Chuyên đề 24 MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP KHỐI TRÒN XOAY

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

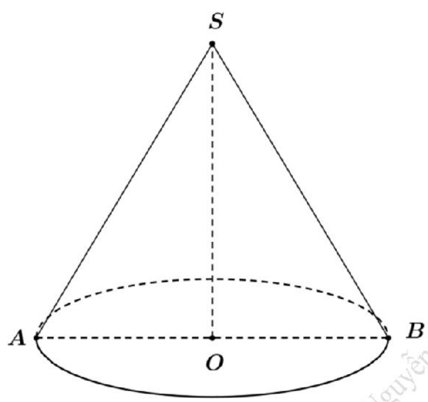
Câu 1. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

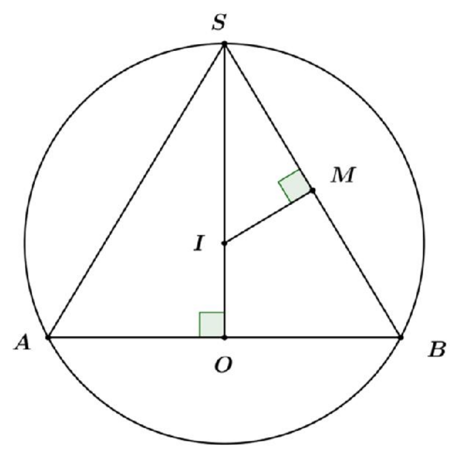
A. $\dfrac{2\sqrt{10}a}{3}$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{13}a}{13}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\sqrt{13}a$.

Lời giải.

Chọn C

Cách 1.





Nếu cắt mặt cầu ngoại tiếp khối nón (N) bởi mặt phẳng (SAB), ta được mộ hình tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Khi đó bán kính mặt cầu (T) bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Gọi M là trung điểm của SB. Kẻ đường vuông góc với SB tại M, cắt SO tại I.

Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB và $r = SI$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.

Ta có: $\Delta SIM \backsim \Delta SBO \Rightarrow \dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SM}{SO}.SB$.

Trong đó: $\begin{cases} SM = 2a \\ SB = 4a \\ SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow r = SI = \dfrac{8a\sqrt{13}}{13}$.

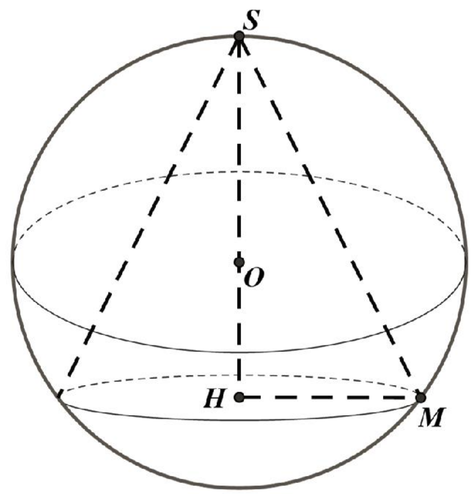
Cách 2.

Gọi O là tâm của mặt cầu (T), H là tâm đường tròn đáy của (N), M là một điểm trên đường tròn đáy của (N) và R là bán kính của (T).

Ta có: $SO = OM = R$; $OM^2 = OH^2 + HM^2$; $SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{13}a$.

Do $SH \neq HM$ nên chỉ xảy ra hai trường hợp sau

Trường hợp 1: $SH = SO + OH$

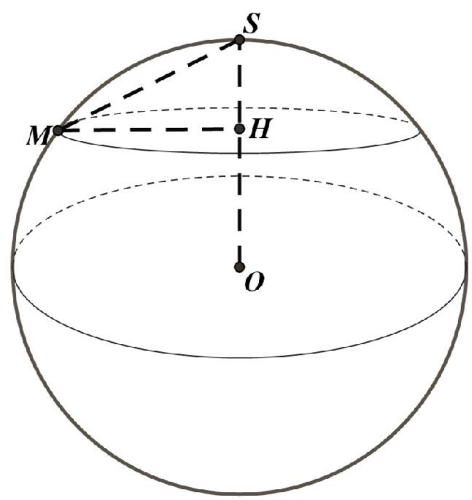


Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} R + OH = \sqrt{13}a \\ R^2 = OH^2 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OH = \sqrt{13}a - R \\ R^2 = 13a^2 - 2\sqrt{3}aR + R^2 + 3a^2 \ (*) \end{cases}.$$

Giải $(*)$ ta có $R = \dfrac{8\sqrt{13}a}{13}$.

Trường hợp 2: $SH = SO - OH$.



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} R = OH + \sqrt{13}a \\ R^2 = OH^2 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OH = R - \sqrt{13}a \\ R^2 = 13a^2 - 2\sqrt{13}aR + R^2 + 3a^2 \ (*) \end{cases}$.

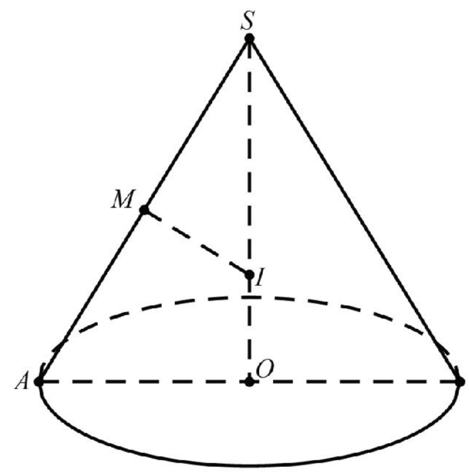
Giải $(*)$ ta có $R = \dfrac{8\sqrt{13}a}{13}$.

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{2\sqrt{6}a}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{15}a}{15}$. **C.** $\frac{8\sqrt{15}a}{15}$. **D.** $\sqrt{15}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm của (T) thì $I \in SO$ và $IS = IA$. Gọi M là trung điểm của SA thì $IM \perp SA$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(4a)^2 - a^2} = a\sqrt{15}$.

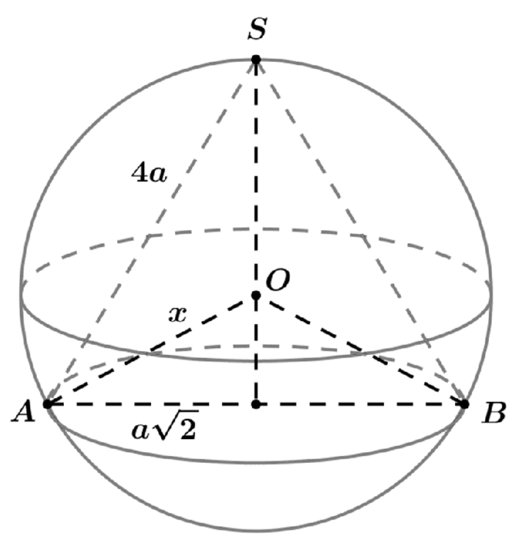
Lại có $SM.SA = SI.SO \Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{2a.4a}{a\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}a}{15}$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{2}\mathrm{a}$ và độ dài đường sinh bằng $4\mathrm{a}$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}a$. **B.** $\sqrt{14}a$. **C.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}a$. **D.** $\frac{8\sqrt{14}}{7}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi R là bán kính mặt cầu (T), SH là đường cao của hình nón

$\Rightarrow SH = \sqrt{(4a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{14}$

Gọi I là tâm mặt cầu $\Rightarrow R^2 = (a\sqrt{2})^2 + (R - a\sqrt{14})^2 \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{14}}{7}a$

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2\sqrt{2}a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{4\sqrt{7}a}{7}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{7}a}{7}$. **D.** $\sqrt{7}a$.

Lời giải

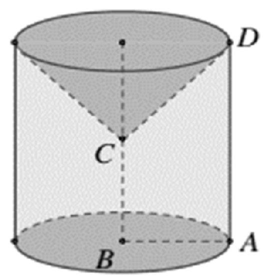
Chọn A

Giả sử thiết diện qua trục của hình nón là tam giác SAB cân tại S.

Khi đó ta có $S_{SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{1}{2}(a\sqrt{7}).2a = \sqrt{7}a^2$.

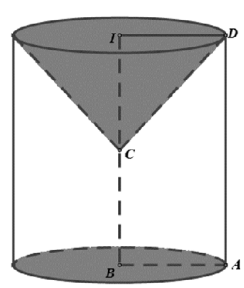
Ta có $S_{SAB} = \frac{SA.SB.AB}{4R} \Rightarrow R = \frac{SA.SB.SC}{4S_{SAB}} = \frac{2\sqrt{2}a.2\sqrt{2}a.2a}{4.a^2\sqrt{7}} = \frac{4a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 5. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \pi a^3$. **D.** $V = \frac{7\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Thể tích của khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $ABID$ khi quay cạnh BI là:

$$V_1 = \pi.AB^2.AD = 2\pi a^3.$$

Thể tích của khối nón sinh bởi tam giác CID khi quay cạnh CI là:

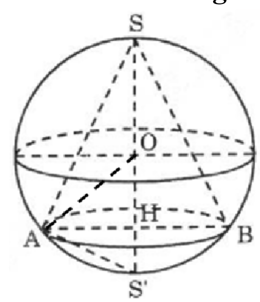
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi.ID^2.CI = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Vậy $V = V_1 - V_2 = \dfrac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 6. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Một hình nón có chiều cao $9(\text{cm})$ nội tiếp trong một hình cầu có bán kính $5(\text{cm})$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón và khối cầu. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{81}{125}$. **B.** $\dfrac{81}{500}$. **C.** $\dfrac{27}{125}$. **D.** $\dfrac{27}{500}$.

Lời giải



Gọi hình cầu có tâm *O* bán kính *R*.

Gọi hình nón có đỉnh *S*, tâm đáy là *H*, bán kính đáy $r = HA$.

Vì hình nón nội tiếp hình cầu nên đỉnh *S* thuộc hình cầu, chiều cao *SH* của hình nón đi qua tâm *O* của hình cầu, đồng thời cắt hình cầu tại điểm S'.

Theo đề chiều cao hình nón $SH = 9$, bán kính hình cầu $OS = 5 \Rightarrow OH = 4$, từ đó ta có

$$HA = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Thể tích khối nón $V_1 = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = \dfrac{1}{3}SH.\pi.HA^2 = \dfrac{1}{3}.9\pi 3^2 = 27\pi$.

Thể tích khối cầu $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi 5^3 = \dfrac{500\pi}{3}$.

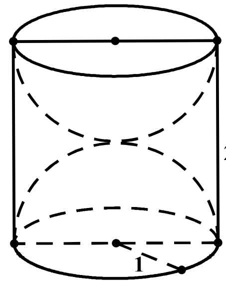
Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{27\pi}{\frac{500\pi}{3}} = \dfrac{81}{500}$.

Câu 7. **(Sở Ninh Bình 2019)** Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu. Tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Theo bài toán ta có hình vẽ



Thể tích của khối trụ là $V = \pi.1^2.2 = 2\pi$.

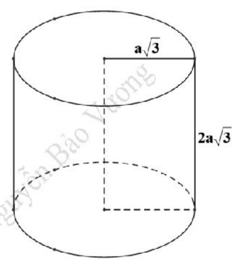
Vì đường tròn đáy của khối trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu nên bán kính của mỗi nửa khối cầu là $R = 1$.

Thể tích của hai nửa khối cầu bị khoét đi là $V_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi.1^3}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại của khối gỗ là $V_2 = V - V_1 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

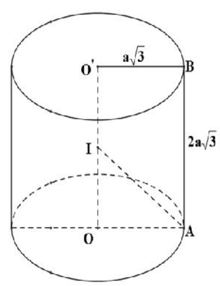
Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Một khối trụ bán kính đáy là $a\sqrt{3}$, chiều cao là $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ.



A. $8\sqrt{6}\pi a^3$. **B.** $6\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $4\sqrt{3}\pi a^3$. **D.** $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi a^3$.

Lời giải



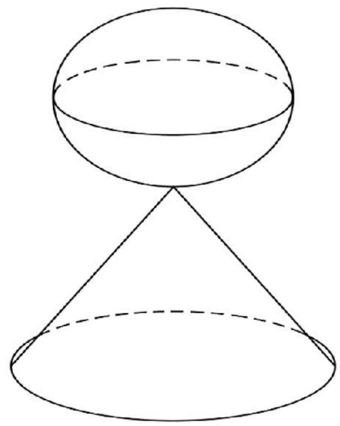
Xét hình hình chữ nhật $OABO'$ như hình vẽ, với O, O' lần lượt là tâm hai đáy của khối trụ. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OO'. Khi đó IA là bán kính khối cầu ngoại tiếp khối trụ.

Ta có: $IA^2 = OA^2 + OI^2 = 3a^2 + 3a^2 = 6a^2 \Rightarrow IA = \sqrt{6}a$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{6}a\right)^3 = 8\sqrt{6}\pi a^3$

Câu 9. **(THPT Chuyên Thái Nguyên 2019)** Một khối cầu pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r = \frac{1}{2}l$ và $l = \frac{3}{2}R$

xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là $91cm^2$. Tính diện tích của mặt cầu (H_1)



A. $\frac{104}{5}cm^2$ **B.** $16cm^2$ **<u>C</u>.** $64cm^2$ **D.** $\frac{26}{5}cm^2$

Lời giải

$r=\frac{1}{2}l=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}R=\frac{3}{4}R$. Diện tích mặt cầu $S_1=4\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình nón $S_2=\pi rl+\pi r^2=\pi.\frac{3}{4}R.\frac{3}{2}R+\pi.\frac{9}{16}R^2=\frac{27\pi R^2}{16}$

Theo giả thiết: $4\pi R^2+\frac{27\pi R^2}{16}=91\Leftrightarrow\frac{91\pi R^2}{16}=91\Leftrightarrow\pi R^2=16$

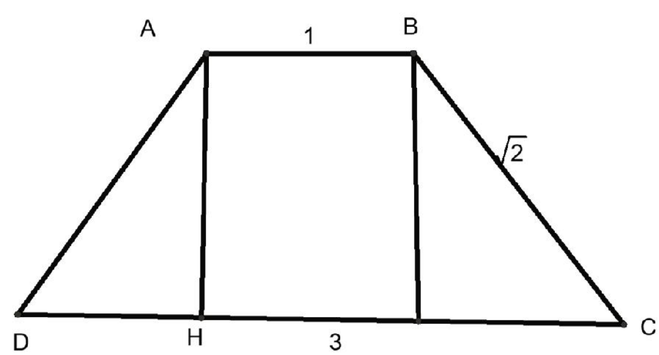
Vậy $S_1=4\pi R^2=64cm^2$

Câu 10. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $BC=DA=\sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{5}{3}\pi$. **B.** $\frac{4}{3}\pi$. **C.** $\frac{7}{3}\pi$. **D.** $\frac{2}{3}\pi$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>



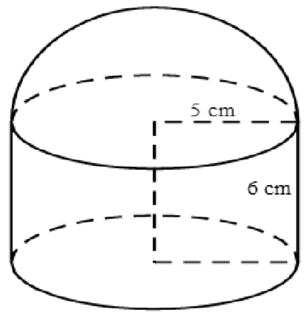
Thể tích của khối tròn xoay bằng thể tích của hình trụ đường cao DC và bán kính đường tròn đáy AH. $AH=DH=1$

Trừ đi thể tích hai khối nòn tròn xoay chiều cao DH bán kính đường tròn đáy AH

Ta có thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = 3.\pi.1^2 - 2.\frac{1}{3}.1.\pi.1^2 = \frac{7}{3}\pi$$

Câu 11. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5cm$, chiều cao $h = 6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là



A. $S = 110\pi\ cm^2$. **B.** $S = 130\pi\ cm^2$. **C.** $S = 160\pi\ cm^2$. **D.** $S = 80\pi\ cm^2$.

Lời giải

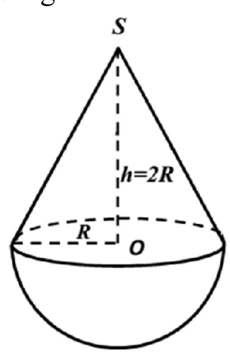
Diện tích nắp hộp cần sơn là: $S_1 = \frac{4\pi r^2}{2} = 50\pi\ cm^2$.

Diện tích than hộp cần sơn là: $S_2 = 2\pi rh = 60\pi\ cm^2$.

Diện tích S cần sơn là: $S = S_1 + S_2 = 50\pi + 60\pi = 110\pi\ cm^2$.

Câu 12. **(Sở Bình Phước 2019)** Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên.

Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi cm^3$. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng



A. $\pi\left(\sqrt{5}+3\right) cm^2$ **B.** $9\pi\left(\sqrt{5}+2\right) cm^2$

C. $9\pi\left(\sqrt{5}+3\right) cm^2$ **D.** $\pi\left(\sqrt{5}+2\right) cm^2$

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi.R^2.2R = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích nửa khối cầu là $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích của toàn bộ khối đồ vật là $V_1 + V_2 = 36\pi \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi.R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3$

Diện tích xung quanh của mặt nón là $S_1 = \pi R.\sqrt{4R^2 + R^2} = \pi R^2\sqrt{5} = 9\sqrt{5}\pi$

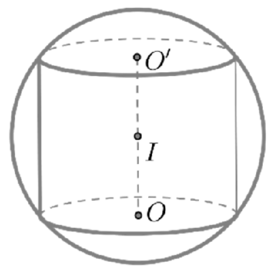
Diện tích của nửa mặt cầu là $S_2 = \frac{1}{2}.4\pi R^2 = 18\pi$

Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật bằng $S_1 + S_2 = 9\pi\left(\sqrt{5}+2\right)\ cm^2$.

Câu 13. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho khối cầu (S) có bán kính R. Một khối trụ có thể tích bằng $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$ và nội tiếp khối cầu (S). Chiều cao của khối trụ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}R$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}R$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$

Lời giải



Gọi r là bán kính của khối trụ và h là chiều cao của khối tru, khi đó ta có $r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$.

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$.

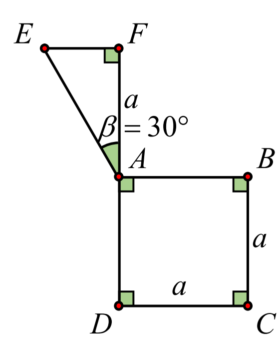
Theo đề bài thể tích khối trụ bằng $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$ nên ta có phương trình

$$\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3 = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h \Leftrightarrow 9h^3 - 36R^2h + 16\sqrt{3}R^3 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\frac{h}{R}\right)^3 - 36\left(\frac{h}{R}\right) + 16\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Vậy chiều cao khối trụ là $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

Câu 14. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF.



A. $\frac{10\pi}{7}a^3$. **B.** $\frac{\pi}{3}a^3$. **C.** $\frac{5\pi}{2}a^3$. **D.** $\frac{10\pi}{9}a^3$.

Lời giải

Lời giải

Chọn D

Khi quay mô hình trên quanh trục DF. Tam giác AFE tạo ra khối nón tròn xoay (N) và hình vuông $ABCD$ tạo ra khối trụ tròn xoay (T).

(N) có chiều cao $AF = a$, bán kính đáy

$$EF = AF.\tan 30^0 = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{9}.$$

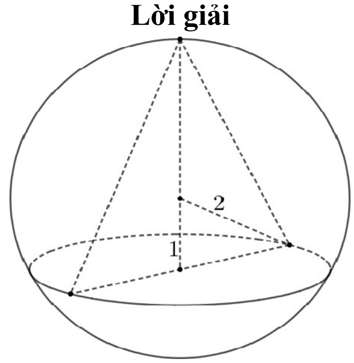
(T) có chiều cao $AD = a$, bán kính đáy $AB = a \Rightarrow V_{(T)} = \pi a^2.a = \pi a^3$.

Vậy thể tích cần tính là: $V = V_{(N)} + V_{(T)} = \pi a^3 + \frac{\pi a^3}{9} = \frac{10\pi a^3}{9}$.

Câu 15. **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo một đường tròn (C). Hình nón (N) có đáy là (C), đỉnh thuộc (S), đỉnh cách (P) một khoảng lớn hơn 2. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu (S) và khối nón (N). Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{32}{9}$.

Lời giải



Thể tích khối cầu (S) là $V_1 = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32}{3}\pi$

Khối nón (N) có bán kính đáy $r = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, chiều cao $h = 3$

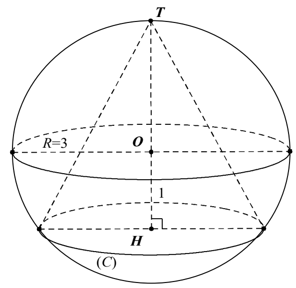
Thể tích khối nón (N) là $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{3}\right)^2.3 = 3\pi$. Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{32}{9}$.

Câu 16. **(Mã 104 2017)** Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S), tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

A. $V=\dfrac{32\pi}{3}$ **B.** $V=16\pi$ **C.** $V=\dfrac{16\pi}{3}$ **D.** $V=32\pi$

Lời giải

Chọn A



Gọi r là bán kính đường tròn (C) thì r là bán kính đáy của hình nón ta có: $r^2=R^2-OH^2=8$;

$HT=HO+OT=1+3=4=h$ là chiều cao của hình nón.

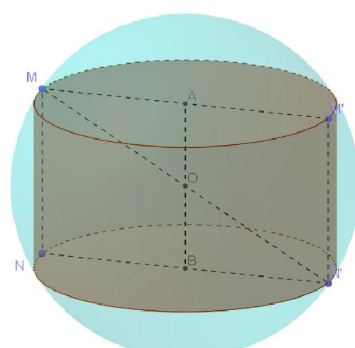
Suy ra: $V_n=\dfrac{1}{3}.h.S_{(C)}=\dfrac{1}{3}.4.\pi.8=\dfrac{32\pi}{3}$.

Câu 17. Một hình trụ có hai đường tròn đáy nằm trên một mặt cầu bán kính R và có đường cao bằng bán kính mặt cầu. Diện tích toàn phần của hình trụ đó bằng

A. $\dfrac{(3+2\sqrt{3})\pi R^2}{3}$. **B.** $\dfrac{(3+2\sqrt{3})\pi R^2}{2}$. **C.** $\dfrac{(3+2\sqrt{2})\pi R^2}{2}$. **D.** $\dfrac{(3+2\sqrt{2})\pi R^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Đường cao hình trụ $h=R$ nên ta có bán kính của đáy hình trụ $r=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{4}}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

$S_{xq}=2\pi rh=2\pi\dfrac{R\sqrt{3}}{2}R=\pi R^2\sqrt{3}$.

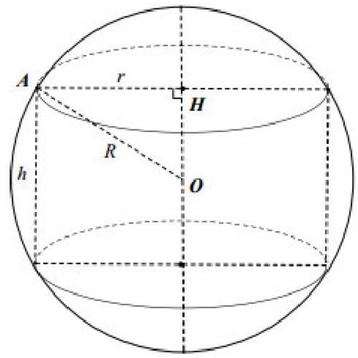
Vậy $S_{tp}=S_{xq}+2S_{đáy}=\pi R^2\sqrt{3}+2\pi\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{(3+2\sqrt{3})\pi R^2}{2}$.

Câu 18. **(Mã 110 2017)** Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{16}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{16}$

Lời giải

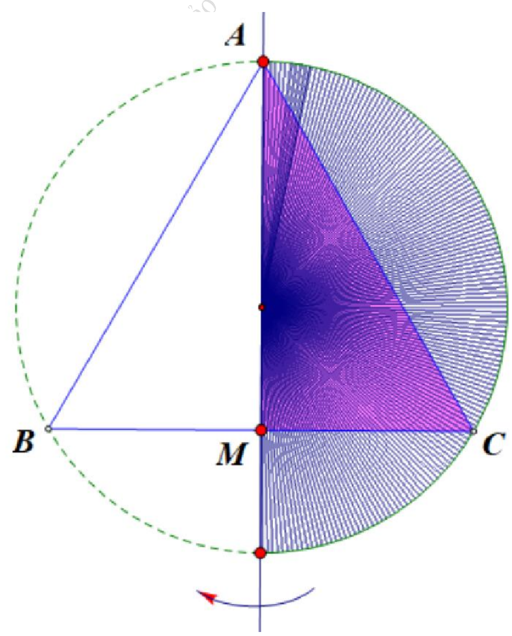
Chọn A



Ta có $r=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ (H) là $V_1=\pi r^2 h=\pi.12.4=48\pi$.

Thể tích của khối cầu (S) là $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.4^3=\frac{256\pi}{3}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{16}$.

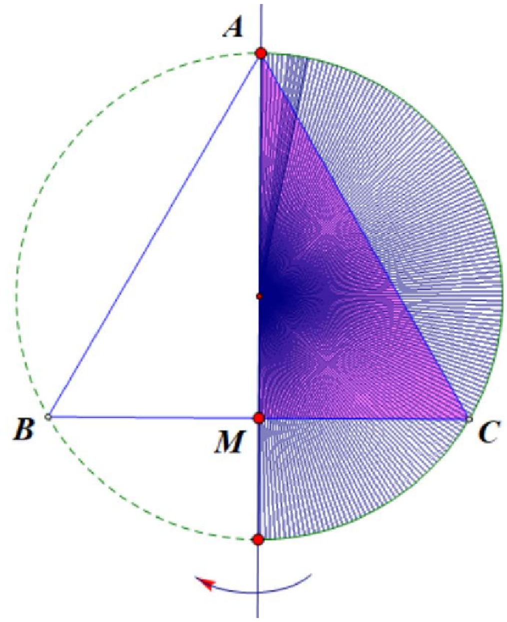
Câu 19. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam, giác ABM với nữa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh hoạ), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ .Tỉ số $\frac{\mathrm{V}_1}{\mathrm{V}_2}$ bằng:



A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{4}{9}$ **C.** $\frac{27}{32}$ **D.** $\frac{9}{32}$

Lời giải

Chọn D



Gọi tam giác đều cạnh a. Ta có

$\mathrm{r}=\dfrac{a}{2}$ là bán kính đường tròn đáy của khối nón.

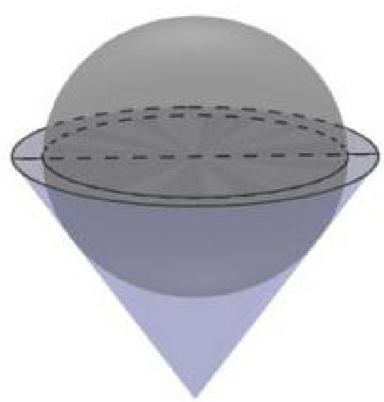
$\mathrm{R}=\dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ là bán kính khối cầu.

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$$

$$V_2=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$$

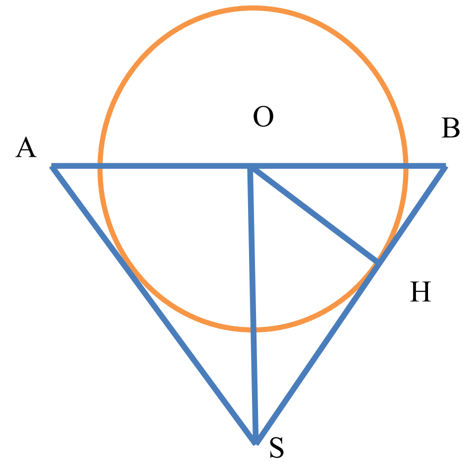
$$\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{32}$$

Câu 20. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\,\mathrm{dm}^3$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước (hình bên). Thể tích V của nước còn lại trong bình bằng



A. $24\pi\,\mathrm{dm}^3$. **B.** $6\pi\,\mathrm{dm}^3$. **C.** $54\pi\,\mathrm{dm}^3$. **D.** $12\pi\,\mathrm{dm}^3$.

Lời giải



Đường kính của khối cầu bằng chiều cao của bình nước nên $OS = 2OH$.
Ta có thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của nửa quả cầu chìm trong bình nước:

$18\pi = \dfrac{V_C}{2} = \dfrac{2\pi OH^3}{3} \Leftrightarrow OH = 3.$

Lại có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OB^2 = 12.$

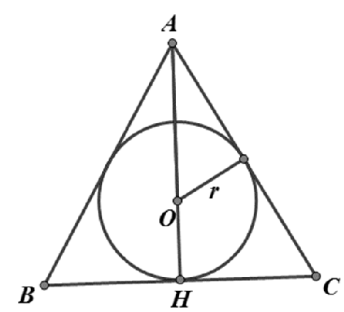
Thể tích bình nước (thể tích nước ban đầu): $V_n = \dfrac{\pi.OS.OB^2}{3} = 24\pi \ \left(\text{dm}^3\right)$.

Thể tích nước còn lại là: $24\pi - 18\pi = 6\pi \ \left(\text{dm}^3\right)$.

Câu 21. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho tam giác đều ABC có đường tròn nội tiếp $(O;r)$, cắt bỏ phần hình tròn và cho hình phẳng thu được quay quanh AO. Tính thể tích khối tròn xoay thu được theo r.

A. $\dfrac{5}{3}\pi r^3$. **B.** $\dfrac{4}{3}\pi r^3$. **C.** $\pi r^3\sqrt{3}$. **<u>D</u>.** πr^3.

Lời giải



Gọi H là chân đường cao AH của tam giác ABC

Vì tam giác ABC đều nên ta có: $AH = 3OH = 3r$, $AH = BC\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BC = \dfrac{2}{\sqrt{3}}AH = r2\sqrt{3}$

Khi quay tam giác ABC quanh trục AO ta được hình nón có thể tích là: V_N, có đáy là đường tròn đường kính BC khi đó: $S_N = \pi HC^2 = \pi r^2 3$, chiều cao của hình nón là: $AH = 3r$, khi đó thể tích hình nón là: $V_N = \dfrac{1}{3}AH.S_N = \dfrac{1}{3}3r.\pi r^2 3 = 3\pi r^3$ (đvtt)

Thể tích khối cầu khi quay hình tròn $(O;r)$ quanh trục AO là: $V_C = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Vậy thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay tam giác ABC đã cắt bỏ phần hình tròn quanh trục AO là: $V = V_N - V_C = 3\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5}{3}\pi r^3$

Câu 22. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho một cái bình hình trụ có bán kính đáy bằng R và có 4 quả cam hình cầu, trong đó có 3 quả cam có cùng bán kính và một quả cam cùng bán kính với đáy bình. Lần lượt bỏ vào bình 3 quả cam cùng bán kính sao cho chúng đôi một tiếp xúc với nhau, mỗi quả cam đều tiếp xúc với với đáy bình và tiếp xúc với một đường sinh của bình; Bỏ tiếp quả cam thứ tư còn lại vào bình và tiếp xúc với mặt nắp của bình. Chiều cao của bình bằng

A. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+1\right)^2$. **B.** $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}-1\right)^2$.

C. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}+1\right)^2$. **D.** $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}-1\right)^2$.

Lời giải

Gọi A,B,C là tâm ba quả cam có cùng bán kính r. K là tâm quả cam có bán kính R. IJ là chiều cao của hình trụ.

Khi đó $OA = \frac{2}{3}.\frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Do ba quả cam tiếp xúc với ba đường sinh của hình trụ nên ta có

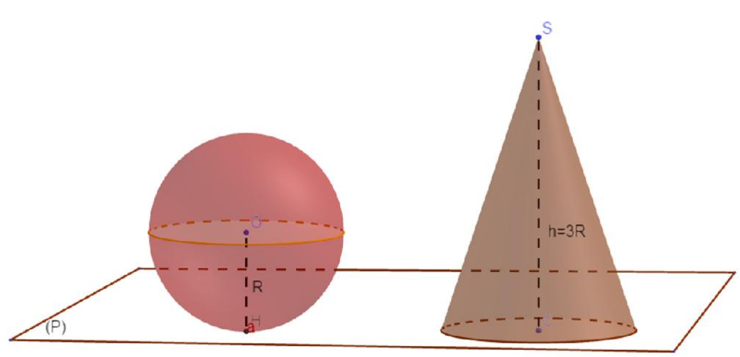
$R = OA + r = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r \Rightarrow r = R\left(2\sqrt{3}-3\right)$ và $OA = 2R\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Do quả cam có bán kính R tiếp xúc với ba quả cam có bán kính r nên khoảng cách từ tâm K đến mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là $OK = \sqrt{KA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(R+r\right)^2 - \left(2R\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^2} = 2R\sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

Vậy chiều cao của hình trụ là

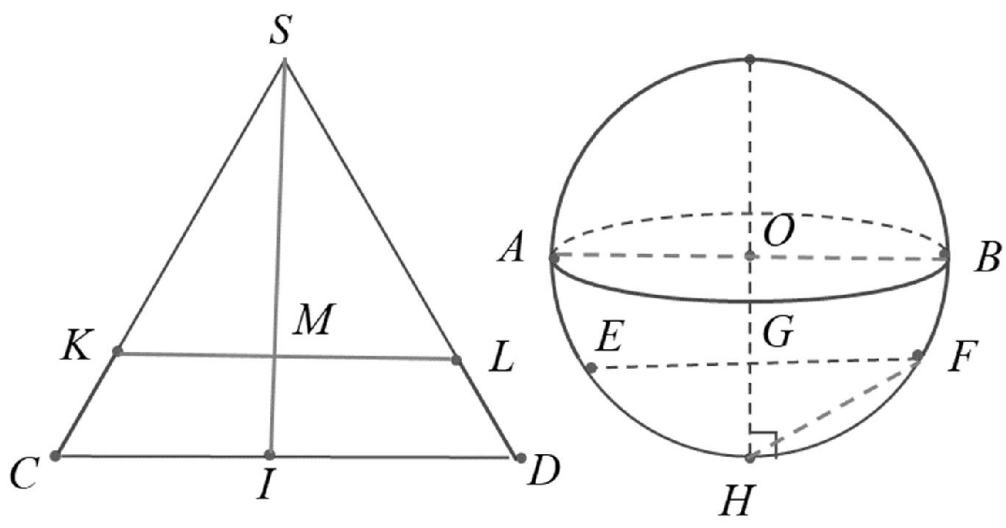
$$IJ = IO + OK + KJ = R\left(2\sqrt{3}-3\right) + 2R\sqrt{2\sqrt{3}-3} + R = R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+1\right)^2.$$

Câu 23. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho hình cầu tâm O bán kính $R=5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P), có chiều cao $h=15$, có bán kính đáy bằng R. Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P). Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S. Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q), $(0 < x \le 5)$. Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính giá trị $T = a + b$.



A. $T=17$ **B.** $T=19$ **C.** $T=18$ **D.** $T=23$

Lời giải



Gọi G là tâm của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (Q) và mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $OA = OB = OH = R = 5$ và $HG = x$. GF là bán kính của đường tròn thiết diện. Khi đó $GF = \sqrt{5^2 - (5-x)^2} = \sqrt{10x - x^2}$.

Gọi S_1 là tâm của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (Q) và mặt cầu.

Gọi M là tâm của thiết diện cắt bởi (Q) và hình nón. Theo giả thiết ta có $MI = x$ và $\frac{SM}{SI} = \frac{ML}{ID} \Rightarrow ML = \frac{SM.ID}{SI} = \frac{(15-x)5}{15} = 5 - \frac{x}{3}$.

Gọi S_2 là diện tích thiết diện của mặt phẳng (Q) và hình nón.

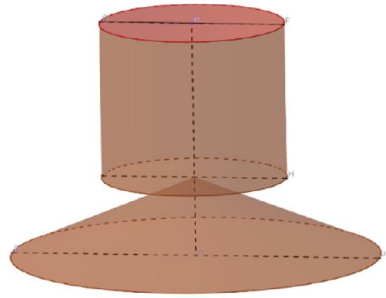
Ta có $S_2 = \pi\left(5 - \frac{x}{3}\right)^2$

Vậy $S = S_1 + S_2 = \pi\left[10x - x^2 + \left(5 - \frac{x}{3}\right)^2\right] = \pi\left(-\frac{8}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25\right)$

S đạt giá trị lớn nhất khi $f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25$ đạt giá khi lớn nhất $\Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$.

Theo đề ra ta có $x = \frac{a}{b} = \frac{15}{4} \Rightarrow T = a + b = 19$

Câu 24. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = 2r_1$, $h_1 = 2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của khối nón (N) bằng $20\,\text{cm}^3$. Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng



A. $140\,\text{cm}^3$ **B.** $120\,\text{cm}^3$ **C.** $30\,\text{cm}^3$ **D.** $50\,\text{cm}^3$

Lời giải

Ta có thể tích khối trụ là $V_1 = \pi.r_1^2.h_1$, mà $r_2 = 2r_1,\ h_1 = 2h_2$

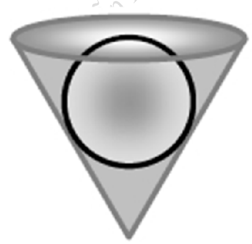
$V_1 = \pi.\left(\dfrac{r_2}{2}\right)^2.2h_2 = \dfrac{1}{2}\pi.r_2^2h_2$.

Mặt khác thể tích khối nón là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.r_2^2h_2 = 20 \Rightarrow \pi.r_2^2h_2 = 60\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Suy ra $V_1 = \dfrac{1}{2}.60 = 30\ \text{cm}^3$.

Vậy thể tích toàn bộ khối đồ chơi bằng $V_1 + V_2 = 30 + 20 = 50\ \text{cm}^3$.

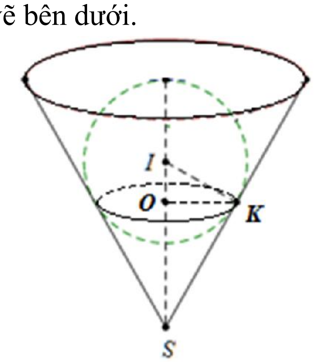
Câu 25. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019)** Thả một quả cầu đặc có bán kính $3\ (\text{cm})$ vào một vật hình nón (có đáy nón không kín) (như hình vẽ bên). Cho biết khoảng cách từ tâm quả cầu đến đỉnh nón là $5\ (\text{cm})$. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón.



A. $\dfrac{12\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{14\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{16\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{18\pi}{5}$.

Lời giải

Xét hình nón và quả cầu như hình vẽ bên dưới.



$OI = \dfrac{IK^2}{SI} = \dfrac{3^2}{5} = \dfrac{9}{5}\ (\text{cm})$.

Thể tích chỏm cầu tâm I có bán kính OK là:

$$V_2=\pi.\left(IK-OI\right)^2.\left(IK-\frac{IK-OI}{3}\right)=\pi.\left(3-\frac{9}{5}\right)^2.\left(3-\frac{3-\frac{9}{5}}{3}\right)=\frac{468\pi}{125}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

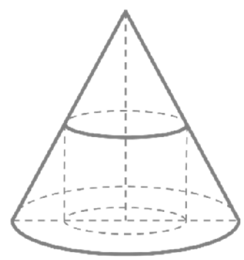
Thể tích hình nón có đỉnh S, đáy hình tròn tâm O, bán kính đáy OK là:

$$V_1=\frac{1}{3}.SO.S_{(O;OK)}\ \frac{1}{3}.\frac{16}{5}.\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{768\pi}{125}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

Thể tích phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón là:

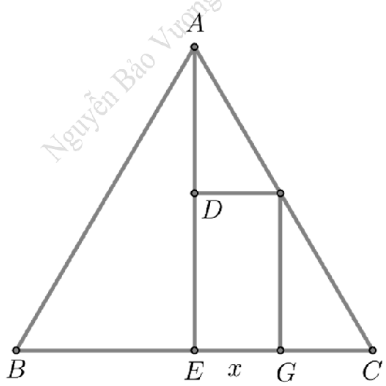
$$V_1-V_2=\frac{768\pi}{125}-\frac{468\pi}{125}=\frac{12\pi}{5}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

Câu 26. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hình nón có chiều cao $2R$ và bán kính đáy là R. Xét hình trụ nội tiếp hình nón sao cho thể tích trụ lớn nhất. Khi đó bán kính đáy của trụ là



A. $\frac{2R}{3}$. **B.** $\frac{R}{3}$. **C.** $\frac{3R}{4}$. **D.** $\frac{R}{2}$

Lời giải



Gọi D,E lần lượt là tâm đáy nhưu hình vẽ. Đặt bán kính đáy là $r=x\in\left(0;R\right)$.

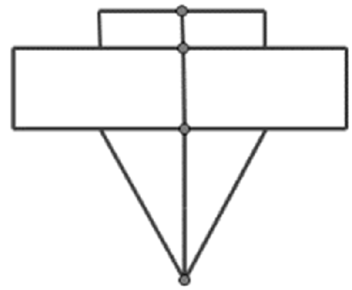
Ta có $\frac{GC}{CE}=\frac{FG}{AE}\Rightarrow\frac{R-x}{R}=\frac{FG}{2R}\Rightarrow FG=2\left(R-x\right)=h$

Ta có thể tích trụ là:

$$V=\pi r^2h=2\pi x^2\left(R-x\right)=8\pi.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}\left(R-x\right)\le 8\pi\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+R-x}{3}\right)^3=\frac{8\pi R^3}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{2}=R-x\Leftrightarrow x=\frac{2R}{3}$.

Câu 27. **(Thanh Tường Nghệ An -2019)** Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N) (*Tham khảo mặt cắt ngang qua trục như hình vẽ*). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_1(cm)$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(cm)$, chiều cao $h_2=2h_1(cm)$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_n = 4h_1(cm)$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(cm^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng



A. $5(cm^3)$. **B.** $3(cm^3)$. **<u>C</u>.** $4(cm^3)$. **D.** $6(cm^3)$.

Lời giải

Theo bài ta có $h_n = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{4}h_n$; $h_2 = 2h_1 = \frac{1}{2}h_n$.

Thể tích toàn bộ con xoay là

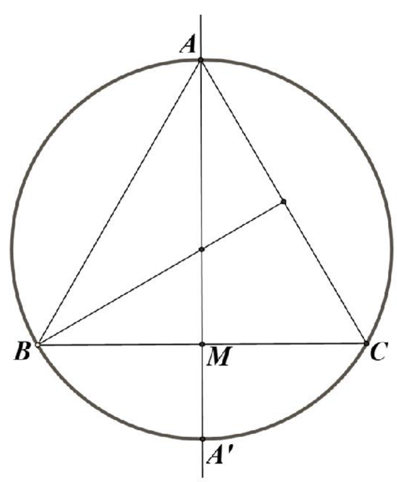
$V = V_{(T_1)} + V_{(T_2)} + V_{(N)} = \pi.r^2.h_1 + \pi.(2r)^2.h_2 + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n$

$\Leftrightarrow 31 = \pi.r^2.\frac{1}{4}h_n + \pi.4r^2.\frac{1}{2}h_n + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n$

$\Leftrightarrow 31 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) + 6\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n \Leftrightarrow 31 = \frac{31}{4}\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n = 4$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)} = 4(cm^3)$.

Câu 28. Cho tam giác đều ABC có đỉnh $A(5;5)$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2.



Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

<u>A</u>. $\frac{9}{32}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{27}{32}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh của tam giác ABC là a.

Khi đó khối nón tạo thành có bán kính đáy là: $r = BM = \dfrac{a}{2}$; chiều cao $h = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối nón là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}.\pi.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$

Khối cầu tạo thành có bán kính là $R = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}.\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$

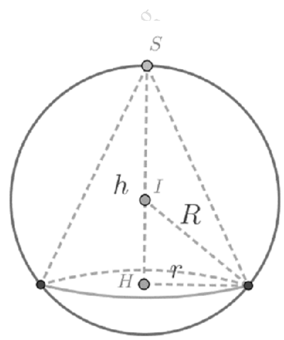
Suy ra: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24} : \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27} = \dfrac{9}{32}$.

Câu 29. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h(h > R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h = \sqrt{2}R$ **B.** $h = \dfrac{4R}{3}$ **C.** $h = \dfrac{3R}{2}$ **D.** $h = \sqrt{3}R$

Lời giải

Chọn B



Cách 1:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

Ta có $IH = h - R$ và $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h-R)^2 = 2Rh - h^2$.

Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = \dfrac{\pi}{3}h\left(2Rh - h^2\right)$.

Ta có $h \cdot h \cdot (4R - 2h) \le \left(\dfrac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{4R}{3}\right)^3 \Rightarrow h^2(2R - h) \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4R}{3}\right)^3$.

Do đó V lớn nhất khi $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \dfrac{4R}{3}$.

Cách 2:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

Ta có $IH = h - R$ và $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h-R)^2 = 2Rh - h^2$.

Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = \dfrac{\pi}{3}h\left(2Rh - h^2\right) = \dfrac{\pi}{3}.\left(2h^2R - h^3\right)$

Xét hàm $f\left(h\right)=-h^3+2h^2R,\ h\in\left(R,2R\right)$, có $f'\left(h\right)=-3h^2+4hR$.

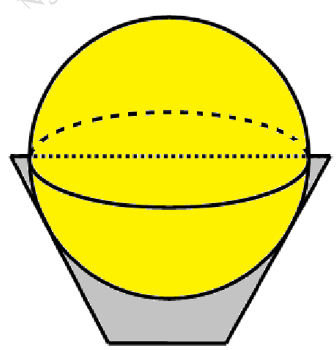
$f'\left(h\right)=0\Leftrightarrow -3h^2+4hR=0\Leftrightarrow h=0$ hoặc $h=\dfrac{4R}{3}$.

Bảng biến thiên

h	R		$\dfrac{4R}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		$\nearrow$	$\dfrac{32R^3}{27}$	$\searrow$	

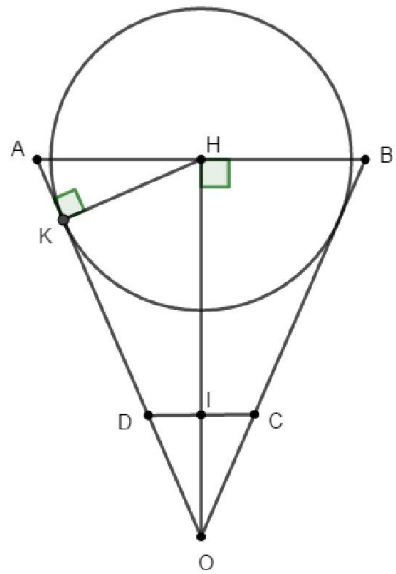
$\max f\left(h\right)=\dfrac{32}{27}R^3$, tại $h=\dfrac{4R}{3}$. Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi $\left(N\right)$ có giá trị lớn nhất là $V=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{32}{27}R^3=\dfrac{32}{81}\pi R^3$ khi $h=\dfrac{4R}{3}$.

Câu 30. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\dfrac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi$ (dm^3). Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?



A. $\dfrac{46}{5}\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **B.** $18\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **C.** $\dfrac{46}{3}\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **D.** 18π (dm^3).

Lời giải



Gọi R là bán kính của khối cầu. Khi đó thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của một nửa khối cầu nên $\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi R^3 = 54\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R = 3\sqrt{3}$.

Do đó chiều cao của thùng nước là $h = \frac{2}{3}.2R = 4\sqrt{3}$.

Cắt thùng nước bởi thiết diện qua trục ta được hình thang cân $ABCD$ với $AB = 3CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC thì tam giác OAB cân tại O.

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB và I là giao điểm của OH và CD $\to I$ là trung điểm của DC nên $DI = \frac{1}{3}AH$.

Ta có $\frac{OI}{OH} = \frac{DI}{AH} = \frac{1}{3} \to OH = \frac{3}{2}HI = 6\sqrt{3}$

Gọi K là hình chiếu của H trên OA thì $HK = R = 3\sqrt{3}$

Tam giác OHA vuông tại H có đường cao HK nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{AH^2} \to \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HO^2} = \frac{1}{36} \to AH = 6 \to DI = 2$$

Thể tích thùng đầy nước là $\frac{h\pi\left(AH^2 + DI^2 + AH.DI\right)}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi\left(6^2 + 2^2 + 6.2\right)}{3} = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3}$

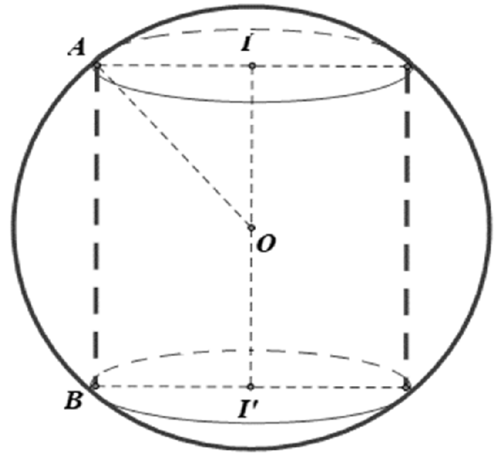
Do đó thể tích nước còn lại là $\frac{208\sqrt{3}\pi}{3} - 54\sqrt{3}\pi = \frac{46\sqrt{3}\pi}{3}\left(dm^3\right)$.

Câu 31. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Gọi O là tâm hình cầu bán kính R và I, I' lần lượt là tâm hai hình tròn đáy của khối trụ với AB là một đường cao của khối trụ như hình vẽ.



Dễ thấy O là trung điểm II'.

Đặt x là chiều cao của khối trụ ta có $0 < x < 2R$ và $AB = II' = x$

Tam giác OAI có $AI = \sqrt{AO^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$.

Thể tích khối trụ là $f(x) = \pi IA^2.AB = \pi\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)x = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{4}\right)$.

$f'(x) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}x^2\right)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \\ x = -\frac{2R\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$ với $x > 0$ nên $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \in (0;2R)$

Ta có bảng biến thiên:

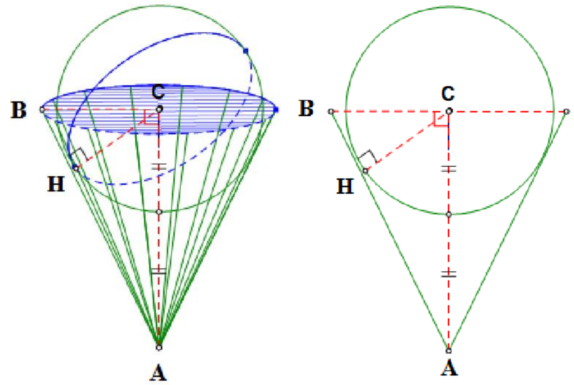
x	0		$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$		$2R$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Câu 32. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\ dm^3$ .Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi\ dm^3$. **B.** $6\pi\ dm^3$. **C.** $9\pi\ dm^3$. **D.** $24\pi\ dm^3$.

Lời giải



Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.

Gọi bán kính khối cầu là R, lúc đó: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = 27$.

Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC = 2R$ (Vì khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước)

Trong tam giác ABC có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow CB^2 = \frac{4R^2}{3}$.

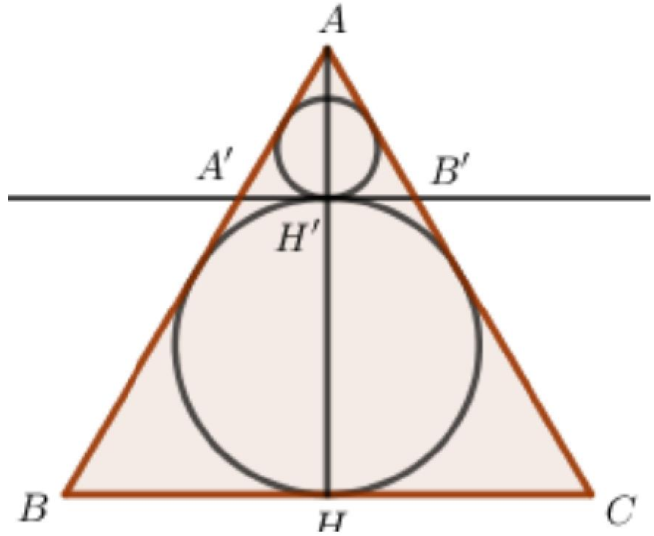
Thể tích khối nón: $V_n = \frac{1}{3}\pi.CB^2.AC = \frac{1}{3}\pi.\frac{4R^2}{3}.2R = \frac{8\pi}{9}.R^3 = 24\pi\ dm^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi - 18\pi = 6\pi\ dm^3$

Câu 33. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nối nón. Gọi (S_2) là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1 ; S_3 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của khối nón và với S_2 ;… ; S_n là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1}. Gọi $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, V_n$ lần lượt là thể tích của khối cầu $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị của biểu thức $T = \lim_{n\to+\infty} \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{V}$

A. $T = \frac{3}{5}$. **B.** $T = \frac{6}{13}$. **C.** $T = \frac{7}{9}$. **D.** $T = \frac{1}{2}$.

Lời giải



Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh l. Do đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cũng chính là bán kính mặt cầu nội tiếp chọp là $r_1 = \frac{1}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

Áp dụng định lí Ta-Let ta có:

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AH - HH'}{AH} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{l\sqrt{3}}{3}}{\frac{l\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AA' = \frac{1}{3}$$

Tương tự ta tìm được $r_2 = \frac{l}{3}.\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{18} = \frac{r_1}{3}$.

Tiếp tục như vậy ta có $r_3 = \frac{1}{3}r_2$, $\mathrm{r}_4 = \frac{1}{3}\mathrm{r}_3,...,r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_3 = \frac{1}{\left(3^3\right)^2}\mathrm{V}_1,...,V_n = \frac{4}{3}\pi r_{n-1}^3 = \frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}V_1$

Do đó $T = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_1 + V_2 + ... + V_n}{V} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_1\left[1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{\left(3^3\right)^2} + ... + \frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}\right]}{V} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_1.S}{V}$

Đặt $S = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{\left(3^3\right)^2} + ... + \frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}$

Đây là tổng của CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{3^3}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26}$

$$\Rightarrow V_1 + V_2 + ... + V_n = \frac{27}{26}V_1 = \frac{27}{26}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}$$

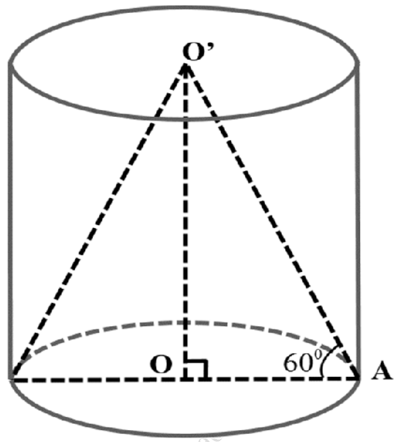
Vậy $T=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3}{\dfrac{\sqrt{3}}{24}\pi l^3}=\dfrac{6}{13}$

Câu 34. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính bằng a. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn (O). Biết góc giữa đường sinh của hình nón với mặt đáy bằng 60^0, tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi A là điểm thuộc đường tròn (O).

Góc giữa $O'A$ và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{O'AO}$. Theo giả thiết ta có $\widehat{O'AO}=60°$.

Xét tam giác $O'OA$ vuông tại O, ta có:

$\tan\widehat{O'AO}=\dfrac{O'O}{OA}\Rightarrow O'O=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

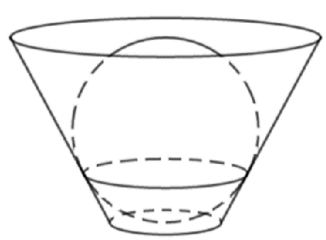
$+\ \cos\widehat{O'AO}=\dfrac{OA}{O'A}\Rightarrow O'A=\dfrac{a}{\cos 60°}=2a$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq(T)}=2\pi.OA.O'O=2\pi.a.a\sqrt{3}=2\pi a^2\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq(N)}=\pi.OA.O'A=\pi.a.2a=2\pi a^2$

$\Rightarrow\dfrac{S_{xq(T)}}{S_{xq(N)}}=\dfrac{2\pi a^2\sqrt{3}}{2\pi a^2}=\sqrt{3}$.

Câu 35. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một phần ba lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).



A. $\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\sqrt{21}$. **D.** $\dfrac{21+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

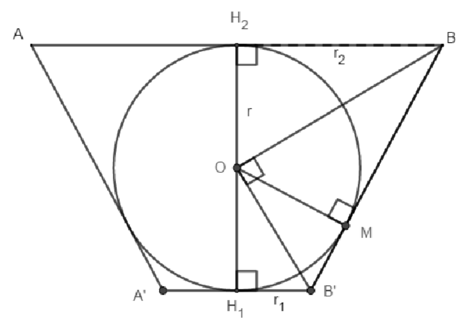
Gọi bán kính viên bi là r; bán kính đáy cốc, miệng cốc lần lượt là r_1, r_2, $(r_1 < r_2)$. Theo giả thiết thì chiều cao của cốc là $h = 2r$.

Thể tích viên bi là $V_B = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Thể tích cốc là $V_C = \dfrac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2\right) = \dfrac{2}{3}\pi r\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2\right)$.

Theo giả thiết thì $V_B = \dfrac{1}{3}V_C \Leftrightarrow 6r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2$ (1).

Mặt cắt chứa trục của cốc là hình thang cân $ABB'A'$. Đường tròn tâm $(O;r)$ là đường tròn lớn của viên bi, đồng thời là đường tròn nội tiếp hình thang $ABB'A'$, tiếp xúc với $A'B', AB$ lần lượt tại H_1, H_2 và tiếp xúc với BB' tại M.



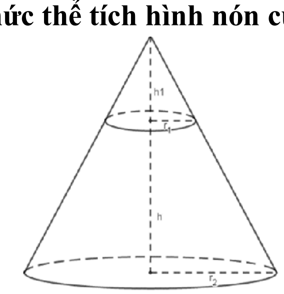
Dễ thấy tam giác BOB' vuông tại O.

Ta có $OM^2 = MB.MB' \Leftrightarrow r^2 = r_1r_2$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được $6r_1r_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 - 5\dfrac{r_2}{r_1} + 1 = 0$.

Giải phương trình với điều kiện $\dfrac{r_2}{r_1} > 1$ ta được $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Chú ý: Chứng minh công thức thể tích hình nón cụt.



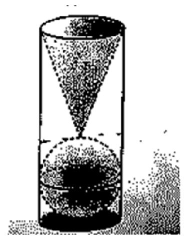
Ta có: $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{h_1}{h_1 + h} \Leftrightarrow h_1 = \dfrac{r_1h}{r_2 - r_1}$.

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2.h_1 = \dfrac{1}{3}\pi h\dfrac{r_1^3}{r_2 - r_1}$.

$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r_2^2.(h_1 + h) = \dfrac{1}{3}\pi h\dfrac{r_2^3}{r_2 - r_1}$.

$V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi h \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$.

Câu 36. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu(bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)



A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và là chiều cao của khối trụ

$h = 6R$

Thể tích của khối trụ $V_T = \pi 6R^3$.

Khối cầu bên trong khối trụ có bán kính R nên khối cầu có thể tích $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Khối nón bên trong khối trụ có bán kính R và chiều cao $h = 4R$ nên khối nón có thể tích $V_N = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích lượng nước còn lại bên trong khối trụ

$V = V_T - \left(V_C + V_N\right) = 6\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{10}{3}\pi R^3$.

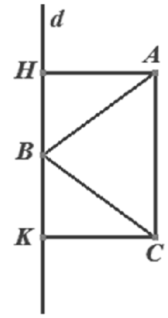
Vậy $\frac{V}{V_T} = \frac{5}{9}$.

Câu 37. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = BC = a\sqrt{2}$. Khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng đi qua B và song song với AC ta thu được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** πa^3.

Lời giải

Chọn C

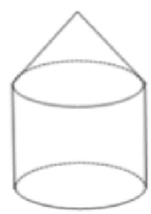


Gọi d là đường thẳng đi qua B và song song với AC ; H,K lần lượt là hình chiếu của A,C trên d . Ta có $AC=2a,\ HA=KC=a$.

Khối tròn xoay cần nhận được khi quay tam giác ABC quanh d chính là khối tròn xoay có được bằng cách từ khối trụ với hai đáy là hình tròn (H,HA) và (K,KC) bỏ đi 2 khối nón chung đỉnh B với đáy lần lượt là (H,HA) và (K,KC).

Do đó $V=\pi.HA^2.AC-2.\frac{1}{3}\pi.HA^2.\frac{AC}{2}=2\pi a^3-\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 38. **(Sở Yên Bái - 2020)** Một khối đồ chơi gồm một khối trụ và một khối nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh khối trụ bằng độ dài đường sinh khối nón và bằng đường kính khối trụ, khối nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$, thể tích khối trụ gần với số nào nhất trong các số sau



A. $38,8cm^3$. **B.** $38,2cm^3$. **C.** $36,5cm^3$. **D.** $40,5cm^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $l;r$ lần lượt là độ dài đường sinh và bán kính đáy khối trụ.

Khi đó ta có: $l=2r$.

Suy ra thể tích khối trụ là $V_t=\pi r^2 l=2\pi r^3$.

Gọi $h_n;l_n$ lần lượt là chiều cao và đường sinh của khối nón.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} l_n=l \\ h_n=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}r \end{cases}$.

Khi đó thể tích khối nón là $V_n=\frac{1}{3}\pi r^2 h_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$.

Do thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$ nên

$V_t+V_n=2\pi r^3+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi r^3=50\Rightarrow \pi r^3=\frac{150}{6+\sqrt{3}}$.

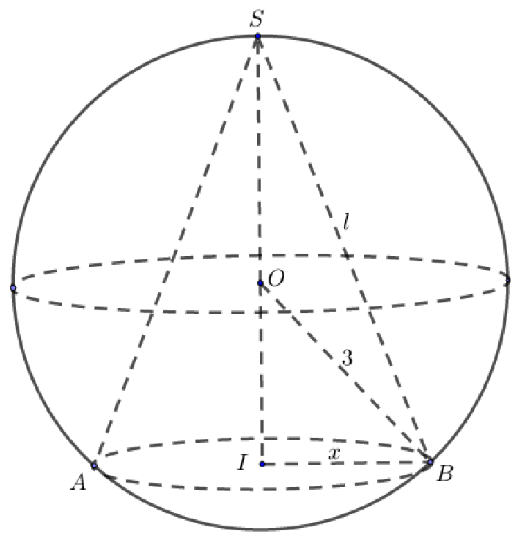
Khi đó thể tích khối trụ là $V_t=\pi r^2 l=2\pi r^3\approx 38,8cm^3$.

Câu 39. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Trong tất cả các hình nón nội tiếp trong hình cầu có thể tích bằng 36π, bán kính r của hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất là

A. $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{3}{2}$. **C.** $r=2\sqrt{2}$. **D.** $r=3$.

Lời giải

Chọn C



Vì hình cầu có thể tích là 36π nên bán kính hình cầu là $R=3$.

Ta có diện tích xung quanh của hình nón là $S=\pi rl$.

Để hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất thì đỉnh của hình nón và đáy của hình nón phải ở hai phía so với đường tròn kính của hình cầu.

Đặt bán kính đáy hình nón là $r=x$ với $0<x\le 3$ và tâm của đáy hình nón là I.

Ta có tam giác OIB vuông tại I nên $OI=\sqrt{9-x^2}$.

Chiều cao của hình nón là $h=3+\sqrt{9-x^2}$.

Độ dài đường sinh của hình nón là $l=\sqrt{\left(3+\sqrt{9-x^2}\right)^2+x^2}=\sqrt{18+6\sqrt{9-x^2}}$.

Suy ra diện tích xung quanh của hình nón là $S=\pi x\sqrt{18+6\sqrt{9-x^2}}$.

Đặt $P=x\sqrt{18+6\sqrt{9-x^2}}$ nên $P^2=x^2\left(18+6\sqrt{9-x^2}\right)$ và đặt $\sqrt{9-x^2}=t$, $(0\le t<3)$.

Khi đó $P^2=\left(9-t^2\right)(18+6t)$ với $0\le t<3$.

Xét hàm số $y=\left(9-t^2\right)(18+6t)\Leftrightarrow y=-6t^3-18t^2+54t+162$ có

$$y'=-18t^2-36t+54=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3(L)\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $y=\left(9-t^2\right)(18+6t)$ trên $0\le t<3$.

t	0		1		3
y'		+	0	−	
y	162	↗	192	↘	0

Từ bảng biến thiên, P^2 lớn nhất khi và chỉ khi $t=1$ suy ra P lớn nhất khi và chỉ khi $t=1$.

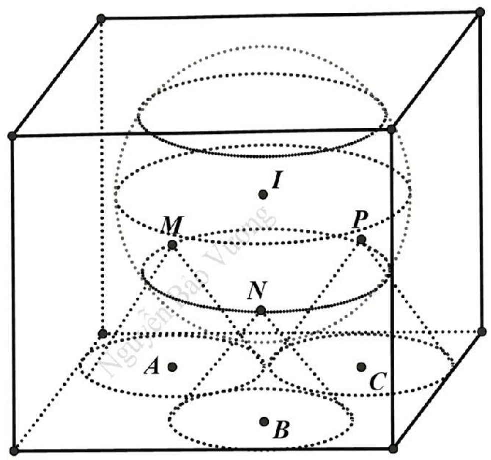
Khi đó $S=\pi x\sqrt{18+6\sqrt{9-x^2}}$ lớn nhất khi $\sqrt{9-x^2}=1 \Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$ và diện tích xung quanh của mặt cầu khi đó là $S=8\sqrt{3}\pi$.

Câu 40. **(Sở Ninh Bình 2020)** Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón đôi một tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và tổng lượng nước trào ra là $\frac{337\pi}{24}$ (lít). Thể tích nước ban đầu ở trong bể thuộc khoảng nào dưới đây (đơn vị tính: lít)?

A. $(150\,;151)$. **B.** $(151\,;152)$. **C.** $(139\,;140)$. **D.** $(138\,;139)$.

Lời giải

Chọn B



+) Gọi r là bán kính đáy của hình nón suy ra chiều cao nón là $h=r$ (do thiết diện là tam giác vuông cân).

+) Chiều dài của khối hộp là $b=4r$; bán kính của khối cầu là $R=\frac{4}{3}r$.

+) Thể tích nước bị tràn là $3.\frac{1}{3}\pi r^2h+\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{337\pi}{24} \Leftrightarrow \pi r^3+\frac{4}{3}\pi\frac{64}{27}r^3=\frac{337\pi}{24} \Rightarrow r=\frac{3}{2}(\text{dm})$.

+) Gọi A,B,C là tâm của 3 đáy của khối nón suy ra ΔABC đều cạnh $2r \Rightarrow R_{ABC}=\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

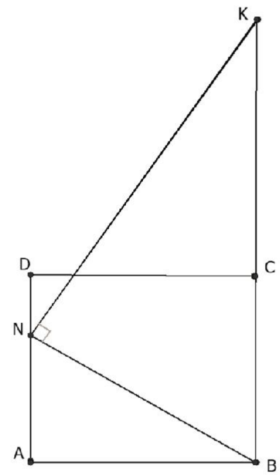
+) Chiều rộng khối hộp là $a=2r+\frac{2r\sqrt{3}}{2}=r(2+\sqrt{3})$ (dm).

+) Ba đỉnh nón chạm mặt cầu tại các điểm $M,N,P \Rightarrow \Delta MNP=\Delta ABC$

$d(I;(MNP))=\sqrt{R^2-R^2_{(ABC)}}$ (với I là tâm mặt cầu), do đó $d(I;(MNP))=\frac{2}{3}r$. Suy ra chiều cao của khối trụ là $c=R+\frac{2}{3}r+r=3r$.

+) Thể tích nước ban đầu là $abc=12(2+\sqrt{3})r^3=12(2+\sqrt{3}).\frac{27}{8}\approx 151{,}1\left(\text{dm}^3\right)=151{,}1$ (lít).

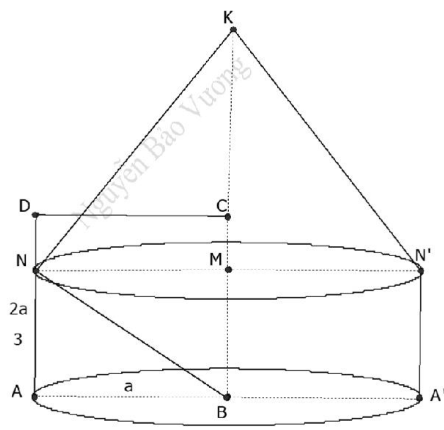
Câu 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN=2DN$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là



A. $V=\frac{7}{6}\pi a^3$. **B.** $V=\frac{9}{14}\pi a^3$. **C.** $V=\frac{6}{7}\pi a^3$. **D.** $V=\frac{14}{9}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Dựng đường thẳng qua N vuông góc với BC cắt BC tại M.
Lấy A' đối xứng với A qua B, N' đối xứng với N qua M.
Khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK gồm hai khối là khối nón có đường cao là MK, bán kính đáy là MN và khối trụ có đường cao là MB, bán kính đáy là MN.

Ta có $AN=\frac{2a}{3}$, $AB=a$.

Xét tam giác ABN vuông tại A: $NB=\sqrt{AN^2+AB^2}=\frac{a\sqrt{13}}{3}$.

Xét tam giác BNK vuông tại N

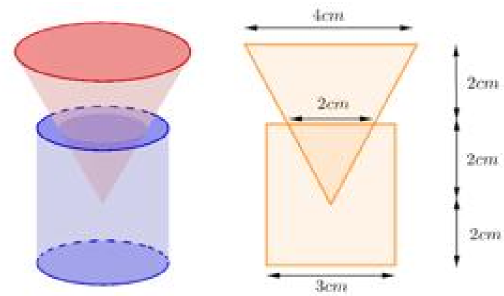
$$\frac{1}{NK^2}=\frac{1}{MN^2}-\frac{1}{NB^2}=\frac{4}{13}\Rightarrow NK=\frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$BK=\sqrt{NK^2+BN^2}=\frac{13a}{6}.$$

Lại có $MB = AN = \frac{2a}{3}$, $MK = BK - MB = \frac{3a}{2}$.

$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi.MN^2.MK + \pi.MN^2.MB = \frac{7\pi a^3}{6}$.

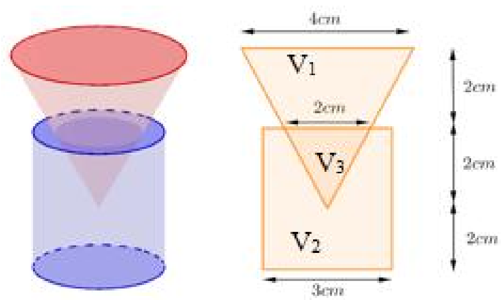
Câu 42. Cho một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ sau. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).



A. $V_{(H)} = 13\pi$. **B.** $V_{(H)} = 23\pi$. **C.** $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$. **D.** $V_{(H)} = 17\pi$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

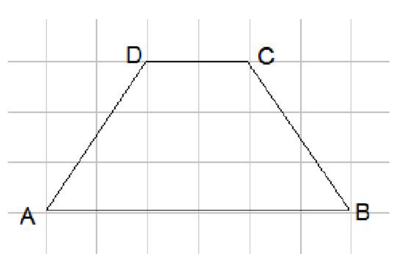
Thể tích của hình nón lớn là: $V_1 = \frac{1}{3}\pi.2^2.4 = \frac{16}{3}\pi$

Thể tích của hình trụ là $V_2 = \pi.\left(\frac{3}{2}\right)^2.4 = 9\pi$

Thể tích của hình nón nhỏ là $V_3 = \frac{1}{3}\pi.1^2.2 = \frac{2}{3}\pi$

Thể tich của khối (H) là $V = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{16}{3}\pi + 9\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{41}{3}\pi$.

Câu 43. Cho hình thang cân $ABCD$, $AB // CD$, $AB = 6\ cm$, $CD = 2\ cm$, $AD = BC = \sqrt{13}\ cm$, Quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là

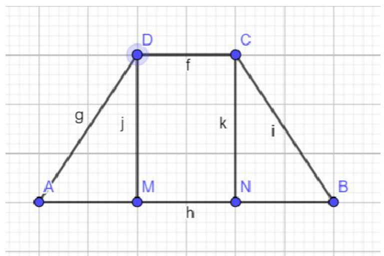


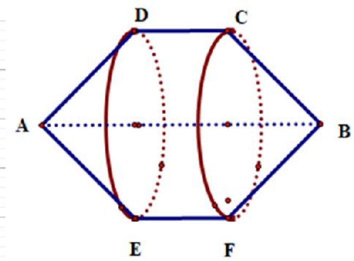
A. $18\pi(cm^3)$. **B.** $30\pi(cm^3)$. **C.** $24\pi(cm^3)$. **D.** $12\pi(cm^3)$.

Lời giải

Chọn B

Khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay được ghép bởi 2 khối nón có thể tích bằng nhau và 1 khối trụ.





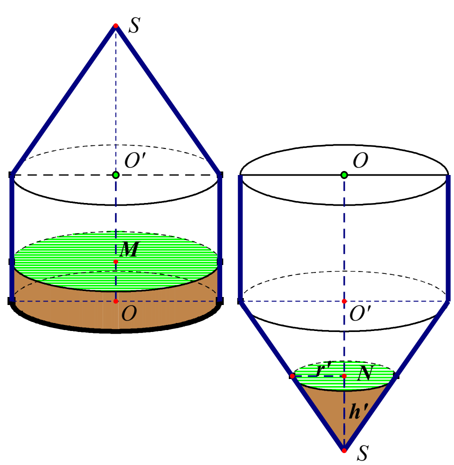
Khối nón có được do ΔADM và ΔCBN quay quanh đường thẳng AB có cùng thể tích, với chiều cao $AM = 2(cm)$, bán kính đáy $DM = 3(cm) \Rightarrow V_{non} = \frac{1}{3}.2.\pi.3^2\ (cm^3)$.

Khối trụ có được do hình chữ nhật $DCMN$ quay quanh đường thẳng AB, với chiều cao $MN = 2(cm)$, bán kính đáy $DM = 3(cm) \Rightarrow V_{tru} = 2.\pi.3^2\ (cm^3)$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tính là: $V = 2V_{non} + V_{tru} = 2.\frac{1}{3}.2.\pi.3^2 + 2.\pi.3^2 = 30\pi\ (cm^3)$

Câu 44. **(Chuyên Long An-2019)** Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình bên. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng h. Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Tính độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo h.

A. $\frac{h}{8}$. **B.** $\frac{3h}{8}$. **C.** $\frac{h}{2}$. **D.** $\frac{h}{4}$.



Lời giải

Chọn C

Thể tích chất lỏng $V = \pi r^2.\frac{1}{24}h = \frac{1}{24}\pi r^2 h$.

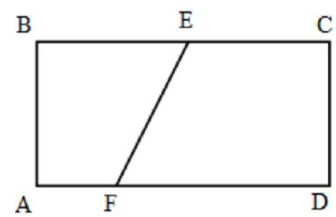
Khi lật ngược bình, thể tích phần hình nón chứa chất lỏng là $V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$.

Mà $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \Rightarrow r' = \frac{h'}{h}.r$. Do đó $V' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h'}{h}.r\right)^2 h' = \frac{1}{3}\pi r^2.\frac{h'^3}{h^2}$.

Theo bài ra, $V' = V \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2.\frac{h'^3}{h^2} = \frac{1}{24}\pi r^2 h \Leftrightarrow h'^3 = \frac{1}{8}h^3 \Leftrightarrow h' = \frac{h}{2}$.

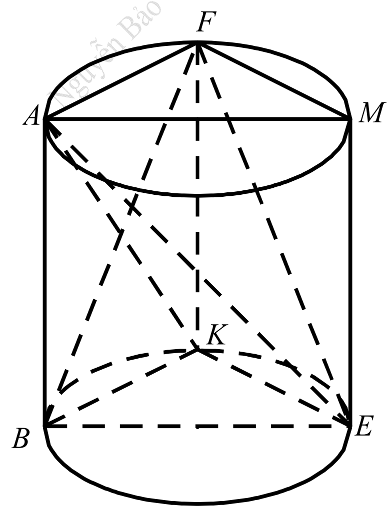
Câu 45. Có một hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a$, $AD = 4a$. Người ta đánh dấu E là trung điểm BC và $F \in AD$ sao cho $AF = a$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh DC trùng cạnh AB tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ABEF$ với các đỉnh A, B, E, F nằm trên hình trụ vừa tạo thành.

A. $\frac{16a^3}{3\pi^2}$. **B.** $\frac{8a^3}{3\pi^2}$. **C.** $\frac{a^3}{3\pi}$. **D.** $\frac{8a^3}{\pi^2}$.



Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của cạnh AD, K là trung điểm của BE. Khi cuốn tấm bìa theo yêu cầu bài toán, ta được một hình trụ có đường kính đáy là AM; chiều cao là AB; F, K lần lượt là các điểm chính giữa các cung AM và BE và khối $AMF.BKE$ là khối lăng trụ đứng (minh họa ở hình trên).

Đường tròn đáy có chu vi bằng $AD = 4a$, suy ra bán kính đáy $r = \frac{2a}{\pi}$.

Ta có $V_{AFM.BKE} = AB.S_{\Delta BKE} = AB.\frac{1}{2}r.2r = 2a.\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 = \frac{8a^3}{\pi^2}$.

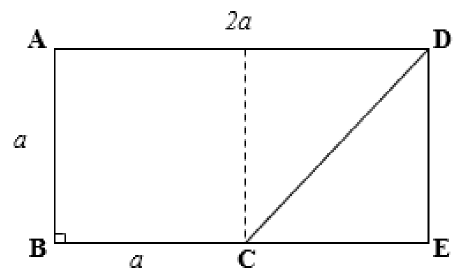
$V_{ABEF} = V_{EBFK} = \frac{1}{3}V_{AFM.BKE} = \frac{8a^3}{3\pi^2}$

Câu 46. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tình thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

A. $V = \pi a^3$. **B.** $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{7\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $CE // AD$ và $CE = AB = BC = a$

$\Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật.

Khi quay hình chữ nhật $ABED$ quanh trục BC ta được hình trụ

$V_t = \pi AB^2.AD = \pi.a^2.2a = 2\pi a^3$.

Khi quay ΔCED quanh trục EC (BC) ta được hình nón có:

$V_n = \frac{1}{3}\pi DE^2.CE = \frac{1}{3}\pi.a^2.a = \frac{1}{3}\pi a^3$.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo ra khi quay $ABCD$ quanh trục BC là:

$V = V_t - V_n = 2\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^3 = \frac{5}{3}\pi a^3$.

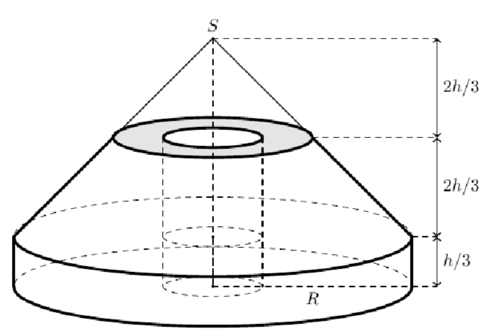
Vậy thể tích khối tròn xoay được tạo thành là $V = \frac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 47. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1,5\,\text{m}$ gồm:

- Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1\,\text{m}$ và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$;

- Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

- Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*



Thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)* bằng

A. $2,815\,\text{m}^3$. **B.** $2,814\,\text{m}^3$. **C.** $3,403\,\text{m}^3$. **D.** $3,109\,\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích hình trụ bán kính đáy R và có chiều cao bằng $\frac{h}{3}$:

$$V_1 = \pi R^2.\frac{h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Thể tích hình nón cụt bán kính đáy lớn R, bán kính đáy bé $\frac{R}{2}$ và có chiều cao bằng $\frac{2h}{3}$:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2.\frac{4h}{3} - \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{4}.\frac{2h}{3} = \frac{7}{18}\pi R^2 h.$$

Thể tích hình trụ bán kính đáy $\frac{R}{4}$ và có chiều cao bằng h *(phần rỗng ở giữa)*:

$$V_3 = \pi\frac{R^2}{16}.h = \frac{1}{16}\pi R^2 h.$$

Thể tích của khối bê tông bằng:

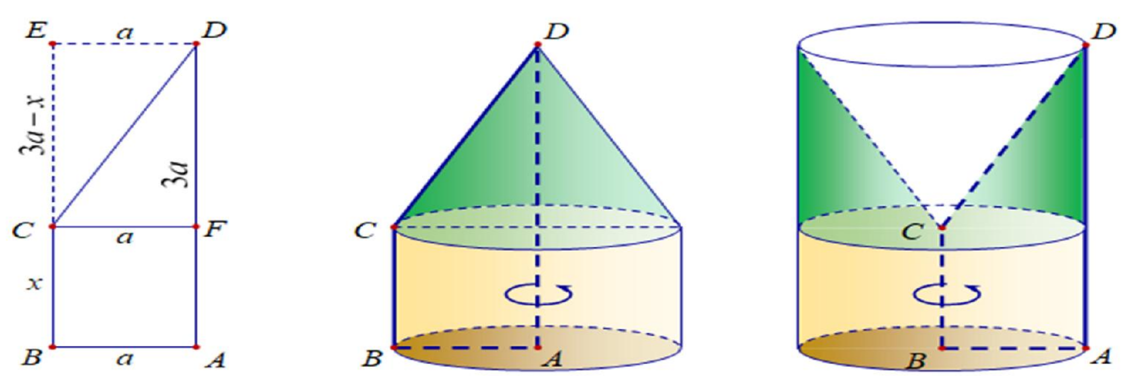
$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi R^2 h.\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{18} - \frac{1}{16}\right) = \frac{95}{144}\pi R^2.h \approx 3,109\,\text{m}^3.$$

Câu 48. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$ và $BC = x$ với $0 < x < 3a$. Gọi V_1, V_2, lần lượt là thể tích các khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ (kể cả các điểm trong) quanh đường thẳng BC và AD. Tìm x để $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

A. $x = a$. **B.** $x = 2a$. **C.** $x = 3a$. **D.** $x = 4a$.

Lời giải

Chọn A.



Dựng các điểm E, F để có các hình chữ nhật $ABED$ và $ABCF$ như hình vẽ.

- Khi quay hình thang $ABCD$ (kể các điểm trong) quanh đường thẳng BC ta được khối tròn xoay có thể tích là

$V_1 = V_3 - V_4 = 3\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi(3a - x)a^2 = 2\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi x a^2 = \frac{1}{3}\pi a^2(6a + x).$

Trong đó, V_3 là thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng a, chiều cao bằng $3a$; V_4 là thể tích khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng a, chiều cao bằng $3a-x$.

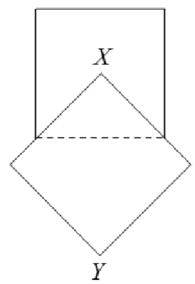
- Khi quay hình thang $ABCD$ (kể các điểm trong) quanh đường thẳng AD ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V_2=V_5+V_4=\pi a^2x+\frac{1}{3}\pi(3a-x)a^2=\pi a^3+\frac{2}{3}\pi xa^2=\frac{1}{3}\pi a^2(3a+2x).$$

Trong đó, V_5 là thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng a, chiều cao bằng x.

Theo giả thiết ta có: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow\frac{6a+x}{3a+2x}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow x=a$.

Câu 49. **(Đề thử nghiệm 2017)** Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



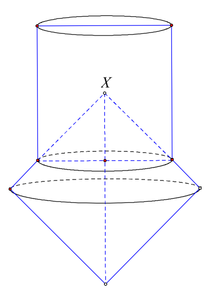
A. $V=\frac{125(1+\sqrt{2})\pi}{6}$. **B.** $V=\frac{125(5+2\sqrt{2})\pi}{12}$.

C. $V=\frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}$. **D.** $V=\frac{125(2+\sqrt{2})\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

□ ***Cách 1:***



Khối tròn xoay gồm 3 phần:

Phần 1: khối trụ có chiều cao bằng 5, bán kính đáy bằng $\frac{5}{2}$ có thể tích $V_1=\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times 5=\frac{125\pi}{4}$

Phần 2: khối nón có chiều cao và bán kính đáy bằng $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ có thể tích

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$$

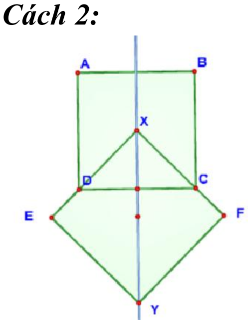
Phần 3: khối nón cụt có thể tích là

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \times \frac{5\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \times \left(\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5}{2} \right) = \frac{125\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{24}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay là

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{125\pi}{4} + \frac{125\pi\sqrt{2}}{12} + \frac{125\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{24} = \frac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}.$$

Cách 2:



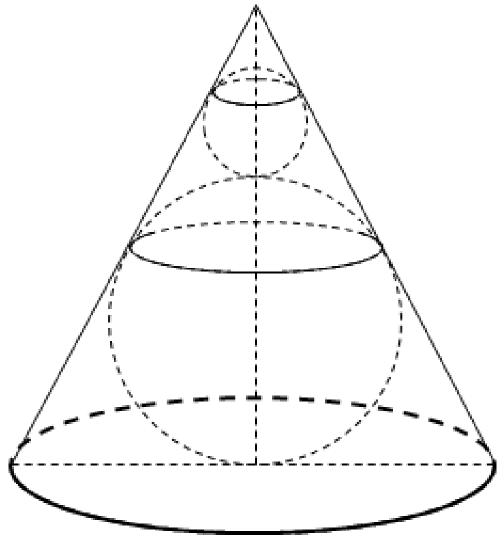
Thể tích hình trụ được tạo thành từ hình vuông $ABCD$ là: $V_T = \pi R^2 h = \frac{125\pi}{4}$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ hình vuông $XEYF$ là: $V_{2N} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ tam giác XDC là: $V_{N'} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi}{24}$

Thể tích cần tìm $V = V_T + V_{2N} - V_{N'} = 125\pi \frac{5+4\sqrt{2}}{24}$.

Câu 50. Người ta chế tạo một món đồ chơi cho tre em theo các công đoạn như sau: Trước hết chế tạo ra hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60°$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với mặt đáy của hình nón (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của hình nón bằng $9cm$.

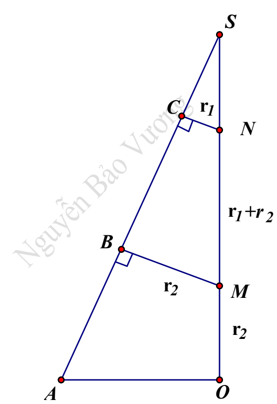


Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng

A. $\frac{112\pi}{3}$. **B.** $\frac{40\pi}{3}$. **C.** $\frac{38\pi}{3}$. **D.** $\frac{100\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N, r_1 là tâm và bán kính của mặt câu nhỏ. M, r_2 là tâm và bán kính của mặt cầu lớn.

Do các mặt cầu tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt nón nên tam giác SNC vuông tại C, tam giác SMB vuông tại B.

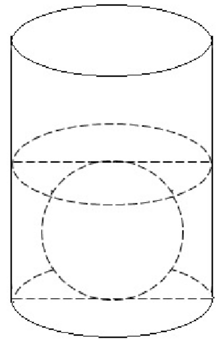
Hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60°$ nên $\widehat{ASO} = 30°$.

Ta có: $r_2 = SM.\sin 30° \Leftrightarrow r_2 = \frac{1}{2}(SO - r_2) \Leftrightarrow \frac{3}{2}r_2 = \frac{1}{2}SO \Leftrightarrow r_2 = \frac{1}{3}SO = 3$.

$r_1 = SN.\sin 30° \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{2}(SO - NO) \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{2}(SO - r_1 - 2r_2) \Leftrightarrow r_1 = \frac{SO - 2r_2}{3} = 1$

Vậy tổng thể tích hai khối cầu là $V = \frac{4}{3}(r_1^3 + r_2^3)\pi = \frac{112\pi}{3}$

Câu 51. Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm.



Bán kính của viên billiards đó bằng

A. 2,6 cm. **B.** 2,7 cm. **C.** 4,2 cm. **D.** 3,6 cm.

Lời giải

Chọn B

Gọi bán kính của viên billiards là r cm.

Thể tích của nước trong cốc là $V_1 = h_1.\pi R^2 = 4,5.\pi.(5,4)^2 = \frac{6561}{50}\pi$.

Thể tích khối trụ tạo bởi đáy cốc và mặt nước sau khi dâng là $V_2 = h_2.\pi R^2 = 2r.\pi.(5,4)^2 = \frac{1458}{25}\pi r$

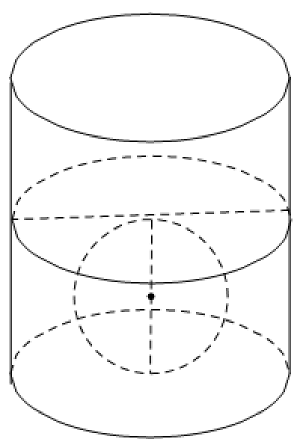
Thể tích khối cầu là $V_3 = \frac{4}{3}.\pi r^3$

Ta có:

$V_2 - V_1 = V_3 \Leftrightarrow \frac{1458}{25}\pi r - \frac{6561}{50}\pi = \frac{4}{3}.\pi r^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}r^3 - \frac{1458}{25}r + \frac{6561}{50} = 0 \Rightarrow r = -7,5 \vee r = 4,8 \vee r = 2,7.$

Kết hợp với điều kiện suy ra bán kính của viên billiards là 2,7 cm.

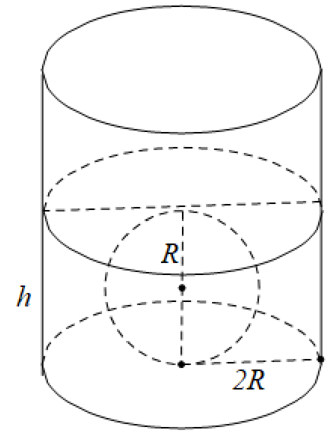
Câu 52. **(THPT Cẩm Bình -2019)** Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính $2,7\,cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ dưới). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,cm$. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là?



A. $5,4\,cm$. **B.** $5,7\,cm$. **C.** $5,6\,cm$. **D.** $5,5\,cm$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $R = 2,7\,cm$ là bán kính của viên bi. Ta có bán kính phần trong đáy cốc là $2R$.

Thể tích nước ban đầu là: $V_1 = \pi(2R)^2.4,5 = 18\pi R^2$.

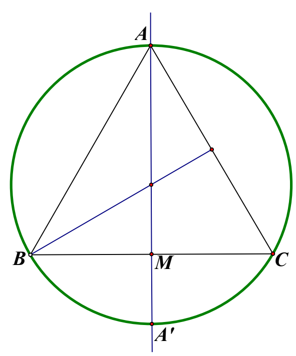
Thể tích viên bi là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích nước sau khi thả viên bi là: $V = V_1 + V_2 = 18\pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right)$.

Gọi h là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi vào.

Ta có: $V = 2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right) = \pi(2R)^2.h \Rightarrow h = \dfrac{2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right)}{\pi(2R)^2} = \dfrac{\left(9 + \frac{2}{3}R\right)}{2} = 5.4(cm)$.

Câu 53. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa đường tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



A. $\frac{9}{32}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{27}{32}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi a là độ dài các cạnh của tam giác ABC

Ta có chiều cao, bán kính của hình nón lần lượt là $h_1 = AM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_1 = \frac{a}{2}$. Do đó thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}\pi$.

Bán kính của hình cầu là $r_2 = AI = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ nên thể tích khối cầu là

$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

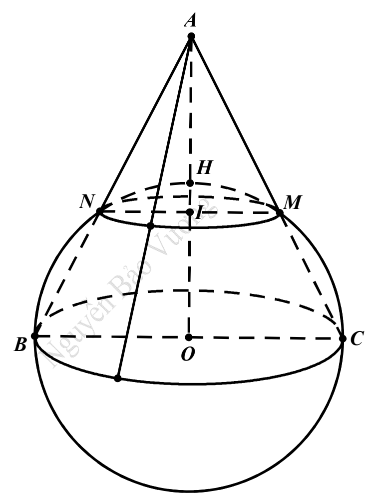
Từ đó suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{32}$.

Câu 54. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 2 và có một đường tròn lớn là (C). Khối nón (N) có đường tròn đáy là (C) và thiết diện qua trục là tam giác đều. Biết rằng phần khối nón (N) chứa trong mặt cầu (S) có thể tích bằng $\left(a+b\sqrt{3}\right)\pi$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $a+b$.

A. $a+b=\frac{14}{3}$. **B.** $a+b=\frac{13}{3}$. **C.** $a+b=\frac{11}{3}$. **D.** $a+b=\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi thể tích khối nón có bán kính đáy OC và đường cao OA là: V_1

Thể tích khối nón có bán kính đáy IM và đường cao IA là: V_2

Do ABC là tam giác đều nên M là trung điểm của AC và $OA = 2\sqrt{3}, IM = 1$

suy ra: $IA = IO = \sqrt{3}, IH = 2-\sqrt{3}$

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}.\pi.OC^2.OA = \frac{1}{3}.\pi.2^2.2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$, $V_2 = \frac{1}{3}.\pi.IM^2.IA = \frac{1}{3}.\pi.1^2.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

Thể tích chỏm cầu có chiều cao IH và bán kính IM là:

$$V_{Chom} = \pi.h^2(R-\frac{h}{3}) = \pi.IH^2(R-\frac{IH}{3}) = \pi.\left(2-\sqrt{3}\right)^2(2-\frac{2-\sqrt{3}}{3}) = \left(\frac{16-9\sqrt{3}}{3}\right)\pi$$

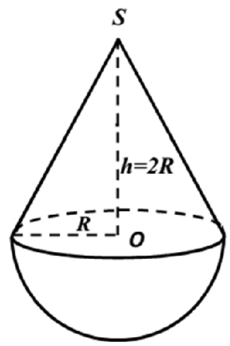
Suy ra thể tích phần khối nón (N) chứa trong mặt cầu (S) là:

$$V = V_1 - V_2 + V_{C\text{hom}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \left(\frac{16-9\sqrt{3}}{3}\right)\pi = \left(\frac{16}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi \Rightarrow a = \frac{16}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

Suy ra $a+b=\frac{14}{3}$

Câu 55. **(Bình Phước - 2019)** Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên.

Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi\, cm^3$. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng



A. $\pi\left(\sqrt{5}+3\right)\, cm^2$.   **B.** $9\pi\left(\sqrt{5}+2\right)\, cm^2$.

C. $9\pi\left(\sqrt{5}+3\right)\, cm^2$.   **D.** $\pi\left(\sqrt{5}+2\right)\, cm^2$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi.R^2.2R = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích nửa khối cầu là $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{2}{3}\pi.R^3$

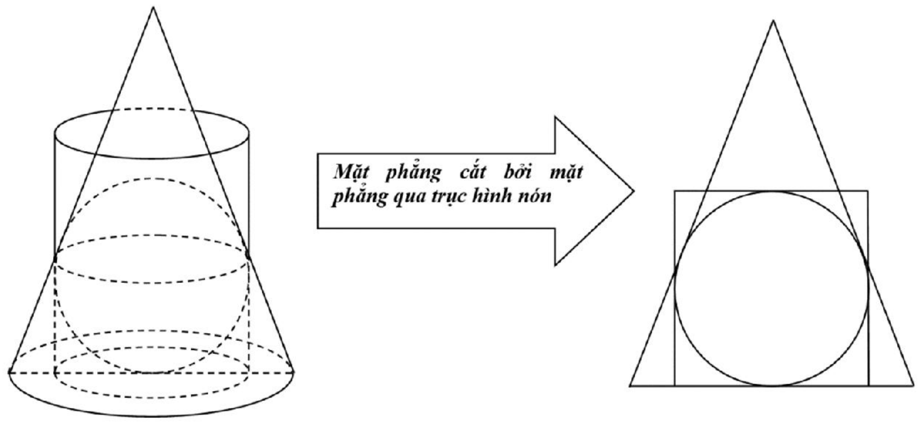
Thể tích của toàn bộ khối đồ vật là $V_1 + V_2 = 36\pi \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi.R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3$

Diện tích xung quanh của mặt nón là $S_1 = \pi R.\sqrt{4R^2+R^2} = \pi R^2\sqrt{5} = 9\sqrt{5}\pi$

Diện tích của nửa mặt cầu là $S_2 = \frac{1}{2}.4\pi R^2 = 18\pi$

Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật bằng $S_1 + S_2 = 9\pi\left(\sqrt{5}+2\right)\, cm^2$.

Câu 56. Cho một hình cầu nội tiếp hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là 2α, bán kính đấy là R và chiều cao là h. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ, biết rằng $V_1 \neq V_2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$. Giá trị của biểu thức $P = 48M + 25$ thuộc khoảng nào dưới đây? (*tham khảo hình vẽ*)



A. $(40;60)$. **B.** $(60;80)$. **C.** $(20;40)$. **D.** $(0;20)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi r bán kính kính hình cầu nội tiếp hình nón.

Ta có $Rh = r(l+R) \Rightarrow r = \dfrac{Rh}{R+\sqrt{R^2+h^2}}$.

Hình trụ ngoại tiếp hình cầu nên có đường kính đáy và chiều cao bằng đường kính hình cầu. Do đó nó có thể tích là $V_2 = \pi r^2.2r = 2\pi\left(\dfrac{Rh}{R+\sqrt{R^2+h^2}}\right)^3$.

Khi đó $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{2\pi\left(\dfrac{Rh}{R+\sqrt{R^2+h^2}}\right)^3}{\dfrac{1}{3}\pi R^2 h} = 6\dfrac{Rh^2}{\left(R+\sqrt{R^2+h^2}\right)^3} = \dfrac{6\left(\dfrac{R}{h}\right)}{\left(\dfrac{R}{h}+\sqrt{\left(\dfrac{R}{h}\right)^2+1}\right)^3} = \dfrac{6t}{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^3}$

Với $t = \dfrac{R}{h} > 0$, xét hàm số $y = \dfrac{t}{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^3}$ với $t > 0$, ta có

$y' = \dfrac{\sqrt{t^2+1}-3t}{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^3\sqrt{t^2+1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

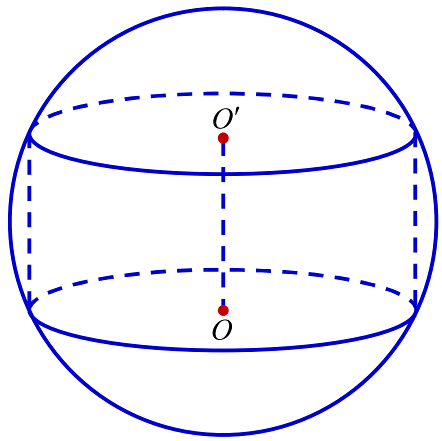
Ta có bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\dfrac{1}{8}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $M = \max\left\{\frac{V_2}{V_1}\right\} = 6\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$.

Do đó $P = 48M + 25 = 61$.

Câu 57. **(Hà Nội - 2018)** Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.



A. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. **C.** $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h = R\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$.

Thể tích của khối trụ: $V = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h \Leftrightarrow V = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$.

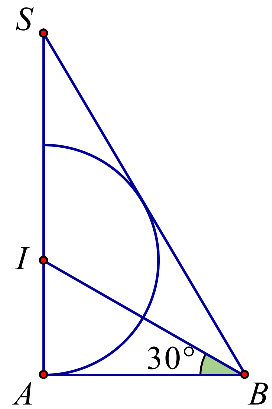
Ta có $V' = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2$, $\Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

h	0		$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	$V_{\max}$	↘	

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Câu 58. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho tam giác SAB vuông tại A, $\widehat{ABS} = 60°$, đường phân giác trong của $\widehat{ABS}$ cắt SA tại điểm I. Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho ΔSAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên các khối cầu và khối nón có thể tích tương ứng V_1, V_2. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $4V_1 = 9V_2$ **B.** $9V_1 = 4V_2$

C. $V_1 = 3V_2$ **D.** $2V_1 = 3V_2$

Lời giải

Đặt $AB = x \Rightarrow \begin{cases} IA = x\tan 30° \\ SA = x\tan 60° \end{cases}$. Chỗ này hình như cô Liên bôi xanh này:D

Khối cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi IA^3 = \frac{4}{3}\pi\left(x\tan 30°\right)^3$.

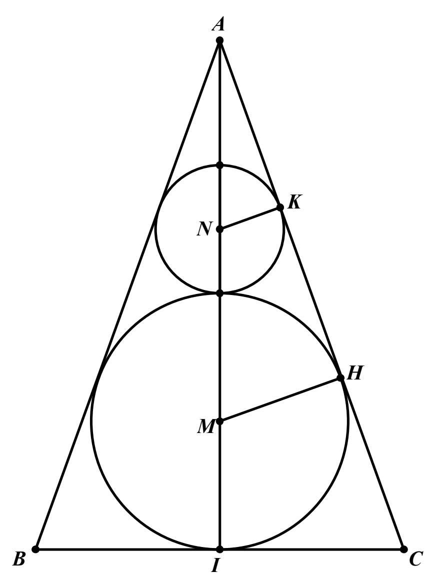
Khối nón $V_2 = \frac{1}{3}\pi AB^2 SA = \frac{1}{3}\pi x^2.\left(x\tan 60°\right)$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}$ hay $9V_1 = 4V_2$.

Câu 59. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là

A. $\sqrt{5}a$. **B.** $3a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $\frac{8a}{3}$.

Lời giải



Gọi thiết diện qua trục của hình nón là tam giác ABC với A là đỉnh của hình nón và BC là đường kính đáy của hình nón có tâm đáy là I.

Gọi M và N lần lượt là tâm của hai khối cầu có bán kính $2a$ và a. H và K lần lượt là điểm tiếp xúc của AC với hai đường tròn tâm M và N.

Ta có: NK là đường trung bình trong tam giác AMH suy ra N là trung điểm của AM.

$AM = 2MN = 2.3a = 6a \Rightarrow AI = 8a$.

Ta lại có hai tam giác vuông AIC và AHM đồng dạng

suy ra $\dfrac{IC}{HM} = \dfrac{AI}{AH} \Leftrightarrow IC = \dfrac{8a.2a}{\sqrt{36a^2 - 4a^2}} = 2a\sqrt{2}$.

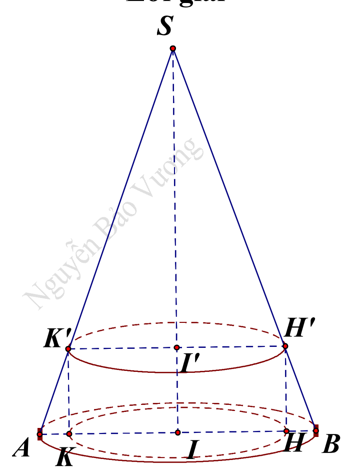
Vậy bán kính hình nón là $R = 2a\sqrt{2}$.

Câu 60. **(THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018)** Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r = 20(cm)$, chiều cao $h = 60(cm)$ và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) (hình trụ (T) có một đáy thuộc đáy hình nón và một đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón). Tính thể tích V của hình trụ (T) có diện tích xung quanh lớn nhất?

A. $V = 3000\pi(cm^3)$. **B.** $V = \dfrac{32000}{9}\pi(cm^3)$.

C. $V = 3600\pi(cm^3)$. **D.** $V = 4000\pi(cm^3)$.

Lời giải



Gọi độ dài bán kính hình trụ là $x\,cm\,(0 < x < 20)$, chiều cao của hình trụ là h'.

Ta có: $\dfrac{h'}{h} = \dfrac{SI'}{SI} = \dfrac{I'K'}{AI} \Leftrightarrow \dfrac{SI - II'}{SI} = \dfrac{I'K'}{AI} \Leftrightarrow \dfrac{h - h'}{h} = \dfrac{x}{r} \Leftrightarrow \dfrac{60 - h'}{60} = \dfrac{x}{20}$.

$\Leftrightarrow 60 - h' = 3x \Leftrightarrow h' = 60 - 3x$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$S = 2\pi x.h' = 2\pi x(60 - 3x)\ 2\pi\left(60x - 3x^2\right) = 2\pi\left[100 - 3(x - 10)^2\right] \le 200\pi$.

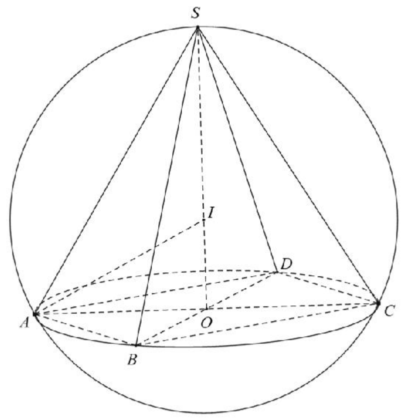
Diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất khi $x = 10$.

Khi đó thể tích khối trụ là: $V = \pi x^2.h' = \pi.10^2.30 = 3000\pi$.

Câu 61. **(Phan Dăng Lưu - Huế - 2018)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu có bán kính bằng 9. Tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $576\sqrt{2}$. **B.** 576. **C.** $144\sqrt{2}$. **D.** 144.

Lời giải



Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và bán kính $R=9$.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $\left(0<a\le 9\sqrt{2}\right)$

Ta có $OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow OI=\sqrt{IA^2-OA^2}=\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Mặt khác ta lại có $SO=SI+IO=9+\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}a^2\left(9+\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}\right)=3a^2+\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Đặt $a^2=t$, do $0<a\le 9\sqrt{2}$ nên $0<t\le 162$

Xét hàm số $f(t)=3t+\dfrac{1}{3}t\left(9+\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}\right)$, với $0<t\le 162$ ta có $f'(t)=3+\dfrac{324-3t}{12\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}}$;

$$f'(t)=0\Leftrightarrow \sqrt{81-\frac{t}{2}}=\frac{t}{12}-9\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 108 \\ 81-\dfrac{t}{2}=\left(\dfrac{t}{12}-9\right)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 108 \\ \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=144 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow t=144.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0		144		162
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	↗		576	↘	

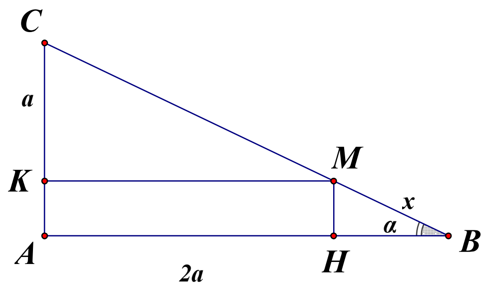
Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=576$ khi $t=144$ hay $a=12$.

Câu 62. (Toán Học Tuổi Trẻ - 2018) Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB=2AC$. M là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC. Gọi

V và V' tương ứng là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi tam giác ABC và hình chữ nhật $MHAK$ khi quay quanh trục AB. Tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ lớn nhất bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải



Giả sử $AC = a$, $AB = 2a$, $BM = x$. Ta có:

$BC = a\sqrt{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$MH = x\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{5}}$, $HB = x\cos\alpha = \dfrac{2x}{\sqrt{5}}$, $AH = 2a - \dfrac{2x}{\sqrt{5}}$.

Khi quay tam giác ABC quanh trục AB ta được một khối nón có thể tích là :

$V = \dfrac{1}{3}\pi AC^2.AB = \dfrac{2a^3\pi}{3}$.

Khi quay hình chữ nhật $MHAK$ quanh trục AB ta được một khối trụ có thể tích là :

$V' = \pi.MH^2.AH = \pi\dfrac{x^2}{5}\left(2a - \dfrac{2x}{\sqrt{5}}\right)$.

Do đó, $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{3}{5a^2}x^2 - \dfrac{3}{5\sqrt{5}a^3}x^3$.

Xét hàm sô $f(x) = \dfrac{3}{5a^2}x^2 - \dfrac{3}{5\sqrt{5}a^3}x^3$ trên đoạn $\left[0; a\sqrt{5}\right]$.

Ta có : $f'(x) = \dfrac{6}{5a^2}x - \dfrac{9}{5\sqrt{5}a^3}x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2\sqrt{5}a}{3} \in \left[0; \sqrt{5}\right] \end{array}\right.$.

$f(0) = 0$, $f\left(a\sqrt{5}\right) = 0$, $f\left(\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$.

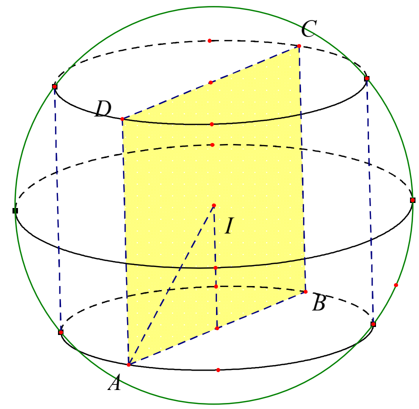
Suy ra $\max\limits_{\left[0;\sqrt{5}\right]} f(x) = f\left(\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ bằng $\dfrac{4}{9}$.

Câu 63. (THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018) **Xét hình trụ (T) nội tiếp một mặt cầu bán kính R và S là diện tích thiết diện qua trục của (T). Tính diện tích xung quanh của hình trụ (T) biết S đạt giá trị lớn nhất**

A. $S_{xq} = \dfrac{2\pi R^2}{3}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi R^2}{3}$. **C.** $S_{xq} = 2\pi R^2$. **D.** $S_{xq} = \pi R^2$.

Lời giải



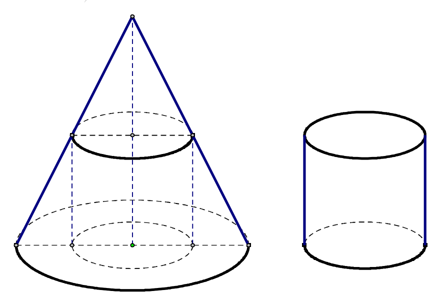
Gọi x là bán kính của hình trụ $0 < x < R$. Diện tich thiết diện là

$S = 2x.2\sqrt{R^2 - x^2} = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$.

Vì $4x\sqrt{R^2 - x^2} \le 2.\left(x^2 + R^2 - x^2\right)$ nên $S \le 2R$. Vậy $S_{\max} = 2R$ khi $x = \sqrt{R^2 - x} \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi\dfrac{R\sqrt{2}}{2}.2\dfrac{R\sqrt{2}}{2} = 2\pi R^2$.

Câu 64. **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2\text{m}$, chiều cao $h = 6\text{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



A. $V = \dfrac{32\pi}{9}\left(\text{m}^2\right)$. **B.** $V = \dfrac{32}{9}\left(\text{m}^2\right)$. **C.** $V = \dfrac{32\pi}{3}\left(\text{m}^2\right)$. **<u>D</u>.** $V = \dfrac{32\pi}{9}\left(\text{m}^2\right)$.

Lời giải

Gọi r_t, h_t lần lượt là bán kính và chiều cao của khối trụ.

Ta có: $\dfrac{r_t}{2} = \dfrac{6 - h_t}{6} \Rightarrow h_t = 6 = 3r_t$.

Ta lại có: $V = \pi r_t^2.h_t = \pi\left(6r_t^2 - 3r_t^3\right)$.

Xét hàm số $f\left(r_t\right) = 6r_t^2 - 3r_t^3$, với $r_t \in (0;2)$

có $f'\left(r_t\right) = 12r_t - 9r_t^2$; $f'\left(r_t\right) = 0 \Leftrightarrow r_t = \dfrac{4}{3}$ (vì $r_t > 0$).

Bảng biến thiên

r_t	0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(r_t)$		+	0	−	
$f(r_t)$	0	↗	$\frac{32}{9}$	↘	0

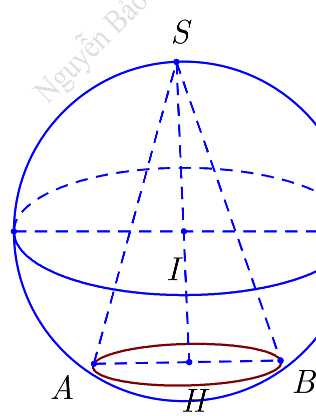
Dựa vào BBT ta có $f(r_t)_{\max} = \frac{32}{9}$ đạt tại $r_t = \frac{4}{3}$.

Vậy $V = \frac{32}{9}\pi$.

Câu 65. **(THPT Thanh Miện I - Hải Dương - 2018)** Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối nón (H) là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{81}{32}$. **B.** $\frac{76}{32}$. **C.** $\frac{32}{81}$. **D.** $\frac{32}{76}$.

Lời giải



Gọi I, S là tâm mặt cầu và đỉnh hình nón.

Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón và AB là một đường kính của đáy.

Ta có $\frac{V_1}{V_2} + 1 = \frac{V}{V - V_1}$. Do đó để $\frac{V_1}{V_2}$ đạt GTLN thì V_1 đạt GTLN.

TH 1: Xét trường hợp $SI \le R$

Khi đó thể tích của hình nón đạt GTLN khi $SI = R$ Lúc đó $V_1 = \frac{\pi R^3}{3}$.

TH 2: $(SI > R) I$ nằm trong tam giác SAB như hình vẽ.

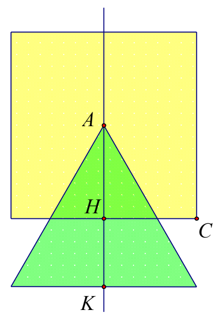
Đặt $IH = x (x > 0)$. Ta có

$$V_1=\frac{1}{3}\pi HA^2.SH=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-x^2\right)\left(R+x\right)=\frac{\pi}{6}\left(2R-2x\right)\left(R+x\right)\left(R+x\right)\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3=\frac{32\pi}{81}R^3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{R}{3}$.

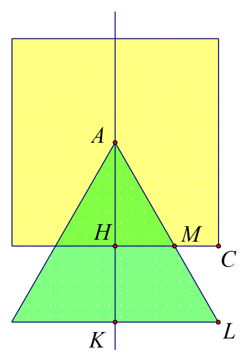
Khi đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V}{V-V_1}-1=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{32}{81}\pi R^3}-1=\frac{8}{19}$.

Câu 66. (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018) Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 8 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục.



A. $\frac{16\pi\left(23+4\sqrt{3}\right)}{3}$. **B.** $\frac{64\pi\left(17+\sqrt{3}\right)}{3}$. **C.** $\frac{16\pi\left(17+3\sqrt{3}\right)}{9}$. **D.** $\frac{64\pi\left(17+3\sqrt{3}\right)}{9}$.

Lời giải



Ta cần tìm HM

Ta có $\frac{HM}{KL}=\frac{AH}{AK}\Leftrightarrow\frac{HM}{4}=\frac{4}{4\sqrt{3}}\Rightarrow R'=HM=\frac{4}{\sqrt{3}}$

Thể tích được tính bằng thể tích trụ cộng với thể tích nón lớn trừ đi thể tích nón nhỏ phía trong.

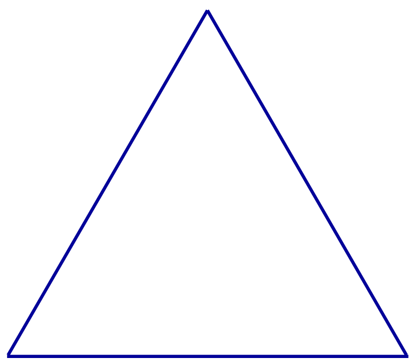
$V_{tru}=\pi.4^2.8=128\pi.$

$V_{non\ lon}=\frac{1}{3}\pi.4^2.4\sqrt{3}=\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$

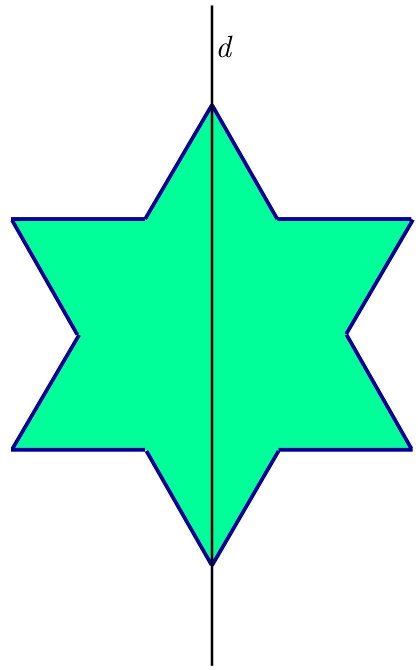
$V_{non\ nho}=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2.4=\frac{64\pi}{9}.$

$$V = V_{tru} + V_{non\ lon} - V_{non\ nho} = 128\pi + \frac{64\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{64\pi}{9} = 64\left(\frac{17\pi + 3\sqrt{3}\pi}{9}\right)$$

Câu 67. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2018)** Ban đầu ta có một tam giác đều cạnh bằng 3 (hình 1). Tiếp đó ta chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bằng hai đoạn bằng nó sao cho chúng tạo với đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía bên ngoài ta được hình 2. Khi quay hình 2 xung quanh trục d ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.



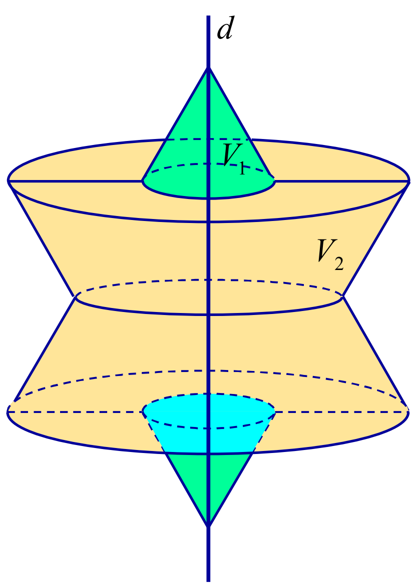
Hình 1

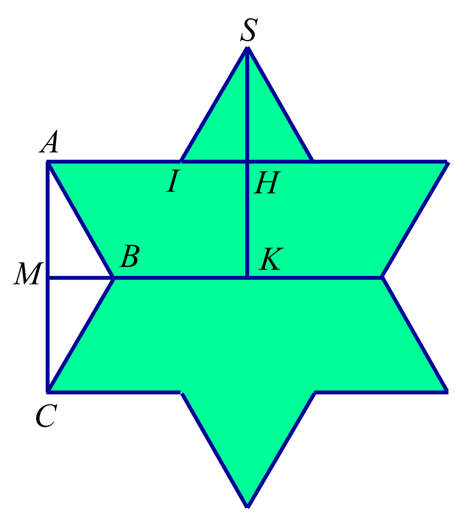


Hình 2

A. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải





Ta có thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng 2 lần thể tích nửa trên khi cho hình $SIABK$ quay quanh trục SK.

Tam giác SIH quay quanh trục SK tạo thành khối nón có $r_1 = IH = \frac{1}{2}$; $h_1 = SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối nón này bằng $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$

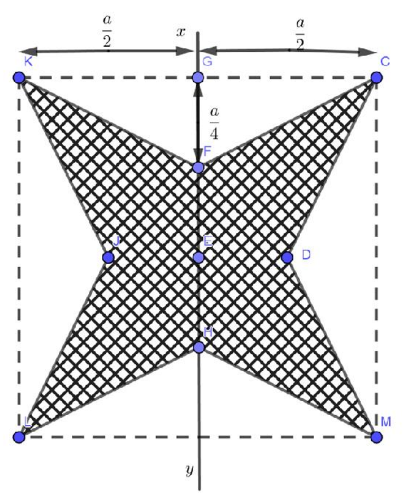
Hình thang vuông $HABK$ quay quanh trục HK tạo thành hình nón cụt có $R = AH = \frac{3}{2}$;

$r = BK = 1$; $h = HK = SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối nón cụt này bằng $V_2 = \frac{\pi h}{3}.\left(R^2 + r^2 + R.r\right) = \frac{\pi}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} + 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{19\pi\sqrt{3}}{24}$.

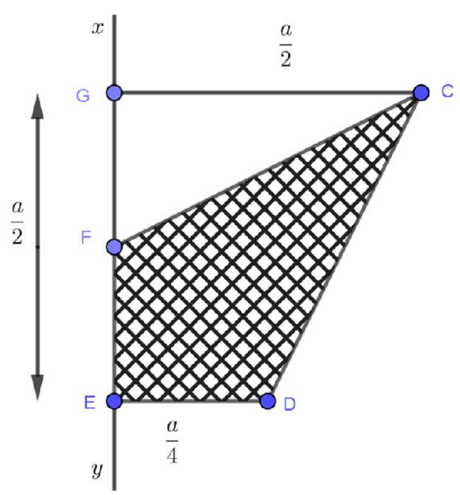
Suy ra thể tích khối tròn xoay đã cho bằng $V = 2\left(V_1 + V_2\right) = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$.

Câu 68. **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cạnh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục xy.



A. $V = \frac{5\pi}{48}a^3$. **B.** $V = \frac{5\pi}{16}a^3$. **C.** $V = \frac{\pi}{6}a^3$. **D.** $V = \frac{\pi}{8}a^3$.

Lời giải



Xét phần gạch chéo quay xung quanh trục xy.

Thể tich khối nón cụt tạo thành khi cho hình thang $EDCG$ quay xung quanh trục xy là:

$$V_1 = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + R.r + r^2\right) = \frac{\pi a}{6}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{16}\right) = \frac{7\pi a^3}{96}.$$

Thể tích khối nón tạo thành khi cho tam giác FCG quay xung quanh trục xy là:

$$V_2 = \frac{1}{3}.FG.\pi.CG^2 = \frac{\pi a^3}{48}.$$

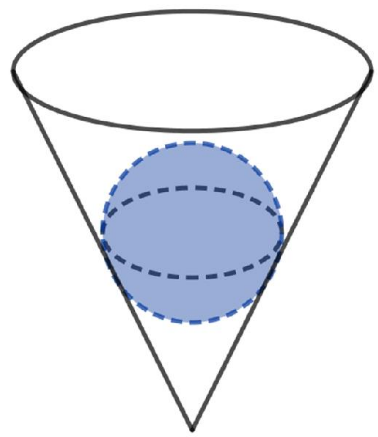
Thể tích khối tòn xoay sinh ra khi cho hình gạch chéo quay xung quanh trục xy là:

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{5\pi a^3}{96}.$$

Vậy thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục xy là:

$$V = 2.V_3 = \frac{5\pi a^3}{48}.$$

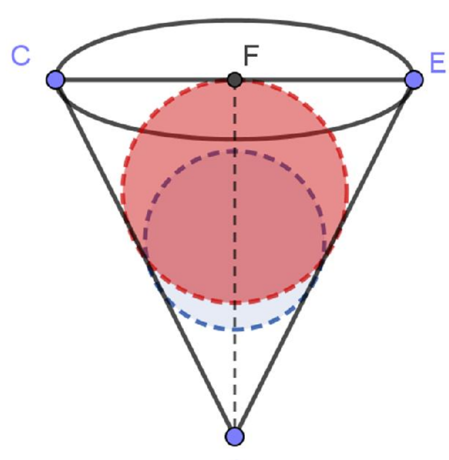
Câu 69. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Bạn An có một cốc giấy hình nón có đường kính đáy là 10 cm và độ dài đường sinh là 8 cm. Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (*không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc*).



Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{64}{\sqrt{39}}$ cm. **B.** $\frac{5\sqrt{39}}{13}$ cm. **C.** $\frac{10\sqrt{39}}{13}$ cm. **D.** $\frac{32}{\sqrt{39}}$ cm.

Lời giải



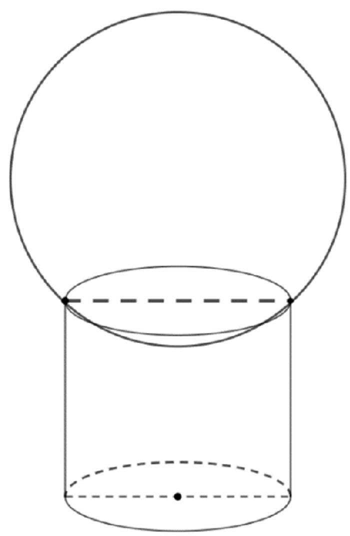
Xét một tiết diện qua trục của hình nón, gồm một tam giác ACE và đường tròn bán kính r tiếp xúc với hai cạnh AC, AE sao cho toàn bộ hình tròn nằm trong tam giác.

Dễ thấy viên bi lớn nhất là viên bi có bán kính bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACE.

Tức là bằng: $r_0 = \dfrac{S_{ACE}}{\frac{1}{2}(AC + AE + CE)} = \dfrac{10.\sqrt{8^2 - 5^2}}{8+8+10} = \dfrac{10\sqrt{39}}{26} = \dfrac{5\sqrt{39}}{13}$.

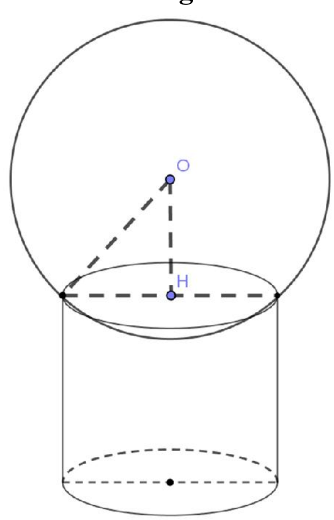
Đường kính $2r_0 = \dfrac{10\sqrt{39}}{13}$.

Câu 70. (Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018) Một trái banh và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt trái banh lên hình trụ thấy phần ở bên ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:



A. $9V_1 = 8V_2$. **B.** $3V_1 = 2V_2$. **C.** $16V_1 = 9V_2$. **D.** $27V_1 = 8V_2$.

Lời giải



Gọi R là bán kính mặt cầu, r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

Theo bài ra ta có: $h = 2R$ và $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2 = \pi r^2 h = \pi \frac{3R^2}{4}.2R = \frac{3\pi R^3}{2}$ $\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$ hay $9V_1 = 8V_2$.