Chuyên đề 5 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC ĐỘ 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Định m để GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước

Dạng 1: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y = |f(x)+m| = a \quad (a>0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K>k)$.

Kiểm tra $\max\{|m+K|,|m+k|\} \ge \dfrac{|m+K|+|m+k|}{2} \ge \dfrac{|m+K-m-k|}{2} = \dfrac{|K-k|}{2}$.

TH1: $\dfrac{|K-k|}{2} \le a$. Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+k=-a \\ m+K=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-a-k \\ m=a-K \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}$.

TH2: $\dfrac{|K-k|}{2} > a \ \Rightarrow m \in \varnothing$.

Cách 2: Xét trường hợp

TH1: $Max = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \ge |m+k| \end{cases}$

TH2: $Max = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \ge |m+K| \end{cases}$

Dạng 2: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y = |f(x)+m| = a \quad (a>0)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K>k)$.

Để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k=a \\ m+k>0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K=-a \\ m+K<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=a-k \\ m>-k \end{cases} \vee \begin{cases} m=-a-K \\ m<-K \end{cases}$. Vậy $m \in S_1 \cup S_2$.

Dạng 3: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y = |f(x)+m|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K>k)$.

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y \le M \Rightarrow \begin{cases} m+k \ge -M \\ m+K \le M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \le m \le M-K$.

Dạng 4: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y = |f(x)+m|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K>k)$.

Để

$\min\limits_{[\alpha;\beta]} y \le a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \le a \\ m+k \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \ge -a \\ m+K \le 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le a-k \\ m \ge -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \ge -a-K \\ m \le -K \end{cases} \vee -K < m < -k.$

Dang 5: Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y = |f(x)+m|$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow m=-\dfrac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max\limits_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là $\dfrac{K-k}{2}$.

Dạng 6: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y=\left|f(x)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow (m+K)(m+k)\le 0 \Leftrightarrow -K\le m\le -k$. Đề hỏi tìm min của $\min\limits_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y\le h.\min\limits_{[a;b]} y\,(h>0)$ hoặc $Min+\max=$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

TH1: $|K+m|\le h|k+m| \xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|K+m|\ge|k+m|} m\in S_1$.

TH2: $|k+m|\le h|K+m| \xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|k+m|\ge|K+m|} m\in S_2$.

Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 8: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

BT1: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y+\max\limits_{[a;b]} y=\alpha \Leftrightarrow |m+K|+|m+k|=\alpha$.

BT2: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y*\max\limits_{[a;b]} y=\beta \Leftrightarrow |m+K|*|m+k|=\beta$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$2+m$

TH 1: $2+m<0 \Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (loại).

TH 2: $\begin{cases}2+m>0\\ m<0\end{cases} \Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó : $|m-2|=2-m>2>2+m$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

TH 3: $\begin{cases}m>0\\ -2+m<0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$. Khi đó : $|m-2|=2-m<2<2+m \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

TH 4: $-2+m>0 \Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại).

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Xét $u=x^3-3x+m$ trên đoạn $[0;3]$ có $u'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=1\in[0;3]$.

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[0;3]} u=\max\{u(0),u(1),u(3)\}=\max\{m, m-2, m+18\}=m+18 \\ \min\limits_{[0;3]} u=\min\{u(0),u(1),u(3)\}=\min\{m, m-2, m+18\}=m-2 \end{cases}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x)=\max\{|m-2|,|m+18|\}=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+18|=16 \\ |m+18|\ge|m-2| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-2|=16 \\ |m-2|\ge|m+18| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-14 \end{array}\right.$.

Do đó tổng tất cả các phần tử của S bằng -16.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ liên tục trên $[0;1]$.

Khi $m=1$ hàm số là hàm hằng nên $\max\limits_{[0;1]} f(x)=\min\limits_{[0;1]} f(x)=1$

Khi $m\ne1$ hàm số đơn điệu trên đoạn $[0;1]$ nên

+ Khi $f(0); f(1)$ cùng dấu thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=|f(0)|+|f(1)|=|m|+\left|\dfrac{m+1}{2}\right|$.

+ Khi $f(0); f(1)$ trái dấu thì

$\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$, $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(1)|\}=\max\left\{|m|;\left|\dfrac{m+1}{2}\right|\right\}$.

TH1: $f(0).f(1)\ge0 \Leftrightarrow m(m+1)\ge0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le-1 \\ m\ge0 \end{array}\right.$.

$\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2 \Leftrightarrow |m|+\left|\dfrac{m+1}{2}\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$ (thoả mãn).

TH2: $f(0).f(1)<0 \Leftrightarrow m(m+1)<0 \Leftrightarrow -1<m<0$

$\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}|m|=2\\ \left|\dfrac{m+1}{2}\right|=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm 2\\ m=-5\\ m=3\end{array}\right.$ (không thoả mãn).

Số phần tử của S là 2.

Câu 4. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. **C.** $[-1;0]$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\ x=1\end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=2m-1$, $f(1)=2m-3$ và $f(2)=2m+1$

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=max\{|2m-1|;|2m-3|;|2m+1|\}=max\{|2m-3|;|2m+1|\}=P$.

Trường hợp 1: Xét $|2m-3|\ge|2m+1| \Leftrightarrow -4(4m-2)\ge 0 \Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P=|2m-3|\ge 2, \forall m\le\dfrac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Xét $|2m-3|<|2m+1| \Leftrightarrow -4(4m-2)<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P=|2m+1|>2, \forall m>\dfrac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}$ không tồn tại.

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. -1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{2x-2}{\left|x^2-2x+m\right|}$, $y'=0 \Rightarrow x=1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $\max\{y(-1),y(2),y(1)\}=5$.

$\Leftrightarrow \max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5$.

+ Trường hợp $m\ge -1$, ta có $\max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5 \Leftrightarrow |3+m|=5 \Rightarrow m=2$.

+ Trường hợp $m<-1$ ta có $\max\{|3+m|,|m|,|m-1|\}=5 \Leftrightarrow |m-1|=5 \Rightarrow m=-4$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -2.

Câu 6. **(THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$ (a là tham số). Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=2$. **D.** $a=5$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;1\right]$.

Ta có: $y=\left|x^2+2x+a-4\right|=\left|\left(x+1\right)^2+a-5\right|$ $(*)$

Đặt $t=\left(x+1\right)^2$, $x\in\left[-2;1\right]\Rightarrow a\in\left[0;4\right]$.

Lúc đó hàm số trở thành: $f\left(t\right)=\left|t+a-5\right|$ với $t\in\left[0;4\right]$.

Nên $\max\limits_{x\in\left[-2;1\right]} y=\max\limits_{t\in\left[0;4\right]} f\left(t\right)=\max\limits_{t\in\left[0;4\right]}\left\{f(0);f(4)\right\}=\max\limits_{t\in\left[0;4\right]}\left\{\left|a-5\right|;\left|a-1\right|\right\}$

$$\geq\frac{\left|a-1\right|+\left|a-5\right|}{2}\geq\frac{\left|a-1+5-a\right|}{2}=2$$

Đẳng thức xảy ra khi $\left|a-1\right|=\left|a-5\right|=2\Leftrightarrow a=3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{t\in\left[0;4\right]} f\left(t\right)$ là 2 khi $a=3$.

Câu 7. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $\left[1;2\right]$ bằng 2. Số phần tử của tập S

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **<u>D</u>.** 2.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Xét $y=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$. Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+2x}{\left(x+1\right)^2}$, $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin\left[1;2\right]\\x=-2\notin\left[1;2\right]\end{array}\right.$.

Mà $f\left(1\right)=\dfrac{2m+1}{2},\mathrm{f}\left(2\right)=\dfrac{3m+4}{3}\Rightarrow\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|;\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\m=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

• Với $m=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{17}{6}>2$ (loại)

• Với $m=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3m+4=6\\3m+4=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{2}{3}\\m=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.$.

• Với $m=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=\dfrac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

• Với $m=-\dfrac{10}{3}\Rightarrow\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=\dfrac{17}{6}>2$ (loại)

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 8. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$.

Suy ra $\begin{cases} M\ge f(-1) \\ M\ge f(3) \\ M\ge f(1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\ge |1-a+b| \\ M\ge |9+3a+b| \\ M\ge |1+a+b|\end{cases} \Rightarrow 4M\ge |1-a+b|+|9+3a+b|+2|-1-a-b|$

$\ge |1-a+b+9+3a+b+2(-1-a-b)| \Rightarrow 4M\ge 8 \Rightarrow M\ge 2$.

Nếu $M=2$ thì điều kiện cần là $|1-a+b|=|9+3a+b|=|-1-a-b|=2$ và $1-a+b$, $9+3a+b$, $-1-a-b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=2 \\ 1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1\end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1\end{cases}$ ta có, hàm số $f(x)=\left|x^2-2x-1\right|$ trên $[-1;3]$.

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-1$ xác định và liên tục trên $[-1;3]$.

$g'(x)=2x-2$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1\in[-1;3]$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1;3] \Rightarrow M=\max\{|g(-1)|;|g(3)|;|g(1)|\}=2$.

Vậy $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1\end{cases}$. Ta có: $a+2b=-4$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Xét $u=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có: $u'=3x^2+2x+m^2+1>0,\ \forall x$.

Do đó $A=\max\limits_{[-3;-1]} u=u(-1)=26-m^2$; $a=\min\limits_{[-3;-1]} u=u(-3)=6-3m^2$.

Do $\mathrm{M}=\max\limits_{[-3;-1]} y=\max\left\{\left|26-m^2\right|,\left|6-3m^2\right|\right\}$ và $4M\ge 3\left|26-m^2\right|+\left|6-3m^2\right|\ge 72$.

Vậy $M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left|26-m^2\right|=\left|6-3m^2\right|=18 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$.

Câu 10. **(Sở Quảng Nam - 2018)** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$f(x)=x^2+2x+m-4$ có $f'(x)=2x+2$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Do đó

$\max\limits_{[-2;1]}\left|x^2+2x+m-4\right|=\max\{|m-1|;|m-4|;|m-5|\}$.

Ta thấy $m-5<m-4<m-1$ với mọi $m\in\mathbb{R}$, suy ra $\max\limits_{[-2;1]} y$ chỉ có thể là $|m-5|$ hoặc $|m-1|$.

Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y = |m-5|$ thì $\begin{cases} |m-5| = 4 \\ |m-5| \geq |m-1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y = |m-1|$ thì $\begin{cases} |m-1| = 4 \\ |m-1| \geq |m-5| \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m \in \{1;\, 5\}$.

Câu 11. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x + m\right|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ trên đoạn $[-2;4]$.

$f' = 3x^2 - 6x - 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

$f(-2) = -2 + m;\ f(-1) = 5 + m; f(3) = -27 + m; f(4) = -20 + m$

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;4]} f(x) = m - 27; \max\limits_{[-2;4]} f(x) = m + 5 \Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = \max\{|m-27|; |m+5|\}$.

+) Trường hợp 1: Nếu $|m-27| \leq |m+5|$ $(*)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = |m+5| \Rightarrow |m+5| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 11 \\ m = -21 \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện $(*) \Rightarrow m = 11$.

+) Trường hợp 1: Nếu $|m-27| > |m+5|$ $(**)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = |m-27| \Rightarrow |m-27| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 43 \\ m = 11 \end{array}\right.$ (Không thỏa mãn điều kiện $(**)$).

Vậy $S = \{11\} \Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Câu 12. **(Chuyên Hạ Long 2018)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có $g'(x) = x^3 - 19x + 30$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \notin [0;2] \\ x = 2 \\ x = 3 \notin [0;2] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	0		2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0		$+$	0	$-$ 0	$+$
$g(x)$			$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$		

$g(0) = m - 20$; $g(2) = m + 6$.

Để $\max\limits_{[0;2]}\left|g(x)\right| \le 20$ thì $\begin{cases} g(0) \le 20 \\ g(2) \le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-20| \le 20 \\ |m+6| \le 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 14$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\sin^2 x - 2\sin x + m\right|$ bằng 1. Số phần tử của S là

A. 0 **B.** 1 **B.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Đặt $\sin x = t$ $\left(t \in [-1;1]\right) \Rightarrow y = \left|t^2 - 2t + m\right|$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + m$ có $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [-1;1]$

Có $f(-1) = m+3,\ f(1) = m-1$. Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[-1;1]} f(x) = \max\{m+3;\ m-1\} = m+3 \\ \min\limits_{[-1;1]} f(x) = \min\{m+3;\ m-1\} = m-1 \end{cases}$

TH1: $|m+3| \ge |m-1| \Leftrightarrow m \ge -1$

$\Rightarrow \max f(x) = |m+3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2\ (l) \\ m = -4\ \ (l) \end{array}\right.$

TH1: $|m+3| < |m-1| \Leftrightarrow m < -1$

$\Rightarrow \max f(x) = |m-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\ (l) \\ m = 0\ \ (l) \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Không tồn tại m thỏa mãn

Câu 14. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y = \left|\dfrac{x^4 + ax + a}{x+1}\right|$, với a là tham số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M \ge 2m$?

A. 10. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = \dfrac{x^4 + ax + a}{x+1} = \dfrac{x^4}{x+1} + a$.

Ta có $y' = \dfrac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $M=\max\left\{\left|a+\frac{1}{2}\right|;\left|a+\frac{16}{3}\right|\right\}$ và $m=\min\left\{\left|a+\frac{1}{2}\right|;\left|a+\frac{16}{3}\right|\right\}$.

Trường hợp 1. $a+\frac{1}{2}\ge 0\Leftrightarrow a\ge -\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}M=\left|a+\frac{16}{3}\right|=a+\frac{16}{3}\\ m=\left|a+\frac{1}{2}\right|=a+\frac{1}{2}\end{cases}$.

Khi đó $M\ge 2m\Leftrightarrow a+\frac{16}{3}\ge 2\left(a+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a\le\frac{13}{3}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{13}{3}\Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2. $a+\frac{16}{3}\le 0\Leftrightarrow a\le -\frac{16}{3}\Rightarrow\begin{cases}M=\left|a+\frac{1}{2}\right|=-a-\frac{1}{2}\\ m=\left|a+\frac{16}{3}\right|=-a-\frac{16}{3}\end{cases}$.

$M\ge 2m\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2}\ge 2\left(-a-\frac{16}{3}\right)\Leftrightarrow a\ge -\frac{61}{6}$.

Kết hợp điều kiện ta có $-\frac{61}{6}\le a\le -\frac{16}{3}$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Trường hợp 3. $\begin{cases}a+\frac{1}{2}<0\\ a+\frac{16}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{16}{3}<a<-\frac{1}{2}$.

Nếu $\left|a+\frac{1}{2}\right|>\left|a+\frac{16}{3}\right|\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2}>a+\frac{16}{3}\Leftrightarrow a<-\frac{35}{12}$ thì

$\begin{cases}M=-a-\frac{1}{2}\\ m=a+\frac{16}{3}\end{cases}\Rightarrow M\ge 2m\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2}\ge 2\left(a+\frac{16}{3}\right)\Leftrightarrow a\le -\frac{67}{18}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{16}{3}<a\le -\frac{67}{18}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Nếu $\left|a+\frac{1}{2}\right|\le\left|a+\frac{16}{3}\right|\Leftrightarrow -a-\frac{1}{2}\le a+\frac{16}{3}\Leftrightarrow a\ge -\frac{35}{12}$ thì

$\begin{cases}M=a+\frac{16}{3}\\ m=-a-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M\ge 2m\Leftrightarrow a+\frac{16}{3}\ge 2\left(-a-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a\ge -\frac{19}{9}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{19}{9}\le a<-\frac{1}{2}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Câu 15. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

A. 120. **B.** 210. **C.** 108. **D.** 136.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0;2]$.

Với mọi $x\in[0;2]$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-28x+48=0\Leftrightarrow x=2$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(2)|\}$.

Theo đề $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|\le 30\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m-30|\le 30\\ |m+14|\le|m-30|\end{cases}\\ \begin{cases}|m+14|\le 30\\ |m-30|\le|m+14|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}|m-30|\le 30\\ |m+14|\le 30\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-30\le m-30\le 30\\ -30\le m+14\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le m\le 60\\ -44\le m\le 16\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 16$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in S=\{0;1;2;...;16\}$. Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là 136.

Câu 16. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\left|3e^{4x}-4e^{3x}-24e^{2x}+48e^x+m\right|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;\ln 2]$.Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23;10)$ thỏa mãn $A\le 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. -33. **B.** 0. **C.** -111. **D.** -74.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=e^x, x\in[0;\ln 2]\Rightarrow t\in[1;2]$

Xét hàm số $h(t)=|3t^4-4t^3-24t^2+48t+m|$ trên $[1;2]$.

Đặt $g(t)=3t^4-4t^3-24t^2+48t+m$

$g'(t)=12t^3-12t^2-48t+48$; $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\notin[1;2]\\ t=2\\ t=1\end{array}\right.$;

$g(1)=m+23$, $g(2)=m+16$.

TH1: $-16\le m<10\Rightarrow m+23\ge m+16\ge 0\Rightarrow A=\max\limits_{[1;2]}h(t)=m+23$; $B=\min\limits_{[1;2]}h(t)=m+16$.

Suy ra:: $\begin{cases}-16\le m<10\\ m+23\le 3m+48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-16\le m<10\\ m\ge\frac{-25}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{-25}{2}\le m<10$.

Do đó: có 22 giá trị

TH2: $-23\le m<-16\Rightarrow|m+23|=m+23,\ |m+16|=-m-16$.

Dễ thấy $B=0$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+23<-m-16\\ -m-16\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}m+23\ge -m-16\\ m+23\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-16\le m<-19.5\\ -19.5\le m\le -23\end{array}\right.(VL)$

Vậy $S=\{-12;-11;...;0;1;...9\}$ và tổng các phần tử của tập S bằng $-12+(-11)+(-10)=-33$.

Câu 17. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[1;2]}y+\max\limits_{[1;2]}y=10$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn C.

Đặt $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|=\left|f(x)\right|$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^3+x^2+a$

Khi đó $f'(x)=4x^3-6x^2+2x=2x(2x^2-3x+1)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$.

$\Rightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in[1;2]$ và $f(1)=a; f(2)=a+4$

Ta có $\forall x\in[1;2]$ thì $\begin{cases}\max y\in\{|a|,|a+4|\}\\ \min y\in\{|a|,0,|a+4|\}\end{cases}$.

Xét các trường hợp

+ $a\ge 0\Rightarrow \max y=a+4;\min y=a\Rightarrow 2a+4=10\Rightarrow a=3$, nhận.

+ $a\le -4\Rightarrow \max y=-a;\min y=-a-4\Rightarrow -a-4-a=10\Rightarrow a=-7$, nhận.

+ $\begin{cases}a<0\\ a+4>0\end{cases}\Leftrightarrow -4<a<0\Rightarrow \min y=0;\max y\in\{a+4;-a\}$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+4=10\\ -a=10\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\ a=-10\end{array}\right.$ (Loại).

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ không lớn hơn 2020?

A. 4045. **B.** 4046. **C.** 4044. **D.** 4042.

Lời giải

Chọn A

Với $u=x^3-3x^2+m$ có $u'=3x^2-6x;\ u'=0\Leftrightarrow x=0;x=2$

Do đó $\begin{cases}\min\limits_{[1;3]}u=\min\{u(1);u(3);u(2)\}=\min\{m-2;m;m-4\}=m-4\\ \max\limits_{[1;3]}u=\max\{u(1);u(3);u(2)\}=\max\{m-2;m;m-4\}=m\end{cases}$

* Nếu $m-4\ge 0\Leftrightarrow m\ge 4\Rightarrow \min\limits_{[1;3]}f(x)=m-4\le 2020\Leftrightarrow m\le 2024\Rightarrow m\in\{4,...,2024\}$.

* Nếu $m\le 0\Rightarrow \min\limits_{[1;3]}f(x)=-m\le 2020\Leftrightarrow -2020\le m\Rightarrow m\in\{-2020;...;0\}$.

* Nếu $0<\mathrm{m}<4$ khi đó $\min\limits_{[1;3]}u<0;\ \max\limits_{[1;3]}u>0\Rightarrow \min\limits_{[1;3]}f(x)=0$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in\{-2020,...,2024\}$ có tất cả 4045 số nguyên thỏa mãn.

Câu 19. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét hàm số $f(x)=\left|\frac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0<\min\limits_{[-1;1]}f(x)<1$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Xét hàm số $g(x)=\frac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(x)=|g(x)|$.

Ta có $g(0)=-1; g(1)=\frac{m-2\sqrt{5}}{6}; g(-1)=\frac{-m-2\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $\left[\begin{array}{l} g(-1)\ge 0 \\ g(1)\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2\sqrt{5} \\ m\le -2\sqrt{3} \end{array}\right.$ thì $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=0$, không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $\begin{cases} g(-1)<0 \\ g(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{5}$

Mà m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{4m+\dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}}{(2x+4)^2}$.

TH1: $m\ge 0$.

Khi đó $g'(x)>0\,\forall x\in[-1;1]$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$.

Mà $g(0)=-1\Rightarrow g(1)>-1$. Do đó $-1<g(1)<0$. Vậy $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$ hay $m\in\{0;1;2;3;4\}$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m<0$.

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}$ trên $[-1;1]$. Ta có $h'(x)=\dfrac{x+2}{(x+4)\sqrt{x+4}}>0\,\forall x\in[-1;1]$.

Khi đó dễ thấy $h(x)\in\left[\dfrac{10}{\sqrt{3}};\dfrac{14}{\sqrt{5}}\right]$.

* Khi $m=-1\Rightarrow 4m+h(x)>0\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow g'(x)>0\ \forall x\in[-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$. Khi đó $-1<g(1)<0$ nên $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$. Vậy $m=-1$ thỏa mãn.

* Khi $m\in\{-3;-2\}\Rightarrow 4m+h(x)<0\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow g'(x)<0\ \forall x\in[-1;1]$ hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$. Khi đó $g(-1)>g(0)\Rightarrow -1<g(-1)<0$ nên $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$. Vậy $m\in\{-3;-2\}$ thỏa mãn.

Do đó $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ hay có 8 giá trị nguyên của m.

Cách 2

Nhận thấy $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ nên tồn tại giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $\begin{cases} f(x)\ge 0,\forall x\in[-1;1] \\ f(0)=1 \end{cases}$ nên suy ra $0\le \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)\le 1$.

Vậy điều kiện $0<\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)<1 \Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)>0\ (1) \\ \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)\ne 1\ (2) \end{cases}$.

□ Ta có $(1)\Leftrightarrow$ Phương trình $mx-2\sqrt{x+4}=0$ vô nghiệm trên $[-1;1]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m=\dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1;1]\setminus\{0\}$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$, $\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\}$

$g'(x)=\dfrac{-x-8}{x^2\sqrt{x+4}}<0,\forall x\in[-1;1]\setminus\{0\}$

Bảng biến thiên

x		-1	0	1	
$g'(x)$		$-$	$-$		
$g(x)$		$-2\sqrt{3} \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2\sqrt{5}$		

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện phương trình $m=\dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1;1]\backslash\{0\} \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{5}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

□ Để giải (2) trước hết ta đi tìm điều kiện để $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=1$.

Do $f(0)=1$ nên $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=f(0)$, mà $0\in(-1;1)$, suy ra $x=0$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Đặt $h(x)=\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4} \Rightarrow h'(0)=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$. Do đó với m nguyên thì (2) chắc chắn xảy ra.

Vậy $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ thỏa mãn điều kiện (2)

Kết luận: Có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 12 .Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 25. **B.** 4. **C.** 15. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3-12x+m$ $(1\le x\le 3)$ $g'(x)=3x^2-12=0 \Leftrightarrow x=2,\ x=-2$.

$g(1)=m-11,\ g(2)=m-16,\ g(3)=m-9$.

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\{|m-16|;|m-9|\}$.

Giả sử $|m-16|=12 \Leftrightarrow m=28,\ m=4$ thử lại ta thấy $m=4$ nhận.

Giả sử $|m-9|=12 \Leftrightarrow m=21,\ m=-3$ thử lại ta thấy $m=21$ nhận.

Vậy $m=4$ và $m=21$.

Câu 21. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi S_0 là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m\right|$ trên đoạn $[2;4]$ không vượt quá 30. Số phần tử của S là

A. 50. **B.** 49. **C.** 66. **D.** 73.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m$.

$f'(x)=x^3-28x+48$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6(ktm)\\x=4(tm)\\x=2\ (tm)\end{array}\right..$$

$f(2)=m+44;\ f(4)=m+32$.

$\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x)=m+32;\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=m+4$.

$\Rightarrow \max\limits_{[2;4]} y=\max\{|m+44|;|m+32|\}$.

Để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m\right|$ trên đoạn $[2;4]$ không vượt quá 30 thì

$$\begin{cases}|m+44|\le 30\\|m+32|\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-74\le m\le -14\\-62\le m\le -2\end{cases}\Leftrightarrow -62\le m\le -14.$$

Câu 22. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của ham số $f(x)=\left|e^{2x}-4e^x+m\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ bằng 6?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=e^x$, vì $x\in[0;\ln 4]\Rightarrow t\in[1;4]$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)=\left|t^2-4t+m\right|$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 6.

Đặt $s=t^2-4t$, vì $t\in[1;4]\Rightarrow s\in[-4;0]$.

Xét hàm số $g(s)=s+m$ với $s\in[-4;0]$ suy ra hàm số $g(s)$ đồng biến trên đoạn $[-4;0]$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $f(s)=|s+m|$, $s\in[-4;0]$ chỉ đạt tại các đầu mút.

TH1: $\begin{cases}\min\limits_{[-4;0]} f(s)=|m-4|=6\\|m|>|m-4|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=10\\m=-2\end{array}\right.\\|m|>|m-4|\end{cases}\Leftrightarrow m=10$ thỏa mãn.

TH2: $\begin{cases}\min\limits_{[-4;0]} f(s)=|m|=6\\|m|<|m-4|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-6\end{array}\right.\\|m|>|m-4|\end{cases}\Leftrightarrow m=-6$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-9x+m+10\right|$ trên đoạn $[0;3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. -7. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+m+10$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $g'(x)=x^2-9$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-3\notin[0;3]\end{array}\right.$

Ta có $g(0)=m+10$; $g(3)=m-8$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max\limits_{[0;3]} y = \max\limits_{[0;3]} |g(x)| \le 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)| \le 12 \\ |g(3)| \le 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+10| \le 12 \\ |m-8| \le 12 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m \le 2$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -7.

Câu 24. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 180. **B.** 136. **C.** 120. **D.** 210.

Lời giải

Chọn B

Xét $u = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ trên đoạn $[0;2]$.

$u' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \notin [0;2] \\ x = 2 \in [0;2] \\ x = 4 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} \text{u} = \max\{u(0), u(2)\} = \max\{m-30, m+14\} = m+14$.

Suy ra $\mathop{Max}\limits_{[0;2]} y = \max\{|m-30|, |m+14|\}$.

Trường hợp 1: $\mathop{Max}\limits_{[0;2]} y = |m+14|$

$\begin{cases} |m+14| \ge |m-30| \\ |m+14| \le 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+14|^2 \ge |m-30|^2 \\ -30 \le m+14 \le 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88m \ge 704 \\ -44 \le m \le 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 8 \\ -44 \le m \le 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 8 \le m \le 16$, mà $m \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow m \in \{8;9;10;...;16\}$.

Trường hợp 2: $\mathop{Max}\limits_{[0;2]} y = |m-30|$

$\begin{cases} |m-30| \ge |m+14| \\ |m-30| \le 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+14|^2 \le |m-30|^2 \\ -30 \le m-30 \le 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88m \le 704 \\ 0 \le m \le 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 8 \\ 0 \le m \le 60 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 \le m \le 8$, mà $m \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow m \in \{0;1;2;...;8\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $0+1+2+...+16 = 136$.

Câu 25. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$ trên $[0;3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.

A. 48. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 62.

Lời giải

Chọn C

Có $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 60 \Leftrightarrow f(x) \le 60, \forall x \in [0;3]$ và $\exists x_0 \in [0;3]$ sao cho $f(x_0) = 60$.

Có $f\left(x\right)\le 60\Leftrightarrow \left|2x^3-15x+m-5\right|+9x\le 60\Leftrightarrow \left|2x^3-15x+m-5\right|\le 60-9x$

$\Leftrightarrow 9x-60\le 2x^3-15x+m-5\le 60-9x\Leftrightarrow -2x^3+24x-55\le m\le -2x^3+6x+65,\forall x\in\left[0;3\right].$

Có $-2x^3+6x+65\ge 29,\forall x\in\left[0;3\right]$ nên $m\le -2x^3+6x+65,\forall x\in\left[0;3\right]\Leftrightarrow m\le 29.$

Tương tự $-2x^3+24x-55\le -23$ nên $-2x^3+24x-55\le m,\forall x\in\left[0;3\right]\Leftrightarrow m\ge -23.$

Vậy $-23\le m\le 29$ thì $f\left(x\right)\le 60,\forall x\in\left[0;3\right].$

Để $\exists x_0\in\left[0;3\right]$ sao cho $f\left(x_0\right)=60$ thì $\left[\begin{array}{l}-2x^3+24x-55=m\\-2x^3+6x+65=m\end{array}\right.$ có nghiệm trên $\left[0;3\right].$

Hay $\left[\begin{array}{l}m\ge 29\\m\le -23\end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l}m=29\\m=-23\end{array}\right.$ thì $\max\limits_{[0;3]} f\left(x\right)=60.$

Khi đó tổng các giá trị của m là $29-23=6.$

Câu 26. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+m$, ta có $g'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\notin\left[0;2\right]\\x=1\in\left[0;2\right]\end{array}\right.$.

$g\left(0\right)=m$, $g\left(1\right)=m-2$, $g\left(2\right)=m+2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x+m\right|$ bằng max của $F=\left\{\left|m\right|;\left|m-2\right|;\left|m+2\right|\right\}$

TH1: $\left|m\right|=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.$.

Với $m=3\Rightarrow F=\left\{3;1;5\right\}$ loại vì max bằng 5.

Với $m=-3\Rightarrow F=\left\{3;5;1\right\}$ loại vì max bằng 5.

TH2: $\left|m-2\right|=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=5\\m=-1\end{array}\right.$.

Với $m=5\Rightarrow F=\left\{5;3;7\right\}$ loại vì max bằng 7.

Với $m=-1\Rightarrow F=\left\{1;3;1\right\}$ có max bằng 3. Chọn $m=-1$.

TH3: $\left|m+2\right|=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\m=-5\end{array}\right.$.

Với $m=1\Rightarrow F=\left\{1;1;3\right\}$ có max bằng 3. Chọn $m=1$.

Với $m=-5\Rightarrow F=\left\{5;7;3\right\}$ loại vì max bằng 7.

Vậy $S=\left\{-1;1\right\}\Rightarrow$ có 2 giá trị m thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 27. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10$. Số phần tử của S là?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g\left(x\right)=x^4-2x^3+x^2+m\Rightarrow g'\left(x\right)=4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{2}\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm $g\left(x\right)$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$g'\left(x\right)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g\left(x\right)$	$m+4$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên của $g\left(x\right)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f\left(x\right)=\left|g\left(x\right)\right|=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$. Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m\ge 0$. Bảng biến thiên của $f\left(x\right)=\left|g\left(x\right)\right|=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$f\left(x\right)$	$m+4$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10\Leftrightarrow m+m+4=10\Leftrightarrow m=3$ (TM)

Trường hợp 2: $m<0<m+\dfrac{1}{16}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{16}<m<0$. Bảng biến thiên:

x	-1				0				$\frac{1}{2}$				1				2
$f\left(x\right)$	$m+4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10\Leftrightarrow 0+m+4=10\Leftrightarrow m=6$ (Loại)

Trường hợp 3: $m+\dfrac{1}{16}=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{16}$. Tương tự ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10\Leftrightarrow 0+m+4=10\Leftrightarrow m=6$ (Loại)

Trường hợp 4: $m+\dfrac{1}{16}<0<m+4\Leftrightarrow -4<m<-\dfrac{1}{16}$. Bảng biến thiên:

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$f(x)$	$m+4$	0	$-m$		$-m-\frac{1}{16}$		$-m$	0	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left[\begin{array}{l}\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \\ \min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0+m+4=10 \\ 0+(-m)=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6 \\ m=-10\end{array}\right.$ (Loại)

Trường hợp 5: $m+4=0 \Leftrightarrow m=-4$. Ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow 0-m=10 \Leftrightarrow m=-10$ (Loại)

Trường hợp 6: $m+4<0 \Leftrightarrow m<-4$. Ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow -m-m-4=10 \Leftrightarrow m=-7$ (Thỏa mãn)

Vậy $m \in \{-7;3\}$.

Câu 28. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{x+2}, x \in[-1;1] \Rightarrow t \in[1;\sqrt{3}]; x=t^2-2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\left|\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t}\right|$.

Xét hàm $h(t)=\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t}$ trên đoạn $[1;\sqrt{3}]$.

Ta có $h'(t)=\dfrac{2m(t^2+2)}{t^2}$

Th1: $m=0$ thì $h(t)=-4 \Rightarrow g(t)=4 \forall t \in[1;\sqrt{3}] \Rightarrow a=4$ (loại).

Th2: $m \neq 0$ thì hàm số $h(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1;\sqrt{3}]$

Ta có $h(1)=-2m-4; h(\sqrt{3})=\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Nếu $h(1).\mathrm{h}(\sqrt{3}) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \leq-2 \\ m \geq 2\sqrt{3}\end{array}\right.$ và hàm số $h(t)$ liên tục trên đoạn $[1;\sqrt{3}]$ suy ra đồ thị hàm số $h(t)$ trên đoạn $[1;\sqrt{3}]$ cắt trục hoành $\Rightarrow a=0$ (loại).

Nếu $h(1).\mathrm{h}(\sqrt{3})>0 \Leftrightarrow -2<m<2\sqrt{3}$. Khi đó, $h(1)<0; h(\sqrt{3})<0$

$\Rightarrow a=\left|\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}m=3 \\ m=4\end{array}\right.$ là các giá trị nguyên dương để $0<a<1$.

Câu 29. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^2+3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1,m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;2]$ bằng 2021. Tính giá trị $\left|m_1-m_2\right|$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{4052}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4051}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3m$, ta có $f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$ $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số trên $[-1;2]$:

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$3m-1$	↗	$3m$	↘	$3m-1$	↗	$3m+8$

Vì $\min\limits_{[-1;2]} y=2021\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-1;2]$.

Trường hợp 1 : $3m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{3}$. Ta có $\min\limits_{[-1;2]} y=\left|3m-1\right|=3m-1=2021\Leftrightarrow m=\frac{2022}{3}$

Trường hợp 2 : $3m+8<0\Leftrightarrow m<-\frac{8}{3}$. Ta có

$\min\limits_{[-1;2]} y=\left|3m+8\right|=-3m-8=2021\Leftrightarrow m=-\frac{2029}{3}$.

Vậy $\left|m_1-m_2\right|=\left|\frac{2022}{3}+\frac{2029}{3}\right|=\frac{4051}{3}$.

Câu 30. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m+1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ sao cho $\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|$. Số phần tử của S là

A. 4003. **B.** 4002. **C.** 4004. **D.** 4001.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+m+1\Rightarrow y'=f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\,(l)\\x=2\end{array}\right.$.

$f(1)=m-1;\ f(2)=m-3;\ f(4)=17+m$.

$\max\limits_{[1;4]} f(x)=m+17;\ \min\limits_{[1;4]} f(x)=m-3$.

+Nếu $m-3\ge0\Leftrightarrow m\ge3$ thì $\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|=m+17$, $\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|=m-3$. Khi đó:

$\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|\Leftrightarrow 17+m\le 3(m-3)\Leftrightarrow m\ge13$.

+Nếu $m+17\le0\Leftrightarrow m\le-17$ thì $\max\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|=-m+3$, $\min\limits_{[1;4]}\left|f(x)\right|=-17-m$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;4]}|f(x)| \le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)| \Leftrightarrow -m+3 \le 3(-17-m) \Leftrightarrow m \le -27$.

+Nếu $(m-3)(m+17) < 0 \Leftrightarrow -17 < m < 3$ thì

$\max\limits_{[1;4]}|f(x)| = \max\{|m+17|,|m-3|\} = \max\{m+17, 3-m\} > 0; \min\limits_{[1;4]}|f(x)| = 0$.

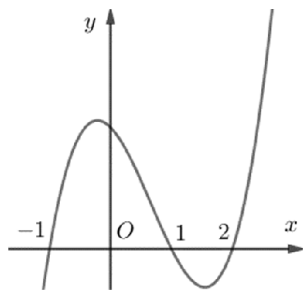
Khi đó, không thỏa điều kiện $\max\limits_{[1;4]}|f(x)| \le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)|$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} m \le -27 \\ m \ge 13 \end{array}\right.$ kết hợp với $m \in [-2020; 2020]$ ta có $m \in [-2020; -27] \cup [13; 2020]$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

Dạng 2. Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất hàm ẩn, hàm hợp

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. $f(1)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(0)$.

Lời giải

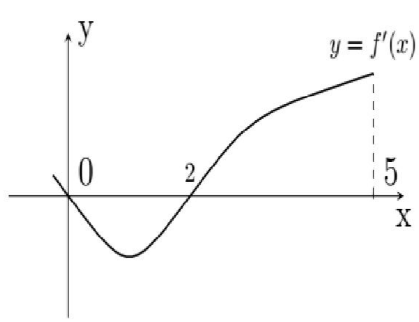
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $f(1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là:



A. $f(2)$; $f(5)$. **B.** $f(0)$; $f(5)$. **C.** $f(2)$; $f(0)$. **D.** $f(1)$; $f(5)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.

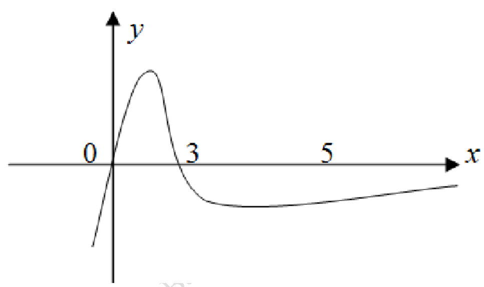
x	0		2		5
f'	0		0		
f	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(5)$

Khi đó: $\begin{cases} \min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2) \\ f(3) > f(2) \end{cases}$,

mà $f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)+f(2)<f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)<f(5)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là: $f(2)$; $f(5)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(3)=f(5)-f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



A. $m=f(5), M=f(3)$ **B.** $m=f(5), M=f(1)$

C. $m=f(0), M=f(3)$ **D.** $m=f(1), M=f(3)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$

x	0		3		5
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(3)$	↘	$f(5)$

$\Rightarrow M=f(3)$ và $f(1)<f(3), f(4)<f(3)$

$f(5)-f(0)=f(1)-f(3)+f(4)-f(3)<0 \Rightarrow f(5)<f(0) \Rightarrow m=f(5)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(4x-x^2)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

$g'(x)=(4-2x)f'(4x-x^2)+x^2-6x+8=(2-x)\left[2f'(4x-x^2)+4-x\right]$.

Với $x\in[1;3]$ thì $4-x>0$; $3\le 4x-x^2\le 4$ nên $f'(4x-x^2)>0$.

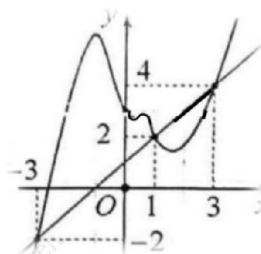
Suy ra $2f'(4x-x^2)+4-x>0$, $\forall x\in[1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1		2		3
g'		+	0	−	
g	$g(1)$	↗	$g(2)$	↘	$g(3)$

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} g(x)=g(2)=f(4)+7=12$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



A. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$. **B.** $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$. **C.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(0)$. **D.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

Lời giải

Chọn D

$g(x)=2f(x)-(x+1)^2 \Rightarrow g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Và

với $x\in(-\infty;-3): f'(x)<x+1\Rightarrow g'(x)<0$

với $x\in(-3;1): f'(x)>x+1\Rightarrow g'(x)>0$,

với $x\in(1;3): f'(x)<x+1\Rightarrow g'(x)<0$

với $x\in(3;+\infty): f'(x)>x+1\Rightarrow g'(x)>0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2017)$ **B.** $(2017;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-2017;0)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm sồ $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	

Đặt $t=x+2017$.

Ta có $y=f(x+2017)+2018x=f(t)+2018t-2017.2018=g(t)$.

$g'(t)=f'(t)+2018$.

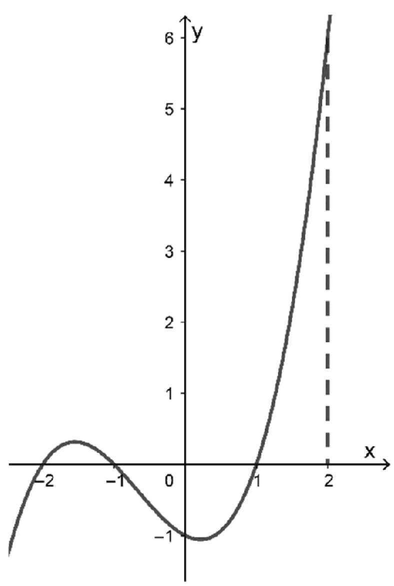
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha\in(-\infty;0)$ và một nghiệm kép $t=2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0=\alpha\in(-\infty;0)$.

Suy ra hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà $x_0+2017\in(-\infty;0)\Leftrightarrow x_0\in(-\infty;-2017)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-1)+f(0)<f(1)+f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là:

A. $f(1)$; $f(2)$. **B.** $f(2)$; $f(0)$. **C.** $f(0)$; $f(2)$. **D.** $f(1)$; $f(-1)$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ như sau

x	-1		0		1		2
y'		$-$			0	$+$	
y	$f(-1)$	↘	$f(0)$	↘	$f(1)$	↗	$f(2)$

Nhận thấy

□ $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)$.

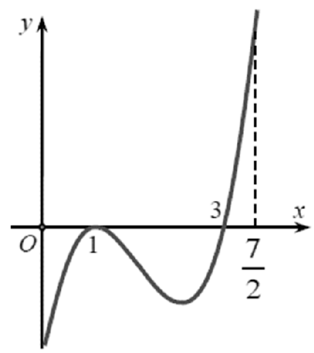
□ Để tìm $\max\limits_{[-1;2]} f(x)$ ta so sánh $f(-1)$ và $f(2)$.

Theo giả thiết, $f(-1)+f(0)<f(1)+f(2) \Leftrightarrow f(2)-f(-1)>f(0)-f(1)$.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(0)-f(1)>0$. Do đó $f(2)-f(-1)>0 \Leftrightarrow f(2)>f(-1)$.

Hay $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\dfrac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0=0$. **B.** $x_0=\dfrac{7}{2}$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0=3$.

Lời giải

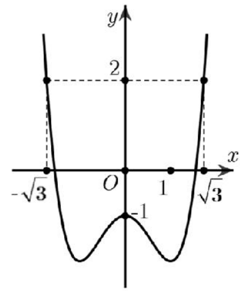
Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên trên đoạn $\left[0;\dfrac{7}{2}\right]$ như sau:

x	0		1		3		$\frac{7}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘		↘	$f(3)$	↗	$f\left(\frac{7}{2}\right)$

Do đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$. **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

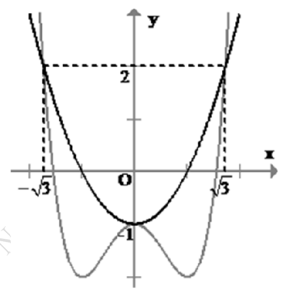
C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(\sqrt{3}\right)$. **D.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3 \Leftrightarrow h'(x) = 3\left[f'(x) - \left(x^2 - 1\right)\right]$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ là một parabol có toạ độ đỉnh $C(0;-1)$, đi qua $A\left(-\sqrt{3};2\right)$, $B\left(\sqrt{3};2\right)$.



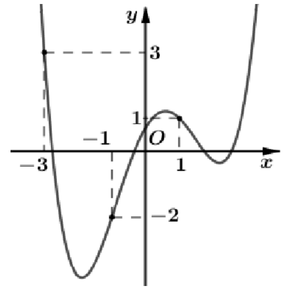
Từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$.

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$h'(x)$		-	0	-	
$h(x)$	$h\left(-\sqrt{3}\right)$				$h\left(\sqrt{3}\right)$

Với $h\left(-\sqrt{3}\right) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$, $h\left(\sqrt{3}\right) = 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

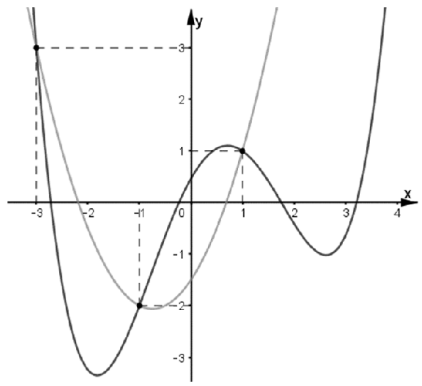


A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$. **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = \dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$. **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} = f'(x) - \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right)$.

Vẽ parabol $(P): y = x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$. Ta thấy (P) đi qua các điểm có toạ độ $(-3;3)$, $(-1;2)$, $(1;1)$.

□ Trên khoảng $(-3;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên
$f'(x) < \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0$.

□ Trên khoảng $(-1;1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên (P) nên
$f'(x) > \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) > 0$.

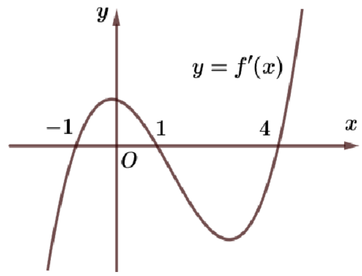
□ Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên
$f'(x) < \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0$.

Bảng biến thiên

x	-3		-1		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	
g	$g(-3)$ ↘		$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị

2) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

3) $f(1)>f(2)>f(4)$.

4) Trên đoạn $[-1;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=4\end{array}\right.$$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;4)$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup(4;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	$CĐ$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên đáp án đúng là mệnh đề số 3 và 4

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(4x-x^2)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 15. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(4x-x^2).(4-2x)+x^2-6x+8=2(2-x)\left[f'(4x-x^2)+\frac{4-x}{2}\right]$

Xét thấy $\forall x \in [1;3] \Rightarrow 3 \le 4x - x^2 \le 4 \Rightarrow f'(4x - x^2) > 0$

Mặt khác $\frac{4-x}{2} > 0\ \forall x \in [1;3]$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$g(1) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{17}{3} = 5 + \frac{17}{3} = \frac{32}{3}$

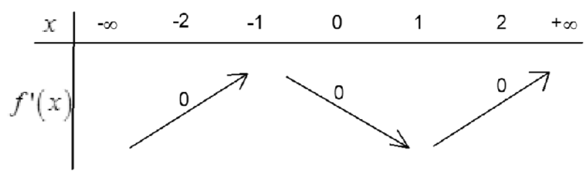
$g(3) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{19}{3} = 5 + \frac{19}{3} = \frac{34}{3}$

$g(2) = 5 + 7 = 12.$

$\Rightarrow g(1) < g(3) < g(2)$

Vậy $\max\limits_{[1;3]} g(x) = 12$ tại $x = 2.$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là



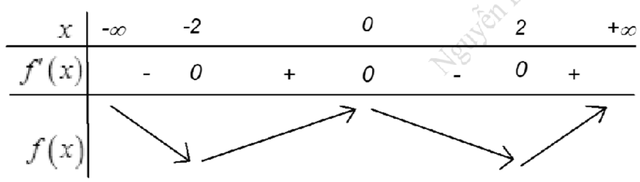
A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x \in [-1;1] \Rightarrow 2x \in [-2;2]$.

Từ bảng biến thiên của $y = f'(x)$ thì bảng biến thiên $y = f(x)$ như sau:



Ta thấy $\forall x \in [-1;1]$ ta có $\begin{cases} f(2x) \le f(0) \\ -\sin^2 x \le 0 = \sin(0) \end{cases}$, do đó $g(x) \le g(0) = f(0)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét hàm số $g(x) = f(3x-1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. 13. **B.** -7. **C.** -13. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

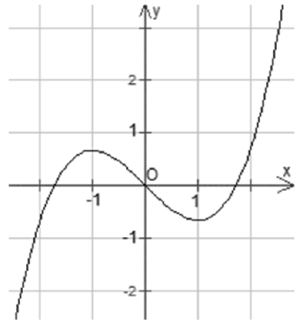
Đặt $u = 3x - 1 \Rightarrow g(x) = f(u) + m$.

$x \in [0;1] \Rightarrow u \in [-1;2]$.

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\max\limits_{[0;1]} g(x) = \max\limits_{[-1;2]} \left(f(u) + m\right) = \max\limits_{[-1;2]} f(u) + m = 3 + m$.

Để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = 10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$ bằng

A. $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

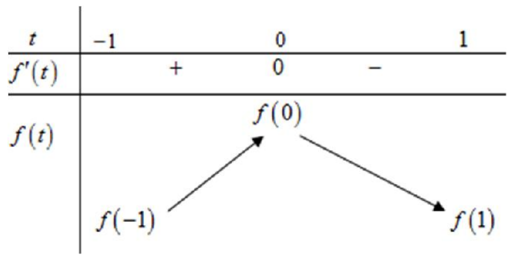
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Vì $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên



Ta có: $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=\max\limits_{[-1;1]} f(t) \Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;10]} f(x)=f(2)=4$. Xét hàm số $g(x)=f(x^3+x)-x^2+2x+m$. Giá trị của tham số m để $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^3+x$. Vì $x\in[0;2]\Rightarrow t\in[0;10]$.

Ta có: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=\max\limits_{x\in[0;2]}\left[f(x^3+x)-x^2+2x+m\right]\le \max\limits_{x\in[0;2]} f(x^3+x)+\max\limits_{x\in[0;2]}\left[-x^2+2x+m\right]$

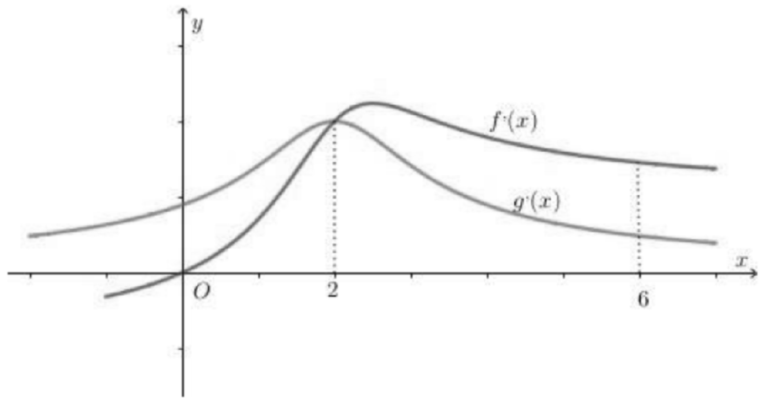
$=\max\limits_{t\in[0;10]} f(t)+1+m$ (với $t=x^3+x$ và $\max\limits_{x\in[0;2]}\left[-x^2+2x+m\right]=1+m$).

$\le \max\limits_{x\in[0;10]} f(x)+1+m=4+1+m=5+m$.

Suy ra: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=5+m\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ t=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Theo giả thiết, ta có: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8\Leftrightarrow m+5=8\Leftrightarrow m=3$.

Câu 17. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(6),h(2)$. **B.** $h(2),h(6)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(2),h(0)$.

Lời giải

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

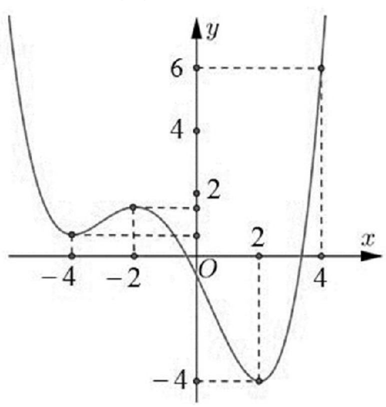
x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(6)$

Và $f(0)-f(6)<g(0)-g(6) \Leftrightarrow f(0)-g(0)<f(6)-g(6)$.

Hay $h(0)<h(6)$.

Vậy $\max\limits_{[0;6]} h(x)=h(6)$; $\min\limits_{[0;6]} h(x)=h(2)$.

Câu 18. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

A. 4029. **B.** 4035. **C.** 4031. **D.** 4041.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\dfrac{8x}{x^2+1}$. Ta có: $t'=\dfrac{-8x^2+8}{\left(x^2+1\right)^2}$; $t'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$\Rightarrow t\in[-4;4]$.

Hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ trở thành $g(t)=\left|f(t)+m-1\right|, t\in[-4;4]$.

Đặt $h(t)=f(t)+m-1, t\in[-4;4]$, ta có: $h'(t)=f'(t)$.

$$h'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4\in[-4;4] \\ t=-2\in[-4;4] \\ t=2\in[-4;4] \end{array}\right..$$

Ta có: $h(-4)\approx 0,8+m-1=m-0,2$;

$h(4)=6+m-1=m+5$;

$h(-2)\approx 1,6+m-1=m+0,6$;

$h(2)=-4+m-1=m-5$.

$\underset{\mathbb{R}}{\operatorname{Max}}\, y=\underset{[-4;4]}{\operatorname{Max}}|h(t)|=\operatorname{Max}\{|m+5|;|m-5|\}$.

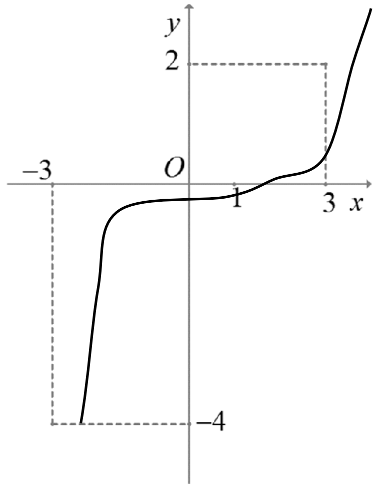
Yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow \begin{cases}|m+5|\le 2020 \\ |m-5|\le 2020\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2020\le m+5\le 2020 \\ -2020\le m-5\le 2020\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2025\le m\le 2015 \\ -2015\le m\le 2025\end{cases}$

$\Leftrightarrow -2015\le m\le 2015$.

Vậy có tất cả 4031 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.



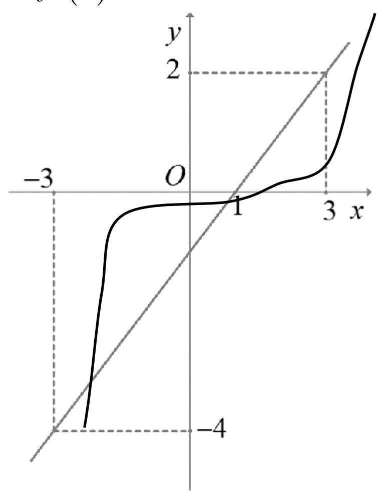
Khi đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại

A. $x = -3$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2(f'(x) - (x-1))$. Vẽ đồ thị hàm số $y = x - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



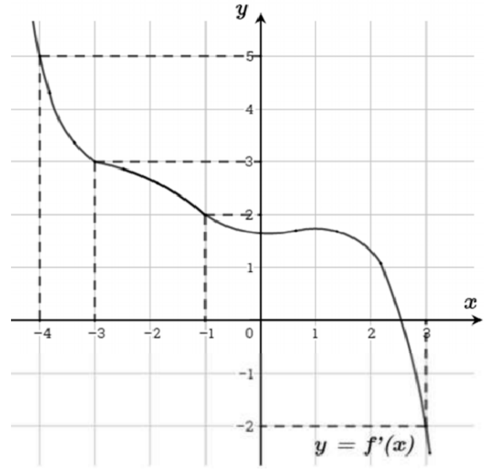
Dựa vào đồ thị ta thấy

+ $\int_{-3}^{1} g'(x)dx > 0 \Rightarrow g(1) > g(-3); \int_{1}^{3} g'(x)dx < 0 \Rightarrow g(1) > g(3)$. Do đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại $x = 3$ hoặc $x = -3$.

+ Phần hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = x - 1; x = -3; x = 1$ có diện tích lớn hơn phần hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = x - 1; x = 1; x = 3$ nên $\int_{-3}^{1} |g'(x)|dx > \int_{1}^{3} |g'(x)|dx \Rightarrow g(3) > g(-3)$.

Vậy $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại $x = -3$.

Câu 20. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x=-3$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

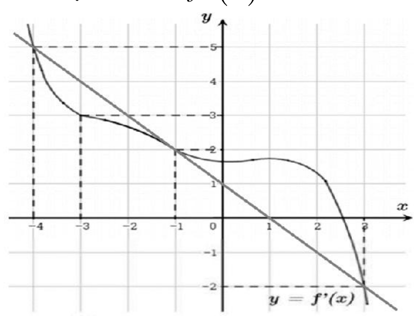
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ trên $[-4;3]$.

Ta có: $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1-x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y=1-x$.



Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-4)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(3)$

Vậy $\min\limits_{[-4;3]} g(x)=g(-1) \Leftrightarrow x=-1$.

Câu 21. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3, f'(2)=f'(-2018)=0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2015)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1009;2)$. **D.** $(-2015;1)$.

Lời giải.

Chọn C

Từ bảng xét dấu của $f''(x)$ và giả thiết $f'(0)=3, f'(2)=f'(-2018)=0$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2018		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+		+	0	-	0	+	
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		-2018		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Hàm số $y=f\left(|x-1|-2018\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $|x-1|-2018=-2018 \Leftrightarrow |x-1|=0 \Leftrightarrow x=1\in(-1009;2)$.

Câu 22. **(THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2020$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	$-$	0	+	

Hàm số $y=f(x+2019)+2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2019)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2019;0)$. **D.** $(2019;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	$-$	0	+	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2020	$\nearrow$	

Ta có $y'=f'(x+2019)+2020 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow f'(x+2019)=-2020$.

Từ bảng biến thiên trên ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2019=a \\ x+2019=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a-2019 \\ x=-2017 \end{array}\right.$, với $a<0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x+2019)+2020x$

x	$-\infty$		$a-2019$		-2017		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	+	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên có hàm số $y=f(x+2019)+2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=a-2019$.

Vì $a<0$ nên $x_0\in(-\infty;-2019)$.

Dạng 3. Ứng dụng gtln-gtnn giải bài toán thực tế

Câu 1. **(Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - 2020)** Cho số $a>0$. Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a, tam giác có diện tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử tam giác ABC vuông ở A thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Giả sử $AB+BC=a \Rightarrow AB=a-BC$

Đặt $BC=x; 0<x<a$.

$\Rightarrow AB=a-x$ và $AC=\sqrt{x^2-(a-x)^2}=\sqrt{2ax-a^2}$

Diện tích tam giác ABC là $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-a^2}$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-a^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2ax-a^2}+(a-x).\frac{a}{\sqrt{2ax-a^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2ax+a^2+a^2-ax}{\sqrt{2x^2-a^2}}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2a^2-3ax}{\sqrt{2x^2-a^2}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$.

x	0		$\frac{2a}{3}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

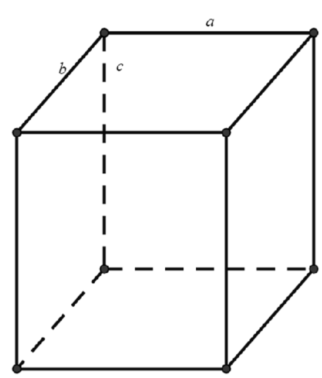
Vậy diện tích lớn nhất của tam giác ABC là $S=f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Câu 2. **(Mã 101 2018)** Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $2,26\,m^3$ **B.** $1,61\,m^3$ **C.** $1,33\,m^3$ **D.** $1,50\,m^3$

Lời giải

Chọn D



Giả sử hình hộp chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Ta có dung tích của bể cá: $V=abc$

Mặt khác theo giả thiết ta có: $\begin{cases} ab+2bc+2ac=6,5 \\ a=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2+6bc=6,5 \\ a=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{6,5-2b^2}{6b} \\ a=2b \end{cases}$

Khi đó $V=2b^2.\dfrac{6,5-2b^2}{6b}\Leftrightarrow V=\dfrac{6,5b-2b^3}{3}$.

Xét hàm số: $f\left(b\right)=\dfrac{6,5b-2b^3}{3}$. Có BBT

b	0		$\dfrac{\sqrt{39}}{6}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất là: $f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=1,50\ m^3$.

Câu 3. **(Mã 104 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 (m/s) **B.** 27 (m/s) **C.** 144 (m/s) **D.** 36 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Ta có: $v=s'=-t^2+12t$; $v'=-2t+12$; $v'=0\Leftrightarrow t=6$.

BBT

t	0		6		9
v'		$+$	0	$-$	
v		$\nearrow$	36	$\searrow$	

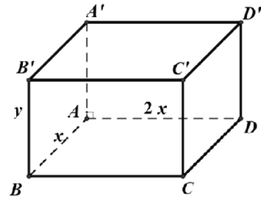
Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t=6$. Giá trị lớn nhất là $v\left(6\right)=36\text{m/s}$.

Câu 4. **(Mã 103 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5\ m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\ m^3$ **B.** $0,96\ m^3$ **C.** $1,33\ m^3$ **D.** $1,51\ m^3$

Lời giải

Chọn A



Gọi x,y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x,y>0$).

Ta có thể tích bể cá $V=2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy+2.2xy+2x^2=5\Leftrightarrow 6xy+2x^2=5$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{5-2x^2}{6x}$ (Điều kiện kiện $y>0 \Leftrightarrow 5-2x^2>0 \Rightarrow 0<x<\sqrt{\dfrac{5}{2}}$)

$\Rightarrow V=2x^2\dfrac{5-2x^2}{6x}=\dfrac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V'=\dfrac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V'=0 \Leftrightarrow 5-6x^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow$	0

$\Rightarrow V_{max}=\dfrac{5\sqrt{30}}{27}\approx 1,01\, m^3$.

Câu 5. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Lời giải

Xét hàm số $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$, $(t>0)$.

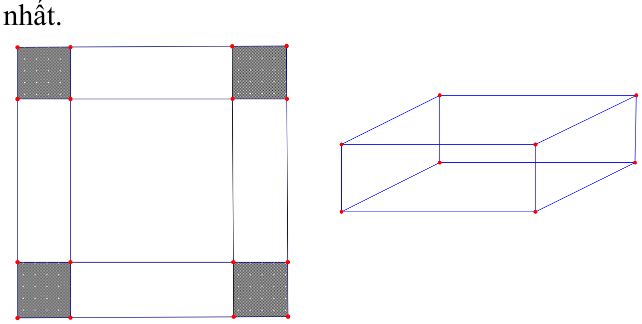
$c'(t)=\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$.

$c'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$.

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Với $t=1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bênh nhân cao nhất.

Câu 6. **(Dề Minh Họa 2017)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=3$ **B.** $x=2$ **C.** $x=4$ **D.** $x=6$

Lời giải

Chọn B

Ta có : $h=x\left(cm\right)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12-2x\left(cm\right)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S=\left(12-2x\right)^2\left(cm^2\right)$. Ta có: $\begin{cases}x>0\\12-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x<6\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0;6\right)$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.\left(12-2x\right)^2$

Xét hàm số: $y=x.\left(12-2x\right)^2\ \forall x\in\left(0;6\right)$

Ta có : $y'=\left(12-2x\right)^2-4x\left(12-2x\right)=\left(12-2x\right)\left(12-6x\right)$;

$y'=0\Leftrightarrow\left(12-2x\right).\left(12-6x\right)=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=6$ (loại).

x	0		2		6
y'		+	0	−	
y		↗		↘	

Suy ra với $x=2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y\left(2\right)=128$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$. **B.** $\frac{112}{4+\pi}$. **C.** $\frac{84}{4+\pi}$. **D.** $\frac{92}{4+\pi}$.

Lời giải

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x\,(m)$ ($0<x<28$)

=> chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28-x$ (m)

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: R = $\frac{28-x}{2\pi}$

=> Diện tích hình tròn: $\pi R^2=\pi.\left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2=\frac{784-56x+x^2}{4\pi}$

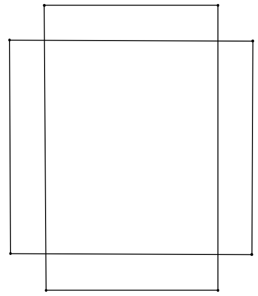
+) Tổng diện tích hai hình: $\frac{x^2}{16}+\frac{784-56x+x^2}{4\pi}=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{14}{\pi}x+\frac{196}{\pi}$

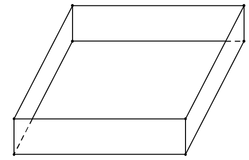
Xét $f(x)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{14}{\pi}x+\frac{196}{\pi}$. Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{14}{\pi}.\frac{16\pi}{2\left(\pi+4\right)}=\frac{112}{\pi+4}$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi}\ m$

Câu 8. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\left(cm\right)$, rồi gập tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





A. $x=\dfrac{8-2\sqrt{21}}{3}$ **B.** $x=\dfrac{10-2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{9}$. **D.** $x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có : $h=x\,(cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $10-2x\,(cm)$ và $8-2x\,(cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S=(10-2x)(8-2x)(cm^2)$. Ta có:

$$\begin{cases} x>0 \\ 10-2x>0 \\ 8-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;4)$$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.(10-2x).(8-2x)$

Xét hàm số: $y=x.(10-2x).(8-2x)\,\forall x\in(0;4)$

Ta có : $y'=12x^2-72x+80$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{3}>4\ (l) \\ x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}\quad (n) \end{array}\right.$$

x	0		$\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$		4
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

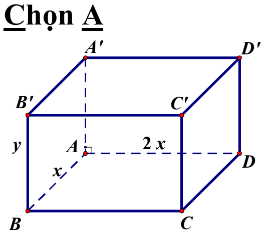
Suy ra với $x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất.

Câu 9. **(Mã 103 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\,m^3$. **B.** $0,96\,m^3$. **C.** $1,33\,m^3$. **D.** $1,51\,m^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi x,y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x,y>0$).

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2 y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

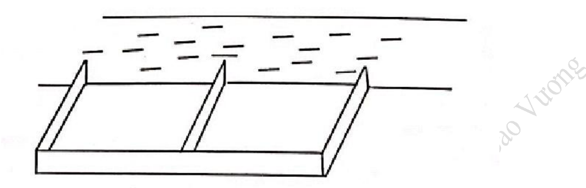
$\Leftrightarrow y = \dfrac{5-2x^2}{6x}$ (Điều kiện kiện $y > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\dfrac{5}{2}}$)

$\Rightarrow V = 2x^2 \dfrac{5-2x^2}{6x} = \dfrac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V' = \dfrac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow$	0

$\Rightarrow V_{\max} = \dfrac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01\, m^3$.

Câu 10. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



A. $3125\, m^2$. **B.** $50\, m^2$. **C.** $1250\, m^2$. **D.** $6250\, m^2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$).

Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).

Số tiền phải làm là: $x.3.50000 + y.60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \dfrac{500-5x}{2}$.

Diện tích đất: $S = x.y = x.\dfrac{500-5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$

Ta có: $S' = 250 - 5x$.

$S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

x	0		50		$+\infty$
S'		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	6250	$\searrow$	$-\infty$

Vậy: $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250\ (m^2)$ khi $x = 50$.

Câu 11. **(Chuyên Long An-2019)** Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\mathrm{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể)?

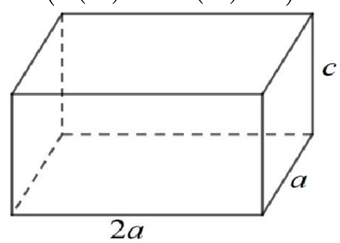
A. 90 triệu đồng. **B.** 168 triệu đồng. **C.** 54 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là a, $2a$, c $\left(a(m)>0, c(m)>0\right)$.



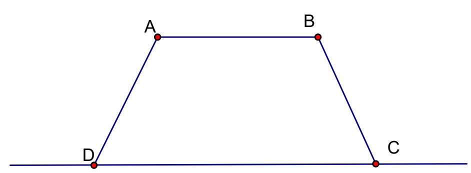
Ta có diện tích cách mặt cần xây là $S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac$.

Thể tích bể $V=a.2a.c=2a^2c=288 \Rightarrow c=\dfrac{144}{a^2}$.

Suy ra $S=2a^2+6a.\dfrac{144}{a^2}=2a^2+\dfrac{864}{a}=2a^2+\dfrac{432}{a}+\dfrac{432}{a}\geq 3.\sqrt[3]{2a^2.\dfrac{432}{a}.\dfrac{432}{a}}=216$.

Vậy $S_{\min}=216\,\mathrm{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất là $216.500000=108$ triệu đồng.

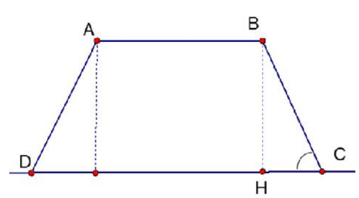
Câu 12. **(Kinh Môn - Hải Dương L2 2019)** Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12\left(m\right)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2?



A. $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$. **C.** $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ đường cao BH, gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x\in\left(0°;90°\right)$.

Diện tích mảnh vườn là:

$$S=\frac{1}{2}BH\left(AB+CD\right)=\frac{1}{2}BC.\sin x\left(2.AB+2BC.\cos x\right)=\frac{1}{2}AB^2\left(2\sin x+\sin 2x\right)$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=2\sin x+\sin 2x$ với $x\in\left(0^0;90^0\right)$ có $f'\left(x\right)=2\cos x+2\cos 2x$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x+2\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=-1\end{array}\right.$

Do $x\in\left(0^0;90^0\right)$ nên ta nhận $\cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=60^0$. Ta có bảng biến thiên:

x	0^0		60^0		90^0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\max\limits_{\left(0^0;90^0\right)} f(x)\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được tại $x=60^0$.

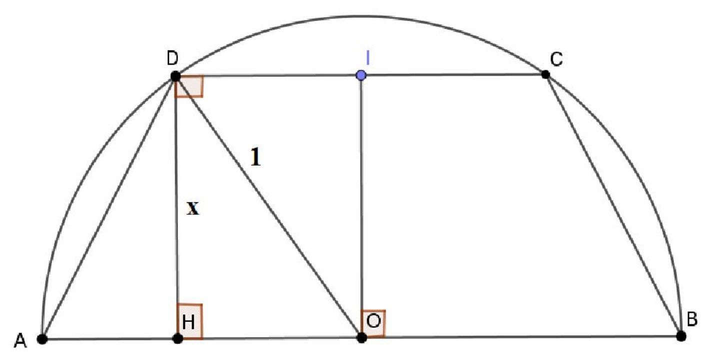
$\Rightarrow \max S=108\sqrt{3}\left(m^2\right)$ khi góc ở đáy CD của hình thang bằng 60^0 $\left(\widehat{C}=\widehat{D}=60^0\right)$.

Câu 13. **(Sở GD Quảng Nam - 2019)** Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AB, I là trung điểm của đoạn CD và O là trung điểm của AB. Đặt $DH=x$, $0<x<1$. Ta có $DC=2DI=2OH=2\sqrt{OD^2-DH^2}=2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S=f(x)=\dfrac{(AB+CD)DH}{2}=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)x$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+1-2x^2=0$ (*)

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$, (điều kiện $t\ge 0$) khi đó phương trình (*) trở thành $2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

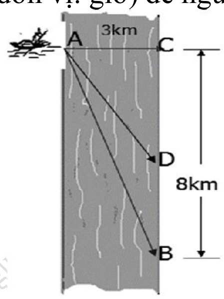
$t=-1$ loại. $t=\dfrac{1}{2}$ ta có $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 14. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình 2018)** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8\text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{\sqrt{73}}{6}$. **D.** $1+\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

❍ Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

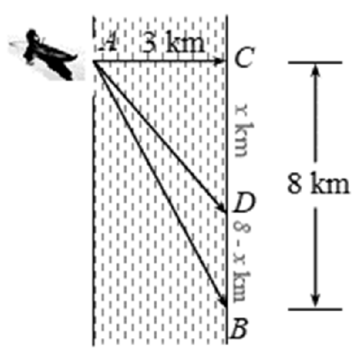
Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AC: $\frac{3}{6} = 0,5$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường CB: $\frac{8}{8} = 1$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $1,5$ (giờ).

❍ Cách 2: chèo trực tiếp trên quãng đường $AB = \sqrt{3^2+8^2} = \sqrt{73}$ mất $\frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1^{h}26'$.

❍ Cách 3:



Gọi $x\ (\text{km})$ là độ dài quãng đường BD; $8-x\ (\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD=\sqrt{x^2+9}$ là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\dfrac{8-x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$ trên khoảng $\left(0;\,8\right)$

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{9}{\sqrt{7}}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Dạng 4. Dùng phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 1. **(HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn $x\ge 0,y\ge 0,z\ge 1$, $x+y+z=2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$ bằng $\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a+b$ bằng

A. 5. **B.** 43. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=xyz\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2.z=\left(\dfrac{2-z}{2}\right)^2.z=\dfrac{1}{4}\left(4z-4z^2+z^3\right)$.

Xét hàm số $f\left(z\right)=\dfrac{1}{4}\left(4z-4z^2+z^3\right)$ trên $\left[1;2\right]$.

Ta có: $f'\left(z\right)=\dfrac{1}{4}\left(4-8z+3z^2\right); f'\left(z\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{2}{3}(loai)\\ z=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

z	1		2
$f'(z)$		$-$	
$f(z)$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P\le\dfrac{1}{4}$.

Vậy $P_{\max}=\dfrac{1}{4}$ khi $\begin{cases} z=1 \\ x=y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a=1;b=4 \Rightarrow 2a+b=6$.

Câu 2. **(Chuyên Bắc Giang Nam 2019)** Cho $x^2-xy+y^2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+xy+y^2$ bằng:

A. $\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Xét $\dfrac{P}{2}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{2}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$

+nếu $y=0$ thì $x^2=2$. Do đó $P=x^2=2$ suy ra $\min P=2$

+nếu $y\neq 0$ ta chia tử mẫu cho y^2 ta được

$$\frac{P}{2}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{1+\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, khi đó $\dfrac{P}{2}=\dfrac{1+t+t^2}{1-t+t^2}$

Xét $f(t)=\dfrac{1+t+t^2}{1-t+t^2}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{-2t^2+2}{\left(1-t+t^2\right)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Khi đó $\min\dfrac{P}{2}=\dfrac{1}{3}$ do đó $\min P=\dfrac{2}{3}$.

Câu 3. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M+m$

A. 42 **B.** 41 **C.** 43 **D.** 44

Lời giải

Chọn C

$(x+y)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\sqrt{y+1}\right)^2\le 3(x+y)\Leftrightarrow 0\le x+y\le 3$

$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=(x+y)^2+2(x+y)+2+8\sqrt{4-(x+y)}$

Đặt $t=\sqrt{4-(x+y)},t\in[1;2]$.

Ta có: $f(t)=\left(4-t^2\right)^2+2\left(4-t^2\right)+2+8t=t^4-10t^2+8t+26$.

$f'(t)=4t^3-20t+8$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t^2+2t-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\in[1;2]\\t=-1+\sqrt{2}\notin[1;2]\\t=-1-\sqrt{2}\notin[1;2]\end{array}\right.$$

$f(1)=25;f(2)=18$.

Suy ra $m=\min\limits_{[1;2]}f(t)=f(2)=18;M=\max\limits_{[1;2]}f(t)=f(1)=25$.

Vậy $M+m=43$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị -2019)** Cho x, $y>0$ thỏa mãn $x+y=\frac{3}{2}$ và biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính x^2+y^2.

A. $\frac{153}{100}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{2313}{1156}$. **D.** $\frac{25}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $x+y=\frac{3}{2}$ suy ra $y=\frac{3}{2}-x$. Ta có: $0<x,y<\frac{3}{2}$.

Xét hàm $P(x)=\frac{4}{x}+\frac{1}{4\left(\frac{3}{2}-x\right)}=\frac{4}{x}+\frac{1}{6-4x}$ trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$, ta có:

$P'(x)=-\frac{4}{x^2}-\frac{-4}{(6-4x)^2}$.

$$P'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{(6-4x)^2}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x^2=(6-4x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6-4x\\x=4x-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{6}{5}\\x=2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của $P(x)$ trên $\left(0;\frac{3}{2}\right)$:

x	0		$\frac{6}{5}$		$\frac{3}{2}$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{25}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\left(0;\frac{3}{2}\right)}P(x)=\frac{25}{6}$ khi $x=\frac{6}{5}$.

Với $x=\dfrac{6}{5}$ thì $y=\dfrac{3}{10}$.

Như vậy $\min P=\dfrac{25}{6}$ khi $x=\dfrac{6}{5}$, $y=\dfrac{3}{10}$.

Khi đó, $x^2+y^2=\dfrac{153}{100}$.

Câu 5. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2019)** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$. Gọi M,m tương ứng là GTLN và GTNN của $Q=f\left(\dfrac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng:

A. $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-4\sqrt{2}$. **D.** $-4-2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\dfrac{5x-y+2}{x+y+4}$. Theo giả thiết, $x^2-xy+y^2=1\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}(x-y)^2+\dfrac{1}{4}(x+y)^2=1$

nên ta đặt $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\\ \sin\varphi=\dfrac{1}{2}(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi\\ x+y=2\sin\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi+\sin\varphi\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi+\sin\varphi\end{cases}$ $(0\le\varphi\le2\pi)$.

Khi đó, $t=\dfrac{2\sqrt{3}\cos\varphi+4\sin\varphi+2}{2\sin\varphi+4}\Leftrightarrow(t-2).\sin\varphi-\sqrt{3}.\cos\varphi=1-2t$ (1).

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow(t-2)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2\ge(1-2t)^2\Leftrightarrow3t^2-6\le0\Leftrightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Xét hàm số $Q=f(t)=2t^3-3t^2+1$, $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$f'(t)=6t^2-6t$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ t=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\end{array}\right.$.

$f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$; $f(0)=1$; $f(1)=0$; $f\left(\sqrt{2}\right)=-5+4\sqrt{2}$.

$\Rightarrow\begin{cases}M=\max Q=\max\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}f(t)=f(0)=1\\ m=\min Q=\min\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}f(t)=f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}\end{cases}$.

Vậy $M+m=-4-4\sqrt{2}$.

Câu 6. **(Sở Lào Cai - 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2+c^2>\dfrac{4}{3}$. **B.** $a^2+b^2+c^2<\dfrac{4}{3}$. **C.** $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{4}{3}$. **D.** $a^2+b^2+c^2\le\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0(1)$

Nhận xét $x=0$ không phải là nghiệm. Với $x\ne0$ phương trình trở thành

$(1)\Leftrightarrow ax^2+bx+c=-\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)(x\ne0)$

$\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(ax^2+bx+c\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^4+x^2+1\right)$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge \frac{\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^2}{x^4+x^2+1}=\frac{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$$

$$t=x^2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow t\ge 2\Rightarrow f(t)=\frac{t^2}{t+1},\forall t\ge 2\Rightarrow f'(t)=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0,\forall t\ge 2$$

Bảng biến thiên

Vậy để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành thì $a^2+b^2+c^2\ge\frac{4}{3}$

Câu 7. **(THPT Trần Nhân Tông 2018)** Cho hai số thực x,y thỏa mãn: $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

A. $\frac{296\sqrt{15}-18}{9}$. **B.** $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\frac{36-4\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\frac{-4\sqrt{6}+18}{9}$.

Lời giải

Ta có $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

$\Leftrightarrow 27x^3+6x=(3xy-5)\sqrt{3xy-5}+2\sqrt{3xy-5}$.

Xét hàm $f(t)=t^3+2t$ với $t\in(0;+\infty)$

có $f'(t)=3t^2+2>0\forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó ta có $3x=\sqrt{3xy-5}\Rightarrow x\ge 0$ và $9x^2=3xy-5$.

Với $x=0$ thì $0=-5\,(l)$.

với $x>0$ thì $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+6xy+\left(9x^2+3\right)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+6xy+(3xy-2)(x+y-2)$

$=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-2(x+y)+4$

$=(x+y)^3-2(x+y)+4$

Mà $x+y=x+\frac{9x^2+5}{3x}=4x+\frac{5}{3x}\ge 2\sqrt{4x.\frac{5}{3x}}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Đặt $t=x+y$ thì $t\ge\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Xét $f(t)=t^3-2t+4$ với $t\ge\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $f'(t)=3t^2-2>0$ với $\forall t\ge\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $f(t)\ge f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$

Suy ra $P\ge\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. Vậy GTNN của P là $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$.

Câu 8. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho $x,y>0$ và $x+y=\frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2+y^2=\frac{25}{32}$. **B.** $x^2+y^2=\frac{17}{16}$. **C.** $x^2+y^2=\frac{25}{16}$. **D.** $x^2+y^2=\frac{13}{16}$.

Lời giải

Từ $x+y=\frac{5}{4}\Rightarrow y=\frac{5}{4}-x$, nên $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$.

Xét hàm số $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$ với $0<x<\frac{5}{4}$.

$$P'=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{(5-4x)^2};\ P'=0\Leftrightarrow x^2=(5-4x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left(0;\frac{5}{4}\right)\\ x=\frac{5}{3}\notin\left(0;\frac{5}{4}\right)\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$\frac{5}{4}$
P'		$-$	0	$+$	
P		$\searrow$	5	$\nearrow$	

Như vậy: $\min P=5$ khi $x=1$; $y=\frac{1}{4}$.

Khi đó $x^2+y^2=\frac{17}{16}$.

Câu 9. **(Xuân Trường - Nam Định -2018)** Cho x,y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\le 1-x-\frac{1}{y}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}$?

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{7}{30}$. **B.** $\frac{7}{30}-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}+7}{30}$.

Lời giải

$(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\le 1-x-\frac{1}{y}$

$\Leftrightarrow y(xy+1)\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{xy+1}^2-\sqrt{y}^2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\right)\left[y(xy+1)+\left(\sqrt{xy+1}+\sqrt{y}\right)\right]\le 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}\le 0\Leftrightarrow xy+1\le y$

$\Leftrightarrow\frac{x}{y}\le-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 0<\frac{x}{y}\le\frac{1}{4}$. Dấu bằng đạt được khi $y=2$, $x=\frac{1}{2}$.

$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$ với $t=\frac{x}{y}$ và $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

Ta có $\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}\le\frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)$ với mọi $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$

Thật vậy $\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}\le\frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)\Leftrightarrow-\frac{1}{729}\frac{(4t-1)^2\left(20t^2+25t+6\right)}{t^2-t+3}\le 0$ với mọi $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

$P \le \dfrac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \dfrac{t-2}{6t+6} = f(t)$.

Khi đó $f'(t) = \dfrac{1}{54} \cdot \dfrac{16\sqrt{5}t^2 + 32\sqrt{5}t + 16\sqrt{5} - 27}{(t+1)^2} > 0$ với mọi $t \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right]$.

Vậy $P \le \dfrac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \dfrac{t-2}{6t+6} = f(t) \le f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{7+10\sqrt{5}}{30}$, dấu bằng đạt được khi $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 2$.

Câu 10. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3\left(x^2+y^2\right)$ bằng

A. $-\dfrac{9476}{243}$. **B.** -76. **C.** $\dfrac{193}{3}$. **D.** $\dfrac{148}{3}$.

Lời giải

Điều kiện $x \ge 2; y \ge -3$.

$x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)$.(*)

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \le x+y+1$ nên từ (*) suy ra $(x+y+1)^2 \le 8(x+y+1) \Leftrightarrow x+y \le 7$.

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \ge 0$ nên từ (*) suy ra

$(x+y+1)^2 \ge 4(x+y+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1 \le 0 \\ x+y+1 \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1 = 0 \\ x+y+1 \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = -1 \\ x+y \ge 3 \end{array}\right.$.

Do $x \ge 2$ nên $x^2 \ge 2x$, $y^2 + 1 \ge 2y$, suy ra $x^2 + y^2 + 1 \ge 2(x+y)$. Từ đó ta có

$M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3\left(x^2+y^2\right) \le 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 6(x+y) + 3$.

Đặt $t = x + y$ với $t = -1$ hoặc $3 \le t \le 7$.

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$, ta có $f(-1) = \dfrac{2188}{243}$.

$f'(t) = 3^{t-4}\ln 3 + 2^{7-t} - (t+1).2^{7-t}\ln 2 - 6$.

$f''(t) = 3^{t-4}\ln^2 3 + \left[(t+1)\ln 2 - 2\right]2^{7-t}.\ln 2 > 0$, $\forall t \in [3;7]$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$, mà $f'(t)$ liên tục trên $[3;7]$ và $f'(3).f'(7) < 0$ nên phương trình $f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3;7)$.

t	3		t_o		7
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{148}{3}$	$\searrow$	$f(t_o)$	$\nearrow$	-4

Suy ra $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3\left(x^2+y^2\right) \le \dfrac{148}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$, $y = 1$.

Câu 11. **(Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}\right|$

A. $\sqrt{2} - 1$. **B.** $2\sqrt{2} + 1$. **C.** $\sqrt{2} + 1$. **D.** $2\sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Ta có $y = \left|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}\right| = \left|\sin x + \cos x + \dfrac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x.\cos x}\right|$.

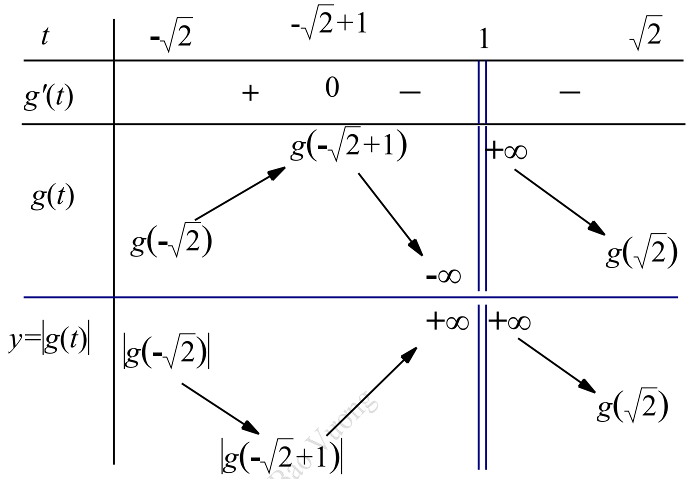
Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), t\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\setminus\{1\}, \sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Suy ra $y=\left|t+\frac{1+t}{\frac{t^2-1}{2}}\right|=\left|t+\frac{2}{t-1}\right|$.

Xét hàm số $g(t)=t+\frac{2}{t-1}$, $g'(t)=1-\frac{2}{(t-1)^2}=\frac{(t-1)^2-2}{(t-1)^2}$, $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}+1\,(l)\\ t=-\sqrt{2}+1\,(\text{t/m})\end{array}\right.$.

$g\left(\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}+2>0,\ g\left(-\sqrt{2}\right)<0,\ g\left(-\sqrt{2}+1\right)=-2\sqrt{2}+1<0$

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $y_{\min}=\left|y\left(-\sqrt{2}+1\right)\right|=2\sqrt{2}-1$.

Câu 12. **(Sở Phú Thọ - 2018)** Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng:

A. 20. **B.** 25. **C.** 15. **D.** 35.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}x+y+z=4\\ xy+yz+zx=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4-z\\ xy=5-z(x+y)=5-4z+z^2\end{cases}$.

Lại có: $(x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow(4-z)^2\ge 4\left(5-4z+z^2\right)\Rightarrow\frac{2}{3}\le z\le 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Và $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(x+y)z+3xy(x+y)$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=4^3-12(x+y)z-3xy(x+y)=64-3(4-z)\left(5+z^2\right)$.

Ta có: $P=\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\left(3z^3-12z^2+15z+4\right)\left(\frac{5}{z^3-4z^2+5z}\right)$.

Đặt $t=z^3-4z^2+5z$, với $\frac{2}{3}\le z\le 2\Rightarrow\frac{50}{27}\le t\le 2$.

Do đó xét hàm số $f(t)=5\left(\frac{4}{t}+3\right)$, với $\frac{50}{27}\le t\le 2$.

Ta có $f'(t)=\frac{-20}{t^2}<0,\ \forall t\in\left[\frac{50}{27};2\right]$ nên hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến.

Do đó $P_{\min}=f\left(2\right)=25$ đạt tại $x=y=1$, $z=2$.

Câu 13. **(Sở Bắc Ninh - 2018)** Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $M=2, m=\dfrac{1}{2^{1008}}$. **B.** $M=1$, $m=\dfrac{1}{2^{1009}}$. **C.** $M=1$, $m=0$. **D.** $M=1$, $m=\dfrac{1}{2^{1008}}$.

Lời giải

Ta có: $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x=\left(\sin^2x\right)^{1009}+\left(1-\sin^2x\right)^{1009}$.

Đặt $t=\sin^2x$, $0\le t\le 1$ thì hàm số đã cho trở thành $y=t^{1009}+\left(1-t\right)^{1009}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^{1009}+\left(1-t\right)^{1009}$ trên đoạn $\left[0;1\right]$.

Ta có: $f'\left(t\right)=1009.t^{1008}-1009.\left(1-t\right)^{1008}$

$f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow 1009t^{1008}-1009\left(1-t\right)^{1008}=0$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{1008}=1\Leftrightarrow\dfrac{1-t}{t}=1\ \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$

Mà $f\left(1\right)=f\left(0\right)=1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{1008}}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]}f\left(t\right)=f\left(0\right)=f\left(1\right)=1$, $\min\limits_{[0;1]}f\left(t\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{1008}}$

Vậy $M=1$, $m=\dfrac{1}{2^{1008}}$.

Câu 14. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$.

A. $\min P=-80$. **B.** $\min P=-91$. **C.** $\min P=-83$. **D.** $\min P=-63$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 3\\ y\ge -3\end{cases}$.

Ta có

$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2=4\left(x+y\right)+8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3}\ge 4\left(x+y\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y\ge 4\\ x+y\le 0\end{array}\right.\ (1)$

.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được:

$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\le 2\sqrt{2\left(x+y\right)}\Leftrightarrow x+y\le 8\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có $x+y\in\left[4;8\right]$

Ta lại có $\left(x+3\right)\left(y+3\right)\ge 0\Leftrightarrow xy\ge -3\left(x+y\right)-9$.

Đặt $t=x+y$ suy ra $P==4\left(x^2+y^2\right)+15xy=4\left(x+y\right)^2+7xy\ge 4t^2-21t-63$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=4t^2-21t-63$, với $t\in\left[4;8\right]$

Ta có $f'\left(t\right)=8t-21=0\Leftrightarrow t=\dfrac{21}{8}\notin\left[4;8\right]$. Do đó $\min\limits_{[4;8]}f\left(t\right)=f\left(4\right)=-83$.

Do đó $P\ge -83$ suy ra $\min P=-83$ khi $\begin{cases}x+y=4\\ x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=-3\end{cases}$.

Câu 15. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3\left(2y^2+1\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$.

A. $P=10$ **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Lời giải

$2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3\left(2y^2+1\right)$.

$\Leftrightarrow 2\left(y^3-3y^2+3y-1\right)+\left(y-1\right)=2\left(1-x\right)\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x}-2\sqrt{1-x}$.

$\Leftrightarrow 2\left(y-1\right)^3+\left(y-1\right)=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x}\ (1)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=2t^3+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right)=6t^2+1>0$ với $\forall t\ge 0\Rightarrow f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow y-1=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow y=1+\sqrt{1-x}$.

$\Rightarrow P=x+2y=x+2+2\sqrt{1-x}$ với $\left(x\le 1\right)$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=2+x+2\sqrt{1-x}$ trên $\left(-\infty;1\right]$.

Ta có: $g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$. $g'\left(x\right)=0\Rightarrow x=0$.

Bảng biến thiên $g\left(x\right)$:

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$ suy ra giá trị lớn nhất của P là: $\max\limits_{(-\infty;1]} g\left(x\right)=4$.

Câu 16. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}x^2-xy+3=0\\2x+3y-14\le 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$

A. 8. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $x^2-xy+3=0\Rightarrow y=\dfrac{x^2+3}{x}$

Từ bất phương trình $2x+3y-14\le 0\Leftrightarrow \dfrac{5x^2-4x+9}{x}\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le \dfrac{9}{5}$.

Mặt khác ta có $\begin{cases}x^2=xy-3\\xy=x^2+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3=x^2y-3x\\xy^2=x^2y+3y\end{cases}$

Thay vào ta được $P=-3y+8x=-3\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)+8x=5x-\dfrac{9}{x}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=5x-\dfrac{9}{x}$ trên đoạn $\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=5+\dfrac{9}{x^2}\ge 0$, $\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$ do đó $\min\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}=f\left(1\right)=-4$ và $\max\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}=f\left(\dfrac{9}{5}\right)=4$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0.

Câu 17. **(Sở Nam Định - 2018)** Biết rằng bất phương trình $m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right)\le 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left(-\infty;a\sqrt{2}+b\right]$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T=a+b$.

A. $T=3$. **B.** $T=2$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

$m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right)\le 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$

$\Leftrightarrow m\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+1\right)\le 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$

Đặt $t=\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\begin{cases}1\le t\le\sqrt{2}\\ 2\sqrt{x^2-x^4}=t^2-1\end{cases}$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$m(t+1)\le t^2+t+1\Leftrightarrow m\le\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ (vì $t\in[1;2]$ nên $t+1>0$).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$.

$f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{t+1}>0,\forall t\in\left[1;\sqrt{2}\right]$ suy ra hàm số đồng biến trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$.

$\min\limits_{[1;\sqrt{2}]}f(t)=f(1)=\dfrac{3}{2}$; $\max\limits_{[1;\sqrt{2}]}f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=-1+2\sqrt{2}$.

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình

$m\le\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ có nghiệm $t\in\left[1;\sqrt{2}\right]$ $\Leftrightarrow m\le\max\limits_{[1;\sqrt{2}]}f(t)\Leftrightarrow m\le -1+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow a=2$, $b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Câu 18. **(THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $2\left(x^2+y^2\right)+xy=(x+y)(xy+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$.

A. $-\dfrac{25}{4}$. **B.** 5. **C.** $-\dfrac{23}{4}$. **D.** -13.

Lời giải

Ta có $2\left(x^2+y^2\right)+xy=(x+y)(xy+2)\ge(x+y)2\sqrt{2xy}$.

Đặt $a=x^2+y^2;b=xy$ ta được: $(2a+b)^2\ge 8b(a+2b)\Leftrightarrow 4a^2-4ab-15b^2\ge 0$

$\Rightarrow\dfrac{a}{b}\ge\dfrac{5}{2}$. Suy ra: $\dfrac{x^2+y^2}{xy}\ge\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge\dfrac{5}{2}$.

Ta có:

$P=4\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18=f(t)$ với $t\ge\dfrac{5}{2}$.

Khảo sát hàm số $f(t)$ với $t\ge\dfrac{5}{2}$ ta được $f(t)\ge-\dfrac{23}{4}$. Vậy chọn **C**

Câu 19. **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x+y=\dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{4y}$.

A. $P_{\min}=\dfrac{34}{5}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{65}{4}$. **C.** $P_{\min}$ không tồn tại. **<u>D</u>.** $P_{\min}=5$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $y=\dfrac{5}{4}-2x$. Vì $y>0$ nên $\dfrac{5}{4}-2x>0\Rightarrow x<\dfrac{5}{8}$. Do đó $0<x<\dfrac{5}{8}$.

Ta có $P=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{4\left(\dfrac{5}{4}-2x\right)}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{5-8x}=\dfrac{10-15x}{-8x^2+5x}$ với $0<x<\dfrac{5}{8}$.

$$P'=\frac{-15\left(-8x^2+5x\right)-\left(-16x+5\right)\left(10-15x\right)}{\left(-8x^2+5x\right)^2}=\frac{120x^2-75x-\left(-160x+240x^2+50-75x\right)}{\left(-8x^2+5x\right)^2}$$

$P'=\dfrac{-120x^2+160x-50}{\left(-8x^2+5x\right)^2}$. Có $P'=0\Rightarrow -120x^2+160x-50=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{6}\notin\left(0;\dfrac{5}{8}\right) \\ x=\dfrac{1}{2}\in\left(0;\dfrac{5}{8}\right)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{8}$
y'	‖	$-$	0	$+$	‖
y	‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min}=5$.