TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ-GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Sử dụng các phương pháp giải phương trình logarit đã đưa ra tại Chuyên đề 19. Phương trình mũ – logarit để giải

Câu 1. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

A. $[3;5]$ **B.** $(1;3]$ **C.** $[1;3]$ **D.** $(1;5)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1<x<5$.

Ta có $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2\le\log_2[2(5-x)] \Leftrightarrow (x-1)^2\le 10-2x$

$\Leftrightarrow x^2-9\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$. Vậy tập nghiệm của bpt là $S=(1;3]$.

Câu 2. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2\log_3(4x-3)\le\log_3(18x+27)$.

A. $S=\left[-\frac{3}{8};3\right]$. **B.** $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$. **C.** $S=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $S=[3;+\infty)$.

Lời giải

$2\log_3(4x-3)\le\log_3(18x+27)\,(*)$.

Điều kiện: $\begin{cases}4x-3>0\\18x+27>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$.

Với điều kiện trên, $(*)\Leftrightarrow\log_3(4x-3)^2\le\log_3(18x+27)$

$\Leftrightarrow(4x-3)^2\le 18x+27$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le x\le 3$.

Kết hợp điều kiện ta được $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Câu 3. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình -2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9$ chứa tập hợp nào sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2};6\right)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

\+ Điều kiện: $x>0$.

\+ Ta có:

$\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2+\log_2 x-2<9 \Leftrightarrow \log_2^2 x+3\log_2 x-10<0$

$\Leftrightarrow -5<\log_2 x<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^5}<x<4$

.

Vậy $x\in\left(\frac{1}{2^5};4\right)$ chứa tập $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 4. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là:

A. $(-\infty;4]$. **B.** $(1;4]$. **C.** $(1;4)$. **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $\begin{cases} x-1>0 \\ 11-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(1;\frac{11}{2}\right)$

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0 \Leftrightarrow \log_3\frac{11-2x}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{11-2x}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[1;\frac{11}{2}\right]$

Kết luận: $x\in\left(1;\frac{11}{2}\right)$. Vì $x\in\left[4;\frac{11}{2}\right)\subset\left(1;\frac{11}{2}\right)$. Ta chọn đáp án D

Câu 5. **(Sở Phú Thọ 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

A. $(-\infty;4]$ **B.** $(1;4]$ **C.** $(1;4)$ **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $1<x<\frac{11}{2}$.

Khi đó ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x)\geq\log_3(x-1) \Leftrightarrow 11-2x\geq x-1>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;4]$.

Câu 6. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là:

A. $S=(-\infty;4]$. **B.** $S=(1;4)$. **C.** $S=(1;4]$. **D.** $S=\left(3;\frac{11}{2}\right)$.

Lời giải

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x)-\log_3(x-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow \log_3(11-2x)\geq\log_3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 11-2x\geq x-1 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\leq 4$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;4]$.

Câu 7. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)$ bằng

A. 12 **B.** 9 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

$2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)\Leftrightarrow \log_2(x+1)\le\log_2\dfrac{4}{(x-2)}\Leftrightarrow x+1\le\dfrac{4}{(x-2)}$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2-x-2-4}{x-2}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-x-6}{x-2}\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;3]$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là: $x\in(2;3]$.

Nghiệm nguyên là: $x=3$. Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên là 3

Câu 8. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log(2x^2+3)>\log(x^2+mx+1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $-2<m<2$. **B.** $m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Ta có $\log(2x^2+3)>\log(x^2+mx+1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\\2x^2+3>x^2+mx+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\\x^2-mx+2>0\end{cases}(*)$

Để bất phương trình $\log(2x^2+3)>\log(x^2+mx+1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì hệ $(*)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1=m^2-4<0\\\Delta_2=m^2-8<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 9. **(Mã 123 2017)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$.

A. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$ **B.** $S=[2;16]$

C. $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$

Bpt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge 4\\\log_2 x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 16\\x\le 2\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Câu 10. **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực.

A. $m<1$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m<0$ **D.** $m<\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn.A

Đặt $t=\log_2 x\ (x>0)$, ta có bất phương trình : $t^2-2t+3m-2<0$.

Để BPT luôn có nghiệm thực thì $\Delta'=3-3m>0 \Leftrightarrow m<1$.

Câu 11. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Biết rằng bất phương trình $\log_2\left(5^x+2\right)+2.\log_{\left(5^x+2\right)}2>3$ có tập nghiệm là $S=\left(\log_a b;+\infty\right)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\ne 1$. Tính $P=2a+3b$.

A. $P=7$. **B.** $P=11$. **C.** $P=18$. **D.** $P=16$.

Lời giải

Đặt $\log_2(5^x+2)=t$. Do $5^x+2>2$ với mọi x nên $\log_2(5^x+2)>\log_2 2=1$ hay $t>1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t+\dfrac{2}{t}>3 \Leftrightarrow t^2-3t+2>0$ (do $t>1$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với $t>1$ ta lấy $t>2$.

Khi đó $\log_2(5^x+2)>2 \Leftrightarrow 5^x>2 \Leftrightarrow x>\log_5 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $S=(\log_5 2;+\infty)$, ta có $a=5,\ b=2 \Rightarrow 2a+3b=16$.

Câu 12. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6\le 0$ là

A. $S=\left[\dfrac{1}{2};64\right]$. **B.** $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

C. $S=\left[64;+\infty\right)$. **D.** $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[64;+\infty\right)$.

Lời giải

$\log_2^2 x-5\log_2 x-6\le 0\ (1)$

ĐK: $x>0\ (*)$

Đặt $t=\log_2 x\ (2)$

(1) thành $t^2-5t-6\le 0 \Leftrightarrow -1\le t\le 6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -1\le \log_2 x\le 6 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le x\le 64$

So với $(*)$: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le x\le 64$

Vậy $S=\left[\dfrac{1}{2};64\right]$.

Câu 13. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Kí hiệu $\max\{a;b\}$ là số lớn nhất trong hai số a,b. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\max\left\{\log_2 x;\ \log_{\frac{1}{3}} x\right\}<1$.

A. $S=\left(\dfrac{1}{3};2\right)$. **B.** $S=(0;2)$. **C.** $S=\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$y=\log_2 x-\log_{\frac{1}{3}} x=\log_2 x+\log_3 x$

$y'=\dfrac{1}{x\ln 2}+\dfrac{1}{x\ln 3}>0,\forall x>0$ nên phương trình $y=0$ có nghiệm duy nhất

Mà phương trình $y=0$ có nghiệm $x=1$ do đó

TH1: $x<1:\log_2 x<\log_{\frac{1}{3}} x$

Ta có $\max\left\{\log_2 x;\ \log_{\frac{1}{3}} x\right\}<1.\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x<1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$

Do đó $\dfrac{1}{3}<x<1$

TH2: $x\ge 1:\log_2 x\ge \log_{\frac{1}{3}} x$

Ta có $\max\left\{\log_2 x;\ \log_{\frac{1}{3}} x\right\}<1.\Leftrightarrow \log_2 x<1\Leftrightarrow x<2$

Do đó $1\le x<2$

Vậy $S=\left(\dfrac{1}{3};2\right)$.

$S=\left(\dfrac{1}{3};2\right)$.

Câu 14. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1$ là $\left(-\sqrt{a};-\sqrt{b}\right]$.

Khi đó $a.b$ bằng

A. $\dfrac{15}{16}$. **B.** $\dfrac{12}{5}$. **C.** $\dfrac{16}{15}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải

Ta có: $x\sqrt{x^2+2}-x^2=x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$.

Ta có: $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\Leftrightarrow \log_2\left(x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\Leftrightarrow \log_2\dfrac{2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1,(1)$

Ta có $\sqrt{x^2+2}+x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện: $3x+2\sqrt{x^2+2}>0\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2}>-3x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 0\\ \begin{cases}x<0\\4x^2+8>9x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x>-\sqrt{\dfrac{8}{5}},(*)$

Với điều kiện $(*)$, ta có

$(1)\Leftrightarrow \log_2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)+3x+2\sqrt{x^2+2}\le \log_2\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)+\sqrt{x^2+2}+x,\ (2)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$. Có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0$, $\forall t\in(0;+\infty)$.

Hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, $\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\in(0;+\infty)$ và

$\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\in(0;+\infty)$

Nên $(2)\Leftrightarrow f\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\le f\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)$

$$\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2}\le\sqrt{x^2+2}+x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}\le -2x \Leftrightarrow \begin{cases}-2x\ge 0\\ x^2+2\le 4x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ 3x^2\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow x\le -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left(-\sqrt{\frac{8}{5}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a.b=\dfrac{16}{15}$.

Chọn đáp án **C.**

Câu 15. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-5$.

Cho $\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3-9x=0\\ \ln(x+5)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=0\\ x=3\\ x=-4\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4\le x\le -3\\ 0\le x\le 3\end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4;-3;0;1;2;3\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của x thỏa bài toán.

Câu 16. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương 2019)** Biết rằng bất phương trình $\log_2\left(5^x+2\right)+2.\log_{\left(5^x+2\right)}2>3$ có tập nghiệm là $S=\left(\log_a b;+\infty\right)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\ne 1$. Tính $P=2a+3b$.

A. $P=7$. **B.** $P=11$. **C.** $P=18$. **D.** $P=16$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2(5^x+2)=t$. Do $5^x+2>2$ với mọi x nên $\log_2(5^x+2)>\log_2 2=1$ hay $t>1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t+\dfrac{2}{t}>3 \Leftrightarrow t^2-3t+2>0$ (do $t>1$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t<1\\ t>2\end{array}\right.$.

Đối chiếu với $t>1$ ta lấy $t>2$.

Khi đó $\log_2(5^x+2)>2 \Leftrightarrow 5^x>2 \Leftrightarrow x>\log_5 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $S=(\log_5 2;+\infty)$, ta có $a=5,\ b=2\Rightarrow 2a+3b=16$.

Câu 17. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có

$\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+3\right)+x^2+3\le \log_2 4x+4x\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $D=(0;+\infty)$. Ta có

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \forall t\in D\Rightarrow$ hàm số f đồng biến trên D.

Suy ra

$(*)\Leftrightarrow f\left(x^2+3\right)\le f(4x)\Leftrightarrow x^2+3\le 4x\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Vậy tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình là $\{1;\ 2;\ 3\}$.

Nhận xét: Với cách hỏi và đáp án của câu này ta chỉ cần mở MODE 7 của máy tính cầm tay, nhập vế trái của bất phương trình và cho biến chạy từ 1 đến 6 là tìm được đáp án ngay.

Câu 18. **(HKI-NK HCM-2019)** Biết bất phương trình $\log_2\left(\dfrac{x^2+x+1}{16x+3}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2+x\le 1$ có tập nghiệm là $S=(a;b)$. Hãy tính tổng $T=20a+10b$.

A. $T=45-10\sqrt{2}$. **B.** $T=46-10\sqrt{2}$. **C.** $T=46-11\sqrt{2}$. **D.** $T=47-11\sqrt{2}$.

Lời giải:

Chọn A

Điều kiện: $x\ge 0$.

$$\log_2\left(\frac{x^2+x+1}{16x+3}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2+x\le 1\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+1\right)-\log_2(16x+3)+2x-4\sqrt{x}+3\le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\right)\le \log_2\left(\left(2\sqrt{x}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+2\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{4}\right)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2\left(t^2+\dfrac{3}{4}\right)+2\left(t+\dfrac{3}{4}\right)$ với $t\ge 0$ có $f'(t)=\dfrac{2t}{\left(t^2+\dfrac{3}{4}\right)\ln 2}+2>0$, $\forall t\ge 0$

nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$.

Suy ra $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{4}\le 2\sqrt{x}+\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\ge x+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-3x+\dfrac{1}{4}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\le x\le \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow a=\frac{3-2\sqrt{2}}{2};b=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow T=20a+10b=45-10\sqrt{2}$$

Câu 19. **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(10-3^{x+1}\right)\ge 1-x$ chứa mấy số nguyên.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_3\left(10-3^{x+1}\right)\ge 1-x \Leftrightarrow 10-3^{x+1}\ge 3^{1-x} \Leftrightarrow 3.3^x+\frac{3}{3^x}-10\le 0\,(*)$.

Giải (*) ta có $\frac{1}{3}\le 3^x\le 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Vậy có 3 số nguyên thuộc tập nghiệm của bất phương trình.

Câu 20. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x>0$.

Ta có: $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x \Leftrightarrow \left(\log_2 x-1\right)\left(\log_3 x-1\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 x-1\le 0\\ \log_3 x-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x-1\ge 0\\ \log_3 x-1\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x\le 2\\ x\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ 0<x\le 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

Do đó có 2 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 21. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\right)\ge 0$ có tập nghiệm là $\left(a;b\right]$. Tính giá trị $P=3a-b$.

A. $P=5$. **B.** $P=4$. **C.** $P=10$. **D.** $P=7$.

Lời giải

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \frac{3x-7}{x+3}<1\\ \frac{3x-7}{x+3}\le\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \frac{3x-7}{x+3}\le\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \frac{8\left(x-3\right)}{3\left(x+3\right)}\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(\frac{7}{3};+\infty\right)\\ \frac{8\left(x-3\right)}{3\left(x+3\right)}<0x\in\left[-3;3\right]\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{7}{3};3\right].$$

Suy ra $a=\frac{7}{3}$; $b=3$. Vậy $P=3a-b=3.\frac{7}{3}-3=4$.

Câu 22. **(THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\log_2 x\right)<0$ là

A. $(0;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(\frac{1}{4};4\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ -\log_2 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow 0<x<1$

$\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x)<0 \Leftrightarrow -\log_2 x>1 \Leftrightarrow \log_2 x<-1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

So sánh điều kiện, suy ra $S=\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 23. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\sqrt{5}}^2 x^5-25\log_{\sqrt{5}} x^2-75\le 0$ là

A. 70. **B.** 64. **C.** 62. **D.** 66.

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

$\log_{\sqrt{5}}^2 x^5-25\log_{\sqrt{5}} x^2-75\le 0 \Leftrightarrow 4\log_5^2 x-4\log_5 x-3\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le \log_5 x\le \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\le x\le \sqrt{125}$. Nghiệm nguyên của bất phương trình là: $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11$.

$S=1+2+...+11=\frac{11.(11+1)}{2}=66$.

Câu 24. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho bất phương trình $(\log x+1)(4-\log x)>0$. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

A. 10000. **B.** 10001. **C.** 9998. **D.** 9999.

Lời giải

$(\log x+1)(4-\log x)>0\ (1)$

Điều kiện: $x>0$.

Khi ấy $(1) \Leftrightarrow -1<\log x<4 \Leftrightarrow \frac{1}{10}<x<10000$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{1;2;3;...;9999\}$

Vậy có tất cả 9999 số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Sử dụng các phương pháp giải phương trình mũ đã đưa ra tại Chuyên đề 19. Phương trình mũ – logarit để giải

Câu 1. **(THPT Trần Phú - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình: $(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0$

A. $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0 \Leftrightarrow 4^{x+1}-8^{2x+1}\le 0$

$\Leftrightarrow 4.2^{2x}-8.(2^{2x})^3\le 0 \Leftrightarrow -2.(2^{2x})^3+2^{2x}\le 0(*)$

Đặt $2^{2x}=t,\ t>0$, suy ra bpt (*) trở thành: $-2.t^3+t\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le t\le 0\\ t\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

Giao với Đk $t>0$ ta được: $t\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2^{2x}\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2^{2x}\ge 2^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2x\ge -\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{4}$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $T=\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Câu 2. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Bất phương trình $3^{2x+1}-7.3^x+2>0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;-1)\cup(\log_2 3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(\log_2 3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)\cup(\log_3 2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(\log_3 2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{2x+1}-7.3^x+2>0 \Leftrightarrow 3.(3^x)^2-7.3^x+2>0$.

Đặt $3^x=t>0$ ta được $\begin{cases}t>0\\3t^2-7t+2>0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<t<\dfrac{1}{3}\\ t>2\end{array}\right.$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}0<3^x<\dfrac{1}{3}\\ 3^x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<3^x<3^{-1}\\ 3^x>3^{\log_3 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>\log_3 2\end{array}\right.$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $(-\infty;-1)\cup(\log_3 2;+\infty)$.

Câu 3. **(Chuyên ĐH Vinh -2019)** Biết tập nghiệm của bất phương trình $2^x<3-\dfrac{2}{2^x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^x<3-\dfrac{2}{2^x}\Leftrightarrow (2^x)^2-3.(2^x)+2<0\Leftrightarrow 1<2^x<2\Leftrightarrow 0<x<1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(0;1)$.

Suy ra $a=0$ và $b=1$ nên $a+b=1$.

Câu 4. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1}-9+3^{x+1}-9.3^{2x}>0$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{3x+1}-9+3^{x+1}-9.3^{2x}>0\Leftrightarrow 3.3^{3x}-9+3.3^x-9.3^{2x}>0$

Đặt $3^x=t\,(t>0)$.

Ta có bất phương trình $3t^3-9+3t-9t^2>0$

$\Leftrightarrow 3t^3-9t^2+3t-9>0$

$\Leftrightarrow 3t^2(t-3)+3(t-3)>0$

$\Leftrightarrow (3t^2+3)(t-3)>0$

$\Leftrightarrow t-3>0$

$\Leftrightarrow t>3$

Khi đó ta có $3^x>3 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)$.

Câu 5. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019)** Bất phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$ có tập nghiệm là?

A. $S=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0 \Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13.\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{3}{2}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

.

Câu 6. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho bất phương trình: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}-133.\sqrt{10^x}\le 0$ có tập nghiệm là: $S=[a;b]$. Biểu thức $A=1000b-5a$ có giá trị bằng

A. 2021 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2018

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}-133.\sqrt{10^x}\le 0 \Leftrightarrow 50.\left(5^{\frac{x}{2}}\right)^2-133.5^{\frac{x}{2}}.2^{\frac{x}{2}}+20.\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2\le 0$

$\Leftrightarrow \left(2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\right)\left(25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\right)\left(5^{\frac{x}{2}+2}-2^{\frac{x}{2}+2}\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\le 0\\ 25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\ge 0\\ 25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5^{\frac{x}{2}-1}\le 2^{\frac{x}{2}-1}\\ 5^{\frac{x}{2}+2}\ge 2^{\frac{x}{2}+2}\end{cases}\\ \begin{cases}5^{\frac{x}{2}-1}\ge 2^{\frac{x}{2}-1}\\ 5^{\frac{x}{2}+2}\le 2^{\frac{x}{2}+2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1}\le 1\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}+2}\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1}\ge 1\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}+2}\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{x}{2}-1\le 0\\ \frac{x}{2}+2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{x}{2}-1\ge 0\\ \frac{x}{2}+2\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2\\ x\ge -4\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ x\le -4\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow -4\le x\le 2$. Suy ra $S=[-4;2]$. Vậy $A=1000b-5a=1000.2-5.(-4)=2020$.

Câu 7. **(Toán Học Tuổi Trẻ Năm 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(17-12\sqrt{2}\right)^x \geq \left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\left(17-12\sqrt{2}\right)^x \geq \left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2} \Leftrightarrow \left(3-\sqrt{8}\right)^{2x} \geq \left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$

$\Leftrightarrow \left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2+2x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2+2x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2;0]$.

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên.

Câu 8. **(Chuyên Lê Quý Dôn Diện Biên 2019)** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x+2^{x+1} \leq 3^x+3^{x-1}$.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $2^x+2^{x+1} \leq 3^x+3^{x-1} \Leftrightarrow 3.2^x \leq 4.3^{x-1} \Leftrightarrow 2^{x-2} \leq 3^{x-2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Câu 9. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $P=3a+10b$ là

A. 5. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(t>0)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$t^2+t>12 \Leftrightarrow (t-3)(t+4)>0 \Leftrightarrow t>3$ (vì $t>0$).

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow -1<x<0$. Tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;0)$.

Vậy $a=-1$ và $b=0$. Suy ra $P=3a+10b=-3$.

Câu 10. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^x-4.3^x+3<0$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $t=3^x>0$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2-4.t+3<0 \Leftrightarrow 1<t<3 \Leftrightarrow 1<3^x<3 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=(0,1)$ nên nó không có nghiệm nguyên dương.

Câu 11. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Bất phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$ có tập nghiệm là?

A. $S=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0\Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13.\left(\frac{2}{3}\right)^x+6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{3}{2}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 12. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14}\ge 7+4\sqrt{3}$ là:

A. $[-6;2]$. **B.** $(-\infty-6]\cup[2;+\infty)$. **C.** $(-6;2)$. **D.** $(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$, $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1$ và $2+\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\Rightarrow 7+4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2}$.

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14}\ge 7+4\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14}\ge\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2}$

$\Leftrightarrow x^2+4x-14\le -2\Leftrightarrow x^2+4x-12\le 0\Leftrightarrow -6\le x\le 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $[-6;2]$.

Câu 13. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x+4\le 2^{x+1}+2.3^x$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0

Lời giải

Chọn C

$6^x+4\le 2^{x+1}+2.3^x\Leftrightarrow 6^x+4-2.2^x-2.3^x\le 0$

$\Leftrightarrow 2^x\left(3^x-2\right)+2\left(2-3^x\right)\le 0$

$\Leftrightarrow\left(3^x-2\right)\left(2^x-2\right)\le 0$

$\Rightarrow x\in[\log_3 2;1]$

Câu 14. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

$3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1\ (1)$.

Có $5^{x+1}>0\ \forall x$.

Xét $x^2-9=0$, VT $(1)=3^0+0=1$ (loại).

Xét $x^2-9>0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3^{x^2-9}>3^0=1\\ \left(x^2-9\right).5^{x+1}>0\end{array}\right\}\Rightarrow$ VT $(1)>1$ (loại).

Xét $x^2-9<0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3^{x^2-9}<3^0=1\\ \left(x^2-9\right).5^{x+1}<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ VT $(1)<1$ luôn đúng.

Có $x^2-9<0\Leftrightarrow x\in(-3;3)$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là: $(-3;3) \Rightarrow b-a=6$.

Câu 15. **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Bất phương trình $\dfrac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}}-\sqrt{2-3^{2x}}}+\dfrac{3^{4x}+\sqrt{4-3^{4x}}-7}{3^{2x}} \geq \dfrac{3^{2x}-2}{\sqrt{4-3^{4x}}-2+3^{2x}}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Đặt $t=3^{2x}>0$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{\sqrt{2+t}}{\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}}+\frac{t^2+\sqrt{4-t^2}-7}{t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t} \ (1)$$

Điều kiện: $0<t<2$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2+t}\left(\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}\right)}{2t}+\frac{t^2+\sqrt{4-t^2}-7}{t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12}{2t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t} \Leftrightarrow \frac{t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12}{2t} \geq \frac{(t-2)\left(\sqrt{4-t^2}+2-t\right)}{-2t^2+4t}$$

$$\Leftrightarrow t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12 \geq -\sqrt{4-t^2}-2+t \Leftrightarrow 4\sqrt{4-t^2}+2t^2-10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4-t^2}-1\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t=\sqrt{3}. \text{ Với } t=\sqrt{3} \Rightarrow 3^{2x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.$$

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

Câu 16. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-20;\,20]$ của bất phương trình: $2^{2x+1}-9.2^x+4\sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$ là

A. 38. **B.** 36. **C.** 37. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $x^2+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq 1$ $(*)$.

Vì x là số nguyên thuộc đoạn $[-20;\,20]$ nên ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $3 \leq x \leq 20$, khi đó dễ thấy $2^{2x+1}-9.2^x=2^x\left(2^{x+1}-9\right)>0$ nên

$2^{2x+1}-9.2^x+4\sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$, do đó trên $[3;\,20]$ bất phương trình có 18 nghiệm nguyên.

Trường hợp 2. $x=2$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta có: $4\sqrt{5}-4 \geq 0$ (đúng).

Do đó $x=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 3. $x=1$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta có: $-10 \geq 0$ (sai).

Do đó $x=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 4. $-20 \leq x \leq -4$. Khi đó, xét hàm số: $f(x)=x^2+2x-3$, dễ thấy

$\min\limits_{[-20;-4]} f(x)=f(-4)=5$ nên $4\sqrt{x^2+2x-3} \geq 4\sqrt{5},\ \forall x \in [-20;-4]$ (a).

Mặt khác, đặt $t=2^x$, khi đó $2^{2x+1}-9.2^x=2t^2-9t$, $-20 \leq x \leq -4 \Rightarrow 2^{-20} \leq t \leq 2^{-4}$.

Khi đó xét hàm số $g(t)=2t^2-9t$ với $2^{-20} \leq t \leq 2^{-4}$, dễ thấy

$$\min_{\left[2^{-20};\,2^{-4}\right]} g(t)=g\left(2^{-4}\right)=-\frac{71}{128} \ (b)$$

Từ $(a),(b)$ suy ra $\min\limits_{[-20;-4]}\left\{h(x)=2^{2x+1}-9.2^x+4\sqrt{x^2+2x-3}\right\}=h(-4)=4\sqrt{5}-\frac{71}{128}>0$. Do đó bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $-20\le x\le -4$, nên trên đoạn $[-20;-4]$ bất phương trình có 17 nghiệm nguyên.

Trường hợp $x=-3$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là: 36.

Câu 17. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+(x^2-4).2019^{x-2}\ge 1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 5. **B.** 4. **C.** -5. **D.** -1.

Lời giải

Xét hai trường hợp: $x^2-4\ge 0$ và $x^2-4<0$

TH1: $x^2-4\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.$ khi đó ta có:

$$\begin{cases}9^{x^2-4}\ge 9^0=1\\ x-2\ge 0\Leftrightarrow 2019^{x-2}\ge 2019^0=1\end{cases}\Rightarrow 9^{x^2-4}+(x^2-4)2019^{x-2}\ge 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4=0\\ x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

TH2: $x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2$, khi đó ta có:

$$\begin{cases}9^{x^2-4}<9^0=1\\ x-2<0\Leftrightarrow 2019^{x-2}<2019^0=1\end{cases}\Rightarrow 9^{x^2-4}+(x^2-4)2019^{x-2}<1$$

$\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Vậy tập hợp tất cả các số thực X không thỏa mãn bất phương trình là

$(-2;2)\Rightarrow a=-2;b=2\Rightarrow b-a=4$

Câu 18. **(THPT Chuyên Thái Bình - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+(x^2-9).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

□Với $x^2-9\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 3\end{array}\right.$, ta có $\begin{cases}3^{x^2-9}\ge 3^0=1\\ (x^2-9).5^{x+1}\ge 0\end{cases}$ nên $3^{x^2-9}+(x^2-9).5^{x+1}\ge 1$

$\Rightarrow$ không thỏa mãn bất phương trình đã cho, do đó bất phương trình vô nghiệm.

□Với $x^2-9<0\Leftrightarrow -3<x<3$, ta có $\begin{cases}3^{x^2-9}<3^0=1\\ (x^2-9).5^{x+1}<0\end{cases}$ nên $3^{x^2-9}+(x^2-9).5^{x+1}<1$

$\Rightarrow$ Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=(-3;3)$.

Khi đó, $a=-3;b=3$ nên $b-a=6$.

Câu 19. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của x trong đoạn $\left[0;2020\right]$ thỏa mãn bất phương trình sau
$16^x+25^x+36^x\le 20^x+24^x+30^x$.

A. 3. **B.** 2000. **C.** 1. **D.** 1000.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$16^x+25^x+36^x\le 20^x+24^x+30^x \Leftrightarrow 4^{2x}+5^{2x}+6^{2x}\le 4^x.5^x+4^x.6^x+5^x.6^x$

$\Leftrightarrow 2\left[\left(4^x\right)^2+\left(5^x\right)^2+\left(6^x\right)^2\right]-\left(2.4^x.5^x+2.4^x.6^x+2.5^x.6^x\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow \left(4^x-5^x\right)^2+\left(4^x-6^x\right)^2+\left(5^x-6^x\right)^2\le 0\Leftrightarrow \begin{cases}4^x-5^x=0\\4^x-6^x=0\\5^x-6^x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{4}{5}\right)^x=1\\\left(\frac{4}{6}\right)^x=1\\\left(\frac{5}{6}\right)^x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0\in\left[0;2020\right].$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của x trong đoạn $\left[0;2020\right]$ thỏa mãn bất phương trình.

Câu 20. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $3^{x+1}-1\ge 0\Leftrightarrow 3^{x+1}\ge 1\Leftrightarrow x\ge -1$.

Ta có $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x>-1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\le 0$.

Đặt $t=3^x>0$, ta có $(t^2-9)(t-\frac{1}{27})\le 0\Leftrightarrow (t-3)(t+3)(t-\frac{1}{27})\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\le -3\\ \frac{1}{27}\le t\le 3\end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $t=3^x>0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27}\le t\le 3\Leftrightarrow \frac{1}{27}\le 3^x\le 3\Leftrightarrow -3\le x\le 1$. Kết hợp điều kiện $x>-1$ ta được $-1<x\le 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

Câu 21. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x-2\left(x+5\right).3^x+9\left(2x+1\right)\ge 0$ là

A. $\left[0;1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$. **C.** $\left[1;2\right]$. **D.** $\left(-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Lời giải

Đặt $3^x=t$, $t>0$.

Xét phương trình: $t^2-2\left(x+5\right)t+9\left(2x+1\right)=0$ $\left(1\right)$.

Ta có $\Delta'=\left(x+5\right)^2-9\left(2x+1\right)=x^2-8x+16=\left(x-4\right)^2$ nên phương trình $\left(1\right)$ luôn có nghiệm.

Nếu $x=4\Rightarrow\Delta'=0$ thì phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm kép $t=x+5$.

Do đó bất phương trình đã cho trở thành $3^x\ge x+5$ (luôn đúng khi $x=4$).

Nếu $x \neq 4 \Rightarrow \Delta' > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} t = 2x+1 \\ t = 9 \end{array}\right.$.

Xét các phương trình $3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$ (1) và $3^x = 2x+1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$ (2).

Đặt $f(x) = 3^x - 2x - 1$; ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $f(0) = f(1) = 0$ và $f'(0) < 0$, $f'(1) > 0$ nên $f'(x)$ đổi dấu một lần duy nhất trong khoảng $[0;1]$.

Vậy phương trình (2) có đúng hai nghiệm $x = 0$, $x = 1$.

Lập bảng xét dấu cho (1) và (2) ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [0;1] \cup [2;+\infty)$.

Câu 22. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6)** Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2} + 7.2^{x+2} \le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S = [a;b]$. Giá trị $b - 2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(3;\sqrt{10}\right)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

Lời giải

$2.7^{x+2} + 7.2^{x+2} \le 351.\sqrt{14^x} \Leftrightarrow 49.7^x + 28.2^x \le 351.\sqrt{14^x} \Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^{2x}}{14^x}} + 28.\sqrt{\frac{2^{2x}}{14^x}} \le 351$

$\Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^x}{2^x}} + 28.\sqrt{\frac{2^x}{7^x}} \le 351$. Đặt $t = \sqrt{\frac{7^x}{2^x}}, t > 0$ thì bpt trở thành $49t + \frac{28}{t} \le 351$

$\Leftrightarrow \frac{4}{49} \le t \le \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{4}{49} \le \sqrt{\frac{7^x}{2^x}} \le \frac{7}{2} \Leftrightarrow -4 \le x \le 2$, khi đó $S = [-4;2]$.

Giá trị $b - 2a = 10 \in \left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$.

Câu 23. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho $f(x) = \frac{1}{2}.5^{2x+1}$; $g(x) = 5^x + 4x.\ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ là

A. $x < 0$. **B.** $x > 1$. **C.** $0 < x < 1$. **D.** $x > 0$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2}.5^{2x+1}.(2x+1)'.\ln 5 = 5^{2x+1}.\ln 5$.

Và: $g'(x) = 5^x.\ln 5 + 4\ln 5 = (5^x + 4)\ln 5$.

Do đó: $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 5^{2x+1}.\ln 5 > (5^x + 4)\ln 5 \Leftrightarrow 5^{2x+1} > 5^x + 4 \Leftrightarrow 5.5^{2x} - 5^x - 4 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x < -\frac{4}{5} (VN) \\ 5^x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 0$.

Câu 24. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018)** Bất phương trình $2.5^{x+2} + 5.2^{x+2} \le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S = [a;b]$ thì biểu thức $A = 1000b - 4a + 1$ có giá trị bằng

A. 3992. **B.** 4008. **C.** 1004. **D.** 2017.

Lời giải

Ta có:

$$2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x+20.\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x-133\le 0.$$

Đặt $t=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x$, $t>0$, ta được bất phương trình: $50t^2-133t+20\le 0\Leftrightarrow \frac{4}{25}\le t\le \frac{5}{2}$.

- Với $\frac{4}{25}\le t\le \frac{5}{2}$, ta có: $\frac{4}{25}\le\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow -2\le\frac{x}{2}\le 1\Leftrightarrow -4\le x\le 2$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;2]\Rightarrow a=-4$, $b=2$.

$\Rightarrow A=1000b-4a+1=1000.2-4(-4)+1=2017$.

Câu 25. Số nghiệm nguyên thuộc khoảng $(0;12)$ của bất phương trình $3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\log_2\sqrt{\frac{2x+11}{x^2+x+1}}$ là:

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>-\frac{11}{2}$ và $x\ne 0$.

Khi đó $3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\log_2\sqrt{\frac{2x+11}{x^2-x+1}}\Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x+11}{x^2-x+1}\right)$

$$\Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2+\frac{11}{x}}{x-1+\frac{1}{x}}\right)\Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{2}\log_2\left(x-1+\frac{1}{x}\right)\le 3^{2+\frac{11}{x}}+\frac{1}{2}\log_2\left(2+\frac{11}{x}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=3^t+\frac{1}{2}\log_2 t$ với $t>0$. Khi đó $f'(t)=3^t\ln 3+\frac{1}{2t\ln 2}>0,\forall t>0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó

$$f\left(x-1+\frac{1}{x}\right)\le f\left(2+\frac{11}{x}\right)\Leftrightarrow x-1+\frac{1}{x}\le 2+\frac{11}{x}\Leftrightarrow\frac{x^2-3x-10}{x}\le 0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{11}{2};-2\right]\cup(0;5].$$

Vậy trên khoảng $(0;12)$ có 5 nghiệm nguyên thỏa yêu cầu bài toán.