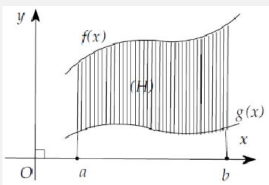
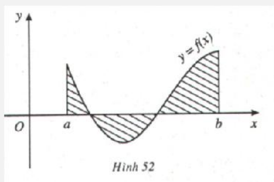
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

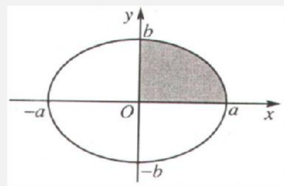
Dạng 1. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x}$.

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): Ox: y=0\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$.







$\downarrow$

$\boxed{S_{\text{elip}}=\pi ab.}$

$(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b\ (a<b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}} \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x =$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

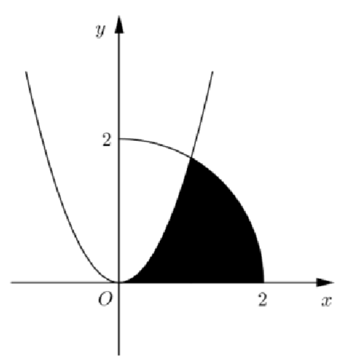
Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x)\}$

Giải $f(x)=g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1,...,x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}} \int_{x_1}^{x_i} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$

Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

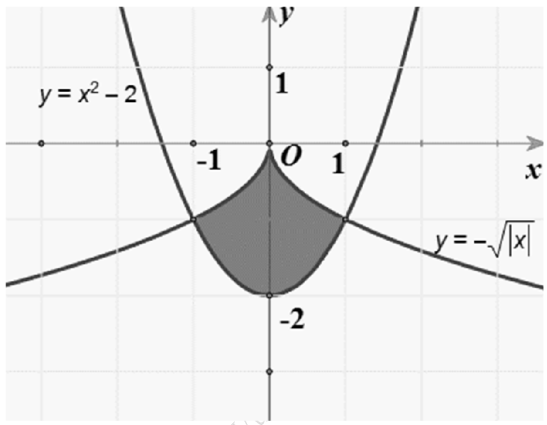
Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3}x^2=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x=\pm1$ với $0\le x\le 2$ nên ta có $x=1$

Ta có diện tích $S=\int\limits_0^1\sqrt{3}x^2dx+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx$

Đặt: $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos t dt; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}; x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{3}+2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$

Câu 2. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$. **<u>D</u>.** $\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$\int\limits_{-1}^{1}\left|x^2-2-\left(-\sqrt{|x|}\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(-\sqrt{|x|}-x^2+2\right)\mathrm{d}x$ (**vì** $x\in[-1;1]\Rightarrow-\sqrt{|x|}>x^2-2$).

Câu 3. **(Sở Bắc Giang 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

A. $\frac{e^2-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2+1}{2}$. **C.** $\frac{e^2-1}{4}$. **<u>D</u>.** $\frac{e^2+1}{4}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ của đường cong $y=x\ln x$ và trục hoành là

$$x\ln x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

$S=\int\limits_1^e|x\ln x|\mathrm{d}x=\int\limits_1^e x\ln x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Suy ra $S = \dfrac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x dx = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big|_1^e = \dfrac{e^2+1}{4}$.

Câu 4. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x+3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ bằng 10 là

A. $m = \dfrac{7}{2}$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Vì $m > 0$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in [0; m]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x+3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ là:

$$S = \int_0^m (2x+3).dx = \left(x^2+3x\right)\Big|_0^m = m^2+3m.$$

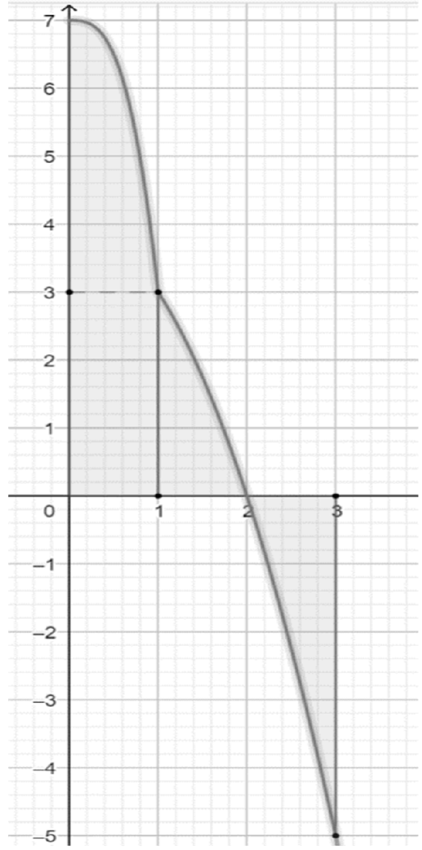
Theo giả thiết ta có:

$$S = 10 \Leftrightarrow m^2+3m = 10 \Leftrightarrow m^2+3m-10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 2 \; (\text{do } m > 0).$$

Câu 5. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7-4x^3 \; khi \; 0 \le x \le 1 \\ 4-x^2 \; khi \; x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải



$$S=\int_0^1\left(7-4x^3\right)dx+\int_1^2\left(4-x^2\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx$$

$$=\left(7x-x^4\right)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_2^3=6+4-\frac{7}{3}-3-\frac{8}{3}+8=10.$$

Câu 6. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\frac{937}{12}$ **B.** $S=\frac{343}{12}$ **C.** $S=\frac{793}{4}$ **D.** $S=\frac{397}{4}$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

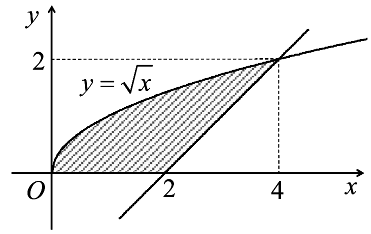
$$-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow x(x^2-x-12)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\\x=4\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ Diện tích cần tìm là: $S=\int_{-3}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{-3}^{0}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{4}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{-3}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{0}^{4}\right|$$

$$=\left|\frac{-99}{4}\right|+\left|\frac{-160}{3}\right|=\frac{937}{12}.$$

Câu 7. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Xét các hình phẳng $(H_1):\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=0 \\ x=0,\ x=4 \end{cases}$ và $(H_2):\begin{cases} y=x-2 \\ y=0 \\ x=2,\ x=4 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} (H)=(H_1)\setminus(H_2) \\ (H)\cup(H_2)=(H_1) \end{cases}$.

Do đó $S(H)=S(H_1)-S(H_2)=\int_0^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_2^4 (x-2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4-\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^4=\frac{16}{3}-2=\frac{10}{3}$

Cách khác: Ta có $(H):\begin{cases} x=y^2 \\ x=y+2 \\ y=0,\ y=2 \end{cases}$. Suy ra $S(H)=\int_0^2 \left|y^2-(y+2)\right|\mathrm{d}y=\frac{10}{3}$.

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$ là

A. $\frac{8}{15}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$ là

$$x^2+x-1=x^4+x-1 \Leftrightarrow x^2-x^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{-1}^{1}\left|x^2-x^4\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|x^2-x^4\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left|x^2-x^4\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{-1}^{0}\left(x^2-x^4\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^2-x^4\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{15}.$$

Câu 9. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S=\ln 2+1$. **B.** $S=2\ln 2+1$. **C.** $S=\ln 2-1$. **D.** $S=2\ln 2-1$.

Lời giải

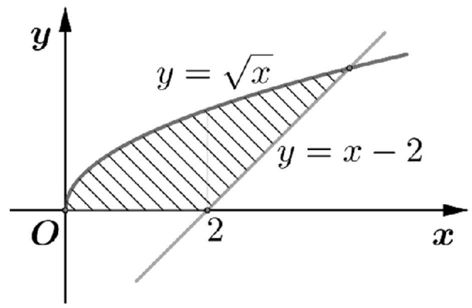
Phương trình trục (Ox) và (Oy) lần lượt là $y=0$ và $x=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số (H) và trục Ox: $\frac{x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $S=\int_0^1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x$. Vì $\frac{x-1}{x+1}\le 0,\ \forall x\in[0;1]$ nên diện tích cần tìm là:

$$S=-\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(-x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=2\ln 2-1.$$

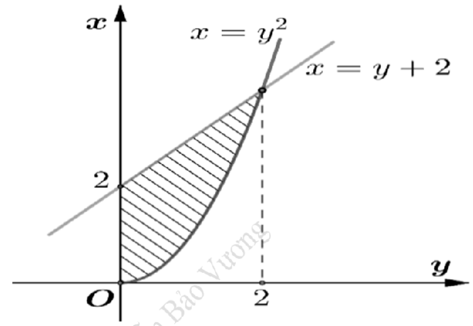
Câu 10. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



A. $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Cách 1: Coi x là hàm số theo biến số y.



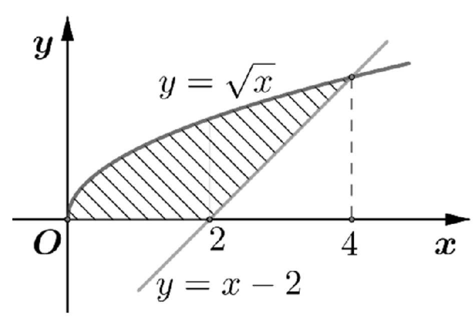
Hình phẳng đã cho giới hạn bởi các đường:

$x=y^2$ (với $y\ge 0$); $x=y+2$; $y=0$.

Ta có: $y^2=y+2\Leftrightarrow y^2-y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} y=-1 & (loai)\\ y=2 & (t/m)\end{array}\right.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^2\left|y+2-y^2\right|\mathrm{d}y=\int_0^2\left(y+2-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{10}{3}$ (đvdt)

Cách 2:

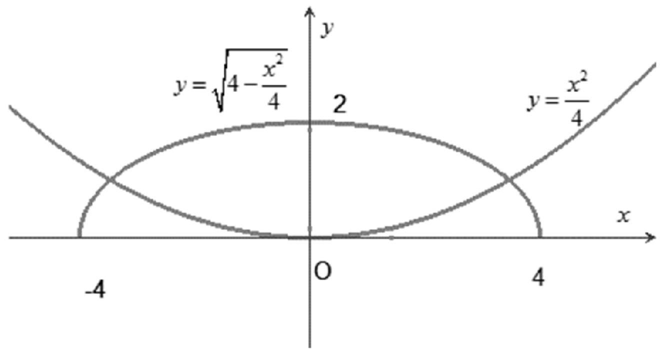


Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$:

$\sqrt{x}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^4\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int_2^4(x-2)\mathrm{d}x=\frac{10}{3}$ (đvdt)

Câu 11. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ (tham khảo hình vẽ bên)



Diện tích hình phẳng (H) bằng:

A. $\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$ **B.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}+\pi}{6}$

Lời giải

Xét phương trình $\dfrac{x^2}{12}=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}} \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{144}=4-\dfrac{x^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{144}+\dfrac{x^2}{4}-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{12} \\ x=-\sqrt{12} \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng (H) bằng:

$$S=\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{12}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{12}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}\right)\mathrm{d}x-2\int_0^{\sqrt{12}}\frac{x^2}{12}\mathrm{d}x$$

Xét $I_1=\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x=4\sin t \;\Rightarrow dx=4\cos x\mathrm{d}x$

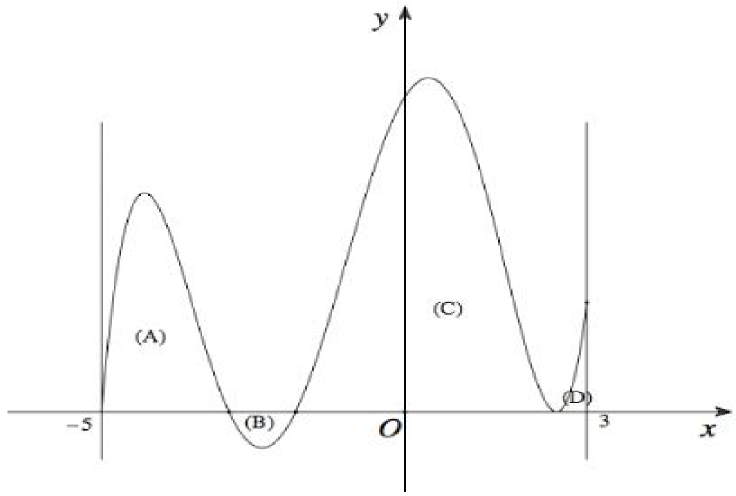
Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;\;\; x=\sqrt{12}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

$$I_1=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$$

Xét $I_2=\int_0^{\sqrt{12}}\dfrac{x^2}{12}\mathrm{d}x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Vậy $S=2I_1-2I_2=\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành lần lượt là $6;\,3;\,12;\,2$. Tính tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx$ bằng



A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx = 2\int_{-3}^{1} f(2x+1)\,dx + x\Big|_{-3}^{1} = \int_{-5}^{3} f(x)\,dx + 4$

Mà $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx = S_{(A)} - S_{(B)} + S_{(C)} + S_{(D)} = 6 - 3 + 12 + 2 = 17$

Vậy $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx = 21$

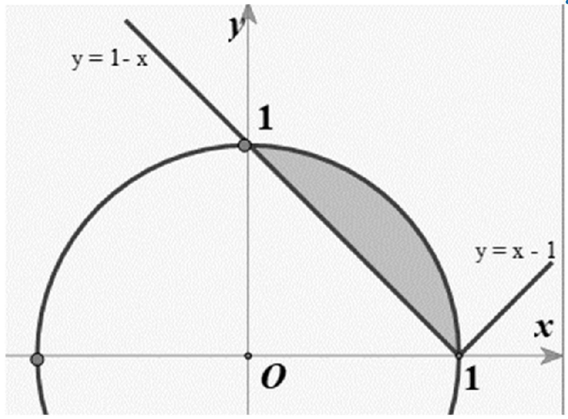
Câu 13. (To⟨ν H⊆χ Tυ∏ι Tρ ≈ – 2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\pi-1}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** $\frac{\pi}{4}-1$.

Lời giải

$y=|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{khi } x\ge 1 \\ 1-x & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$ do chỉ tính nửa trên của đường tròn nên ta lấy $y=\sqrt{1-x^2}$.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ là phần tô màu vàng như hình vẽ.
Diện tích hình phẳng trên là:

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{1-x^2}-(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)\mathrm{d}x=I_1+\left.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right|_0^1=I_1-\frac{1}{2}.$$

Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

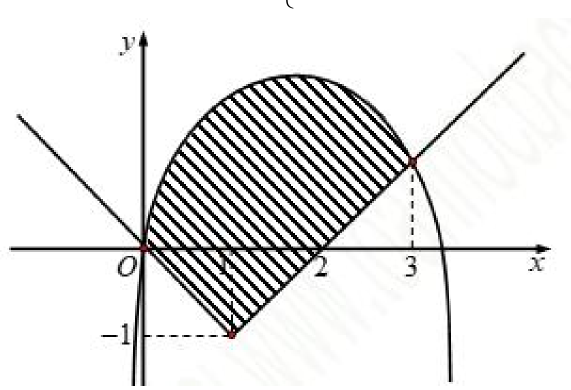
Đặt $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\mathrm{d}x=\cos t.\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$$I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,.\cos t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left.\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$ Vậy $S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Câu 14. **[Kim Liên - Hà Nội - 2018]** Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=-x$ và $y=x-2$ là: $-x=x-2\Leftrightarrow x=1$.
Diện tích hình phẳng cần tính là:

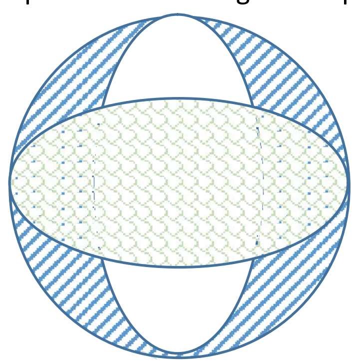
$$S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\left.\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1+\left.\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\right|_1^3=\frac{13}{2}.$$

Câu 15. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip (phần gạch carô trên hình vẽ) gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?



A. $S=4,8$. **B.** $S=3,9$. **C.** $S=3,7$. **D.** $S=3,4$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

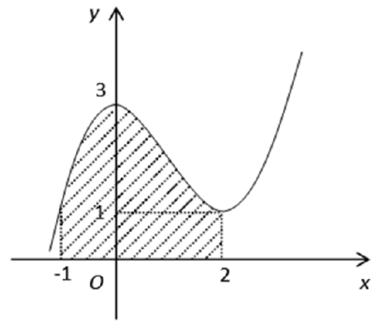
Hai Elip lần lượt có phương trình: $(E_1):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và $(E_2):\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$

Tọa độ giao điểm của hai Elip trong góc phần tư thứ nhất là nghiệm phương trình:

$$x^2+\frac{1-\frac{x^2}{4}}{4}=1\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{5}\ \Rightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S=\pi.2^2-\pi.2.1-4\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\left(2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)dx=3,71$

Câu 16. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



A. $S=\dfrac{51}{8}$. **B.** $S=\dfrac{52}{8}$. **C.** $S=\dfrac{50}{8}$. **D.** $S=\dfrac{53}{8}$.

Lời giải

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

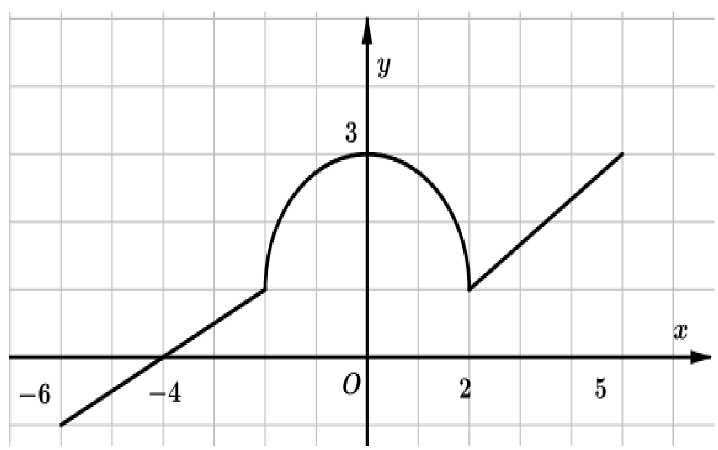
- Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và 3 $\Rightarrow S_1=3$.
- Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+c \\ y=1 \\ x=-1; x=2 \end{cases}$.

Dễ thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3$.

$\Rightarrow S_2=\int\limits_{-1}^{2}\left(\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3-1\right)dx=\dfrac{27}{8}$.

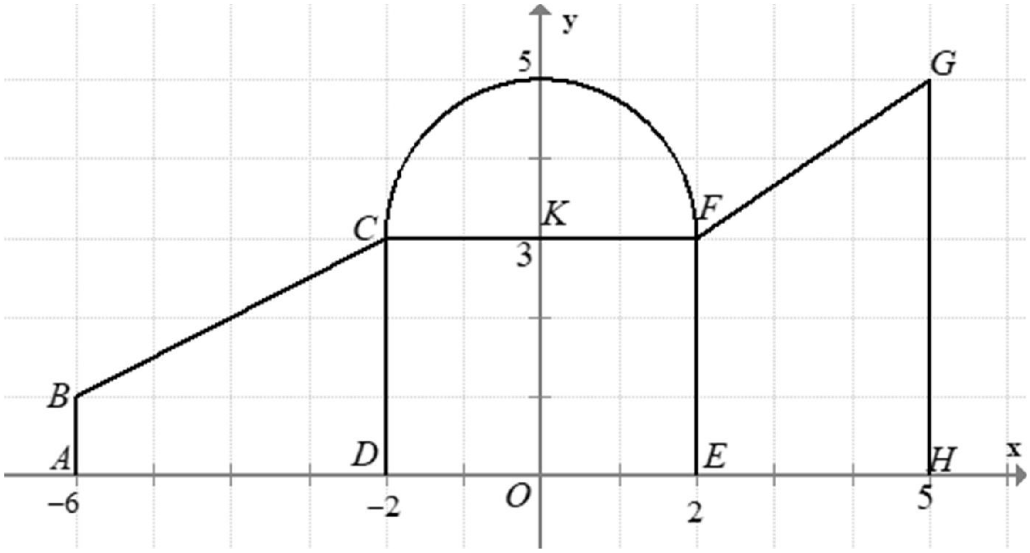
Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_1+S_2=\dfrac{51}{8}$.

Câu 17. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]dx$.



A. $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$. **C.** $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

Lời giải



$I=\int_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]\mathrm{d}x=\int_{-6}^{5}g(x)\mathrm{d}x$ với $g(x)=f(x)+2$ có đồ thị như hình vẽ.

Có $I=S_1+S_2+S_3+S_4$ trong đó:

S_1 là diện tích hình thang vuông $ABCD$ $\Rightarrow S_1=\frac{(AB+CD).AD}{2}=\frac{(1+3).4}{2}=8$,

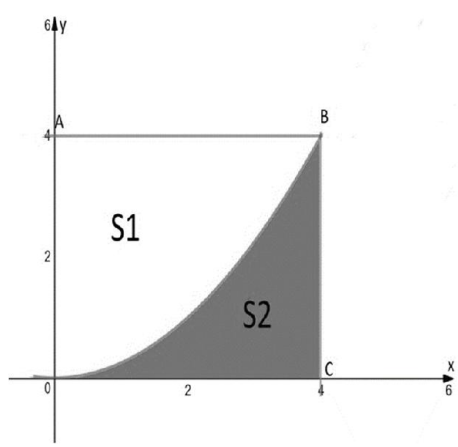
S_2 là diện tích hình chữ nhật $CDEF$ $\Rightarrow S_2=3.4=12$,

S_3 là diện tích hình tròn tâm I, bán kính $R=2$ $\Rightarrow S_3=\frac{\pi.2^2}{2}=2\pi$,

S_4 là diện tích hình thang vuông $EFGH$ $\Rightarrow S_4=\frac{(EF+GH).EH}{2}=\frac{(5+3).3}{2}=12$.

Suy ra $I=8+12+2\pi+12=2\pi+32$.

Câu 18. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=\frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng S_1+S_2.

$$S_2=\int_0^4 \frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{12}\right|_0^4=\frac{16}{3}\Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{16-S_2}{S_2}=\frac{16-\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}}=2$$

Câu 19. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=t$ $(t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

A. $t=3$. **B.** $t=4$. **C.** $t=13$. **D.** $t=14$.

Lời giải

Cách 1. Ta có: $S(t)=\int_1^t |2x+1|\,\mathrm{d}x=\int_1^t (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $S(t)=\left.(x^2+x)\right|_1^t=t^2+t-2$.

Do đó $S(t)=10\Leftrightarrow t^2+t-2=10\Leftrightarrow t^2+t-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4\ (L)\end{array}\right.$.

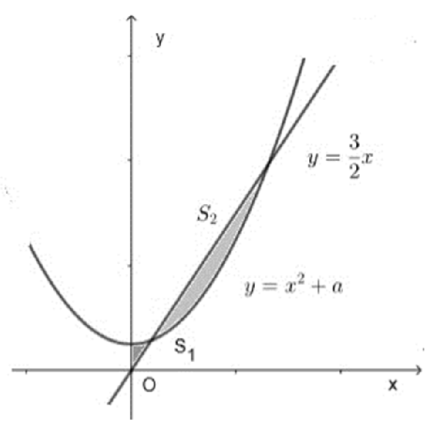
Vậy $t=3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1)=3$, đáy lớn bằng $y(t)=2t+1$ và chiều cao bằng $t-1$.

Ta có $\frac{(3+2t+1)(t-1)}{2}=10\Leftrightarrow 2t^2+2t-24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4\end{array}\right.$. Vì $t>1$ nên $t=3$

Do đó chọn đáp án **A.**

Câu 20. **(Mã 104 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0;\frac{2}{5}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$ **D.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$

Lời giải

Chọn C

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + a = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2a = 0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0 < x_1 < x_2$ thì $x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}$.

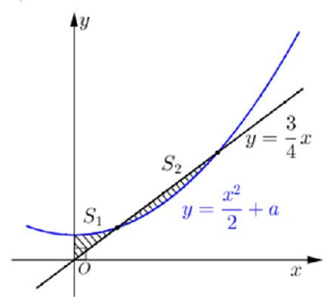
Để $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi $\int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) dx = 0$

Ta có: $\int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3} + ax_2 - \frac{3}{4}x_2^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \right)^3}{3} + a \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \right)^2 = 0$$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x = 0,421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20} \right)$.

Câu 21. **(Mã 102 - 2019)** Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4} \right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32} \right)$. **C.** $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32} \right)$. **D.** $\left(0; \frac{3}{16} \right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} & (*) \\ x_1x_2 = 2a & (**) \end{cases}$.

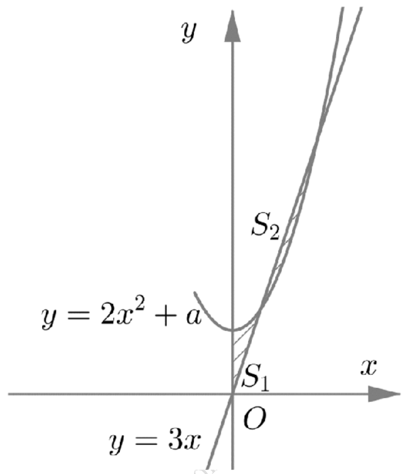
$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| \mathrm{d}x = 0$$

$\Leftrightarrow \left|\left.\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{8}x^2+ax\right|\right._0^{x_2}=0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x_2^3-\frac{3}{8}x_2^2+ax_2\right|=0 \Rightarrow a=-\frac{x_2^2}{6}+\frac{3x_2}{8}\ (***)$.

Từ $(*)\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}-x_2$, thay vào $(**)\Rightarrow\left(\frac{3}{2}-x_2\right)x_2=-\frac{x_2^2}{3}+\frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3}-\frac{3x_2}{4}=0 \Rightarrow x_2=\frac{9}{8}$

$\xrightarrow{(***)} a=\frac{27}{128}$. Vậy $a\in\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$.

Câu 22. **(Mã 103 - 2019)** Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$. **C.** $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2+a=3x \Leftrightarrow 2x^2-3x+a=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=9-8a>0\\ \frac{a}{2}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<\frac{9}{8}\\ a>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{9}{8}$.

Ta được nghiệm của phương trình là $x=\frac{3\pm\sqrt{9-8a}}{4}$.

Ta có $S_1=S_2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2-3x+a\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \left.\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax\right)\right|_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}=0$

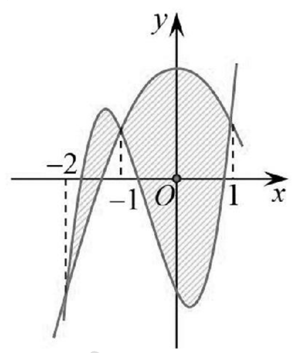
$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^3-\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2+a\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}=0\ \ (vn)\\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a=0\xrightarrow[Shift\ Solve]{CASIO}a=\frac{27}{32}$$

Câu 23. **(Mã 102 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{37}{6}$ **C.** $\frac{13}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$ax^3+bx^2+cx-2=dx^2+3x+2\Leftrightarrow a^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=0.$ $(*)$

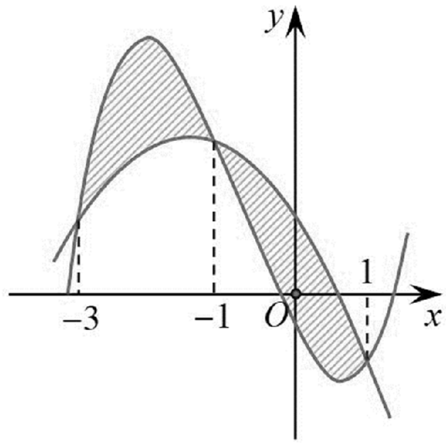
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-2$; $x=-1$; $x=1$. Ta được

$ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=k(x+2)(x+1)(x-1)$.

Khi đó $-4=-2k\Rightarrow k=2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^{1}\left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{6}$.

Câu 24. **(Mã 101 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5 **B.** $\dfrac{9}{2}$ **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}=dx^2+ex+1$ Û $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\dfrac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là -3; -1; 1 nên suy ra $\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\dfrac{3}{2}=0\\ -a+(b-d)-(c-e)-\dfrac{3}{2}=0\\ a+(b-d)+(c-e)-\dfrac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-d=\dfrac{3}{2}\\ a=\dfrac{1}{2}\\ c-e=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$S=\int_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$\Leftrightarrow S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4.$$

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\dfrac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

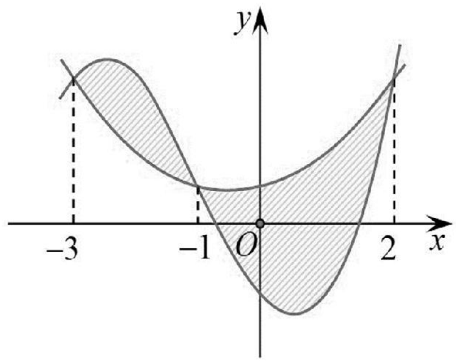
Do đó: $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng:

$$S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x=4.$$

Câu 25. **(Mã 103 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

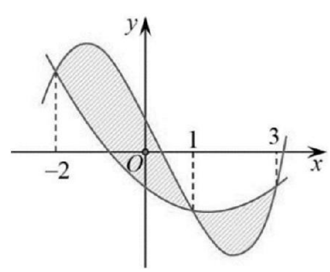
Lời giải

Chọn C

Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên $f(x)-g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1)$.

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$. Do đó $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}$.

Câu 26. **(Mã 104 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0$.

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1;x=3$.

Với $x=-2$ ta có $-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}$, (1).

Với $x=1$ ta có $a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2},\ (2)$.

Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2},\ (3)$.

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b-d=-\frac{1}{2}\\ c-e=-\frac{5}{4}\end{cases}$.

Hay ta có

$S=\int\limits_{-2}^{3}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}$.

Câu 27. Cho parabol $(P_1): y=-x^2+2x+3$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B và đường thẳng $d: y=a$ $(0<a<4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d .Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1=S_2$, tính $T=a^3-8a^2+48a$.

A. $T=99$. **B.** $T=64$. **C.** $T=32$. **D.** $T=72$.

Lời giải

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị.

Khi đó, phương trình các parabol mới là $(P_1): y=-x^2+4$, $(P_2): y=-\frac{a}{4}x^2+a$.

Gọi A,B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2;0), B(2;0) \Rightarrow AB=4$.

Gọi A,B là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M\left(-\sqrt{4-a};a\right), N\left(\sqrt{4-a};a\right)$.

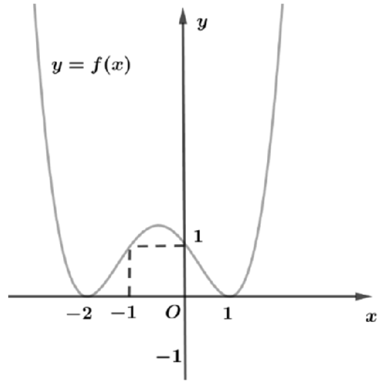
Ta có $S_1=2\int\limits_{a}^{4}\sqrt{4-y}.dy=-\frac{4}{3}\left.\left((4-y)^{\frac{3}{2}}\right)\right|_a^4=\frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}$

$S_2=2\int\limits_{a}^{2}\left(-\frac{a}{4}x^2+a\right).dx=2\left.\left(-\frac{ax^3}{12}+ax\right)\right|_0^2=\frac{8a}{3}$.

Theo giả thiết $S_1=S_2 \Rightarrow \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}=\frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3=4a^2 \Leftrightarrow a^3-8a^2+48a=64$

Vậy $T=64$.

Câu 28. **(Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Hàm số đã cho có dạng $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Từ giả thiết đồ thị hàm số đã cho ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$ và có hai điểm cực tiểu là $(1;0)$, $(-2;0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(-2) &= 0 \\ f(1) &= 0 \\ f'(-2) &= 0 \\ f'(1) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e &= 1 \\ a+b+c+d &= -1 \\ 16a-8b+4c-2d &= -1 \\ -32a+12b-4c+d &= 0 \\ 4a+3b+2c+d &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e &= 1 \\ a &= \frac{1}{4} \\ b &= \frac{1}{2} \\ c &= \frac{-3}{4} \\ d &= -1 \end{cases}.$$

Do đó $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = f'(x)$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x &=& -2 \\ x &=& -1 \\ x &=& 1 \\ x &=& 4 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ là $S = \int\limits_{-2}^{4} \left|f(x) - f'(x)\right| dx$

Vì biểu thức $f(x) - f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có

$$S = \left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x) - f'(x)\right]dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}\left[f(x) - f'(x)\right]dx\right| + \left|\int_{1}^{4}\left[f(x) - f'(x)\right]dx\right| = \frac{107}{5}(dvdt).$$

Câu 29. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2\ (m > 0)$. Tìm giá trị của m để $S = 3$.

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} my = x^2 & (1) \\ mx = y^2 & (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được: $mx = \left(\frac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m > 0 \end{array}\right.$

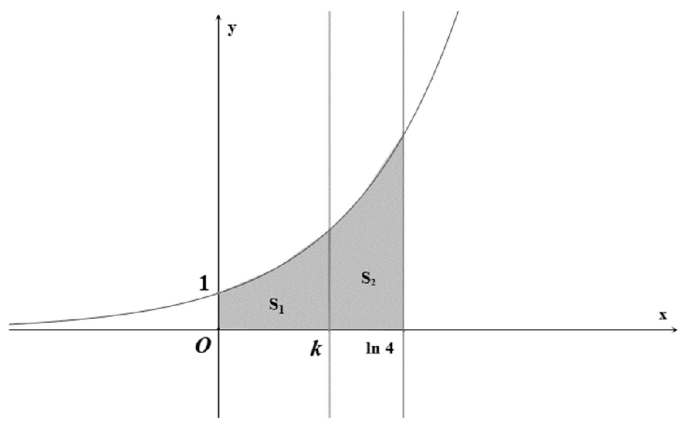
Vì $y = \frac{x^2}{m} > 0$ nên $mx = y^2 \xleftrightarrow{y>0} y = \sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^m \left|\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right| dx = \left|\int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right) dx\right|$

$= \left|\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3m}\right)\Bigg|_0^m\right| = \left|\frac{1}{3}m^2\right| = \frac{1}{3}m^2$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \xleftrightarrow{m>0} m = 3$

Câu 30. **(THPT Cẩm Giàng 2 -2019)** Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k = \ln\frac{8}{3}$. **C.** $k = \ln 2$. **D.** $k = \ln 3$.

Lời giải

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$ là

$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x\Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3$ (đvdt).

Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2.3}{3} = 2$ (đvdt).

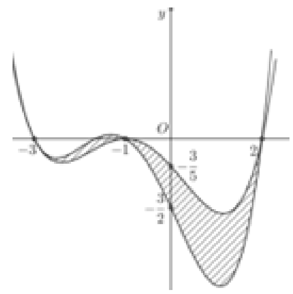
Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$2 = S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x\Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1$.

Do đó $e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.

Câu 31. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là

$-3;-1;\,2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. $3{,}11$ **B.** $2{,}45$ **C.** $3{,}21$ **D.** $2{,}95$

Lời giải

Chọn A

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=(ax+3a)(x^2-x-2)=ax^3-ax^2-2ax+3ax^2-3ax-6a$

$=ax^3+2ax^2-5ax-6a$

$f(0)-g(0)=-6a$, quan sát hình vẽ ta có $f(0)-g(0)=-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Nên $-6a=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-3}{20}$ $S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{2}\left|\frac{-3}{20}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{80}=3.1625$

Câu 32. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho parabol $(P): y=x^2$ và hai điểm A,B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y=ax+b\ \ (a,b\in\mathbb{R})$

Phương trình giao điểm của AB và (P) là: $x^2-ax-b=0$

Để có 2 điểm A,B thì $a^2+4b>0$. khi đó: $\begin{cases}A(x_1;ax_1+b)\\B(x_2;ax_2+b)\\x_1+x_2=a\\x_1x_2=-b\end{cases}$

Nên $AB=2\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+1)}\left|x_2-x_1\right|=2$

Giả sử $x_2>x_1$ ta có $\left|x_2-x_1\right|=\frac{2}{\sqrt{(a^2+1)}}\le 2$

Mặt khác: $\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+4b}$

Khi đó $S=\int_{x_1}^{x_2}ax+b-x^2\mathrm{dx}=\frac{a}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$

$=(x_2-x_1)\left[\frac{a}{2}(x_2+x_1)+b-\frac{1}{3}(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\right]$

$=(x_2-x_1)\left[\frac{a}{2}.a+b-\frac{1}{3}(a^2+b)\right]=(x_2-x_1)\left[\frac{a^2}{b}+\frac{2b}{3}\right]=\frac{a^2+4b}{6}(x_2-x_1)=\frac{(x_2-x_1)^3}{6}\le\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Suy ra: $S_{max}=\frac{4}{3}$ khi $\begin{cases}a=0\\x_2-x_1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1=x_2=1\end{cases}$ (thỏa mãn vì (P) có tính đối xứng)

$\Rightarrow\begin{cases}A(1;1)\\B(-1;1)\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A(-1;1)\\B(1;1)\end{cases}$.

Câu 33. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho Parabol $(P): y=x^2+1$ và đường thẳng $d: y=mx+2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

A. $(-\sqrt{2};-\frac{1}{2})$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;\frac{1}{\sqrt{2}})$. **D.** $(\frac{1}{2};3)$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Phương trình hoành độ của (P) và d là $x^2-mx-1=0$ (1).

Dễ thấy (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi a, b $(a<b)$ là các nghiệm của (1) thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là

$$S=\int_a^b\left|x^2-mx-1\right|dx=\left|\int_a^b\left(\mathrm{x}^2-\mathrm{mx}-1\right)\mathrm{dx}\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}-\mathrm{x}\right)\Big|_a^b\right|$$

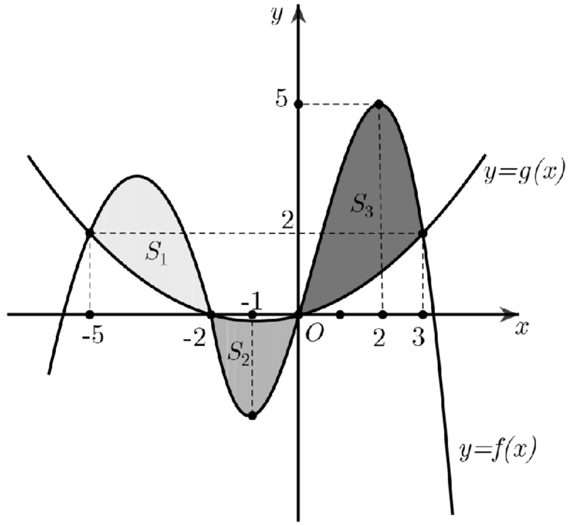
$$=\left|\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{m(\mathrm{b}^2-\mathrm{a}^2)}{2}-(\mathrm{b}-\mathrm{a})\right|=|b-a|.\left|\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{m(\mathrm{b}+\mathrm{a})}{2}-1\right|$$

$$=\sqrt{(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2-4ab}.\left|\frac{(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2-ab}{3}-\frac{m(\mathrm{b}+\mathrm{a})}{2}-1\right|$$

Mà $a+b=m$, $ab=-1$ nên $S=\sqrt{m^2+4}.\left(\frac{m^2}{6}+\frac{2}{3}\right)\geq\frac{4}{3}$.

Do đó $\min S=\frac{4}{3}$ khi $m=0$.

Câu 34. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p.



Tích phân $\int\limits_{-5}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\dfrac{208}{45}$ **C.** $m-n+p-\dfrac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.

Lời giải

Chọn B

$S_1=\int\limits_{-5}^{-2}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-5}^{-2} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-5}^{-2} g\left(x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-5}^{-2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=S_1+\int\limits_{-5}^{-2} g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$S_2=\int\limits_{-2}^{0}\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0} g\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-2}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0} g\left(x\right)\mathrm{d}x-S_2$.

$S_3=\int\limits_{-5}^{-2}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{3} g\left(x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=S_1+\int\limits_{0}^{3} g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Do vậy: $\int\limits_{-5}^{3} f(x)dx=S_1-S_2+S_3+\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx.$

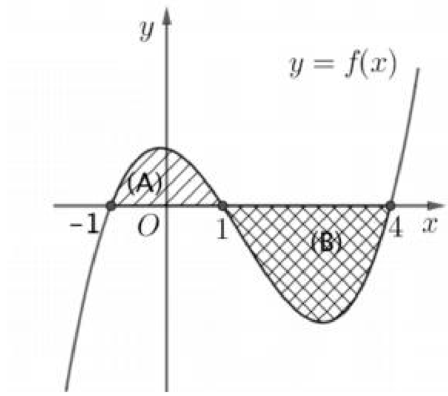
Từ đồ thị ta thấy $\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx$ là số dương. Mà 4 đáp án chỉ có B là phù hợp, nên ta chọn **B.**

Chú ý: Có thể tính $\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx$ như sau:

Từ đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ ta thấy nó đi qua các điểm $\left(-5;2\right)$, $\left(-2;0\right)$, $\left(0;0\right)$ nên ta có:

$\begin{cases}25a-5b+c=2\\4a-2b+c=0\\c=0\end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{2}{15},\ b=\dfrac{4}{15},\ c=0.$ Do đó: $\int\limits_{-5}^{3} g\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-5}^{3}\left(\dfrac{2}{15}x^2+\dfrac{4}{15}x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{208}{45}$.

Câu 35. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần $\left(A\right),\left(B\right)$ lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f\left(5\sin x-1\right)\mathrm{d}x$ bằng



A. $-\dfrac{4}{5}$ **B.** 2 **C.** $\dfrac{4}{5}$ **D.** -2

Lời giải

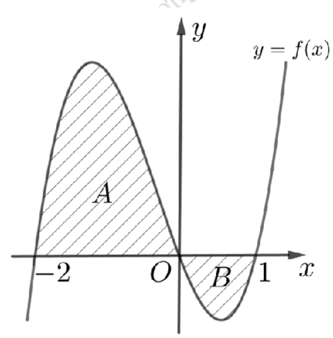
Chọn A

Theo giả thiết ta có $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -7$ suy ra $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -4$.

Đặt $t = 5\sin x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 5\cos x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x - 1)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\int\limits_{-1}^{4} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{5}\int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{4}{5}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2.



Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** 9. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

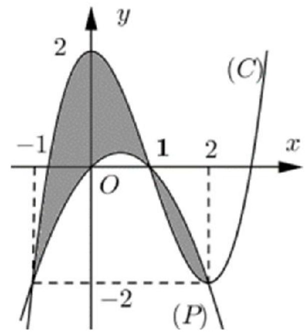
+) Xét $I = \int\limits_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$, đặt $(3x+1) = t \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{3}$

+) Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = -2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-2}^{1} f(t)\mathrm{dt} = \dfrac{1}{3}\left[\int\limits_{-2}^{0} f(t)\mathrm{dt} + \int\limits_{0}^{1} f(t)\mathrm{dt}\right] = \dfrac{1}{3}(S_A - S_B) = \dfrac{1}{3}(11-2) = 3$

Câu 37. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol

(P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi hàm số bậc ba là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị (C) đi qua các điểm $(1;0),(2;-2)$ và đạt cực trị tại $x = 0; x = 2$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = a+b+c+d \\ -2 = 8a+4b+2c+d \\ 0 = c \\ 0 = 12a+4b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc ba là $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Gọi hàm bậc hai là $y = mx^2 + nx + p$. Đồ thị (P) đi qua các điểm $(1;0)$, $(2;-2)$, $(-1;-2)$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = m+n+p \\ -2 = 4m+2n+p \\ -2 = m-n+p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ p = 0 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc hai là $y = -x^2 + x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và

(P) là : $x^3 - 3x^2 + 2 = -x^2 + x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích phần tô đậm là :

$S = \int_{-1}^{2} \left|\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)\right| dx$. $S = \left|\int_{-1}^{1}\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)dx\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$.

Cách 2:

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2, y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$.

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1; x = 1; x = 2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

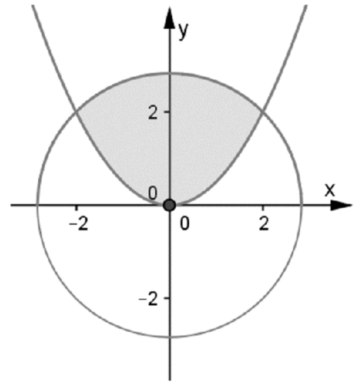
$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2) = 0$. Với $x = 0$ ta được $2a = 2 \to a = 1$.

*Vậy diện tích phần tô đậm là: $S = \int_{-1}^{2} \left|(x+1)(x-1)(x-2)\right| dx = \frac{37}{12}$.

Câu 38. **(Việt Đức Hà Nội -2019)** Parabol $y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2, trong đó $S_1<S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{12\pi}$. **B.** $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$. **C.** $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **D.** $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$.

Lời giải



Diện tích hình tròn là $S=\pi R^2=8\pi$.

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$ là $x^2+y^2=8$.

Hoành độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm của phương trình

$$x^2+\frac{x^4}{4}=8 \Leftrightarrow x^4+4x^2-32=0 \Leftrightarrow (x^2+8)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Phương trình nửa phía trên trục Ox của đường tròn là: $y=\sqrt{8-x^2}$.

Diện tích miền giới hạn bởi Parabol và nửa phía trên trục Ox của đường tròn là:

$$\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx$$

Ta có $\int_{-2}^{2}x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$.

$$I=\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx$$

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t$ $\left(t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)\Rightarrow dx=2\sqrt{2}\cos t dt$

+) $x=-2\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$

+) $x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2 t}.2\sqrt{2}\cos t dt=8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt$$

$$=4\left.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\pi+4.$$

Vậy $\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\pi+\frac{4}{3}$.

Diện tích phần còn lại là $8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}$.

Vậy $S_1=2\pi+\frac{4}{3}$; $S_2=6\pi-\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$

Câu 39. Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\frac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **<u>B</u>.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}=\frac{a^2-ax}{1+a^6}\Leftrightarrow x^2+3ax+2a^2=0\Leftrightarrow(x+a)(x+2a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\\x=-2a\end{array}\right.$

□□Nếu $a=0$ thì diện tích hình phẳng $S=0$.

+ Nếu $a>0$ thì $S=\int\limits_{-2a}^{-a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-2a}^{-a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

+ Nếu $a<0$ thì $S=\int\limits_{-a}^{-2a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-a}^{-2a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

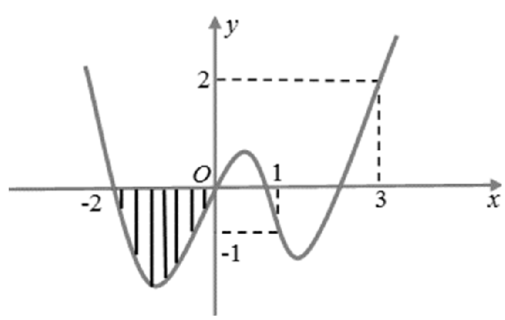
Do đó, với $a\neq0$ thì $S=\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{1+|a|^6}\leq\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{2|a|^3}=\frac{1}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|a|^3=1\Leftrightarrow a=\pm1$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm đã cho có diện tích lớn nhất khi $a=1$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\int\limits_{1}^{2}f'(x+1)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}f'(x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{4}f(2x-8)\mathrm{d}x$$



A. $T=\frac{9}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=0$. **<u>D</u>.** $T=\frac{3}{2}$.

Lời giải

 Diện tích phần kẻ sọc là: $S=\int\limits_{-2}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{dx}\;=3$.

Vì $f\left(x\right)\le 0\;\;\forall x\in\left[-2;0\right]\;\Rightarrow 3=\int\limits_{-2}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{dx}=\int\limits_{-2}^{0}\left[-f\left(x\right)\right]\mathrm{dx}\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}=-3$.

 Tính $I=\int\limits_{3}^{4}f\left(2x-8\right)\mathrm{dx}$.

Đặt $t=2x-8\;\Rightarrow \mathrm{dt}=2\mathrm{dx}$; $x=3\Rightarrow t=-2$; $x=4\Rightarrow t=0$.

Suy ra: $I=\int\limits_{-2}^{0}f\left(t\right).\frac{1}{2}\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}\;=-\frac{3}{2}$.

 Vậy $T=\int\limits_{1}^{2}f'\left(x+1\right)\mathrm{dx}+\int\limits_{2}^{3}f'\left(x-1\right)\mathrm{dx}+\int\limits_{3}^{4}f\left(2x-8\right)\mathrm{dx}$

$=f\left(x+1\right)\Big|_{1}^{2}+f\left(x-1\right)\Big|_{2}^{3}+I=f\left(3\right)-f\left(2\right)+f\left(2\right)-f\left(1\right)-\frac{3}{2}\;=2-\left(-1\right)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

Câu 41. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=x^4-6x^2+m$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Giả sử $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi $\left(C_m\right)$ và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m=\frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b>0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S=a+b$ là:

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-6x^2+m=0\;\left(1\right)$.

Đặt $t=x^2\;\left(t\ge 0\right)\;\left(1\right)$ trở thành $t^2-6t+m=0\;\;\left(2\right)$.

$\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt hay phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=\left(-3\right)^2-m>0\\ P=m>0\\ S=6>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<9\;\left(*\right)$.

Gọi t_1, $t_2\;\left(0<t_1<t_2\right)$ là hai nghiệm của phương trình $\left(2\right)$. Lúc đó phương trình $\left(1\right)$ có bốn nghiệm phân biệt theo thứ tự tăng dần là: $x_1=-\sqrt{t_2}$; $x_2=-\sqrt{t_1}$; $x_3=\sqrt{t_1}$; $x_4=\sqrt{t_2}$.

Do tính đối xứng của đồ thị $\left(C_m\right)$ nên có $\int\limits_{0}^{x_3}\left(x^4-6x^2+m\right)\mathrm{dx}$

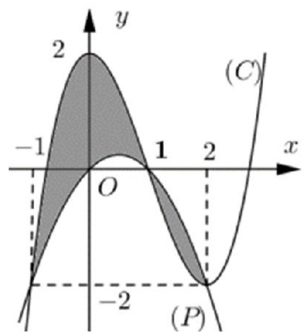
$=\int\limits_{x_3}^{x_4}\left(-x^4+6x^2-m\right)\mathrm{dx}\Rightarrow\frac{x_4^5}{5}-2x_4^3+mx_4=0\Leftrightarrow x_4^5-10x_4^3+5mx_4=0$.

Từ đó có x_4 là nghiệm của hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_4^4 - 6x_4^2 + m = 0 & (3) \\ x_4^4 - 10x_4^2 + 5m = 0 & (4) \end{cases}$

Lấy $(3)-(4) \Rightarrow x_4^2 = m$, thay $x_4^2 = m$ vào (3) có: $m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 5$.

Đối chiếu điều kiện $(*)$ ta có $m = 5 \Rightarrow a = 5$ và $b = 1$. Vậy $S = 6$.

Câu 42. Hình phẳng (*H*) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba và parabol (*P*) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

+) Gọi $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

Do (C) cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 2 nên $d = 2$

(C) đi qua 3 điểm $A(-1;-2)$, $B(1;0)$ và $C(2;-2)$ nên ta được hệ phương trình

$\begin{cases} -a + b - c = -4 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$. Do đó $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$

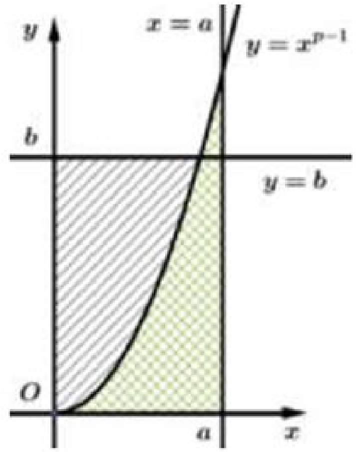
+) Gọi $(P): y = mx^2 + nx + r \ (m \neq 0)$

Do (P) đi qua 3 điểm $a(-1;-2)$, $O(0;0)$ và $C(2;-2)$ nên ta được

$\begin{cases} m - n + r = -2 \\ r = 0 \\ 4m + 2n + r = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ r = 0 \\ n = 1 \end{cases}$. Do đó $(P): y = -x^2 + x$

Vậy $S_{(H)} = \int_{-1}^{2} \left| x^3 - 2x^2 - x + 2 \right| dx \overset{MTCT}{=} \frac{37}{12}$

Câu 43. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b. Xét hàm số: $y = x^{p-1} \ (x > 0)$ có đồ thị là (C). Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A. $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\le ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1}+\frac{b^{q-1}}{q-1}\ge ab$. **C.** $\frac{a^{p+1}}{p+1}+\frac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$. **D.** $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

Lời giải

Ta có: $S\le S_1+S_2$.

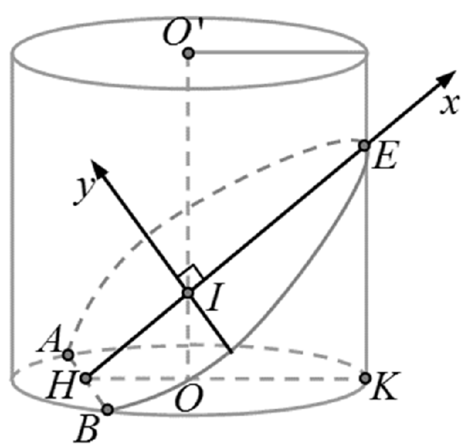
$$S_1=\int_0^a\left(x^{p-1}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^p}{p}\right)\right|_0^a=\frac{a^p}{p};\ S_2=\int_0^b\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)\mathrm{d}y=\left.\left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\right)\right|_0^b=\left.\left(\frac{y^q}{q}\right)\right|_0^b=\frac{b^q}{q}.$$

Vì: $\frac{1}{p-1}+1=\frac{p}{p-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{\frac{1}{q}}=q$. Vậy $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

Câu 44. **(Hà Nội - 2018)** Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Lời giải



Cách 1: Gọi I, H, K, E là các điểm như hình vẽ.

* Ta có: $\widehat{IHO}=60°$

$OH^2 = OB^2 - BH^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \Rightarrow OI = OH.\tan 60° = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $IH = \frac{OH}{\cos 60°} = R$,

$\Delta IOH \sim \Delta EKH$ nên ta có: $\frac{IE}{IH} = \frac{OK}{OH} = 2 \Rightarrow IE = 2R$.

* Chọn hệ trục tọa độ Ixy như hình vẽ ta có elip (E) có bán trục lớn là $a = IE = 2R$ và (E) đi qua $A\left(-R;\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ nên (E) có phương trình là $(E): \frac{x^2}{4R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$.

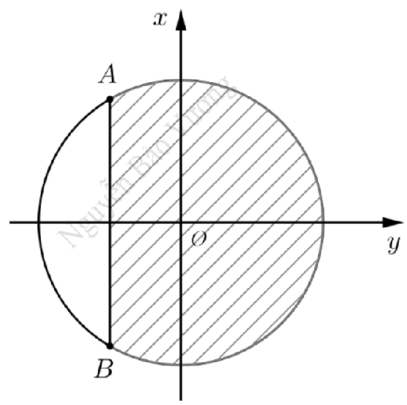
* Diện tích của thiết diện là $S = 2\int\limits_{-R}^{2R} R\sqrt{1-\frac{x^2}{4R^2}}dx = 2R\int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1-\frac{x^2}{4R^2}}dx$

* Xét tích phân: $I = \int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1-\frac{x^2}{4R^2}}dx$, đặt $x = 2R.\sin t;\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ta được

$I = \frac{R}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{R}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)R \Rightarrow S = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Cách 2: $\cos\widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120° \Rightarrow OH = \frac{R}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đáy là $x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S = 2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Đặt $x = R.\sin t \Rightarrow S = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S' = \frac{S}{\cos 60°} = 2S = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 45. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018)** Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$. **B.** $S_{max} = \frac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$. **D.** $S_{max} = \frac{2018^3}{3}$.

Lời giải

Giả sử $A(a;a^2)$; $B(b;b^2)(b > a)$ sao cho $AB = 2018$.

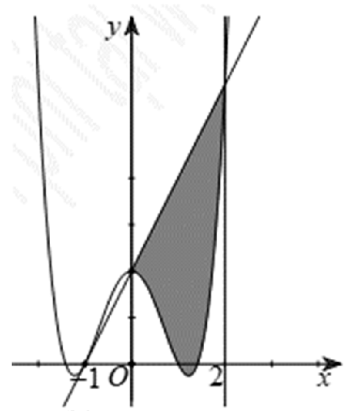
Phương trình đường thẳng d là: $y=(a+b)x-ab$. Khi đó

$$S=\int_a^b\left|(a+b)x-ab-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_a^b\left((a+b)x-ab-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(b-a)^3.$$

Vì $AB=2018\Leftrightarrow(b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=2018^2\Leftrightarrow(b-a)^2\left(1+(b+a)^2\right)=2018^2$.

$\Rightarrow(b-a)^2\le 2018^2\Rightarrow|b-a|=b-a\le 2018\Rightarrow S\le\dfrac{2018^3}{6}$. Vậy $S_{\max}=\dfrac{2018^3}{6}$ khi $a=-1009$ và $b=1009$.

Câu 46. **(Chuyên KHTN - 2018)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $y'=4ax^3+2bx\ \Rightarrow\ d:y=(-4a-2b)(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c\ (1)$.

Phương trình (1) phải cho 2 nghiệm là $x=0$, $x=2$.

$$\Rightarrow\begin{cases}-4a-2b=c\\-12a-6b=16a+4b+c\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4a-2b-c=0\ (2)\\28a+10b+c=0\ (3)\end{cases}.$$

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\dfrac{28}{5}=\displaystyle\int_0^2\left[(-4a-2b)(x+1)-ax^4-bx^2-c\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\frac{28}{5}=4(-4a-2b)-\frac{32}{5}a-\frac{8}{3}b-2c\ \Leftrightarrow\frac{112}{5}a+\frac{32}{3}b+2c=-\frac{28}{5}\ (4).$$

Giải hệ 3 phương trình (2), (3) và (4) ta được $a=1$, $b=-3$, $c=2$.

Khi đó, $(C):y=x^4-3x^2+2$, $d:y=2(x+1)$.

Diện tích cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^{0}\left[x^4-3x^2+2-2(x+1)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^4-3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{5}$.

Câu 47. **(THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4-x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-2$, $x=m$, $(-2<m<2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S=\frac{25}{3}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $S=\int\limits_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3}$.

Phương trình $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bài ra $-2<m<2$ nên trên $(-2;m)$ thì $4-x^2=0$ vô nghiệm.

$$\int\limits_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|\int\limits_{-2}^{m}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{m}\right|=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left|\left(4m-\frac{m^3}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right|=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}\right|=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}=\frac{25}{3}\\4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}=-\frac{25}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}m^3-4m+3=0\\\frac{1}{3}m^3-4m-\frac{41}{3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^3-12m+9=0\\m^3-12m-41=0\end{array}\right.\ (1)$$

Xét hàm số $f(m)=m^3-12m$, với $m\in(-2;2)$ có

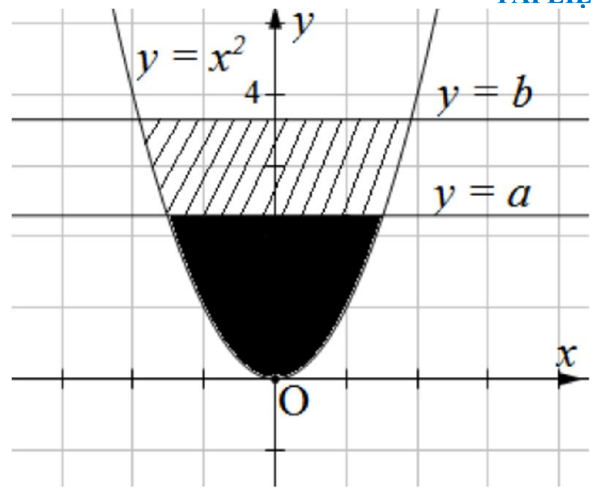
$$f'(m)=3m^2-12=3\left(m^2-4\right)<0,\ \forall m\in(-2;2).$$

Do đó $f(m)$ nghịch biến trên $(-2;2)\Rightarrow f(m)<f(-2)=16\Rightarrow m^3-12m-41<0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow m^3-12m+9=0\Leftrightarrow(m-3)\left(m^2+3m-3\right)=0\Rightarrow m=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 48. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và hai đường thẳng $y=a$, $y=b$ $(0<a<b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1=S_2$?



A. $b=\sqrt[3]{4}a$. **B.** $b=\sqrt[3]{2}a$. **C.** $b=\sqrt[3]{3}a$. **D.** $b=\sqrt[3]{6}a$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=x^2$ với đường thẳng $y=b$ là

$x^2=b \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{b}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=x^2$ với đường thẳng $y=a$ là

$x^2=a \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $y=b$ là

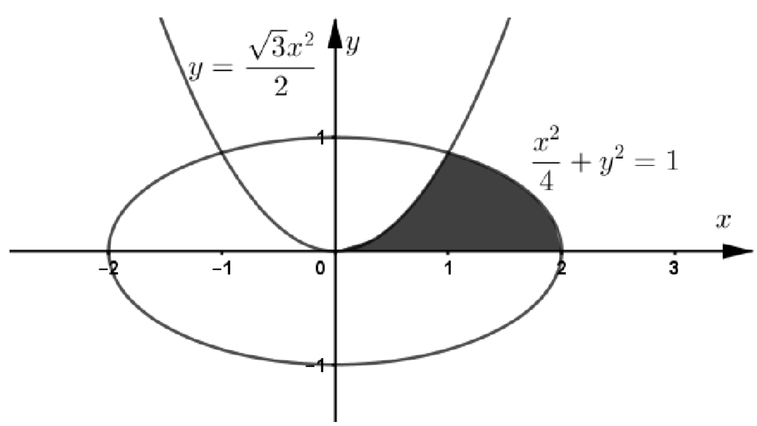
$$S=2\int_0^{\sqrt{b}}\left(b-x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(bx-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{b}}=2\left(b\sqrt{b}-\frac{b\sqrt{b}}{3}\right)=\frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $y=a$ (phần tô màu đen) là

$$S_1=2\int_0^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}}=2\left(a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}\right)=\frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

Do đó $S=2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3}=2.\frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}\right)^3=2\left(\sqrt{a}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{b}=\sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b=\sqrt[3]{4}a$.

Câu 49. **(THPT Yên Khánh A - 2018)** Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, parabol $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) có diện tích $T=\frac{a}{b}\pi+\frac{c}{d}\sqrt{3}$ (với $a,c\in\mathbb{Z};\ b,d\in\mathbb{N}^*;\ \frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $S=a+b+c+d$.



A. $S=32$. **B.** $S=10$. **C.** $S=15$. **D.** $S=21$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

Hoành độ giao điểm (E') $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ và parabol $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ là

$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\Rightarrow 3x^4+x^2-4=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=1$ (theo hình vẽ thì $x>0$)

Vậy $T=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^2dx+\int\limits_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$

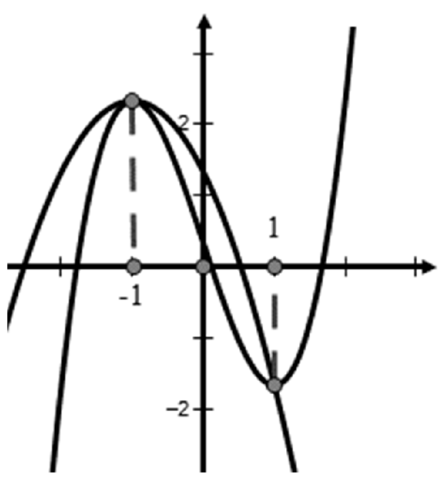
Mà $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^2dx=\left.\frac{\sqrt{3}x^3}{6}\right|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ta có: $I=\int\limits_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx$. Đặt $x=2\cos t$ ta có:

$$\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^0\sqrt{4\sin^2t}.(-2\sin t)dt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2tdt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)dt=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó $T=\frac{1}{3}.\pi+\frac{-1}{12}.\sqrt{3}$ nên $S=15$

Câu 50. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=\pm1$ nên ta có

$$\begin{cases}y'(1)=0\\y'(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b+3=0\\-2a+b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-3\end{cases}.$$

+ Hàm số $y=mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại $x=-1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 1$ nên ta có

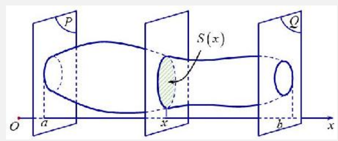
$$\begin{cases}-2m+n=0\\1+a+b+c=m+n+p\\-1+a-b+c=m-n+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-2\\m=-1\\p-c=1\end{cases}$$

Suy ra $S=\int_{-1}^{1}\left(mx^2+nx+p-x^3-ax^2-bx-x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^3-x^2+x+1\right)dx=\frac{4}{3}\in(1;2)$

Dạng 2. Ứng dụng tích phân để tìm thể tích

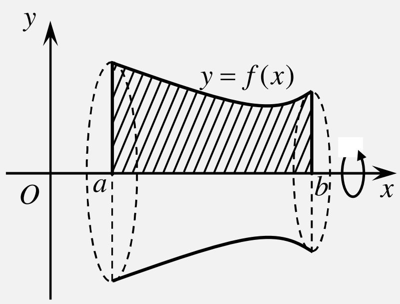
① ***Thể tích vật thể***

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x}$.



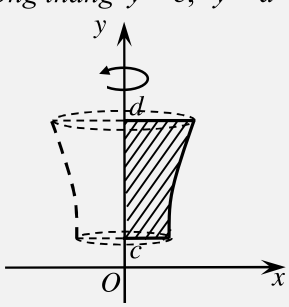
② ***Thể tích khối tròn xoay***

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:*



$$\begin{cases}(C): y=f(x)\\(Ox): y=0\\x=a\\x=b\end{cases}\qquad \boxed{V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx}$$

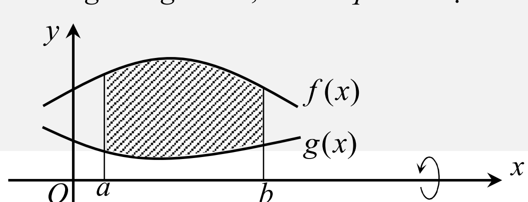
b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ quanh trục Oy:*



$$\begin{cases}(C): x=g(y)\\(Oy): x=0\\y=c\\y=d\end{cases}\qquad \boxed{V_y=\pi\int_c^d\left[g(y)\right]^2dy}$$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:*

$\boxed{V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|\mathrm{d}x}$.



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V=\left(e^2-5\right)\pi$ **B.** $V=\left(4-2e\right)\pi$ **C.** $V=e^2-5$ **D.** $V=4-2e$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x=0 \Leftrightarrow x=1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^1\left[2(x-1)e^x\right]^2dx=4\pi\int_0^1(x-1)^2e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=(x-1)^2\\dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2(x-1)dx\\v=\dfrac{e^{2x}}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow V=4\pi(x-1)^2\left.\dfrac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-4\pi\int_0^1 2(x-1)\dfrac{e^{2x}}{2}dx=4\pi(x-1)^2\left.\dfrac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-4\pi\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$

Gọi $I_1=\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x-1\Rightarrow du=dx\\dv=e^{2x}dx\Rightarrow v=\dfrac{e^{2x}}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow I_1=4\pi(x-1)\left.\dfrac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-4\pi\int_0^1\dfrac{e^{2x}}{2}dx=2\pi-\pi e^{2x}\Big|_0^1=2\pi-\pi e^2+\pi=3\pi-\pi e^2$

Vậy $V=4\pi(x-1)^2\left.\dfrac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-I_1=-2\pi-\left(3\pi-\pi e^2\right)=\pi\left(e^2-5\right)$.

Câu 2. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550 **B.** 400 **C.** 670 **<u>D</u>.** 335

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$H=\left\{y=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}},y=0,x=-5,x=5\right\}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$V=\pi\int_{-5}^5\left(16-\dfrac{16x^2}{25}\right)dx=\pi\left.\left(16x-\dfrac{16x^3}{75}\right)\right|_{-5}^5=\dfrac{320\pi}{3}\simeq 335{,}1$

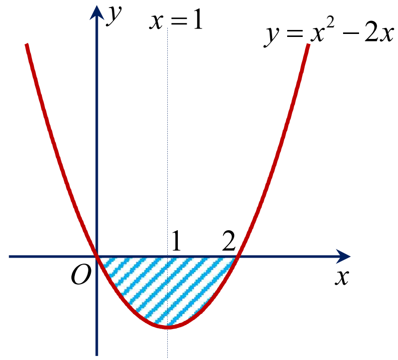
Câu 3. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{7\pi}{8}$. **D.** $V=\dfrac{15\pi}{8}$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Theo đề, ta có hình vẽ sau:



Nhận xét: Khi nhìn vào hình vẽ. Đường thẳng $x=1$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường $y=x^2-2x$ và trục hoành làm 2 phần. Dễ thấy lúc này hình phẳng (H) không thể xác định vì phần hình giới hạn bởi $x=0$ đến $x=1$ và $x=1$ đến $x=2$ chưa rõ ràng.

Nếu xét phần tròn xoay khi xoay hình phẳng quanh trục Ox khi $x=0$ đến $x=2$ thì không có đáp án trong bài, đồng thời đề cho thêm đường thẳng $x=1$ là không cần thiết.

Do đó để bài toán có đáp án và rõ ràng hơn ta điều chỉnh đề như sau:

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y=x^2-2x$, trục hoành. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=0 \end{cases}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2-2x$ và $y=0$ (trục hoành) là:

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

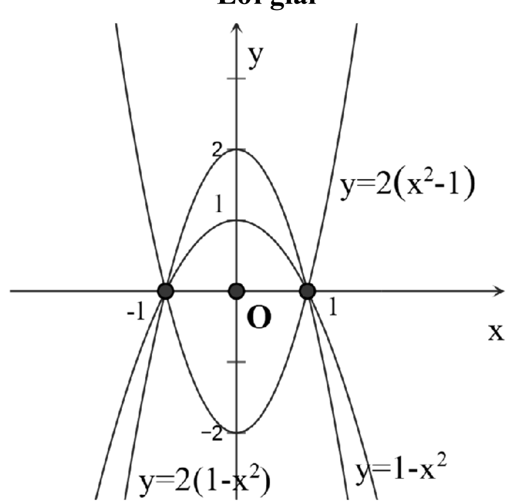
Khi đó thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V_{Ox}=\pi\int_0^2 \left(x^2-2x\right)^2 \mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}.$$

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y=2\left(x^2-1\right)$; $y=1-x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{32}{15}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{64}{15}$.

Lời giải



Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=2\left(x^2-1\right)$ và $y=1-x^2$ là

$2\left(x^2-1\right)=1-x^2 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=2\left(x^2-1\right)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y=2\left(1-x^2\right)$.

Ta có $2\left(1-x^2\right)\ge 1-x^2, \forall x\in[-1;1]$. Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[2\left(x^2-1\right)\right]^2 dx=\frac{64\pi}{15}.$$

Câu 5. **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 5 **B.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ **C.** $\frac{3\pi}{2}$ **D.** $\pi\left(\frac{1}{2}+\pi\right)$

Lời giải

Chọn B

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x d\left(\tan x\right)=\pi\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}dt=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

Câu 6. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}-2$ và trục hoành:

$\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$V=\pi\int_4^9\left(\sqrt{x}-2\right)^2 dx=\pi\int_4^9\left(x-4\sqrt{x}+4\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}+4x\right)\Bigg|_4^9$$

$$=\pi\left(\frac{81}{2}-72+36\right)-\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{64}{3}+16\right)=\frac{11\pi}{6}.$$

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Dôn Diện Biên 2019)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4x-x^2\ge 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành

$$\sqrt{4x-x^2}=0 \Leftrightarrow 4x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right..$$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là :

$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}\pi$.

Vậy thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là $\frac{32}{3}\pi$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V=\frac{4}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{16}{15}\pi$. **C.** $V=\frac{16}{15}$. **D.** $V=\frac{4}{3}$.

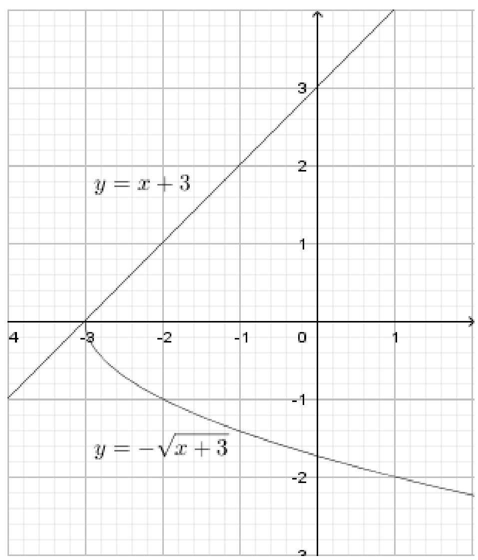
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với trục hoành: $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=0\end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra do (H) quay quanh Ox là:

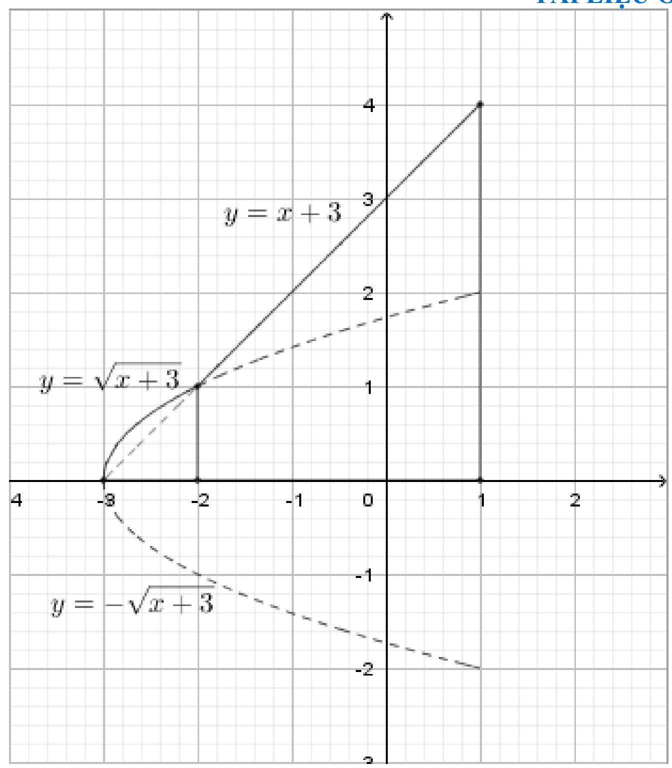
$$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2.\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right).\mathrm{d}x=\pi.\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right)=\frac{16}{15}\pi.$$

Câu 9. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+3$, $y=-\sqrt{x+3}$, $x=1$ xoay quanh trục Ox.



A. $\frac{41}{2}\pi$. **B.** $\frac{43}{2}\pi$. **C.** $\frac{41}{3}\pi$. **D.** $\frac{40}{3}\pi$.

Lời giải



Xét phương trình $x+3=-\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=0\\ \sqrt{x+3}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3$.

Xét hình (H) giới bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x+3}\ (-3\le x\le -2)$, $y=x+3\ (-2\le x\le 1)$, $y=0$ và $x=1$.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm chính bằng thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) quanh trục Ox. Do đó

$$V=\pi\int_{-3}^{-2}\left[\sqrt{x+3}^{\,2}\right]\mathrm{d}x+\pi\int_{-2}^{1}(x+3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{43\pi}{2}.$$

Câu 10. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=e^2-1$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\frac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=\frac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $\sqrt{x}.e^{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0.$

Khi đó thể tích của khối tròn xoay được tạo thành là:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}.e^{x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\pi\frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x^2}\mathrm{d}(2x^2)=\pi\frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\pi(e^2-1).$$

Câu 11. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0;x=2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x\,(0\le x\le 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\dfrac{\pi\left(13e^4-1\right)}{4}$. **B.** $\dfrac{13e^4-1}{4}$. **C.** $2e^2$. **D.** $2\pi e^2$.

Lời giải

Diện tích thiết diện là $S(x)=(x+1)^2e^{2x}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int\limits_0^2 S(x)dx=\int\limits_0^2 (x+1)^2e^{2x}dx$.

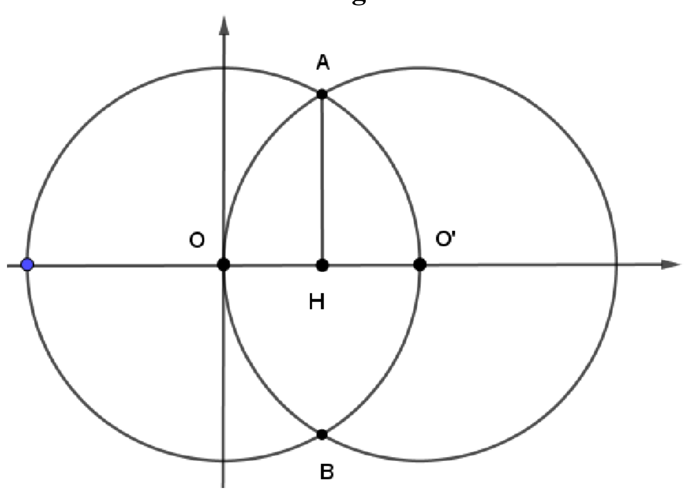
$$V=\frac{1}{2}(x+1)^2e^{2x}\Big|_0^2-\int\limits_0^2(x+1)e^{2x}dx=\frac{9e^4-1}{2}-\left(\frac{x+1}{2}e^{2x}\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{2x}dx\right)$$

$$=\frac{9e^4-1}{2}-\frac{3e^4-1}{2}+\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^2=3e^4+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}=\frac{13e^4-1}{4}.$$

Câu 12. Cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có cùng bán kính $R=3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$.

A. $V=\dfrac{45\pi}{8}$. **B.** $V=\dfrac{45\pi}{4}$. **C.** $V=\dfrac{45}{4}$. **D.** $V=\dfrac{45}{8}$.

Lời giải



Phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$ là một khối tròn xoay, tương đương phần hình phẳng OAO' quay quanh trục OO' hay bằng hai lần phần mặt phẳng tạo bởi AHO' quay quanh trục OO'.

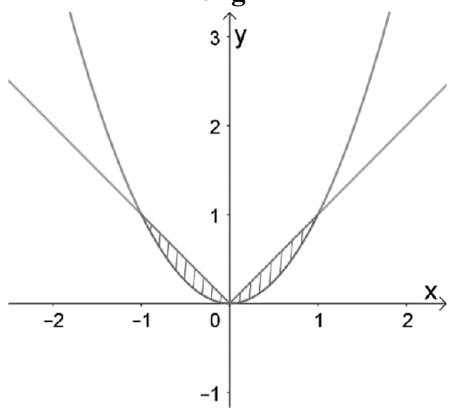
Đặt hệ trục như hình khi đó phương trình đường tròn (O) là $x^2+y^2=9\Rightarrow y=\sqrt{9-x^2}$, điểm H có hoành độ bằng $\frac{3}{2}$; O' có hoành độ là 3 nên thể tích :

$$V=\pi\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2dx==\pi\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left(9-x^2\right)dx=\frac{45}{8}\pi.$$

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{15}$.

Lời giải



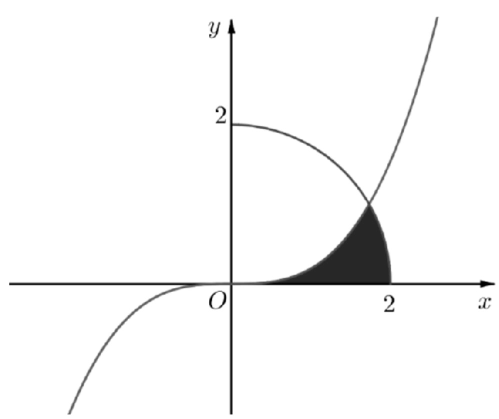
Phương trình hoành độ giao điểm $|x| = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \;\;\Rightarrow y = 0 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$.

Ta có đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x = y$ và $x = \sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi\int_0^1 \left|y - y^2\right| \mathrm{d}y = \pi\int_0^1 \left(y - y^2\right) \mathrm{d}y = \pi.\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 14. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \le x \le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.

A. $P = 52$. **B.** $P = 40$. **C.** $P = 46$. **D.** $P = 34$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$$V = \pi\left[\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}x^3\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{27}x^6 \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3}}^{2}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{27}.\frac{x^7}{7}\Big|_0^{\sqrt{3}} + \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{2}\right]$$

$$= \left(-\frac{20\sqrt{3}}{7} + \frac{16}{3}\right)\pi.$$

$\Rightarrow a = 20, b = 7, c = 16, d = 3$

$\Rightarrow P = a+b+c+d = 46$.

Câu 15. **(HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

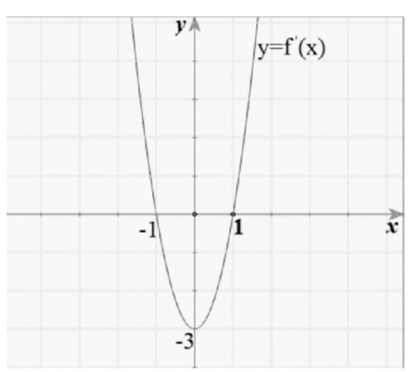
Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V = \pi\int_{-|m|}^{|m|}(m^2 - x^2)dx = \pi(m^2x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-|m|}^{|m|} = \frac{4\pi m^2|m|}{3}$

Ta có: $V < 1000\pi \Leftrightarrow \frac{4\pi m^2|m|}{3} < 1000\pi \Leftrightarrow |m|^3 < 750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750} < m < \sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750} \simeq 9,08$ và $m \neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\frac{725}{35}\pi$. **B.** $\frac{1}{35}\pi$. **C.** 6π. **D.** đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)=3(x^2-1)$.

Khi đó $f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x+C$.

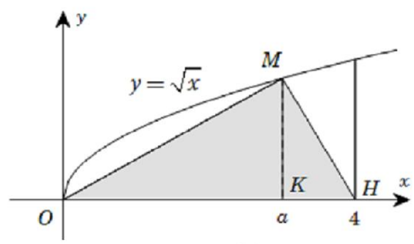
Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ là:

$\begin{cases}f(x)=4\\ f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+C=4\\ 3(x^2-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ C=2\end{cases}$ suy ra $f(x)=x^3-3x^2+2(C)$.

$+(C)\cap Ox\Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x=-2;x=1$.

+Khi đó $V=\pi\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x^2+2\right)^2dx=\frac{729}{35}\pi$.

Câu 17. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó



A. $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\frac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

Lời giải

Ta có: $V=\pi\int_0^4 xdx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4=8\pi$. Mà $V=2V_1\Rightarrow V_1=4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên Ox $\Rightarrow OK=a, KH=4-a, MK=\sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK, hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH=4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1=\frac{1}{3}.\pi.4.\left(\sqrt{a}\right)^2=\frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a=3$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y=x-\pi$, $y=\sin x$ và $x=0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và $V=p\pi^4, (p\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

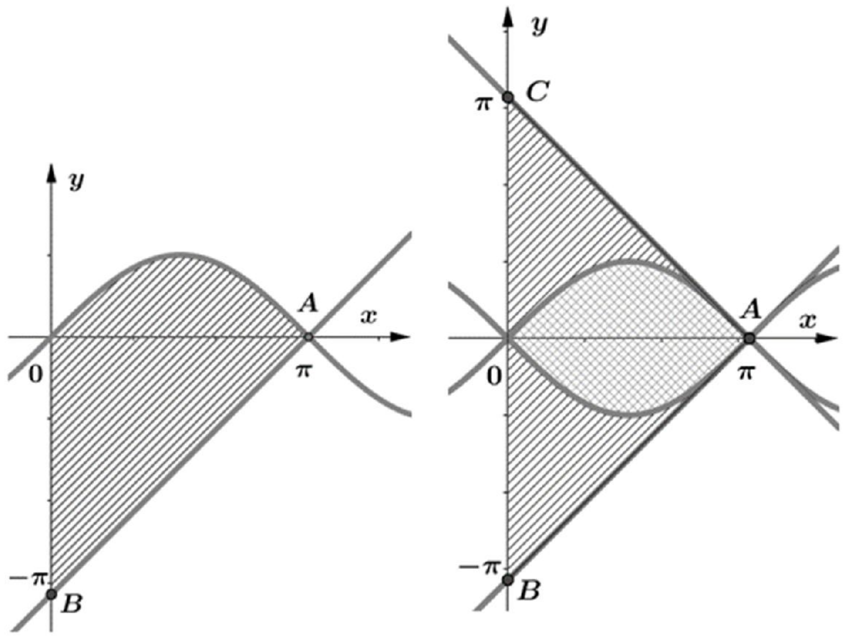
Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x-\pi$ và $y=\sin x$:

$x-\pi=\sin x\Leftrightarrow x-\pi-\sin x=0\ (1)$. Ta thấy $x=\pi$ là một nghiệm của phương trình (1).

Xét hàm số $f(x)=x-\pi-\sin x\Rightarrow f'(x)=1-\cos x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x=\pi$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.



Cách 1:

Xét hàm số $g(x)=\pi-x-\sin x,\ x\in(0;\pi)$.

$g'(x)=-1-\cos x<0,\ \forall x\in(0;\pi)$, suy ra hàm số $g(x)=\pi-x-\sin x$ nghịch biến trên $(0;\pi)$.

$\forall x\in(0;\pi): g(x)>g(\pi)\Rightarrow \pi-x-\sin x>\pi-\pi-\sin\pi=0\Rightarrow \pi-x>\sin x\ (2)$.

Do đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành là thể tích của khối nón khi quay tam giác vuông OAB quanh trục hoành.

$V=\frac{1}{3}.\pi.OB^2.OA=\frac{1}{3}\pi.\pi^2.\pi=\frac{1}{3}\pi^4 \Rightarrow p=\frac{1}{3}$. Vậy $24p=24.\frac{1}{3}=8$.

Cách 2: Từ (2) ta có $V=\pi\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}(x-\pi)$

$=\pi.\left.\frac{(x-\pi)^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^4}{3}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$.

Vậy $24p=24.\frac{1}{3}=8$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, $(H_1):\begin{cases} y=\frac{x^2}{4} \\ y=-\frac{x^2}{4} \\ x=-4, x=4 \end{cases}$, $(H_2):\begin{cases} x^2+y^2\le 16 \\ x^2+(y-2)^2\ge 4 \\ x^2+(y+2)^2\ge 4 \end{cases}$. Cho $(H_1),(H_2)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1,V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $V_1=V_2$. **B.** $V_1=\frac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1=2V_2$. **D.** $V_1=\frac{3}{2}V_2$.

Lời giải

Ta có $V_1=8.\left(\pi.4^2\right)-2\left(\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{4y}\right)^2dy\right)=96\pi$

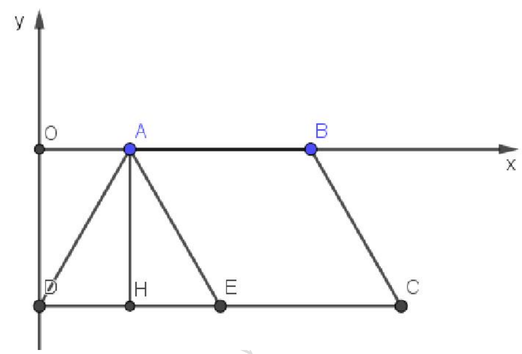
$V_2=\frac{4\pi.4^3}{3}-2\frac{4\pi.2^3}{3}=64\pi$

Suy ra $V_1=\frac{3}{2}V_2$

Câu 20. **(THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB=AD=BC=a$, $CD=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB.

A. $\frac{5}{4}\pi a^3$. **B.** $\frac{5}{2}\pi a^3$. **C.** $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **D.** πa^3.

Lời giải



Dễ thấy $ABCE$ là hình bình hành nên $AE=BC=a$. Vậy ADE là tam giác đều.

Có $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Có phương trình $CD: y=-\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $x_D=0, x_C=2a$; $A\left(\frac{a}{2};0\right)$.

Phương trình $AD: y=\sqrt{3}x-\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

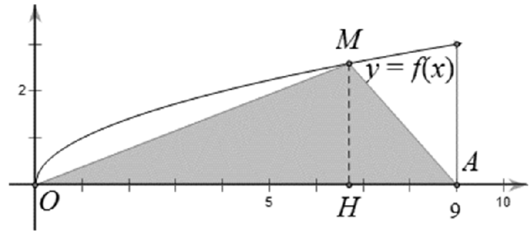
Vậy $V=\pi\int\limits_0^{2a}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\pi\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{3}x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3\pi a^2}{4}.2a-2\pi\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left(3x^2-3ax+\frac{3a^2}{4}\right)$

$\frac{3\pi a^3}{2}-2\pi\left(x^3-\frac{3a}{2}x^2+\frac{3a^2}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{a}{2}}=\frac{3\pi a^3}{2}-2\pi.\frac{a^3}{8}=\frac{5}{4}\pi a^3$.

Cách 2: Thể tích khối tròn xoay được tạo ra theo đề bài là thể tích khối trụ có chiều cao $2a$ bán kính đáy bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trừ đi thể tích hai khối nón cùng có chiều cao $\frac{a}{2}$ bán kính đáy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy

$V=\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 2a-2.\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{a}{2}=\frac{5}{4}\pi a^3$

Câu 21. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Tphcm - 2018)** Cho đồ thị $(C): y=f(x)=\sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x=9$ và trục Ox. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.



A. $S = 3$. **B.** $S = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $V_1 = \pi\int\limits_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{81\pi}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox, đặt $OH = m$ (với $0 < m \le 9$), ta có $M\left(m;\sqrt{m}\right)$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.OH + \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.AH = \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.OA = 3m\pi$.

Theo giả thiết, ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\dfrac{81\pi}{2} = 6m\pi \Leftrightarrow m = \dfrac{27}{4}$. Do đó $M\left(\dfrac{27}{4};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S = \int\limits_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x\right)\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2\right)\right|_0^{\frac{27}{4}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$