TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG KHÁ – MỨC ĐỘ 7-8 ĐIỂM

Dạng. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bước 1. Tìm nghiệm $x_i (i=1,2,...)$ của $y'=0$ thuộc $[a;b]$

Bước 2. Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ theo tham số

Bước 3. So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bước 4. Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

Lưu ý:

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(b); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(a); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(b)$

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m>4$ **B.** $3<m\le 4$ **C.** $m<-1$ **D.** $1\le m<3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m>0 \Leftrightarrow m<-1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=\dfrac{2+m}{1}=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại)

* TH 2. $-1-m<0 \Leftrightarrow m>-1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{4+m}{3}=3 \Leftrightarrow m=5$ suy ra $m>4$.

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thoả mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$ **B.** $2<m\le 4$ **C.** $m\le 0$ **D.** $0<m\le 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

☑ Nếu $m=1 \Rightarrow y=1, \ \forall x\ne -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m<1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow y(1)+y(2)=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m=5$ (loại).

☑ Nếu $m>1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(1) = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2+m}{3} + \dfrac{1+m}{2} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (t/m)

Câu 3. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m > 10$. **<u>B</u>.** $8 < m < 10$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $4 < m < 8$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Ta có: $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

- Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1$ (loại).

- Nếu $m \neq 1$khi đó $y' < 0, \forall x \in [1;2]$ hoặc $y' > 0, \forall x \in [1;2]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x = 1, x = 2$.

Theo bài ra: $\max\limits_{[1;2]} y + \min\limits_{[1;2]} y = 8 \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \dfrac{1+m}{2} + \dfrac{2+m}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{41}{5} \in (8;10)$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

A. 3. **B.** 2. **<u>C</u>.** 1. **D.** 0.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$y' = \dfrac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} > 0, \forall x \neq m$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m < 0 \\ f(4) = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{2-m^2}{4-m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m = 2, m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x - m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y = \dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3 < m \leq 4$. **<u>B</u>.** $-2 < m \leq 3$. **C.** $m > 4$. **D.** $m \leq -2$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

+TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m^2\right\},\left[-3;-2\right]\subset D$.

+ Ta có $y'=\dfrac{-m^2-1}{\left(x-m^2\right)^2}<0,\forall x\in D$. Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Nên $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}=y\left(-2\right)=\dfrac{-2+1}{-2-m^2}\Rightarrow -2-m^2=-2\Leftrightarrow m=0\Rightarrow -2<m\le 3$.

Câu 6. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $\left[1;3\right]$ bằng 1.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2m^2+1}{\left(x+2\right)^2}>0,\forall x\neq -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[1;3\right]$ nên $\max\limits_{[1;3]} y=y\left(3\right)\Leftrightarrow\dfrac{3m^2-1}{5}=1\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$ (vì $m>0$).

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $\left(2;5\right)$. **B.** $\left(1;4\right)$. **C.** $\left(6;9\right)$. **D.** $\left(20;25\right)$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-8\right\}$.

+ $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0,\forall x\in D$

Vậy hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên $\left[0;3\right]$.

$\Rightarrow\min\limits_{[0;3]} y=y(0)=\dfrac{-m^2}{8}$

Để $\min\limits_{[0;3]} y=-3\Leftrightarrow\dfrac{-m^2}{8}=-3\Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow m_0=2\sqrt{6}\in\left(2;5\right)$. Vậy chọn **A.**

Câu 8. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế 2019)** Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ bằng 3.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}$.

+ Xét $m=2$.

$\Rightarrow$ Hàm số trở thành: $y=2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m=2$ (loại)

+ Xét $m>2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}<0\ (\forall x\neq -1)\ \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y=y(4)=\dfrac{8+m}{5}$.

$\Rightarrow \dfrac{8+m}{5}=3 \Leftrightarrow m=7$ (thoả mãn).

+ Xét $m<2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}>0\ (\forall x\neq -1)\Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y=y(0)=m$.

$\Rightarrow m=3$ (loại).

Vậy $m=7$.

Câu 9. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y'=\dfrac{1-\left(-m^2+m\right)}{(x+1)^2}=\dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2}>0;\ \forall x\in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$.

Ta có: $y(0)=-2 \Leftrightarrow -m^2+m=-2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 10. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$ **B.** $m>6$ **C.** $m<1$ **D.** $3<m\le 6$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Với $m=1 \Rightarrow y=1,\ \forall x\in[0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y\neq 3$.

Suy ra $m \neq 1$. Khi đó $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

TH 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

Câu 11. **(Chuyên KHTN 2019)** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m > 10$. **B.** $8 < m < 10$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $4 < m < 8$.

Lời giải

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

Do vậy $\underset{x\in[1;2]}{Min}\, y + \underset{x\in[1;2]}{Max}\, y = y(1) + y(2) = \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{41}{5}$.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \dfrac{13}{2}$.

A. $m = 1; m = -2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = -1; m = 2$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$y' = \dfrac{-m^2-m-1}{(x-1)^2} < 0\ \forall x \in [2;3] \Rightarrow A = f(3) = \dfrac{m^2+m+3}{2}, B = f(2) = \dfrac{m^2+m+2}{1}$.

$A + B = \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \dfrac{m^2+m+3}{2} + \dfrac{m^2+m+2}{1} = \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Câu 13. **(Sở Hưng Yên)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y' = \dfrac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3] \Rightarrow$ hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = \dfrac{-m^2}{8}$.

Theo giả thiết, ta có: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Mà $m > 0$, $m \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 2\sqrt{6} \approx 4,9 \in (2;5)$.

Câu 14. **(Chuyên - Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m = 2.$ **B.** $m = 6.$ **C.** $m = 0.$ **D.** $m = 4.$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$, ta có $y' = -3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} y'(-1) = \mathrm{m} - 2 \\ y'(0) = \mathrm{m} \\ y'(1) = \mathrm{m} - 4 \end{cases}$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = 2 + \sqrt{2}$. **C.** $m = 4 + \sqrt{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Trên $[-1;1]$ thì $y'_{(-1)} = m - 4; y'_{(0)} = m; y'_{(1)} = m - 2$

nên $\mathop{Min}\limits_{[-1;1]} y = \sqrt{2} \Leftrightarrow m - 4 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 4 + \sqrt{2}$

Câu 16. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. **B.** $2m_0 - 1 < 0$. **C.** $6m_0 - m_0^2 < 0$. **D.** $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

+ Đặt $f(x)=x^3+(m^2+1)x+m+1$.

+ Ta có: $y'=3x^2+m^2+1$. Dễ thấy rằng $y'>0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min\limits_{[0;1]} y=\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=m+1$.

+ Theo bài ra ta có: $m+1=5$, suy ra $m=4$.

+ Như vậy $m_0=4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0-m_0^2\geq 0$.

Câu 17. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Nếu hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$

Tập xác định: $D=[-1;1]$.

Ta có: $y'=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y'=0\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-x^2}=x\\ 1-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1>x\geq 0\\ \sqrt{1-x^2}=x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1>x\geq 0\\ 2x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1>x\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $y(-1)=-1+m,\ y(1)=1+m,\ y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+m$.

Do hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1;1]$ nên $\operatorname{Max}\limits_{[-1;1]} y=m+\sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\operatorname{Max}\limits_{[-1;1]} y=2\sqrt{2}$, suy ra $m+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

Câu 18. **(THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1. Tính m?

A. $m=-6$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

Chọn C

Xét $[-1;1]$ có $y'=6x^2-6x$.

$$y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;1]\\ x=1\in[-1;1]\end{array}\right..$$

Khi đó

$y(-1)=-5-m$; $y(0)=-m$; $y(1)=-1-m$

Ta thấy $-5-m<-1-m<-m$ nên $\min\limits_{[-1;1]} y=-5-m$.

Theo bài ra ta có $\min\limits_{[-1;1]} y=-1$ nên $-5-m=-1\Leftrightarrow m=-4$.

Câu 19. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-m^2x^3-2x^2-m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16. Tính tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** -2. **C.** -15. **D.** -17.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-3m^2x^2-4x$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-3m^2x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x^2-3m^2x-4=0\ \left(\Delta=9m^2+64\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3m^2+\sqrt{9m^4+64}}{8}>1\\x=\dfrac{3m^2-\sqrt{9m^4+64}}{8}<0\end{array}\right.$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên

$y(0)+y(1)=-16\Leftrightarrow -m+\left(-m^2-m-1\right)=-16\Leftrightarrow -m^2-2m+15=0$.

Vậy $m_1.m_2=-15$.

Câu 20. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

A. $0<m<1$ **B.** $m>1$ **C.** $m>2$ **D.** $-1<m<1$

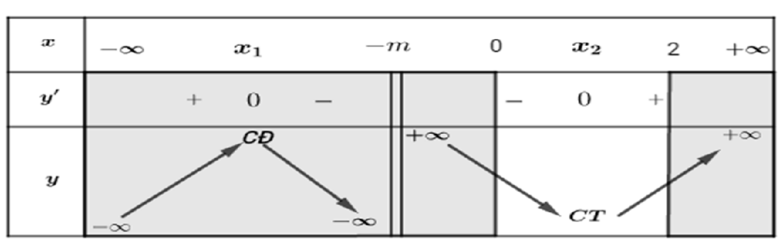
Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0;2]$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m<0\\-m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.$

Ta có $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-m-1\\x_2=-m+1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0\in(0;2)$ nên $0<-m+1<2\Leftrightarrow -1<m<1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $0<m<1$.

CÓ THỂ GIẢI NHƯ SAU:

Điều kiện xác định $x\neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ nên $-m \notin \left[0;2\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -m<0 \\ -m>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-2 \end{array}\right. \ (*)$

$y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$

$y'=0$ có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x_1=-m+1 \\ x_2=-m-1 \end{array}\right.$,

$x_1-x_2=2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$

Ta thấy $-m+1>-m-1, \forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0;2\right]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$ thì $0<-m+1<2 \Leftrightarrow -1<m<1 \ (**)$

Từ $(*),(**)$ ta có $0<m<1$

Câu 21. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[0;10\right]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2} \Leftrightarrow y\cos x+m\sin x=1-2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $y^2+m^2 \ge 1-4y+4y^2 \Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} \le y \le \dfrac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$.

Theo đề bài, ta có: $\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}<-2 \\ m\in\left[0;10\right] \\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1+3m^2}>8 \\ m\in\left[0;10\right] \\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3m^2>63 \\ m\in\left[0;10\right] \\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2>21 \\ m\in\left[0;10\right] \\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m\in\{5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 22. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=ax^3+cx+d,\ a\ne 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $\left[1;3\right]$ bằng

A. $d-11a$. **B.** $d-16a$. **C.** $d+2a$. **D.** $d+8a$.

Lời giải

Vì $y=ax^3+cx+d,\ a\ne 0$ là hàm số bậc ba và có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$ nên $a<0$ và $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y'=3ax^2+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac<0$.

Vậy với $a<0,\ c>0$ thì $y'=0$ có hai nghiệm đối nhau $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f\left(x\right)=f\left(-\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}\right)\Leftrightarrow -\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}=-2\Leftrightarrow\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}=2\Leftrightarrow c=-12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0	1	2		3	$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-2\right)$		$\nearrow$		$f\left(2\right)$		$\searrow$	$-\infty$

Ta suy ra $\max\limits_{x\in[1;3]} f\left(x\right)=f\left(2\right)=8a+2c+d=-16a+d$.

Câu 23. **(THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m\le -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

+ $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$

+ $y'=\dfrac{-x^2-2mx+1-m}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow -x^2-2mx+1-m=0$ (*)

$\Delta'_{(*)}=m^2-m+1>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2,\forall m\in\mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f\left(x_2\right)=\dfrac{1}{2x_2+1}$ với $x_2=-m+\sqrt{m^2-m+1}$

$YCBT\Leftrightarrow\dfrac{1}{-2m+2\sqrt{m^2-m+1}+1}\le 1\Leftrightarrow 1-2m+2\sqrt{m^2-m+1}\ge 1$ (vì $f\left(x_2\right)>0\Rightarrow 2x_2+1>0$)

$$\Leftrightarrow\sqrt{m^2-m+1}\ge m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m\ge 0 \\ m^2-m+1\ge m^2 \end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\le 1$$

Câu 24. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $\left[0;2\right]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -8.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}\Rightarrow[0;2]\subset D$.

Ta có: $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{2x^3+4x^2+2x+m}{(x+1)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m=0\Leftrightarrow -\left(2x^3+4x^2+2x\right)=m$ (1).

Ta có $y(0)=-m;y(2)=4-\dfrac{m}{3}$

Đặt $g(x)=-\left(2x^3+4x^2+2x\right)\Rightarrow g'(x)=-\left(6x^2+8x+2\right)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=-\dfrac{1}{3}$.

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta có $g(x)\in[-36;0],\forall x\in[0;2]$.

Trường hợp 1: $m>0\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m<y(2)=4-\dfrac{m}{3}$ *khi* $m>0$.

Khi đó $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=4-\dfrac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3$ loại do $m>0$.

Trường hợp 2: $m<-36\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m>y(2)=4-\dfrac{m}{3}$ *khi* $m<-36$.

Khi đó $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(0)=-m=5\Leftrightarrow m=-5$ loại do $m<-36$.

Trường hợp 3: $m\in[-36;0]\Rightarrow$ phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất (giả sử $x=x_0$).

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		x_0		2
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$	0		$y(x_0)$	$y=m$	-36

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

$+ x = x_0 : g(x) = m \Leftrightarrow -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) = m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow y' = 0$.

$+ x \in (0; x_0) : g(x) > m \Leftrightarrow -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) > m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m < 0 \Leftrightarrow y' < 0$.

$+ x \in (x_0; 0) : g(x) < m \Leftrightarrow -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) < m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m > 0 \Leftrightarrow y' > 0$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		x_0		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$y(0)$		$y(x_0)$		$y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y \in \left\{y(2); y(0)\right\}$.

Nếu $\text{m} \in [-36; -6] \Rightarrow y(0) \geq y(2) \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5\ (l)$.

Nếu $\text{m} \in [-6; 0] \Rightarrow y(0) \leq y(2) \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3 (n)$.

Vậy $m = -3$ thỏa đề.

Cách 2:

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow [0; 2] \subset D$.

Ta có: $y = \dfrac{x^3 + x^2 - m}{x+1} = x^2 - \dfrac{m}{x+1} \Rightarrow y' = 2x + \dfrac{m}{(x+1)^2}$.

Trường hợp 1: $m \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in [0; 2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0; 2]$.

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = y(2) = 4 - \dfrac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3$ loại do $m > 0$.

Trường hợp 2: $m < 0$, giả sử $\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y = y(x_0)$ với $x_0 \in (0; 2)$. Do hàm số liên tục trên $[0; 2]$

$\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y(x_0)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2x_0(x_0+1)^2 \\ \dfrac{x_0^3+x_0^2-m}{x_0+1}=5 \end{cases}$

$\Rightarrow x_0^3+x_0^2+2x_0(x_0+1)^2=5(x_0+1) \Leftrightarrow x_0=\dfrac{-5}{3} \vee x=1(n) \Rightarrow m=-8$.

Khi đó: $y'=2x+\dfrac{-8}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+4x^2+2x-8}{(x+1)^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biên thiên:

x	0		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y	8	↘	5	↗	$\dfrac{20}{3}$

$\Rightarrow m=-8$ không thỏa yêu cầu đề.

Nên không tồn tại $x_0 \in (0;2)$ để $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(x_0)$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2) \Rightarrow m=-5 \\ \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(0) \Rightarrow m=-3 \end{array} \right.$.

Nếu $m=-5 \Rightarrow y(0)=5; y(2)=\dfrac{17}{3} \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=\dfrac{17}{3} \neq 5 \Rightarrow m=-5(l)$.

Nếu $m=-3 \Rightarrow y(0)=3; y(2)=5 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=5 \Rightarrow m=-3(n)$.

Vậy $m=-3$ thỏa đề.

Câu 25. Cho hàm số $y=(x^3-3x+m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

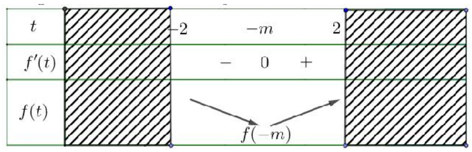
$D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=x^3-3x,\ x\in[-1;1] \Rightarrow t\in[-2;2]$.

Khi đó ta có hàm số $f(t)=(t+m)^2$.

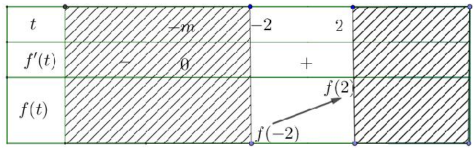
$f'(t)=2(t+m); f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-m$.

Trường hợp 1: $-2<-m<2 \Leftrightarrow -2<m<2$.



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-m) = 0$ không thỏa mãn yêu cầu.

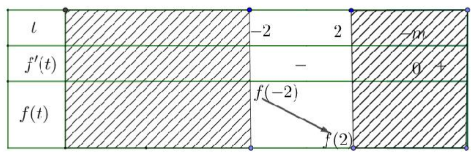
Trường hợp 2: $-m \le -2 \Leftrightarrow m \ge 2$



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-2) = (m-2)^2$.

Theo yêu cầu bài toán: $(m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right. \xrightarrow{m \ge 2} m = 3.$

Trường hợp 3: $-m \ge 2 \Leftrightarrow m \le -2$



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(2) = (m+2)^2$.

Theo yêu cầu bài toán: $(m+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -1 \end{array}\right. \xrightarrow{m \le -2} m = -3.$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu là: $3 + (-3) = 0$.

Câu 26. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2018)** Tìm tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m \in (0;2)$. **B.** $m \in (0;1)$. **C.** $m \in (1;+\infty)$. **D.** $m \in (0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ do đó $y_{CT} = y(1) = -1$ và $y_{CĐ} = y(-1) = 3$.

Thấy ngay với $m > 0$ thì trên đoạn $[m+1; m+2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy GTNN của hàm số đã cho trên đoạn $[m+1; m+2]$ là $y(m+1) = (m+1)^3 - 3(m+1) + 1$.

GTNN luôn bé hơn $3 \Leftrightarrow (m+1)^3 - 3(m+1) - 2 < 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m+1 < 2 \\ m+1 \ne -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m < 1 \\ m \ne -2 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta được $m \in (0;1)$.

Câu 27. **(Chuyên Đh Vinh 2018)** Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m \le 2$. **B.** $4 < m \le 8$. **C.** $2 < m \le 4$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

$y = mx + \dfrac{36}{x+1} \Rightarrow y' = m - \dfrac{36}{(x+1)^2}$

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có $y' = -\dfrac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$. Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) = 9$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0$

□ Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0$, $\forall x \neq -1$ Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}$ (loại).

□ Nếu $m > 0$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow m - \dfrac{36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \dfrac{36}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1\ (l) \end{array}\right.$.

□ $0 < \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < m \le 36$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y\left(\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 100\,(l) \end{array}\right.$.

□ $\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}\,(l)$.

Câu 28. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1 \le 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

TH1: $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \le 0 < m + 1 \Leftrightarrow -1 < m \le 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

BBT của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

TH2: $0 < x_1 < x_2$.

BBT của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 1 > 0 \\ y(m+1) \le y(0) \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+1)^3 - 3m(m+1)^2 + 3(m^2 - 1)(m+1) + 2020 \le 2020 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^2(m-2)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 2 \\ m=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 2.$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=2$.

Vậy $m\in\{0;1;2\}$.

Câu 29. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1,m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=m.\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m\ne 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x\in(1;+\infty)$.

Nếu $m>0$ thì $f'(x)>0,\forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m;\ \max\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m.$

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$

$\Leftrightarrow m+2m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=-2 \\ m_2=5 \end{array}\right.$

Do $m>0$ nên nhận $m_2=5$.

Nếu $m<0$ thì $f'(x)<0,\forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m;\ \max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m.$

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$

$\Leftrightarrow 2m+m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=-2 \\ m_2=5 \end{array}\right.$

Do $m<0$ nên nhận $m_1=-2.$

Vậy $m_1+m_2=3.$

Câu 30. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$

để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1.

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x+2\ne 0$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow y(\cos x+2)=m\sin x+1$ (do $\cos x+2\ne 0$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow m\sin x - y\cos x = 2y - 1\,(*)$.

Phương trình (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow m^2 + y^2 \ge (2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} \le y \le \dfrac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$.

Vậy $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}$.

$\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y < -1 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2} > 5 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2\sqrt{2} \approx 2,82 \\ m < -2\sqrt{2} \approx -2,82 \end{array}\right.$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-5;5]$ nên $m \in \{-5;-4;-3;3;4;5\}$.

Câu 31. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{34}{\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2 + 1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{(x^3-3x+2m)^2} = |x^3 - 3x + 2m|$

Nhận thấy $\min\limits_{[0;3]} f(x) = 2 \Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]} |x^3 - 3x + 2m| = 16 \quad (1)$.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 2m$ trên $[0;3]$, ta có:

+ $g'(x) = 3x^2 - 3$, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;3) \\ x = -1 \notin (0;3) \end{array}\right.$

+ $g(0) = 2m,\ g(1) = 2m - 2,\ g(3) = 2m + 18$

Do đó $2m - 2 \le g(x) \le 2m + 18, \forall x \in [0;3]$, tức $\max\limits_{[0;3]} |x^3 - 3x + 2m| = \max\limits_{[0;3]} \{|2m-2|; |2m+18|\}$.

Từ đây ta có $(1) \Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]} \{|2m-2|; |2m+18|\} = 16$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |2m+18| > |2m-2| \\ |2m+18| = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} |2m+18| \le |2m-2| \\ |2m-2| = 16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -7 \end{array}\right.$. Suy ra $S = \{-7; -1\}$. Vậy, tổng các phần tử của S là -8.

Câu 32. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m + 1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = f(x) = (x^3 - 3x + m + 1)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y' = f'(x) = 2(x^3 - 3x + m + 1)(3x^2 - 3)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ m=-x^3+3x-1=g(x) \end{array}\right.$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Nếu $m\in[-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0\in[-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\notin[-3;1]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1\in[-1;1]$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\{(m-1)^2;(m+3)^2\}$

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0$ suy ra

$$\min_{[-1;1]} f(x)=(m-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\ (TM) \\ m=0\ (KTM) \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0$ suy ra

$$\min_{[-1;1]} f(x)=(m+3)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4\ (TM) \\ m=-2\ (KTM) \end{array}\right.$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2; m=-4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Câu 33. **(Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)=m^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+4\sqrt{4-x^2}+m+1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=[-2;2]$.

Đặt $t=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$; $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

$\Leftrightarrow t^2=4+2\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}=t^2-4$.

$\Rightarrow y=g(t)=m^2t+2\left(t^2-4\right)+m+1=2t^2+m^2t+m-7$ với $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $g'(t)=4t+m^2$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-m^2}{4}<0;\forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]\Rightarrow \min\limits_{\left[2;2\sqrt{2}\right]} g(t)=g(2)=4$.

Mà $g(2)=2m^2+m+1 \Leftrightarrow 2m^2+m+1=4 \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Tổng các giá trị của m thỏa mãn ycbt là $S=1+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 34. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq -2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\max\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{6-m}{4}$ khi $m<-2$.

C. $\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\min\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$. **D.** $\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}$ khi $m>-2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq -2$.

Tập xác định $x\neq -1$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{2+m}{\left(x+1\right)^2}$ suy đạo hàm không đổi dấu $x\in\left[1;3\right]$ suy ra

$\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\max\left\{f\left(1\right);f\left(3\right)\right\}=\max\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$;

$\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\min\left\{f\left(1\right);f\left(3\right)\right\}=\min\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

Xét với $m<-2\Rightarrow f'\left(x\right)<0\ \forall x\in\left[1;3\right]$. Vậy

$\forall x\in\left[1;3\right]\Rightarrow f\left(x\right)\leq f\left(1\right)=\dfrac{2-m}{2}\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}$.

Xét với $m>-2\Rightarrow f'\left(x\right)>0\ \forall x\in\left[1;3\right]$. Vậy

$\forall x\in\left[1;3\right]\Rightarrow f\left(x\right)\geq f\left(1\right)=\dfrac{2-m}{2}\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}$.

Câu 35. **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $\left[-20\,;\,20\right]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $\left[1\,;\,3\right]$ là số dương?

A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m\right\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\left[1\,;\,3\right]$ thì $m\notin\left[1\,;\,3\right]$.

$y'=\dfrac{-2m-6}{\left(x-m\right)^2}$.

Trường hợp 1: $-2m-6>0\Leftrightarrow m<-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y=y\left(3\right)=\dfrac{m+9}{3-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[1\,;\,3\right]$ là số dương thì $\dfrac{m+9}{3-m}>0\Leftrightarrow m+9>0\Leftrightarrow m>-9$.

Vậy các số nguyên m thỏa là $-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4$.

Trường hợp 2: $-2m-6<0\Leftrightarrow m>-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y = y(1) = \dfrac{m+7}{1-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương thì $\dfrac{m+7}{1-m} > 0 \Leftrightarrow 1-m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2,\ -1,\ 0$.

Trường hợp 3: $-2m-6=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Khi đó $y=1$. Nên $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y = 1$.

Vậy $m=-3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.