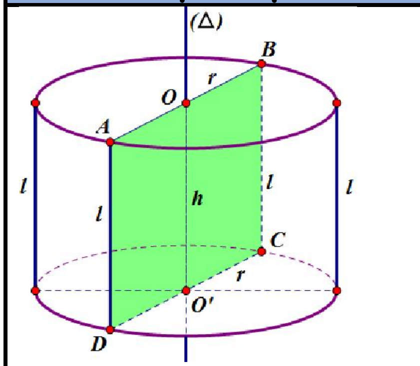
Chuyên đề 22 KHỐI TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SNH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
 ☞**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$. ▪ **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$. Ta có: $\boxed{l = h}$. ▪ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$. ▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ▪ **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V = h.S_đ = h.\pi r^2}$. ▪ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$. ▪ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$.

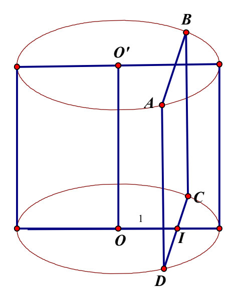
Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Mã 103 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{10}\pi$. **B.** $6\sqrt{34}\pi$. **C.** $3\sqrt{10}\pi$. **D.** $3\sqrt{34}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$S_{ABCD} = 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.CD$

$\Rightarrow CD = 4$

$\Rightarrow CI = 2$

$\Rightarrow CO = \sqrt{CI^2 + IO^2} = \sqrt{5} = r$

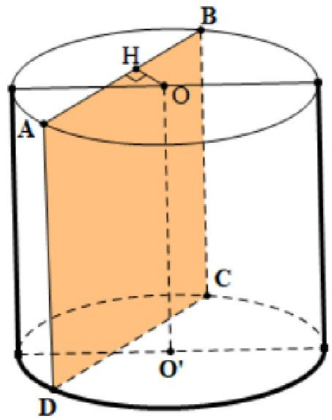
$S_{xq} = 2\pi rl = 6\sqrt{10}\pi$

Câu 2. **(Mã 101 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O,\ O'$ lần lượt là tâm của hai đáy và $ABCD$ là thiết diện song song với trục với $A,B\in(O)$; $C,D\in(O')$. Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow OH=d\left(OO',(ABCD)\right)=1$.

Vì $S_{ABCD}=30\Leftrightarrow AB.BC=30\Rightarrow AB=\dfrac{30}{5\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\Rightarrow HA=HB=\sqrt{3}$.

Bán kính của đáy là $r=\sqrt{OH^2+HA^2}=\sqrt{3+1}=2$.

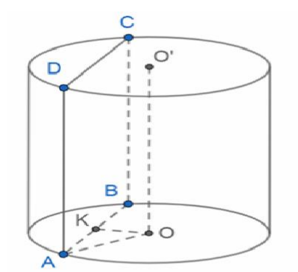
Diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.2.5\sqrt{3}=20\sqrt{3}\pi$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $16\sqrt{2}\pi$. **B.** $8\sqrt{2}\pi$. **C.** $12\sqrt{2}\pi$. **D.** $24\sqrt{2}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục, ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ (với AB là dây cung của hình tròn đáy tâm O).

Do hình trụ có chiều cao là $h=OO'=4\sqrt{2}\Rightarrow$ hình trụ có độ dài đường sinh $l=AD=4\sqrt{2}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $AB.CD=16\Rightarrow AB=\dfrac{16}{AD}=\dfrac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

Gọi K là trung điểm đoạn AB thì $OK\perp AB$, lại có mp$(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ $\Rightarrow OK\perp$ mp$(ABCD)\Rightarrow$ khoảng cách giữa OO' và mp$(ABCD)$ là $OK=\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông AOK $R = OA = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{OK^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$.

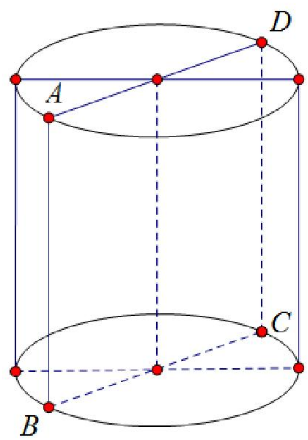
Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi R.l = 2\pi.2.4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2}$.

Câu 4. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $30cm^2$ và chu vi bằng $26\ cm$. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là:

A. $23\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $\frac{23\pi}{2}\left(cm^2\right)$. **C.** $\frac{69\pi}{2}\left(cm^2\right)$. **D.** $69\pi\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi h, r lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Thiết diện của mặt phẳng và hình trụ (T) là hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó theo giả thiết ta có

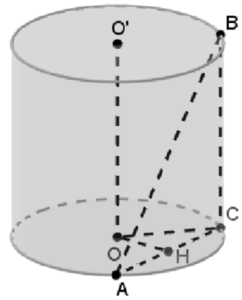
$$\begin{cases} h > 2r \\ S_{ABCD} = h.2r = 30 \\ C_{ABCD} = 2(h+2r) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ hr = 15 \\ h + 2r = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ -2r^2 + 15r - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ \left[\begin{array}{l} r = 5 \Rightarrow h = 3(l) \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 10(TM) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $S_{TP} = S_{XQ} + 2S_{đ} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi.\frac{3}{2}.10 + 2\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{69\pi}{2}\left(cm^2\right)$.

Câu 5. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao là 50 cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

A. $d = 50$ cm. **B.** $d = 50\sqrt{3}$ cm. **C.** $d = 25$ cm. **D.** $d = 25\sqrt{3}$ cm.

Lời giải



Qua B kẻ đường thẳng song song với OO' cắt đường tròn đáy tại C.

$OO'//BC \Rightarrow OO'//(ABC) \Rightarrow d(OO', AB) = d(OO',(ABC)) = d(O,(ABC)) = OH = d$. ($H$ là trung điểm của đoạn thẳng AC).

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 50\sqrt{3}$ cm.

Vậy $d = OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = 25$ cm.

Câu 6. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R). Biết rằng tồn tại dây

cung AB của đường tròn (O,R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng

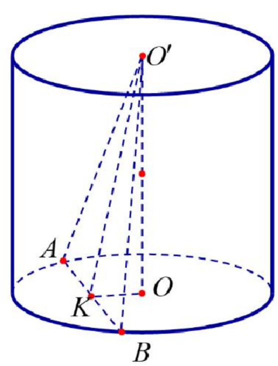
$(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O,R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình

trụ đã cho.

A. $4\pi R^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ **D.** $\frac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm AB, đặt $AB = 2a$.

Ta có : $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên $\widehat{OKO'} = 60° \Rightarrow O'K = 2OK \Rightarrow O'K^2 = 4OK^2$

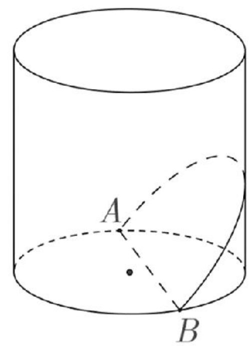
$\Rightarrow 3a^2 = 4(R^2 - a^2) \Rightarrow a^2 = \frac{4R^2}{7}$

Mặt khác : $OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4a^2 - R^2 = 4.\frac{4R^2}{7} - R^2 = \frac{9R^2}{7} \Rightarrow O'O = \frac{6\sqrt{7}\pi R}{7}$

Vậy diện tích xung quanh hình trụ đã cho là : $S_{xq} = 2\pi Rl = \frac{6\sqrt{7}\pi R^2}{7}$.

Câu 7. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4(cm)$ và chiều cao $5(cm)$. Gọi AB là một dây cung đáy dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}(cm)$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm

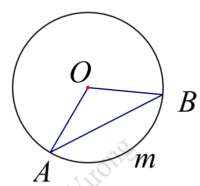
A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).



A. $\dfrac{8\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$. **B.** $\dfrac{4\left(4\pi-\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$.

C. $\dfrac{4\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$. **D.** $\dfrac{8\left(4\pi-\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$.

Lời giải



Gọi S là diện tích thiết diện, S' là diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy. Khi đó $S'=S.\cos 60^\circ$.

Ta có $AB=4\sqrt{3}\Rightarrow \cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{AOB}=120^\circ$

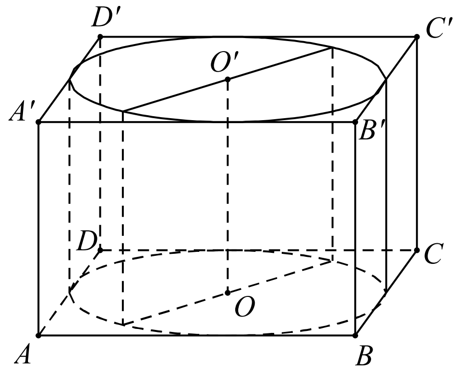
$\Rightarrow\begin{cases} S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB.\sin 120^\circ=4\sqrt{3} \\ S_{OAmB}=\dfrac{1}{3}\pi.OA^2=\dfrac{16\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow S'=S_{OAmB}-S_{OAB}=\dfrac{4\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}$

$\Rightarrow S=\dfrac{S'}{\cos 60^\circ}=\dfrac{8\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}$.

Câu 8. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 40 cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S=S_1+S_2$ $\left(\text{cm}^2\right)$.

A. $S=4(2400+\pi)$. **B.** $S=2400(4+\pi)$. **C.** $S=2400(4+3\pi)$. **D.** $S=4(2400+3\pi)$.

Lời giải



Ta có: $S_1 = 6.40^2 = 9600$.

Bán kính đường tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương là: $r = 20$ cm; hình trụ có đường sinh $h = 40$ cm

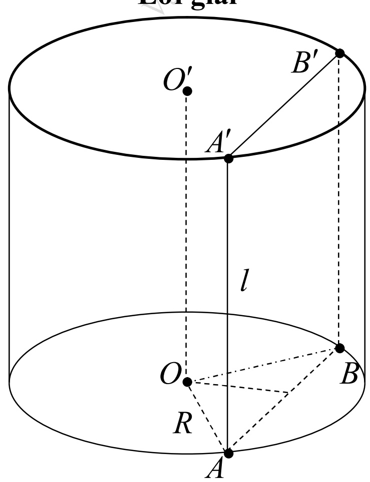
Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_2 = 2.\pi.20^2 + 2\pi.20.40 = 2400\pi$.

Vậy: $S = S_1 + S_2 = 9600 + 2400\pi = 2400(4+\pi)$.

Câu 9. **(Chuyên Quốc Học Huế 2018)** Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung $120°$. Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi R, h, l lần lượt là bán kính, chiều cao, đường sinh của hình trụ.

Ta có $S_{xq} = 4\pi \Leftrightarrow 2\pi.R.l = 4\pi \Leftrightarrow R.l = 2$.

Giả sử AB là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung $120°$.

Ta có $ABB'A'$ là hình chữ nhật có $AA' = h = l$.

Xét tam giác OAB cân tại O, $OA = OB = R$, $\widehat{AOB} = 120° \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.

$S_{ABB'A'} = AB.AA' = R\sqrt{3}.l = R.l\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Câu 10. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Ba chiếc bình hình trụ cùng chứa 1 lượng nước như nhau, độ cao mực nước trong bình II gấp đôi bình I và trong bình III gấp đôi bình II. Chọn nhận xét đúng về bán kính đáy r_1, r_2, r_3 của ba bình I, Ox, III.

A. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội 2.

B. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{2}$.

C. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\sqrt{2}$.

D. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của bình I, II, III.

Ta có $V_1 = V_2 \Leftrightarrow \pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2 \Leftrightarrow r_1^2 h_1 = r_2^2 2h_1 \Rightarrow r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}\ (1)$.

$V_2 = V_3 \Leftrightarrow \pi r_2^2 h_2 = \pi r_3^2 h_3 \Leftrightarrow r_2^2 h_2 = r_3^2 2h_2 \Rightarrow r_3 = \frac{r_2}{\sqrt{2}}\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 11. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình chữ nhật $ABCD$ với $BC = \frac{3R}{2}$.

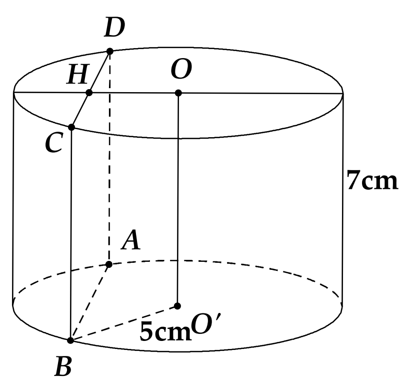
Gọi H là trung điểm AB, ta có $AH = \frac{R}{2} \Rightarrow AB = 2HB = 2\sqrt{R^2 - AH^2} = R\sqrt{3}$.

Vậy diện tích thiết diện là: $S = AB.CD = R\sqrt{3}.\frac{3R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. **(THPT Hải An - Hải Phòng - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $5\,\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy là $7\,\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3\,\text{cm}$. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành.

A. $55\,\text{cm}^2$. **B.** $56\,\text{cm}^2$. **C.** $53\,\text{cm}^2$. **D.** $46\,\text{cm}^2$.

Lời giải



Gọi thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$, H là trung điểm CD.

Ta có: $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABCD) \Rightarrow d\left(OO';(ABCD)\right) = d\left(O;(ABCD)\right) = OH = 3cm$.

$\Rightarrow HC = HD = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\text{cm}$.

$\Rightarrow AB = CD = 8\text{cm}$.

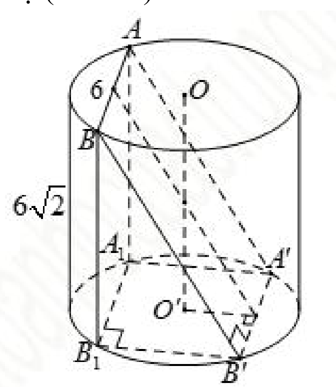
$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.BC = 8.7 = 56\text{cm}^2$.

Câu 13. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}\,cm$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB, $A'B'$ mà $AB = A'B' = 6\,cm$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $60\,cm^2$. Tính bán kính đáy của hình trụ.

A. $5\,cm$. **B.** $3\sqrt{2}\,cm$. **<u>C</u>.** $4\,cm$. **D.** $5\sqrt{2}\,cm$.

Lời giải

Gọi O, O' là tâm các đáy hình trụ (hình vẽ).



Vì $AB = A'B'$ nên $\left(ABB'A'\right)$ đi qua trung điểm của đoạn OO' và $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB.AA' \Leftrightarrow 60 = 6.AA' \Rightarrow AA' = 10\,(cm)$.

Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đáy chứa A' và B'

$\Rightarrow A'B'B_1A_1$ là hình chữ nhật có $A'B' = 6\,(cm)$,

$B_1B' = \sqrt{BB'^2 - BB_1^2} = \sqrt{10^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}\,(cm)$

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ, ta có $2R = A'B_1 = \sqrt{B_1B'^2 + A'B'^2} = 8 \Rightarrow R = 4\,(cm)$.

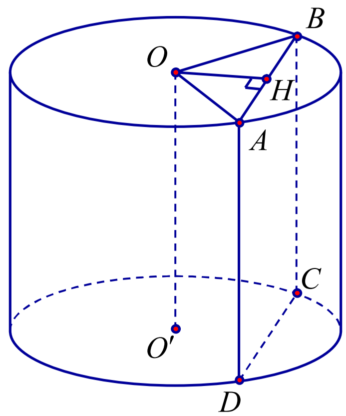
Câu 14. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

<u>A</u>. $S = 56\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S = 55\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S = 53\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S = 46\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Gọi O, O' là tâm của hai đáy của hình trụ và (P) là mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng 3cm.

Mp(P) cắt hai hình tròn đáy $(O), (O')$ theo hai dây cung lần lượt là AB, CD và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh là AD, BC. Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.



Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $OH \perp AB; OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow d(OO',(P)) = d(O,(ABCD)) = OH = 3\text{cm}$.

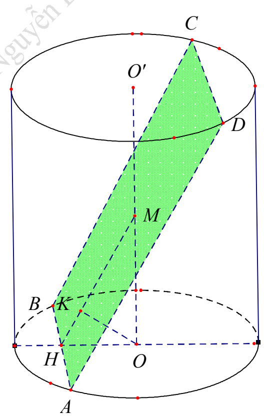
Khi đó: $AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$; $AD = OO' = h = 7\text{cm}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB.AD = 56\left(cm^2\right)$.

Câu 15. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{2R}{3}$. **D.** $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của OO'. Gọi A, B là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn (O) và H là hình chiếu của O trên AB $\Rightarrow AB \perp (MHO)$.

Trong mặt phẳng (MHO) kẻ $OK \perp MH$, $(K \in MH)$ khi đó góc giữa OO' và mặt phẳng (α) là góc $\widehat{OMK} = 30°$.

Xét tam giác vuông MHO ta có $HO = OM \tan 30° = R \tan 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông AHO ta có $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{3}}=\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB=\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Câu 16. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9cm, đường kính 6cm.Mặt đáy phẳng dày 1cm, thành cốc dày $0{,}2\text{cm}$. Đổ vào cốc 120 ml nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính 2cm. Mặt nước cách mép cốc gần nhất với giá trị bằng

A. $3{,}67(\text{cm})$. **B.** $3{,}08(\text{cm})$. **C.** $2{,}28(\text{cm})$. **D.** $2{,}62(\text{cm})$.

Lời giải

Thể tích của cốc nước là: $V=.\pi.(2,8)^2.8=62,72\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Thể tích của 5 viên bi là: $V_1=5.\frac{4}{3}.\pi.1^3=\frac{20}{3}.\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Thể tích còn lại sau khi đổ vào cốc 120 ml nước và thả vào cốc 5 viên bi là: $V_2=V-V_1-120=62,72\pi-\frac{20}{3}.\pi-120\approx 56,10\left(\text{cm}^3\right)$.

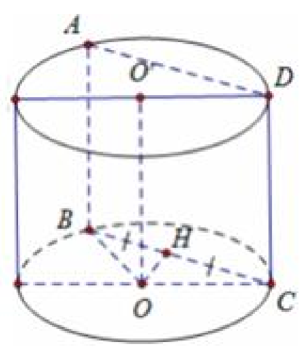
Chiều cao phần còn lại là: $h=\frac{V_2}{\pi.(2,8)^2}\approx\frac{56,10}{\pi.(2,8)^2}\approx 2,28(\text{cm})$.

Câu 17. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{3\sqrt{2}R^2}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}R^2}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}R^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



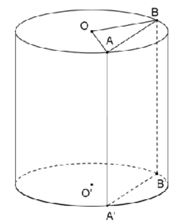
Giả sử thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm của BC suy ra $OH\perp BC$ suy ra $d(O;BC)=\frac{R}{2}$

Khi đó $BC=2HB=2\sqrt{OB^2-OH^2}=2\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{3}$

Suy ra $S_{ABCD} = BC.AB = R\sqrt{3}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$.

Câu 18. **(Sở Bình Phước - 2020)** Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là một hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120^0. Diện tích của thiết diện $ABB'A'$ bằng



A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là r, h.

Theo đề ra ta có: $2\pi rh = 4\pi \Rightarrow rh = 2$ (1).

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử AB là dây của đường tròn đáy của hình trụ. Gọi O là tâm của đáy trên của hình trụ. Theo bài ra ta có: $\widehat{AOB} = 120^0$.

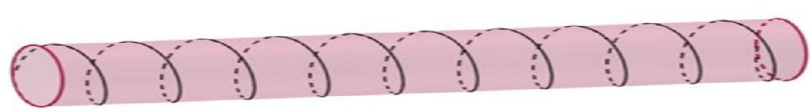
Áp dụng định lý côsin trong tam giác OAB, ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos\left(\widehat{AOB}\right)$

$\Rightarrow AB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2.\cos\left(120^0\right) = 3r^2 \Rightarrow AB = r\sqrt{3}$ (2).

Mặt khác, do mặt phẳng (α) song song với trục nên $ABB'A'$ là hình chữ nhật và $AA' = h$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra: $S_{ABB'A'} = AB.AA' = r\sqrt{3}.h = rh\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Câu 19. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Một sợi dây (không co giãn) được quấn đối xứng đúng 10 vòng quanh một ống trụ tròn đều có bán kính $R = \dfrac{2}{\pi} cm$ (Như hình vẽ)

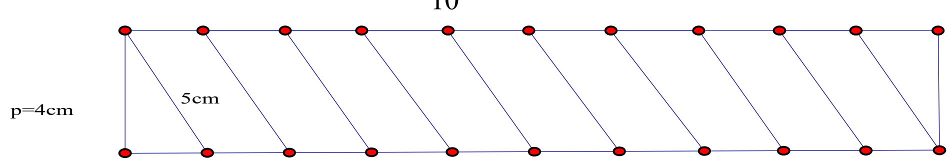


Biết rằng sợi dây dài $50cm$. Hãy tính diện tích xung quanh của ống trụ đó.

A. $80cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $60cm^2$. **D.** $120cm^2$.

Lời giải

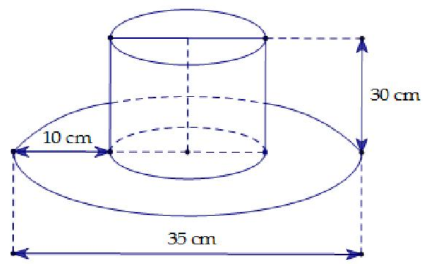
Khi trải phẳng ống trụ tròn đều ta được một hình chữ nhật có chiều rộng là chu vi của mặt đáy còn chiều dài là chiều dài của trụ, mỗi vòng quấn của dây dài $5cm$ là đường chéo của hình chữ nhật có kích thước lần lượt bằng chu vi đáy trụ và $\dfrac{1}{10}$ chiều dài trụ(hình vẽ).



Gọi chiều dài trụ là $l(cm)$,theo định lí Pitago ta có $\sqrt{5^2 - \left(2.\dfrac{2}{\pi}\pi\right)^2} = \dfrac{l}{10} \Leftrightarrow l = 30$ (cm).

Vậy diện tích xung quanh của trụ là: $S_{xq} = 2.\dfrac{2}{\pi}.\pi.30 = 120\left(cm^2\right)$.

Câu 20. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa).



A. $750,25\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $756,25\pi\left(cm^2\right)$. **C.** $700\pi\left(cm^2\right)$. **D.** $700\pi\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Bán kính hình trụ của cái mũ là $r=\dfrac{35-10-10}{2}=\dfrac{15}{2}\left(cm\right)$.

Đường cao hình trụ của cái mũ là $30\ cm$.

Diện tích xung hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rl=2.\pi.\dfrac{15}{2}.30=450\pi\left(cm^2\right)$.

Diện tích vành mũ là: $S_v=\pi\left(\dfrac{35}{2}\right)^2-S_d\left(cm^2\right)$.

Vậy tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa) là:

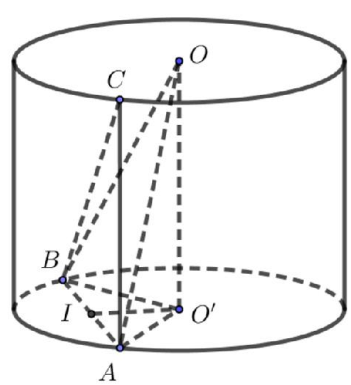
$S=S_{xq}+S_d+S_v=450\pi+\left(\dfrac{35}{2}\right)^2\pi=756,25.\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 21. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Một khối trụ có bán kính đáy $r=2a$. O,O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn $\left(O'\right)$ tại hai điểm A,B. Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ đường sinh AC, khi đó mặt phẳng $\left(ABC\right)$ song song với OO' và cách OO' một khoảng $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB, ta có $d\left(OO',\left(ABC\right)\right)=d\left(O',\left(ABC\right)\right)=O'I=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Bán kính $O'A=2a$ suy ra $BA=2IA=2\sqrt{O'A^2-O'I^2}=2\sqrt{4a^2-\dfrac{15a^2}{4}}=a$.

Thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ nên ta

có : $\dfrac{1}{6}.OO'.IO'.AB=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{6}.OO'.\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.a=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}\Leftrightarrow OO'=3a$.

Vậy hình trụ có chiều cao $OO'=3a$.

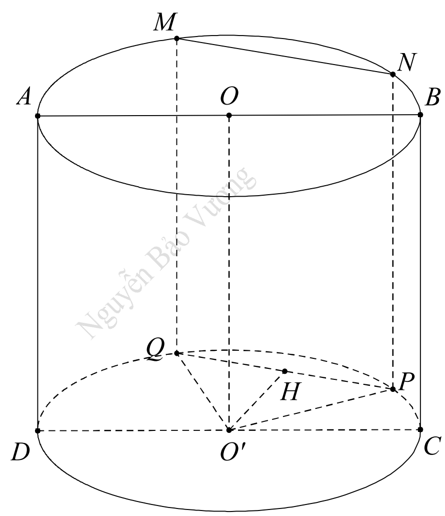
Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Lấy 2 điểm M, N lần lượt nằm trên đường tron tâm O sao cho $MN=6a$.

Từ M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với trục OO', cắt đường tròn tâm O' tại Q, P.

Thiết diện ta thu được là hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng $6a$.

Gọi H là trung điểm của PQ. Suy ra $OH\perp PQ$.

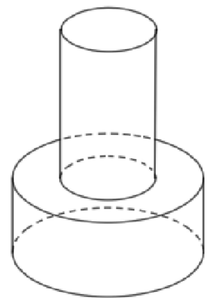
Vì $OO'\parallel\left(MNPQ\right)$ nên ta có $d\left(OO',\left(MNPQ\right)\right)=d\left(O',\left(MNPQ\right)\right)=O'H$.

Từ giả thiết, ta có $O'H=3a$. Do đó $\Delta O'HP$ là tam giác vuông cân tại H.

Suy ra bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $O'P=\sqrt{O'H^2+HP^2}=3a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là: $V=6a.\pi.\left(3a\sqrt{2}\right)^2=108\pi a^3$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2019)** Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ $\left(H_1\right),\left(H_2\right)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1,h_1,r_2,h_2 thỏa mãn $r_2=\dfrac{1}{2}r_1,h_2=2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30cm^3$, thể tích khối trụ $\left(H_1\right)$ bằng



A. $24cm^3$ **B.** $15cm^3$ **C.** $20cm^3$ **D.** $10cm^3$

Lời giải

Chọn C

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối trụ $(H_1), (H_2)$

$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi\left(\frac{1}{2}r_1\right)^2 2h_1 = \frac{V_1}{2}$

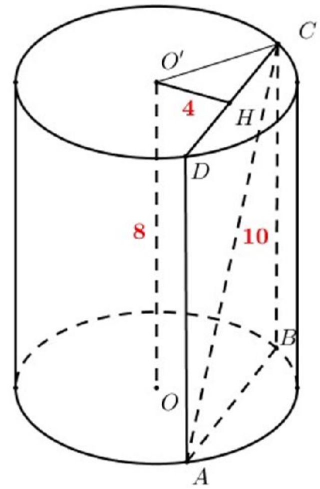
$\Rightarrow V_1 = 2V_2$ mà $V_1 + V_2 = 30 \Rightarrow V_1 = 20$

Câu 3. **(Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A, C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC = 10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $128\pi a^3$. **B.** $320\pi a^3$. **C.** $80\pi a^3$. **D.** $200\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $(O), (O')$ lần lượt là hai đường tròn đáy. $A \in (O), C \in (O')$.

Dựng AD, CB lần lượt song song với OO' ($D \in (O'), B \in (O)$). Dễ dàng có $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do $AC = 10a, AD = 8a \Rightarrow DC = 6a$.

Gọi H là trung điểm của DC.

$\begin{cases} O'H \perp DC \\ O'H \perp AD \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABCD)$.

Ta có $OO' // (ABCD) \Rightarrow d(OO', AC) = d(OO', (ABCD)) = O'H = 4a$.

$O'H = 4a, CH = 3a \Rightarrow R = O'C = 5a$.

Vậy thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi (5a)^2 8a = 200\pi a^3$.

Câu 4. **(Sở Hà Nội 2019)** Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?

A. 36. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 12.

Lời giải

Giả sử ban đầu khối trụ có chiều cao h_1 và bán kính r_1. Khi đó, khối trụ có thể tích là $V_1 = \pi r_1^2 h$.

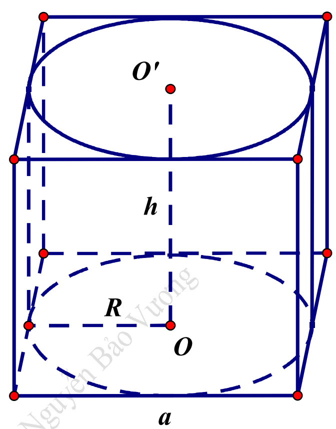
Sau khi tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì khối trụ có chiều cao $2h_1$ và bán kính $3r_1$. Khi đó, khối trụ mới có thể tích là $V_2 = \pi\left(3r_1\right)^2.2h_1 = 18\pi r_1 h_1$.

Do vậy $\frac{V_2}{V_1} = 18$.

Câu 5. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cần đẽo thanh gỗ hình hộp có đáy là hình vuông thành hình trụ có cùng chiều cao. Tỉ lệ thể tích gỗ cần phải đẽo đi ít nhất (tính gần đúng) là

A. 30%. **B.** 50%. **C.** 21%. **D.** 11%.

Lời giải



Để gỗ bị đẽo ít nhất thì hình hộp đó phải là hình hộp đứng.

Gọi h là chiều cao của hình hộp chữ nhật và R là bán kính đáy của hình trụ.

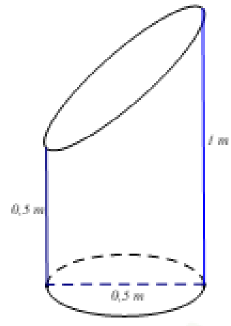
Do hình hộp chữ nhật và hình trụ có cùng chiều cao nên thể tích gỗ đẽo đi ít nhất khi và chỉ khi diện tích đáy của hình trụ lớn nhất (thể tích khối trụ lớn nhất). Suy ra $R = \frac{a}{2}$.

Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối hộp và thể tích của khối trụ có đáy lớn nhất.

Ta có: $V_1 = a^2.h$ và $V_2 = \pi R^2.h = \pi.\frac{a^2}{4}.h$.

Suy ra: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi.\frac{a^2}{4}.h}{a^2.h} = \frac{\pi}{4} \approx 78,54\%$. Vậy thể tích gỗ ít nhất cần đẽo đi là khoảng $21,46\%$.

Câu 6. Một khối gỗ hình trụ có đường kính $0,5\,\text{m}$ và chiều cao $1\,(\text{m})$. Người ta đã cắt khối gỗ, phần còn lại như hình vẽ bên có thể tích là V. Tính V.



A. $\frac{3\pi}{16}\left(\mathrm{m}^3\right)$. **B.** $\frac{5\pi}{64}\left(\mathrm{m}^3\right)$. **C.** $\frac{3\pi}{64}\left(\mathrm{m}^3\right)$. **D.** $\frac{\pi}{16}\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Lời giải

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối gỗ ban đầu và thể tích khối gỗ bị cắt.

Thể tích của khối gỗ ban đầu là $V_1=\pi\left(\frac{0,5}{2}\right)^2.1=\frac{\pi}{16}\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Thể tích phần gỗ đã bị cắt đi là $V_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{0,5}{2}\right)^2.0,5=\frac{\pi}{64}\left(\mathrm{m}^3\right)$.

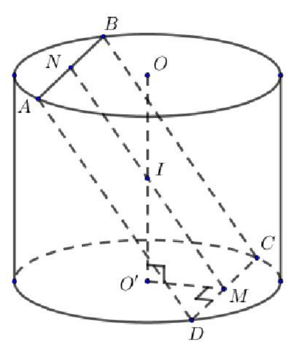
Thể tích khối gỗ còn lại và $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{64}=\frac{3\pi}{64}\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Câu 7. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho hình trụ có O, O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') sao cho $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc $60°$. Thể tích khối trụ bằng

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB và I là trung điểm của OO'.

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng đáy là $\widehat{IMO'}=60°$.

Ta có $IM=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}BC=a$.

Xét $\Delta IO'M$ vuông tại O, ta có $IO'=IM.\sin\widehat{IMO'}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h=OO'=2IO'=a\sqrt{3}$;

$O'M = IM.\cos\widehat{IMO'} = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\Delta O'MD$ vuông tại M, có $O'M = \dfrac{a}{2}, MD = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow r = O'D = \sqrt{O'M^2 + MD^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow r = a$.

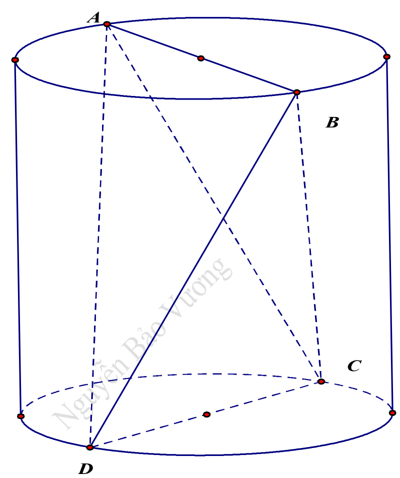
Vậy $V = \pi r^2 h = \pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 8. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O'). AB, CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'), góc giữa AB và CD bằng $30°$, $AB = 6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng

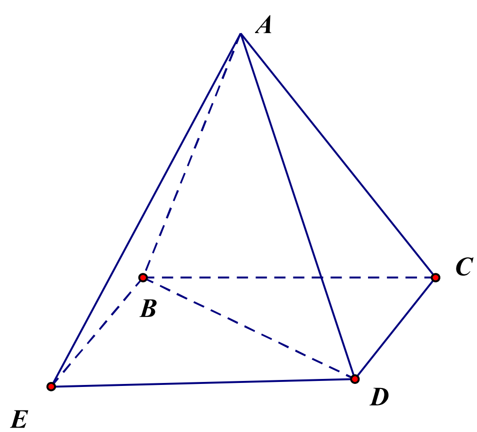
A. 180π. **B.** 90π. **C.** 30π. **D.** 45π.

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB, CD).\sin(AB, CD)$.



Lấy điểm E sao cho tứ giác $BCDE$ là hình bình hành.

Khi đó $(AB, CD) = (AB, BE) \Rightarrow \sin(AB, CD) = \sin(AB, BE)$.

$d(D, (ABE)) = d(AB, CD)$.

$V_{ABCD} = V_{ABDE} = \dfrac{1}{3}.d(D, (ABE)).S_{ABE} = \dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB, CD).\sin(AB, CD)$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right)\Rightarrow d\left(AB,CD\right)=\frac{6V_{ABCD}}{AB.CD.\sin 30^\circ}=\frac{180}{6.6.\frac{1}{2}}=10$.

Chiều cao của lăng trụ bằng $h=d\left(AB,CD\right)=10$.

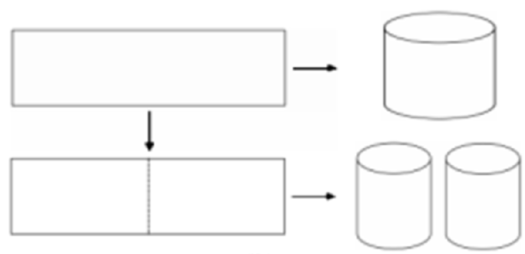
Thể tích lăng trụ: $V=S.h=\pi.3^2.10=90\pi$.

Câu 9. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\,\text{cm}\times 240\,\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50\,\text{cm}$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=1$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$.

Lời giải

Chọn C

Ở cách 1, thùng hình trụ có chiều cao $h=50\,\text{cm}$, chu vi đáy $C_1=240\,\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1=\frac{C_1}{2\pi}=\frac{120}{\pi}\,\text{cm}$. Do đó thể tích của thùng là $V_1=\pi R_1^2h$.

Ở cách 2, hai thùng đều có có chiều cao $h=50\,\text{cm}$, chu vi đáy $C_2=120\,\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1=\frac{C_2}{2\pi}=\frac{60}{\pi}\,\text{cm}$. Do đó tổng thể tích của hai thùng là $V_2=2\pi R_2^2h$.

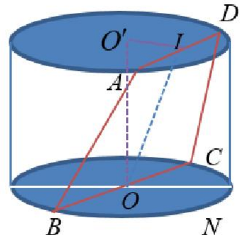
Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R_1^2h}{2\pi R_2^2h}=\frac{1}{2}.\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\frac{1}{2}.\left(\frac{\frac{120}{\pi}}{\frac{60}{\pi}}\right)^2=2$.

Câu 10. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc 30°, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $ABCD$ là hình thang mà đề bài đề cập (BC đáy lớn, AD đáy nhỏ) và r là bán kính đáy của hình trụ.

Theo đề: $\begin{cases} BC = 2r \\ BC = 2AD \end{cases} \Rightarrow AD = r$

Kẻ $O'I \perp AD \Rightarrow AD \perp (OO'I) \Rightarrow (ABCD) \perp (OO'J)$

Suy ra góc giữa OO' và $(ABCD)$ là góc $\widehat{O'OI}$. Theo đề $\widehat{O'OI} = 30°$

$$\cos\widehat{O'OI} = \frac{OO'}{OI} \Leftrightarrow OI = \frac{OO'}{\cos 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a$$

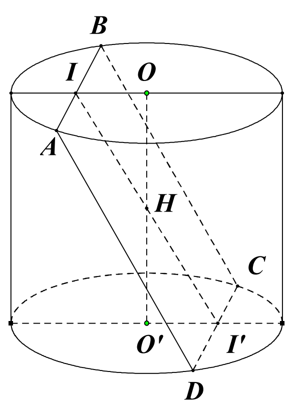
Ta có: $S_{ABCD} = \dfrac{(AD + BC).IO}{2} \Leftrightarrow 3a^2 = \dfrac{(r + 2r).2a}{2} \Leftrightarrow r = a$

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi a^2 .a\sqrt{3} = \pi a^3 \sqrt{3}$

Câu 11. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, CD; O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy của hình trụ (như hình vẽ); H là trung điểm của II'.

Khi đó H là trung điểm của OO' và góc giữa $(ABCD)$ tạo với đáy là $\widehat{HI'O} = 45°$.

Do $I'H = \dfrac{a}{2} \Rightarrow O'H = O'I' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Khi đó $h = OO' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $r = O'C = \sqrt{O'I'^2 + I'C^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$ **C.** $S_{xq} = \dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$ **D.** $S_{xq} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

Lời giải

Chọn D

Bán kính đường tròn đáy hình trụ bằng một phần ba đường cao tam giác BCD

nên $r = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình chóp: $h = \sqrt{4^2 - \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \dfrac{16.3}{9}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

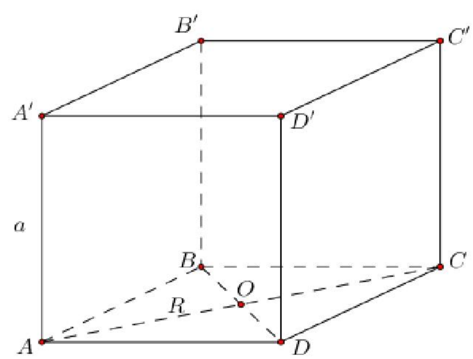
$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

A. $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$ **B.** $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$ **C.** $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$ **D.** $V = \pi a^3$

Lời giải

Chọn B



Bán kính đường tròn đáy là $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; chiều cao $h = a$.

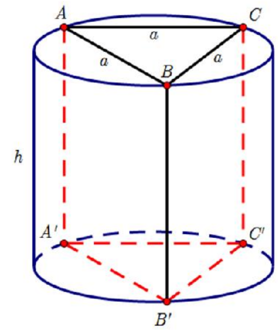
Vậy thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi.\dfrac{a^2}{2}.a = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V = 3\pi a^2 h$. **B.** $V = \pi a^2 h$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có hình tròn đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác đáy của lăng trụ, và chiều cao bằng chiều cao lăng trụ.

Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là $V = h.S = h.\pi.\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2 h}{3}$ (đvtt).

Câu 4. **(Sở Quảng Ninh 2019)** Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $27\sqrt{3}a^3$. **B.** $24\sqrt{3}a^3$. **C.** $36\sqrt{3}a^3$. **D.** $81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Ta có $S_{xq} = 36\pi a^2 = 2\pi Rh$.

Do thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $2R = h$.

Khi đó $h^2 = 36a^2$ hay $h = 6a$; $R = 3a$.

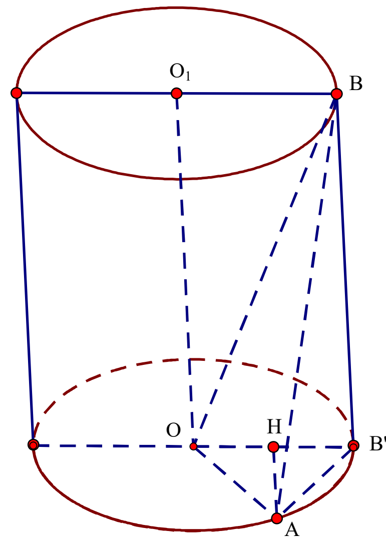
Diện tích của mặt đáy hình lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $B = 6.\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $V = B.h = 81a^3\sqrt{3}$.

Câu 5. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1, bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB = \sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Lời giải



Kẻ đường sinh BB' và gọi H là trung điểm OB'.

Trong tam giác vuông ABB' có $BB' = OO_1 = 2a$ và $AB = a\sqrt{5}$ nên $AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = a$.

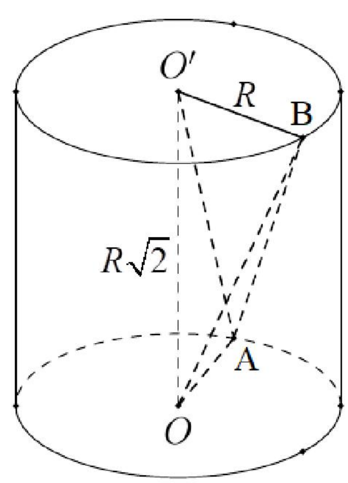
Tam giác OAB' có $OB' = OA = AB' = a$ nên OAB' là tam giác đều $\Rightarrow AH \perp OB', AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có $\begin{cases} AH \perp OB' \\ AH \perp OO_1 \end{cases} \Rightarrow AH \perp (O_1OB) \Rightarrow$ Thể tích khối tứ diện $A.O_1OB$ là

$$V_{O_1OAB} = \frac{1}{3}.AH.S_{O_1OB} = \frac{1}{6}AH.O_1O.O_1B = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 6. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O), (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

A. $\dfrac{2}{3\pi}$. **B.** $\dfrac{1}{3\pi}$. **C.** $\dfrac{1}{6\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{4\pi}$.

Lời giải



Thể tích khối trụ $V_1 = \pi R^2.h = \pi R^2.R\sqrt{2} = \pi R^3\sqrt{2}$

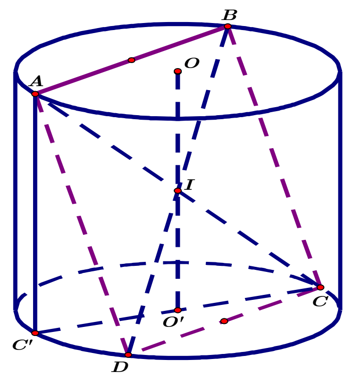
Khối tứ diện $BO'OA$ có BO' là đường cao và đáy là tam giác vuông $O'OA$, do đó thể tích khối tứ diện là $V_2 = \dfrac{1}{3}S_{O'OA}.O'B = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}OA\cdot OO'\cdot O'B = \dfrac{1}{6}R.R\sqrt{2}.R = \dfrac{\sqrt{2}}{6}R^3$

Vậy $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{R^3\sqrt{2}}{6}\cdot\dfrac{1}{\pi R^3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{6\pi}$.

Câu 7. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Một hình vuông $ABCD$ có đáy AB,CD là hai dây cung của hai đường tròn đáy và $(ABCD)$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

A. $\dfrac{5a^2}{4}$. **B.** $5a^2$. **C.** $\dfrac{5a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{5a^2}{2}$.

Lời giải



+ Gọi O,O' là tâm của 2 đường tròn đáy, I là trung điểm của OO'.

Do tính đối xứng nên I là trung điểm của AC,BD.

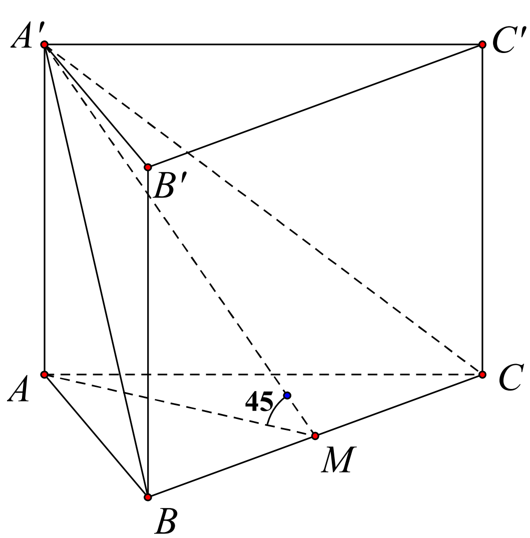
Kẻ đường kính $CC'\Rightarrow AC'=a;CC'=2a\Rightarrow AC=\sqrt{C'A^2+C'C^2}=a\sqrt{5}$.

+ Do đó $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC^2=\dfrac{5a^2}{2}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$, do đó góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 45°$.

Tam giác $A'AM$ vuông cân tại A nên $A'M = AM\sqrt{2} = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \dfrac{BC\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}A'M.BC = \dfrac{1}{2}\dfrac{BC\sqrt{6}}{2}.BC = \dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4}$.

Theo đề $\dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a$.

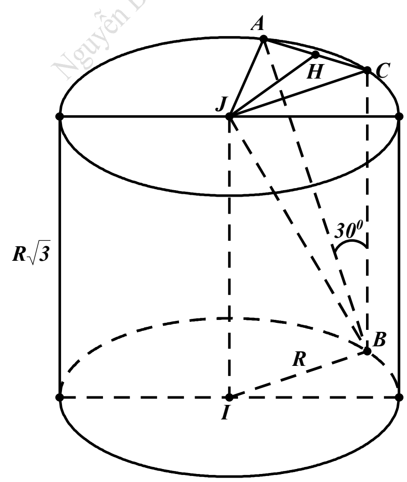
Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp ABC có bán kính $r = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, đường cao $h = AA' = AM = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh $S = 2\pi rh = 2\pi\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = 4\pi a^2$.

Câu 9. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao $\sqrt{3}R$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục d của hình trụ bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ:

A. $d(AB,d) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d(AB,d) = R$. **C.** $d(AB,d) = R\sqrt{3}$. **D.** $d(AB,d) = \dfrac{R}{2}$.

Lời giải



Gọi I, J là tâm của hai đáy (hình vẽ).

Từ B kẻ đường thẳng song song với trục d của hình trụ, cắt đường tròn đáy kia tại C. Khi đó, $(AB,d) = (AB,BC) = \widehat{ABC}$. Suy ra $\widehat{ABC} = 30°$.

Xét tam giác ABC vuông tại C, ta có:

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow AC = CB.\tan\widehat{ABC} = R\sqrt{3}.\tan 30° = R\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = R.$$

Lại có $d//(ABC)$ và $(ABC) \supset AB$ nên $d(d,AB) = d(d,(ABC)) = d(J,(ABC))$.

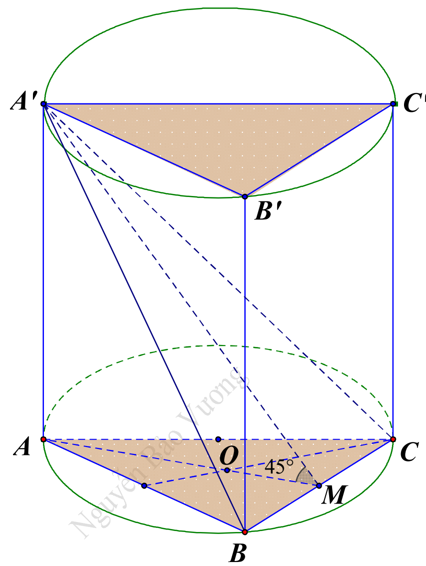
Kẻ $JH \perp AC$, $H \in AC$. Vì $BC \perp JH$ nên $JH \perp (ABC)$. Suy ra $d(J,(ABC)) = JH$.

Xét tam giác JAC ta thấy $JA = JC = AC = R$ nên JAC là tam giác đều cạnh R. Khi đó chiều cao là $JH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(d, AB) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. **(THPT Kiến An - Hải Phòng - 2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC. Khi đó ta có $BC \perp AM$, $BC \perp A'M$

Suy ra: $((A'BC),(ABC)) = \widehat{A'MA} = 45° \Rightarrow A'A = AM$. Gọi O là trọng tâm tam giác ABC.

Đặt $BC = x$, $x > 0$. Ta có $AM = A'A = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'M = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

Nên $S_{\Delta A'BC} = \dfrac{1}{2}.A'M.BC = \dfrac{x^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow x = 2a$.

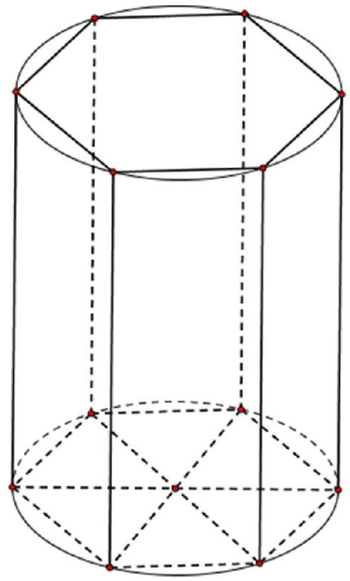
Khi đó: $AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $A'A = a\sqrt{3}$.

Suy ra diện tích xung quang khối trụ là: $S_{xq} = 2\pi.OA.A'A = 2\pi.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = 4\pi a^2$.

Câu 11. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $V = 27\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 81\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 24\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 36\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi r.2r = 36\pi a^2 \Rightarrow r = 3a$

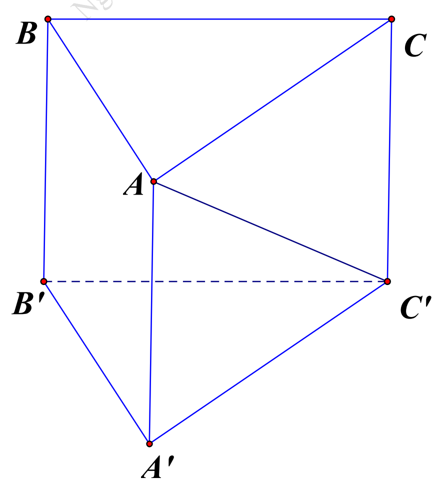
Lăng trụ lục giác đều có đường cao $h = l = 6a$

Lục giác đều nội tiếp đường tròn có cạnh bằng bán kính của đường tròn

Suy ra diện tích lục giác đều $S = 6.\dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

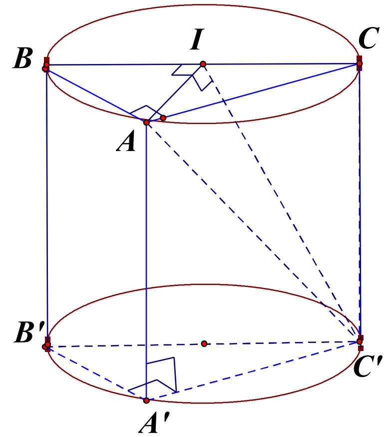
Vậy thể tích $V = S.h = 81\sqrt{3}a^3$.

Câu 12. **(Phú Thọ - 2018)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng



A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $3\pi a^3$.

Lời giải



Gọi bán kính của hình trụ là R.

Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$.

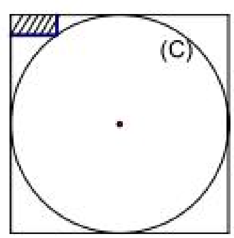
Lại có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AI \perp BC$ do đó $AI \perp (BCC'B')$ hay góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

Xét tam giác AIC' ta có: $IC' = \dfrac{AI}{\tan \widehat{IC'A}} = R\sqrt{3}$.

Xét tam giác CIC' ta có: $IC'^2 = IC^2 + CC'^2 \Leftrightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$.

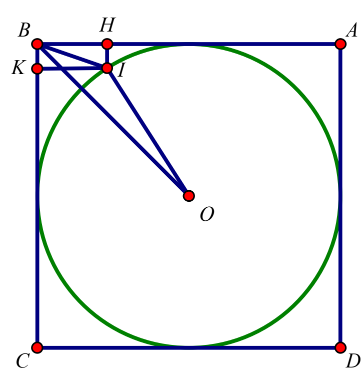
Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = \pi R^2.h = 4\pi a^3$.

Câu 13. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hình trụ (T) có (C) và (C') là hai đường tròn đáy nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương. Biết rằng, trong tam giác cong tạo bởi đường tròn (C) và hình vuông ngoại tiếp của (C) có một hình chữ nhật kích thước $a \times 2a$ (như hình vẽ dưới đây). Tính thể tích V của khối trụ (T) theo a.



A. $\dfrac{100\pi a^3}{3}$. **B.** $250\pi a^3$. **C.** $\dfrac{250\pi a^3}{3}$. **D.** $100\pi a^3$.

Lời giải



Ta có $BK = 2a$, $KI = a$ nên $BI = a\sqrt{5} \Rightarrow \cos\widehat{KBI} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin\widehat{KBI} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Khi đó $\cos\widehat{OBI} = \cos\left(\widehat{KBI} - \widehat{KBO}\right) = \cos\widehat{KBI}.\cos 45° + \sin\widehat{KBI}.\sin 45°$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$.

Kí hiệu $AB = 2x$ thì $OI = x, OB = x\sqrt{2}$.

Ta có $OI^2 = BO^2 + BI^2 - 2.BO.BI.\cos\widehat{OBI} = 2x^2 + 5a^2 - 2.x\sqrt{2}.a\sqrt{5}.\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = 2x^2 + 5a^2 - 6xa$

$\Leftrightarrow x^2 = 2x^2 + 5a^2 - 6xa \Leftrightarrow x^2 - 6xa + 5a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = 5a \end{array}\right.$.

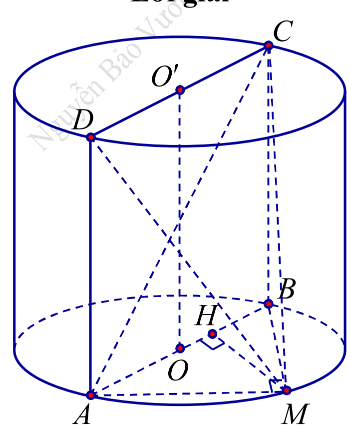
Vì $x > a$ nên $x = 5a$ hay $r = OI = 5a$.

Vậy thể tích khối trụ (T) là $V = \pi(5a)^2.10a = 250\pi a^3$.

Câu 14. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{3}(\text{cm})$ với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\widehat{ABM} = 60°$. Thể tích của khối tứ diện $ACDM$ là:

A. $V = 3\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $V = 4\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $V = 6\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $V = 7\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải



Ta có: ΔMAB vuông tại M có $\hat{B} = 60°$ nên $MB = \sqrt{3}$; $MA = 3$.

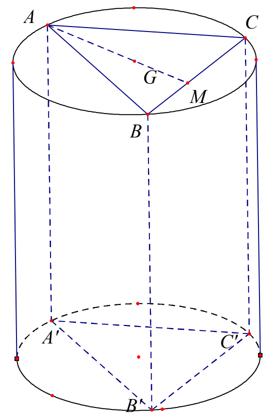
Gọi H là hình chiếu của M lên AB, suy ra $MH \perp (ACD)$ và $MH = \frac{MB.MA}{AB} = \frac{3}{2}$.

Vậy $V_{M.ACD} = \frac{1}{3}MH.S_{ACD} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.6 = 3\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 15. **(THPT Lục Ngạn - 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, chiều cao là h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. **B.** $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$. **C.** $V = 3\pi a^2 h$. **D.** $V = \pi a^2 h$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Do ABC là tam giác đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

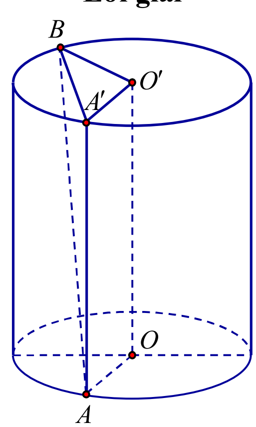
Ta có $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ là $V = \pi R^2 h = \frac{\pi a^2 h}{3}$.

Câu 16. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn (O), (O') bán kính bằng a, chiều cao hình trụ gấp hai lần bán kính đáy. Các điểm A, B tương ứng nằm trên hai đường tròn (O), (O') sao cho $AB = a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABOO'$ theo a.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải



Ta có $OO' = 2a$, $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{6a^2 - 4a^2} = a\sqrt{2}$.

Do đó $A'B^2 = O'B^2 + O'A'^2 = 2a^2$ nên tam giác $O'A'B$ vuông cân tại O' hay $O'A' \perp O'B \Rightarrow OA \perp O'B$.

Khi đó $V_{OO'AB} = \frac{1}{6}OA.O'B.d(OA, O'B).\sin(OA, O'B) = \frac{1}{6}a.a.2a.\sin 90° = \frac{a^3}{3}$.

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI
☞https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing