Dạng 1. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x = x0

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0)=0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\left[\begin{array}{l} y''>0 \rightarrow x_0=CT \\ y''<0 \rightarrow x_0=CD \end{array}\right.$

Dạng 1.1 Hàm số bậc 3

Câu 1. **(Mã 110 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=-1$ **B.** $m=-7$ **C.** $m=5$ **D.** $m=1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$; $y''=2x-2m$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3)=0 \\ y''(3)<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6m+m^2-4=0 \\ 6-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1(L) \\ m=5(TM) \end{array}\right. \\ m>3 \end{cases}$.

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. không tồn tại m. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m\in\{1;2\}$.

Lời giải

Để $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4m+m=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Thử lại với $m=1$, ta có $y=x^3-2x^2+x+1$; $y'=3x^2-4x+1$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m>4$. **C.** $0\le m<4$. **D.** $0<m\le 4$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$; $y'' = 6x - 6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 4. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1, m = 5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4,\ \ y'' = 2x - 2m.$

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ 3 < m \end{cases} \Leftrightarrow m = 5..$$

Câu 5. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$

$y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên ta có $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Thử lại với $m = 2$ ta có $y'' = 2x - 4 \Rightarrow y''(1) = -2 < 0$

Do đó Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Câu 6. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1, m = 5$. **<u>B</u>.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4,\ \ y'' = 2x - 2m.$

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ 3 < m \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 7. **(THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2 - 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m - 1)x^2 + m^2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $\{5;1\}$. **<u>B</u>.** $\{5\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 2(3m-1)x + m^2 \Rightarrow y'' = 6x + 6m - 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6m - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right. \\ m > \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 8. **(THPT Kinh Môn - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

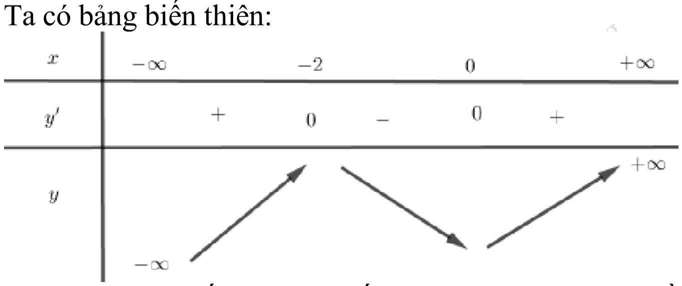
Giả sử $x = -2$ là điểm cực đại của hàm số đã cho, khi đó

$y'(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 2m(-2) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Với $m = -1$, ta có $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$.

$y' = x^2 + 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 9. **(Chuyên ĐHSPHN - Lần 3 - 2019)** Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là.

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** R.

Lời giải

Chọn C.

$y' = 3x^2 - 6mx + m + 2$

$y'' = 6x - 6m$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m + 5 = 0 \\ 6 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < 1 \end{cases}$ không có giá trị của m.

Dạng 1.2 Hàm số đa thức bậc cao, hàm căn thức …

Câu 10. **(Chuyên QH Huế - Lần 2 - 2019)** Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x = 1$.

A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -6$. **D.** $m = 6$.

Lời giải

Chọn A

$y' = f'(x) = 1 + \dfrac{m}{2\sqrt{x}}, (x > 0)$

Để hàm số đạt cực trị tại $x = 1$ thì $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Thử lại với $m = -2$, hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$ có cực tiểu tại $x = 1$, do đó $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 11. **(Trường THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **<u>D</u>.** $m = 2$.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2 - 2)x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + 2(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Với $m = 2$, hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 2$ thì hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 12. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - \sin x)(x - m - 3)\left(x - \sqrt{9 - m^2}\right)^3$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 6 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Điều kiện $9 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$

TH 1: $0 \leq m < 3$ ta có BTT

x	$-\infty$		0		$\sqrt{9-m^2}$		$m+3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

TH 2: $-3 \leq m < 0$ ta có BTT

x	$-\infty$		0		$m+3$		$\sqrt{9-m^2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

TH 2: $m = 3$ ta có BTT

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘				↗	

Từ đó suy ra $-3 \leq m < 3 \Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 13. **(Mã 101 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-2)x^4-4(m^2-4)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-2)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm

+ TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=2$ hoặc $m=-2$

Với $m=2$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=2$ thỏa ycbt.

Với $m=-2$ thì $g(x)=8x^4-20x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-2$ không thỏa ycbt.

+ TH2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0)>0$ $\Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 14. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^5}{5}-\frac{mx^4}{4}+2$ đạt cực đại tại $x=0$ là:

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m<0$.

C. Không tồn tại m. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{mx^4}{4}+2$.

Ta có: $f'(x)=x^4-mx^3$.

Khi $m=0$ thì $f'(x)=x^4\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Khi $m\neq 0$, xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4-mx^3=0 \Leftrightarrow x^3(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \end{array}\right.$.

+ Trường hợp $m > 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

+ Trường hợp $m < 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(m)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Như vậy, để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì $m > 0$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m + 5$ đạt cực đại tại $x = 0$?

A. 101. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta xét: $m = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = 2x^3$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m = 1$ (loại).

Ta xét: $m \neq 1 \Rightarrow y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: xét $m > 1$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		$-\frac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m > 1$ (loại).

Trường hợp 2: $-2 < m < 1$, suy ra $x_2 > x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		0		$-\dfrac{m+2}{m-1}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $-2<m<1$ (loại).

Trường hợp 3: $m<-2$, suy ra $x_2<x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y'=(m-1)x^4+(m+2)x^3$

x	$-\infty$		$-\dfrac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực đại. Suy ra $m<-2$ (nhận).

Vậy, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là $m<-2$ mà m thuộc khoảng $(-2019;2019)$.

Suy ra, số giá trị nguyên của m là 2016.

Câu 16. **(Mã 104 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 6 **B.** Vô số **C.** 4 **D.** 7

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-3)x^4-4(m^2-9)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)=0 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-3)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=3$ thỏa ycbt.

Với $m=-3$ thì $g(x)=8x^4-30x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0)>0$ $\Leftrightarrow m^2-9<0 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 17. **(Mã 103 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-4)x^5-(m^2-16)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 8 **B.** Vô số **C.** 7 **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=8x^7+5(m-5)x^4-4(m^2-16)x^3=x^3\left[8x^4+5(m-4)x-4(m^2-16)\right]=x^3.g(x)$

Với $g(x)=8x^4+5(m-5)x-4(m^2-16)$.

● Trường hợp 1: $g(0)=0\Leftrightarrow m=\pm4$.

Với $m=4\Rightarrow y'=8x^7$. Suy ra $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m=-4\Rightarrow y'=8x^4(x^3-5)$. Suy ra $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số.

● Trường hợp 2: $g(0)\neq0\Leftrightarrow m\neq\pm4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì qua giá trị $x=0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0)>0\Leftrightarrow-4<m<4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4<m\le4$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^{12}+(m-5)x^7+(m^2-25)x^6+1$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 8 **B.** 9 **C.** Vô số **D.** 10

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=12x^{11}+7(m-5)x^6+6(m^2-25)x^5$

TH1: $m=5\Rightarrow y'=12x^{11}$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow x=0$ là nghiệm bội lẻ, đồng thời dấu của y' đổi từ âm sang dương, nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số,do đó không thỏa mãn, $m=5$ loại.

TH2: $m=-5\Rightarrow y'=x^6(12x^5-70)=0\Rightarrow x=0$ là nghiệm bội chẵn, do đó y' không đổi dấu khi đi qua $x=0$, $m=-5$ loại.

TH3: $m\neq\pm5\Rightarrow y'=x^5\left[12x^6+7(m-5)x+6(m^2-25)\right]=x^5.g(x)$

Với $g(x)=12x^6+7(m-5)x+6(m^2-25)$, ta thấy $x=0$ không là nghiệm của $g(x)$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x=0$ thì y' phải đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$, xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}g(x)<0\\ \lim\limits_{x\to0^+}g(x)<0\end{cases}\Leftrightarrow 6(m^2-25)<0\Leftrightarrow-5<m<5$

Vì m nguyên nên $m=\{-4;-3;...;3;4\}$, vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu49. Cho hàm số $y=x^6+(4+m)x^5+(16-m^2)x^4+2$. Gọi S là tập hợp các gia trị m nguyên dương để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=6x^5+5(4+m)x^4+4(16-m^2)x^3=x^3\left(6x^2+5(4+m)x+16-m^2\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=0\\ 6x^2+5(4+m)x+16-m^2=0\,(*)\end{cases}.$$

$(*)$ có $\Delta=(4+m)(49m+4)$.

Với mọi m nguyên dương thì $\begin{cases}\Delta>0\\ \dfrac{-5(4+m)}{6}<0\end{cases}$ do đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $16-m^2>0\Leftrightarrow 0<m<4$: $(*)$ có hai nghiệm âm phân biệt $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Lúc này $x=0$ là điểm cực tiểu.

Trường hợp 2: $16-m^2<0\Leftrightarrow m>4$: $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $x_1,x_2\,(x_1<0<x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đây suy ra $x=0$ là điểm cực đại (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $(*)$ có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm, lúc này $x=0$ là nghiệm bội 4 của đạo hàm nên không phải là điểm cực trị.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3. Tổng các phần tử của S bằng 6.

Câu 19. **(Mã 102 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-1)x^5-(m^2-1)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=8x^7+5(m-1)x^4-4(m^2-1)x^3+1\ =x^3\left(8x^4+5(m-1)x-4(m^2-1)\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 8x^4+5(m-1)x-4(m^2-1)=0\qquad(1)\end{array}\right.$$

*Nếu $m=1$ thì $y'=8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

*Nếu $m=-1$ thì $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 8x^4-10x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\end{array}\right.$, nhưng $x=0$ là nghiệm bội chẵn nên không phải cực trị.

*Nếu $m\neq\pm1$: khi đó $x=0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x)=8x^4+5(m-1)x-4(m^2-1)$. Để $x=0$ là điểm cực tiểu thì $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-4(m^2-1)>0\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow-1<m<1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m=0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ là $m=0$ và $m=1$.

Dạng 2. Tìm m để hàm số có n cực trị

- *Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có n nghiệm phân biệt.*
- *Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$:*

$+$ *Hàm số có hai điểm cực trị khi* $\begin{cases}a\neq0\\ b^2-3ac>0\end{cases}$.

$+$ *Hàm số không có cực trị khi $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.*

- *Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$.*

$+$ *Hàm số có ba cực trị khi* $ab < 0$. $+$ *Hàm số có* 1 *cực trị khi* $ab \geq 0$.

Câu 1. Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab \leq 0$. **B.** $ab < 0$. **C.** $ab > 0$. **D.** $ab \geq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = x^3 + 3(a+b)x^2 + 3(a^2+b^2)x + a^3 + b^3$.

$y' = 3x^2 + 6(a+b)x + 3(a^2+b^2)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 18ab > 0 \Leftrightarrow ab > 0$.

Câu 2. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị

A. $m \in (-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$. **B.** $m \in (-6; 0)$. **C.** $m \in [-6; 0)$. **D.** $m \in [-6; 0]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3mx^2 - 4mx + (m-2)$.

$+$ Nếu $m = 0$.

$\Rightarrow y' = -2 < 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. Nên hàm số không có cực trị.

Do đó $m = 0$ (chọn) (1).

$+$ Nếu $m \neq 0$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'$ không đổi dấu

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3m(m-2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m \leq 0 \Rightarrow -6 \leq m < 0$ (do $m \neq 0$) (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được $-6 \leq m \leq 0$.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại?

A. $1 < m \leq 3$ **B.** $m \leq 1$ **C.** $m \geq 1$ **D.** $1 \leq m \leq 3$

Lời giải

Chọn D

TH1: Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 4x^2 + 1$. Suy ra hàm số không có cực đại.

TH2: Nếu $m > 1$.

Để hàm số không có cực đại thì $-2(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$. Suy ra $1 < m \leq 3$.

Vậy $1 \leq m \leq 3$.

Câu 4. **(Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019)** Để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-3)x^2 + m + 1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m \geq 3$. **B.** $m > 3$. **C.** $m < 3$. **D.** $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

$y' = -4x^3 - 2(m-3)x = -2x(2x^2 + m - 3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{3-m}{2} \end{array}\right..$$

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương với $a = -1 < 0$ nên hàm số có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \dfrac{3-m}{2} \leq 0$ $\Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 5. **(Quang Trung - Bình Phước - Lần 5 - 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

A. $m>0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\ (*) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x\ne 0\Leftrightarrow m>0$.

Câu 6. **(Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2019m\right)x^2-1$ có đúng một cực trị?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow y=-1$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m=0$ (loại).

Trường hợp 2: $m\ne 0\Rightarrow m^2>0$.

Hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2019m\right)x^2-1$ có đúng một cực trị

$\Leftrightarrow -m^2.\left(m^2-2019m\right)\ge 0\Leftrightarrow m^2-2019m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 2019$.

Vì $m\ne 0\Rightarrow 0<m\le 2019$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Câu 7. **(THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=x^3-3\left(m+1\right)x^2+3\left(7m-3\right)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6\left(m+1\right)x+3\left(7m-3\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2\left(m+1\right)x+7m-3=0$.

Để hàm số không có cực trị thì

$\Delta'\le 0\Leftrightarrow \left(m+1\right)^2-\left(7m-3\right)\le 0$

$\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0$

$\Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow S=\left\{1;2;3;4\right\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 8. **(HSG - TP Đà Nẵng - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3\left(m+1\right)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\left\{-1\right\}$.

C. $m\in\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\left\{-1\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=4x^3+12mx^2+6\left(m+1\right)x$.

+ TH1: $m=-1$, ta có: $y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2+6mx+3m+3=0\,(*) \end{array}\right.$

+ TH2: $m \neq -1$

Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình $(*)$ không có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (3m)^2-2(3m+3) \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $m \in \left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Câu 9. **(HSG 12 - Bắc Ninh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?

A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi tam thức $g(x)=x^2+2mx+5$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x=-1$, hoặc $g(x)$ có nghiệm kép $x=-1$

Tức là $\left[\begin{array}{l} \Delta'_g<0 \\ \begin{cases} g(-1)=0 \\ \Delta'_g>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{b'}{a}=-1 \\ \Delta'_g=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-5<0 \\ \begin{cases} -2m+6=0 \\ m^2-5>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -m=-1 \\ \Delta'_g=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{5}<m<\sqrt{5} \\ m=3 \end{array}\right.$. Do đó tập các giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S=\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

Câu 10. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị.

A. $0<m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Lời giải

Ta có: $y'=-x^2+2mx-2m$

Hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Câu 11. **(THPT Ba Đình 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+2mx+m$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m<\frac{3}{2}$. **B.** $m<-\frac{3}{2}$. **C.** $m\le\frac{3}{2}$. **D.** $m>\frac{3}{2}$.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+ $y'=3x^2-6x+2m$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta=36-24m>0 \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+1$ có hai cực trị là:

A. $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $[-1;2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2mx+m+2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$y'>0 \Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$

Câu 13. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hàm số $y=mx^4-x^2+1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

TH1: $m=0$ hàm số đã cho trở thành $y=-x^2+1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.

TH2: $m\ne0$, ta có $y'=4mx^3-2x$.

$y'=0 \Leftrightarrow 4mx^3-2x=0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2mx^2-1=0\,(*) \end{array}\right.$.

Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y'=0$ có đúng 1 nghiệm.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m<0$.

Vậy $m\le0$.

Câu 14. **(THPT Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=mx^4+(2m+1)x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

A. Không tồn tại m. **B.** $m\ge0$. **C.** $m\ge-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}\le m\le0$.

Lời giải

Với $m=0$, ta có $y=x^2+1\Rightarrow y'=2x$. Khi đó hàm số có 1 cực trị và cực trị đó là cực tiểu. Suy ra $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Với $m\ne0$, ta có $y'=4mx^3+2(2m+1)x=2x(2mx^2+2m+1)$

Hàm số có một cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 2mx^2+2m+1=0 \text{ vô nghiêm} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \frac{-2m-1}{2m}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<\frac{-1}{2} \\ m>0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m>0\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có một cực trị là cực tiểu khi $m\ge0$.

Câu 15. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2\left(m^2-m-6\right)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3+4\left(m^2-m-6\right)x=4x\left[x^2+\left(m^2-m-6\right)\right]$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+\left(m^2-m-6\right)=0\,(1)\end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow m^2-m-6<0\Leftrightarrow -2<m<3$.

Ta có: $m\in\mathbb{Z},-2<m<3\Leftrightarrow m\in\left\{-1;0;1;2\right\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 16. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hàm số $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+1-2m$ có một điểm cực trị khi

A. $0\le m\le 1$. **B.** $m\le 0\vee m\ge 1$. **C.** $m=0$. **D.** $m<0\vee m>1$.

Lời giải

Trường hợp 1: $m=0$ thì hàm số đã cho trở thành $y=-x^2+1$. Hàm số này có 1 cực trị là cực đại $\Rightarrow m=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m\ne 0$ thì hàm số đã cho trở thành $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+1-2m$

Ta có $y'=4mx^3+2\left(m-1\right)x=2x\left(2mx^2+m-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\2mx^2+m-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{1-m}{2m}\end{array}\right.$ $(*)$

YCBT $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu một lần $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0$.

$\Leftrightarrow\dfrac{1-m}{2m}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\m<0\end{array}\right.$

Kết hợp hai trường hợp ta được $0\le m\vee m\ge 1$.

Giải nhanh: Với a khác 0 thì hàm số đã cho có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab\ge 0\Rightarrow m\left(m-1\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\m\le 0\end{array}\right.$.

Câu 17. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=x^4-2\left(2m+1\right)x^2+7$ có ba điểm cực trị?

A. 20 **B.** 10 **C.** Vô số **D.** 11

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x\left[x^2-\left(2m+1\right)\right]$ $\forall x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2m+1\quad(*)\end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt, hay (*) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow 2m+1>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

Do $m\in\left[-10;10\right]$ nên có 11 giá trị thỏa mãn.

Câu 18. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=mx^4+\left(m^2-6\right)x^2+4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn C
Tập xác định $D=\mathbb{R}$.
Ta có $y'=4mx^3+2\left(m^2-6\right)x$.
Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases}4m>0\\ m\left(m^2-6\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\sqrt{6}$.
Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m.

Câu 19. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+1-2m$ có một cực trị.

A. $m\ge 1$ **B.** $m\le 0$ **C.** $0\le m\le 1$ **D.** $m\le 0\cup m\ge 1$

Lời giải

Chọn D
Ta có: $y'=4mx^3+2\left(m-1\right)x$
• Trường hợp 1: Xét $m=0\Rightarrow y'=-2x$. Ta thấy phương trình $y'=0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị. Suy ra $m=0$ (thoả YCBT) (1)
• Trường hợp 2: Xét $m=1\Rightarrow y'=4x^3$.Ta thấy phương trình $y'=0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị. Suy ra $m=1$ (thoả YCBT) (2)
• Trường hợp 3: Xét $m\ne 0$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=\dfrac{1-m}{2m}\end{array}\right.$
Để hàm số có một điểm cực trị thì $\dfrac{1-m}{2m}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m\ge 1\end{array}\right.$ (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$

✍ *Ghi chú:* Dùng công thức tính nhanh
Hàm số có một điểm cực trị khi và chỉ khi $m\left(m-1\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$.

Câu 20. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x+2\right)^4\left(x+4\right)^3\left[x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C
Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\ \left(x+2\right)^4=0\\ \left(x+4\right)^3=0\\ x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x=-4\\ x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18=0\ (*)\end{array}\right.$
Để hàm số $f\left(x\right)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.
Trường hợp 1. Phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm
$\Leftrightarrow\Delta=4m^2+24m+36-24m-72=4m^2-36<0$
$\Leftrightarrow -3<m<3\Rightarrow m\in\left\{-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\right\}$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$. Trong đó $x_1 = -4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1.x_2 = -4.x_2 = 6m + 18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m \in \{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 21. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để hàm số sau không có cực trị trên $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{4}m^2.e^{4x} + \frac{1}{3}m.e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x$. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. $-\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

$f'(x) = m^2.e^{4x} + m.e^{3x} - e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x = e^x(m^2.e^{3x} + m.e^{2x} - e^x - m^2 - m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow m^2.e^{3x} + m.e^{2x} - e^x - m^2 - m + 1 = 0$.

Đặt $t = e^x > 0$ ta có

Ta có: $m^2t^3 + mt^2 - t - m^2 - m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m^2(t^3 - 1) + m(t^2 - 1) + 1 - t = 0 \Leftrightarrow (t - 1)[m^2(t^2 + t + 1) + m(t + 1) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)[m^2t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1] = 0$

Điều kiện cần để hàm số không có cực trị thì phương trình $m^2t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1$ có nghiệm $t = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1,\ m = \frac{1}{3}$.

Thử lại ta thấy với hai giá trị m trên ta đều có nghiệm đơn $t = 1$.

Vậy hai giá trị $m = -1,\ m = \frac{1}{3}$ thỏa mãn.

Dạng 3. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'

- Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.
- Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Câu 1. **(Mã 123 - 2017)** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;-1)$ **B.** $N(1;-10)$ **C.** $P(1;0)$ **D.** $Q(-1;10)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.
Như thế điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Câu 2. **(Mã 104 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$ **B.** $m = \frac{3}{4}$ **C.** $m = -\frac{1}{2}$ **D.** $m = \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1)$, $B(2;-3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m-1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi $(2m-1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Câu 3. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

A. $m = \frac{3}{4}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m = -\frac{3}{4}$. **D.** $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có TXĐ: $\mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$, $B(2;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng $d \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = -2 \\ m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB.

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
$y' = 3x^2 - 6x - 9$.
$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{array}\right.$

Ta có $A(-1;6), B(3;-26) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4;-32)$ nên) Chọn $\vec{n}_{AB} = (8;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$8(x+1) + 1(y-6) = 0 \Leftrightarrow 8x + y + 2 = 0.$$

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Câu 5. **(Lương Văn Chánh - Phú Yên – 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $m = \frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-1$

Có : $y'=3x^2-6x$, $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y=-2x-1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-\frac{1}{6}$.

Câu 6. **(TT Tân Hồng Phong - 2018)** Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y=-4x$.

A. $m=-\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{2}{3}$. **C.** $m=-\frac{2}{3}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=1-2m \end{array}\right.$.

Để hàm số có hai cực trị thì $m\neq 1-2m \Leftrightarrow m\neq \frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(m;-7m^3+3m^2\right)$, $B\left(1-2m;20m^3-24m^2+9m-1\right)$. Do đó $\overrightarrow{AB}=\left(1-3m;(3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left((3m-1)^2;1\right)$.

Do đó $AB:(3m-1)^2x+y-2m^3+3m^2-m=0 \Leftrightarrow y=-(3m-1)^2x+2m^3-3m^2+m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y=-4x$ thì:

$$\begin{cases} -(3m-1)^2=-4 \\ 2m^3-3m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq \frac{1}{2} \\ m\neq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}.$$

Câu 7. **(THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc- 2018)** Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=-2x+1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x-2$.

Lời giải

Chọn B

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y=y'.\left(\frac{1}{3}x\right)+(-2x+1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$.

Ta có: $\begin{cases} y_1=y(x_1)=y'(x_1).\left(\frac{1}{3}x_1\right)+(-2x_1+1)=-2x_1+1 \\ y_2=y(x_2)=y'(x_2).\left(\frac{1}{3}x_2\right)+(-2x_2+1)=-2x_2+1 \end{cases}$.

Ta thấy, toạ độ hai điểm cực trị A và B thoả mãn phương trình $y=-2x+1$.
Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y=-2x+1$.

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m=-1$. **B.** $m=-5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2+4x+m-3$, để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{13}{3}(*)$

Ta có $y=y'.\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}\right)+\left(\dfrac{2m}{3}-\dfrac{26}{9}\right)x+\dfrac{7m}{9}+\dfrac{2}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\left(\dfrac{2m}{3}-\dfrac{26}{9}\right)x+\dfrac{7m}{9}+\dfrac{2}{3}$. Theo giả thiết, đường thẳng này đi qua $M(9;-5)$ nên $m=3$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Câu 9. **(Nguyễn Khuyến 2019)** Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+m$ đi qua điểm $M(-3;7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-2$.

$y=x^3-2x+m=\dfrac{1}{3}x.y'+\left(-\dfrac{4}{3}x+m\right)$

Suy ra đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y=-\dfrac{4}{3}x+m$ đường thẳng này đi qua điểm $M(-3;7)$ khi và chỉ khi $7=-\dfrac{4}{3}.(-3)+m \Leftrightarrow m=3$.

Câu 10. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-1$

Có : $y'=3x^2-6x$, $y=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y=-2x-1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-\dfrac{1}{6}$.

Câu 11. **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\dfrac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\dfrac{25}{9}$. **D.** 1.

Lời giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2-3b>0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x)=f'(x).\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y=\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab\ (d)$.

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c-\dfrac{1}{9}ab=0 \Leftrightarrow ab=9c$.

Khi đó $P=abc+ab+c \Leftrightarrow P=9c^2+10c \Leftrightarrow P=\left(3c+\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}$.

Suy ra $\min P=-\dfrac{25}{9}$.

Câu 12. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6mx$; $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow x=0$, $x=2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B\left(2m;2-4m^3\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=\left(2m-1;4-4m^3\right)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{1-m^3}{1} \Leftrightarrow 2m-1=m^3-1 \Leftrightarrow m^3=2m$

$\Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (do $m\neq 0$).

Dạng 4. Tìm m để hàm số bậc 3 có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

★ **Bài toán tổng quát**: Cho hàm số $y=f(x;m)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có *2* điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

✍ **Phương pháp**:

— **Bước 1**. Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.

— **Bước 2**. Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}=3a\neq 0 \\ \Delta_{y'}=(2b)^2-4.3ac>0 \end{cases}$ và giải hệ này sẽ tìm được $m\in D_1$.

— **Bước 3**. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y'=0$. Theo Viét, ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

— **Bước 4**. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5**. Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

Lưu ý:

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x; m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và B.

• Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(cùng phía, khác phía *d*)**:

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

• *Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d.*

• *Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d.*

Trường hợp đặc biệt:

• *Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.*

• *Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhẩm được nghiệm).*

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(đối xứng và cách đều)**:

★ ***Bài toán 1. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d:***

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3**. Gọi $I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ ***Bài toán 2. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng***

d:
— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.
— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:
+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.
— **Bước 3**. Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.
— **Bước 4**. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.
☞ **Lưu ý**: Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB.

Câu 1. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m = \frac{3}{2}$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = \frac{1}{2}$. **D.** $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0; m)$ và $B(2; -4 + m)$.

Ta có $OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4 - m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 3 **B.** 6 **C.** -6 **D.** 0

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(m - 1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right)$ và $B\left(m + 1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2 - 1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 3. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)=2\left(x^2-mx-3m^2+1\right)$,

$g\left(x\right)=x^2-mx-3m^2+1$; $\Delta=13m^2-4$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $g\left(x\right)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$. (*)

x_1, x_2 là các nghiệm của $g\left(x\right)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m+1=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)\left[mx^2-(m-1)x+m+1\right]=0$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt $mx^2-(m-1)x+m+1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m-(m-1)+m+1\neq 0 \\ (m-1)^2-4m(m+1)>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m+2\neq 0 \\ -3m^2-6m+1>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -2 \\ \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}<m<\frac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-1$.

Câu 5. **(Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=x^3-(m+6)x^2+(2m+9)x-2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge -2 \\ m\le -6 \end{array}\right.$. **B.** $m\ge -2$. **C.** $m\le -6$. **D.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\ne \dfrac{-3}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$y'=3x^2-2(m+6)x+2m+9$.

$y'=3x^2-2(m+6)x+2m+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2m+9}{3} \end{array}\right.$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{2m+9}{3}\ne 1 \Leftrightarrow m\ne -3$. (1)

$y(1)=m+2$.

$y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right)=-m\dfrac{(2m+9)^2}{27}-2$.

Ycbt $\Leftrightarrow y(1).y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right)<0$

$\Leftrightarrow (m+2).\left[-m\dfrac{(2m+9)^2}{27}-2\right]<0 \Leftrightarrow (m+2).(4m^3+36m^2+81m+54)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-6 \\ m>-2 \end{array}\right. \\ m\ne \dfrac{-3}{2} \end{cases}$. (2)

Từ (1), (2) ta có ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\ne \dfrac{-3}{2} \end{cases}$.

Câu 6. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ bằng

A. $\dfrac{40}{9}$ **B.** $\dfrac{22}{9}$ **C.** $\dfrac{25}{4}$ **D.** $\dfrac{8}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ -2m^2+4m+1>0 \end{cases}$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1.+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}$

Theo bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1.+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1+2x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3m-4}{m} \\ x_2=1-\dfrac{2(m-1)}{m}=\dfrac{2-m}{m} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{3m-4}{m}.\dfrac{2-m}{m}=\dfrac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m+(3m-4)(2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2(t/m) \\ m=\dfrac{2}{3}(t/m) \end{array}\right.$

Vậy $m_1^2+m_2^2=\dfrac{40}{9}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Lời giải

Chọn D

$y'=-3x^2+6mx$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Đồ thị có hai cực trị khi: $m\neq 0$

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0;-3m-1), B(2m;4m^3-3m-1)$

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m;2m^3-3m-1)$

A và B đối xứng qua d khi và chỉ khi: $\begin{cases} I\in d \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB}=(2m;4m^3), \vec{u}_d=(8;-1)$

$+\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow 16m-4m^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Với $m=0$ loại

Với $m=2$, ta có $I(2;9) \Rightarrow I\in d$

Với $m=-2$, ta có $I(-2;-11) \Rightarrow I\notin d$

Do đó $m=2$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2=0$ có ba nghiệm phân biệt

$x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-6x+m^2-1)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-6x+m^2-1=0(*) \end{array}\right.$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ m^2 - 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \end{cases}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 9. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

+ Ta có: $y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}.$

+ Do $m \in N, m < 20$ nên $1 \le m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 10. **(Chuyên KHTN 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2. **B.** 1.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2} (*)$.

Ta lần lượt thử bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn $(*)$ là $-1; 0; 1; 2$.

Ta được bốn hàm số

$y = x^3 - x + 2; y = x^3 - x^2 - 2x + 3; y = x^3 - 2x^2 - x + 2; y = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

A. $m = -3$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2. Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

Theo viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= 4 - \frac{2m}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 6 \Rightarrow m = -3$

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=2x^3-6x^2-m+1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x)=6x^2-12x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$x=0 \Rightarrow f(0)=-m+1$

$x=2 \Rightarrow f(2)=-m-7$

Hàm số có các giá trị cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow (-m+1)(-m-7)<0 \Leftrightarrow (m-1)(m+7)<0 \Leftrightarrow -7<m<1$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 13. **(Thi thử SGD Hưng Yên)** Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in(3;4)$. **C.** $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-m+2 \end{array}\right.$.

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$ thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2;3)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -m+2\neq -1 \\ -2<-m+2<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ -1<m<4 \end{cases}$.

Câu 14. **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó $A(0;4m^2-2), B(2m;-4m^3+4m^2-2)$ $\Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}$

Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-0}{2m-0}=\dfrac{y-(4m^2-2)}{-4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$

$d(C,AB)=\dfrac{|2m^2+4-4m^2+2|}{\sqrt{4m^4+1}}=\dfrac{2|m^2-3|}{\sqrt{4m^4+1}}$

Diện tích tam giác ABC là

$S=\frac{1}{2}.AB.d\left(C,AB\right)=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2\left|m\right|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{2\left|m^2-3\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=4$

$\Leftrightarrow\left|m\left(m^2-3\right)\right|=2\Leftrightarrow m^6-6m^4+9m^2-4=0\Leftrightarrow\left(m^2-1\right)^2\left(m^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=\pm2\end{array}\right.$

Do m nguyên dương nên ta được $m=1,m=2$, tổng thu được là 3.

Câu 15. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6\left(m-2\right)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $\left(-2;3\right)$.

A. $m\in\left(-1;3\right)\cup\left(3;4\right)$. **B.** $m\in\left(1;3\right)$. **C.** $m\in\left(3;4\right)$. **D.** $m\in\left(-1;4\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=6x^2+6\left(m-1\right)x+6\left(m-2\right)$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $\left(-2;3\right)\Leftrightarrow$ pt $y'=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;3\right)$

$\Leftrightarrow x^2+\left(m-1\right)x+\left(m-2\right)=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;3\right)$

$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x+m-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in\left(-2;3\right)\\x=2-m\end{array}\right.$

$YCBT\Leftrightarrow\begin{cases}2-m\neq-1\\-2<2-m<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq3\\-1<m<4\end{cases}$

Câu 16. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=3x^3+2\left(m+1\right)x^2-3mx+m-5$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ đồng thời $y\left(x_1\right).y\left(x_2\right)=0$ là:

A. -21 **B.** -39 **C.** -8 **D.** $3\sqrt{11}-13$

Lời giải

Chọn A

+) Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$y'=9x^2+4\left(m+1\right)x-3m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=4\left(m+1\right)^2+27m>0$

+) Xét $y\left(x_1\right).y\left(x_2\right)=0$ nên ta có $y=3x^3+2\left(m+1\right)x^2-3mx+m-5$ phải tiếp xúc với trục hoành

$\Rightarrow3x^3+2\left(m+1\right)x^2-3mx+m-5=0$ phải có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left[3x^2+\left(2m+5\right)x-m+5\right]=0\left(1\right)$ phải có nghiệm kép

+) TH1: Phương trình $3x^2+\left(2m+5\right)x-m+5=0$ có một nghiệm $x=1\Rightarrow m_1=-13$

+) TH2: Phương trình $3x^2+\left(2m+5\right)x-m+5=0$ có nghiệm kép khác 1

$\Rightarrow\Delta=\left(2m+5\right)^2-12\left(5-m\right)=0\Leftrightarrow4m^2+32m-35=0\Rightarrow m_2+m_3=-8$

$\Rightarrow m_1+m_2+m_3=-21$

Câu 17. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|\le5$. Biết $S=\left(a;b\right]$. Tính $T=2b-a$.

A. $T=\sqrt{51}+6$ **B.** $T=\sqrt{61}+3$ **C.** $T=\sqrt{61}-3$ **D.** $T=\sqrt{51}-6$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$ (*)

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2, theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \le 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \le 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 \le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{61}}{2} \le m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ (**)

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3$.

Câu 18. **(Sở Bắc Giang 2019)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \le 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó giả sử $x_1 < x_2$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{4 - m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4 - m} \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán trở thành $x_2 \le 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - m} \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$.

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \le m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0;1;2;3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$

A. $m = 5$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = \dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Ta có $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ (1)

$\Rightarrow y' = 3x^2 + 8(m-2)x - 7$. Xét phương trình $3x^2 + 8(m-2)x - 7 = 0$ (2)

$\Delta' = [4(m-2)]^2 + 21 > 0$, với mọi m $\Rightarrow$ hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ với mọi m.

*Ta thấy $ac = -21 < 0 \Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$\Rightarrow x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$

*Ta có $|x_1| - |x_2| = -4 \Rightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{8(m-2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** không tồn tại

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow\forall m\in R$, hàm số luôn có CĐ, CT

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m;2m^3+3m^2+1),B(m+1;2m^3+3m^2)$

Suy ra $AB=\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB:x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất

Ta có $d(M,AB)=\dfrac{3m^2+1}{\sqrt{2}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dấu "=" khi $m=0$

Câu 21. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-3m$ suy ra đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu khi $m>0$. Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là $C\left(-\sqrt{m};2+2m\sqrt{m}\right);D\left(\sqrt{m};2-2m\sqrt{m}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua các điểm CĐ, CT của đồ thị hàm số có phương trình là: $y=-2mx+2$. Do $d(I,\Delta)=\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}<R=1$ (vì m > 0) $\Rightarrow$ Δ luôn cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại 2 điểm A,B phân biệt. Dễ thấy $m=\dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn do A,I,B thẳng hàng.

Với $m\ne\dfrac{1}{2}$: Δ không đi qua I, ta có: $S_{\Delta ABI}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin AIB\le\dfrac{1}{2}R^2=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $\sin\widehat{AIB}=1$ hay ΔAIB vuông cân tại $I\Leftrightarrow IH=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ (H là trung điểm của AB)

Câu 22. **(VTED 2019)** Biết đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ có hai điểm cực trị $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1-y_2)=y_1(x_1-x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng

A. $-\dfrac{49}{4}$ **B.** $-\dfrac{25}{4}$ **C.** $-\dfrac{841}{36}$ **D.** $-\dfrac{7}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+2ax+b$

Chia y cho y' ta được $y=y'\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x+c-\dfrac{ab}{9}$.

Do $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị nên $y'(x_1)=0,y'(x_2)=0$

Do đó $y_1=\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x_1+c-\dfrac{ab}{9};y_2=\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x_2+c-\dfrac{ab}{9}$

Theo giả thiết $x_1(y_1-y_2)=y_1(x_1-x_2)\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$

$$\Leftrightarrow x_1\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_2+c-\frac{ab}{9}\right]=x_2\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_1+c-\frac{ab}{9}\right]$$

$$\Leftrightarrow x_1\left(c-\frac{ab}{9}\right)=x_2\left(c-\frac{ab}{9}\right)\Leftrightarrow c-\frac{ab}{9}=0(x_1\neq x_2)\Leftrightarrow ab=9c$$

Ta có: $P=abc+2ab+3c=9c^2+21c=\left(3c+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\geq-\frac{49}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng $-\frac{49}{4}$

Câu 23. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $\frac{4}{17}$. **B.** $\frac{14}{17}$. **C.** $-\frac{2}{17}$. **D.** $\frac{20}{17}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$.

Vì $\Delta'=1>0\ \forall m$ nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x=m\pm1$.

Gọi $A(m+1;-4m-2)$, $B(m-1;-4m+2)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-2;4)=-2(1;-2)$, $\overrightarrow{IA}=(m-1;-4m)$, $\overrightarrow{IB}=(m-3;-4m+4)$.

Phương trình đường thẳng AB qua $A(m+1;-4m-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1)$ là $AB: 2x+y+2m=0$.

Suy ra $d(I,AB)=\frac{|2+2m|}{\sqrt{5}}$.

Khi đó $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}AB.d(I,AB)=\frac{1}{2}2\sqrt{5}\frac{|2+2m|}{\sqrt{5}}=|2+2m|$.

Mặt khác $S_{\Delta IAB}=\frac{AB.IA.IB}{4R}\Leftrightarrow AB.IA.IB=4\sqrt{5}|2+2m|$.

$\Leftrightarrow\sqrt{20}\sqrt{17m^2-2m+1}\sqrt{17m^2-38m+25}=4\sqrt{5}|2+2m|$

$\Leftrightarrow\left(17m^2-2m+1\right)\left(17m^2-38m+25\right)=4\left(4m^2+8m+4\right)$

$\Leftrightarrow 289m^4-680m^3+502m^2-120m+9=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{3}{17}\end{array}\right.$.

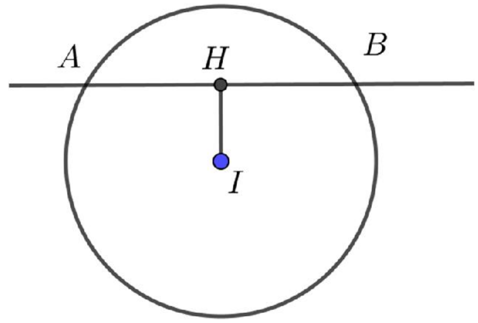
Vậy $m_1+m_2=\frac{20}{17}$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $y' = 3x^2 - 6m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m > 0$

Gọi $A\left(\sqrt{2m}; 4 - 4m\sqrt{2m}\right)$ và $B\left(-\sqrt{2m}; 4 + 4m\sqrt{2m}\right)$

Phương trình đường thẳng $AB: 4mx + y - 4 = 0$

Đặt $a = d\left(I, AB\right)$ $\left(0 < a < \sqrt{2}\right)$ $\Rightarrow$ $HB = \sqrt{2 - a^2}$

Suy ra $S_{\Delta IAB} = a\sqrt{2 - a^2} \le \frac{1}{2}\left(a^2 + 2 - a^2\right) = 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt{2 - a^2} \Leftrightarrow a = 1$

Khi đó $d\left(I; AB\right) = \frac{\left|4m + 0 - 4\right|}{\sqrt{16m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 1} = 4\left|m - 1\right|$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 1 = 16m^2 - 32m + 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}$

Câu 25. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 9.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = x^2 - mx - 4$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$.

Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$ hay hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $\forall m \in \mathbb{R}$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ nên theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -4 \end{cases}$.

$P = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right) = \left(x_1x_2\right)^2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) + 1 = \left(x_1x_2\right)^2 - \left(x_1 + x_2\right)^2 + 2x_1x_2 + 1$

$= 16 - m^2 - 8 + 1 = -m^2 + 9 \le 9, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $9 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 26. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3$, với m là tham số; gọi $\left(C\right)$ là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị $\left(C\right)$ luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-\frac{1}{3}$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=-3$. **D.** $k=3$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$ và $y''=6x-6m$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0$.

$\Delta'=9m^2-9\left(m^2-1\right)=9$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x=\frac{3m+3}{3}=m+1$ và $x=\frac{3m-3}{3}=m-1$.

$y''\left(m-1\right)=6\left(m-1\right)-6m=-6<0\Rightarrow x=m-1$ là điểm cực đại của hàm số

$\Rightarrow A\left(m-1;-3m+2\right)$ là điểm cực đại của đồ thị $\left(C\right)$.

Ta có $\begin{cases}x_A=m-1\\ y_A=-3m+2\end{cases}\Rightarrow y_A=-3x_A-1$

$\Rightarrow A$ luôn thuộc đường thẳng d có phương trình $y=-3x-1$.

Do đó hệ số góc k của đường thẳng d là -3.

Câu 27. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in\left(-1;7\right)$. **B.** $m_0\in\left(7;10\right)$. **C.** $m_0\in\left(-15;-7\right)$. **D.** $m_0\in\left(-7;-1\right)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+m$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0$; $\Delta'=9-3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow m<3$.

Hai điểm cực trị $x_1;x_2$ là nghiệm của $y'=0$ nên: $x_1+x_2=2; x_1.x_2=\frac{m}{3}$.

Để $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-x_1x_2=13\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1.x_1=13$

$\Leftrightarrow 4-m=13\Leftrightarrow m=-9$. Vậy $m_0=-9\in\left(-15;-7\right)$.

Câu 28. **(THPT Thanh Miện I - Hải Dương 2018)** Biết rằng đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

A. 3. **B.** 1. **C.** Không có m. **D.** 2.

Lời giải

Có $y'\left(x\right)=x^2-mx+1$, $y'=0\Leftrightarrow x^2-mx+1=0$ $\left(1\right)$.

- Để hàm số có cực trị thì $\left(1\right)$ phải có hai nghiệm phân biệt.

  Điều này tương đương với $\Delta>0\Leftrightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.$.

- Gọi hai nghiệm của $\left(1\right)$ là x_1, x_2. Khi đó, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1.x_2=1\end{cases}$.

  Độ dài hai cạnh của tam giác vuông đó là $\left|x_1\right|$, $\left|x_2\right|$. Theo bài ra ta có phương trình:

  $x_1^2+x_2^2=7\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=7\Leftrightarrow m^2-2=7\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=\pm3$ (thỏa mãn).

  Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29. **(Phan Đăng Lưu - Huế - 2018)** Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f\left(x\right)=-x^3+3x-4$ và $M\left(x_0;0\right)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T=4x_0+2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $T=2017$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2016$. **D.** $T=2018$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'\left(x\right)=-3x^2+3$.

Xét $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -3x^2+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=-2 \\ x=-1\Rightarrow y=-6 \end{array}\right.$. Đặt $A\left(1;-2\right)$ và $B\left(-1;-6\right)$.

Ta thấy hai điểm A và B nằm cùng phía với trục hoành.

Gọi $A'\left(1;2\right)$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục hoành. Chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ba điểm B, M và A' thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{A'M}=\left(x_0-1;-2\right)$ và $\overrightarrow{A'B}=\left(-2;-8\right)\Rightarrow \dfrac{x_0-1}{-2}=\dfrac{-2}{-8}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

Vậy $T=4.\dfrac{1}{2}+2015=2017$.

Câu 30. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6mx$, $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m\ne 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0;4m^3\right)$, $B\left(2m;0\right)$.

Ta có $I\left(m;2m^3\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x-y=0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$\left\{\begin{array}{l} 2m-4m^3=0 \\ m-2m^3=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow 1-2m^2=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Câu 31. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-5x^2+\left(m+4\right)x-m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty;3\right)\cup\left(3;4\right]$. **C.** $\left(-\infty;3\right)\cup\left(3;4\right)$. **D.** $\left(-\infty;4\right)$.

Lời giải

Ta có $y=x^3-5x^2+\left(m+4\right)x-m=\left(x-1\right)\left(x^2-4x+m\right)$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi phương trình $y=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-m>0 \\ 1-4+m\ne 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<4 \\ m\ne 3 \end{array}\right.$.

Câu 32. **(CTN - LẦN 1 - 2018)** Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, $b \in \mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2$.

A. $S = 13$. **B.** $S = 25$. **C.** $S = 10$. **D.** $S = 34$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 2x^2 - 2mx - 6m^2 + 2$.

Hàm số có hai điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2\left(-6m^2 + 2\right) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$$

Theo định lý Viet thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$

Ta có $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{array}\right.$

Chỉ có giá trị $m = \frac{2}{3}$ thỏa điều kiện, khi đó $S = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Câu 33. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp $\left(-5;6\right) \cap S$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 + 2x + m$.

Hàm bậc ba có cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$ $\left(1\right)$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{1 - 3m} \\ x = -1 + \sqrt{1 - 3m} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{1-3m}$		$-1+\sqrt{1-3m}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về phía bên phải trục tung khi

$$-1 + \sqrt{1 - 3m} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - 3m} > 1 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp với $\left(1\right)$ ta có $m < 0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho nằm bên phải trục tung.

Khi đó S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên âm.

Vậy $(-5;6)\cap S=\{-4;-3;-2;-1\}\Rightarrow(-5;6)\cap S$ có 4 phần tử.

Vậy giá trị m cần tìm là $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$.

Câu 34. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

$y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1\Rightarrow y'=-3x^2+6x+3(m^2-1)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-m\\x=1+m\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$ thì

$\begin{cases}m\ne 0\\1+m<2\\1-m<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\m<1\\m>-1\end{cases}$.

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 35. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6mx$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx=0\Leftrightarrow x=0$, $x=2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $2m\ne 0\Leftrightarrow m\ne 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2m;2-4m^3)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=(2m-1;4-4m^3)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$\Leftrightarrow\dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{4-4m^3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{1-m^3}{1}\Leftrightarrow 2m-1=m^3-1\Leftrightarrow m^3=2m$

$\Leftrightarrow m^2=2\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (do $m\ne 0$).

Câu 36. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2$. Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ khi $m=a$ và $m=b$. Hãy tính tổng $a+b$.

A. $-\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$.

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$ suy ra $x_2=\dfrac{2-m}{m}$.

Do $x_2=\dfrac{2-m}{m}$ là nghiệm của phương trình $mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$ nên

$m\left(\dfrac{2-m}{m}\right)^2-2(m-1)\left(\dfrac{2-m}{m}\right)+3(m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

Thử lại thấy $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $a+b=\frac{8}{3}$.

Câu 37. **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+6m$. $y'=0 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m\neq 1$.

Khi đó ta có $A(1;m^3+3m-1), B(m;3m^2)$.

Có $AB=\sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2+(m^3-3m^2+3m-1)^2=2 \Leftrightarrow (m-1)^2+(m-1)^6=2$.

$\Leftrightarrow (m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Câu 38. **(THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ)

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\frac{17}{11} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{17}{11} \end{array}\right.$.

Lời giải

Tập xác định $D=R$

Ta có: $y'=3mx^2-6mx$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$

Khi đó $\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Tọa độ điểm cực trị: $A(0;3m-3), B(2;-m-3)$

Theo giả thiết $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20 \Leftrightarrow 22m^2+12m-34=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{17}{11} \end{array}\right.$.

Dạng 5. Tìm m để hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Một số công thức tính nhanh "thường gặp"

liên quan cực trị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$

1 *cực trị:* $ab\geq 0$		3 *cực trị:* $ab<0$	
$a>0$: 1 cực tiểu	$a<0$: 1 cực đại	$a>0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a<0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

$$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}}, BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta=b^2-4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y=-\dfrac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y=\pm\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}\right)^3 x+c$

Gọi $\widehat{BAC}=\alpha$, luôn có: $8a(1+cos\alpha)+b^3(1-cos\alpha)=0 \Rightarrow cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$ và $S^2=-\dfrac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A,B,C: x^2+y^2-(c+n)x+c.n=0$, với $n=\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R=\left|\dfrac{b^3-8a}{8ab}\right|$

Câu 1. **(THPT Lương Thế Vinh - 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

A. $S=3$. **B.** $S=\dfrac{1}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \rightarrow y=2 \\ x=\pm 1 \rightarrow y=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$.

Nhận xét ΔABC cân tại A. Vì vậy $S=\dfrac{1}{2}|y_A-y_B|.|x_C-x_B|=\dfrac{1}{2}.1.2=1$.

Câu 2. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;\ 1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m};\ -m^2+1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};\ -m^2+1\right)$.

$BC=4 \Leftrightarrow 4m=16 \Leftrightarrow m=4$.

Câu 3. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=4x^3+4mx; y'=0 \Leftrightarrow 4x^3+4mx=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m\ (*) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow -m>0 \Leftrightarrow m<0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0;1); B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right); C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-m};-m^2\right); \overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-m};-m^2\right)$

Vì ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2}+m^2.m^2=0 \Leftrightarrow -|m|+m^4=0 \Leftrightarrow m+m^4=0$

$\Leftrightarrow m=-1$ (vì $m<0$)

Vậy với $m=-1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

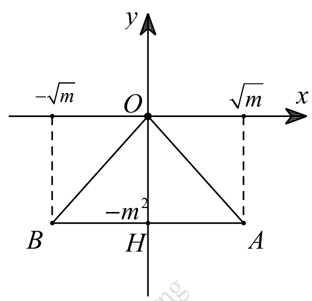
Câu 4. **(Mã 105 -2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0<m<1$ **B.** $m>0$ **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$ **D.** $m<1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$



Ta có $y'=4x^3-4mx$. $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $A\left(\sqrt{m};-m^2\right)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$.

Do đó $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=\frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m}=m^2\sqrt{m}<1 \Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 5. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0;-3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **C.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4mx \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0;-2m^2+m^4\right)$; $B\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$; $C\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$.

Gọi I trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0;m^4-3m^2\right)$

Vì $A,D\in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AD

$\Leftrightarrow 2\left(m^4-3m^2\right)=-2m^2+m^4-3 \Leftrightarrow m^4-4m^2+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2=1 \\ m^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \xrightarrow{m>0} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Câu 6. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

• $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2 \Rightarrow y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-m-1\right)$.

• Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow -m-1>0$.

$\Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{m+1} \\ x=0 \\ x=\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

• Giả sử A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow A\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right), B\left(0;m^2\right), C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m+1};(m+1)^2\right), \overrightarrow{CB}=\left(-\sqrt{m+1};(m+1)^2\right)$

ΔABC vuông tại $B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow -(m+1)+(m+1)^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right. \Rightarrow m=0$.

Câu 7. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải

➢ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

➢ $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$.

➢ Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

➢ Gọi $A(0;1), B(\sqrt{m};-m^2+1), C(-\sqrt{m};-m^2+1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hs (1), $I(0;-m^2+1)$ là trung điểm BC.

Ta có $AI=m^2, AB=AC=\sqrt{m+m^4}$. Suy ra $\dfrac{1}{2}AI.BC=\dfrac{AB.AC.BC}{4R} \Leftrightarrow R=\dfrac{2AI}{AB.AC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2m^2}{m+m^4}=1 \Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=0 & (l) \\ m=1 & (n) \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & (l) \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & (n) \end{array}\right.$

Câu 8. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m+4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

A. $m\in\left\{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\right\}$ **B.** $m\in\left\{0;\sqrt[6]{3};-\sqrt[6]{3}\right\}$ **C.** $m\in\left\{\sqrt[6]{3};-\sqrt[6]{3}\right\}$ **D.** $m\in\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;m+4\right)$, $B\left(|m|;-m^4+m+4\right)$, $C\left(-|m|;-m^4+m+4\right)$.

Tam giác ABC có $AB=AC$ nên tam giác ABC cân tại A, suy ra tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow AB=BC\Leftrightarrow\sqrt{m^2+m^8}=2|m|\Leftrightarrow m^8+m^2=4m^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm\sqrt[6]{3}\end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta được $m\in\left\{-\sqrt[6]{3};\sqrt[6]{3}\right\}$.

Câu 9. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

A. $m=1$. **B.** $m\in\left\{-1;1\right\}$. **C.** $m\in\left\{-1;0;1\right\}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

$y=x^4-2m^2x^2+1$.

+ Cách 1:

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab<0\Leftrightarrow -2m^2<0\Leftrightarrow m\neq 0$.

$y'=4x^3-4m^2x$

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4m^2x=0$

$\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\ x_2=m\\ x_3=-m\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y_1=1\\ y_2=-m^4+1\\ y_3=-m^4+1\end{array}\right.$$

Giả sử $A\left(0;1\right)$, $B\left(m;-m^4+1\right)$, $C\left(-m;-m^4+1\right)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\overrightarrow{AB}=\left(m;-m^4\right)\Rightarrow AB=\sqrt{m^2+m^8}$.

$\overrightarrow{AC}=\left(-m;-m^4\right)\Rightarrow AC=\sqrt{m^2+m^8}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\Delta ABC$ vuông cân tại A

$$\Leftrightarrow\begin{cases}AB=AC\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{R}\\ -m^2+m^8=0\end{cases}\Leftrightarrow -m^2\left(1-m^6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\ (l)\\ m=1\ \ (n)\\ m=-1(n)\end{array}\right..$$

Vậy $m\in\left\{-1;1\right\}$.

+ Cách 2: (Áp dụng công thức tính nhanh cực trị hàm trùng phương)

$$\text{Yêu cầu bài toán}\Leftrightarrow\begin{cases}ab<0\\ \dfrac{-8a}{b^3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2m^2<0\\ \dfrac{-8}{\left(-2m^2\right)^3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m^6=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}m=1\ \ (n)\\ m=-1(n)\end{array}\right.\end{cases}.$$

Vậy $m\in\left\{-1;1\right\}$.

Câu 10. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5)** Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+\left(m+1\right)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120°.

A. $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$.

C. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3+2(m+1)x=2x\left(2x^2+m+1\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2=-m-1\end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\ m+1<0\Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó

$A(0;-2m-1)$, $B\left(-\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, là các điểm cực trị của đồ thị.

Ta thấy $AB=AC=\sqrt{-\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{(m+1)^4}{16}}$ nên tam giác ABC cân tại A.

Từ giả thiết suy ra $A=120°$.

Gọi H là trung điểm BC, ta có $H\left(0;-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$

$BH=AH\tan 60°\Leftrightarrow\dfrac{(m+1)^2}{4}.\sqrt{3}=\sqrt{-\dfrac{m+1}{2}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3(m+1)^4}{16}=-\dfrac{m+1}{2}\Leftrightarrow 3(m+1)^3=-8\Leftrightarrow m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 11. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3-4m^2x$.

Hàm số có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Gọi $A\left(0;m^4+5\right)$, $B(m;5)$, $C(-m;5)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ khi đó ta có ba điểm A, I, O thẳng hàng.
Mặt khác do hai điểm B và C đối xứng nhau qua AO nên AO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC\Rightarrow AB\perp OB\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0$.

Trong đó $\overrightarrow{AB}=\left(m;-m^4\right)$, $\overrightarrow{OB}=(m;5)$. Ta có phương trình $m^2-5m^4=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 12. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\dfrac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x\left(x^2 - m\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$;

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A\left(0; m^4 - 2m^2\right)$; $B\left(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD. Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I\left(0;\, m^4 - 3m^2\right)$, $J\left(0; \dfrac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

ĐK: $m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 13. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m = \sqrt[3]{3}$. **B.** $-m = \sqrt[3]{3}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y' = -4x^3 + 4mx = -4x\left(x^2 - m\right)$.

Để hàm số có ba cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4x\left(x^2 - m\right) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow m > 0$.

Gọi $A(0;2)$, $B\left(-\sqrt{m}, m^2 + 2\right), C\left(\sqrt{m}, m^2 + 2\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Vì ΔABC cân tại A nên ΔABC chỉ có thể vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 0$.

Với $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{m}; m^2\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{m}; m^2\right) \Rightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m\left(m^3 - 1\right) = 0 \Rightarrow m = 1$.

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ tạo thành một tam giác vuông khi $8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8m^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 14. **(CHUYÊN ĐHSPHN - 2018)** Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2} + 1$. **C.** $\sqrt{2} - 1$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A(0;4) \\ x = -1 \Rightarrow B(-1;3) \\ x = 1 \Rightarrow C(1;3) \end{array}\right..$$

$\overrightarrow{AB} = (-1;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC} = (1;-1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{BC} = (2;0) \Rightarrow BC = 2$.

Ta có ΔABC vuông cân tại A có $S = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1$, $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \sqrt{2} + 1$.

Vậy $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$.

Câu 15. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Cho hàm số $y = x^4 + 2(m - 4)x^2 + m + 5$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm m để $\left(C_m\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{17}{2}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = \dfrac{17}{2}$.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3+4(m-4)x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=4-m\end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m<4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là

$A(0;m+5)$, $B\left(\sqrt{4-m};m+5-(m-4)^2\right)$, $C\left(-\sqrt{4-m};m+5-(m-4)^2\right)$.

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên $3(m+5)=2(m-4)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{17}{2}\end{array}\right.$.

Do $m<4$ nên $m=1$.

Câu 16. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m<1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Hàm số $y=x^4-2mx^2$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=4x^3-4mx$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì $m>0$. Khi đó ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2\right)$. Ta giác OBC cân tại O, với $I\left(0;-m^2\right)$ trung điểm của BC

Theo yêu cầu bài toán, ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}OI.BC=\dfrac{1}{2}\left|-m^2\right|.2\sqrt{m}<1\Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 17. **(Liên Trường - Nghệ An -2018)** Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $m_0\in(-1;0]$. **B.** $m_0\in(-2;-1]$. **C.** $m_0\in(-\infty;-2]$. **D.** $m_0\in(-1;0)$.

Lời giải

Ta có: $y=x^4+2mx^2-1\Rightarrow y'=4x^3+4mx$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\end{array}\right.$ (1).

Để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có ba điểm cực trị thì $y'=0$ phải có ba nghiệm phân biệt tức là $m<0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$ nên ta gọi $A(0;-1)$, $B\left(-\sqrt{-m};-m^2-1\right)$, $C\left(\sqrt{-m};-m^2-1\right)$

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC$ với H là trung điểm của BC nên $H\left(0;-m^2-1\right)$. Nên: $AH=\sqrt{\left(-m^2\right)^2}=m^2$ và $BC=\sqrt{\left(2\sqrt{-m}\right)^2}=2\sqrt{-m}$.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.m^2.2\sqrt{-m}$ theo giả thiết $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}$ nên $m^2\sqrt{-m}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow m=-2$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=0$. **B.** $m=-1;m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=1;m=0$.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow$ loại **B**

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi

$b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow -8(m+1)^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Cách 2: Ta có $y' = 4x(x^2 - m - 1)$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{array}\right.$. Để đồ thị số có ba điểm cực trị thì $m > -1 \; (*)$

Tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; m^2)$, $B(\sqrt{m+1}; -2m-1)$, $C(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H(0; -2m-1)$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi

$AH = BH \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^4} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = 0 : T/m(*)$.

Câu 19. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Cho hàm số: $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. **B.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **C.** $m = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

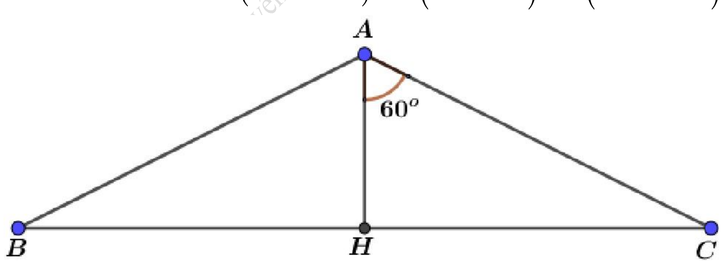
Lời giải

$y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$.

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; m^2 + m)$, $B(\sqrt{-m}; m)$, $C(-\sqrt{-m}; m)$.



Do ΔABC cân tại A nên gọi $H(0; m)$ là trung điểm của BC thì ΔAHC vuông tại H.

ΔABC có một góc bằng $120°$ khi và chỉ khi $\widehat{HAB} = \widehat{HAC} = 60° \Leftrightarrow HB = AH.\tan\widehat{HAB}$

$\Leftrightarrow \sqrt{-m} = m^2\sqrt{3} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Bỏ cặp ngoặc.

Câu 20. **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - m$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là:

A. $m = 1; m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $m = 1; m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $m = -1; m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m = -1; m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

$y = x^4 - 2mx^2 - m \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx$.

Với $m > 0$ ta có ba cực trị $A(0; -m); B(-\sqrt{m}; -m^2 - m); C(\sqrt{m}; -m^2 - m)$.

$S_{ABC}=\dfrac{abc}{4R}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}2\sqrt{m}\left|m^2\right|=2\dfrac{\sqrt{m}AB^2}{4}\Leftrightarrow 2m^2=m^4+m\Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0(l) \\ m=1(n) \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(n) \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(l) \end{array}\right.$$

Dạng 6. Tìm m để hàm số bậc 2 trên bậc 1 có cực trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 1. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 5)** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=1-x$.

Lời giải

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
- $y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(\Rightarrow y=2) \\ x=-2(\Rightarrow y=-1) \end{array}\right.$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(-2;-1)$.
- Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M,N của đồ thị hàm số đã cho là: $y=x+1$.

Cách khác:

- Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương ứng của hàm số là $y_0=\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}=\dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=\dfrac{(x^2+2x+3)'}{(2x+1)'}=x+1$.

Câu 2. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m<0$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<2$. **D.** $m>-2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x\neq 1$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2+2x-m}{(1-x)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi đi qua hai điểm đó $\Leftrightarrow -x^2+2x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\-1+2-m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-m>0\\m\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow m<1$.

Vậy $m<1$ thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Không có đáp án hoặc chọn A.

Câu 3. **(Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2m}{x+1}$ có

hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}, \forall x\neq -1$. Đặt $f(x)=x^2+2x-m$, $h(x)=x^2+mx+2m$, $g(x)=x+1$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m+1>0\\f(-1)=-m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m>-1\ (1)$. Khi đó $\begin{cases}y(x_1)=\dfrac{h'(x_1)}{g'(x_1)}=2x_1+m\\y(x_2)=\dfrac{h'(x_2)}{g'(x_2)}=2x_2+m\end{cases}$.

Suy ra $A(x_1\,;2x_1+m)$, $B(x_2\,;2x_2+m)$. Suy ra $\overrightarrow{OA}=(x_1\,;2x_1+m)$, $\overrightarrow{OB}(x_2\,;2x_2+m)$.

ΔOAB vuông tại O khi $\begin{cases}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}\ \ (2)\\\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=x_1.x_2+(2x_1+m)(2x_2+m)=0\ \ (3)\end{cases}$.

$(3)\Leftrightarrow m^2+5x_1.x_2+2m(x_1+x_2)=0$. Kết hợp với định lí Vi-et cho phương trình $f(x)=0$ ta

được $m^2-5m-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\,(\textit{không thỏa mãn}\,(2))\\m=9\,(\textit{thỏa mãn}\,(1),(2))\end{array}\right. \Rightarrow S=\{9\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 9.

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Biết rằng đồ thị $(H): y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A,B. Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình của đường thẳng AB là $y=\dfrac{(x^2+2x+m)'}{(x-2)'} \Leftrightarrow y=2x+2 \Leftrightarrow 2x-y+2=0$.

+ Khoảng cách $d(O;AB)=\dfrac{|2.0-0+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 5. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\angle AOB=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 16.

Lời giải

$$y'=\frac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-\left(m+m^2\right)}{(x-1)^2}$$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+m+m^2>0\\ -1-m-m^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\forall m\in\mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y_A=2x+m$.

Gọi $x_A;\,x_B$ là hoành độ của A, B khi đó $x_A;\,x_B$ là nghiệm của $x^2-2x-\left(m+m^2\right)$.

Theo định lí Viet ta có $x_A+x_B=2$; $x_A.x_B=-m^2-m$.

$y_A=2x_A+m$; $y_B=2x_B+m$.

$\angle AOB=90^\circ\Rightarrow x_A.x_B+y_A.y_B=0\Leftrightarrow x_Ax_B+4x_Ax_B+2m\left(x_A+x_B\right)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 5\left(-m^2-m\right)+4m+m^2=0\Leftrightarrow -4m^2-m=0\Leftrightarrow m=0;m=-\dfrac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

Câu 6. **(Chuyên KHTN - 2018)** Với tham số m, đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>2$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Ta có $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đạo hàm là $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị ta phải có $\begin{cases}1+m>0\\ 1-2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-1$.

Gọi hai hoành độ cực trị là x_1 và x_2 ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2\\ x_1x_2=-m\end{cases}$.

Khi đó điểm $A\left(x_1,2x_1-m\right)$ và $B\left(x_2,2x_2-m\right)$.

$AB=\sqrt{4+4m}.\sqrt{5}=5\Leftrightarrow 4+4m=5\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

Câu 7. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B. Tìm số giá trị m sao cho ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{|m|\}$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}=x+\dfrac{4}{x-|m|}$.

$y'=1-\dfrac{4}{\left(x-|m|\right)^2}$, $\forall x\in D$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+|m|\\x=-2+|m|\end{array}\right.$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $B\left(2+|m|;4+|m|\right)$, $A\left(-2+|m|;-4+|m|\right)$.

$\overrightarrow{AB}=(4;8)$, $\overrightarrow{AC}=\left(6-|m|;6-|m|\right)$.

Ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\\6-|m|\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6-|m|=4k\\6-|m|=8k\\6-|m|\neq 0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn.

Câu 8. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ là:

A. $m=-1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Lời giải

$y'=1-\dfrac{1}{(x+m)^2};y''=\dfrac{2}{(x+m)^3}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ khi $\begin{cases}y'(2)=0\\y''(2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\dfrac{1}{(2+m)^2}=0\\\dfrac{2}{(2+m)^3}<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-3\end{array}\right.\\m<-2\end{cases}\Leftrightarrow m=-3$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 9. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{2x-2m}$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu, điều kiện của tham số m là:

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$ **B.** $-1<m<2$. **C.** $-2<m<1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>1\end{array}\right.$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq m$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{2(x-m)^2}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu, thì $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+2m^2-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác m.

Ta có: $\begin{cases}\Delta'=-m^2+m+2>0\\m^2-2m.m+2m^2-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<2\\m^2-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<2$.

Câu 10. **(Chuyên Nguyễn Dình Triểu - Dồng Tháp - 2018)** Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nảo?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}, y''=\dfrac{2}{(x+m)^3}$

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ nên $\begin{cases}y'(2)=0\\ y''(2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m^2+4m+3}{(m+2)^2}=0\\ \dfrac{2}{(m+2)^3}<0\end{cases}\Leftrightarrow m=-3$ thuộc $(-4;-2)$.

Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho hàm số $y=x+p+\dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Tính pq.

A. $pq=2$. **B.** $pq=\dfrac{1}{2}$. **C.** $pq=\sqrt{3}$. **<u>D</u>.** $pq=1$.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=1-\dfrac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$, suy ra $y'(-2)=0\Rightarrow 0=1-q\Leftrightarrow q=1$.

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;-2)$ nên $-2=-2+p-q\Leftrightarrow p-q=0$.

Do đó $p=q=1$.

Thử lại: với $p=q=1$ ta được $y=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

Ta có $y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

Từ đó có bảng biến thiên của hàm số:

x		-2		-1		0	
y'	+	0	-	‖	-	0	+
y	-∞ ↗	-2	↘	-∞ ‖ +∞	↘	2	↗ +∞

Rõ ràng đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Vậy $p=q=1\Rightarrow pq=1$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

A. $m=7$. **B.** $m=5$. **<u>C</u>.** $m=-9$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}\Rightarrow y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ x^2+2mx+m^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ \left[\begin{array}{l}x=-m+1\\ x=-m-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m+1\\ x=-m-1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-m-1		-m		-m+1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-m-1$.

Vậy $y(-m-1)=7\Leftrightarrow -m-2=7\Leftrightarrow m=-9$.