0D3-1.1-PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG BẬC

1. Nội dung phương pháp:

Một biểu thức $f(u;v)$ theo hai biến u,v gọi là đồng bậc $\alpha > 0$ (đẳng cấp bậc α) nếu tổng số mũ của u và v trong mỗi số hạng của biểu thức luôn bằng α. Khi đó phương trình $f(u;v)=0$ được gọi là phương trình đồng bậc α. Trong giới hạn của tài liệu này ta chủ yếu quan tâm đến các phương trình đồng bậc 2 và 3 (gọi là phương trình đẳng cấp bậc hai và bậc 3).

$$a.u^2 + b.uv + c.v^2 = 0$$

$$a.u^3 + b.u^2v + c.uv^2 + d.v^3 = 0.$$

a). Xét phương trình $a.u^2 + b.uv + c.v^2 = 0$

Nếu $v=0$ thì phương trình trở thành $a.u^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0\ (a \neq 0)$.

Nếu $v \neq 0,$ chia hai vế của phương trình cho v^2 ta được:

$$a.\left(\frac{u}{v}\right)^2 + b.\frac{u}{v} + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai ẩn là $\frac{u}{v}$, bạn đọc dễ dàng giải được phương trình này để tìm mối liên hệ giữa u và v, từ đó giải được nghiệm x.

b). Xét phương trình $a.u^3 + b.u^2v + c.uv^2 + d.v^3 = 0.$

Nếu $v=0$ thì phương trình trở thành $a.u^3 = 0 \Leftrightarrow u = 0\ (a \neq 0)$.

Nếu $v \neq 0,$ chia hai vế của phương trình cho v^3 ta được:

$$a.\left(\frac{u}{v}\right)^3 + b.\left(\frac{u}{v}\right)^2 + c.\frac{u}{v} + d = 0.$$

Đây là phương trình bậc ba ẩn là $\frac{u}{v}$, bạn đọc dễ dàng giải được phương trình này để tìm mối liên hệ giữa u và v, từ đó giải được nghiệm x; hoặc dùng công thức tổng quát ở trên.

c). Đối với hệ phương trình: một hệ phương trình giải được bằng phương pháp đồng bậc thông thường một phương trình của hệ có dạng đồng bậc; nếu không thì tổ hợp hai phương trình của hệ ta được một phương trình đồng bậc bằng cách cộng vế theo vế (có thể nhân thêm hệ số để khử các hằng số tự do) hoặc nhân (chia) vế theo vế các phương trình trong hệ, hoặc dùng phương pháp thế,.

d). Chú ý: (i) Nếu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ là các nghiệm của phương trình

$$a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_k t^k + \cdots + a_1 t + a_0 = 0\ (a_n \neq 0)$$

thì $a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1}v + \cdots + a_k u^{n-k}v^k + \cdots + a_1 uv^{n-1} + a_0 v^n = a(u - t_1 v)(u - t_2 v)\cdots(u - t_n v)$.

(ii). Giả sử $f(u;v)$ là một biểu thức đồng bậc α. Đặt $v = ku$ thì $f(u;v) = u^{\alpha} f(1;k)$. Cách đặt $v = ku$ khá hiệu quả trong trường hợp $f(u;v)$ là một biểu thức chứa căn hoặc có dạng phân thức (có thể với số bậc cao).

2. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. **(Đề nghị OLP 30/4/2007).** Giải phương trình: $2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1}$.

Nhận xét: Với $x \geq -1$ ta có $\sqrt{x^3+1} = \sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-x+1}$. Do đó nếu xem $u = \sqrt{x+1}$, $v = \sqrt{x^2-x+1}$ thì $\sqrt{x^3+1} = u.v$. Ta sẽ cố gắn đưa phương trình đã cho về dạng đồng bậc hai, muốn vậy ta cần có phân tích $x^2+2 = a.u^2 + b.v^2 = a(x+1) + b(x^2-x+1)$. Vậy cuối cùng ta cần tìm các hằng số a, b thỏa mãn phân tích trên, việc này dễ dàng làm được bằng kĩ thuật cân bằng hệ số. Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$x^2+2 = a.u^2 + b.v^2 = a(x+1) + b(x^2-x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2 = bx^2 + (a-b)x + a + b \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a - b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$2(x+1) - 5\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-x+1} + 2(x^2-x+1) = 0 \ (*)$$

Vì $x^2-x+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$2.\frac{x+1}{x^2-x+1} - 5.\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} = 2\sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+1 = 4(x+1) \\ x+1 = 4(x^2-x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-3 = 0 \\ 4x^2-5x+3 = 0 \ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{37}}{2} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right..$$

Các nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ thỏa điều kiện $x \geq -1$ nên tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{\dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}\right\}$.

Nhận xét. Ta có quyền chia hai vế phương trình cho $x+1$, tuy nhiên phải xét $x+1=0$ trước. Ở đây ta "khôn ngoan" khi lựa chọn chia hai vế cho x^2-x+1 vì $x^2-x+1 \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên ta không cần xét trường hợp khi $x^2-x+1=0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{7x^2+25x+19} = 7\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2-2x-35}$.

Nhận xét. Phương tình có dạng $f(u;v;w) = 0$ với

$$u = \sqrt{7x^2+25x+19}, v = \sqrt{x+2},\ w = \sqrt{x^2-2x-35}.$$

Cái khó ở đây một trong ba biến u, v, w không thể biểu diễn thông qua hai biến còn lại! Phải chẳng phương trình này không có dạng đồng bậc? Thoạt nhìn thì ta không nghỉ đây là dạng đồng bậc, vấn đề của chúng ta là cố gắn đưa phương trình đã cho về dạng đồng bậc, chứ không phải phương trình nào ngay từ đầu đã nhìn thấy ngay dạng đồng bậc! Đối với phương trình này ta cần phải làm gì? Đương nhiên là phải biến đổi thêm? Nhưng biến đổi như thế nào? “Con đường” hợp lí nhất là “bình phương” hai vế!. Thật vậy, “bình phương” hai vế phương trình ta có

$$\begin{aligned}&7x^2+25x+19=x^2+47x+63+14.\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}\\ &\Leftrightarrow 6x^2-22x-44-14\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}=0\\ &\Leftrightarrow 3x^2-11x-22-7\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}=0.\end{aligned}$$

Đến đây bằng kĩ thuật “cân bằng hệ số”, ta sẽ phân tích

$$3x^2-11x-22=a(x+2)+b(x^2-2x-35)=bx^2+(a-2b)x+2a-35b$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ a-2b=-11\\ 2a-35b=-22\end{cases}.$$

Hệ này vô nghiệm! Phải chăng điều chúng ta cố gắn làm đã “thất bại”! Câu trả lời là chưa hẳn, “tinh ý” một chút ta thấy $x^2-2x-35=(x+5)(x-7)$ nên đến đây ta có hai lựa chọn là

$$\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}=\sqrt{x+5}.\sqrt{x^2-5x-14} \text{ hoặc}$$

$$\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}=\sqrt{x-7}.\sqrt{x^2+7x+10}.$$

Ta thử chọn $\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}=\sqrt{x+5}.\sqrt{x^2-5x-14}$, khi đó ta có phương trình

$$3x^2-11x-22-7\sqrt{x^2-5x-14}.\sqrt{x+5}=0.$$

Đến đây bằng kĩ thuật “cân bằng hệ số”, ta sẽ phân tích

$$3x^2-11x-22=a(x+5)+b(x^2-5x-14)=bx^2+(a-5b)x+5a-14b$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ a-5b=-11\\ 5a-14b=-22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x+2\ge 0\\ x^2-2x-35\ge 0\\ 7x^2+25x+49\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 7$. Bình phương hai vế phương trình ta được

$$\begin{aligned}&7x^2+25x+19=x^2+47x+63+14.\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}\\ &\Leftrightarrow 6x^2-22x-44-14\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}=0\\ &\Leftrightarrow 3x^2-11x-22-7\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x-35}=0\\ &\Leftrightarrow 3x^2-11x-22-7\sqrt{x^2-5x-14}.\sqrt{x+5}=0\\ &\Leftrightarrow 4(x+5)+3(x^2-5x-14)-7\sqrt{x+5}.\sqrt{x^2-5x-14}=0\\ &\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2-5x-14}\right)\left(4\sqrt{x+5}-3\sqrt{x^2-5x-14}\right)=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-5x-14}=\sqrt{x+5}\\ 3\sqrt{x^2-5x-14}=4\sqrt{x+5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x-19=0\\ 9x^2-61x-206=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pm 2\sqrt{7}}{2}\\ x=\dfrac{61\pm\sqrt{11137}}{18}\end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{3+2\sqrt{7}}{2};\ x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$.

Nhận xét. Ta thấy các về của từng phương trình trong hệ này có dạng:

$$\begin{cases} "bậc\,3" = "bậc\,1" \\ "bậc\,2" = "bậc\,0" \end{cases}.$$

Đến đây nếu ta nhân vế theo về thù đưa phương trình về dạng $"bậc\ 5" = "bậc\,1"$ không phải là dạng đồng bậc. Tuy nhiên nếu ta "đảo vế" phương trình thứ hai thì rồi nhân vế theo vế ta được phương trình đồng bậc ba là

$$4\left(x^3 - y^3\right) = \left(4x + 2y\right)\left(x^2 + 3y^2\right).$$

Lời giải.

Dễ thấy $x = y = 0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình, do đó $x^2 + 3y^2 \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ 4 = x^2 + 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\left(x^3 - y^3\right) = \left(2x + y\right)\left(x^2 + 3y^2\right) \\ 4 = x^2 + 3y^2\ (*) \end{cases}.$$

Ta có

$$2x^3 - 2y^3 = 2x^3 + 6xy^2 + x^2y + 3y^3 \Leftrightarrow 5y^3 + 6y^2x + yx^2 = 0 \Leftrightarrow y\left(5y^2 + 6xy + x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y\left(y + x\right)\left(5y + x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -x \\ x = -5y \end{array}\right.$$

(i) Với $y = 0$ thay vào phương trình (*) ta được: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

(ii) Với $y = -x$ thay vào phương trình (*) ta được: $4x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

(iii) Với $x = -5y$ thay vào phương trình (*) ta được: $28y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $\left\{\left(\pm 2; 0\right); \left(\pm 1; \mp 1\right); \left(\mp\dfrac{5\sqrt{7}}{7}; \pm\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)\right\}$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + y\sqrt{y+1} - 5\sqrt{y+1} = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0, y \geq -1$. Đặt $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y+1}$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 3 \\ 2u^3 + 3u + \left(v^2 - 1\right)v - 5v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = u^2 + 2v^2 \\ 2u^3 + v^3 = 6v - 3u \end{cases}.$$

Nhân vế theo vế ta được

$$3\left(2u^3+v^3\right)=\left(u^2+2v^2\right)\left(6v-3u\right)\Leftrightarrow 2u^3+v^3=-u^3+4v^3+2u^2v-2uv^2$$
$$\Leftrightarrow 3u^3-3v^3-2u^2v+2uv^2=0\Leftrightarrow \left(u-v\right)\left(3u^2+uv+3v^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(u-v\right)\left[3\left(u+\frac{v}{6}\right)^2+\frac{35v^2}{12}\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\u=v=0\end{array}\right.\Leftrightarrow u=v.$$

Với $u=v\Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow y=x-1$ thay vào phương trình đầu tiên của (*) ta được:

$$x+2\left(x-1\right)=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;0\right)$.

3. CÁC BÀI TẬP

Bài 1: Giải phương trình: $3\sqrt{x^3+8}=2x^2-6x+4$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{3x+9}-\sqrt{x}=\sqrt{6+x-x^2}$.

Bài 3: Giải phương trình $\sqrt{30}(3x^2-2x-2)=6\sqrt{x^3+3x^2+4x+2}$.

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^2-x^2=1\\2x^3-y^3=2y-x\end{cases}$.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{y}\\\sqrt{x}+\sqrt{5y}=3\end{cases}$.

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\\dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7}\end{cases}$.

Bài 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4\\\sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1\end{cases}$.

Bài 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x^2+5y^2)^2=2\sqrt{xy}(6-x^2-5y^2)+36\\\sqrt{5y^4-x^4}=6x^2+2xy-6y^2\end{cases}$.

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2(x^3+y^3)}{xy}-\dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{xy}}+5(x+y)=8\sqrt{xy} & (1)\\\sqrt{5x-1}+\sqrt{2-y}=\dfrac{5x+y}{2} & (2)\end{cases}$.

Bài 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3y-y^4=7 & \left(1\right)\\x^2y+2xy^2+y^3=9 & \left(2\right)\end{cases}$

Bài 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x-2y+\sqrt{2x+y+2xy+1}=1\\\sqrt[3]{3y+1}=8x^3-2y-1\end{cases}$ với $x>0$.

Bài 12: Giải hệ phương trình **(HCM-2013):** $\begin{cases}xy-x-y=1\\4x^3-12x^2+9x=-y^3+6y+7\end{cases}$.

Bài 13: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$.. b) $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3\ y^2+1 \end{cases}$.. c) $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 \end{cases}$.

Bài 14: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^3-6x^2y+9xy^2-4y^3=0 \\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x^4+y^4=1 \\ x^6+y^6=1 \end{cases}$. c) $\begin{cases} x^5+y^5=1 \\ x^9+y^9=x^4+y^4 \end{cases}$.

Bài 15: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x-y\ \ x^2+y^2\ =13 \\ x+y\ \ x^2-y^2\ =25 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3(x-y) \\ x^2+xy+y^2=7(x-y)^2 \end{cases}$.

Bài 16: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2+2y^2+2x+8y+6=0 \\ x^2+xy+y+4x+1=0 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x^2\ 1+y^2\ =2 \\ x^2y^2+xy=3x^2-1 \end{cases}$.