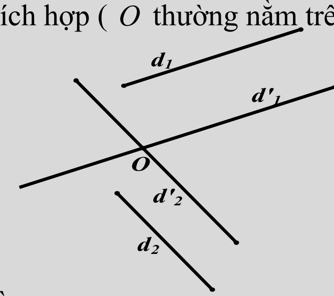
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Dạng 1. Góc của đường thẳng với đường thẳng

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách

Cách 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng).



Từ O dựng các đường thẳng d_1', d_2' lần lượt song song (có thể tròng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2. Góc giữa hai đường thẳng d_1', d_2' chính là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2.

Lưu ý 1: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác

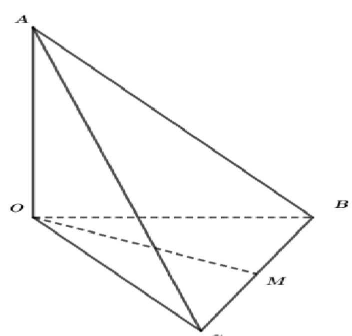
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Cách 2. Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng d_1, d_2

Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 xác định bởi $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Lưu ý 2: Để tính $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}, \left|\overrightarrow{u_1}\right|, \left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng,sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán.

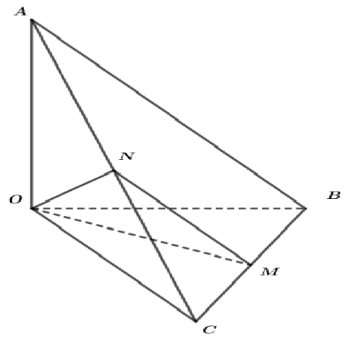
Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. 45^0 **B.** 90^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Lời giải

Chọn D



Đặt $OA = a$ suy ra $OB = OC = a$ và $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$

Gọi N là trung điểm AC ta có $MN // AB$ và $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra góc $\widehat{(OM, AB)} = \widehat{(OM, MN)}$. Xét $\widehat{OMN}$

Trong tam giác OMN có $ON = OM = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên OMN là tam giác đều

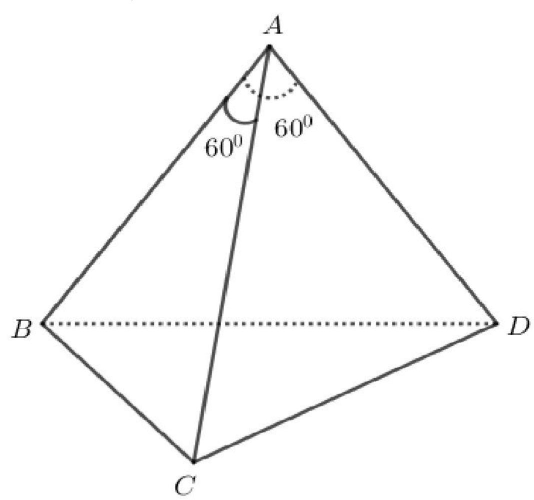
Suy ra $\widehat{OMN} = 60^0$. Vậy $\widehat{(OM, AB)} = \widehat{(OM, MN)} = 60^0$

Câu 2. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD, \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^0, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Chọn khẳng định đúng về góc φ.

A. $cos\varphi = \frac{3}{4}$ **B.** 30^0 **C.** 60^0 **D.** $cos\varphi = \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn D

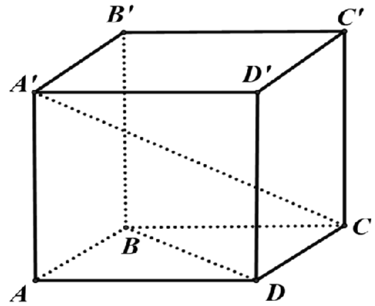


Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AD.cos\,60^0 - AB.AC.cos\,60^0$

$= AB.AD.cos\,60^0 - AB.\frac{3}{2}AD.cos\,60^0 = \frac{-1}{4}AB.AD$

$cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD} = \frac{-1}{4} \Rightarrow cos\varphi = \frac{1}{4}$

Câu 3. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Tính góc giữa $A'C$ và BD.



A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Mặt khác $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp AA'$.

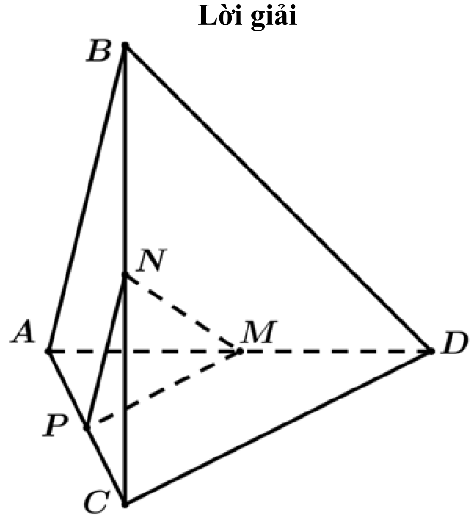
Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C$.

Do đó góc giữa $A'C$ và BD bằng $90°$.

Câu 4. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Biết $MN = a\sqrt{3}$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng.

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải



Gọi P là trung điểm AC, ta có $PM // CD$ và $PN // AB$, suy ra $\left(\widehat{AB,CD}\right) = \left(\widehat{PM,PN}\right)$.

Dễ thấy $PM = PN = a$.

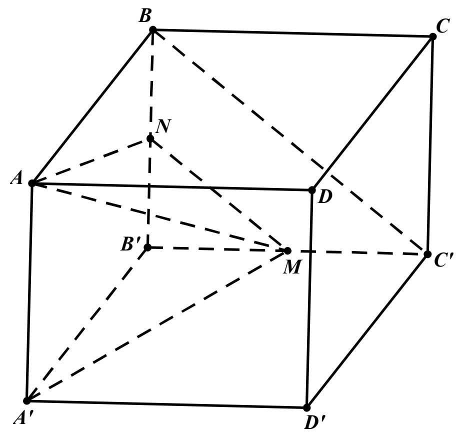
Xét ΔPMN ta có $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM.PN} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2.a.a} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{MPN} = 120^0 \Rightarrow \left(\widehat{AB,CD}\right) = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Câu 5. **(Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải



Giả sử cạnh của hình lập phương là $a>0$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng BB'. Khi đó, $MN//BC'$ nên $(AM,BC')=(AM,MN)$.

Xét tam giác $A'B'M$ vuông tại B' ta có: $A'M=\sqrt{A'B'^2+B'M^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A' ta có: $AM=\sqrt{AA'^2+A'M^2}=\sqrt{a^2+\frac{5a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$.

Có $AN=A'M=\frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN=\frac{BC'}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác AMN ta có:

$$\cos\widehat{AMN}=\frac{MA^2+MN^2-AN^2}{2.MA.MN}=\frac{\frac{9a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}-\frac{5a^2}{4}}{2.\frac{3a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{6a^2}{4}.\frac{4}{6a^2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

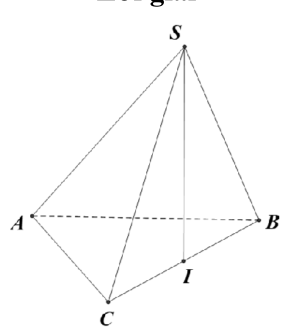
Suy ra $\widehat{AMN}=45^\circ$.

Vậy $(AM,BC')=(AM,MN)=\widehat{AMN}=45^\circ$.

Câu 6. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA=SB=SC=AB=AC=a$ và $BC=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải



Ta có $BC = a\sqrt{2}$ nên tam giác ABC vuông tại A. Vì $SA = SB = SC = a$ nên hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tam giác ABC vuông tại A nên I là trung điểm của BC.

Ta có $\cos(AB, SC) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}\right|}{AB.SC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{2}BA.BC.\cos 45° = -\dfrac{a^2}{2}$.

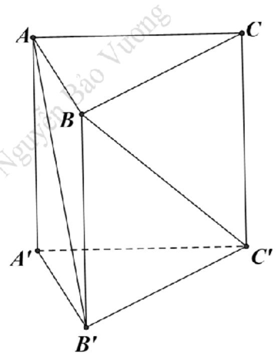
$\cos(AB, SC) = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(AB, SC)} = 60°$.

Cách 2: $\cos(AB, SC) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}\right|}{AB.SC}$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC} = \left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right)\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = SB.SC.\cos 90° - SA.SC.\cos 60° = -\dfrac{a^2}{2}$.

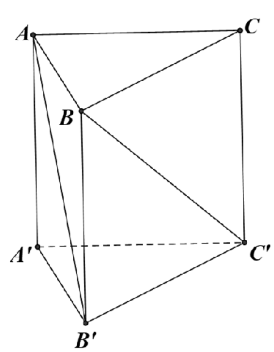
Khi đó $\cos(AB, SC) = \dfrac{\left|\frac{-a^2}{2}\right|}{a^2} = \dfrac{1}{2}$

Câu 7. **(Chuyên Đh Vinh 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'} = -\dfrac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \dfrac{3a^2}{2}$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|}=\dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}.a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{AB',BC'}\right)=60^\circ$.

Câu 8. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=DC=AC=AB=a$, $\widehat{ABC}=45^\circ$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DC.

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải

Ta có tam giác ABC vuông cân tại A, tam giác BDC vuông cân tại D.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}$

$=\left|\overrightarrow{DB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD}\right)-\left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}\right)=-\dfrac{1}{2}a^2$.

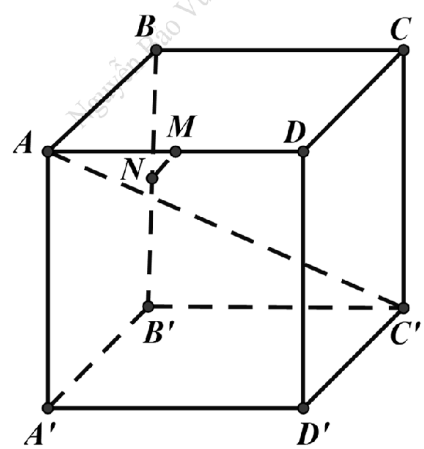
Mặt khác ta lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=120^\circ\Rightarrow\left(AB,CD\right)=60^\circ$.

Câu 9. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

* Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AD},\ \vec{c}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=a,\ \vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}=0$.

* Ta có:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$$

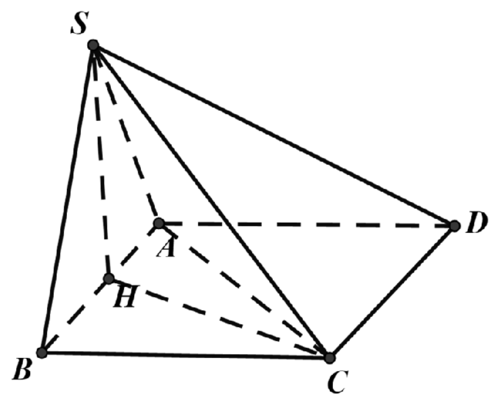
$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=a^2$$

$$\cos\left(MN;AC'\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 10. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC

A. $\frac{2}{\sqrt{7}}$. **<u>B</u>.** $\frac{2}{\sqrt{35}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải



$\left(SC,\left(ABCD\right)\right) = \left(SC, CH\right) = \widehat{SCH} = 60^0$.

$\cos\left(SB, AC\right) = \frac{\left|\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC}\right|}{SB.AC}$

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{SH}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}AB^2 = 2a^2$

$AC = a\sqrt{5}$, $CH = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, $SH = CH.\tan\widehat{SCH} = a\sqrt{6}$.

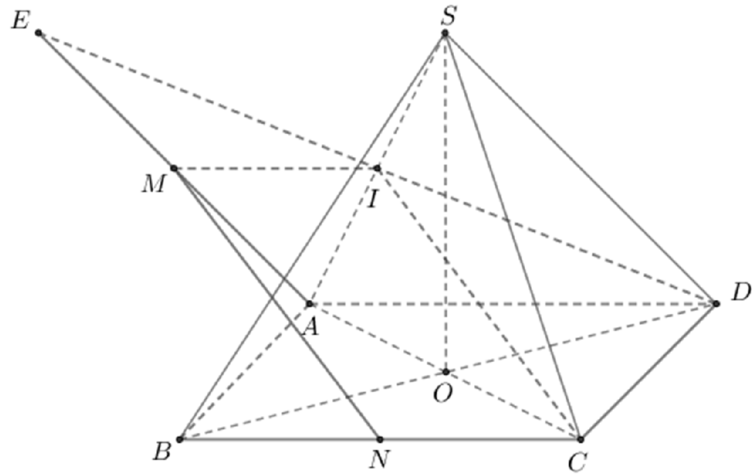
$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{6}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{7}$.

$\cos\left(SB, AC\right) = \frac{\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC}}{SB.AC} = \frac{2a^2}{a\sqrt{7}.a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{35}}$.

Câu 11. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

<u>A</u>. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm SA thì $IMNC$ là hình bình hành nên $MN // IC$.

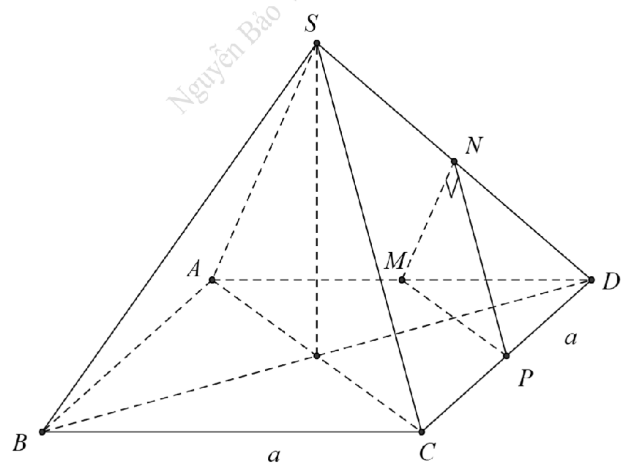
Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp IC$ mà $MN // IC \Rightarrow BD \perp MN$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $90°$.

Cách khác: có thể dùng hệ trục tọa độ của lớp 12, tính tích vô hướng $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{MN} = 0$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và SC là

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi P là trung điểm của CD.

Ta có: $NP // SC \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP)$.

Xét tam giác MNP ta có: $MN = \frac{a}{2}$, $NP = \frac{a}{2}$, $MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

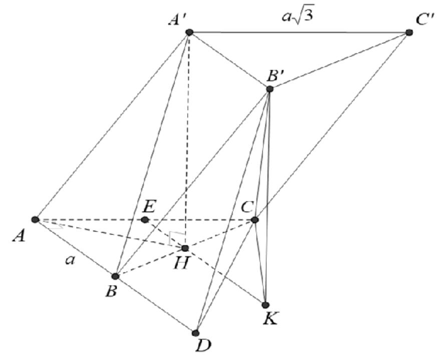
$\Rightarrow MN^2 + NP^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = MP^2 \Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại N

$\Rightarrow \widehat{MNP} = 90° \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP) = 90°$.

Câu 13. **(Sở Quảng Nam - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AC; D và K là các điểm thỏa $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{A'B'}$.

Ta có $B'K \perp (ABC)$ và $B'D // A'B \Rightarrow (A'B, B'C) = (B'D, B'C) = \widehat{DB'C}$.

Ta tính được $BC = 2a \Rightarrow BH = a$; $B'D = A'B = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$.

$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{3a^2 + 4a^2} = a\sqrt{7}$; $CK = \sqrt{CE^2 + EK^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}} = a\sqrt{3}$.

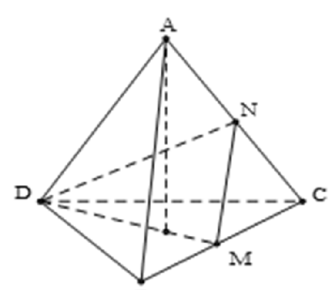
$B'C = \sqrt{B'K^2 + CK^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$.

$\cos\widehat{CB'D} = \frac{B'D^2 + B'C^2 - CD^2}{2.B'D.B'C} = \frac{4a^2 + 6a^2 - 7a^2}{2.2a.a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

Câu 14. **(Sở Yên Bái - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Tính giá trị của $\cos(AB, DM)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng a.

Gọi N là trung điểm của AC.

Khi đó: $\left(\widehat{AB, DM}\right) = \left(\widehat{MN, DM}\right)$

Ta có: $MN = \dfrac{a}{2}$, $DM = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

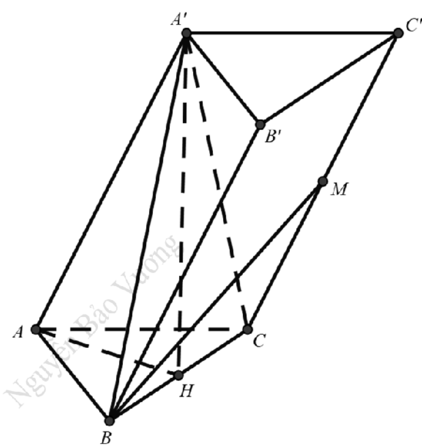
$$\cos\widehat{NMD} = \dfrac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2.MN.MD} = \dfrac{\dfrac{a^2}{4}}{2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos\left(AB, DM\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 15. **(Sở Nam Định - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\left(ABC\right)$. M là trung điểm cạnh CC'. Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải



Ta có: $AH = A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp \left(AA'H\right) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2.6}{16}} = a\dfrac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right) = 0 + AA'.CM = \dfrac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos\left(AA', BM\right) = \dfrac{\left|\dfrac{3a^2}{4}\right|}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a\sqrt{22}}{4}} = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 16. **(Sở Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Côsin của góc giữa hai đường thẳng NC và BI bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Giả sử các cạnh của lăng trụ bằng a.

Gọi K là trung điểm của $MP \Rightarrow BI//NK \Rightarrow (NC,BI)=(NC,NK)$.

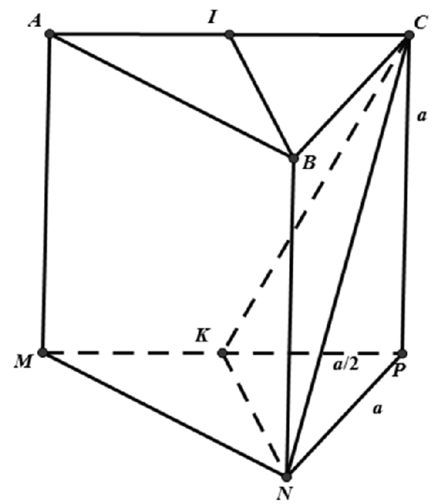
$ABC.MNP$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow CP \perp (MNP)$

$CK=\sqrt{CP^2+PK^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$CN=\sqrt{CP^2+NP^2}=a\sqrt{2}$

$NK=\sqrt{NP^2-KP^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\cos\widehat{CNK}=\dfrac{NC^2+NK^2-CK^2}{2NC.NK}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

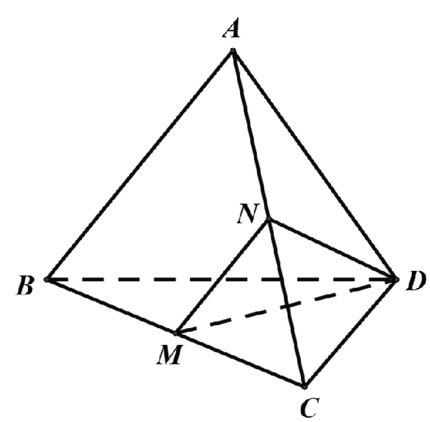


Câu 17. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB,DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm của AC. Suy ra $MN // AB$

Do đó: $\cos(AB,DM)=\cos(MN,DM)$

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$, suy ra $MN=\dfrac{a}{2}$; $ND=MD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác MND ta có: $\cos\widehat{NMD}=\dfrac{MN^2+MD^2-ND^2}{2.MN.MD}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\cos(AB,DM)=\cos\widehat{NMD}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 18. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30^0. Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M,N là trung điểm AB,BC. Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM,DN).

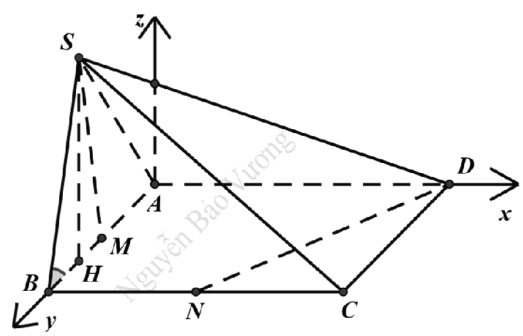
A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Trong (SAB), kẻ $SH\perp AB$ tại H. Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SH\subset(SAB),SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Kẻ tia $Az//SH$ và chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.



Trong tam giác SAB vuông tại S, $SB=AB.\cos\widehat{SBA}=a.\cos30^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

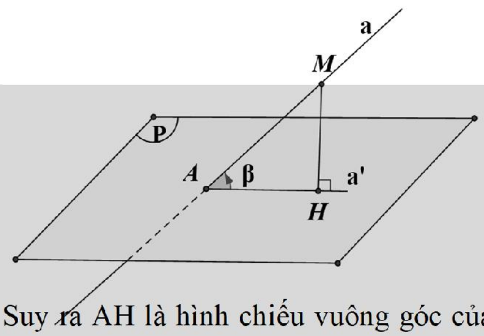
Trong tam giác SBH vuông tại H, $BH=SB.\cos\widehat{SBH}=\dfrac{3a}{4}$ và $SH=BH.\sin\widehat{SBA}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$AH=AB-BH=a-\dfrac{3a}{4}=\dfrac{a}{4}\Rightarrow H\left(0;\dfrac{a}{4};0\right)\Rightarrow S\left(0;\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

$M\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$, $D(a;0;0)$, $N\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{SM}=\left(0;\dfrac{a}{4};-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{DN}=\left(-\dfrac{a}{2};a;0\right)\Rightarrow\cos(SM,DN)=\dfrac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{SN.DN}=\dfrac{\dfrac{a^2}{4}}{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Dạng 2. Góc của đường thẳng với mặt phẳng



Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P)

Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0° \le \alpha \le 90°$

Đầu tiên tìm giao điểm của d và (P) gọi là điểm **A.**

Trên d chọn điểm B khác A, dựng BH vuông góc với (P) tại H. Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).

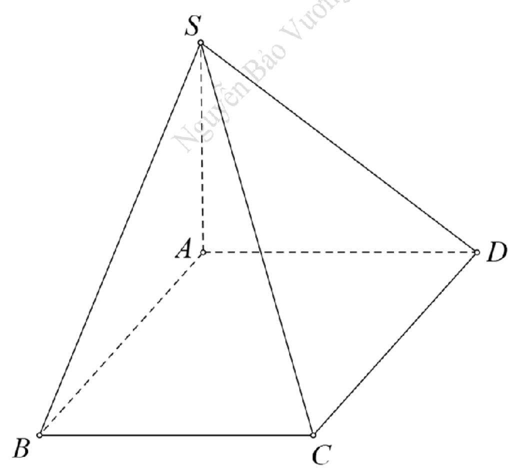
Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$.

Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)), thì ta sử dụng công thức sau đây. Gọi α là góc giữa d và (P) suy ra:

. $\sin\alpha = \dfrac{d\left(M,(P)\right)}{AM}$

Ta phải chọn điểm M trên d, mà có thể tính khoảng cách được đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

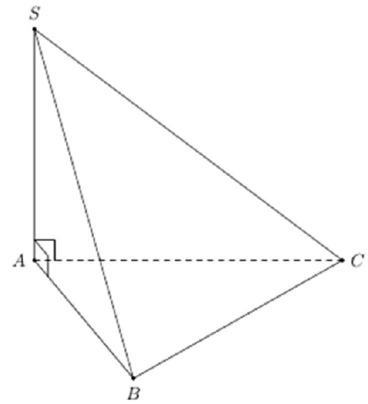
Lời giải

Chọn C

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên ta có $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA}$

$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a.\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

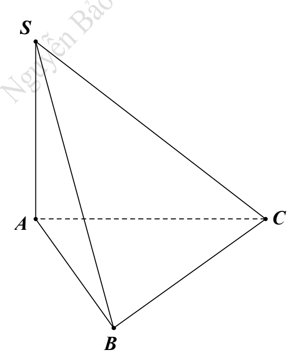
Ta có $\left.\begin{matrix} SB\cap(ABC)=B \\ SA\perp(ABC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow \widehat{(SB,(ABC))}=\widehat{SBA}$

Do tam giác ABC vuông cân tại $B\Rightarrow AB^2+BC^2=AC^2\Leftrightarrow 2AB^2=(2a)^2\Leftrightarrow 2AB^2=4a^2\Leftrightarrow AB=a\sqrt{2}.$

Xét tam giác vuông SAB vuông tại A, có $SA=AB=a\sqrt{2}\Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại $A\Rightarrow \widehat{SBA}=45°$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{15}a$ (tham khảo hình bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C

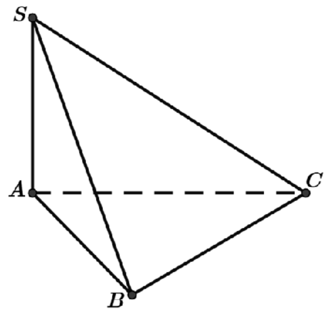
Do SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng đáy. Từ đó suy ra: $\left(\widehat{SC;(ABC)}\right)=\left(\widehat{SC;AC}\right)=\widehat{SCA}$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a$.

Trong tam giác SAC vuông tại A có: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{\sqrt{15}a}{\sqrt{5}a}=\sqrt{3}\Rightarrow \widehat{SCA}=60°$.

Vậy $\left(\widehat{SC;(ABC)}\right)=60°$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB=3a$, $BC=\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$ (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 60°. **B.** 45^{0}. **C.** 30^{0}. **D.** 90^{0}.

Lời giải

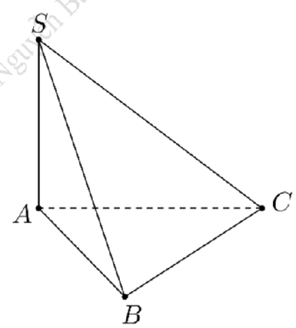
Chọn C

Ta có: $\left(SC;\left(ABC\right)\right)=\widehat{SCA}$

$$\tan\widehat{SCA}=\frac{SA}{AC}=\frac{2a}{\sqrt{\left(3a\right)^{2}+\left(\sqrt{3}a\right)^{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SCA}=30^{0}.$$

Vậy $\left(SC;\left(ABC\right)\right)=30^{\circ}$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a, BC=3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{30}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn C

Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ nên $\widehat{\left(SC,\left(ABC\right)\right)}=\widehat{SCA}$

Ta có: $AC=\sqrt{AB^{2}+BC^{2}}=a\sqrt{10}$

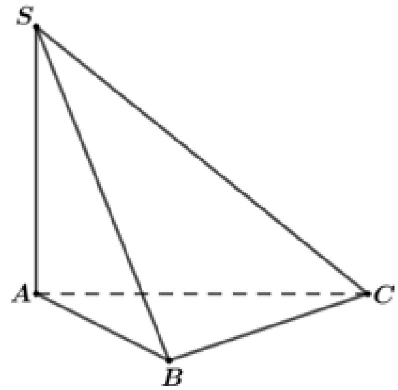
Khi đó $\tan SCA=\frac{SA}{AC}=\frac{a\sqrt{30}}{a\sqrt{10}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SCA}=60^{0}$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$; $BC=a\sqrt{2}$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SC và đáy bằng

A. 90^{0}. **B.** 45^{0}. **C.** 60^{0}. **D.** 30^{0}.

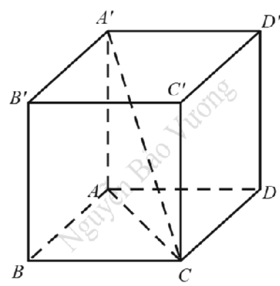
Lời giải

Chọn D



Ta có : Góc SC và đáy là góc $\widehat{SCA}$.
Xét tam giác SCA vuông tại A có:
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$
$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$.

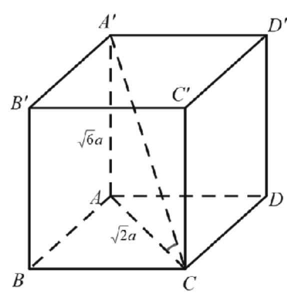
Câu 7. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a, AA' = \sqrt{6}a$ (tham khảo hình dưới). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:



A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



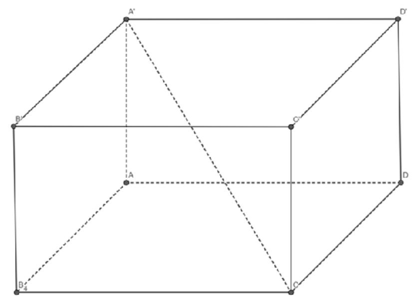
Ta có góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa $A'C$ và AC và bằng góc $\widehat{A'CA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $\Delta A'CA$ có $\tan\widehat{A'CA} = \frac{A'A}{AC} = \frac{\sqrt{6}a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'CA} = 60°$.

Vậy góc $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ và bằng $60°$.

Câu 8. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2\sqrt{2}a$, $AA' = \sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy: hình chiếu của $A'C$ xuống $(ABCD)$ là AC do đó

$(A'C;(ABCD)) = (A'C;AC) = \widehat{A'CA}$.

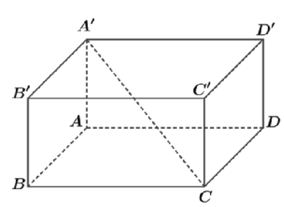
Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3a$.

Xét tam giác $A'CA$ vuông tại C ta có:

$$\tan(A'CA) = \frac{A'A}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \widehat{A'CA} = 30^\circ$.

Câu 9. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn A

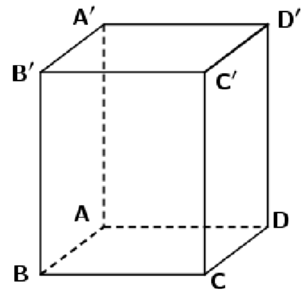
Vì $ABCD$ là hình chữ nhật, có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ nên

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$$

Ta có $(A'C;(ABCD)) = (A'C;CA) = \widehat{A'CA}$

Do tam giác $A'AC$ vuông tại A nên $\tan\widehat{A'AC} = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'AC} = 30^\circ$.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a,\ AD = \sqrt{3}a,\ AA' = 2\sqrt{3}a$ (tham khảo hình vẽ).

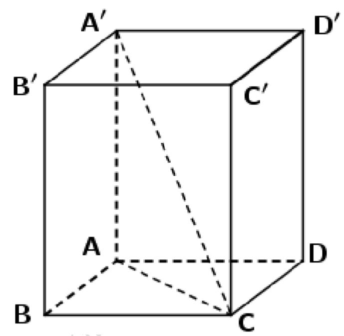


Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



Do $A'A \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng $(ABCD)$

suy ra góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{A'CA}$.

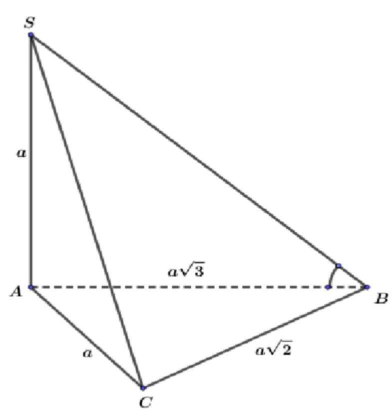
$$\text{Có } \tan\widehat{A'CA} = \frac{A'A}{AC} = \frac{A'A}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{a^2 + \left(\sqrt{3}a\right)^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'CA} = 60^\circ.$$

Câu 11. **(Mã 103 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60° **B.** 90° **C.** 30° **D.** 45°

Lời giải

Chọn C



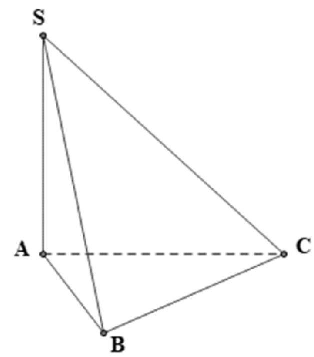
Có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=\left(\widehat{SB,AB}\right)=\widehat{SBA}$.

Mặt khác có ΔABC vuông tại C nên $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=a\sqrt{3}$.

Khi đó $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=30°$.

Câu 12. **(Mã 102 - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$ và $BC=\sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C

Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA}$.

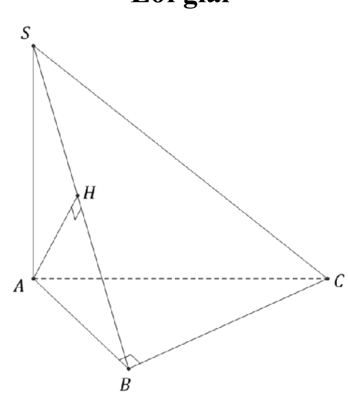
Mà $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+3a^2}}=1$.

Vậy $\widehat{SCA}=45°$.

Câu 13. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC=2a$, $BC=a$, $SB=2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Trong (SAB) kẻ $AH\perp SB$ $(H\in SB)$.

Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $SB \perp AH$ do cách dựng nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay góc $\widehat{ASB}$.

Tam giác ABC vuông ở B $\Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$

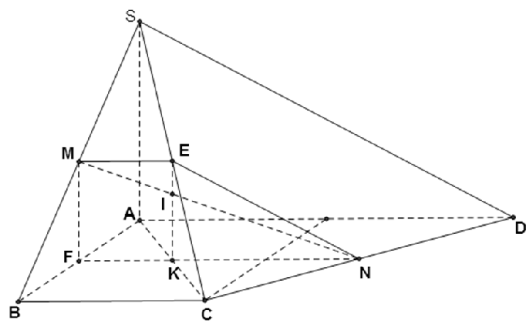
Tam giác SAB vuông ở A $\Rightarrow \sin \widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 30°$

Câu 14. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thang vuông tại 1và B. $AB = BC = a, AD = 2a$. Biết SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, CD. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC)

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{55}}{10}$ **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

Chọn C



Ta gọi E, F lần lượt là trung điểm của $SC_{=}AB$.

Ta có $ME//NF$ (do cùng song song với BC. Nên tứ giác MENF là hình thang,

và $\begin{cases} MF / ISA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MF \perp (ABCD)$ hay tứ giác MENF là hình thang vuông tại M, F

Gọi $K = NF \cap AC, I = EK \cap M$ thì $I = MN \cap (SAC)$

Ta có: $\begin{cases} NC \perp AC \\ NC \perp SA \end{cases} \Rightarrow NC \perp (SAC)$ hay E là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC)

Từ đó ta có được, góc giữa MN và (SAC) là góc giữa MN và CI

Suy ra, gọi Q là góc giữa MN và (SAC) thì $\sin\alpha = \frac{CN}{IN}$

$NC = \frac{1}{2}CD = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{IN}{M} = \frac{KN}{ME} = 2 \Rightarrow IN = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}\sqrt{MF^2 + FN^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$

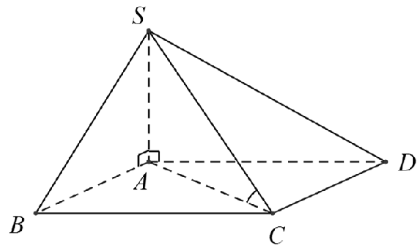
Vậy $\sin\alpha = \frac{CN}{IN} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 15. **(Mã 102 - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$ **B.** $60°$ **C.** $30°$ **D.** $90°$

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $SA = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{2}a$ $\Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.

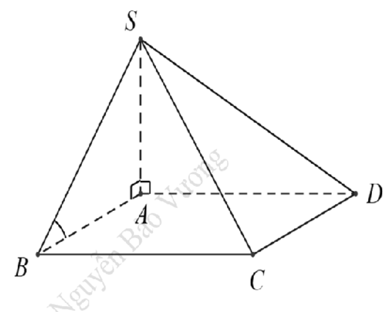
Vậy góc giữa đường thẳng SC và và mặt phẳng đáy bằng bằng $45°$.

Câu 16. **(Mã 101 - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$

Lời giải

Chọn B

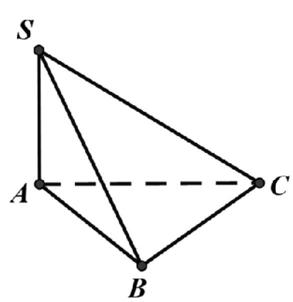


Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SBA}$.

Ta có $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và và mặt phẳng đáy bằng bằng $60°$.

Câu 17. **(Mã 101 - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng:



A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

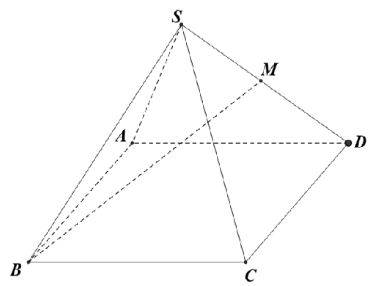
Do đó $\left(SC,\left(ABC\right)\right)=\left(SC,AC\right)=\widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại B, $AB=a\sqrt{3}$ và $BC=a$ nên $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4a^2}=2a$.

Do đó tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA}=45^0$.

Vậy $\left(SC,\left(ABC\right)\right)=45^0$.

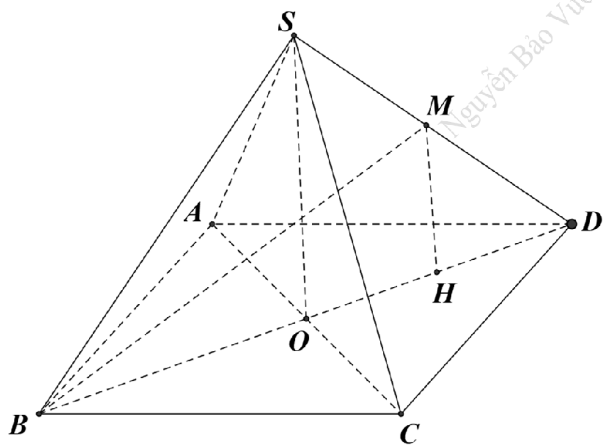
Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có $SO\perp\left(ABCD\right)$ và $SO=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

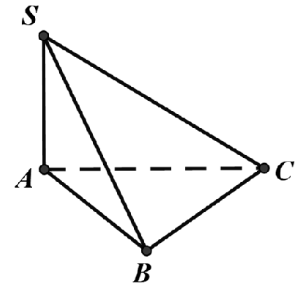
Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH//SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $MH=\dfrac{1}{2}SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Khi đó ta có $\tan\widehat{MBH}=\dfrac{MH}{BH}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{1}{3}$.

Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng $\dfrac{1}{3}$

Câu 19. **(Mã 104 - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30^o. **B.** 90^o. **C.** 60^o. **D.** 45^o.

Lời giải

Chọn D

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên đường thẳng AC là hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó, $\alpha = \left(\widehat{SC, (ABC)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA}$ (tam giác SAC vuông tại A).

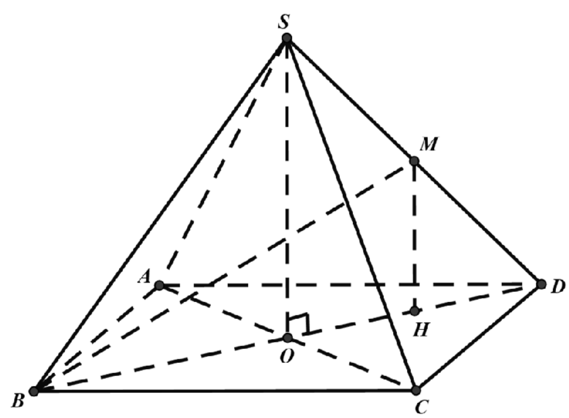
Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = 2a$.

Suy ra $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 1$ nên $\alpha = 45^o$.

Câu 20. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải



Trong tam giác SOD dựng $MH // SO, H \in OD$ ta có $MH \perp (ABCD)$.

Vậy góc tạo bởi BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $MH = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3}{4}2a\sqrt{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

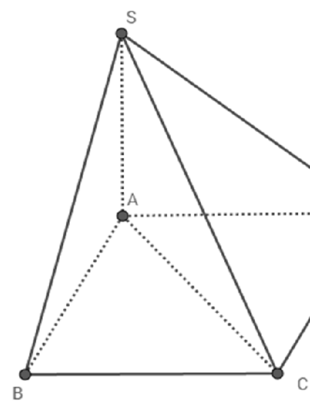
Vậy $\tan \widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 21. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $75°$ **D.** $45°$

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC = a\sqrt{2}$

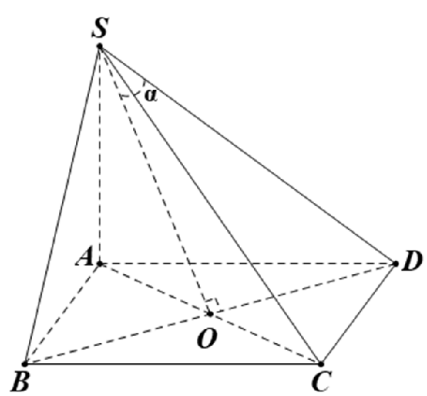
Vì AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $\widehat{SCA} = 30^0$

Câu 22. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow DO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(SAC) \Rightarrow \widehat{(SD;(SAC))} = \widehat{(SD;SO)} = \widehat{DSO} = \alpha$.

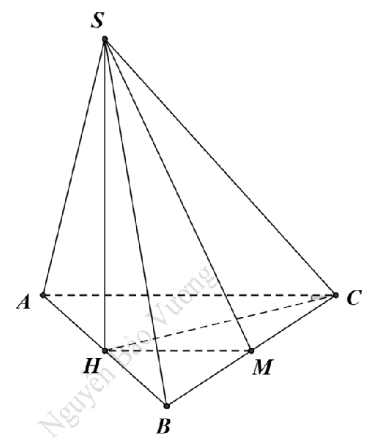
Xét ΔSAD vuông tại A: $SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

Xét ΔSOD vuông tại O: có $SD = 2a$, $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\widehat{DSO} = \dfrac{DO}{SD} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 23. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°, gọi M là trung điểm của BC. Gọi α là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB dễ thấy $SH \perp (ABC)$.

SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° suy ra $\widehat{SCH} = 60^\circ$.

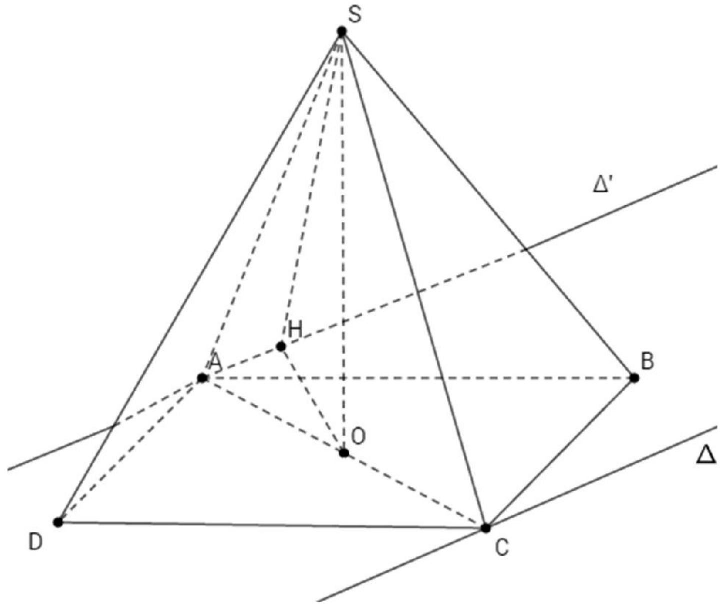
Có $HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = HC.\tan\widehat{SCH} = \dfrac{3a}{2}$.

Dễ thấy $\alpha = \widehat{SMH}$, $HM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{HM}{SM} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 24. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là trung điểm AC và $SO = b$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua C, (Δ) chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ O đến (Δ) là $\dfrac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos((SA),(\Delta))$ bằng

A. $\dfrac{2a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$. **B.** $\dfrac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. **C.** $\dfrac{a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. **D.** $\dfrac{a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$.

Lời giải



Gọi (Δ') là đường thẳng đi qua A và song song với (Δ). Hạ $OH \perp (\Delta')\left(H \in (\Delta')\right)$. Do O là trung điểm của AC và $(\Delta)//(\Delta')$ nên $d\left(O,(\Delta')\right) = d\left(O,(\Delta)\right)$ hay $OH = \frac{a\sqrt{14}}{6}$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Do $AH \perp OH$ và $AH \perp SO$ nên, suy ra $AH \perp SH$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông AHO ta có $OA^2 = OH^2 + AH^2$, suy ra $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{14}}{6}\right)^2} = \frac{a}{3}$.

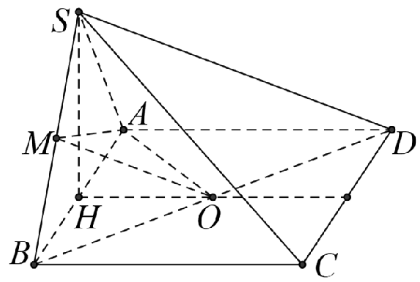
Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông SAO ta có $SA^2 = OA^2 + SO^2$, suy ra $SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 4b^2}}{2}$.

Do $(\Delta)//(\Delta')$ nên $\cos\left((SA),(\Delta)\right) = \cos\left((SA),(\Delta')\right) = \cos\widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$.

Câu 25. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, SB; O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $MO // SD$.

Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$ nên $AM \perp (SBC)$.

Xét tam giác AMO, có:

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$;

$MO = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HA^2 + AD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + 3a^2} = a$.

$\Rightarrow \Delta AMO$ cân tại O

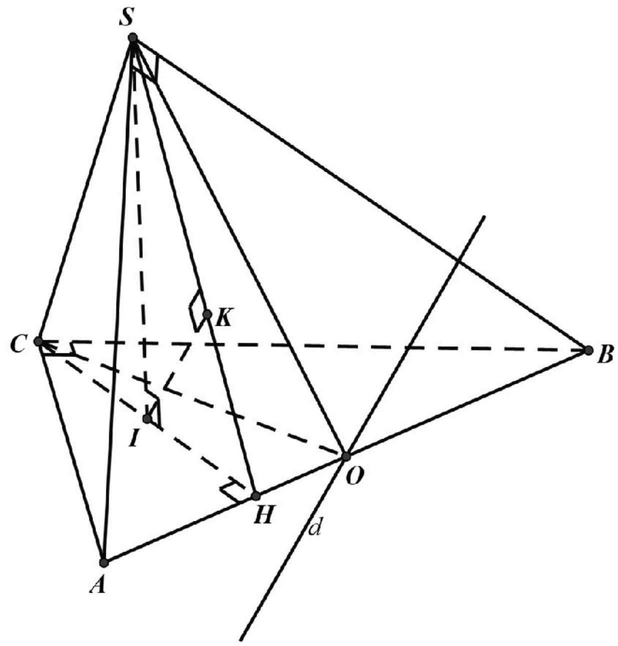
$\Rightarrow \sin\widehat{AMO} = \dfrac{d(O; AM)}{OM} = \dfrac{\sqrt{MO^2 - \dfrac{AM^2}{4}}}{OM} = \dfrac{\sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{16}}}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{SD; (SBC)}\right) = \sin\widehat{AMO} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$

Câu 26. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, CH vuông góc với AB tại H, I là trung điểm của đoạn HC. Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90°$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB, O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$. Góc tạo bởi đường thẳng OO' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Do $\widehat{ASB}=90^\circ$ nên tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$ nằm trên đường thẳng d đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và $d\perp(SAB)$. (1)

Trong mặt phẳng (SCH) kẻ $IK\perp SH$ tại K.

Theo giả thiết $SI\perp(ABC)$ suy ra $SI\perp AB$. Từ $SI\perp AB$ và $AB\perp CH$ suy ra $AB\perp(SCH)\Rightarrow AB\perp IK$.

Từ $IK\perp SH$ và $AB\perp IK$ ta có $IK\perp(SAB)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $IK\parallel d$. Bởi vậy $\widehat{(OO';(ABC))}=\widehat{(d;(ABC))}=\widehat{(IK;(ABC))}$.

Vì $(SCH)\perp(ABC)$ nên IH là hình chiếu vuông góc của IK trên mặt phẳng (ABC). Bởi vậy $\widehat{(IK;(ABC))}=\widehat{(IK,IH)}=\widehat{HIK}=\widehat{HSI}$.

Do tam giác ABC vuông tại C và SAB vuông tại S nên $CO=SO=\dfrac{AB}{2}$.

Xét hai tam giác vuông CHO và SHO có $CO=SO$, cạnh OH chung nên $\Delta CHO=\Delta SHO(\text{c.g.c})$, bởi vậy $CH=SH$.

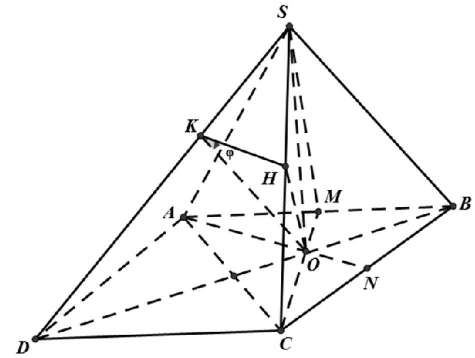
Xét tam giác SIH vuông tại I có $IH=\dfrac{CH}{2}=\dfrac{SH}{2}$, ta có $\sin\widehat{HSI}=\dfrac{IH}{SH}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{HSI}=30^\circ$.

Vậy $\widehat{(OO';(ABC))}=30^\circ$.

Câu 27. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC, gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD), tính $\sin\varphi$ biết rằng $SB=a$.

A. $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sin\varphi=\dfrac{1}{4}$. **C.** $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Cách 1:

● Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC. Dựng đường thẳng d qua O và $d \,//\, SB$, d cắt SD tại K. Khi đó góc giữa SB và $\left(SCD\right)$ chính là góc giữa OK và $\left(SCD\right)$.

● Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp CD$.

Ta lại có: ΔABC đều (ΔABC cân tại B và $\widehat{BAC} = 60°$).

$\Rightarrow AB \perp CO \Rightarrow CD \perp CO$

$\Rightarrow CD \perp (SCO) \Rightarrow (SCD) \perp (SCO)$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SC, khi đó ta có:

$\left.\begin{matrix} OH \perp SC \\ OH \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH \perp \left(SCD\right)$. Do đó góc giữa SB và mặt phẳng $\left(SCD\right)$ là: $\widehat{OKH} = \varphi$.

Ta có: $\sin\varphi = \sin\widehat{OKH} = \dfrac{OH}{OK}$.

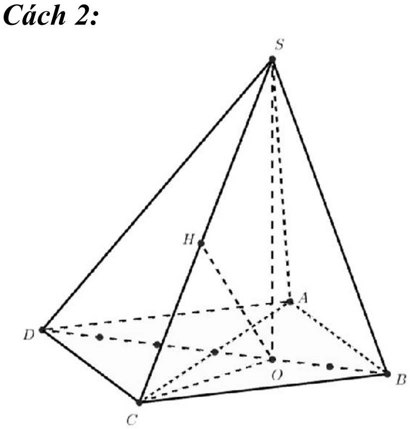
● Tứ diện $S.ABC$ là tứ diện đều cạnh a nên ta tính được:

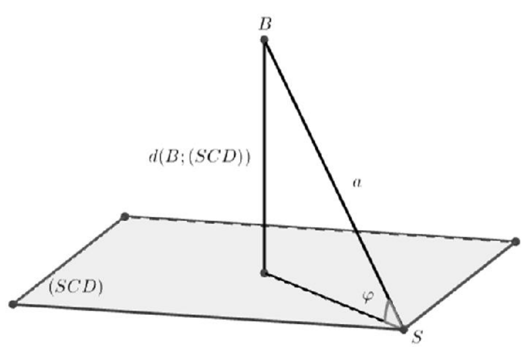
$OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ $\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vì $OK \,//\, SB \Rightarrow \dfrac{OK}{SB} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow OK = \dfrac{2}{3}SB = \dfrac{2}{3}a$.

Vậy: $\sin\varphi = \dfrac{OH}{OK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2:





Trước hết ta chứng minh được $\sin(SB;(SCD)) = \dfrac{d(B,(SCD))}{SB}$ (như hình trên).

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó ta có $CO \perp CD$.

Dựng $OH \perp SC$ suy ra $OH \perp (SCD)$. Ta tính được $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

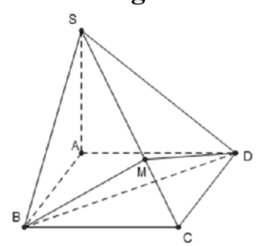
Khi đó $d(B,(SCD))=\frac{3}{2}d(O,(SCD))=\frac{3}{2}OH=\frac{3}{2}\frac{a\sqrt{2}}{3}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\sin(SB;(SCD))=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. **(Sở Bình Phước - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau góc $60°$.

A. $x=2a$. **B.** $x=a$. **C.** $x=\frac{3a}{2}$. **D.** $x=\frac{a}{2}$.

Lời giải



$SB=SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\sqrt{x^2+a^2}$.

$\Delta SDC=\Delta SBC$; $BM\perp SC$; $DM\perp SC$; $BM=DM$; $M\in SC$.

$SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{x^2+2a^2}$; $MD=\frac{SD.CD}{SC}=\frac{a\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}$

$\left(\widehat{(SBC);(SDC)}\right)=\left(\widehat{BM;BD}\right)=60°$.

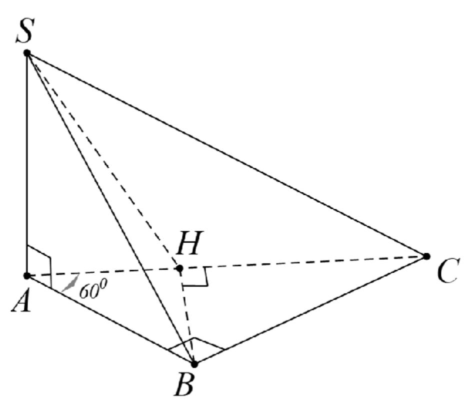
TH1: $\widehat{BMD}=60°\Rightarrow MD=BD\Leftrightarrow\frac{a\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}=a\sqrt{2}$ (vô nghiệm).

TH2: $\widehat{BMD}=120°\Rightarrow BD=MD\sqrt{3}\Leftrightarrow a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{3}\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}\Leftrightarrow x=a$.

Câu 29. **(Sở Lào Cai - 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $AB=2a$, $\widehat{BAC}=60^0$ và $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Kẻ $BH\perp AC\,(H\in AC)$ và theo giả thiết $BH\perp SA$ nên $BH\perp(SAC)$

Do đó, SH là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (SAC)

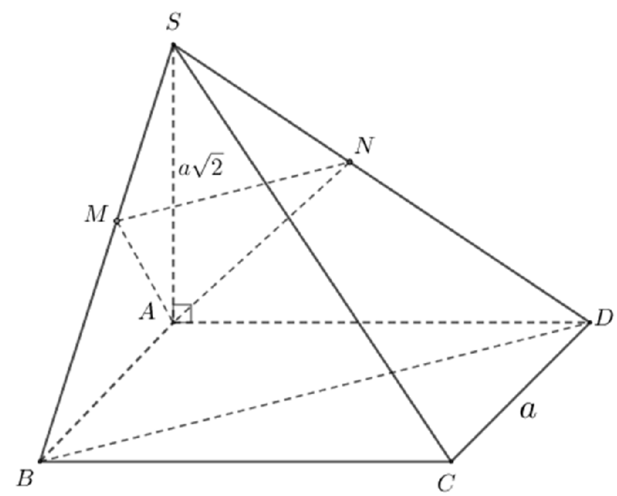
Suy ra, $\widehat{(SB,(SAC))} = \widehat{(SB,SH)} = \widehat{BSH}$.

Mà ta có: $SB = a\sqrt{6}$, $HB = AB\sin 60^0 = a\sqrt{3}$ $\Rightarrow \sin(\widehat{BSH}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BSH} = 45^0$.

Câu 30. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD. Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 120°. **D.** 60°.

Lời giải



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$. Tương tự ta cũng có $AN \perp SC \Rightarrow (AMN) \perp SC$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và (AMN).

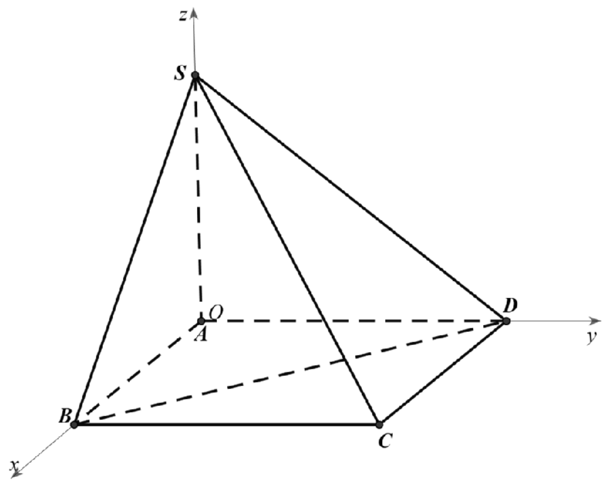
Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{2})$, $C(1;1;0)$, $\overrightarrow{SC} = (1;1;-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0;1;-\sqrt{2})$. Do $(AMN) \perp SC$ nên (AMN) có vtpt $\overrightarrow{SC}$

$\sin\varphi = \dfrac{|3|}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^{\circ}$.

Câu 31. **(Sở Bắc Giang - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;0;a)$.

Ta có $\overrightarrow{BD}=(-a;a\sqrt{3};0)=a(-1;\sqrt{3};0)$, nên đường thẳng BD có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;\sqrt{3};0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$, $\overrightarrow{BC}=(0;a\sqrt{3};0)$ $\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};0;a^2\sqrt{3}\right)=a^2\sqrt{3}\,(1;0;1)$.

Như vậy, mặt phẳng (SBC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;0;1)$.

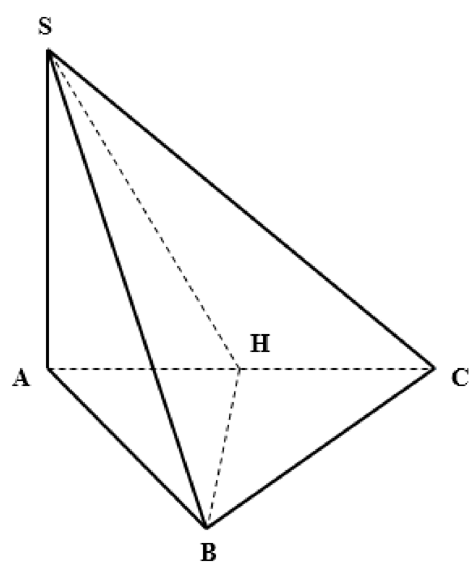
Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

$$\sin\alpha=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|(-1).1+\sqrt{3}.0+0.1\right|}{\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2+0^2}.\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 32. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=2a$, $\widehat{BAC}=60^0$ và $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 30^0. **<u>B</u>.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH \perp AC$

Mà $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\widehat{BSH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H, $BH = AB.\sin 60^0 = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$AH = AB.\cos 60^0 = 2a.\dfrac{1}{2} = a$.

Xét tam giác SAH vuông tại S, $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

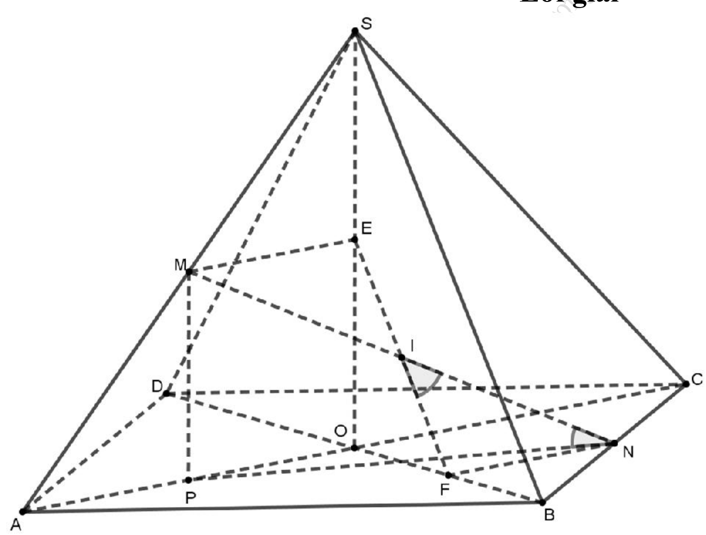
Xét tam giác SBH vuông tại H có $SH = HB = a\sqrt{3}$ suy ra tam giác SBH vuông tại H.

Vậy $\widehat{BSH} = 45^0$.

Câu 33. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60^0, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm SO, OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD).

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$$NP^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP.CN.\cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra: $NP = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $MP = NP.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$; $SO = 2MP = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

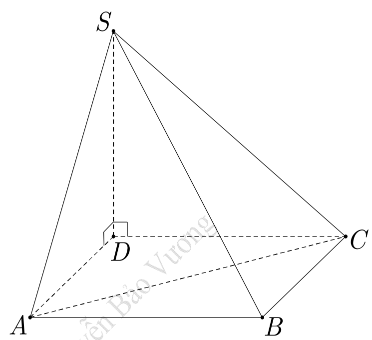
$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow EF = a\sqrt{2}$.

Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành (vì ME và NF song song và cùng bằng $\dfrac{1}{2}OA$).

Gọi I là giao điểm của MN và EF, khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{NIF}$.

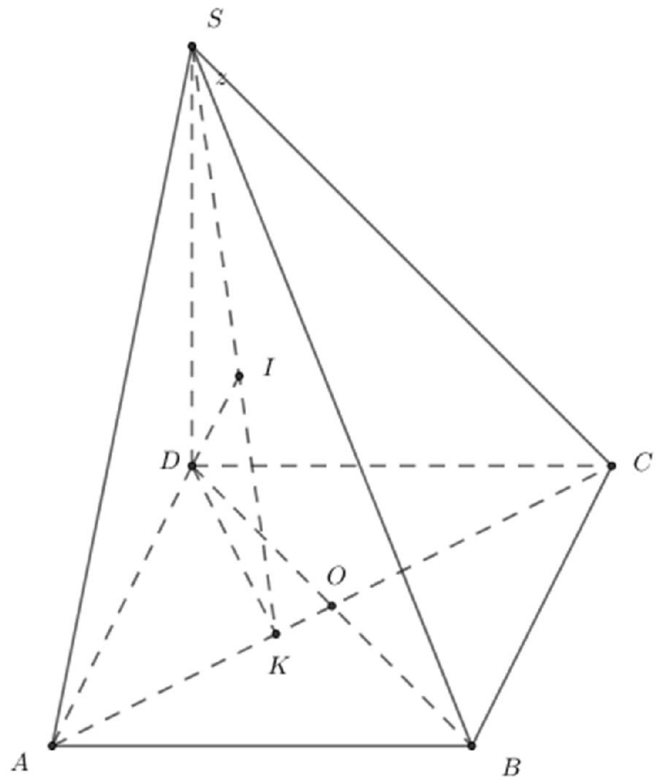
$\cos\widehat{NIF} = \dfrac{IK}{IN} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{4}{a\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 34. **(Chuyên Vinh -2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120°$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ bên). Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC)



A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải



Ta có $\sin\left(\widehat{SB;(SAC)}\right)=\dfrac{d\left(B;(SAC)\right)}{SB}=\dfrac{d\left(D;SAC\right)}{SB}$.

Xét tam giác ABC ta có $AC=\sqrt{BA^2+BC^2-2BA.BC.\cos\widehat{BAC}}=a\sqrt{7}$.

$BO=\sqrt{\dfrac{BA^2+BC^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{4a^2+a^2}{2}-\dfrac{7a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BD=a\sqrt{3}$ và $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{3a^2+3a^2}=a\sqrt{6}$.

Xét tam giác ADC ta có $\dfrac{AD}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{AC}{\sin\widehat{D}}\Rightarrow\sin\widehat{C}=\dfrac{AD.\sin\widehat{D}}{AC}=\dfrac{a.\sin120^\circ}{a\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

Gọi K là hình chiếu của D lên AC, và I là hình chiếu của D lên SK. Ta có $\begin{cases}AC\perp DK\\AC\perp SD\end{cases}\Rightarrow AC\perp DI$. Do đó $\begin{cases}DI\perp SK\\DI\perp AC\end{cases}\Rightarrow d\left(D;(SAC)\right)=DI$.

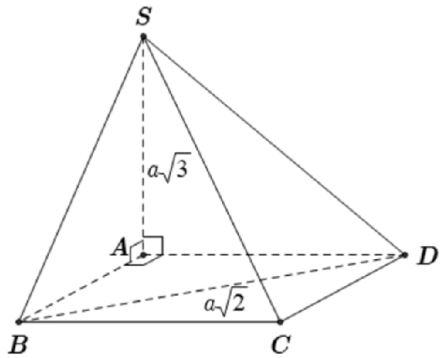
Mặt khác $\sin\widehat{C}=\dfrac{DK}{DC}\Rightarrow DK=DC.\sin\widehat{C}=2a.\dfrac{\sqrt{21}}{14}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác SDK ta có $DI=\dfrac{SD.DK}{\sqrt{SD^2+DK^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\sqrt{3a^2+\dfrac{21}{49}a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

Vậy $\sin\left(\widehat{SB;(SAC)}\right)=\dfrac{d\left(D;SAC\right)}{SB}=\dfrac{DI}{SB}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{4}a}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{4}$.

Trong mặt phẳng (SDK) kẻ $DI\perp SK$ suy ra $d\left(D;(SAC)\right)=DI$.

Câu 35. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{3}$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông, $BD = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng



A. $0°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn B

Đáy $ABCD$ là hình vuông có đường chéo $BD = a\sqrt{2}$ nên cạnh $AB = a$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow SA$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAD)

$\Rightarrow \left(\widehat{SB,(SAD)}\right) = \left(\widehat{SB,SA}\right) = \widehat{BSA}$.

Trong tam giác vuông BSA, ta có: $\tan \widehat{BSA} = \dfrac{AB}{AS} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30°$.

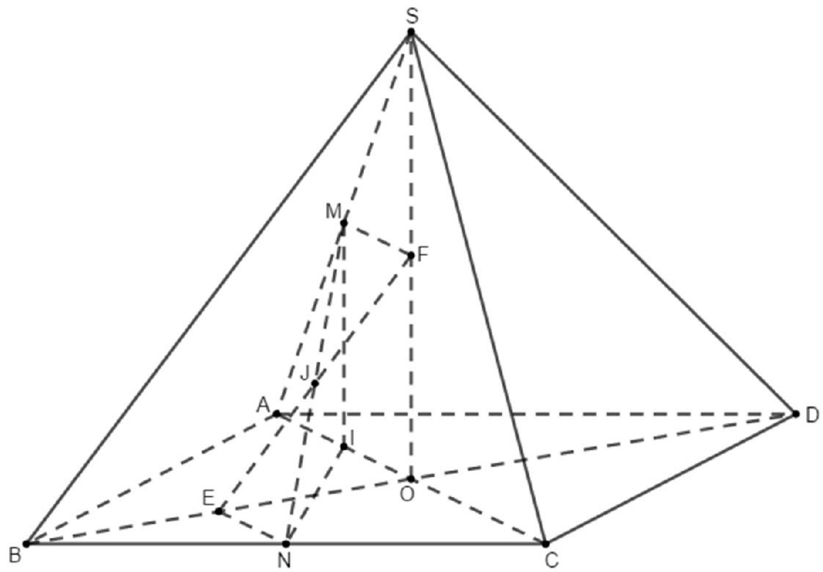
Vậy, $\left(\widehat{SB,(SAD)}\right) = 30°$.

Câu 36. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính cos của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{\sqrt{41}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{41}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết ta có $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm OA thì MI là đường trung bình của $\Delta SOA \Rightarrow MI // SO \Rightarrow MI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow I$ là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow IN$ là hình chiếu của MN trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra $\left(\widehat{MN,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{MN,IN}\right) \Rightarrow \widehat{MNI} = 60°$.

Ta có $NC = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$; $IC = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Áp dụng định lý cosin trong ΔINC ta có $IN^2 = CI^2 + CN^2 - 2CI.CN.\cos\widehat{NCI}$

$\Rightarrow IN^2 = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\cos 45° = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow IN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Do ΔMIN vuông tại I nên $\cos\widehat{MNI} = \frac{IN}{MN} \Rightarrow MN = \frac{IN}{\cos 60°} = \frac{a\sqrt{10}}{4} : \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lại có $AC \perp BD, AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Gọi E là trung điểm $OB \Rightarrow EN$ là đường trung bình của $\Delta BOC \Rightarrow EN // OC$ hay $EN // AC$

$\Rightarrow NE \perp (SBD)$ hay E là hình chiếu của N trên mặt phẳng (SBD).

Gọi F là trung điểm của $SO \Rightarrow MF$ là đường trung bình của $\Delta SAO \Rightarrow MF // AO$ hay $MF // AC$

$\Rightarrow MF \perp (SBD)$ hay F là hình chiếu của M trên mặt phẳng (SBD).

Ta có $MF // NE$ nên bốn điểm E, N, F, M cùng nằm trên một mặt phẳng.

Trong mặt phẳng $(ENFM)$ gọi $J = MN \cap EF \Rightarrow J = MN \cap (SBD)$ (do $EF \subset (SBD)$).

Suy ra $\left(\widehat{MN,(SBD)}\right) = \left(\widehat{MN,EF}\right) = \widehat{EJN}$ (do $\widehat{EJN} < 90°$).

Ta có $EN = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $MF = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow EN = MF$, mà $EN // MF$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ENFM$ là hình bình hành $\Rightarrow J$ là trung điểm $MN \Rightarrow JN = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

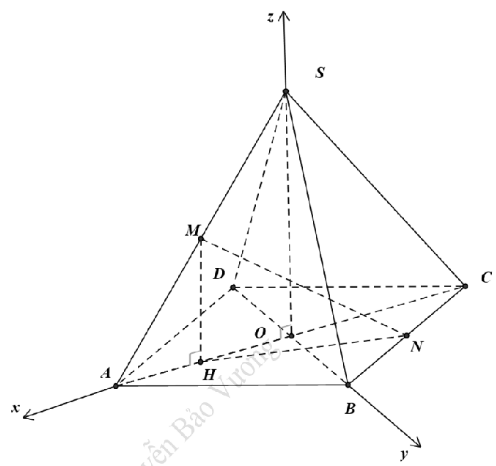
Vậy $\cos\left(\widehat{MN,(SBD)}\right)=\cos\widehat{EJN}=\dfrac{JE}{JN}=\dfrac{\sqrt{JN^2-EN^2}}{JN}=\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}}{\dfrac{a\sqrt{10}}{4}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 37. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$, côsin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Đặt $SO=m$, $(m>0)$.

$A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right);S(0;0;m);N\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0\right)\Rightarrow M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0;\dfrac{m}{2}\right).\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{m}{2}\right)$.

Mặt phẳng $(ABCD)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$.

$$\Rightarrow \sin(MN,(ABCD))=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{k}\right|}=\frac{\dfrac{m}{2}}{\sqrt{\dfrac{5a^2}{8}+\dfrac{m^2}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow m^2=\frac{15a^2}{8}+\frac{3m^2}{4}.$$

$$\Rightarrow 2m^2=15a^2\Rightarrow m=\frac{a\sqrt{30}}{2}$$

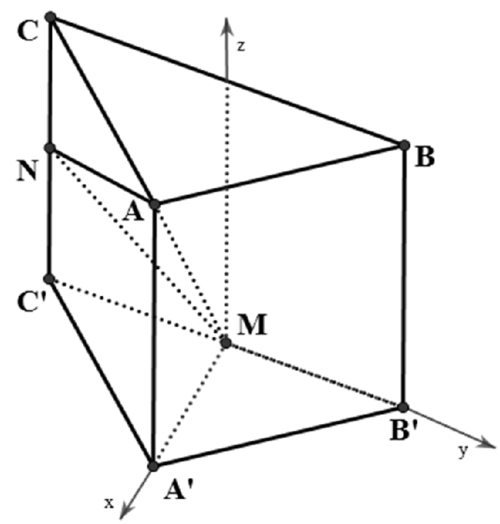
$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{30}}{4}\right)$, mặt phẳng (SBD) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

$$\Rightarrow \sin(MN,(SBD))=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{i}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{i}\right|}=\frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{30a^2}{16}}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \cos(MN,(SBD))=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 38. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AC=a$, $BAC=120°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC'. Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC). Khi đó

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Chọn D

Lấy H là trung điểm của BC.

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4} \Rightarrow CC' = a$ vì $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $M \equiv O$.

$M(0;0;0)$, $A'\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B'\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$, $C'\left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$; $A\left(\frac{a}{2};0;a\right)$; $N\left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Ta có: $(ABC) \perp Oz$ nên (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{a}{2};0;a\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Gọi $\vec{v_1} = \frac{a}{2}\overrightarrow{MA} \Rightarrow \vec{v_1} = (1;0;2)$, $\vec{v_2} = \frac{a}{2}\overrightarrow{MN} \Rightarrow \vec{v_2} = (0;-\sqrt{3};1)$.

Khi đó mặt phẳng (AMN) song song hoặc chứa giá của hai vectơ không cùng phương là $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{v_1},\vec{v_2}] = (2\sqrt{3};-1;-\sqrt{3})$.

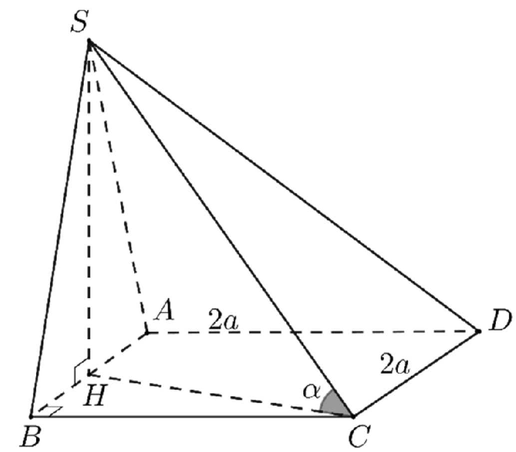
Vậy $\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{k},\vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\vec{k}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{k}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 39. **(Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và $(SAB) \perp (ABCD)$. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB.

Vì ΔSAB cân tại S nên $SH \perp AB$.

Vì $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\end{cases}$ nên suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Khi đó ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} \Rightarrow SH=\frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=\frac{3.\frac{4a^3}{3}}{(2a)^2}=a$.

Lại có HC là cạnh huyền trong tam giác vuông BHC nên $HC=\sqrt{BH^2+BC^2}=a\sqrt{5}$.

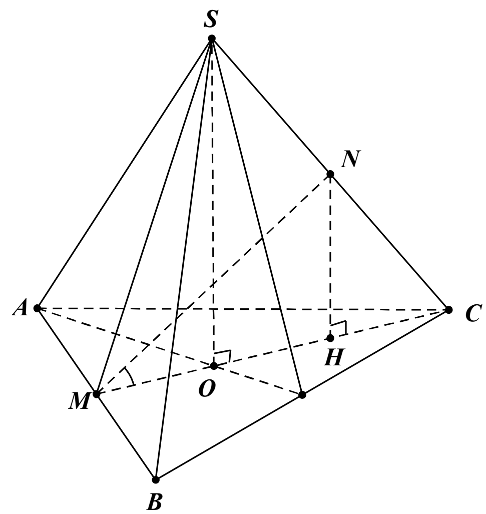
Mặt khác, do $SH\perp(ABCD)$, $(H\in(ABCD))$ nên HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra $\alpha=\widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{SCH}$.

Vậy, trong tam giác vuông SHC, $\tan\alpha=\tan\widehat{SCH}=\frac{SH}{HC}=\frac{a}{a\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 40. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,SC. Tính tan của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải



Chọn C

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

Vì $SABC$ là tứ diện đều cạnh a nên $h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Gọi H là chân đường vuông góc từ N xuống (ABC)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của OC

$\Rightarrow MH = \dfrac{2}{3}MC = \dfrac{2}{3}.\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

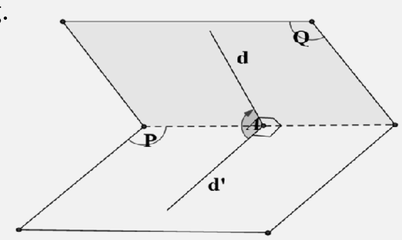
Vì N là trung điểm của SC nên $NH = \dfrac{1}{2}h = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{NMH}$

Vậy $\tan\widehat{NMH} = \dfrac{NH}{MH} = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\right):\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

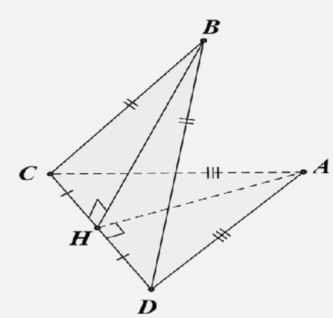
Dạng 3 Góc của mặt với mặt

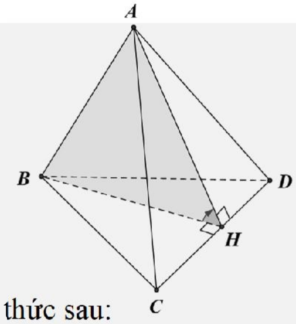
Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.
Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm.
Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.



Những trường hợp đặc biệt đề hay ra:

Trường hợp 1: Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD.
Gọi H trung điểm của CD, thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.





Trường hợp 2: Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD.

Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.

Trường hợp 3: Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng quá khó, ta nên sử dụng công thức sau:

$$\sin\phi = \frac{d\left(A,(Q)\right)}{d\left(A,a\right)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Trường hợp 4: Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S.\cos\varphi$

Trường hợp 5: Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d'.

Trường hợp 6: CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA MẶT PHẲNG BÊN VÀ MẶT PHẲNG ĐÁY

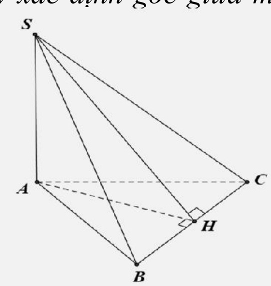
Bước 1: xác dịnh giao tuyến d của mặt bên và mặt đáy.

Bước 2: từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp d$.

Bước 3: góc cần tìm là góc $\widehat{SHA}$.

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ điển hình: *Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC).Hãy xác định góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC).*



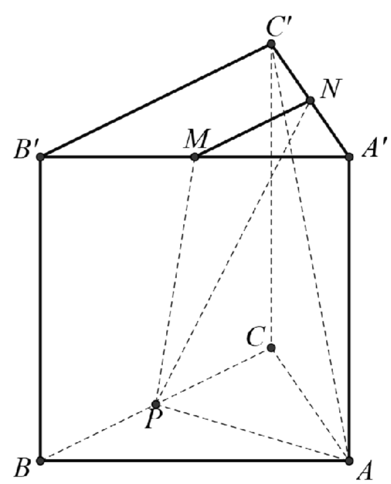
Ta có BC là giao tuyến của mp (SBC) và (ABC).

Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A, dựng $AH \perp BC$.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAH\right) \Rightarrow BC \perp SH$.

Kết luận góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SHA}$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và $\left(MNP\right)$ bằng



A. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$ **B.** $\frac{18\sqrt{13}}{65}$ **C.** $\frac{6\sqrt{13}}{65}$ **D.** $\frac{\sqrt{13}}{65}$

Lời giải

Chọn D

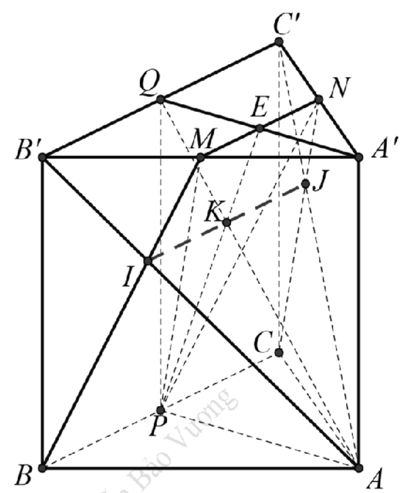
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$; $I = BM \cap AB', J = CN \cap AC', E = MN \cap A'Q$.

Suy ra, $(MNP) \cap (AB'C') = (MNCB) \cap (AB'C') = IJ$ và gọi $K = IJ \cap PE \Rightarrow K \in AQ$ với E là trung điểm MN (hình vẽ).

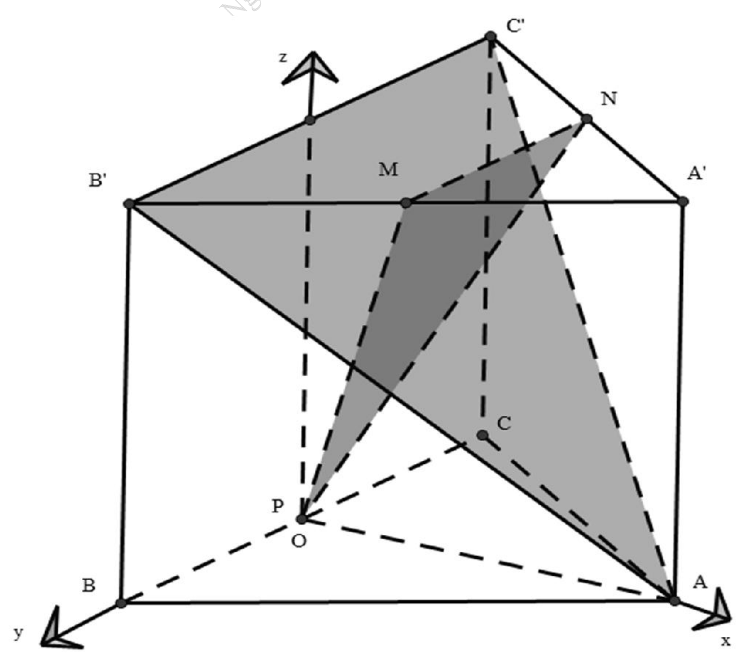
$(AA'QP) \perp IJ \Rightarrow AQ \perp IJ, PE \perp IJ \Rightarrow \left(\widehat{(MNP),(AB'C')}\right) = \left(\widehat{AQ, PE}\right) = \alpha$

Ta có $AP = 3, PQ = 2 \Rightarrow AQ = \sqrt{13} \Rightarrow QK = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$; $PE = \dfrac{5}{2} \Rightarrow PK = \dfrac{5}{3}$.

$\cos\alpha = \left|\cos\widehat{QKP}\right| = \dfrac{\left|KQ^2 + KP^2 - PQ^2\right|}{2KQ.KP} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.



Cách 2



Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

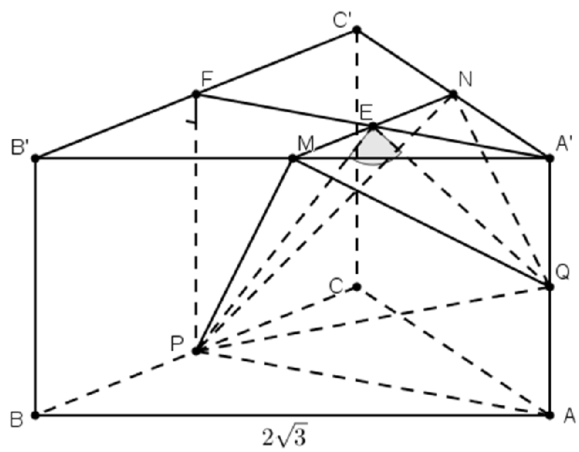
$\Rightarrow P(0;0;0), A(3;0;0), B\left(0;\sqrt{3};0\right), C\left(0;-\sqrt{3};0\right), A'(3;0;2), B'\left(0;\sqrt{3};2\right), C'\left(0;-\sqrt{3};2\right)$

nên $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};2\right), N\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2};2\right)$

Ta có vtpt của mp$\left(AB'C'\right)$ là $\overrightarrow{n_1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC'}\right]=\left(2;0;3\right)$ và vtpt của mp$\left(MNP\right)$ là $\overrightarrow{n_2}=\left(4;0;-3\right)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và mp$\left(MNP\right)\Rightarrow \cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{|8-9|}{\sqrt{13}\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{13}}{65}$

Cách 3



Gọi Q là trung điểm của AA', khi đó mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ song song với mặt phẳng $\left(MNQ\right)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và $\left(MNP\right)$ cũng bằng góc giữa hai mặt phẳng $\left(MNQ\right)$ và $\left(MNP\right)$.

Ta có:

$$\begin{cases}\left(MNP\right)\cap\left(MNQ\right)=MN\\ PE\subset\left(MNP\right);\ PE\perp MN\\ QE\subset\left(MNQ\right);\ QE\perp MN\end{cases}\Rightarrow \widehat{\left(\left(MNP\right);\left(MNQ\right)\right)}=\widehat{PEQ}\text{ hoặc }\widehat{\left(\left(MNP\right);\left(MNQ\right)\right)}=180^0-\widehat{PEQ}$$

Tam giác ABC đều có cạnh $2\sqrt{3}\Rightarrow AP=3$.

Tam giác APQ vuông tại A nên ta có: $PQ=\sqrt{AP^2+AQ^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

Tam giác $A'QE$ vuông tại A' nên ta có: $QE=\sqrt{A'E^2+A'Q^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Tam giác PEF vuông tại F nên ta có: $PE=\sqrt{FP^2+FE^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$

Áp dụng định lý hàm số côsin vào tam giác PQE ta có:

$$\cos\widehat{PEQ}=\frac{EP^2+EQ^2-PQ^2}{2.EP.EQ}=\frac{\frac{25}{4}+\frac{13}{4}-10}{2.\frac{5}{2}.\frac{\sqrt{13}}{2}}=-\frac{\sqrt{13}}{65}$$

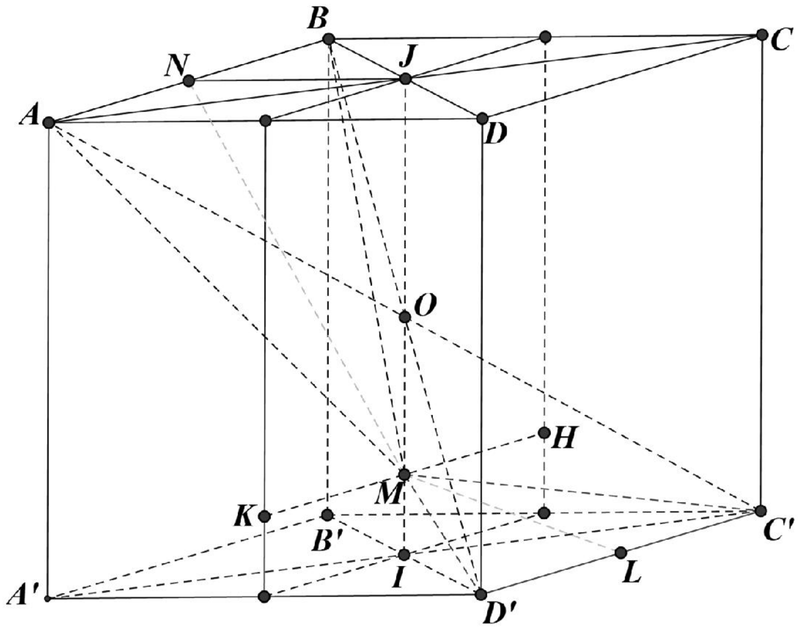
Do đó: $\cos\widehat{\left(\left(MNP\right);\left(AB'C'\right)\right)}=\cos\left(180^0-\widehat{PEQ}\right)=-\cos\widehat{PEQ}=\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 2. **(Mã 101 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO=2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$ **B.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$ **C.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$ **D.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$

Lời giải

Chọn A



Giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng KH như hình vẽ.

Gọi J là tâm hình vuông $ABCD$. L, N lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB.

Ta có: $C'D' \perp (LIM) \Rightarrow C'D' \perp LM \Rightarrow LM \perp KH$.

Tương tự $AB \perp (NJM) \Rightarrow AB \perp MN \Rightarrow MN \perp KH$.

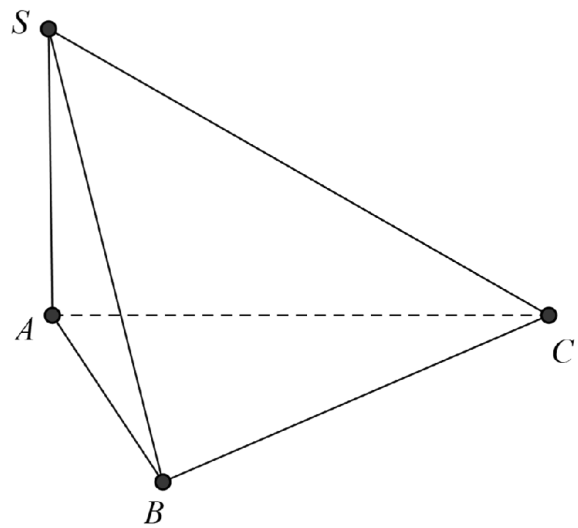
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ chính là góc giữa 2 đường thẳng (MN, ML).

Gọi cạnh hình lập phương là 1. Ta có $LM = \dfrac{\sqrt{10}}{6}$, $MN = \dfrac{\sqrt{34}}{6}$, $NL = \sqrt{2}$.

Ta có: $\cos \widehat{LMN} = \dfrac{MN^2 + ML^2 - NL^2}{2MN.ML} = \dfrac{-7\sqrt{85}}{85}$.

Suy ra cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ là $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

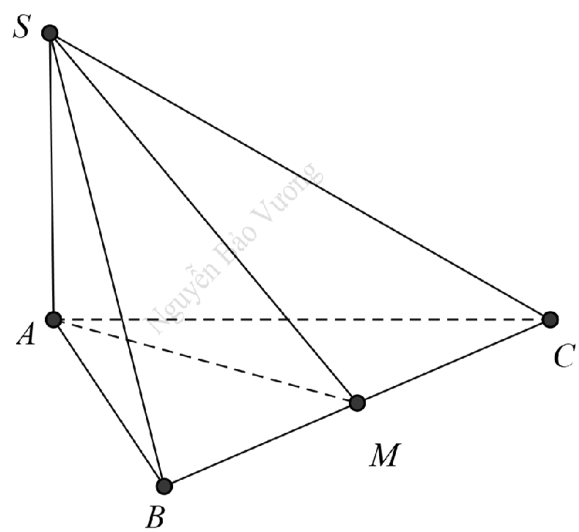
Câu 3. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, tam giác ABC đều cạnh bằng a (minh họa như hình dưới). Góc tạo bởi giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng



A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC.

ΔABC đều cạnh a nên $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ Hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) là AM.

Suy ra $SM \perp BC$ (theo định lí ba đường vuông góc).

Có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \subset (ABC),\ AM \perp BC \\ SM \subset (SBC),\ SM \perp BC \end{cases}$. Do đó góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa SM và AM, hay là góc $\widehat{SMA}$ (do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AM \Rightarrow \Delta SAM$ vuông).

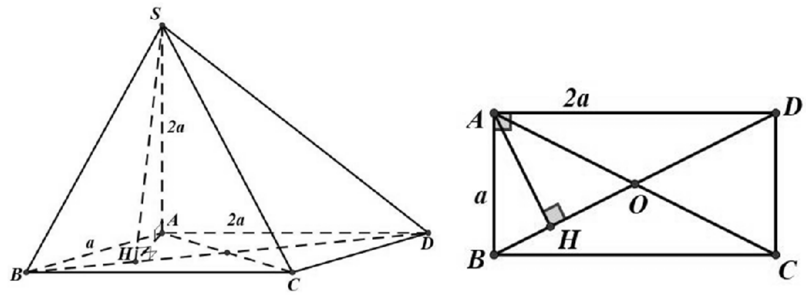
Xét tam giác SAM vuông tại A có $\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^0$.

Vậy góc cần tìm là 45^0.

Câu 4. **(Sở Bắc Giang -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải



Ta có:

$(SBD) \cap (ABCD) = BD$.

Hạ $AH \perp BD$ tại H.

Ta có $\left.\begin{matrix} AH \perp BD \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp SH$.

$\Rightarrow \widehat{\left((SBD);(ABCD)\right)} = \left(\widehat{HA, HS}\right)$.

ΔSAH vuông tại A $\Rightarrow \widehat{SHA} < 90^0 \Rightarrow \left(\widehat{HA, HS}\right) = \widehat{SHA}$

$\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH}$.

Xét ΔABD vuông tại A có:

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

$\Leftrightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

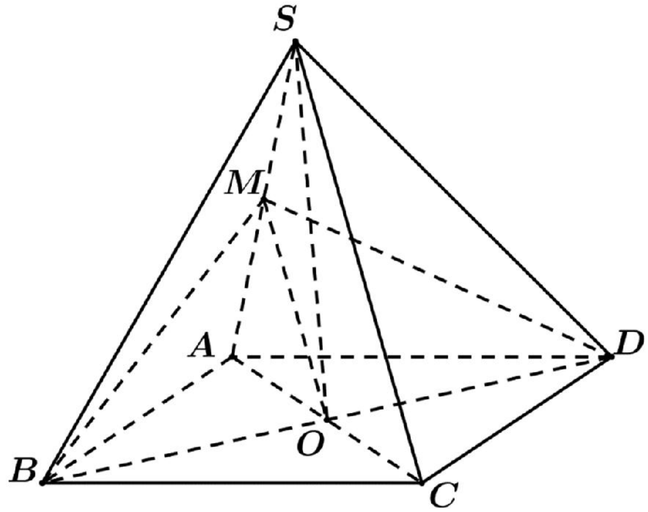
$\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{2a}{\frac{2a\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5}$.

Câu 5. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Lời giải

Chọn D



Gọi M trung điểm SA. Ta có ΔSAB cân tại $B \Rightarrow BM \perp SA$ (1)

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$, lại có O trung điểm BD $\Rightarrow \Delta SBD$ cân tại S nên

$SD = SB = a \Rightarrow \Delta SAD$ cân tại D nên $DM \perp SA$ (2)

Lại có $(SAB) \cap (SAD) = SA$ (3)

Từ (1);(2);(3) $\Rightarrow \widehat{((SAB),(SAD))} = \widehat{BMD}$ hoặc $\widehat{((SAB),(SAD))} = 180° - \widehat{BMD}$.

Xét $\Delta SOB \Rightarrow OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

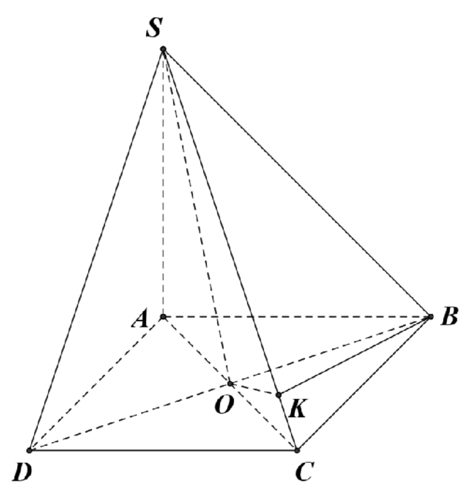
Xét $\Delta AOB \Rightarrow OA = OC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Xét $\Delta SOC \Rightarrow SC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{2}BD$

Do đó ΔBMD vuông tại M, vậy $\widehat{((SAB),(SAD))} = \widehat{BMD} = 90°$, do đó chọn **D.**

Câu 6. **(Sở Quảng Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng.

A. 30^0. **B.** 90^0 **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải



Gọi O là tâm đáy, và K là hình chiếu vuông góc của O trên SC.

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA} = \alpha$. Ta có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{OA} = \sqrt{2} \Rightarrow SA = OA.\sqrt{2} = a.$

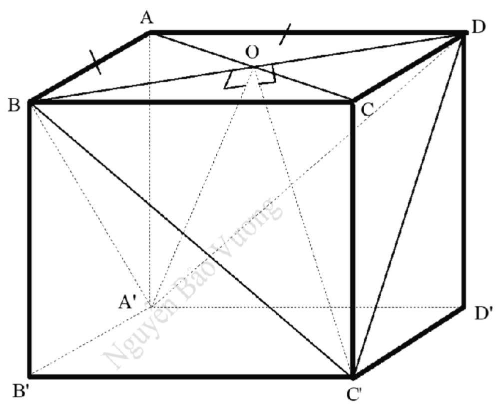
Do $\begin{cases} SC \perp BD \\ SC \perp OK \end{cases} \Rightarrow SC \perp BK$. nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là $\widehat{BKO}$. Ta có

$$\tan\widehat{BKO} = \frac{BO}{OK} = \frac{BO}{\frac{1}{2}d(A,SC)} = \frac{2BO}{\frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}} = \frac{2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2}}{1.\sqrt{2}} = \sqrt{3} \text{ suy ra } \widehat{BKO} = 60^0.$$

Câu 7. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt $ABCD$ là hình vuông, $AA' = \dfrac{AB\sqrt{6}}{2}$. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải



+ Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$.

Đặt $AB = x \Rightarrow BC = x; AA' = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

$A'B = A'D = \sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{6}}{2}\right)^2 + x^2} = \dfrac{x\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \Delta A'BD$ cân $\Rightarrow A'O \perp BD$.

$C'B = C'D = \sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{6}}{2}\right)^2 + x^2} = \dfrac{x\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \Delta C'BD$ cân $\Rightarrow C'O \perp BD$.

+ $(A'BD) \cap (C'BD) = BD$

$A'O \perp BD, A'O \subset (A'BD)$

$C'O \perp BD, C'O \subset (C'BD)$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng góc giữa $A'O$ và $C'O$.

+ Tính $\widehat{A'OC'}$.

$A'O = C'O = \sqrt{A'B^2 - BO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = x\sqrt{2}$.

$A'C' = x\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \Delta A'OC'$ đều $\Rightarrow \widehat{A'OC'} = 60^0$.

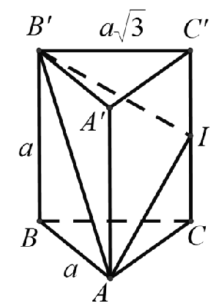
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng 60^0.

Cách khác: Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ để tìm góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$.

Câu 8. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120°$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{11}}{11}$. **B.** $\frac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông $B'AB$ có $AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông IAC có $IA = \sqrt{IC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác vuông $IB'C'$ có $B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Xét tam giác $IB'A$ có $B'A^2 + IA^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta IB'A$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{IB'A} = \frac{1}{2}AB'.AI = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}a.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ là α.

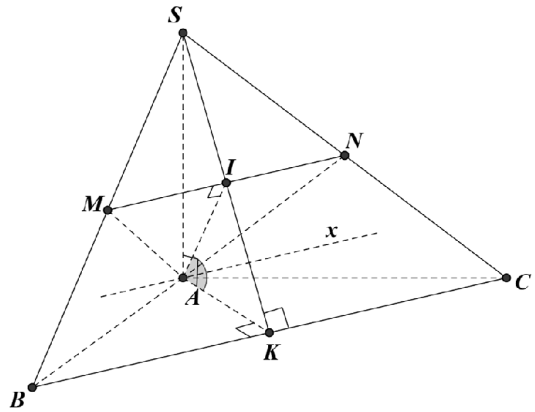
Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta AB'I$ trên mặt phẳng (ABC).

Do đó $S_{ABC} = S_{IB'A}.\cos\alpha \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 9. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân đỉnh A và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNA) và (ABC) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN và BC.

$\Rightarrow$ I là trung điểm của SK.

Ta có $(AMN)\cap(ABC) = Ax\,//\,MN\,//\,BC.$

ΔABC cân tại A $\Rightarrow AK\perp BC \Rightarrow AK\perp Ax$.

ΔAMN cân tại A $\Rightarrow AI\perp MN \Rightarrow AI\perp Ax$.

Do đó $\left((AMN),(ABC)\right) = (AI,AK) = \widehat{IAK}$ hoặc bù với góc $\widehat{IAK}$

ΔABC vuông tại A có AK là đường trung tuyến nên $AK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

ΔSAK vuông tại A có AI là đường trung tuyến nên

$$AI = IK = \frac{SK}{2} = \frac{\sqrt{SA^2+AK^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Xét ΔAIK có $\cos\widehat{IAK} = \dfrac{IA^2+AK^2-IK^2}{2IA.AK} = \dfrac{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và góc A bằng $60°$, cạnh SC vuông góc với đáy và $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Giá trị lượng giác cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải

Từ $SC\perp(ABCD)\Rightarrow SC\perp BD$.

Từ $\begin{cases} BD\perp SC \\ BD\perp AC \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)$.

Kẻ $CK\perp SO$, từ $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp CK$. Như vậy $CK\perp(SBD)\Rightarrow CK\perp SD$.

Kẻ $CH\perp SD$, do $CK\perp SD$ nên suy ra $SD\perp(CHK)$.

Mặt khác $(CHK)\cap(SBD)=HK$ và $(CHK)\cap(SCD)=CK$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng $\widehat{CHK}$.

Trong tam giác SCD vuông tại C, ta có:

$$\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CD^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và góc A bằng $60°$ nên $CO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SCO vuông tại C, ta có:

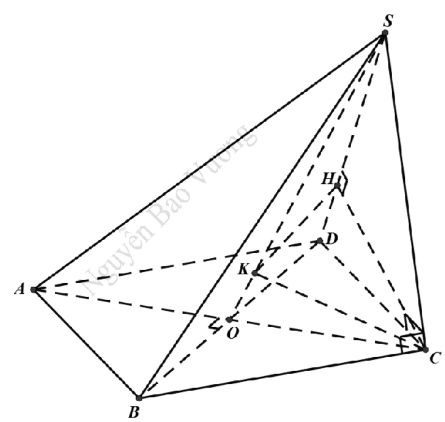
$$\frac{1}{CK^2}=\frac{1}{CO^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow CK=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Xét tam giác CHK vuông tại K, ta có

$$HK=\sqrt{CH^2-CK^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{5}-\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{10}}.$$

$$\cos\widehat{CHK}=\frac{HK}{CH}=\frac{a}{\sqrt{10}}:\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

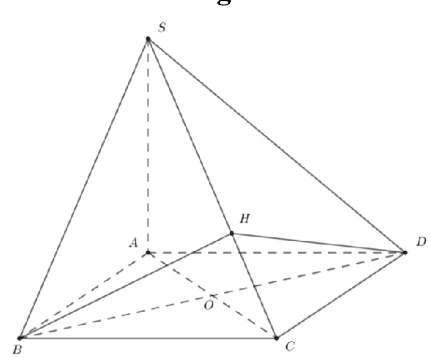
Vậy, cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



Câu 11. **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BD=a$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Ta có $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+a^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}a$.

Vì tam giác ABD đều nên $AC=2.AO=2.\frac{\sqrt{3}}{2}a=a\sqrt{3}$.

Suy ra $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Kẻ $BH\perp SC$, ta có $\begin{cases}SC\perp BD\\ SC\perp BH\end{cases}\Rightarrow SC\perp HD$.

Như vậy $\begin{cases}(SBC)\cap(SCD)=SC\\ BH\perp SC\\ DH\perp SC\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right)$.

Xét tam giác SBC ta có $\cos\widehat{C}=\frac{HC}{BC}=\frac{BC^2+SC^2-SB^2}{2BC.SC}\Rightarrow HC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

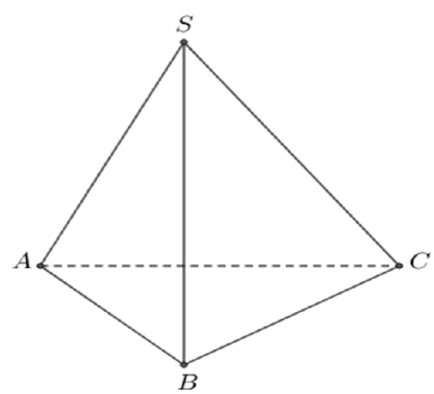
Suy ra $HD=HB=\sqrt{BC^2-HC^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\cos\widehat{BHD}=\frac{HB^2+HD^2-BD^2}{2HB.HD}=0\Rightarrow\widehat{BHD}=90°$. Vậy $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right)=90°$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A, C. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng

A. $\frac{1}{2}$. **<u>B.</u>** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B(0;0;0)$, $A\left(a\sqrt{2};0;0\right)$, $C\left(0;a\sqrt{2};0\right)$, $S(x;y;z)$.

Ta có $(ABC):z=0$, $\overrightarrow{AS}=\left(x-a\sqrt{2};y;z\right)$, $\overrightarrow{CS}=\left(x;y-a\sqrt{2};z\right)$

Do $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow\left(x-a\sqrt{2}\right)a\sqrt{2}=0\Rightarrow x=a\sqrt{2}$, $d\left(S,(ABC)\right)=2a\Rightarrow z=2a$ $(z>0)$

$\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow\left(y-a\sqrt{2}\right)a\sqrt{2}=0\Rightarrow y=a\sqrt{2}\Rightarrow S\left(a\sqrt{2};a\sqrt{2};2a\right)$.

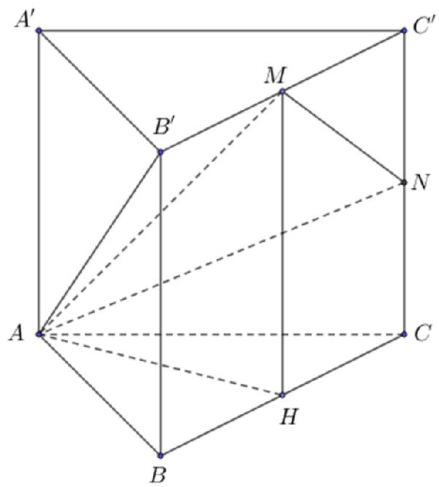
Ta có $\overrightarrow{AS}=\left(0;a\sqrt{2};2a\right)$, $\overrightarrow{CS}=\left(a\sqrt{2};0;2a\right)$, $\overrightarrow{BS}=\left(a\sqrt{2};a\sqrt{2};2a\right)$.

(SBC) có 1 vtpt $\vec{n}=\left(-\sqrt{2};0;1\right)$, (SAB) có 1 vtpt $\vec{m}=\left(0;\sqrt{2};-1\right)\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 13. **(Chuyên Thái Bình 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AC=a$, góc $\widehat{BAC}=120°$, $AA'=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC'. Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC, $BC=a\sqrt{3}$, $AH=\dfrac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $H(0;0;0)$, $A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$M(0;0;a)$, $N\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC).

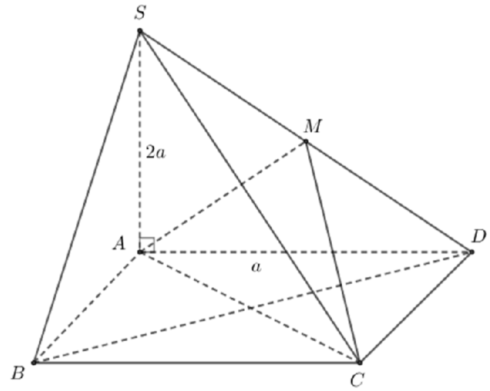
(AMN) có một vtpt $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

(ABC) có một vtpt $\overrightarrow{HM}=(0;0;1)$, từ đó $\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{HM}\right|}{\left|\vec{n}\right|HM}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1.1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 14. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ và chuẩn hóa cho $a=1$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;2)$

Ta có M là trung điểm $SD \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $C(1;1;0)$.

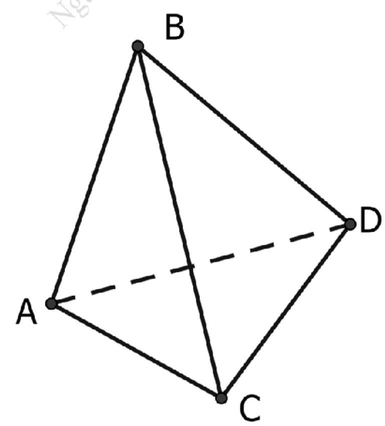
$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;0)$, $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-1;1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow (AMC)$ có một vtpt $\vec{n}=(-2;2;1)$

$\overrightarrow{SB}=(0;1;-2)$, $\overrightarrow{SC}=(1;1;-2)$, $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=(0;2;1) \Rightarrow (SBC)$ có một vtpt $\vec{k}=(0;2;1)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) thì $\cos\alpha=\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Do $\tan\alpha>0$ nên $\tan\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 15. (Sở Thanh Hóa 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=AD=BC=BD=a$, $CD=2x$, $(ACD)\perp(BCD)$. Tìm giá trị của x để $(ABC)\perp(ABD)$?



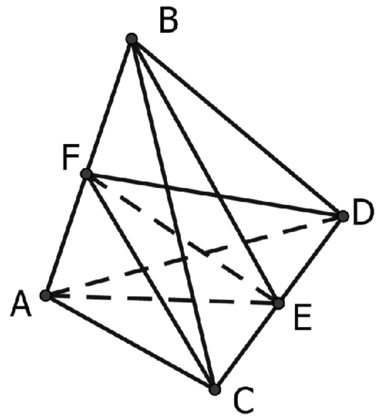
A. $x=a$.

B. $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $x=a\sqrt{2}$.

<u>D</u>. $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải :



Gọi E ; F lần lượt là trung điểm CD và AB $\Leftrightarrow \begin{cases} AE \perp CD \\ BE \perp CD \end{cases}$ (Tính chất tứ diện đều)

Đồng thời $(BCD) \cap (ACD) = CD$ $\Leftrightarrow \left(\widehat{(BCD),(ACD)}\right) = \widehat{BEA} = 90°$

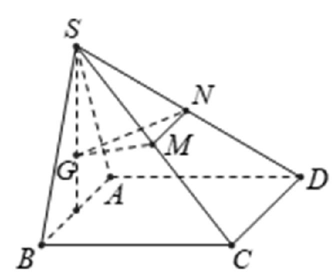
Ta có $\begin{cases} CF \perp AB \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CFD) \Leftrightarrow \left(\widehat{(ABC),(ABD)}\right) = \left(\widehat{CF,FD}\right)$

Vậy để $(ABC) \perp (ABD)$ thì $\left(\widehat{CF,FD}\right) = 90° = \widehat{CFD} \Rightarrow$ trung tuyến FE của tam giác CFD bằng nửa cạnh huyền $\Leftrightarrow FE = \frac{1}{2}CD$

Ta có ΔEAB vuông cân tại E $\Rightarrow EF = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{AC^2 - CE^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}}$

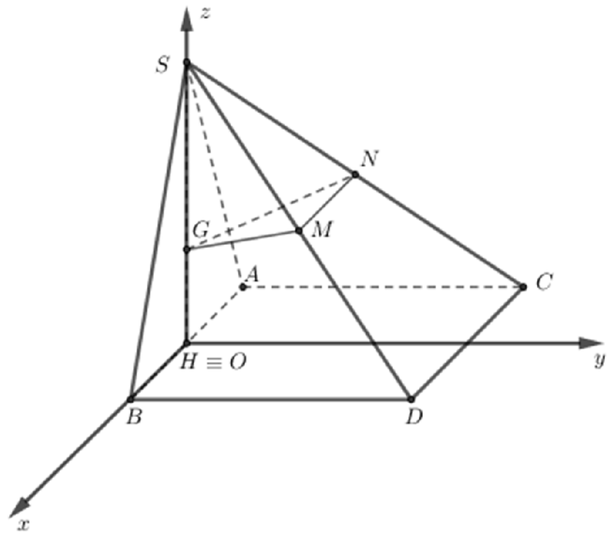
Vậy $x = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2}}$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2 - x^2}{2}$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3}$ $\Leftrightarrow x = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A\left(\frac{-a}{2};0;0\right)$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$;$C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$; $D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$

suy ra $G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GN}\right]=\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{24};\frac{a}{4}\right)$

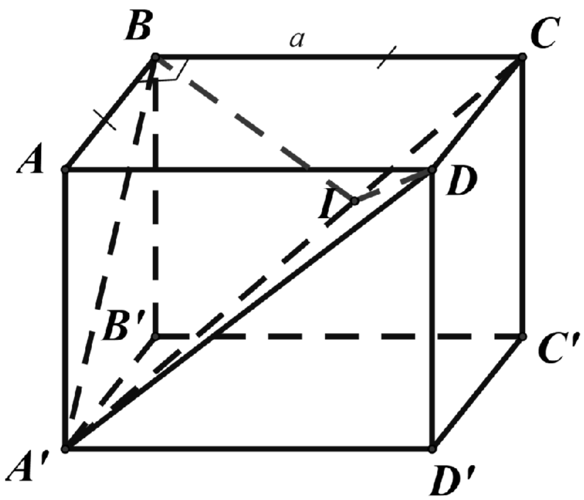
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$, ta có

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 17. **(Chuyên Thái Bình 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Số đo của góc giữa $(BA'C)$ và $(DA'C)$:

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Ta có: $(BA'C)\cap(DA'C)=A'C$.

Kẻ $BI\perp A'C$. Do $\Delta BA'C=\Delta DA'C$ nên $DI\perp A'C$.

Do đó: $\left[\widehat{(BA'C),(DA'C)}\right]=\left(\widehat{BI,DI}\right)$.

Tam giác BID có $BD=a\sqrt{2}$, $BI=DI=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

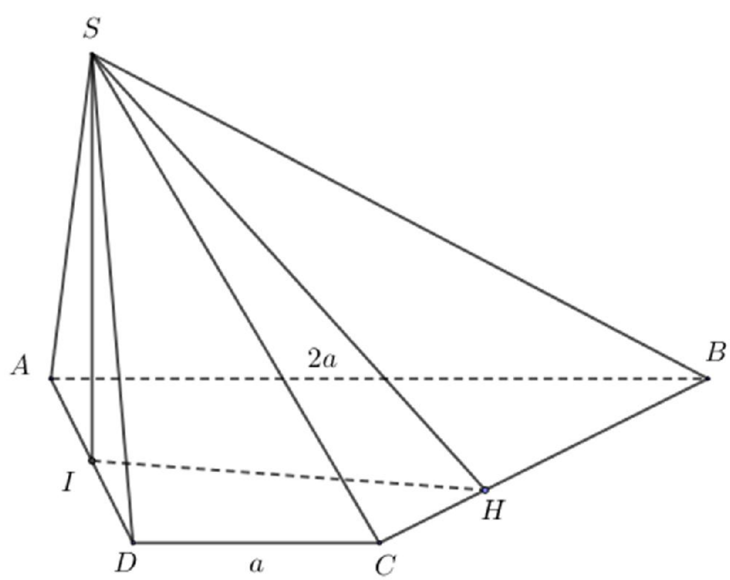
$\cos\left(\widehat{BI,DI}\right)=\dfrac{BI^2+DI^2-BD^2}{2.BI.DI}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{BI,DI}\right)=120^\circ$.

Vậy $\left[\widehat{(BA'C),(DA'C)}\right]=60^\circ$.

Câu 18. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB=AD=2a$, $CD=a$. Gọi I là trung điểm cạnh AD, biết hai mặt phẳng (SBI), (SCI) cùng vuông góc với đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{5}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC), $(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 36°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải



Diện tích hình thang $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AD\left(AB+CD\right)=\frac{1}{2}2a.3a=3a^2$, $CB=AC=a\sqrt{5}$.

Độ dài đường cao $SI=\frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=\frac{3.\frac{3\sqrt{15}a^3}{5}}{3a^2}=\frac{3\sqrt{15}a}{5}$.

Vẽ $IH\perp CB$ tại H $\Rightarrow BC\perp\left(SIH\right)\Rightarrow BC\perp SH$.

Ta có $\left(\widehat{\left(SBC\right),\left(ABCD\right)}\right)=\left(\widehat{IH,SH}\right)=\widehat{SHI}$.

$S_{ICB}=S_{ABCD}-S_{IDC}-S_{AIB}=3a^2-\frac{a^2}{2}-a^2=\frac{3a^2}{2}\Rightarrow IH.CB=3a^2\Rightarrow IH=\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

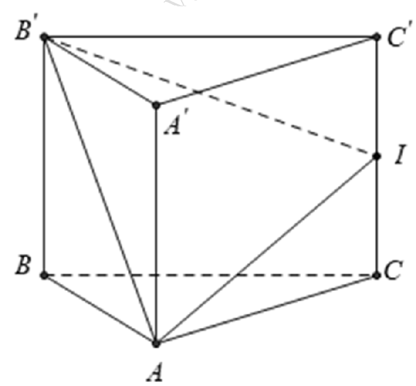
$\tan\widehat{SHI}=\frac{SI}{IH}=\frac{\frac{3a\sqrt{15}}{5}}{\frac{3a\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SHI}=60^\circ$.

Câu 19. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA'=AB=AC=1$ và $\widehat{BAC}=120^0$. Gọi I là trung điểm cạnh CC'. Côsin góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $\left(AB'I\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{370}}{20}$. **B.** $\frac{\sqrt{70}}{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{20}$. **D.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $\left(AB'I\right)$.

$AB'=\sqrt{2}$, $AI=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A=3\Rightarrow BC=B'C'=\sqrt{3}$.

$B'I=\sqrt{B'C'^2+C'I^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Vì $AB'^2+AI^2=B'I^2\Rightarrow\Delta AB'I$ vuông tại điểm A.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $S_{AB'I}=\frac{1}{2}AI.AB'=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Hình chiếu vuông góc của $\Delta AB'I$ lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là ΔABC.

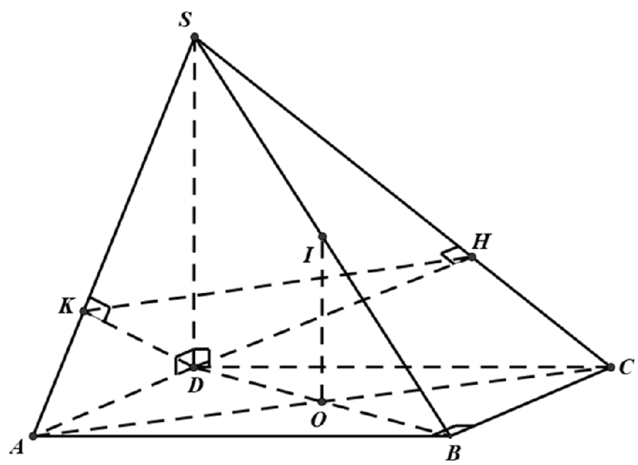
Ta có $S_{ABC}=S_{AB'I}.\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 20. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, độ dài cạnh $AC=2a$, các tam giác $\Delta SAB, \Delta SCB$ lần lượt vuông tại A và C. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng a. Giá trị cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



+ Gọi O, I lần lượt là trung điểm của AC, SB chúng ta có O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vì các tam giác $\Delta SAB, \Delta SCB$ lần lượt vuông tại A và C nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ do đó $OI \perp (ABC)$.

+ Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) ta có $SD//OI$ và $SD=2OI$ suy ra O là trung điểm của BD. Từ đây ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\frac{2a}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$ và $SD=a$.

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D lên SC, SA ta có $SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp BC$ đồng thời $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp DC$ từ hai ý này ta có $BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp DH$, từ đó suy ra $DH \perp (SCB)$.

Chứng minh tương tự ta có $DK \perp (SAB)$

+ Vì vậy góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng DK và DH.

+ Xét 2 tam giác vuông $\Delta SAD, \Delta SCD$ bằng nhau ta có hai đường cao $DK=DH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

+ Trong tam giác SAC ta có $\frac{HK}{AC}=\frac{SH}{SC}=\frac{SD^2}{SC^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow HK=\frac{2a}{3}$, trong tam giác DHK có

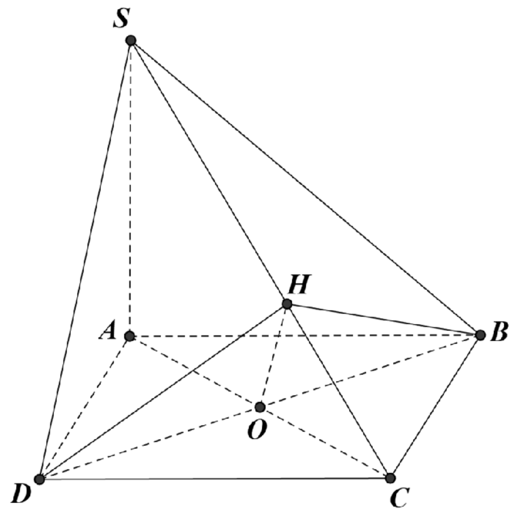
$\cos\widehat{HDK}=\frac{DH^2+KD^2-KH^2}{2DH.KD}=\frac{2}{3}$

Câu 21. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120^0$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60^0, khi đó

A. $SA=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $SA=a\sqrt{6}$. **C.** $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC, BD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SC. Khi đó $SC \perp (HBD)$ vì $SC \perp BD$, $SC \perp OH$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng HB, HD.

Vì $\triangle SCD = \Delta SBC \Rightarrow HB = HD$.

Đặt $SA = x(x > 0)$.

Ta có $cos60^0 = \dfrac{\left|HB^2 + HD^2 - BD^2\right|}{2HB.HD} \Leftrightarrow HB^2 = \left|2HB^2 - BD^2\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} HB^2 = BD^2 \\ HB^2 = \dfrac{BD^2}{3} \end{array}\right.$

Ta có $\triangle CHO \approx \Delta CSA \Rightarrow OH.CS = CO.SA$ (1)

Trong tam giác ABC ta có $AC = a\sqrt{3}, OB = \dfrac{a}{2} \Rightarrow BD = a$

TH1 : $HB = BD = a \Rightarrow OH = \sqrt{HB^2 - OB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Thay vào (1) ta có $x = \sqrt{x^2 + 3a^2}$.(vô nghiệm).

TH2 : $HB = \dfrac{BD\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OH = \sqrt{HB^2 - OB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

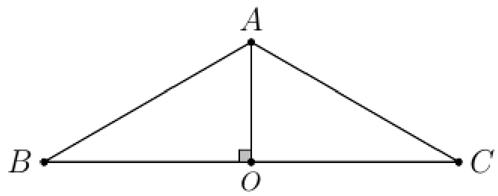
Thay vào (1) ta có $\dfrac{a^2}{12}\left(x^2 + 3a^2\right) = \dfrac{3a^2}{4}x^2 \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

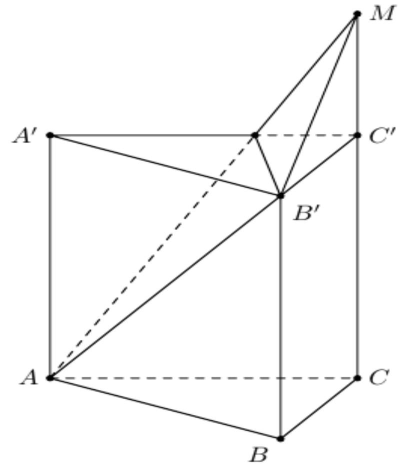
Câu 22. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân đỉnh A. Biết $BC = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 30^o$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'}$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$, khi đó $\sin\alpha$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{\sqrt{66}}{22}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{481}}{22}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{22}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{418}}{22}$.

Lời giải

Chọn D





Cách 1: Gọi O là trung điểm BC.

Ta có: $BO = AB.\cos 30^o \Leftrightarrow AB = \dfrac{BO}{\cos 30^o} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = a = AC$ và $AO = AB.\sin 30^o = \dfrac{a}{2}$.

Theo đề bài:

$2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC'} \Rightarrow C'M = \dfrac{a}{2}$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$.

Theo công thức diện tích hình chiếu ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AB'C}.\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'C}}$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AH.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;

$B'M = \sqrt{C'M^2 + B'C'^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$; $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Khi đó $p = \dfrac{AB' + B'M + AM}{2} = \dfrac{a\sqrt{2} + \dfrac{a\sqrt{13}}{2} + \dfrac{a\sqrt{13}}{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2} + a\sqrt{13}}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông vào $\Delta AB'M$ ta có:

$S_{\Delta AB'M} = \sqrt{p(p - AB')(p - B'M)(p - AM)} = \dfrac{a^2\sqrt{22}}{4}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'C}} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{22}}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{22}} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{19}{22}} = \dfrac{\sqrt{418}}{22}$.

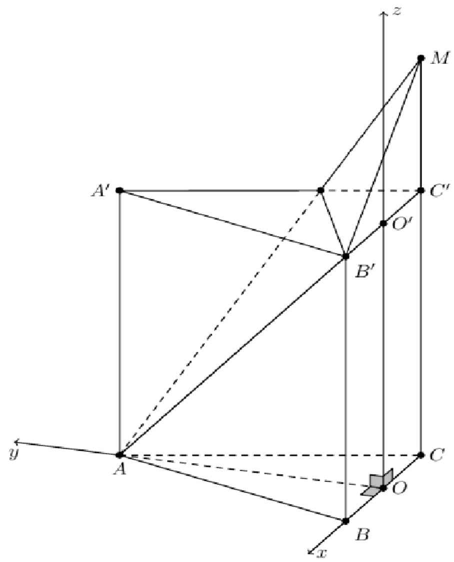
Cách 2:

Gọi O là trung điểm BC.

Ta có: $BO = AB.\cos 30^o \Leftrightarrow AB = \dfrac{BO}{\cos 30^o} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = a = AC$ và $AO = AB.\sin 30^o = \dfrac{a}{2}$.

Theo đề bài:

$2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC'} \Rightarrow C'M = \dfrac{a}{2}$.



Coi $a=1$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $O(0;0;0)$, $A\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$,

$B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;1\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0;\frac{3}{2}\right)$.

Khi đó $(ABC)\equiv(Oxy): z=0 \Rightarrow (ABC)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB'}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(AB'M)}}=4\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AM}\right]=\left(1;5\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$.

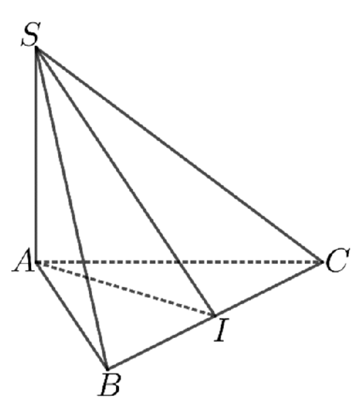
Vậy $\cos\alpha=\frac{\left|\vec{k}.\overrightarrow{n_{(AB'M)}}\right|}{\left|\vec{k}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(AB'M)}}\right|}=\frac{\left|2\sqrt{3}\right|}{1.2\sqrt{22}}=\sqrt{\frac{3}{22}} \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{19}{22}}=\frac{\sqrt{418}}{22}$.

Câu 23. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=\frac{a}{2}$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm BC.

Ta có $AI \perp BC$ (tam giác ABC đều) (1).

Lại có $SA \perp BC$ $\left(SA \perp (ABC)\right)$.

Suy ra $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$ (2).

$BC = (SBC) \cap (ABC)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\left((SBC),(ABC)\right) = (SI, AI) = \widehat{SIA}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A ta có $\tan \widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\widehat{SIA} = 30°$.

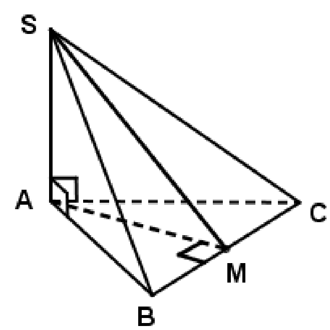
Vậy $\left((SBC),(ABC)\right) = 30°$.

Câu 24. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và góc giữa SB và mặt đáy bằng $60°$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$ (1)

Có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp SM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{\left((SBC),(ABC)\right)} = \widehat{SMA} = \alpha$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ và AB là hình chiếu vuông góc của SB lên $(ABC) \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

ΔSAB có $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = 2a.\tan 60° = 2\sqrt{3}a$.

ΔABC có $AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{2}$.

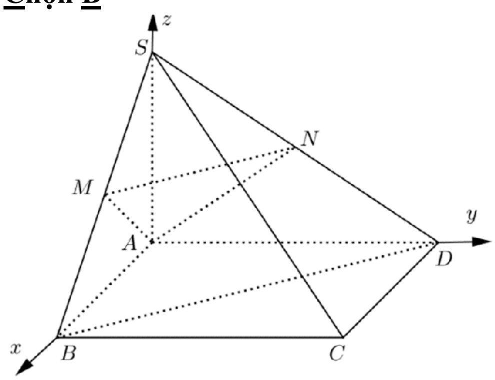
ΔSAM vuông tại A có $\cos\alpha = \dfrac{AM}{SM} = \dfrac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}a\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Câu 25. **(Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính $\sin\varphi$ với φ là góc hợp bởi (AMN) và (SBD).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **<u>B.</u>** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn: $A \equiv O, B(a;0;0), D(0;a;0), S(0;0;a)$(như minh họa hình vẽ), suy ra $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$ và $N\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AN} = \left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ nên mặt phẳng (AMN) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(-\frac{a^2}{4};-\frac{a^2}{4};\frac{a^2}{4}\right)$.

$\overrightarrow{SB} = (a;0;-a), \overrightarrow{SD} = (0;a;-a)$ nên mặt phẳng (SBD) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}\right] = \left(a^2;a^2;a^2\right)$

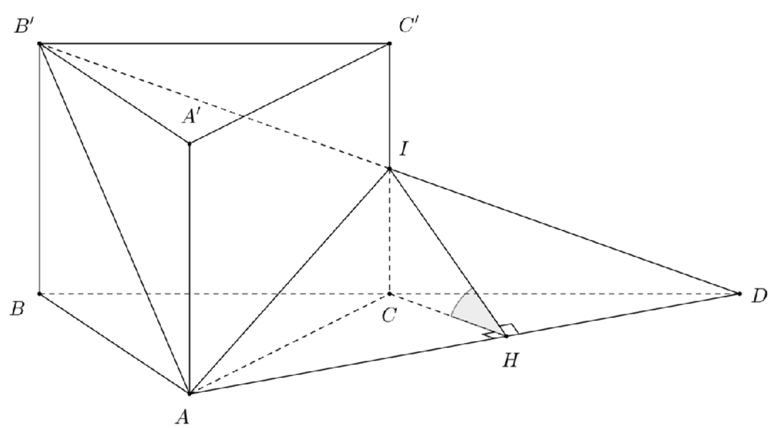
Khi đó $\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|-\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}\right|}{\sqrt{a^4+a^4+a^4}.\sqrt{\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 26. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^o$ và cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{30}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{30}$.

Lời giải

Chọn B



• Trong $(BCB'C')$, $B'I \cap BC = \{D\}$.

Trong (ABC), dựng $AH \perp AD$ tại H.

Vì $AD \perp CH$ nên $AD \perp IH$.

Do đó: $((AB'I),(ABC)) = (IH, CH) = \widehat{IHC} < 90°$.

- ΔABC cân tại A, $\widehat{BAC} = 120° \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30° \Rightarrow \widehat{ACD} = 150°$.
- Áp dụng định lý Cosin trong ΔABC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos 120^o = 3a^2$$

$$\Rightarrow BC = B'C' = CD = a\sqrt{3}.$$

- Tương tự trong ΔACD:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2.AC.CD.\cos\widehat{ACD} = a^2 + 3a^2 - 2.a.a\sqrt{3}.\cos 150^o = 7a^2$$

$$\Rightarrow AD = a\sqrt{7}.$$

- Ta có $S_{ACD} = \frac{1}{2}.CA.CD.\sin\widehat{ACD} = \frac{1}{2}.CH.AD$

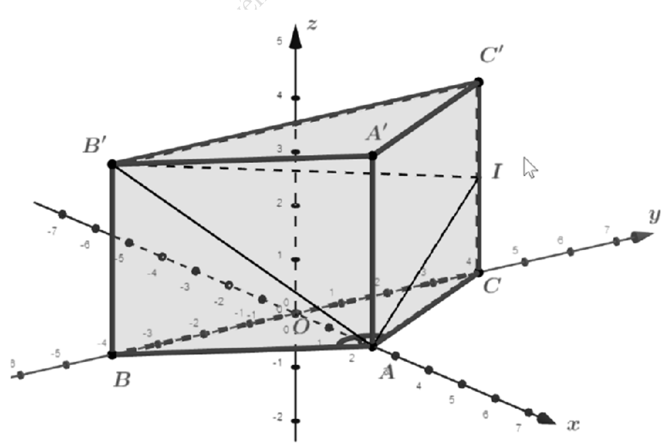
$$\Rightarrow CH = \frac{CA.CD.\sin\widehat{ACD}}{AD} = \frac{a.a\sqrt{3}.\sin 150^o}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

- ΔICH vuông tại C $\Rightarrow IH = \sqrt{IC^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{28}} = \frac{a\sqrt{70}}{14}$.

$$\Rightarrow \cos IHC = \frac{CH}{IH} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

- Vậy $\cos((AB'I),(ABC)) = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Cách 2:



- Gọi O là trung điểm của BC. Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

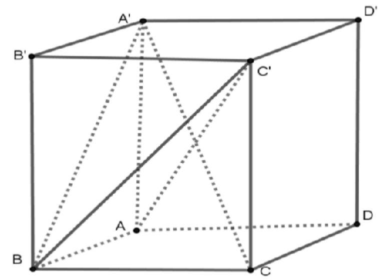
Ta có: $OB = AB\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $OA = AB\cos 60° = \frac{a}{2}$.

- Giả sử $a = 1$ suy ra $A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $I\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B'\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(0;0;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4};-\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

• Gọi α là góc giữa (ABC) và $(AB'I)$. Suy ra: $\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

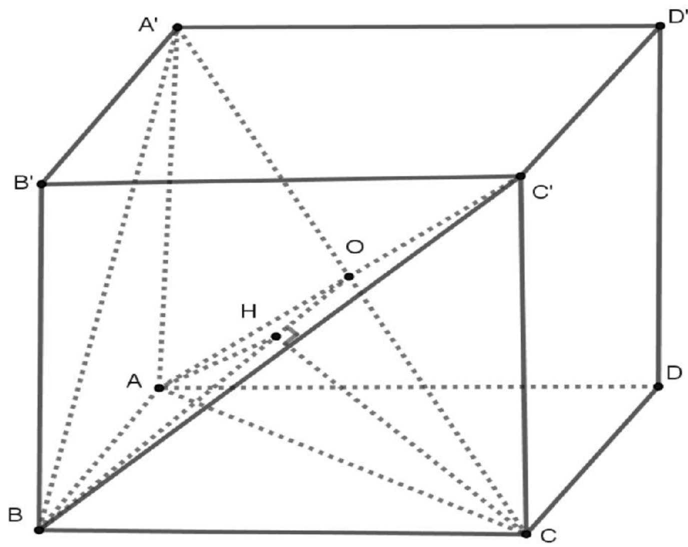
Câu 27. **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC') bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC')

Gọi $O = A'C \cap AC'$

Gọi H là hình chiếu của A lên BO, $AH \perp BO \Rightarrow CH \perp BO$

Ta có $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC') = BO \\ AH \perp BO \\ CH \perp BO \end{cases} \Rightarrow \widehat{((A'BC);(ABC'))} = \widehat{(AH, CH)}$

Xét tam giác vuông $A'BC$ có $BO = \frac{1}{2}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $S_{BCH} = \frac{1}{2}S_{A'BC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}a\sqrt{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Mặt khác $S_{BCH} = \frac{1}{2}CH.BO = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CH = \frac{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Xét tam giác AHC có $\cos\widehat{AHC}=\dfrac{AH^2+CH^2-AC^2}{2.AH.CH}=\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\alpha=\left|\cos\widehat{AHD}\right|=\dfrac{1}{2}$.