Bài giải Bài tập Nhị thức Newton

Câu 5. (HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển Newton của biểu thức $(2+3x)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

Lời giải:

Mục tiêu mấu chốt là tìm được n.

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

Bài toán phụ:

Tính tổng

$$C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1} = 1$$
$$C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$$
....
$$C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$$

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$$

$$C_{2n+1}^0 a^{2n+1}.b^0 + C_{2n+1}^1 a^{2n}.b^1 + \ldots. + C_{2n+1}^{2n+1} a^0.b^{2n+1} = (a+b)^{2n+1}$$

Suy ra a = b = 1

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n.b^0 + C_n^1 a^{n-1}.b^1 + \ldots. + C_n^n a^0.b^n}$$

Dựa vào bài toán phụ vừa làm ta liên hệ với bài toán đang giải: Tìm n biết
$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

 Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau

Ta có

$$C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1} = 1$$
$$C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$$
.....
$$C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$$

Cộng vế với vế ta có

$$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{2n-1}+C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}$$
$$\Rightarrow C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n+C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{2n-1}+C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}$$
$$=2\left(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n\right)$$

Theo kết quả bài toán phụ

Ta có: $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+\ldots+C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}=2^{2n+1}$

Và $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+\ldots+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$

Kết hợp lại ta có

$$2^{2n+1}=2\left(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+\ldots+C_{2n+1}^n\right)$$
$$\Leftrightarrow 2^{2n+1}=2\left(1+2^{20}-1\right)=2^{21}$$
$$\Leftrightarrow n=10$$

Phần sau học sinh tự giải

Câu 1. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho khai triển nhị thức Newton $(x^2-x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$, $(\text{n}\in N^*)$. Tìm hệ số a_{10}.Biết rằng $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=21$

Học sinh tự giải

(HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho nhị thức $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ trong đó tổng 3 hệ số đầu tiên của khai triển của nhị thức đó là 36. Khi đó tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức.

Câu 8: (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho $T(x)=\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^{20}+\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{22}\ (x\neq 0)$. Sau khi khai triển và rút gọn $T(x)$ có bao nhiêu số hạng?

$\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^{20}$ có số hạng tổng quát là $C_{20}^k(x^3)^{20-k}.\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=C_{20}^k.x^{60-4k}$ có 21 số hạng gồm các x có số mũ là

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
60-4k	60	56	52	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{22}$ có số hạng tổng quát là $C_{22}^m(x)^{22-m}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)^m=C_{22}^k.(-1)^m x^{22-3m}$ có 23 số hạng có các số mũ của x thuộc tập hợp {22;19;16;13;10;7;4;1;-2;-5;-8;-11;-14;-17;-20;-23;26;-29;-32;-35;-38;-41;-44}

Như vậy các số mũ của x trùng nhau là: 16; 4;-8;-20;-32;-44 (6 số mũ trùng nhau)

Như vậy sau khi khai triển vào rút gọn T(x) sẽ có 21 + 23 – 6 = 38 số hạng.

Câu 10: (HSG11 THuận Thành 2018-2019) Tính tổng
$S=2\cdot 1C_n^2+3\cdot 2C_n^3+4\cdot 3C_n^4+\cdots+n(n-1)C_n^n$.

$$k(k-1)C_n^k=k(k-1).\frac{n!}{(n-k)!k!}=k(k-1).\frac{n!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}=\frac{n(n-1).(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}=\frac{n(n-1).(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!}$$
$$=n(n-1).C_{n-2}^{k-2}$$

Áp dụng:

$2\cdot 1C_n^2=n(n-1).C_{n-2}^0$ (k=2)

$2\cdot 3C_n^3=n(n-1).C_{n-2}^1$ (k=3)

$4\cdot 3C_n^4=n(n-1).C_{n-2}^2$ (k=4)

.....

$n(n-1)C_n^n=n(n-1).C_{n-2}^{n-2}$ (k=n)

Cộng vế với vế ta được

S = $n(n-1).\left(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+C_{n-2}^2+...+C_{n-2}^{n-2}\right)=n(n-1).(1+1)^{n-2}=n(n-1).2^{n-2}$

Câu 2. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Cho k là số tự nhiên thỏa mãn: $5\le k\le 2014$.

Chứng minh rằng:

$$C_5^0.C_{2014}^k+C_5^1.C_{2014}^{k-1}+...+C_5^5.C_{2014}^{k-5}=C_{2019}^k$$

$\left(C_5^0+C_5^1+C_5^2+...+C_5^5\right)$

Ta có: $(x+1)^5.(x+1)^{2014}=(x+1)^{2019}$

Đặt $M=(x+1)^5=C_5^0+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5$

$N=(x+1)^{2014}=C_{2014}^{0}+C_{2014}^{1}x+C_{2014}^{2}x^{2}+\ldots+C_{2014}^{k}x^{k}+\ldots+C_{2014}^{2014}x^{2014}$

$P=(x+1)^{2019}=C_{2019}^{0}+C_{2019}^{1}x+C_{2019}^{2}x^{2}+\ldots+C_{2019}^{k}x^{k}+\ldots+C_{2019}^{2019}x^{2019}$

Vì $P=M.N$ nên số hạng chứa x^k trong P có dạng:

$$\begin{aligned}C_{2019}^{k}x^{k}&=C_{5}^{0}.C_{2014}^{k}x^{k}+C_{5}^{1}\,\mathrm{x}\,.C_{2014}^{k-1}x^{k-1}+C_{5}^{2}\,\mathrm{x}^{2}\,.C_{2014}^{k-2}x^{k-2}+\ldots C_{5}^{5}\,\mathrm{x}^{5}\,.C_{2014}^{k-5}x^{k-5}\\&=C_{5}^{0}.C_{2014}^{k}x^{k}+C_{5}^{1}.C_{2014}^{k-1}x^{k}+C_{5}^{2}.C_{2014}^{k-2}x^{k}+\ldots+C_{5}^{5}.C_{2014}^{k-5}x^{k}\ (*)\end{aligned}$$

Thay $x=1$ vào (*) ta có: $C_{5}^{0}.C_{2014}^{k}+C_{5}^{1}.C_{2014}^{k-1}+\ldots+C_{5}^{5}.C_{2014}^{k-5}=C_{2019}^{k}$

Câu 13. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(1+x+x^2\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+\ldots+C_{2n}^{2n}=512$.

Giải:

*) Ta có $0=\left(1-1\right)^{2n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}-\ldots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$.

Suy ra: $C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+\ldots+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}$.

Mà $2^{2n}=\left(1+1\right)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}+\ldots+C_{2n}^{2n}$

$=\left(C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+\ldots+C_{2n}^{2n}\right)+\left(C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}\right)$

$=2\left(C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+\ldots+C_{2n}^{2n}\right)$

$=2.512=2^{10}$ (do $C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+\ldots+C_{2n}^{2n}=512$).

$\Rightarrow 2n=10\Leftrightarrow n=5$

*) Xét khai triển

$\left(1+x+x^2\right)^5=\left[1+x\left(1+x\right)\right]^5=\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^kx^k\left(1+x\right)^k$

$=\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^kx^k\left(\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^ix^i\right)=\sum\limits_{k=0}^{5}\left(\sum\limits_{i=0}^{k}C_5^kC_k^ix^{k+i}\right)$ (với $i,k\in\mathbb{N},0\le i\le k\le 5\ \left(*\right)$).

*) Vì số hạng chứa x^5 nên $k+i=5$. Kết hợp với điều kiện $\left(*\right)$ ta được các trường hợp sau:

$\begin{cases}i=0\\k=5\end{cases};\begin{cases}i=1\\k=4\end{cases};\begin{cases}i=2\\k=3\end{cases}.$

*) Hệ số cần tìm là: $C_5^5.C_5^0+C_4^1.C_5^4+C_3^2.C_5^3=51$.

Câu 14. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho n là một số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3}=26n$?.

Lời giải

$$\left(x^2+1\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^{n-k}$$

$$\left(x+2\right)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^{n-m}.2^m$$

$$\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^{n-k}\right).\left(\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^{n-m}.2^m\right)=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{2n-2k}\right).\left(\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^{n-m}.2^m\right)$$

$\left(m,n,k\in\mathbb{N};\ 0\le m,k\le n\right)$

Số mũ của x trong khai triển có dạng: 2n – 2k + n – m = 3n -2k –m =3n-3 => 2k + m =3

k	0 1 ≥2
m	3 1 không có

$\Rightarrow$ Hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} là $a_{3n-3}=C_n^0.C_n^3.2^3+C_n^1.C_n^1.2=26n$

Theo giả thiết $a_{3n-3}=26n$ nên $C_n^0.C_n^3.2^3+C_n^1.C_n^1.2=26n\Leftrightarrow\dfrac{n!}{3!(n-3)!}.8+\dfrac{n!}{(n-1)!}.\dfrac{n!}{(n-1)!}.2=26n$

$\Leftrightarrow\dfrac{4n(n-1)(n-2)}{3}+2n^2=26n\Leftrightarrow 2n^2-3n-35=0\Leftrightarrow n=5$ (Do $n\in\mathbb{N}$).

Vậy $n=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. **(HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019)** Cho khai triển

$\left(3x^2-2\right)^3\left(2x-3\right)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{14}x^{14}$. Tìm a_{11}

Dễ hơn câu trên. Học sinh giải tương tự

Câu 16. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho khai triển

$(1+x+x^2)^{2019}=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_{4038}x^{4038}$.

Tính $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{4038}$.

Lời giải

Câu này rất dễ: Thay x = 1 vào 2 vế ta được

S = 3^{2019} XONG

Câu 17. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho khai triển $(3x+2)^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x^{15}$. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển.

Số hạng tổng quát T_{k+1} trong khai triển đã cho là: $C_{15}^k 2^{15-k}(3x)^k = C_{15}^k 2^{15-k}3^k x^k$. $(k \in \mathbb{N}; 0 \le k \le 15)$

Hệ số của số hạng tổng quát T_{k+1} là $a_k = C_{15}^k 2^{15-k}3^k$.

Dùng Table liệt kê hết rồi kết luận vẫn đúng

Nhưng cô hướng dẫn để làm các bài cho số mũ lớn hơn

$$\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{15}^k 2^{15-k}3^k \ge C_{15}^{k+1}2^{14-k}3^{k+1} \\ C_{15}^k 2^{15-k}3^k \ge C_{15}^{k-1}2^{16-k}3^{k-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{15!}{k!(15-k)!}2^{15-k}3^k \ge \dfrac{15!}{(k+1)!(14-k)!}2^{14-k}3^{k+1} \\ \dfrac{15!}{k!(15-k)!}2^{15-k}3^k \ge \dfrac{15!}{(k-1)!(16-k)!}2^{16-k}3^{k-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{15-k} \ge \dfrac{3}{k+1} \\ \dfrac{3}{k} \ge \dfrac{2}{16-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5k \ge 43 \\ 5k \le 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge \dfrac{43}{5} \\ k \le \dfrac{48}{5} \end{cases}$$

Mà $k \in \mathbb{N}$ nên suy ra $k = 9$. Suy ra hệ số lớn nhất là $a_9 = C_{15}^9 2^6 3^9$.

- Với $k = 0$: Ta có $a_0 = C_{15}^0 2^{15} 3^0$.

- Với $k = 15$: Ta có $a_{15} = C_{15}^{15} 2^0 3^{15}$.

So sánh các hệ số a_0, a_9 và a_{15} ta thấy a_9 lớn nhất. Vậy a_9 là hệ số lớn nhất trong khai triển đã cho.

Câu 19. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = (n-304).2^n$

Tương tự câu 10 nhưng dễ hơn.