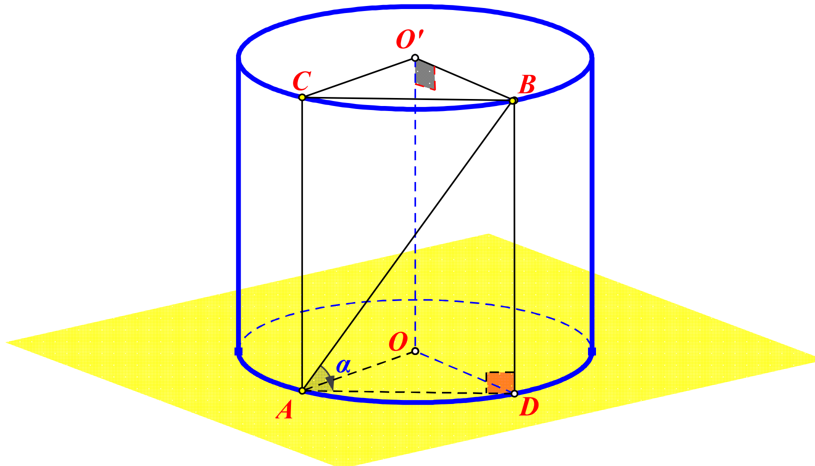
Kẻ $AH\perp OD$, $H\in OD$.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$: $V_{OO'AB}=\frac{1}{3}AH.S_{\Delta OO'B}=\frac{2a^2}{3}.AH\le\frac{2a^2}{3}.AO=\frac{4a^3}{3}$.

$\left(V_{OO'AB}\right)_{\max}\Leftrightarrow H\equiv O$. Suy ra $AD=2\sqrt{2}a$.

Suy ra: $\tan\alpha=\tan\widehat{BAD}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nhận xét: *Nên thêm giả thiết AB chéo với OO' để tứ diện $OO'AB$ tồn tại.*



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Gọi C là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O').

Ta có $O'CB.OAD$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$:

$V_{OO'AB} = V_{O'BC.OAD} = \frac{1}{3}2a.S_{\Delta OAD} = \frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a.2a.\sin\widehat{AOD} \le \frac{4a^3}{3}$.

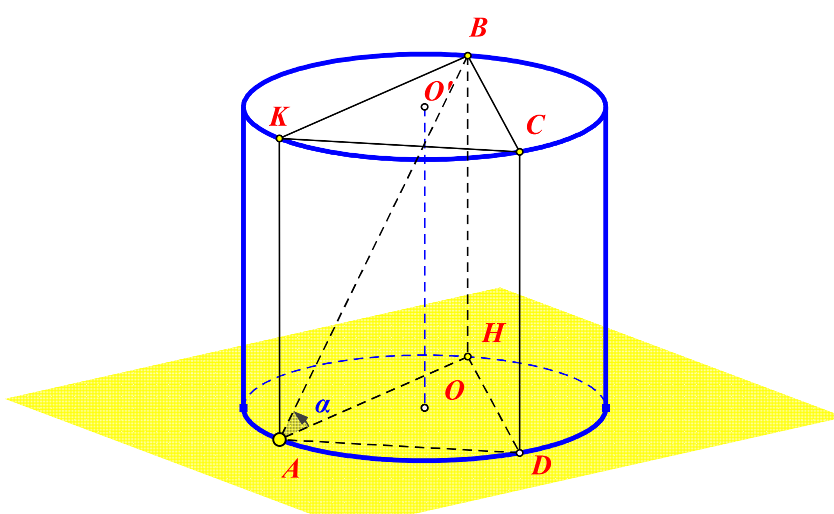
$(V_{O'ABCD})_{\max} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^0 \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a$.

Suy ra: $\tan\alpha = \tan\widehat{BAD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 34. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD = 2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'); trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha = \sqrt{3}$ **B.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\tan\alpha = 1$ **<u>D</u>.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O').

Ta có $HAD.BKC$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của tứ diện $CDAB$ là

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{HAD.BKC}=\frac{1}{3}.2a.S_{\Delta HAD}=\frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.AD.d(H;AD)=\frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a\sqrt{3}.d(H;AD)$.

$(V_{ABCD})_{\max}\Leftrightarrow (d(H;AD))_{\max}\Leftrightarrow H$ là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn (O) (1).

Theo định lý sin ta có $\frac{AD}{\sin\widehat{AHD}}=2.2a\Leftrightarrow \sin\widehat{AHD}=\frac{AD}{4a}=\frac{2\sqrt{3}a}{4a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{AHD}=60^0$.

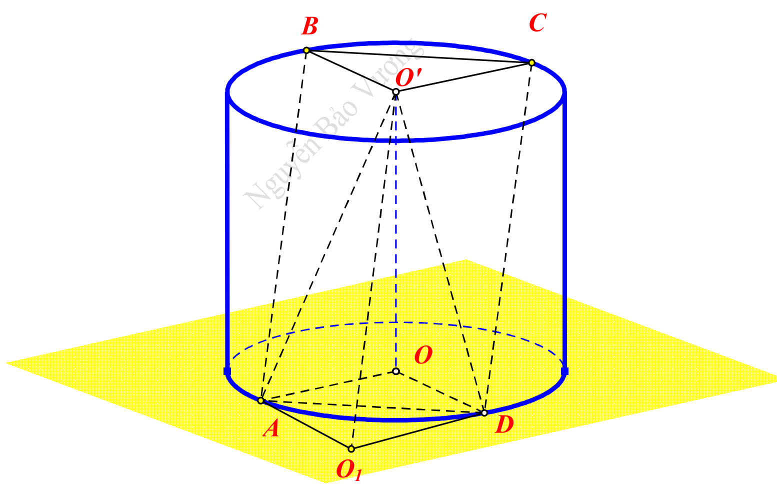
Do đó (1) xảy ra khi ΔAHD đều $\Leftrightarrow AH=AD=2\sqrt{3}a$.

Suy ra: $\tan\alpha=\tan\widehat{BAH}=\frac{BH}{AH}=\frac{2a}{2a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 35. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB//CD$ và AB không cắt OO'. Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $AD=2\sqrt{2}a$ **B.** $AD=4a$ **C.** $AD=\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ **D.** $AD=\sqrt{2}a$

Lời giải



Kẻ đường thẳng qua O' song song với AB cắt mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại O_1.

Lúc đó $AO_1D.BO'C$ là một hình lăng trụ chiều cao bằng $2a$.

Vì $AD=BC$ nên $S_{\Delta BO'C}=S_{\Delta OAD}$

Ta có thể tích của khối chóp $O'.ABCD$:

$V_{O'ABCD}=\frac{1}{3}V_{AO_1D.BO'C}=\frac{2}{3}.2a.S_{\Delta BO'C}=\frac{2}{3}.2a.S_{\Delta OAD}=\frac{2}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a.2a.\sin\widehat{AOD}\le\frac{8a^3}{3}$.

$(V_{O'ABCD})_{\max}\Leftrightarrow \widehat{AOD}=90^0\Leftrightarrow AD=2\sqrt{2}a$.