DẠNG 1: KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TỪ AM → GM

1) Cho số thực $a \geq 3$ .Tìm GTNN của $A = a + \frac{1}{a}$

Phân tích : Sai lầm thường gặp $A = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a.\frac{1}{a}} = 2$. suy ra GTNN của A là 2

Dấu ‘ = ‘ xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1$ (vô lý vì $a \geq 3$)

Cách giải : Dự đoán điểm rơi (dấu ‘=’ xảy ra) khi a = 3 .

Ta chọn điểm rơi : ta phải tách a thành $k.a, \frac{a}{k}$ hoặc $\frac{1}{a}$ thành $\frac{k}{a}; \frac{1}{ka}$ với k là hằng số cần phải xác định cụ thể để khi áp dụng BĐT Cauchy thì dấu ‘=’ xảy ra tại a = 3 .

$$\left(a;\frac{1}{a}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(ka;\frac{1}{a}\right) & (1) \\ \left(a;\frac{k}{a}\right) & (2) \\ \left(a;\frac{1}{k.a}\right) & (3) \\ \left(\frac{a}{k};\frac{1}{a}\right) & (4) \end{array}\right.$$

Có các cách tách như sau :

Nếu ta chọn cách tách (1) thì ta có :

$$\begin{cases} ka = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow ka = \frac{1}{3} \Rightarrow 3k = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{9}$$

Ta có $A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{9} + \frac{1}{a} + \frac{8a}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a}{9}.\frac{1}{a}} + \frac{8a}{9} \geq \frac{2}{3} + \frac{8.3}{9} = \frac{10}{3}$

Dấu ’=’ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \frac{a}{9} = \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$

Học sinh tự làm cách (2) ,(3) ,(4) .

2) Cho số thực $a \geq 2$. Tìm GTNN của $A = 2a + \frac{1}{a^2}$

Phân tích : Sai lầm thường gặp $A = 2a + \frac{1}{a^2} = a + a + \frac{1}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{a.a.\frac{1}{a^2}} = 3$

suy ra GTNN của A là 3 . Dấu ‘=‘ xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a = 1$ (vô lý vì $a \geq 2$)

Cách giải : Dự đoán điểm rơi a = 2

Ta chọn điểm rơi : $\begin{cases} k(2a) = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 2ka = \frac{1}{4} \Rightarrow 4k = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{16}$

Ta có: $A = 2a + \frac{1}{a^2} = \frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{7a}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{4} \geq \frac{3}{4} + \frac{7.2}{4} = \frac{17}{4}$

Dấu’=’ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ \frac{a}{8} = \frac{1}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$

3) Cho $a,b,c>0: a+b+c\le\frac{3}{2}$ .Tìm GTNN của $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Phân tích : Sai lầm thường gặp $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6\sqrt[6]{abc\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}=6$, suy ra GTNN của S là 6. Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ (vô lý vì $a+b+c=3>\frac{3}{2}$)

Cách giải : Do S là biểu đối xứng theo a,b,c nên dự đoán điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Ta chọn điểm rơi : $\begin{cases} ka=kb=kc=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \\ a=b=c=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow k\frac{1}{2}=2\Rightarrow k=4$

$$S=4a+4b+4c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-(3a+3b+3c)\ge 6\sqrt[6]{4a.4b.4c\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}-3(a+b+c)\ge 12-3.\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$$

4) Cho $a,b,c>0: a+2b+3c\ge 20$. Tìm GTNN của $S=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$

Dự đoán GTNN của S đạt được khi $a+2b+3c=20$ tại điểm rơi $a=2,\ b=3,\ c=4$.

Ta chọn điểm rơi: với $a=2: \begin{cases} ka=\frac{3}{a} \\ \frac{3}{a}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow ka=\frac{3}{2}\Rightarrow 2k=\frac{3}{2}\Rightarrow k=\frac{3}{4}$

với $b=3: \begin{cases} mb=\frac{9}{2b} \\ \frac{9}{2b}=\frac{9}{6}\end{cases}\Rightarrow mb=\frac{9}{6}\Rightarrow 3m=\frac{3}{2}\Rightarrow m=\frac{1}{2}$

với $c=4: \begin{cases} nc=\frac{4}{c} \\ \frac{4}{c}=1\end{cases}\Rightarrow nc=1\Rightarrow 4n=1\Rightarrow n=\frac{1}{4}$

Ta có $S=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}=\left(\frac{3}{4}a+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{1}{2}b+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{1}{4}c+\frac{4}{c}\right)+\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{4}c$

Khi đó : $S\ge 2\sqrt{\frac{3}{4}a.\frac{3}{a}}+2\sqrt{\frac{1}{2}b.\frac{9}{2b}}+2\sqrt{\frac{1}{4}c.\frac{4}{c}}+\frac{a+2b+3c}{4}\ge 3+3+2+\frac{20}{4}=13$

BÀI TẬP :

5) Cho $a\ge 6$ .Tìm GTNN của $S=a^2+\frac{18}{\sqrt{a}}$

6) Cho $0<a\le\frac{1}{2}$ .Tìm GTNN của $S=2a+\frac{1}{a^2}$

7) Cho $a,b>0: a+b\le 1$. Tìm GTNN của $S=ab+\dfrac{1}{ab}$

8) Cho $a,b,c>0: ab\ge 12, bc\ge 8$. Chứng minh : $a+b+c+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)+\dfrac{8}{abc}\ge\dfrac{121}{12}$

9) Cho a,b > 0 . Chứng minh : $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge\dfrac{5}{2}$

10) Cho a,b,c > 0 . Chứng minh : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}\ge\dfrac{15}{2}$

11) Cho $a,b,c\ge 0 : a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh : $a+b+c+\dfrac{1}{abc}\ge 4\sqrt{3}$

12) Cho $a,b,c>0: a+b+c\le\dfrac{3}{2}$ .Chứng minh : $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}}\ge\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

13) Cho $a,b,c>0: a+b+c\le 1$ .Chứng minh : $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{2}{bc}+\dfrac{2}{ca}\ge 81$

14) Cho $a,b,c>0: a+b+c\le 1$ .Chứng minh : $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 28$

15) Cho a,b,c,d > 0 . Chứng minh :

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{a+b+c}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}\ge\frac{40}{3}$$

16) Cho a,b,c,d > 0 . Chứng minh : $\left(1+\dfrac{2a}{3b}\right)\left(1+\dfrac{2b}{3c}\right)\left(1+\dfrac{2c}{3d}\right)\left(1+\dfrac{2d}{3a}\right)\ge\dfrac{625}{81}$

17) Cho $a,b>0: a+b=1$ .Tìm GTNN của $S=\dfrac{a}{\sqrt{1-a}}+\dfrac{b}{\sqrt{1-b}}$ $\left(\text{MinS}=\sqrt{2}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}\right)$

DẠNG 2: KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TỪ GM → AM

- Xét bđt AM-GM : $a_1+a_2+...+a_n\ge n.\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$. VP của bđt (vế yếu) là biểu thức GM có số các thừa số trong căn bằng chỉ số căn thức .Khi gặp những bdt mà vế yếu có chứa căn mà số các thừa số trong căn *nhỏ hơn hay bằng chỉ số căn* thì ta thêm vào các hằng số để số các thừa số trong căn bằng chỉ số căn thức .
- Để xác định được các hằng số ta phải dự đoán dấu bằng của bđt nên kỹ thuật này gọi là chọn điểm rơi từ GM sang AM.

18) Cho $a,b,c\ge 0: a+b+c=3$. Tìm GTLN của $S=\sqrt{a+2}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+2}$

Phân tích : Sai lầm thường gặp : $\sqrt{a+2}=\sqrt{(a+2).1}\le\dfrac{a+2+1}{2}=\dfrac{a+3}{2}$, tương tự …

Khi đó $S=\sqrt{a+2}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+2}\le\dfrac{(a+b+c)+9}{2}=6$, suy ra $\text{MaxS}=6$

Dấu’=’ xảy ra khi $a+2=b+2=c+2=1\Rightarrow a=b=c=-1$ (vô lý)

Cách giải : Do S là biểu đối xứng theo a,b,c nên dự đoán điểm rơi

$a=b=c=1\Rightarrow a+2=b+2=c+2=3$

Ta có : $\sqrt{a+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(a+2).3}\le\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{a+2+3}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{a+5}{2}$, tương tự …

Khi đó $S=\sqrt{a+2}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+2}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a+b+c+15}{2}\right)=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

Vậy : $MaxS=3\sqrt{3}\Leftrightarrow a=b=c=1$

19) Cho $a,b,c\ge 0: a+b+c=1$. Tìm GTLN của $S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}$

Phân tích : Sai lầm thường gặp : $\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{(a+b).1.1}\le\frac{a+b+1+1}{3}$, tương tự …

Khi đó $S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\frac{2(a+b+c)+6}{3}=\frac{8}{3}$, suy ra $MaxS=\frac{8}{3}$

Dấu'=' xảy ra khi $a+b=b+c=c+a=1\Rightarrow 2(a+b+c)=3$ (vô lý)

Cách giải : Do S là biểu đối xứng theo a,b,c nên dự đoán điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3}$

Ta có : $\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{(a+b).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\frac{a+b+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\frac{a+b+\frac{4}{3}}{3}$, tương tự …

Khi đó $S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\frac{2(a+b+c)+4}{3}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{6}{3}=\sqrt[3]{18}$

Vậy $MaxS=\sqrt[3]{18}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

20) Cho $a,b,c\ge 0: a+b+c=3$. Chứng minh $\sqrt[3]{a(b+2c)}+\sqrt[3]{b(c+2a)}+\sqrt[3]{c(a+2b)}\le 3.\sqrt[3]{3}$

Phân tích: Do S là biểu đối xứng theo a,b,c nên dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+2b=b+2c=c+2a=3\\3a=3b=3c=3\end{cases}$$

Ta có : $\sqrt[3]{a(b+2c)}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\sqrt[3]{3a.(b+2c).3}\le\frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\frac{3a+(b+2c)+3}{3}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\frac{3a+b+2c+3}{3}$, tương tự …

Khi đó : $\sqrt[3]{a(b+2c)}+\sqrt[3]{b(c+2a)}+\sqrt[3]{c(a+2b)}\le\frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\frac{6(a+b+c)+9}{3}=\frac{9}{\sqrt[3]{9}}=3.\sqrt[3]{3}$

Dấu '=' xảy ra KVCK a =b =c = 1 .

BÀI TẬP :

21) Cho $a,b,c>0: a^2+b^2+c^2=12$. Chứng minh: $a\sqrt[3]{b^2+c^2}+b\sqrt[3]{c^2+a^2}+c\sqrt[3]{a^2+b^2}\le 12$

22) Cho $a\ge 2,\ b\ge 6,\ c\ge 12$. Tìm GTLN của : $S=\frac{bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt[3]{b-6}+ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}$

$$\left(\text{MaxS} = \frac{5}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} \Leftrightarrow a = 4, b = 9, c = 16\right)$$

23) Cho $a \geq 3, b \geq 4, c \geq 2$ .Tìm GTLN của $S = \dfrac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{2\sqrt{2}}$

24) Cho $a,b,c,d > 0$, $a+b+c+d = 1$.

Tìm GTLN của $S = \sqrt{a+b+c} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{c+d+a} + \sqrt{d+a+b}$

25) Cho $a,b,c,d > 0$, $a+b+c+d = 1$.

Tìm GTLN của $S = \sqrt[3]{2a+b} + \sqrt[3]{2b+c} + \sqrt[3]{2c+d} + \sqrt[3]{2d+a}$