TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

DẠNG 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 1. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho a là số thực dương, $a \neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x \leq x-1$ nghiệm đúng với mọi $x>0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(7;8)$ **B.** $(3;5]$ **C.** $(2;3)$ **D.** $(8;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: với $x=1$ thì $2\log_a 1 = 0 = 1-1$

Ta sẽ tìm a để đường thẳng $y=x-1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2\log_a x$ tại điểm $x=1$

Có $y' = \dfrac{2}{x\ln a} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{2}{\ln a}$

Phương trình tiếp tuyến $y = \dfrac{2}{\ln a}(x-1)$

Vậy để đường thẳng $y=x-1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2\log_a x$ thì $\dfrac{2}{\ln a} = 1 \Leftrightarrow \ln a = 2 \Leftrightarrow a = e^2$

Thử lại $a=e^2$ ta sẽ chứng minh $\begin{array}{l} 2\log_{e^2} x \leq x-1 \Leftrightarrow \ln x \leq x-1 \\ \Leftrightarrow f(x) = \ln x - x + 1 \leq 0 \ \forall x>0 \end{array}$

Có $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x-1 \ \forall x>0$

Câu 2. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2\sqrt{a}$. Giá trị của $\log_2(2017a)$ xấp xỉ bằng:

A. 19. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 23.

Lời giải

Từ giả thiết $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2\sqrt{a}$.

Đặt $\log_2\sqrt{a} = 3x \Leftrightarrow a = 64^x$.

Ta được bất phương trình: $3\log_3\left(1+8^x+4^x\right) > 6x \Leftrightarrow 1+8^x+4^x > 9^x$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x>1$.

Đặt $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x$.

$\Rightarrow f'\left(x\right)=\left(\frac{1}{9}\right)^x\ln\left(\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{8}{9}\right)^x\ln\left(\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^x\ln\left(\frac{4}{9}\right)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $f\left(x\right)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Và ta lại có $f\left(2\right)=1$.

Từ $\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x>1\Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(2\right)\Leftrightarrow x<2$.

Suy ra $a<64^2=4096$ mà a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn suy ra $a=4095$.

Vậy $\log_2\left(2017a\right)=\log_2\left(2017\cdot 4095\right)\approx 22.97764311\approx 23$.

Câu 3. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m$ có nghiệm với mọi $x\in\left(-\infty;0\right)$

A. $m\geq 1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Đk: $x\in\mathbb{R};m>0$.

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m,\forall x\in\left(-\infty;0\right)$.

$\Leftrightarrow \log_2\left(3^x+1\right)<m,\forall x\in\left(-\infty;0\right)$.

$\Leftrightarrow 3^x+1<2^m,\forall x\in\left(-\infty;0\right)$.

Xét hàm $f\left(x\right)=3^x+1$ trên $\left(-\infty;0\right)$. Ta có $f'\left(x\right)=3^x.\ln 3>0,\forall x\in\left(-\infty;0\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0
y'		$+$	
y	1	$\nearrow$	2

Để phương trình có nghiệm với mọi $x\in\left(-\infty;0\right)$ ta phải có $2^m\geq 2\Leftrightarrow m\geq 1$.

Câu 4. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\ln\left(7x^2+7\right)\geq\ln\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tính S.

A. $S=14$. **B.** $S=0$. **C.** $S=12$. **D.** $S=35$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\ln\left(7x^2+7\right)\geq\ln\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+7\geq mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(7-m\right)x^2-4x+7-m\geq 0 & (1)\\ mx^2+4x+m>0 & (2)\end{cases}$$

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi các bất phương trình $(1),(2)$ đúng với mọi

$x\in\mathbb{R}$.

Xét $(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0\ (1)$.

+ Khi $m=7$ ta có (1) trở thành $-4x\ge 0\Leftrightarrow x\le 0$. Do đó $m=7$ không thỏa mãn.

+ Khi $m\ne 7$ ta có (1) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7-m>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ 4-(7-m)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ m\le 5\vee m\ge 9\end{cases}\Leftrightarrow m\le 5\ (*).$$

Xét $mx^2-4x+m>0\ (2)$.

+ Khi $m=0$ ta có (2) trở thành $-4x>0\Leftrightarrow x<0$. Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

+ Khi $m\ne 0$ ta có (2) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m<-2\vee m>2\end{cases}\Leftrightarrow m>2\ (**).$$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $2<m\le 5$. Do $m\in Z$ nên $m\in\{3;4;5\}$. Từ đó $S=3+4+5=12$.

Câu 5. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\log_2(7x^2+7)\ge\log_2(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi x.

A. 5 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Bpt: $\log_2(7x^2+7)\ge\log_2(mx^2+4x+m)\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+7\ge mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=(m-7)x^2+4x+m-7\le 0\\ g(x)=mx^2+4x+m>0\end{cases}$$

Bpt đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ g(x)>0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

• Trường hợp 1: $m=7$

$$\begin{cases}f(x)\le 0\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x\le 0\\ 7x^2+4x+7>0\end{cases}$$

Vậy $m=7$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 2: $m=0$

$$\begin{cases}f(x)\le 0\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7x^2+4x-7\le 0\\ 4x>0\end{cases}$$

Vậy $m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 3: $m\ne 0;\ m\ne 7$

Khi đó: $\begin{cases}f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ g(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_f<0\\ \Delta'_f\le 0\\ a_g>0\\ \Delta'_g<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-7<0\\ 4-(m-7)^2\le 0\\ m>0\\ 4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ m\le 5\vee m\ge 9\\ m>0\\ m<-2\vee m>2\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 5$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{3;4;5\}$.

Cách 2:

$$\log_2\left(7x^2+7\right)\ge \log_2\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow \begin{cases}7x^2+7\ge mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m-7)x^2+4x+m-7\le 0\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}7x^2-4x+7\ge m\left(x^2+1\right)\\ m\left(x^2+1\right)>-4x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{7x^2-4x+7}{x^2+1}\ge m\\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}7+\dfrac{-4x}{x^2+1}\ge m\\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m-7\le \dfrac{-4x}{x^2+1}\\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}\end{cases}\quad (*)$$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{-4x}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=\frac{-4(x^2+1)+4x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	0	↗	2	↘	-2	↗	0

Vậy đk (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}m-7\le -2\\ m>2\end{cases}\Leftrightarrow\ 2<m\le 5$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{3;4;5\}$.

Câu 6. **(Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3+x-m\right)$ có nghiệm.

A. $m\le 2$. **B.** $m\in\mathbb{R}$.

C. $m<2$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases}x>1\\ x^3+x-m>0\end{cases}$.

Phương trình tương đương

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3+x-m\right)\Leftrightarrow x-1<x^3+x-m\Leftrightarrow x^3+1>m$$

Khi đó ta có

$$f(x)=x^3+1>m,(x>1)\Leftrightarrow m<\min_{(1;+\infty)}f(x)$$

Ta có

$$f'(x)=3x^2=0\Rightarrow x=0\notin(1;+\infty)$$

Bảng biến thiên

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	2 $\nearrow$ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài hỏi "có nghiệm" nên ta chọn $m \in \mathbb{R}$.

Câu 7. **(THPT Chuyên Thái Bình - 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right) \ge \log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $x^2+2>0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó bất phương trình

$\log_2\left(x^2+mx+m+2\right) \ge \log_2\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow x^2+mx+m+2 \ge x^2+2 \Leftrightarrow mx+m \ge 0$.

Bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right) \ge \log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $mx+m \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m=0$

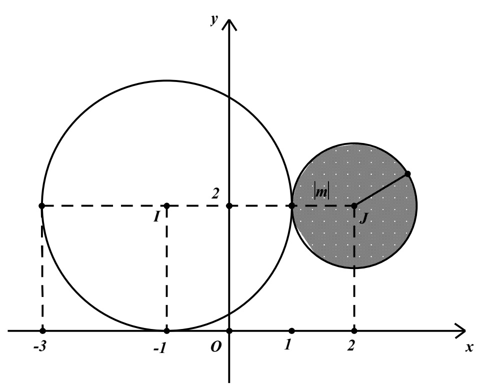
Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2019)** Tìm tập S tất cả các giá trị thực của số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S=\{-5;-1;1;5\}$. **B.** $S=\{-1;1\}$.

C. $S=\{-5;5\}$. **D.** $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

Lời giải

Chọn A



Nhận thấy $x^2+y^2+2>1$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ nên:

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \ge 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \ge x^2+y^2+2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \le m^2$ (*).

Khi $m=0$ thì (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$. Cặp $(2;2)$ không là nghiệm của phương trình

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

Khi $m \neq 0$, tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn (*) là hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính là $|m|$.

Trường hợp này, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính 2 và hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính $|m|$ có đúng một điểm chung (hình vẽ)

Điều này xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}|m|=1\\|m|=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm 1\\m=\pm 5\end{array}\right.$ (thỏa mãn $m \neq 0$).

Vậy $S=\{-5;-1;1;5\}$.

Câu 9. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Xét bất phương trình $\log_2^2(2x)-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2};+\infty)$.

A. $m \in \left(-\frac{3}{4};0\right)$. **B.** $m \in (0;+\infty)$. **C.** $m \in (-\infty;0)$. **D.** $m = \in \left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $\log_2^2(2x)-2(m+1)\log_2 x-2<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-2m\log_2 x-1<0 \;\; (1)$.

Đặt $t=\log_2 x$, vì $x \in (\sqrt{2};+\infty) \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình trở thành $t^2-2mt-1<0 \Leftrightarrow 2mt>t^2-1 \Leftrightarrow 2m>\frac{t^2-1}{t} \;(2)$.

Đặt $f(t)=\frac{t^2-1}{t}$ với $t \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2};+\infty)$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0 \;\; \forall t \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2};+\infty)$ khi và chỉ khi $2m>-\frac{3}{2} \Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^5-x^4)-m(x^4-x^3)+x-\ln x-1 \geq 0$ thỏa mãn với mọi $x>0$. Tính tổng các giá trị trong tập hợp S.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=m^2(x^5-x^4)-m(x^4-x^3)+x-\ln x-1$. Ta có $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ và $f'(x)=m^2(5x^4-4x^3)-m(4x^3-3x^2)+1-\dfrac{1}{x}$.

Bất phương trình đã cho viết thành $f(x)\ge 0$. Giả sử $y=f(x)$ có đồ thị là (C).

$f(x)\ge 0$ với mọi $x>0$ khi và chỉ khi đồ thị (C) không nằm phía dưới trục *Ox*.

Mặt khác (C) và *Ox* có điểm chung là $A(1;0)$. Nên điều kiện cần để đồ thị (C) không nằm phía dưới trục *Ox* là *Ox* tiếp xúc với (C) tại $A(1;0)$.

Suy ra, $f'(1)=0 \Leftrightarrow m^2-m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Với $m=0$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $f(x)=x-\ln x-1\ge 0$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)\ge 0, \forall x>0$. Suy ra $m=0$ thỏa mãn điều kiện.

Với $m=1$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $f(x)=x^5-2x^4+x^3-\ln x+x-1\ge 0$.

$$f'(x)=5x^4-8x^3+3x^2-\frac{1}{x}+1=\frac{5x^5-8x^4+3x^3+x-1}{x}=\frac{(x-1)(5x^4-3x^3+1)}{x}$$

Ta có $5x^4-3x^3+1=\left(2x^2-\dfrac{3}{4}x\right)^2+\left(x^2-\dfrac{9}{32}\right)^2+1-\left(\dfrac{9}{32}\right)^2>0$.

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)\ge 0, \forall x>0$. Suy ra $m=1$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $S=\{0;1\}$.

Câu 11. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho bất phương trình $\log_7(x^2+2x+2)+1>\log_7(x^2+6x+5+m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 36. **B.** 34. **C.** 35. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right),\ \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow \log_7\left(7x^2+14x+14\right)>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right),\ \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5+m>0, \forall x\in(1;3) \\ 6x^2+8x+9>m, \forall x\in(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\left(x^2+6x+5\right), \forall x\in(1;3)\ (1) \\ 6x^2+8x+9>m, \forall x\in(1;3)\quad (2) \end{cases}$

Xét $g(x)=-\left(x^2+6x+5\right), x\in(1;3)$, có $g(x)=-(x+3)^2+4<-(1+3)^2+4=-12, \forall x\in(1;3)$

Do đó $(1)\Leftrightarrow m\ge -12$.

Xét $h(x)=6x^2+8x+9, x\in(1;3)$, có $h(x)>6.1^2+8.1+9=23, \forall x\in(1;3)$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow m\le 23$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-12;23]$ nên ta được tập các giá trị của m là $\{-12;-11;-10;...;23\}$.

Vậy có tổng cộng 36 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất để bất phương trình $1+\log_2(2-x)-2\log_2\left(m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\right)\le -\log_2(x+1)$ có nghiệm. Chọn đáp án đúng trong các khẳng định sau

A. $m_0\in(9;10)$. **B.** $m_0\in(8;9)$. **<u>C</u>.** $m_0\in(-10;-9)$. **D.** $m_0\in(-9;-8)$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

+ Điều kiện xác định: $\begin{cases} -1<x<2 \\ m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ m>\frac{x}{2}-4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right) \end{cases} (*)$.

+ Với điều kiện trên bất phương trình:

$1+\log_2(2-x)-2\log_2\left(m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\right)\le -\log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2\left[2(2-x)(x+1)\right]\le \log_2\left[m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(2x+2)}\le m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)$

$\Leftrightarrow m\ge \frac{x}{2}+\sqrt{(2-x)(2x+2)}-4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\ (1)$.

+ Ta thấy các nghiệm của (1) trong khoảng $(-1;2)$ luôn thỏa mãn $(*)$.

+ Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}, (t>0)$ với $x\in(-1;2)$.

Xét $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}$ với $x\in(-1;2)$.

$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{2x+2}}=\frac{2\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2}}{2\sqrt{(2-x)(2x+2)}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=\sqrt{2x+2}\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	-1		1		2
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\sqrt{6}$

Suy ra khi $x \in (-1;2)$ thì $t \in \left(\sqrt{3};3\right]$.

+ Ta có $t^2 = 4 + x + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \sqrt{(2-x)(2x+2)} = \frac{t^2-4}{2}$.

+ (1) trở thành $m \ge \frac{t^2-4}{2} - 4t \Leftrightarrow 2m \ge t^2 - 8t - 4 \;\; (2)$.

+ (1) có nghiệm $x \in (-1;2) \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t \in \left(\sqrt{3};3\right]$.

+ Xét hàm số $y = g(t) = t^2 - 8t - 4$ trên $\left(\sqrt{3};3\right]$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\sqrt{3}$		3	4	$+\infty$
$g(t) = t^2 - 8t - 4$		$-1-8\sqrt{3}$	$\searrow$	-19		

+ Do đó bất phương trình (2) có nghiệm $t \in \left(\sqrt{3};3\right]$ khi và chỉ khi $2m \ge -19 \Leftrightarrow m \ge -\frac{19}{2}$.

Suy ra $m_0 = -\frac{19}{2} \in (-10;-9)$.

Câu 13. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ trong đó x, y là các số nguyên thoả mãn điều kiện $\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \ge 1$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử?

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

$\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \ge 1 \Leftrightarrow 2x+2y+m \ge x^2+y^2+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \le m+1$ Để bất phương trình có 5 phần tử thì $\sqrt{m+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow m < 1$

Vậy có 2021 số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử.

Câu 14. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho bất phương trình $\log_7(x^2+2x+2)+1 > \log_7(x^2+6x+5+m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 36. **B.** 35. **C.** 34. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $x^2+6x+5+m > 0$.

Khi đó

$\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)\Leftrightarrow\log_7\left(7x^2+14x+14\right)>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow 7x^2+14x+14>x^2+6x+m+5$

$\Leftrightarrow 6x^2+8x+9-m>0$.

Khi đó $ycbt\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+8x+9-m>0\\x^2+6x+5+m>0\end{cases},\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}6.1^2+8+9-m\ge0\\1^2+6+5+m\ge0\end{cases}\Leftrightarrow -12\le m\le 23$.

Vậy có 36 giá trị nguyên của m thỏa $ycbt$.

Câu 15. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

A. $m\in(0;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **C.** $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

$\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$

$\Leftrightarrow(1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0\quad(1)$.

Đặt $t=\log_2 x$ .Vì $x>\sqrt{2}$ nên $\log_2 x>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$. Do đó $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

(1) thành $(1+t)^2-2(m+1)t-2<0\Leftrightarrow t^2-2mt-1<0\ (2)$

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta'=m^2+1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$f(t)=t^2-2mt-1=0$ có $ac<0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1<0<t_2$.

Khi đó cần $\frac{1}{2}<t_2\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2+1}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

Cách 2: $t^2-2mt-1<0\ \Leftrightarrow f(t)=\frac{t^2-1}{2t}<\mathrm{m}\ \left(t>\frac{1}{2}\right)$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0;+\infty)$ ta được $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Câu 16. **(Chuyên Vinh - 2018)** Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\ge0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a\in(2;3]$. **B.** $a\in(8;+\infty)$. **C.** $a\in(6;7]$. **D.** $a\in(-6;-5]$.

Lời giải

Đặt $t=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ suy ra $t\ge\frac{3}{4}$

Bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\ge0\Leftrightarrow t+a\ln t+1\ge0\Leftrightarrow a\ln t\ge -t-1$

Trường hợp 1: $t=1$ khi đó $a\ln t\ge -t-1$ luôn đúng với mọi a.

Trường hợp 2: $\frac{3}{4}\le t<1$

Ta có $a\ln t \ge -t-1,\ \forall t\in\left[\frac{3}{4};1\right) \Leftrightarrow a\le \frac{-t-1}{\ln t},\forall t\in\left[\frac{3}{4};1\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{-t-1}{\ln t}\Rightarrow f'\left(t\right)=-\frac{\ln t-1-\frac{1}{t}}{\ln^2 t}\ge 0,\forall t\in\left[\frac{3}{4};1\right)$ do đó

$a\le \frac{-t-1}{\ln t},\forall t\in\left[\frac{3}{4};1\right)\Leftrightarrow a\le \frac{-7}{4\ln\frac{3}{4}}$

Trường hợp 3: $t>1$

Ta có $a\ln t\ge -t-1,\ \forall t\in\left(1;+\infty\right)\Leftrightarrow a\ge \frac{-t-1}{\ln t},\forall t\in\left(1;+\infty\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{-t-1}{\ln t}\Rightarrow f'\left(t\right)=-\frac{\ln t-1-\frac{1}{t}}{\ln^2 t},\ \forall t\in\left(1;+\infty\right)$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=\ln t-1-\frac{1}{t}\Leftrightarrow g'\left(t\right)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}>0$

Vậy $g\left(t\right)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $g\left(1\right)=-2;\lim\limits_{t\to+\infty} g\left(t\right)=+\infty$ vậy $g\left(t\right)=0$ có duy nhất một nghiệm trên $\left(1;+\infty\right)$

Do đó $f'\left(t\right)=0$ có duy nhất một nghiệm là t_0. Khi đó $\ln t_0=\frac{t_0+1}{t_0}$ suy ra $f\left(t_0\right)=-t_0$

Bảng biến thiên

t	1		t_0		$+\infty$
f'	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	$-t_0$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $a\ge \frac{-t-1}{\ln t},\forall t\in\left(1;+\infty\right)\Leftrightarrow a\ge -t_0$.

Vậy $-t_0\le a\le \frac{-7}{4\ln\frac{3}{4}}$.

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a\in\left(6;7\right]$.

Câu 17. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Giả sử $S=\left(a,b\right]$ là tập nghiệm của bất phương trình $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x>\left(x^2-x\right)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$. Khi đó $b-a$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\6+x-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\-2\le x\le 3\end{cases}$

$D=\left(0;3\right]$.

$5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x>\left(x^2-x\right)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow 5x + x\sqrt{6+x-x^2}\log_2 x > x(x-1)\log_2 x + 5 + 5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(5 - x\log_2 x) + \sqrt{6+x-x^2}(x\log_2 x - 5) > 0$

$\Leftrightarrow (5 - x\log_2 x)\left(x - 1 - \sqrt{6+x-x^2}\right) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5 - x\log_2 x > 0 \\ x - 1 - \sqrt{6+x-x^2} > 0 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} 5 - x\log_2 x < 0 \\ x - 1 - \sqrt{6+x-x^2} < 0 \end{cases} (II) \end{array}\right.$$

□ Giải hệ (I).

$$\begin{cases} 5 - x\log_2 x > 0 (1) \\ x - 1 - \sqrt{6+x-x^2} > 0 (2) \end{cases}$$

Giải (1) $5 - x\log_2 x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = x\left(\frac{5}{x} - \log_2 x\right) = xg(x)$ với $x \in (0;3]$

Ta có $g'(x) = -\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x\ln 2} < 0 \forall x \in (0;3]$.

Lập bảng biến thiên

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 3
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$\searrow$ $\frac{5}{3} - \log_2 3 \approx 0,08$

Vậy $f(x) = x\left(\frac{5}{x} - \log_2 x\right) > 0 \forall x \in (0;3]$.

Xét bất phương trình (2): $\sqrt{6+x-x^2} < x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + x - x^2 < (x-1)^2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > \frac{5}{2} \end{array}\right. \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ (I) là $D = \left(\frac{5}{2};3\right]$.

□ Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy $S = \left(\frac{5}{2},3\right]$.

$b - a = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 18. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập ngiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 35. **B.** 36. **C.** 34. **D.** 33.

Lời giải

$$bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5+m>0 \\ \log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right]>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-x^2-6x-5 \\ 6x^2+8x+9>m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>\max\limits_{(1;3)} f(x) \\ m<\min\limits_{(1;3)} g(x) \end{cases}, \text{ với } f(x)=-x^2-6x-5;\ g(x)=6x^2+8x+9$$

Xét sự biến thiên của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$

❍ $f'(x)=-2x-6<0, \forall x\in(1;3) \Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow \max\limits_{(1;3)} f(x)=f(1)=-12$

❍ $g'(x)=12x+8>0, \forall x\in(1;3) \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow \min\limits_{(1;3)} g(x)=g(1)=23$

Khi đó $-12<m<23$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-11;-10;...;22\}$

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. **(Sở Quảng Nam 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x\le 2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 0<x<1 \\ m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ m\sqrt{x}-(1-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ m>\dfrac{(1-x)}{\sqrt{x}}>0 \end{cases}$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\log x^3\le\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3\le\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x}\le\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow m\ge\frac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1-x}\right)+\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\ge 2\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}.$$

Vì vậy $m\ge\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x)\ge\sqrt{2}\approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị $2,3,4,5,6,7,8$.

Câu 20. **(Yên Phong 1 - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên m sao cho bất phương trình $\ln 5+\ln\left(x^2+1\right)\ge \ln\left(mx^2+4x+m\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có bất phương trình $\ln 5+\ln\left(x^2+1\right)\ge \ln\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow \ln\left(5x^2+5\right)\ge \ln\left(mx^2+4x+m\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+5\ge mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+5-4x\ge m\left(x^2+1\right)\\ m\left(x^2+1\right)>-4x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\le \dfrac{5x^2+5-4x}{x^2+1}=f(x)\\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}=g(x)\end{cases}.$$

Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	5	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	5

Hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra để bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $2<m\le 3$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m.

DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CHỨA THAM SỐ

Câu 1. **(VTED 2019)** Cho $a>1$. Biết khi $a=a_0$ thì bất phương trình $x^a\le a^x$ đúng với mọi $x\in(1;+\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $1<a_0<2$ **B.** $e<a_0<e^2$ **C.** $2<a_0<3$ **D.** $e^2<a_0<e^3$

Lời giải

Chọn C

$x^a\le a^x\Leftrightarrow a.\ln x\le x.\ln a\Leftrightarrow \dfrac{a}{\ln a}\le\dfrac{x}{\ln x}$

Đặt $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}, x\in(1;+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e.$

Bảng biến thiên:

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \dfrac{a}{\ln a} \le e \Leftrightarrow a \le e.\ln a \Leftrightarrow a - e.\ln a \le 0$

* Xét hàm số

$g(x) = x - e.\ln x; g'(x) = 1 - \dfrac{e}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x-e}{x}$

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy $a - e.\ln a \ge 0$

Theo bảng biến thiên, ta có: $a - e.\ln a \le 0 \Leftrightarrow a = e$

Vậy $a = a_0 = e \in (2;3)$

Câu 2. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$: $y = \sqrt{4^x - (m+1).2^x - m}$

A. Đáp án khác. **B.** $m > -1$.

C. $m < 0$. **D.** $-3 - 2\sqrt{2} \le m \le -3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Hàm số $y = \sqrt{4^x - (m+1).2^x - m}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $4^x - (m+1).2^x - m \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = 2^x \ (t > 0)$. Khi đó: $t^2 - (m+1).t - m \ge 0 \ \forall t > 0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - t}{t+1} \ge m \ \forall t > 0$.

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{t^2 - t}{t+1}$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}$ khi đó: $f'(t)=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1=0 \Rightarrow t=-1+\sqrt{2}$ do $t>0$.

Lập bảng biến thiên ta tìm được $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=f\left(-1+\sqrt{2}\right)=-3+2\sqrt{2}$.

Để bất phương trình $\dfrac{t^2-t}{t+1}\ge m\ \ \forall t>0$ thì $m\le -3+2\sqrt{2}$.

Câu 3. Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2^x$. ĐK: $t\ge 1$

BPT $\Leftrightarrow t^2-2(m+1)t+m\ge 0 \Leftrightarrow (2t-1)m\le t^2-2t \Leftrightarrow m\le \dfrac{t^2-2t}{2t-1}=g(t) \Leftrightarrow m\le \min g(t)$

Ta có $g'(t)=\dfrac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}>0, \forall t\ge 1 \Rightarrow Min\, g(t)=g(1)=-1 \Rightarrow m\in(-\infty;-1]$

Câu 4. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1}-m\left(2^x+1\right)>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0]$.

C. $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Lời giải

Bất phương trình $4^{x-1}-m\left(2^x+1\right)>0\ \ (1)$.

Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $\dfrac{1}{4}t^2-m(t+1)>0 \Leftrightarrow t^2-4mt-4m>0\ \ (2)$.

Đặt $f(t)=t^2-4mt-4m$.

Đồ thị hàm số $y=f(t)$ có đồ thị là một Parabol với hệ số a dương, đỉnh $I\left(2m;-4m^2-4m\right)$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t>0$ hay $f(t)>0,\ \forall t>0$.

TH1: $m\le 0 \Rightarrow f(0)=-4m\ge 0\ \Rightarrow m\le 0$ thỏa mãn.

TH2: $m>0 \Rightarrow -4m^2-4m<0$ nên $m>0$ không thỏa mãn.

Vậy $m\le 0$.

Câu 5. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

Lời giải

$4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0,\ \ \forall x\ge 0$.

$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2(m+1)2^x+m\ge 0, \forall x\ge 0\ \ (1)$.

Đặt $t=2^x,\ (t>0)$.

(1) trở thành $t^2-2(m+1)t+m\ge 0,\ \forall t\ge 1$ (2).

Cách 1:

(2) $\Leftrightarrow m\le \dfrac{t^2-2t}{2t-1},\ \forall t\ge 1$ (3).

Xét hàm số $y=f(t)=\dfrac{t^2-2t}{2t-1}$. Ta có hàm số $y=f(t)$ liên tục trên $[1;+\infty)$.

$$f'(t)=\frac{(2t-2)(2t-1)-2(t^2-2t)}{(2t-1)^2}=\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}>0,\forall t\ge 1.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)\Rightarrow f(t)\ge f(1)=-1,\ \ \forall t\ge 1$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[1;+\infty)} f(t)\Leftrightarrow m\le -1$.

Cách 2:

$t^2-2(m+1)t+m\ge 0$ là một bất phương trình bậc hai.

Tam thức bậc hai ở vế trái luôn có $\Delta'=m^2+m+1>0,\ \forall m$ nên tam thức luôn có hai nghiệm là $t=m+1-\sqrt{m^2+m+1}$ và $t=m+1+\sqrt{m^2+m+1}$.

Suy ra bất phương trình $t^2-2(m+1)t+m\ge 0$ có tập nghiệm là

$\left(-\infty;m+1-\sqrt{m^2+m+1}\right]\cup\left[m+1+\sqrt{m^2+m+1};+\infty\right)$.

(2) $\Leftrightarrow m+1+\sqrt{m^2+m+1}\le 1\Leftrightarrow \sqrt{m^2+m+1}\le -m\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0\\ m^2+m+1\le m^2\end{cases}\Leftrightarrow m\le -1$.

Câu 6. **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$: $\left(6+2\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x-(m+1)2^x\ge 0$

A. 10. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

Ta có:

$\left(6+2\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x-(m+1)2^x\ge 0\Leftrightarrow 2^x\left(3+\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x>(m+1)2^x$

$\Leftrightarrow \left(3+\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^x>m+1$

Đặt $t=\left(3+\sqrt{7}\right)^x$, $t>0$ $\Rightarrow \left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x=\dfrac{1}{t}$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$t+(2-m).\dfrac{1}{t}>m+1\ \Leftrightarrow \dfrac{t^2-t+2}{t+1}>m$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-t+2}{t+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$

$f'(t)=0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3\\ t=0\end{array}\right.$. Khi đó, ta có bảng biến thiên sau:

x	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta suy ra để bất phương trình đã cho nghiệm đúng thì $m<1$. Suy ra trong đoạn $[-10;10]$ có tất cả 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tìm m để bất phương trình $2^x+3^x+4^x+5^x \ge 4+mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\ln 120$. **B.** $\ln 10$. **C.** $\ln 30$. **D.** $\ln 14$.

Lời giải

+ Với $a>1$ ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\right).\ln a=\ln a$.

+ Với $a>1$ xét hàm số $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}\ (x\ne 0)$, ta có $f'(x)=\dfrac{xa^x\ln a-a^x+1}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x)=xa^x\ln a-a^x+1 \Rightarrow g'(x)=a^x\ln a+xa^x\ln^2 a-a^x\ln a=xa^x\ln^2 a$.

Với $x>0$ ta có $g'(x)>0$ suy ra $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0, \forall x>0$.

Với $x<0$ ta có $g'(x)<0$ suy ra $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0, \forall x>0$.

Do đó hàm số $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}\ (a>1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Trở lại bài toán:

+ Xét $x=0$ bất phương trình thỏa mãn.

+ Xét $x>0$ ta có: $2^x+3^x+4^x+5^x\ge 4+mx \Leftrightarrow m\le \dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}=h(x)$.

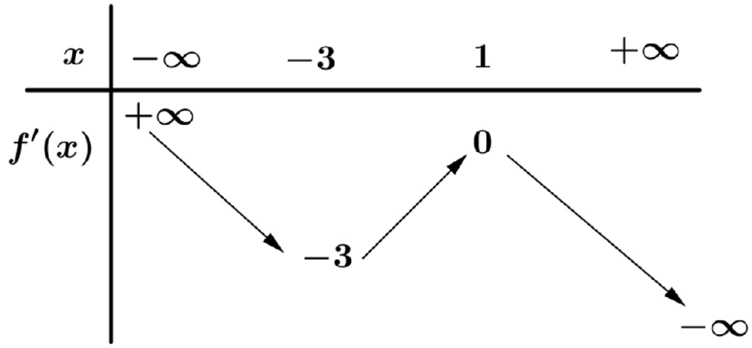
Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m\le \lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5=\ln 120$.

+ Xét $x<0$ ta có: $2^x+3^x+4^x+5^x\ge 4+mx \Leftrightarrow m\ge \dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}=h(x)$.

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m\ge \lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5=\ln 120$.

Kết hợp lại ta có $m=\ln 120$.

Câu 8. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi.

A. $m > f(-1) - \dfrac{1}{e}$ **B.** $m \ge f(-1) - \dfrac{1}{e}$ **C.** $m > f(1) - e$ **D.** $m \ge f(1) - e$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) < e^x + m \Leftrightarrow m > f(x) - e^x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^x; g'(x) = f'(x) - e^x < 0 \forall x \in (-1;1)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \ge \max g(x) = g(-1) = f(-1) - \dfrac{1}{e}$, chọn **C.**

Câu 9. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \ge f(0) - 1$. **B.** $m > f(-1) - e$. **C.** $m > f(0) - 1$. **D.** $m \ge f(-1) - e$.

Lời giải

$f(x) < e^{x^2} + m \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} < m$

Xét hàm số: $g(x) = f(x) - e^{x^2}$; $g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}$.

Trên khoảng $(-1;0)$ ta có $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ -2x > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (-1;0)$.

Trên khoảng $(0;1)$ ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ -2x < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0;1)$.

Tại điểm $x = 0$ ta có $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ -2xe^{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = 0$.

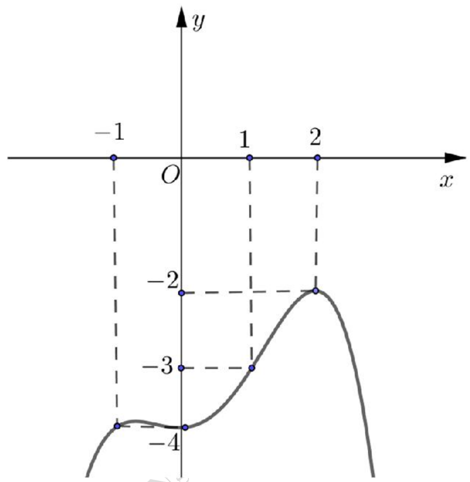
Suy ra bảng biến thiên của $g'(x)$:

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f(0)-1$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{(-1;1)} g(x) = f(0)-1$.

Do đó bất phương trình $m > g(x)$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi $m > \max\limits_{(-1;1)} g(x) = f(0)-1$.

Câu 10. **(Phú Thọ 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)} + \left(4 - f^2(x)\right).9^{f(x)} \le \left(-m^2 + 5m\right).4^{f(x)}$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 10 **<u>B</u>.** 4 **C.** 5 **D.** 9

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Ta có

$$9.6^{f(x)} + \left(4 - f^2(x)\right).9^{f(x)} \le \left(-m^2 + 5m\right).4^{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(4 - f^2(x)\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9;\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \le -m^2 + 5m \quad (1)$$

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x) \le -2, \forall x \in \mathbb{R}$

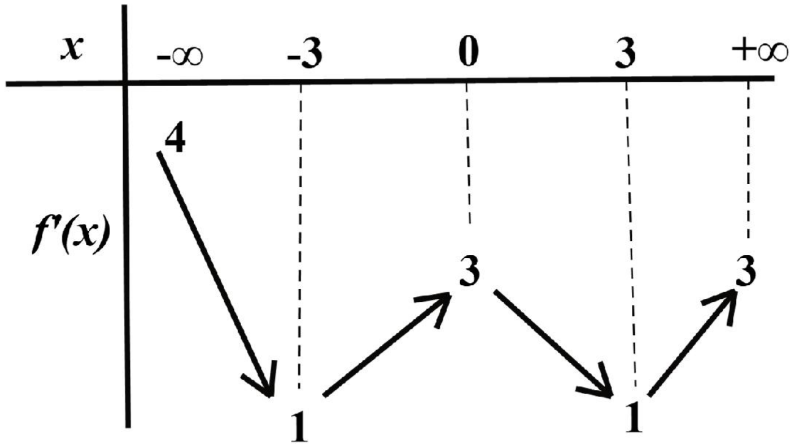
Do đó $\left(4 - f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \le 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \le 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\left(4 - f^2(x)\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \le 4, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Để (1) có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $4 \le -m^2 + 5m \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Câu 11. **(VTED 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f\left(x\right)<3.e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in\left(-2;2\right)$ khi và chỉ khi:

A. $m\ge f\left(-2\right)-3$ **B.** $m>f\left(-2\right)-3e^4$ **C.** $m\ge f\left(2\right)-3e^4$ **D.** $m>f\left(-2\right)-3$

Lời giải

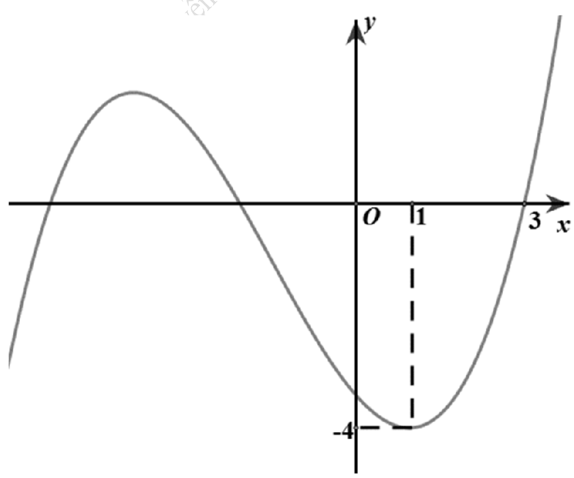
Bất phương trình tương đương với $m>g\left(x\right)=f\left(x\right)-3.e^{x+2}$.

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-3.e^{x+2}<3-3.e^{-2+2}=0,\forall x\in\left(-2;2\right)$.

Do đó $g\left(x\right)>g\left(2\right)=f\left(2\right)-3.e^4,\forall x\in\left(-2;2\right)$.

Vậy $m>f\left(2\right)-3.e^4$ thì phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(-2;2\right)$.

Câu 12. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f\left(e^x\right)<m\left(3e^x+2019\right)$ có nghiệm $x\in\left(0;1\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>-\dfrac{4}{1011}$. **B.** $m\ge-\dfrac{4}{3e+2019}$. **C.** $m>-\dfrac{2}{1011}$. **D.** $m>\dfrac{f\left(e\right)}{3e+2019}$.

Lời giải

Đặt $t=e^x$ $\left(t>0\right)$. Bất phương trình có dạng: $f\left(t\right)<m\left(3t+2019\right)$ $\Leftrightarrow\dfrac{f\left(t\right)}{3t+2019}<m$.

Ta có: $x\in\left(0;1\right)$ $\Leftrightarrow t=e^x\in\left(1;e\right)$.

Xét hàm $g(t)=\dfrac{f(t)}{3t+2019}$ có $g'(t)=\dfrac{f'(t)(3t+2019)-3f(t)}{(3t+2019)^2}$.

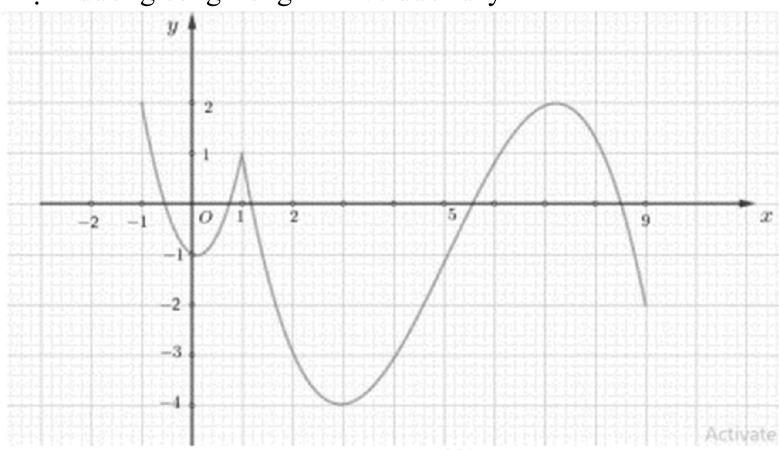
Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy: $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ và $f(x)<0$ $\forall x\in(1;e)\Rightarrow\begin{cases}f(x)<0\\ f'(x)>0\end{cases}$ $\forall x\in(1;e)$.

$\Rightarrow g'(t)>0\ \ \forall t\in(1;e)\ \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;e)\Rightarrow g(1)<g(t)<g(e)\ \ \forall t\in(1;e)$.

Vậy bất phương trình $f\left(e^x\right)<m\left(3e^x+2019\right)$ có nghiệm $x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow$ Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{f(t)}{3t+2019}<m$ có nghiệm $t\in(1;e)\Leftrightarrow m>g(1)=-\dfrac{4}{2022}=-\dfrac{2}{1011}$.

Câu 13. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

A. 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Dễ thấy $-4\le f(x)\le 2,\ \forall x\in[-1;9]$ (1) nên $-\left[f(x)+4\right].\left[f(x)-2\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$.

Do đó $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$ (2).

Ta có $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow 16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge m^2-3m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow \alpha=\min\limits_{x\in[-1;\,9]}\left\{16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\right\}\ge m^2-3m$ (3).

Từ (1) và (2) ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ và $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge 0,\ \forall x\in[-1;\,9]$.

Suy ra $16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge 4,\ \forall x\in[-1;\,9]$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=2\Leftrightarrow x=-1\vee x=a\ (7<a<8)$.

Do đó $\alpha=4$ và (3) $\Leftrightarrow 4\ge m^2-3m\Leftrightarrow -1\le m\le 4$. Vì m nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2;3;4\}$.

Câu 14. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho bất phương trình $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$ có nghiệm đúng với mọi số thực x là

A. $m\le -\frac{3}{2}$. **B.** $m\ne 2$. **C.** $m<-\frac{3}{2}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$

$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-2.3^x-3>\left(3^x+1\right).2m$

$\Leftrightarrow \left(3^x+1\right)\left(3^x-3\right)>\left(3^x+1\right).2m$

$\Leftrightarrow 3^x-3>2m \Leftrightarrow 3^x>3+2m$

Vậy, để $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0, \forall x\in\mathbb{R}$ khi $3+2m\le 0\Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}$.

Câu 15. **(Sở Nam Định - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

A. 3281. **B.** 3283. **C.** 3280. **D.** 3279.

Lời giải

Chọn C

Do m là số nguyên dương nên 2m >1 => $\log_3 2m>0$.

$3^{x+2}-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow 3^{x+2}=3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

$3^x-2m=0\Leftrightarrow x=\log_3 2m$.

Lập bảng biến thiên, ta kết luận: tập nghiệm bất phương trình này là $\left(-\frac{3}{2};\log_3 2m\right)$

Suy ra, $\log_3 2m\le 8\Leftrightarrow 2m\le 3^8\Leftrightarrow m\le\frac{6561}{2}=3280.5$ =>

Câu 16. **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Có mấy giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $9^{m^2x}+4^{m^2x}\ge m.5^{m^2x}$ có nghiệm?

A. 10. **B.** Vô số. **C.** 9. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta chỉ xét $m\in\mathbb{Z}^+$

Ta có: $9^{m^2x}+4^{m^2x}\ge m.5^{m^2x}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}\ge m$ (1)

Có $\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}\ge 2\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}.\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}}=2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}$.

Do đó nếu có x_0 là nghiệm của bất phương trình $2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}\ge m$

thì x_0 cũng là nghiệm của $\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}\ge m$.

Ta xét các giá trị $m\in\mathbb{Z}^+$ làm cho bất phương trình $2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}\ge m$ (2) có nghiệm.

Vì $2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}\ge m\Leftrightarrow\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}\ge\frac{m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow m^2x\ge\log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{m}{2}\right)\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{m^2}\log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{m}{2}\right)$, với $m\in\mathbb{Z}^+$.

Vậy với $m\in\mathbb{Z}^+$ thì bất phương trình (2) có nghiệm tương ứng là $x\ge\frac{1}{m^2}\log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{m}{2}\right)$.

Suy ra có vô số giá trị $m\in\mathbb{Z}^+$ làm cho bất phương trình (1) có nghiệm.

Câu 17. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$. Tập tất cả cá giá trị của m là

A. $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0$ $(1)\Leftrightarrow 4^x-2(m+1)2^x+m\ge 0$.

Đặt $2^x=t$ bất phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t+m\ge 0$ (2).

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t\ge 1$.

$(2)\Leftrightarrow(2t-1)m\le t^2-2t\Leftrightarrow m\le\frac{t^2-2t}{2t-1}$ (do $t\ge 1$).

Đặt $f(t)=\frac{t^2-2t}{2t-1}$ với $t\ge 1$.

$\Rightarrow f'(t)=\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}>0\ \forall t\ge 1$.

Bảng biến thiên

t	1	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(t)\ge m\quad\forall t\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m\le -1$. Vậy chọn **B**

Câu 18. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An 2019)** Cho hàm số $f(x)=\cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m<2^{2018}$. **B.** $m\le 2^{2018}$. **C.** $m\le 2^{2019}$. **D.** $m<2^{2019}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\cos 2x$, TXĐ: R.

Ta có $f'(x)=-2\sin 2x$, $f''(x)=-2^2\cos 2x$, $f'''(x)=2^3\sin 2x$, $f^{(4)}(x)=2^4\cos 2x$.

Suy ra $f^{(2016)}(x)=2^{2016}\cos 2x \Rightarrow f^{(2017)}(x)=-2^{2017}\sin 2x$

$\Rightarrow f^{(2018)}(x)=-2^{2018}\cos 2x$

$\Rightarrow f^{(2019)}(x)=2^{2019}\sin 2x$.

Vì $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ nên $\frac{1}{2}<\sin 2x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $f^{(2019)}(x)>2^{2018}$, $\forall x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$.

Vậy $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m\le 2^{2018}$.

Câu 19. (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)>2^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m>f(1)-2$. **B.** $m\le f(1)-2$. **C.** $m\le f(-1)-\frac{1}{2}$. **D.** $m>f(-1)-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)>2^x+m$, $\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow f(x)-2^x>m\Leftrightarrow f(x)-2^x>m$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2^x$ trên $(-1;1)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-2^x.\ln 2$.

Ta thấy: $\forall x\in(-1;1)$ thì $f'(x)\le 0$ và $2^x.\ln 2>0$.

Do đó $g'(x)=f'(x)-2^x.\ln 2<0$, $\forall x\in(-1;1)$.

Bảng biến thiên

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có: $m\le g(1)\Leftrightarrow m\le f(1)-2$.

Câu 20. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}$ có nghiệm là

A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}$ với $t>0$, bất phương trình đã cho trở thành $t^2+\frac{2}{9}t-\frac{1}{27}<0\Leftrightarrow -3<t<\frac{1}{9}$.

Do đó $0<t<\frac{1}{9}\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m}-x<-2\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m}<x-2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x^2-3x+m\ge 0\\x^2-3x+m<x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x^2-3x+m\ge 0\ \text{(I)}\\x<4-m\end{cases}$

Để bất phương trình đề bài cho có nghiệm thì hệ bất phương trình (I) có nghiệm ta đặt

$$\begin{cases}x>2 & (1)\\x^2-3x+m\ge 0 & (2)\\x<4-m & (3)\end{cases}.$$

Điều kiện cần: Từ (1) và (3) ta có $4-m>2\Leftrightarrow m<2$.

Do m là số nguyên dương nên $m=1$.

Điều kiện đủ: Với $m=1$, hệ bất phương trình (I) trở thành $\begin{cases}x>2\\x^2-3x+1\ge 0\\x<3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2<x<3\\x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}\vee x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3$. Vậy hệ bất phương trình (I) có nghiệm.

Vậy $m=1$.

Câu 21. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^4-x^3\right)-m\left(x^3-x^2\right)-x+e^{x-1}\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số tập con của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=m^2\left(x^4-x^3\right)-m\left(x^3-x^2\right)-x+e^{x-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=m^2\left(4x^3-3x^2\right)-m\left(3x^2-2x\right)-1+e^{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(1)=0$ nên từ giả thiết ta có $f(x)\ge f(1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(1)$.

$\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow m^2-m=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=0.\end{array}\right.$

□ Với $m=0$ ta có $f(x)=e^{x-1}-x\Rightarrow f'(x)=e^{x-1}-1$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Trường hợp $m=0$, yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

- Với $m=1$ ta có $f(x)=x^4-x^3-x^3+x^2+e^{x-1}=(x-1)^2x^2+e^{x-1}-x\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp $m=1$ yêu cầu bài toán cũng được thỏa mãn.

Câu 22. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0]$.

A. $m\geq -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m\geq \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $m.3^{x+1}+(3m+2).\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0\Leftrightarrow\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x+(3m+2)\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+3m>0$.

Đặt $t=\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$. Ta có $x\in(-\infty;0]\ \Leftrightarrow 0<t\leq 1$.

Ta tìm tham số m sao cho $t^2+3mt+3m+2>0$ đúng với mọi $0<t\leq 1$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{-t^2-2}{3t+3},\forall t\in(0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{t^2+2}{3t+3}$ trên $(0;1]$.

Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}.\dfrac{t^2+2t-2}{(t+1)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1-\sqrt{3}\\ t=-1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên:

t	0		$-1+\sqrt{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\dfrac{2}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$

Vậy $m>f(t),\forall t\in(0;1]\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 23. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

A. 1094. **B.** 3281. **C.** 1093. **D.** 3280.

Lời giải.

Chọn D

Đặt $t=3^x,(t>0)$ bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0(1)$ trở thành $\left(9t-\sqrt{3}\right)(t-2m)<0(2)$.

Nếu $2m\le\frac{\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow m\le\frac{\sqrt{3}}{18}<1$ thì không có số nguyên dương m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $2m>\frac{\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow m>\frac{\sqrt{3}}{18}$ thì bất phương trình $(2)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{9}<t<2m$.

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=\left(-\frac{3}{2};\log_3(2m)\right)$.

Để S chứa không quá 9 số nguyên thì $\log_3(2m)\le 8\Leftrightarrow 0<m\le\frac{3^8}{2}$

Vậy có 3280 số nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 24. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu m nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?

A. 28. **B.** 29. **C.** 30. **D.** 31.

Lời giải

Chọn B

$$3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0\Leftrightarrow 9.3^{2x}-9.3^x.3^m-3^x+3^m<0$$
$$\Leftrightarrow 9.3^x\left(3^x-3^m\right)-\left(3^x-3^m\right)<0$$
$$\Leftrightarrow\left(3^x-3^m\right)\left(9.3^x-1\right)<0$$

Ta có $3^x-3^m=0\Leftrightarrow x=m$.

$9.3^x-1=0\Leftrightarrow x=-2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		m		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có tập nghiệm $S=(-2\ ;\ m)$.

Tập hợp các nghiệm nguyên là $\{-1;\ 0;\ 1;\ ...;\ m-1\}$.

Để có không quá 30 nghiệm nguyên thì $m-1\le 28\Leftrightarrow m\le 29$.

Câu 25. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của m để hệ bất phương trình $\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le 2020\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\end{cases}$ có nghiệm là :

A. $m\ge -3$. **B.** $-2\le m\le 1$. **C.** $-1\le m\le 2$. **D.** $m\ge -2$.

Lời giải

Chọn D

$$7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le 2020\Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}}+1010.\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le 7^{2+\sqrt{x+1}}+1010.\left(2+\sqrt{x+1}\right)\quad (*)$$

Hàm số $f(t)=7^t+1010.t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow f\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le f\left(2+\sqrt{x+1}\right)$

Suy ra : $2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Rightarrow -1\le x\le 1$.

$x\in[-1;1]$: $x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\Leftrightarrow m\ge\frac{x^2-2x+3}{x-2}$.

Ycbt $\Leftrightarrow\exists x\in[-1;1]$: $m\ge\frac{x^2-2x+3}{x-2}\qquad (**)$

x	-1		$2-\sqrt{3}$		1
$\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$	-2	$\nearrow$	$2-2\sqrt{3}$	$\searrow$	-2

Từ bảng biến thiên ta có, $(**) \Leftrightarrow m \ge -2$.

Câu 26. **(Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ có 5 nghiệm nguyên?

A. 65021. **B.** 65024 **C.** 65022. **D.** 65023.

Lời giải

Chọn B

$\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ (1)

Th1: Xét $3^{x^2-x}-9=0 \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình (1).

Th2: Xét $3^{x^2-x}-9>0 \Leftrightarrow x^2-x>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow 2^{x^2}\le m \Leftrightarrow x^2 \le \log_2 m$ (2)

Nếu $m<1$ thì (2) vô nghiệm.

Nếu $m\ge 1$ thì (2) $\Leftrightarrow -\sqrt{\log_2 m}\le x\le \sqrt{\log_2 m}$.

Do đó, (1) có 5 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \left((-\infty;-1)\cup(2;+\infty)\right)\cap\left[-\sqrt{\log_2 m};\sqrt{\log_2 m}\right]$ có 3 giá trị nguyên $\sqrt{\log_2 m}\in[3;4) \Leftrightarrow 512\le m<65536$ (thỏa đk $m\ge 1$). Suy ra có 65024 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Th3: Xét $3^{x^2-x}-9<0 \Leftrightarrow x^2-x<2 \Leftrightarrow -1<x<2$. Vì $(-1;2)$ chỉ có hai số nguyên nên không có giá trị m nào để bất phương trình (1) có 5 nghiệm nguyên.

Vậy có tất cả 65024 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 27. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$.

A. $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m\ge-\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

$m.3^{x+1}+(3m+2).(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$

$\Leftrightarrow 3m+(3m+2).\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x>0$

Đặt $t=\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$

Khi $x<0$ thì $0<t<1$

BPT trở thành $3m+\dfrac{3m+2}{t}+t>0,\ \forall t\in(0;1)$.

$\Leftrightarrow 3m>\dfrac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t\in(0;1)$

Xét $f(t)=\dfrac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t\in(0;1)$

$f'(t)=\dfrac{-t^2-2t+2}{t+1}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{3}-1$

x	0		$\sqrt{3}-1$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\dfrac{-3}{2}$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow 3m>\dfrac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28. **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\sqrt{2^x+3}+\sqrt{5-2^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_2 5)$.

A. $m\ge 4$. **B.** $m\ge 2\sqrt{2}$. **C.** $m<4$. **D.** $m<2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $2^x=t$. Vì $x<\log_2 5\Rightarrow 0<2^x<2^{\log_2 5}\Rightarrow 0<t<5$.

Yêu cầu bài toán trở thành $\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}\le m,\ \forall t\in(0;5)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}$ với $t\in(0;5)$.

Có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}$.

$f'(t)=0\Rightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}=0\Rightarrow\sqrt{t+3}=\sqrt{5-t}\Rightarrow t+3=5-t\Rightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{3}{2}$		5
f'		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m\ge 4$.

Câu 29. **(THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m.4^{x^2-2x-1}-(1-2m).10^{x^2-2x-1}+m.25^{x^2-2x-1}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

A. $m<0$. **B.** $m\ge\dfrac{100}{841}$. **C.** $m\le\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\le\dfrac{100}{841}$.

Lời giải

$m.4^{x^2-2x-1}-(1-2m).10^{x^2-2x-1}+m.25^{x^2-2x-1}\le 0$

$\Leftrightarrow m-(1-2m).\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}+m.\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2.\left(x^2-2x-1\right)}\le 0\ \ (1)$

Đặt $t=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}$, Xét $u(x)=x^2-2x-1$, $\forall x\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

$u'(x)=2x-2$; $u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$u\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{4}$; $u(1)=-2; u(2)=-1\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} u(x)=-2$, $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} u(x)=-1$.

$\Rightarrow \dfrac{4}{25}\le t\le \dfrac{2}{5}$

$(1)\Leftrightarrow m-(1-2m).t+m.t^2\le 0$

$\Leftrightarrow mt^2-(1-2m)t+m\le 0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2+2t+1\right)\le t$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{t}{t^2+2t+1}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t^2+2t+1}, t\in\left[\dfrac{4}{25};\dfrac{2}{5}\right]$

$f'(t)=\dfrac{-t^2+1}{\left(t^2+2t+1\right)}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow -t^2+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\,(l) \\ t=1\ \ (l)\end{array}\right.$

$f\left(\dfrac{4}{25}\right)=\dfrac{100}{841}$; $f\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{10}{49}$.

$\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{4}{25};\frac{2}{5}\right]} f(t)=\dfrac{100}{841}$.

Vậy $m\le\dfrac{100}{841}$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

DẠNG 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)$?

A. 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

Lời giải

Chọn C.

Với mọi $x\in\mathbb{Z}$ ta có $x^2\ge x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x+y)-\log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $\mathrm{D}=(-x;+\infty)$ (do $y>-x\Rightarrow y>-x^2$).

$f'(y)=\dfrac{1}{(x+y)\ln 3}-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\ge 0,\ \forall x\in D$ (do $x^2+y\ge x+y>0$, $\ln 4>\ln 3$)

$\Rightarrow f$ tăng trên D.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\le 0$.

Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f\left(y\right)\le 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729)>0 \Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0 \Leftrightarrow x^2-x-3367<0$

$\Leftrightarrow -57,5\le x\le 58,5$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-57,-56,...,58\}$.

Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên x thỏa.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

A. 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+y>0\\x+y>0\end{cases}$.

Đặt $\log_3\left(x+y\right)=t$, ta có $\begin{cases}x^2+y\ge 4^t\\x+y=3^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\boxed{x^2-x\ge 4^t-3^t} & (*)\\y=3^t-x\end{cases}$.

Nhận xét rằng hàm số $f\left(t\right)=4^t-3^t$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ và $f\left(t\right)>0$ với mọi $t>0$

Gọi $n\in\mathbb{Z}$ thỏa $4^n-3^n=x^2-x$, khi đó $(*)\Leftrightarrow\boxed{t\le n}$

Từ đó, ta có $-x<y=3^t-x\le 3^n-x$.

Mặt khác, vì có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn đề bài nên $3^n\le 242\Leftrightarrow n\le\log_3 242$.

Từ đó, suy ra $\boxed{x^2-x\le 4^{\log_3 242}-242}\Leftrightarrow\boxed{-27,4\le x\le 28,4}$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-27,\,-26,\,...,\,27,\,28\}$.

Vậy có 56 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)$?

A. 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)(1)$

Đặt $t=x+y\in\mathbb{N}^*$ (do $x,y\in\mathbb{Z},x+y>0$)

$(1)\Leftrightarrow\log_3\left(x^2-x+t\right)\ge\log_2 t\Leftrightarrow g(t)=\log_2 t-\log_3\left(x^2-x+t\right)\le 0\left(2\right)$

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-\dfrac{1}{\left(x^2-x+t\right)\ln 3}>0$ với mọi y. Do đó $g\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$g(128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3\left(x^2 - x + 128\right) > 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x + 128 < 3^7 \Leftrightarrow -44,8 \le x \le 45,8$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2 + y\right) \ge \log_2\left(x + y\right)$?

A. 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3\left(x^2+y\right) \ge \log_2\left(x+y\right) \Leftrightarrow x^2 + y \ge 3^{\log_2(x+y)} \Leftrightarrow x^2 + y \ge \left(x+y\right)^{\log_2 3}$ (1)

Đk: $x + y \ge 1$ (do $x, y \in \mathbb{Z}$, $x + y > 0$)

Đặt $t = x + y \ge 1$, nên từ $(1) \Rightarrow x^2 - x \ge t^{\log_2 3} - t$ (2)

Để (1) không có quá 255 nghiệm nguyên y khi và chỉ khi bất phương trình (2) có không quá 255 nghiệm nguyên dương t.

Đặt $M = f\left(255\right)$ với $f\left(t\right) = t^{\log_2 3} - t$.

Vì f là hàm đồng biến trên $\left[1, +\infty\right)$ nên $(2) \Leftrightarrow 1 \le t \le f^{-1}\left(x^2 - x\right)$ khi $x^2 - x \ge 0$.

Vậy (2) có không quá 255 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2 - x\right) \le 255 \Leftrightarrow x^2 - x \le 255 \Leftrightarrow -78 \le x \le 79$ $\left(x \in \mathbb{Z}\right)$.

Vậy có 158 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{8x+4}{2x - y + 1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 9 **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

$2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right).4^x$

$2^{x^2+y^2-2x+1} \le x^2 + y^2 - 2x + 2$

$2^{(x-1)^2+y^2} - \left[\left(x-1\right)^2 + y^2\right] - 1 \le 0 (1)$

Đặt $t = \left(x-1\right)^2 + y^2$

$(1) \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + y^2 \le 1$

$P = \dfrac{8x+4}{2x - y + 1} \Rightarrow \left(2P - 8\right).x - P.y + \left(P - 4\right) = 0$

Yêu cầu bài toán tương đương:

$$\frac{\left|2P - 8 + P - 4\right|}{\sqrt{\left(2P-8\right)^2 + P^2}} \le 1 \Leftrightarrow \left|3P - 12\right| \le \sqrt{\left(2P-8\right)^2 + P^2} \Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \le P \le 5 + \sqrt{5}$$

Câu 6. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét $x^2+y^2-2x+2>0 \forall x; y$

Bất phương trình $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x \Leftrightarrow \dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right) \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)$.

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^t \le t+1 \Leftrightarrow 2^t-t-1 \le 0$

Đặt $f(t)=2^t-t-1$. Ta thấy $f(0)=f(1)=0$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2-1$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 2^t\ln 2=1 \Leftrightarrow t=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) \approx 0,52$

t	$-\infty$	0	$\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$	1	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\searrow$	0	$\searrow$ $\nearrow$	0	$\nearrow$

Quan sats BBT ta thấy $f(t) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1$

$0 \le x^2+y^2-2x+1 \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1 \ (1)$

Xét $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow 2Px-Py+P=8x+4$

$\Leftrightarrow P-4=(8-2P)x+Py$

$\Leftrightarrow P-4+2P-8=(8-2P)x+2P-8+Py$

$\Leftrightarrow 3P-12=(8-2P)(x-1)+Py$

$\Leftrightarrow (3P-12)^2=\left[(8-2P)(x-1)+Py\right]^2 \le \left[(8-2P)^2+P^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]$

Thế (1) vào ta có $(3P-12)^2 \le \left[(8-2P)^2+P^2\right] \Leftrightarrow 4P^2-40P+80 \le 0 \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \le P \le 5+\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{8-2P}{P}=\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y \\ \left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{-\sqrt{5}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $5-\sqrt{5}\approx 2,76$ gần giá trị 3 nhất.

Câu 7. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. -2. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

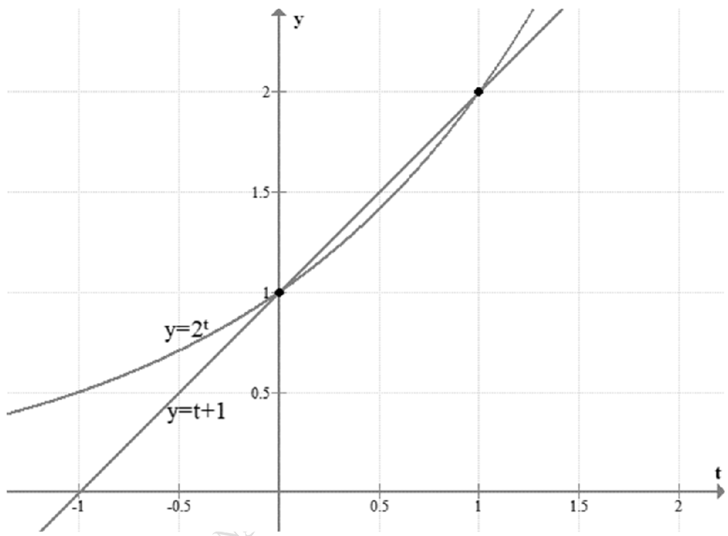
Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+1-2x}\le x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2}\le(x-1)^2+y^2+1$. Đặt $t=(x-1)^2+y^2\ (t\ge 0)$, ta được BPT: $2^t\le t+1$.

Đồ thị hàm số $y=2^t$ và đồ thị hàm số $y=t+1$ như sau:



Từ đồ thị suy ra $2^t\le t+1\Leftrightarrow 0\le t\le 1\Rightarrow(x-1)^2+y^2\le 1$. Do đó tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn thuộc hình tròn (C) tâm $I(1;0),R=1$.

Ta có $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$ là phương trình của đường thẳng d.

Do d và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d\left(I,(d)\right)\le R\Leftrightarrow\dfrac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}}\le 1\Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$, suy ra giá trị nhỏ nhất của P **gần nhất** với -3.

Câu 8. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực x và y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1+y^2}\le\left(x^2-2x+1\right)+y^2+1$.

Đặt $t=x^2-2x+1+y^2\Rightarrow t\ge 0$. Khi đó ta có $2^t\le t+1,\ \forall t\ge 0$.

Đặt $f(t)=2^t-t-1,\ \forall t\ge 0$, ta có: $f'(t)=2^t\ln 2-1$, cho $f'(t)=0$.

Ta nhận thấy phương trình $f'(t)=0$ có một nghiệm nên phương trình $f(t)=0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác ta có $f(0)=f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(t)=0$ có hai nghiệm $t=1$ và $t=0$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0		1		$+\infty$
f(t)	0	$-$	0	$+$	

Khi đó $f(t)\le 0 \Leftrightarrow t\in[0;1]$. Suy ra $x^2-2x+1+y^2\le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

Khi đó tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một hình tròn (S) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Ta có: $P=\dfrac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$.

Khi đó ta cũng có tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một đường thẳng $\Delta: 2Px+(P-4)y+P=0$.

Để Δ và (S) có điểm chung, ta suy ra $d(I,\Delta)\le 1$.

$\Leftrightarrow \dfrac{|2P+P|}{\sqrt{(2P)^2+(P-4)^2}}\le 1 \Leftrightarrow 3|P|\le\sqrt{5P^2-8P+16}$

$\Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$.

Ta suy ra $P_{\max}=-1+\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$

Câu 9. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

A. $\dfrac{33}{4}$. **B.** $\dfrac{65}{8}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Nhận xét: Giá trị của x,y thỏa mãn phương trình $2x+y\cdot 4^{x+y-1}=3(1)$ sẽ làm cho biểu thức P nhỏ nhất. Đặt $a=x+y$, từ (1) ta được phương trình

$$4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}=0.$$

Nhận thấy $y=4^{a-1}+\dfrac{2}{y}.a-2-\dfrac{3}{y}$ là hàm số đồng biến theo biến a, nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x+y=\dfrac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P=(x+y)^2+4(x+y)+2\left(y-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{8}=\dfrac{65}{8}$. Vậy $P_{\min}=\dfrac{65}{8}$.

Cách 2:

Với mọi x,y không âm ta có

$2x+y.4^{x+y-1}\ge 3 \Leftrightarrow x+y.4^{x+y-\frac{3}{2}}\ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)\ge 0$ (1)

Nếu $x+y-\frac{3}{2}<0$ thì $\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)<0+y.\left(4^0-1\right)=0$ (vô lí)

Vậy $x+y\ge \frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$P=x^2+y^2+4x+6y=\left(x+3\right)^2+\left(y+2\right)^2-13$

$\ge \frac{1}{2}\left(x+y+5\right)^2-13\ge \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2-13=\frac{65}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ x+3=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{4} \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy $\min P=\frac{65}{8}$.

Câu 10. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ bằng

A. $\frac{65}{8}$. **B.** $\frac{33}{4}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3 \Leftrightarrow y.2^{2x+2y-2}\ge 3-2x \Leftrightarrow \boxed{2y.2^{2y}\ge \left(3-2x\right).2^{3-2x}}$ $(*)$

Hàm số $f\left(t\right)=t.2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên từ $(*)$ ta suy ra $2y\ge 3-2x \Leftrightarrow \boxed{2x+2y-3\ge 0}$ (1)

Ta thấy (1) bất phương trình bậc nhất có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d: 2x+2y-3=0$ (phần không chứa gốc tọa độ O), kể cả các điểm thuộc đường thẳng d.

Xét biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y \Leftrightarrow \boxed{\left(x+3\right)^2+\left(y+2\right)^2=P+13}$ (2)

Để P tồn tại thì ta phải có $P+13\ge 0 \Leftrightarrow P\ge -13$.

Trường hợp 1: Nếu $P=-13$ thì $x=-3;\ y=-2$ không thỏa (1). Do đó, trường hợp này không thể xảy ra.

Trường hợp 2: Với $P>-13$, ta thấy (2) là đường tròn (C) có tâm $I\left(-3;-2\right)$ và bán kính $R=\sqrt{P+13}$.

Để d và (C) có điểm chung thì $d\left(I;d\right)\le R \Leftrightarrow \frac{13}{2\sqrt{2}}\le \sqrt{P+13} \Leftrightarrow \boxed{P\ge \frac{65}{8}}$.

Vậy $\boxed{\min P = \frac{65}{8}}$

Câu 11. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow (2x-3).4^{-x} + y.4^{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \geq (3-2x)2^{3-2x}$ (1)

Xét TH: $3 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq \frac{21}{4}$ (2)

Xét TH: $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ với $t \geq 0$

$\Rightarrow f'(t) = 2^t + t.2^t.\ln 2 > 0$ với mọi $t \geq 0$

(1) $\Leftrightarrow f(2y) \geq f(3-2x) \Leftrightarrow 2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2} - x$. Khi đó:

$P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + 2x + 2(3-2x) = 2x^2 - 5x + \frac{33}{4} = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \geq \frac{41}{8}$ (3)

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của P là $\frac{41}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Câu 12. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **<u>D</u>.** $\frac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow (2x-3).4^{-x} + y.4^{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \geq (3-2x)2^{3-2x}$ (1)

Xét TH $3 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \geq \frac{33}{4}$ (2)

Xét TH $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ với $t \geq 0$

$\Rightarrow f'(t) = 2^t + t.2^t.\ln 2 > 0$ với mọi $t \geq 0$

(1) $\Leftrightarrow f(2y) \geq f(3-2x)$

$\Leftrightarrow 2y \geq 3-2x$

$\Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2}-x$

$\Rightarrow P = x^2+y^2+4x+2y \geq x^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+4x+(3-2x) = 2x^2-x+\frac{21}{4}$

$\Rightarrow P = 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{41}{8} \geq \frac{41}{8}$ (3)

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của P là $\frac{41}{8}$ khi $x=\frac{1}{4}, y=\frac{5}{4}$

Câu 13. **(Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** 9.

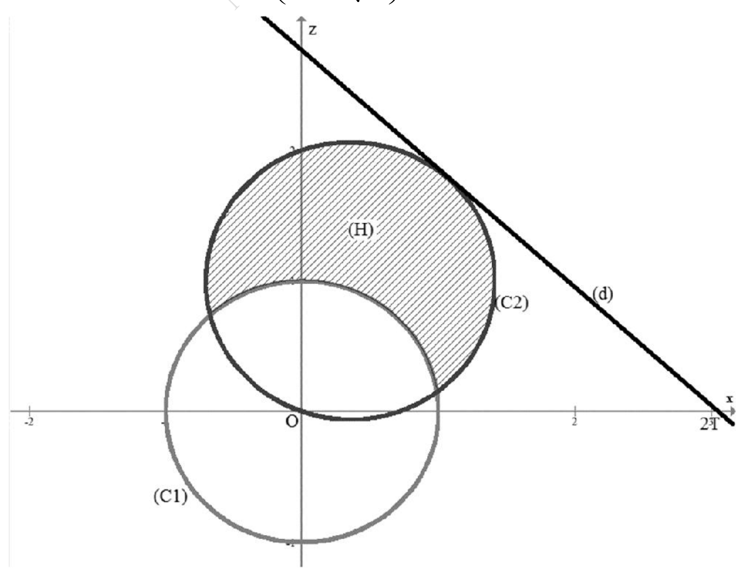
Lời giải

Trường hợp 1: $x^2+2y^2>1$. Đặt $\sqrt{2}y=z$. Suy ra $\Leftrightarrow x^2+z^2>1$ (1)

$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2 \Leftrightarrow 2x+\frac{z}{\sqrt{2}} \geq x^2+z^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{9}{8}$ (2)

Tập hợp các điểm $M(x;z)$ là miền (H) bao gồm miền ngoài của hình tròn $(C_1): x^2+z^2=1$ và miền trong của hình tròn $(C_2): (x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{8}$.



Hệ $\begin{cases} T = 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + \left(z - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \le \dfrac{9}{8} \\ x^2 + z^2 > 1 \end{cases}$ có nghiệm khi đường thẳng $d: 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} - T = 0$ có điểm chung với miền (H).

Để T đạt giá trị lớn nhất thì đường thẳng $d: 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} - T = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C_2)

$\Leftrightarrow d(I;d) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ với $I\left(1; \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ là tâm của đường tròn (C_2).

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2 + \frac{1}{4} - T\right|}{\sqrt{4 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|T - \frac{9}{4}\right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T = 0 \ (l) \\ T = \frac{9}{2} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $0 < x^2 + 2y^2 < 1$.

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1 \Leftrightarrow 2x + y \le x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow T = 2x + y < 1 \text{ (loại).}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ là $\max T = \dfrac{9}{2}$.

Câu 14. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x, y nguyên và $1 \le x, y \le 2020$ thỏa mãn $(xy + 2x + 4y + 8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right) \le (2x + 3y - xy - 6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

A. 2017. **B.** 4034. **C.** 2. **D.** 2017×2020.

Lời giải

Chọn B

+ Điều kiện $\begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \le 2020 \\ \dfrac{2x+1}{x-3} > 0, \dfrac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \le 2020 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}$.

BPT cho có dạng $(x-3)(y-2)\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3} + 1\right) + (x+4)(y+2)\log_3\left(\dfrac{y-2}{y+2} + 1\right) \le 0$ (*).

+ Xét $y = 1$ thì (*) thành $-(x-3)\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3} + 1\right) + 3(x+4)\log_3\dfrac{2}{3} \le 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x > 3$ vì $-(x-3) < 0$, $\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3} + 1\right) > \log_2(0+1) = 0$, $3(x+4) > 0$, $\log_3\dfrac{2}{3} < 0$.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x;y) = (x;1)$ với $4 \le x \le 2020, x \in \mathbb{N}$.

+ Xét $y = 2$ thì (*) thành $4(x+4)\log_3 1 \le 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \le x \le 2020, x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x;y)$ nữa.

+ Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên (*) không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hai số thực $a,b>0$ thỏa mãn $\log_2(a+1)+\log_2(b+1)\ge 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a+b$ là.

A. 12. **B.** 14. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $\log_2(a+1)+\log_2(b+1)\ge 6 \Leftrightarrow \log_2\left[(a+1)(b+1)\right]\ge 6 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)\ge 64$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a+1$ và $b+1$, ta được

$(a+1)+(b+1)\ge 2\sqrt{(a+1)(b+1)}\ge 2\sqrt{64}=16 \Leftrightarrow a+b+2\ge 16 \Leftrightarrow a+b\ge 14$

Dấu "=" xảy ra khi $a+1=b+1 \Leftrightarrow a=b$.

Vậy $\min(a+b)=14$ khi $a=b=7$.

Câu 16. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là

A. $\frac{9}{4}$ **B.** 9 **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{9}{8}$

Lời giải

- TH1: $x^2+2y^2>1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2$

$\Rightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2>1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-CopSky ta có

$\left(2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(x^2+2y^2\right)\ge (2x+y)^2$

$\Rightarrow x^2+2y^2\ge \frac{2(2x+y)^2}{9} \Rightarrow 2x+y\ge \frac{2(2x+y)^2}{9} \Leftrightarrow (2x+y)\left(2x+y-\frac{9}{2}\right)\le 0 \Rightarrow 2x+y\in\left(1;\frac{9}{2}\right]$

Giá trị lớn nhất của $T=2x+y=\frac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=2; y=\frac{1}{2}$

- TH2: $0<x^2+2y^2<1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow 2x+y\le x^2+2y^2<1<\frac{9}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T=2x+y=\frac{9}{2}$.

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S=\{-1;1\}$ **B.** $S=\{-5;-1;1;5\}$

C. $S=\{-5;5\}$ **D.** $S=\{-7;-5;-1;1;5;7\}$

Lời giải.

Ta có

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\ge 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2\ge x^2+y^2+2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2\le 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\le m^2$ là một hình tròn (C_1) tâm $I(2;2)$, bán kính $R_1=|m|$ với $m\ne 0$ hoặc là điểm $I(2;2)$ với $m=0$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$ là một đường tròn (C_2) tâm $J(-1;2)$, bán kính $R_2=2$.

TH1: Với $m=0$ ta có: $I(2;2)\notin(C_2)$ suy ra $m=0$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

TH2: Với $m\neq 0$.

Để hệ $\begin{cases}\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\geq 1\\ x^2+y^2+2x-4y+1=0\end{cases}$ tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thì hình tròn (C_1) và đường tròn (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau $\Leftrightarrow IJ=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3^2+0^2}=|m|+2 \Leftrightarrow |m|=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Câu 18. Tìm tham số m để tồn tại **duy nhất** cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2019}(x+y)\leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m}\geq 1$

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hệ bất phương trình: $\begin{cases}\log_{2019}(x+y)\leq 0 \quad (1)\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\geq 1 \quad (2)\end{cases}$

$(x;y)$ là nghiệm hệ bất phương trình thì $(y;x)$ cũng là nghiệm của hệ bất phương trình. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x=y$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 0<2x\leq 1 \Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{2}$.

Với $0<x\leq\frac{1}{2}$; (2) $\Leftrightarrow 2x+\sqrt{2x^2+m}\geq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+m}\geq 1-2x$

$\Leftrightarrow 2x^2+m\geq 1-4x+4x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+1\leq m$

Đặt $f(x)=2x^2-4x+1$

$f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ nên $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ \forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Do đó hệ có nghiệm **duy nhất** $\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Câu 19. Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\geq 1$. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

A. $m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$. **B.** $m=\sqrt{10}\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **D.** $m=\left(\sqrt{10}\pm\sqrt{2}\right)^2$.

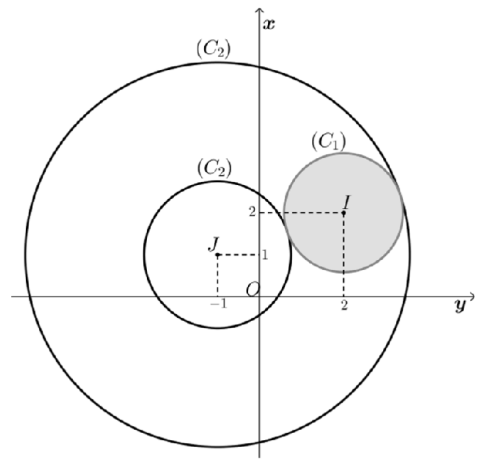
Lời giải

Chọn D

Với mọi $x,\ y\in\mathbb{R}$, ta luôn có $x^2+y^2+2\geq 2>1$ nên BPT $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-4\geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\leq 2$ (1).

BPT (1) mô tả hình tròn tâm $I(2;2)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Mặt khác, phương trình $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=m$ (2) nên để (2) có nghiệm thì $m\ge 0$.



- TH1: $m=0$. Khi đó, $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ không thỏa (1) nên loại $m=0$.
- TH2: $m>0$. Khi đó, (2) là phương trình đường tròn (C_2) tâm $J(-1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{m}$. Do đó, yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow$ Hệ BPT $\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2\le 2 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (C_2)$ tiếp xúc với đường tròn $(C_1):(x-2)^2+(y-2)^2=2$ cũng có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$. Vì $IJ=\sqrt{10}>\sqrt{2}=R_1$ nên (C_1) hoặc tiếp xúc ngoài, hoặc tiếp xúc trong với (C_2).

➢ TH2a: (C_1) tiếp xúc ngoài với $(C_2)\Leftrightarrow IJ=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{10}=\sqrt{2}+\sqrt{m}$

$\Leftrightarrow \sqrt{m}=\sqrt{10}-\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

➢ TH2b: (C_1) tiếp xúc trong với $(C_2)\Leftrightarrow IJ=R_2-R_1 \Leftrightarrow \sqrt{10}=\sqrt{m}-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{m}=\sqrt{2}+\sqrt{10} \Leftrightarrow m=\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$.

Vậy $m=\left(\sqrt{10}\pm\sqrt{2}\right)^2$.