

003-1.2-PHƯƠNG PHÁP LIÊN HỢP

PHƯƠNG PHÁP LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM

Dạng 1: LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM

- Câu 1.** Giải các phương trình sau: $\sqrt{4x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x - 1} = 2x$
- Câu 2.** (Đồng Xoài - Lần 3) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 7x - 7 = 0$
- Câu 3.** (Quảng Hà – 2016) $2x^2 - 5x - 1 - \sqrt{x-2} - \sqrt{4-x} = 0$
- Câu 4.** (Lộc Ninh – 2016) $\sqrt{x-1} + x^2 = \sqrt{x^2 + 21}$
- Câu 5.** (Thanh Hoa – 2016) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$
- Câu 6.** [Nguyễn Văn Hoàng] $\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 + 5} = 2x + 1$
- Câu 7.** (Lê Lợi-2016) $x^2 + x - 3 = \sqrt{3x+7} - \sqrt{2-x}$
- Câu 8.** (Phan Bội Châu – 2016) $2\sqrt{x^2 + 5} = 2\sqrt{x-1} + x^2$
- Câu 9.** (Sở Quảng Nam – 2016) $4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{7-2x} + 4x^2 - 10x - 11 = 0$
- Câu 10.** (Phạm Thành Trung) $\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} + x^3 - 6x^2 + 13x - 15 = 0$
- Câu 11.** (Phạm Thành Trung) $\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{2x-3} + x^2 - x - 6 = 0$
- Câu 12.** (HSG cấp tỉnh Hà Tĩnh 2012-2013) Giải các phương trình sau: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7} + x^2 - 3x - 2 = 0$
- Câu 13.** (HSG Lớp 10 – SGD Hà Tĩnh - Năm 2016 - 2017) Giải phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-2x} = \frac{6x-2}{\sqrt{9x^2+4}}$.
- Câu 14.** (HSG CẤP TỈNH - THANH HÓA- 2017-2018) Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \geq x + 3$ (1).
- Câu 15.** (HSG cấp tỉnh lớp 11 – Thanh Hóa – 2017 - 2018) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} = \sqrt{y} + y & (1) \\ (y + \sqrt{xy} + x - x^2)(x+1) - 4 = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 16. THUẬN THÀNH 2 NĂM HỌC 2018 – 2019
$$\begin{cases} x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17} = y + \sqrt{y^2 + 1} & (1) \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{y+21} + 1 = 2\sqrt{4y-3x} & (2) \end{cases}$$

Câu 17. $(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13x^2 - 6x + 32.$

Câu 18. (Đa Phúc-Lần 2) $32x^4 - 16x^2 - 9x - 9\sqrt{2x-1} + 2 = 0.$

Câu 19. [Nguyễn Văn Hoàng] $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$

Câu 20. (Đức Thọ – 2016) $\sqrt{4x^2 + x + 6} + 2x = 1 + 5\sqrt{x+1}$

Dạng 2: LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM PHÂN TÍCH THÀNH TÍCH

Câu 21. (HSG Khối 10 - Hải Dương - 2017 - 2018) Giải phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(x^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}) = 2x$

Dạng 3: LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM KẾT HỢP BÌNH PHƯƠNG

Câu 22. Giải phương trình $\sqrt{3x-4} - \sqrt{x+2} = x-3.$

Câu 23. Giải phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-2x} = \frac{6x-2}{\sqrt{9x^2+4}}$.

Dạng 4: LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM DÙNG TAM THỨC BẬC HAI

Câu 24. (HSG cấp trường Yên Định 1 2017-2018) 2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3} + 1) \\ 8x^2 - 8y + 3 = 8y\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Dạng 5: LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM DÙNG ĐỒNG BẬC

Câu 25. (HSG12 cấp tỉnh GIA LAI 2014-2015) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \\ \sqrt{2xy+x+6} = 4y-1-\frac{6}{x} \end{cases}$$

Câu 26. (HSG cấp tỉnh Ninh Bình 2017-2018) (1,0 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} & 1 \\ \sqrt{5x^2 + 4y} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = \sqrt{x} + 4\sqrt{y} & 2 \end{cases}$$

Dạng 6: LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM KẾT HỢP HẰNG ĐẲNG THỨC

Câu 27. (HSG HẢI DƯƠNG 2019) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (3x+1)^2 + 4\sqrt{y} = y^2 + 4\sqrt{3x+1}(1) \\ 3xy = 4x + 4 + 2\sqrt{x+3}(2) \end{cases}$.

Câu 28. (CHỌN HSG –THPT HẬU LỘC 2017 - 2018) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 + (4x-9)(x-y)} + \sqrt{xy} = 3y \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)} = 3(x+3) \end{cases}$$

Câu 29. ĐỀ HSG TỈNH KON TUM NĂM HỌC 2018 - 2019 (3 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \\ x^2 + x + 12\sqrt{y+1} = 36 \end{cases}$$

Dạng 7: LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM BỘI BA

Câu 30. (2.0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{2\sqrt{xy}+x+y}{2} \\ \sqrt[3]{9xy+3x+6y+9} + 2\sqrt[3]{6xy+2} = 3x+4 \end{cases}$.

Dạng 8: PHÂN TÍCH THÀNH TÍCH LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM

Câu 31. (HSG10_SỞ GD&ĐT_ QUẢNG NAM_2016-2017) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x = y^3 + yx^2 + y \\ \sqrt{2x-y} + \sqrt{x+y+1} = xy - 3x + 1 \end{cases}$$

Câu 32. (HSG CẤP TỈNH - THANH HÓA- 2017-2018) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2)} = \sqrt{y} + y & (1) \\ (y + \sqrt{xy} + x - x^2)(x+1) - 4 = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 33. (HSG cấp tỉnh lớp 11 – THPT Quỳnh Lưu – Nghệ An – 2017 - 2018) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} & (1) \\ 2x^3 - y^3 + x^2y^2 = 2xy - 3x^2 + 3y & (2) \end{cases}$$

Dạng 9: ẨN PHỤ LIÊN HỢP MỘT NGHIỆM

Câu 34. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} = \sqrt{2(x+y+1)} + 4 \\ (x^2 + y - 2)\sqrt{2x+1} = x^3 + 2y - 5 \end{cases}$$

Dạng 10: LIÊN HỢP HAI NGHIỆM ĐẸP.

Câu 35. $x^2 + \sqrt{5x^2 + 4} + 2 = 5x + \sqrt{4x - 3}$ (*)

Nhận xét:

Bấm máy ta được nghiệm $x = 1; x = 3$.

Tiếp theo ta tìm a, b sao cho $\sqrt{5x^2 + 4} = ax + b$.

Ta có
$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = \sqrt{5 \cdot 1 + 4} = 3 \\ a \cdot 3 + b = \sqrt{5 \cdot 3^2 + 4} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \cdot \text{Vậy } \sqrt{5x^2 + 4} = x + 2.$$

Tiếp theo ta tìm a, b sao cho $\sqrt{4x - 3} = ax + b$.

Ta có
$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = \sqrt{4 \cdot 1 - 3} = 1 \\ a \cdot 3 + b = \sqrt{4 \cdot 3 - 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \cdot \text{Vậy } \sqrt{4x - 3} = x.$$

Câu 36. $\sqrt{2x^2 - x + 8} + x^2 - 5x + 2 = \sqrt{5x - 4}$ (*)

Câu 37. $x^2 + 3 = \sqrt{16x - 23} + \sqrt{(x^2 - 2x + 4)(3x - 2)}$ (*)

Câu 38. $x\sqrt{3x - 2} + (x + 1)\sqrt{5x - 1} = 8x - 3$ (*)

Câu 39. $x^3 + 3x^2 - 19x + 12 + \sqrt{5x - 1} + \sqrt{8x - 7} = 0$ (*)

Câu 40. $2x + 1 - \sqrt{3x - 2} - \sqrt{5x - 1} = (x^2 - 3x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ (*)

Câu 41. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{6 - x} = x^2 - 7x + 13$ (*)

Câu 42. $x^2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{4x + 1}$ (*)

Câu 43. $\sqrt{3x + 1} + 2\sqrt[3]{19x + 8} = 2x^2 + x + 5$ (*)

Câu 44. $x^3 - x + 2 = 2\sqrt[3]{3x - 2}$

Câu 45. $(x^2 - x - 6)\sqrt{x - 1} + (x - 2)\sqrt{x + 1} = 3x^2 - 9x + 2$

Câu 46. $3\sqrt{5 - x} + 3\sqrt{5x - 4} = 2x + 7$

Câu 47. $4\sqrt{x + 3} + \sqrt{19 - 3x} = x^2 + 2x + 9$

Câu 48. $\sqrt{x + 2} + \sqrt{3 - x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$

Câu 49. $\sqrt{\frac{x^2 + x + 2}{x + 3}} + x^2 = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3}} + 1$

Câu 50. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x + 2} = x^3 + x^2 - 4x - 4 + |x| + |x - 1|$

Câu 51. $(x + 1)\sqrt{3x + 1} + x^3 + 2x^2 + 1 = 2\sqrt{x^2 - x + 1} + 6x$

Câu 52. (Nguyễn Thị Minh Khai - 30/4) $\sqrt{3x - 5} + 2\sqrt[3]{19x - 30} = 2x^2 - 7x + 11$

Câu 53. (Chuyên Bình Long - 30/4) $3\sqrt{2x - 1} + x\sqrt{5 - 4x^2} = 4x^2$

Câu 54. $2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13$

Câu 55. $x^2 - x + \sqrt{2x^2 - x + 3} = \sqrt{21x - 17}$

Câu 56. (Dương Văn Vũ) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2\sqrt{x(x+1)} - \sqrt{3(x+1)^2} - 9 = 0$

Câu 57. (Nguyễn Đại Dương) $x^3 + x^2 - 3x + 2 = (3x - 2)\sqrt{3x - 2}$

Câu 58. (Đàm Việt Hùng) $3x^3 + 3x^2 - 4x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$

Câu 59. (Thi Thử - 2014) $(x-3)\sqrt{x+1} + x\sqrt{4-x} = 2x-3$

Câu 60. $(1+x)\sqrt{x^2-x+1} + (1-x)\sqrt{x^2+x+1} = 2$

Câu 61. $\sqrt[3]{7x-8} + 5\sqrt{x-1} = x\sqrt{2x-1} - 2$

Câu 62. $4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8$

Câu 63. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Câu 64. $x^3 - x + 2 = 2\sqrt[3]{3x-2}$

Câu 65. $2x^2 - 4x - 9 + \sqrt{5x+6} + \sqrt{7x+11} = 0$

Câu 66. [Nguyễn Duy Hồng - k2pi] $x^4 + x^2 = \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} + 268$

Câu 67. [Lê Đình Mẫn - k2pi] $x^2 + 3\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^4-x^2+1}$

Câu 68. [Nguyễn Duy Hồng - k2pi] $x^2 + x\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{x^3+x^2+x}$

Câu 69. (Hùng Vương – 2016) $x\sqrt{2x^2+x+1} = 4x^2 + 4x - 6$

Câu 70. (HSG Lớp 10 – SGD Hải Dương – Năm 2018) Giải phương trình
 $(x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3$

Câu 71. (HSG Lớp 10 – SGD Hải Dương – Năm 2018) Giải phương trình:
 $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3.$

Câu 72. (HSG tỉnh Thừa Thiên Huế 2017-2018) Giải phương trình sau:

$$5\left(1 + \sqrt{1+x^3}\right) = x^2(4x^2 - 25x + 18), \forall x \geq 0.$$

Câu 73. [Windows8 - k2pi] $\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = x^2 + x + 1$

Câu 74. [Chuyên Nguyễn Trãi – 2013] $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} = \frac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}}$

Câu 75. $4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8$ (*)

Câu 76. $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x$

Câu 77. $2x^2 - 2x + 3 - \sqrt{4x+1} - \sqrt{6x+4}$

Câu 78. $(3x-1)\sqrt{3x-2} - 4x^3 + 9x^2 - 7x = 0$

Câu 79. $\sqrt{2x^2-x+3} + x^2 - x = \sqrt{21x-17}$

Câu 80. $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x$

Dạng 11: PHÂN TÍCH THÀNH TÍCH LIÊN HỢP HAI NGHIỆM

Câu 81. (HSG10_SỞ GD&ĐT_QUẢNG NAM_2016-2017) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x = y^3 + yx^2 + y \\ \sqrt{2x-y} + \sqrt{x+y+1} = xy - 3x + 1 \end{cases}$$

Dạng 12: BÌNH PHƯƠNG PHÂN TÍCH THÀNH TÍCH LIÊN HỢP HAI NGHIỆM

Câu 82. (HẬU LỘC THANH HÓA 2018-2019) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{4-x+5y} & (1) \\ x^2 + y + 2 = \sqrt{5(2x-y+1)} + \sqrt{3x+2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Dạng 13: **LIÊN HỢP HAI NGHIỆM XẤU**

Câu 83. $(x^2 + 3x - 7)\sqrt{x^2 + 1} + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 17 = 0$

Câu 84. $x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2}$

Câu 85. (THPTQG – 2015) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 2} = (x+1)(\sqrt{x+2} - 2)$

Câu 86. $x^2 - 4x + 6 = \frac{\sqrt{5x-2}}{x} + \sqrt{11x+7}$

Câu 87. $x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = \sqrt{3x-1} + \sqrt{x(3x+7)}$

Câu 88. $x^2 - 5x - 15 = 6\sqrt{x+2}$

Câu 89. $\sqrt{2x^2 - 10x + 5} = \sqrt{5x-2} + x^3 - 24x + 11$

Câu 90. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 1}{3 - x}$

Câu 91. $(x^2 + 1)\sqrt{5x-2} + 5x^2 = 2x^3 + 3x$

Câu 92. $\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x+4}} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2 = 0$

Câu 93. $x^2 + \sqrt{5x^2 + 2x} = \sqrt{4x+2} + 3x + 1$

Câu 94. (Chuyên Phan Bội Châu – 2013) $2(x^2 - x + 6) = 5\sqrt{x^3 + 8}$

Câu 95. (Đề nghị Olympic – 2007) $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

Câu 96. $\sqrt{\frac{x+9}{x^2+x+2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{x^2+1}{4}$

Câu 97. $\sqrt[3]{12x^2 + 46x - 15} - \sqrt[3]{x^3 - 5x + 1} = 2x + 2$

Câu 98. $\sqrt[3]{x^3 + 16x^2 + 62x - 78} = x^2 - 7x + 36 - \frac{174}{x+5}$

Câu 99. $\sqrt{8-3x^2} = x^3 - 3x + 1$

Câu 100. $(3x^2 + 11)\sqrt{x^2 + 1} = 3\sqrt{3}x^3 - 8x^2 + 11\sqrt{3}x + 4$

Câu 101. $\sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2} + 2\sqrt[3]{x^3 - 20} = 2(x-1)$

Câu 102. $(x^3 + 3x + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$

Câu 103. $(3x^2 - 5x - 6)\sqrt{2-x} = \sqrt{3x^2 - 6x - 5}$

Câu 104. $\sqrt{x^2 + 9x - 1} + x\sqrt{11-3x} = 2x + 3$

Câu 105. (Chuyên Lê Quý Đôn) $x^2 + x - 1 = (x+2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Câu 106. $x^2 - 9x + 5 + x\sqrt{2x^2 + 6} = \sqrt{6x-1}$.

Câu 107. [marshfrog - k2pi] $\sqrt{4+8x} + \sqrt{12-8x} = (1-2x)^2$

Câu 108. (Chuyên Phan Bội Châu – 2016) $\sqrt{7x^2 + 20x - 86} + x\sqrt{31-4x-x^2} = 3x + 2$.