Chuyên đề 36 CỰC TRỊ SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Một số tính chất cần nhớ.

1. Môđun của số phức:

- Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của véctơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z. Kí hiệu $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Tính chất

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overrightarrow{OM}|$
- $|z| \ge 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}, (z' \ne 0)$
- $\big||z| - |z'|\big| \le |z \pm z'| \le |z| + |z'|$
- $|kz| = |k|.|z|, k \in \mathbb{R}$

★ Chú ý: $|z^2| = |a^2 - b^2 + 2abi| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = z.\bar{z}$.

Lưu ý:

- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2\,(k \ge 0)$
- $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2\,(k \le 0)$.
- $|z_1 + z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2\,(k \le 0)$
- $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2\,(k \ge 0)$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$
- $|z|^2 = |\bar{z}||z| = |\bar{z}|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2.Một số quỹ tích nên nhớ

Biểu thức liên hệ x, y	**Quỹ tích điểm M**
$ax + by + c = 0$ (1) $\lvert z - a - bi\rvert = \lvert z - c - di\rvert$ (2)	(1)Đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ (2) Đường trung trực đoạn AB với $\left(A(a,b), B(c,d)\right)$
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ hoặc $\lvert z - a - bi\rvert = R$	Đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R
$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$ hoặc $\lvert z - a - bi\rvert \le R$	Hình tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R
$r^2 \le (x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$ hoặc $r \le \lvert z - a - bi\rvert \le R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồn tâm $I(a;b)$, bán kính lần lượt là r, R
$\left[\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ x = ay^2 + by + c \end{array}\right.(c \ne 0)$	Parabol
$\dfrac{(x+a)^2}{b^2} + \dfrac{(y+c)^2}{d^2} = 1\,(1)$ hoặc $\lvert z - a_1 - b_1i\rvert + \lvert z - a_2 - b_2i\rvert = 2a$	(1) Elip (2) Elip nếu $2a > AB$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$ Đoạn AB nếu $2a = AB$
$\dfrac{(x+a)^2}{b^2} - \dfrac{(y+c)^2}{d^2} = 1$	Hypebol

Một số dạng đặc biệt cần lưu ý:

Dạng 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-a-bi|=|z|$, tìm $|z|_{Min}$. Khi đó ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A(a;b)$
- ✓ $\begin{cases} |z|_{Min}=\dfrac{1}{2}|z_0|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \\ z=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}i \end{cases}$

TQ2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=|z-c-di|$. Tìm $|z|_{\min}$. Ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A(a;b),B(c;d)$
- ✓ $|z|_{Min}=d(O,AB)=\dfrac{|a^2+b^2-c^2-d^2|}{2\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

- ✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}-a-bi|=|z-c-di|$. Khi đó ta biến đổi

  $|\overline{z}-a-bi|=|z-c-di| \Leftrightarrow |z-a+bi|=|z-c-di|$.

- ✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=|z-c-di|$. Khi đó ta biến đổi

$|iz-a-bi|=|iz-c-di| \Leftrightarrow \left|z+\dfrac{-a-bi}{i}\right|=\left|z+\dfrac{-c-di}{i}\right| \Leftrightarrow |z+b+ai|=|z+d+ci|$.

Dạng 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

TQ: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=R>0\left(|z-z_0|=R\right)$. Tìm $|z|_{Max},|z|_{Min}$. Ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R
- ✓ $\begin{cases} |z|_{Max}=OI+R=\sqrt{a^2+b^2}+R=|z_0|+R \\ |z|_{Min}=|OI-R|=\left|\sqrt{a^2+b^2}-R\right|=\left||z_0|-R\right| \end{cases}$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=R \Leftrightarrow \left|z+\dfrac{-a-bi}{i}\right|=\dfrac{R}{|i|}$ (Chia hai vế cho $|i|$)

$\Leftrightarrow |z+b+ai|=R$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}-a-bi|=R \Leftrightarrow |z-a+bi|=R$ (Lấy liên hợp 2 vế)

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$|(c+di)z-a-bi|=R \Leftrightarrow \left|z+\dfrac{-a-bi}{c+di}\right|=\dfrac{R}{|c+di|}=\dfrac{R}{\sqrt{c^2+d^2}}$

Hay viết gọn $|z_0z-z_1|=R \Leftrightarrow \left|z-\dfrac{z_1}{z_0}\right|=\dfrac{R}{|z_0|}$ (Chia cả hai vế cho $|z_0|$)

Dạng 3: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

TQ1: (Elip chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-c|+|z+c|=2a,(a>c)$ Khi đó ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

✓ $\begin{cases} |z|_{Max} = a \\ |z|_{Min} = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$

TQ2: (Elip không chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$

Thỏa mãn $2a > |z_1 - z_2|$.

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc

Ta có

Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, \left(|z_1 - z_2| < 2a\right)$ và $z_1, z_2 \neq \pm c, \pm ci$). Tìm Max, Min của $P = |z - z_0|$. Đặt $\begin{cases} |z_1 - z_2| = 2c \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$	
Nếu $\left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| = 0$	$\begin{cases} P_{Max} = a \\ P_{Min} = b \end{cases}$ (dạng chính tắc)
Nếu $\begin{cases} \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| > a \\ z_0 - z_1 = k\left(z_0 - z_2\right) \end{cases}$	$\begin{cases} P_{Max} = \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| + a \\ P_{Min} = \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| - a \end{cases}$
Nếu $\begin{cases} \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| < a \\ z_0 - z_1 = k\left(z_0 - z_2\right) \end{cases}$	$P_{Max} = \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| + a$
Nếu $|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2|$	$P_{Min} = \left|\left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| - b\right|$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Xét số phức $z = a + bi$ $\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

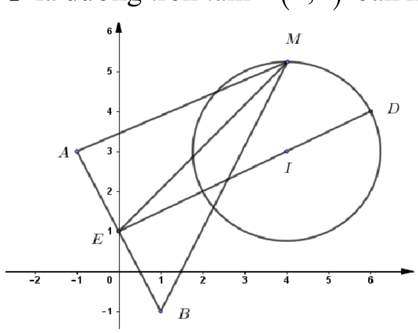
A. $P = 8$ **B.** $P = 10$ **C.** $P = 4$ **D.** $P = 6$

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Goi $M\left(a; b\right)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo giả thiết ta có: $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(a - 4\right)^2 + \left(b - 3\right)^2 = 5 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(4; 3\right)$ bán kính $R = \sqrt{5}$



Gọi: $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(1;-1) \end{cases} \Rightarrow Q = |z+1-3i| + |z-1+i| = MA + MB$

Gọi E là trung điểm của AB, kéo dài EI cắt đường tròn tại D

Ta có: $Q^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA.MB$

$\Leftrightarrow Q^2 \le MA^2 + MB^2 + MA^2 + MB^2 = 2\left(MA^2 + MB^2\right)$

Vì ME là trung tuyến trong

$\Delta MAB \Rightarrow ME^2 = \dfrac{MA^2 + MB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

$\Rightarrow Q^2 \le 2\left(2ME^2 + \dfrac{AB^2}{2}\right) = 4ME^2 + AB^2$. Mặt khác $ME \le DE = EI + ID = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\Rightarrow Q^2 \le 4.\left(3\sqrt{5}\right)^2 + 20 = 200$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ M \equiv D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2(x_D - 4) \\ 2 = 2(y_D - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow\Rightarrow M(6;4) \Rightarrow P = a + b = 10$

Cách 2:Đặt $z = a + bi$. Theo giả thiết ta có: $(a-4)^2 + (b-5)^2 = 5$.

Đặt $\begin{cases} a - 4 = \sqrt{5}\sin t \\ b - 3 = \sqrt{5}\cos t \end{cases}$. Khi đó:

$Q = |z+1-3i| + |z-1+i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t + 5\right)^2 + 5\cos^2 t} + \sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t + 3\right)^2 + \left(\sqrt{5}\cos t + 4\right)^2}$

$= \sqrt{30 + 10\sqrt{5}\sin t} + \sqrt{30 + 2\sqrt{5}\left(3\sin t + 4\cos t\right)}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$Q \le \sqrt{2\left(60 + 8\sqrt{5}\left(2\sin t + \cos t\right)\right)} \le \sqrt{2\left(60 + 8\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max} = 10\sqrt{2}$

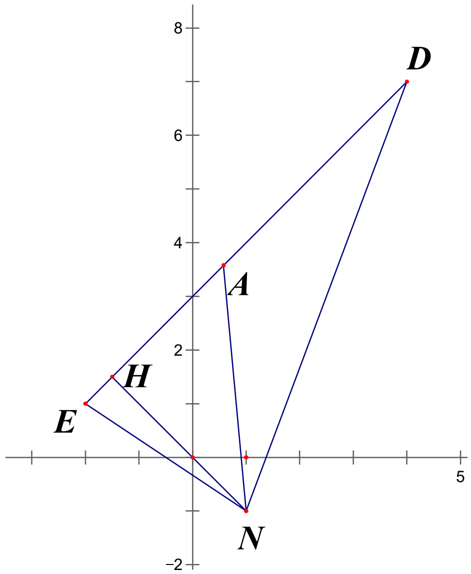
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \sin t = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 10.$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ **B.** $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ **C.** $P = \dfrac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$ **D.** $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$

Lời giải

Chọn A



Gọi A là điểm biểu diễn số phức z, $E\left(-2;1\right)$, $F\left(4;7\right)$ và $N\left(1;-1\right)$.

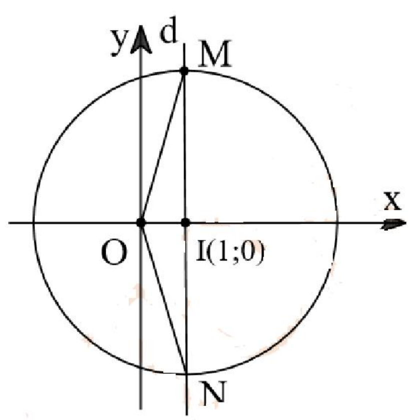
Từ $AE+AF=\left|z+2-i\right|+\left|z-4-7i\right|=6\sqrt{2}$ và $EF=6\sqrt{2}$ nên ta có A thuộc đoạn thẳng EF. Gọi H là hình chiếu của N lên EF, ta có $H\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Suy ra $P=NH+NF=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

Câu 3. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $\left|z-1\right|=\sqrt{34},\left|z+1+mi\right|=\left|z+m+2i\right|$ (trong đó m là số thực) và sao cho $\left|z_1-z_2\right|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $\left|z_1+z_2\right|$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** 10 **C.** 2 **D.** $\sqrt{130}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1,z_2

Gọi $z=x+iy,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Ta có $\left|z-1\right|=\sqrt{34}\Rightarrow M,N$ thuộc đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(1;0\right)$, bán kính $R=\sqrt{34}$

Mà $\left|z+1+mi\right|=\left|z+m+2i\right|\Leftrightarrow\left|x+yi+1+mi\right|=\left|x+yi+m+2i\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y+m\right)^2}=\sqrt{\left(x+m\right)^2+\left(y+2\right)^2}$

$\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(m-2)y-3=0$

Suy ra M,N thuộc đường thẳng $d:2(m-1)x+2(m-2)y-3=0$

Do đó M,N là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C)

Ta có $|z_1-z_2|=MN$ nên $|z_1-z_2|$ lớn nhất khi và chỉ khi MN lớn nhất

$\Leftrightarrow MN$ đường kính của (C). Khi đó $|z_1+z_2|=2OI=2$

Câu 4. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{5}+2$.

Lời giải

Cách 1:

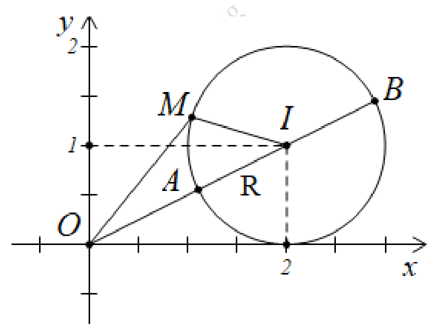
Đặt $w=z-i \Rightarrow z=w+i$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức w.

Từ giả thiết $|z-2-2i|=1$ ta được:

$|w+i-2-2i|=1 \Leftrightarrow |w-2-i|=1 \Leftrightarrow |(x-2)+(y-1)i|=1 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra tập hợp những điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R=1$.



Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A,B với A nằm trong đoạn thẳng OI.

Ta có $|w|=OM$

Mà $OM+MI \ge OI \Leftrightarrow OM+MI \ge OA+AI \Leftrightarrow OM \ge OA$

Nên $|w|$ nhỏ nhất bằng $OA=OI-IA=\sqrt{5}-1$ khi $M \equiv A$.

Cách 2:

Từ $|z-2-2i|=1 \Rightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=1$ với $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$

$a-2=\sin x;\ b-2=\cos x \Rightarrow a=2+\sin x,\ b=2+\cos x$

Khi đó: $|z-i|=|2+\sin x+(2+\cos x)i-i| = \sqrt{(2+\sin x)^2+(1+\cos x)^2} = \sqrt{6+(4\sin x+2\cos x)}$

$\ge \sqrt{6-\sqrt{(4^2+2^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)}} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$

Nên $|z-i|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}-1$ khi $\begin{cases}4\cos x=2\sin x\\ 4\sin x+2\cos x=-2\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ \cos x=\dfrac{-\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

Ta được $z=\left(2-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\left(2-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)i$

Cách 3:

Sử dụng bất đẳng thức $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

$|z-i|=|(z-2-2i)+(2+i)|\ge\left||z-2-2i|-|2+i|\right|=\sqrt{5}-1$

Câu 5. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{M}{m}=3$. **B.** $\frac{M}{m}=\frac{4}{3}$. **<u>C</u>.** $\frac{M}{m}=\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{M}{m}=2$.

Lời giải

Ta có $P=\left|\frac{2z+i}{z}\right|=\frac{|2z+i|}{|z|}\Rightarrow\frac{|2z|-|i|}{|z|}\le P\le\frac{|2z|+|i|}{|z|}\Leftrightarrow 2-\frac{1}{|z|}\le P\le 2+\frac{1}{|z|}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le P\le\frac{5}{2}$.

Vậy $\frac{M}{m}=\frac{5}{3}$.

Câu 6. Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **<u>C</u>.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

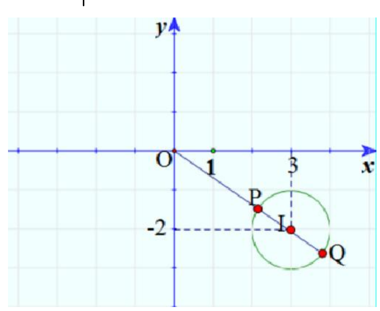
Lời giải

<u>Chọn C</u>

Ta có $1=|z-2-3i|^2=(z-2-3i).\overline{(z-2-3i)}=(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)$

$\Leftrightarrow 1=|(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)|\Leftrightarrow|\overline{z}-2+3i|=1`\Leftrightarrow|\overline{z}+1+i-3+2i|=1(*)$.

+Đặt $w=\overline{z}+1+i$, khi đó $\Leftrightarrow|w-3+2i|=1$.



Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\overline{z}+1+i$ là đường tròn $(I;1)$ và $|w|$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến 1 điểm trên đường tròn. Do đó giá trị lớn nhất của $|w|$ chính là đoạn OQ.

$\Rightarrow|w|_{max}=1+\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{13}$.

Câu 7. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **<u>B</u>.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $1=|z-3i+4|\ge\left||z|-|3i-4|\right|=\left||z|-5\right|\Rightarrow -1\le|z|-5\le 1\Rightarrow 4\le|z|\le 6$.

Đặt $z_0=4-3i\Rightarrow|z_0|=5, z_0^{\,2}=7-24i$.

Ta có $A=\left|z^2+7-24i\right|^2=\left|z^2+z_o{}^2\right|^2=\left(z^2+z_o{}^2\right)\left(\overline{z}^2+\overline{z_o}^2\right)=|z|^4+|z_o|^4+\left(z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}\right)^2-2|z.z_o|^2$

Mà $\left(z+z_o\right)\left(\overline{z}+\overline{z_o}\right)=1\Rightarrow z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}=1-|z|^2-|z_o|^2$

Suy ra $A=|z|^4+|z_o|^4+\left(1-|z|^2-\left|\overline{z_o}\right|^2\right)^2-2|z.z_o|^2=2|z|^4-2|z|^2+1201$.

Hàm số $y=2t^4-2t^2+1201$ đồng biến trên $[4;6]$ nên $A\geq 2.4^4-2.4^2+1201=1681$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}|z|=4\\ |z+4-3i|=1\end{cases}$.

Do đó $\left|z^2+7-24i\right|$ nằm trong khoảng $(1009;2018)$.

Câu 8. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4$. Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

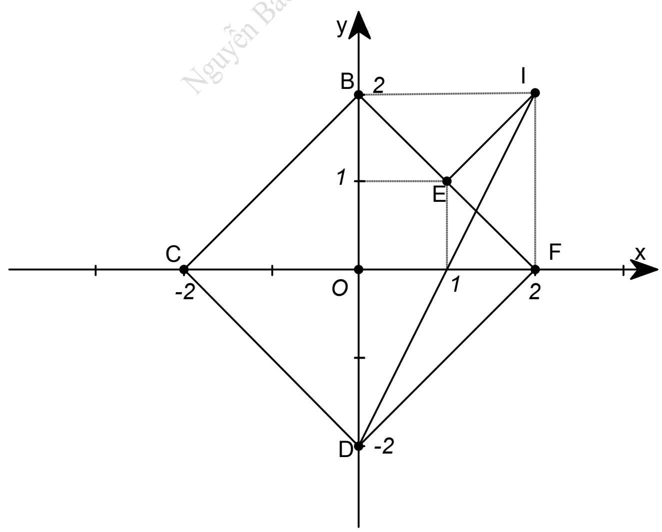
A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left(4;3\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Giả sử: $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow N(x;y)$: điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Ta có:

• $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4\Leftrightarrow|x|+|y|=2\Rightarrow N$ thuộc các cạnh của hình vuông $BCDF$ (hình vẽ).



• $P=|z-2-2i|\Rightarrow P=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}\Rightarrow P=d(I;N)$ với $I(2;2)$

Từ hình ta có: $E(1;1)$

$M=P_{\max}=ID=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ và $m=P_{\min}=IE=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

Vậy, $A=M+m=2+2\sqrt{5}\in\left(\sqrt{34};6\right)$.

Câu 9. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-6|+|z+6|=20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z. Tính $M-n$

A. $M-n=2$. **B.** $M-n=4$. **C.** $M-n=7$. **D.** $M-n=14$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z-6| + |z+6| = 20$.

$\Leftrightarrow |x-6+yi| + |x+6+yi| = 20 \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2 + y^2} + \sqrt{(x+6)^2 + y^2} = 20 \quad (*)$.

Gọi $M(x;y)$, $F_1(6;0)$ và $F_2(-6;0)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 20 > F_1F_2 = 12$ nên tập hợp các điểm E là đường elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2. Và độ dài trục lớn bằng 20.

Ta có $c = 6$; $2a = 20 \Leftrightarrow a = 10$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 64 \Rightarrow b = 8$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$.

Suy ra $\max|z| = OA = OA' = 10$ khi $z = \pm 10$ và $\min|z| = OB = OB' = 8$ khi $z = \pm 8i$.

Vậy $M - n = 2$.

Câu 10. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i| = 2$ và $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $4+\sqrt{74}$. **B.** $2+\sqrt{130}$. **C.** $4+\sqrt{130}$. **D.** $16+\sqrt{74}$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức tam giác ta có

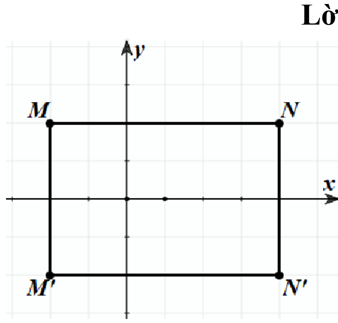
$|w| = |2z+1-i| = |(2z-6+8i) + (7-9i)| \le |2z-6+8i| + |7-9i| = 4 + \sqrt{130}$.

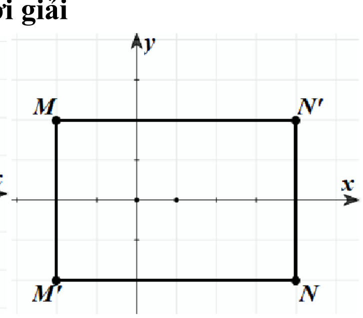
Vậy giá trị lớn nhất của $|w|$ là $4+\sqrt{130}$.

Câu 11. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A. $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải





Gọi $z = x + yi$, trong đó $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overline{z} = x - yi$, $M(x;y)$, $M'(x;-y)$.

Ta đặt $w = z(4+3i) = (x+yi)(4+3i) = (4x-3y) + (3x+4y)i \Rightarrow N(4x-3y; 3x+4y)$. Khi đó $\overline{w} = \overline{z(4+3i)} = (4x-3y) - (3x+4y)i \Rightarrow N'(4x-3y; -3x-4y)$.

Ta có M và M'; N và N' từng cặp đối xứng nhau qua trục Ox. Do đó, để chúng tạo thành một hình chữ nhật thì $y_M = y_N$ hoặc $y_M = y_{N'}$. Suy ra $y = 3x + 4y$ hoặc $y = -3x - 4y$. Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng: $d_1: x + y = 0$ và $d_2: 3x + 5y = 0$.

Đặt $P=|z+4i-5|=\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}$. Ta có $P=MA$ với $A(5;-4)$.

$P_{\min} \Leftrightarrow MA_{\min} \Leftrightarrow MA=d(A;d_1)$ hoặc $MA=d(A;d_2)$. Mà $d(A;d_1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $d(A;d_2)=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$, vậy

$P_{\min}=d(A;d_1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 12. Biết số phức z thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$ và $|z|$ có giá trị nhỏ nhất. Phần thực của số phức z bằng:

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $-\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ (x, $y\in\mathbb{R}$).

Khi đó

$|iz-3|=|z-2-i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(-y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow x+2y+1=0 \Leftrightarrow x=-2y-1\ (1)$.

Lại có $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ (2)$.

Thay (1) vào (2) ta được:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2y-1)^2+y^2}=\sqrt{5y^2+4y+1}=\sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\ge\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $y+\dfrac{2}{5}=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{5}$.

Thay $y=-\dfrac{2}{5}$ vào (1) suy ra $x=-\dfrac{1}{5}$.

Vậy phần thực của số phức z là $-\dfrac{1}{5}$.

Câu 13. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=1+3i$. **D.** $z=1-i$.

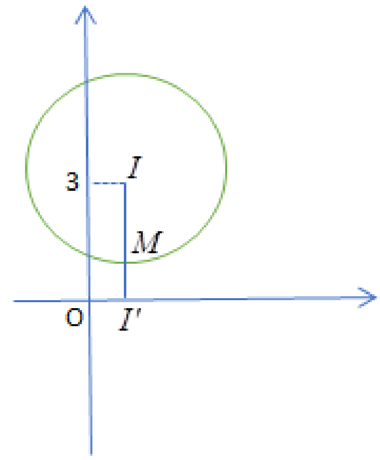
Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo bài ra ta có $|z-1-3i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1;3)$ bán kính $R=2$.

Khi đó $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=I'M$ với $I'(1;0)$.



$|z-1|$ nhỏ nhất khi $I'M$ ngắn nhất hay I, M, I' thẳng hàng, M nằm giữa I và I'.

Phương trình đường thẳng II' là $x=1$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng II' với đường tròn tâm I bán kính $R=2$ là $M_1(1;\ 1)$ và $M_1(1;\ 5)$.

Thử lại ta thấy $M_1(1;\ 1)$ thỏa mãn. Vậy $z=1+i$.

Câu 14. **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

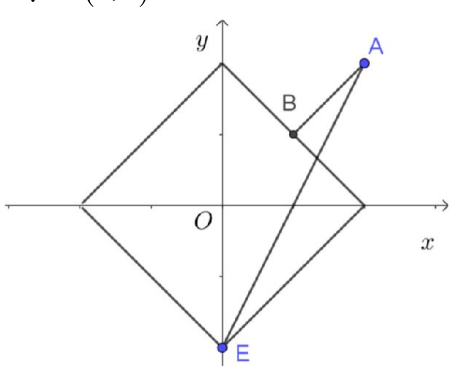
A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left[4;3\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Đặt $z=x+iy$ và gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của $z=x+iy$

ta có: $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4 \Leftrightarrow |x|+|y|=2$

Gọi $A(2;2)$ và $P=MA$



* Theo hình vẽ, $\min P=d(A,\Delta)$, với $\Delta: x+y=2$

và $\min P=\dfrac{|2+2-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\max P=AE=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, với $E(0;-2)$

Vậy $M+m=\sqrt{2}+2\sqrt{5}\simeq 5,88$

Câu 15. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

$|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x+1)-(y+2)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2} \Leftrightarrow 4x+2y+3=0 \Leftrightarrow y=-2x-\frac{3}{2}$.

Cách 1:

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-2x-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5x^2+6x+\frac{9}{4}}=\sqrt{5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}}\ge\frac{3\sqrt{5}}{10},\forall x$.

Suy ra $min|z|=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x=-\frac{3}{5};y=-\frac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Cách 2:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d:4x+2y+3=0$.

Ta có $|z|=OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d.

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x-2y=0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}4x+2y+3=0\\x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=-\frac{3}{10}\end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{10}\right)$.

Hay $z=-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}i$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Nhận xét: Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i| \Leftrightarrow |z-(1-i)|=|z-(-1-2i)|$ $(*)$

Gọi M biểu diễn số phức z, điểm $A(1;-1)$ biểu diễn số phức $1-i$, điểm $B(-1;-2)$ biểu diễn số phức $-1-2i$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA=MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d:4x+2y+3=0$.

Câu 16. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|\frac{z_1-i}{z_1+2-3i}\right|=1;\left|\frac{z_2+i}{z_2-1+i}\right|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Giả sử $z_1=x_1+y_1i$ với $x_1;y_1\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$\left|\dfrac{z_1-i}{z_1+2-3i}\right|=1\Leftrightarrow|z_1-i|=|z_1+2-3i|\Leftrightarrow|x_1+(y_1-1)i|=|(x_1+2)+(y_1-3)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}=\sqrt{(x_1+2)^2+(y_1-3)^2}\Leftrightarrow x_1-y_2+3=0$.

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z_1 là đường thẳng $\Delta: x-y+3=0$.

Giả sử $z_2=x_2+y_2i$ với $x_2;y_2\in\mathbb{R}$. Ta có:

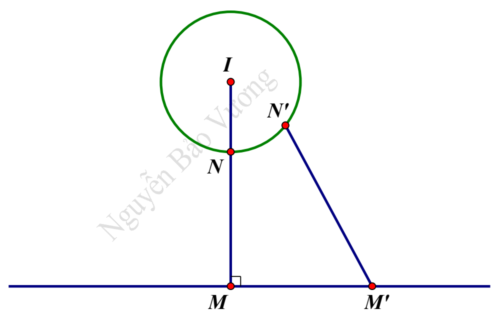
$\left|\dfrac{z_2+i}{z_2-1+i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|z_2+i|=\sqrt{2}|z_2-1+i|\Leftrightarrow|x_2+(y_2+1)i|=\sqrt{2}|(x_2-1)+(y_2+1)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{x_2^2+(y_2+1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2+1)^2}\Leftrightarrow x_2^2+y_2^2-4x_2+2y_2+3=0$.

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y+3=0$ có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2-3}=\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ I đến Δ là: $d(I;\Delta)=\dfrac{|2-(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}>R\Rightarrow$ đường thẳng Δ và đường tròn C không có điểm chung.

Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z_1-z_2 là đoạn thẳng MN. $\Rightarrow|z_1-z_2|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MN nhỏ nhất.



Dễ thấy $MN_{\min}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Câu 17. **(Sở Bình Phước 2019)** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$, (trong đó $m\in\mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2　　**B.** 10　　**C.** $\sqrt{2}$　　**D.** $\sqrt{130}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$|z-1|=\sqrt{34}\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=34$; $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là giao điểm của đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=34$ và đường thẳng $d: 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1 và z_2. Suy ra $(C)\cap d=\{A,B\}$.

Mặt khác $|z_1 - z_2| = AB \le 2R = 2\sqrt{34}$ do đó $\max|z_1 - z_2| = 2\sqrt{34} \Leftrightarrow AB = 2R \Leftrightarrow I(1;0) \in d$.

Từ đó ta có $m = -\dfrac{1}{2}$ nên $d: 3x - 5y - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 6 + 3i \\ z_2 = -4 - 3i \end{array}\right.$.

Vậy $|z_1 + z_2| = 2$.

Câu 18. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

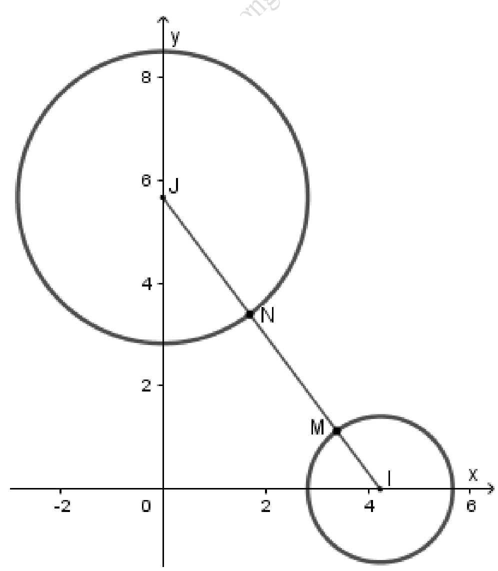
Lời giải

Ta có: + $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2};0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

+ $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0;4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z - w| = \min MN$.

+ $IJ = 5\sqrt{2}; IM = r = \sqrt{2}; NJ = R = 2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM + MN + NJ \ge IJ \Rightarrow MN \ge IJ - IM - NJ$ hay $MN \ge 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J (Hình vẽ).

<u>Cách 1:</u>

Khi đó ta có: $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|$ và $IN = 3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IN} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM} = 3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = 3\left(\overrightarrow{OI} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right) = 3\overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = \left|3\overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ} - \left(\overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right| = |2\overrightarrow{OI}| = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.

Do đó $|3z_0 - w_0| = \left|3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right| = \left|3\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}\right) - \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{OI}\right| = 2.OI = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Cách 3:

+) $\overrightarrow{IM} = \dfrac{IM}{IJ}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_M = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \dfrac{12\sqrt{2}}{5} + \dfrac{4\sqrt{2}}{5}i$.

+) $\overrightarrow{IN} = \dfrac{IN}{IJ}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{6\sqrt{2}}{5} \\ y_N = \dfrac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow w_0 = \dfrac{6\sqrt{2}}{5} + \dfrac{12\sqrt{2}}{5}i$.

Suy ra $|3z_0 - w_0| = \left|6\sqrt{2}\right| = 6\sqrt{2}$.

Câu 19. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z + 2w = 8 - 6i$ và $|z - w| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z| + |w|$ bằng

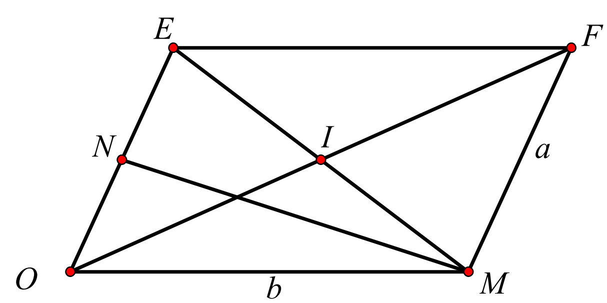
A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử M, N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w. Suy ra $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OI}$, $|z - w| = MN = 4$ và $OF = 2OI = 10$.

Đặt $|z| = ON = \dfrac{a}{2}; |w| = OM = b$. Dựng hình bình hành $OMFE$



Ta có $\begin{cases} \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{ME^2}{4} = 25 \\ \dfrac{b^2 + ME^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 16 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2b^2 = \dfrac{264}{3}$

$\left(|z| + |w|\right)^2 = \left(\dfrac{a}{2} + b\right)^2 \le \left(a^2 + 2b^2\right)\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\right) = 66$

Suy ra $a + b \le \sqrt{66}$, dấu "=" xảy ra khi $a = b = \dfrac{2\sqrt{66}}{3}$.

Vậy $(a + b)_{\max} = \sqrt{66}$.

Câu 20. Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Thay $|z|^2=1$ vào P ta có

$P=|z+1|+|z^2-z+1|=|z+1|+\left|z^2-z+|z|^2\right|=|z+1|+\left|z^2-z+z.\bar{z}\right|=|z+1|+|z||z+\bar{z}-1|$

$=|z+1|+|z+\bar{z}-1|$.

Mặt khác $|z+1|^2=(z+1)(\bar{z}+1)=2+z+\bar{z}$.

Đặt $t=z+\bar{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t\in[-2;2]$.

Suy ra $P=\sqrt{t+2}+|t-1|$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+|t-1|$ với $t\in[-2;2]$.

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+2}}+1$ với $t>1$. Suy ra $f'(t)>0$ với $t>1$.

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+2}}-1$ với $t<1$. Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	-2		$-\frac{7}{4}$		1		2
$f'(t)$	|	$+$	0	$-$	||	$+$	|
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên suy ra $M=\frac{13}{4}$ tại $t=\frac{-7}{4}$ và $m=\sqrt{3}$ tại $t=2$.

Vậy $M.m=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 21. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hai số phức z và $\omega=a+bi$ thỏa mãn $|z+\sqrt{5}|+|z-\sqrt{5}|=6$; $5a-4b-20=0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-\omega|$ là

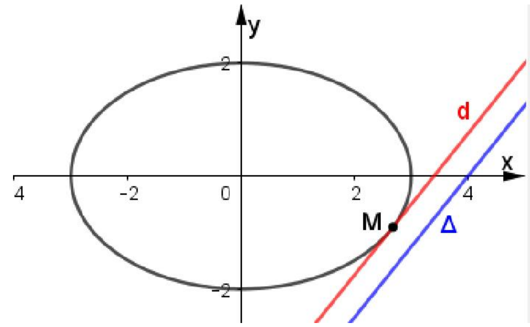
A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{41}}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{41}}$. **D.** $\frac{3}{41}$.

Lời giải

Đặt $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$, vì $\sqrt{5}<3$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thuộc elip có $\begin{cases}a=3\\c=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=4$ suy ra $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Tập hợp các điểm N biểu diễn số phức ω thuộc đường thẳng $\Delta: 5x-4y-20=0$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm điểm $M \in (E)$ và $N \in \Delta$ sao cho MN nhỏ nhất.



Đường thẳng d song song với Δ có dạng $d: 5x-4y+c=0$, $(c \neq -20)$.

d tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi $c^2 = 5^2.9+(-4)^2.4 = 289 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=17 \\ c=-17 \end{array}\right.$.

Với $c=17 \Rightarrow d(d,\Delta) = \dfrac{|-20-17|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}} = \dfrac{37}{\sqrt{41}}$.

Với $c=-17 \Rightarrow d(d,\Delta) = \dfrac{|-20+17|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{41}}$.

Vậy $\min(MN) = \dfrac{3}{\sqrt{41}}$.

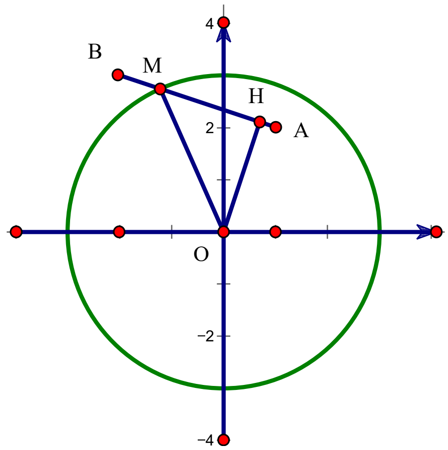
Câu 22. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Gọi $z=a+bi$ $(a,b \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10}$ và

có mô đun nhỏ nhất. Tính $S=7a+b$?

A. 7. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -12.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$

$A(1;2)$ là điểm biểu diễn số phức $(1+2i)$

$B(-2;3)$ là điểm biểu diễn số phức $(-2+3i)$, $AB=\sqrt{10}$

$|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10}$ trở thành $MA+MB=AB$

$\Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng và M ở giữa A và B

Gọi H là điểm chiếu của O lên AB, phương trình $(AB): x+3y-7=0$, $(OH): 3x-y=0$

Tọa độ điểm $H\left(\frac{7}{10};\frac{21}{10}\right)$, Có $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{3}{10};\frac{1}{10}\right)$, $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{27}{10};-\frac{9}{10}\right)$ và $\overrightarrow{BH}=-9\overrightarrow{AH}$

Nên H thuộc đoạn AB

$|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhât, mà M thuộc đoạn AB

$\Leftrightarrow M\equiv H\left(\frac{7}{10};\frac{21}{10}\right)$

Lúc đó $S=7a+b=\frac{49}{10}+\frac{21}{10}=7$. Chọn A

Câu 23. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Giải:

Chọn D

Gọi $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, ta có $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8\Leftrightarrow|x|+2|y|=4\Rightarrow\begin{cases}|x|\le 4\\|y|\le 2\end{cases}$, tập hợp

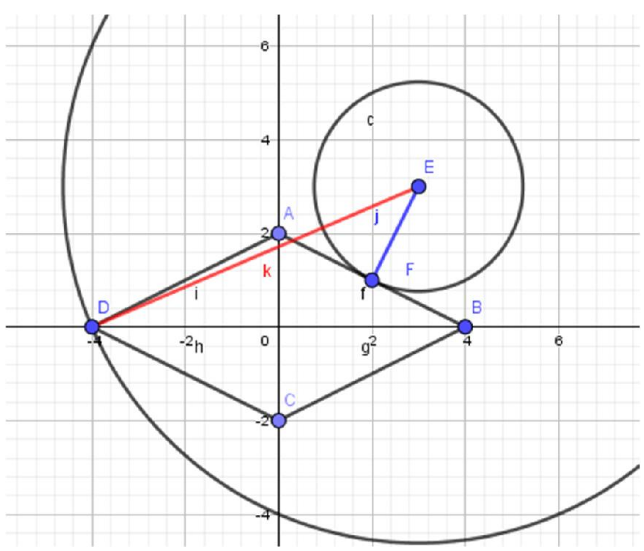
$K(x;y)$ biểu diễn số phức z thuộc cạnh các cạnh của trong hình thoi $ABCD$ như hình vẽ.

$P=|z-3-3i|$ đạt giá trị lớn nhất khi KM lớn nhất, theo hình vẽ ta có KM lớn nhất khi $K\equiv D$ hay $K(-4;0)$ suy ra $M=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$

$P=|z-3-3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi KM nhỏ nhất, theo hình vẽ ta có KM nhỏ nhất khi $K\equiv F$ (F là hình chiếu của E trên AB.

Suy ra $F(2;1)$ do $AE=AB$ nên F là trung điểm của AB.

Suy ra $m=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. Vậy $M+m=\sqrt{58}+\sqrt{5}$



Câu 24. **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$.

A. $\frac{13}{4}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{11}{4}$

Lời giải

Chọn A

$P=|z^2-z|+|z^2+z+1|=|z||z-1|+|z^2+z+1|=|z-1|+|z^2+z+1|$

Do $|z|=1$ nên ta đặt $z=\cos x+i.\sin x$. Khi đó

$P=|z-1|+|z^2+z+1|=|\cos x+i.\sin x-1|+|\cos 2x+i\sin 2x+\cos x+i\sin x+1|$

$=\sqrt{(\cos x-1)^2+\sin^2 x}+\sqrt{(\cos 2x+\cos x+1)^2+(\sin 2x+\sin x)^2}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{3+4\cos x+2\cos 2x}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{4\cos^2 x+4\cos x+1}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+|2\cos x+1|$

Đặt $t=\cos x,\ t\in[-1;1]$. Xét hàm $y=\sqrt{2-2t}+|2t+1|$

Với $t\geq -\frac{1}{2}$ thì $y=\sqrt{2-2t}+2t+1,\ y'=\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}+2$

$y'=0\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2-2t}}+2=0\Leftrightarrow t=\frac{7}{8}$

$y(1)=3; y\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{13}{4}; y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

Với $t<-\frac{1}{2}$ thì $y=\sqrt{2-2t}-2t-1,\ y'=\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}-2$

$y'=0\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2-2t}}-2=0\Leftrightarrow \sqrt{2-2t}=\frac{-1}{2}$ (phương trình vô nghiệm)

$y(-1)=3; y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

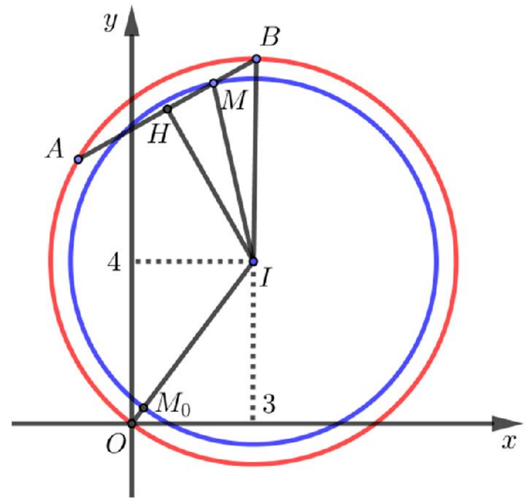
Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=\frac{13}{4}$. Do đó giá trị lớn nhất của $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$ là $\frac{13}{4}$.

Câu 25. **(Chuyên Đại Học Vinh -2019)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Lời giải

Chọn C



Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ .Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 . Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.

* Ta có $(z-6)(8+\overline{zi}) = [(x-6)+yi].[(8-y)-xi] = (8x+6y-48)-(x^2+y^2-6x-8y)i$. Theo giả thiết $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực nên ta suy ra $x^2+y^2-6x-8y=0$. Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$ .Gọi H là trung điểm AB . Ta tính được $HI^2 = R^2 - HB^2 = 21; IM = \sqrt{HI^2+HM^2} = \sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{22}$.

* Ta có $|z_1+3z_2| = |\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$, do đó $|z_1+3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $(OM)_{\min} = OM_0 = |OI - r| = 5-\sqrt{22}$.

Vậy $|z_1+3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20-4\sqrt{22}$.

Câu 26. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng

A. -10 **B.** $-4-3\sqrt{5}$ **C.** -5 **D.** $-6-2\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z_1 = x_1 + y_1 i, (x_1, y_1 \in \mathbb{R})$ và $z_2 = x_2 + y_2 i, (x_2, y_2 \in \mathbb{R})$.

Khi đó $\begin{cases}(x_1-3)^2+(y_1-4)^2=4\\(x_2-3)^2+(y_2-4)^2=4\end{cases}$ và $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$.

Ta có $(x_1-3)^2+(y_1-4)^2=(x_2-3)^2+(y_2-3)^2 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-(x_2^2+y_2^2)=6(x_1-x_2)+8(y_1-y_2)$.

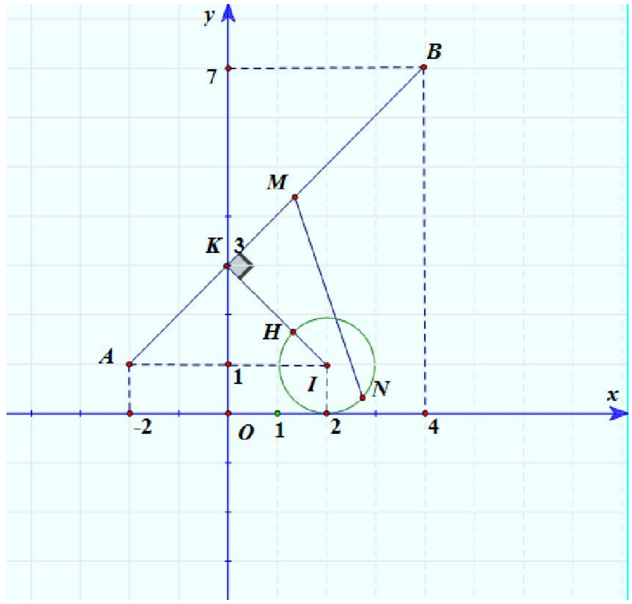
Suy ra $\left||z_1|^2-|z_2|^2\right| = 2|3(x_1-x_2)+4(y_1-y_2)| \le 2.\sqrt{(3^2+4^2)\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]}=10$.

Do đó $-10 \le |z_1|^2-|z_2|^2 \le 10$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Lời giải



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và $A(-2;1)$; $B(4;7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2+i$, $4+7i$. Ta có $AB=6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng AB là $d: x-y+3=0$.

+) $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=AB$. Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đoạn thẳng AB.

+) $|iz_2-1+2i|=1 \Leftrightarrow |iz_2-1+2i||i|=1 \Leftrightarrow |-z_2-2-i|=1$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $2+i$. Ta có $IN=1$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn (C) có phương trình:

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

$d(I,AB)=2\sqrt{2}>1$, suy ra AB không cắt đường tròn.

Gọi K là hình chiếu của $I(2;1)$ lên AB. Dễ thấy K nằm trên đoạn thẳng AB.

Gọi H là giao điểm của đoạn IK với đường tròn (C).

Ta có $|z_1+z_2|=MN\geq KH=d(I,AB)-R=2\sqrt{2}-1$.

Suy ra $min|z_1+z_2|=2\sqrt{2}-1$.

Câu 28. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi$ $(a, b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|\bar{z}|=|z+2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b+2)^2} \Leftrightarrow 4b+4=0 \Leftrightarrow b=-1$

$\Rightarrow z=a-i$.

Xét: $|z-1+2i|+|z+1+3i|=|a-1+i|+|a+1+2i|=\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}$.

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}\ge\sqrt{(1-a+1+a)^2+(1+2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Suy ra: $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2(1-a)=1+a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét: Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

Câu 29. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho các số phức $z_1=-2+i$, $z_2=2+i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức M^2-m^2 bằng

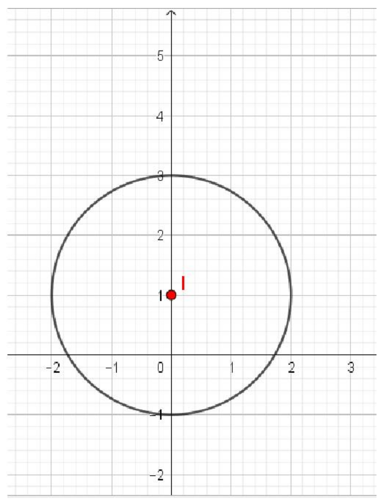
A. 15. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16\Leftrightarrow|x+yi+2-i|^2+|x+yi-2-i|^2=16\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=4$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm số phức $I(0;1)$ bán kính $R=2$.



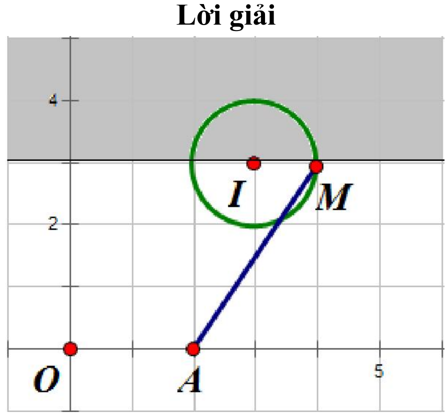
Do đó $m=1$, $M=3$.

Vậy $M^2-m^2=8$.

Câu 30. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\le|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{10}+1$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải



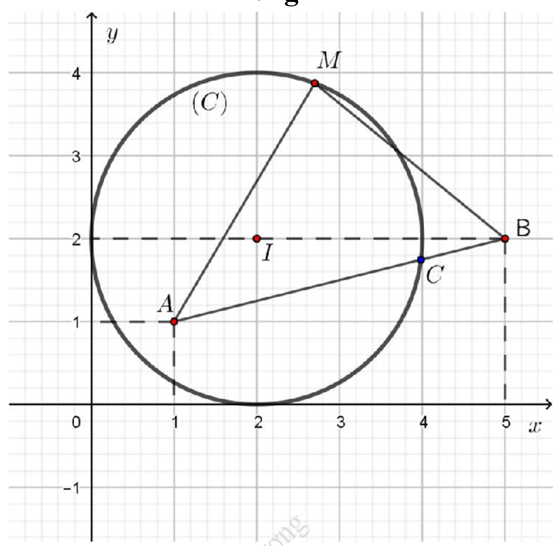
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $|z-2i|\le|z-4i|\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2\le x^2+(y-4)^2$

$\Leftrightarrow y \le 3$; $|z-3-3i|=1 \Leftrightarrow$ điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3;3)$ và bán kính bằng 1. Biểu thức $P=|z-2|=AM$ trong đó $A(2;0)$, theo hình vẽ thì giá trị lớn nhất của $P=|z-2|$ đạt được khi $M(4;3)$ nên $\max P=\sqrt{(4-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 31. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1-i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{17}$ **D.** 5.

Lời giải



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Do $|z-2-2i|=2$ nên tập hợp điểm M là đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Các điểm $A(1;1)$, $B(5;2)$ là điểm biểu diễn các số phức $1+i$ và $5+2i$. Khi đó, $P=MA+MB$.

Nhận thấy, điểm A nằm trong đường tròn (C) còn điểm B nằm ngoài đường tròn (C), mà $MA+MB \ge AB=\sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đoạn AB với (C).

Ta có, phương trình đường thẳng $AB: x-4y+3=0$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C) là nghiệm của hệ với $1<y<5$

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=4\\ x-4y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4y-5)^2+(y-2)^2=4\\ x=4y-3\end{cases}$$

Ta có $(4y-5)^2+(y-2)^2=4 \Leftrightarrow 17y^2-44y+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{22+\sqrt{59}}{17}\,(N)\\ y=\dfrac{22-\sqrt{59}}{17}\,(L)\end{array}\right.$

Vậy $\min P=\sqrt{17}$ khi $z=\dfrac{37+4\sqrt{59}}{17}+\dfrac{22+\sqrt{59}}{17}i$

Câu 32. **(SGD Cần Thơ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Lời giải

- Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-3)+(y-4)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$, hay tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $r = \sqrt{5}$.

- Khi đó : $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x + 2y + 3$

$\Rightarrow 4x + 2y + 3 - P = 0$, kí hiệu là đường thẳng Δ.

- Số phức z tồn tại khi và chỉ khi đường thẳng Δ cắt đường tròn (C)

$\Leftrightarrow d(I;\Delta) \le r \Leftrightarrow \dfrac{|23-P|}{2\sqrt{5}} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow |P-23| \le 10 \Leftrightarrow 13 \le P \le 33$

Suy ra $M = 33$ và $m = 13 \Rightarrow w = 33 + 13i$.

Vậy $|w| = \sqrt{1258}$.

Câu 33. **(THPT Hậu Lộc 2 - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

A. $m = \sqrt{2} - 1$. **B.** $m = 2\sqrt{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z_1 = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 = -b + ai$

$\Rightarrow z_1 - z_2 = (a+b) + (b-a)i$.

Nên $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a+b)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{2}.|z_1|$

Ta lại có $2 = |z_1 + 1 - i| \le |z_1| + |1-i| = |z_1| + \sqrt{2}$

$\Rightarrow |z_1| \ge 2 - \sqrt{2}$. Suy ra $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}.|z_1| \ge 2\sqrt{2} - 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{-1} < 0$.

Vậy $m = \min|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2} - 2$.

Câu 34. **(SGD Bắc Giang - 2018)** Hcho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases} |z-3-2i| \le 1 \\ |\mathrm{w}+1+2i| \le |\mathrm{w}-2-i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |z - \mathrm{w}|$.

A. $P_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. **B.** $P_{\min} = \sqrt{2} + 1$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Lời giải

Giả sử $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$, $\mathrm{w} = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$.

$|z-3-2i| \le 1 \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-2)^2 \le 1$ (1)

$|\mathrm{w}+1+2i| \le |\mathrm{w}-2-i| \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 \le (x-2)^2 + (y-1)^2$.

Suy ra $x + y = 0$.

$P = |z - \mathrm{w}| = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(a-x)^2 + (b+x)^2}$.

Từ (1) ta có $I(3;2)$, bán kính $r=1$. Gọi H là hình chiếu của I trên $d: y=-x$.

Đường thẳng HI có PTTS $\begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \end{cases}$.

$M \in HI \Rightarrow M(3+t;2+t)$

$M \in (C) \Leftrightarrow 2t^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

$t=2 \Rightarrow M\left(3+\dfrac{1}{\sqrt{2}};2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $MH=\dfrac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$t=3 \Rightarrow M\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{2}};2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $MH=\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$.

Câu 35. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018) Cho số phức z thỏa $|z|=1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z^5+\overline{z}^3+6z\right|-2\left|z^4+1\right|$. Tính $M-m$.

A. $m=-4$, $n=3$. **B.** $m=4$, $n=3$ **C.** $m=-4$, $n=4$. **D.** $m=4$, $n=-4$.

Lời giải

Vì $|z|=1$ và $z.\overline{z}=|z|^2$ nên ta có $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

Từ đó, $P=\left|z^5+\overline{z}^3+6z\right|-2\left|z^4+1\right|=|z|\left|z^4+\overline{z}^4+6\right|-2\left|z^4+1\right|=\left|z^4+\overline{z}^4+6\right|-2\left|z^4+1\right|$.

Đặt $z^4=x+iy$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Do $|z|=1$ nên $\left|z^4\right|=\sqrt{x^2+y^2}=1$ và $-1\le x,y\le 1$.

Khi đó $P=|x+iy+x-iy+6|-2|x+iy+1|=|2x+6|-2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$=2x+6-2\sqrt{2x+2}=\left(\sqrt{2x+2}-1\right)^2+3$.

Do đó $P\ge 3$. Lại có $-1\le x\le 1 \Rightarrow 0\le\sqrt{2x+2}\le 2 \Rightarrow -1\le\sqrt{2x+2}-1\le 1 \Rightarrow P\le 4$.

Vậy $M=4$ khi $z^4=\pm 1$ và $m=3$ khi $z^4=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Suy ra $M-m=1$.

Câu 36. (Chuyên Đh Vinh - 2018) Cho các số phức w, z thỏa mãn $|\mathrm{w}+\mathrm{i}|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

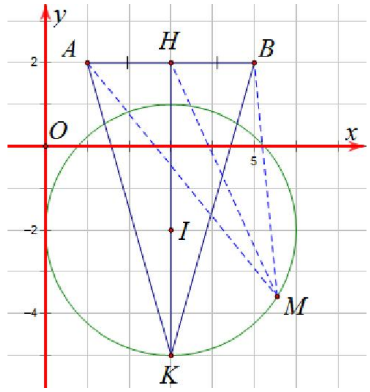
Lời giải

Gọi $z=x+y\mathrm{i}$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Theo giả thiết, $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4) \Leftrightarrow 5(\mathrm{w}+\mathrm{i})=(2+\mathrm{i})(z-4)+5\mathrm{i} \Leftrightarrow (2-\mathrm{i})(\mathrm{w}+\mathrm{i})=z-3+2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow |z-3+2\mathrm{i}|=3$. Suy ra $M(x;y)$ thuộc đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

Ta có $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|=MA+MB$, với $A(1;2)$ và $B(5;2)$.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $H(3;2)$ và khi đó:

$P=MA+MB\le\sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)}$ hay $P\le\sqrt{4MH^2+AB^2}$.

Mặt khác, $MH\le KH$ với mọi $M\in(C)$ nên $P\le\sqrt{4KH^2+AB^2}=\sqrt{4(IH+R)^2+AB^2}=2\sqrt{53}$.

Vậy $P_{\max}=2\sqrt{53}$ khi $\begin{cases}M\equiv K\\ MA=MB\end{cases}$ hay $z=3-5\mathrm{i}$ và $\mathrm{w}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{11}{5}\mathrm{i}$.

Câu 37. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Xét các số phức $z=a+bi$ ($a,b\in\mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** 3. **<u>D</u>.** $4+\sqrt{3}$.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $z-3-2i=w$ với $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Theo bài ra ta có $|w|=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$.

Ta có $P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=|w+4|+2|w+1-3i|=\sqrt{(x+4)^2+y^2}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$=\sqrt{20+8x}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=2\sqrt{5+2x}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

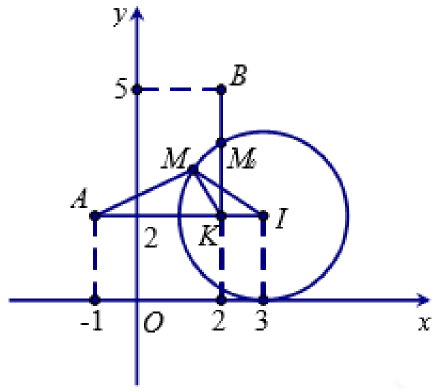
$=2\left(\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)=2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)$

$\ge2\left(|y|+|y-3|\right)\ge2|y+3-y|=6$.

$$P=6\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y(3-y)\ge0\\ x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=\sqrt{3}\end{cases}.$$

Vậy GTNN của P là bằng 6 đạt được khi $z=2+\left(2+\sqrt{3}\right)i$.

Cách 2:



$|z-3-2i|=2 \Rightarrow MI=2 \Rightarrow M \in (I;2)$ với $I=(3;2)$.

$P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=MA+2MB$ với $A=(1;2)$, $B=(2;5)$.

Ta có $IM=2$; $IA=4$. Chọn $K(2;2)$ thì $IK=1$. Do đó ta có $IA.IK=IM^2 \Rightarrow \dfrac{IA}{IM}=\dfrac{IM}{IK}$

$\Rightarrow \Delta IAM$ và ΔIMK đồng dạng với nhau $\Rightarrow \dfrac{AM}{MK}=\dfrac{IM}{IK}=2 \Rightarrow AM=2MK$.

Từ đó $P=MA+2MB=2(MK+MB)\geq 2BK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, K, B thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng BK.

Từ đó tìm được $M=\left(2;2+\sqrt{3}\right)$.

Cách 3:

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$. Đặt $I=(3;2)$, $A(-1;2)$ và $B(2;5)$.

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I, bán kính $R=2$ sao cho biểu thức $P=MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x;y)$ sao cho $MA=2MK$ $\forall M\in(C)$.

Ta có $MA=2MK \Leftrightarrow MA^2=4MK^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)^2$

$\Leftrightarrow MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=4\left(MI^2+IK^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}\right)=3R^2+4IK^2-IA^2$ $(*)$.

$(*)$ luôn đúng $\forall M\in(C) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}=\vec{0}\\ 3R^2+4IK^2-IA^2=0\end{cases}$.

$\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}4(x-3)=-4\\ 4(y-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$.

Thử trực tiếp ta thấy $K(2;2)$ thỏa mãn $3R^2+4IK^2-IA^2=0$.

Vì $BI^2=1^2+3^2=10>R^2=4$ nên B nằm ngoài (C).

Vì $KI^2=1<R^2=4$ nên K nằm trong (C).

Ta có $MA+2MB=2MK+2MB=2(MK+MB)\geq 2KB$.

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK.

Do đó $MA+2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK.

Phương trình đường thẳng $BK: x=2$.

Phương trình đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-2)^2=4$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=2 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}$.

Thử lại thấy $M\left(2;2+\sqrt{3}\right)$ thuộc đoạn BK.

Vậy $a=2$, $b=2+\sqrt{3}$ $\Rightarrow a+b=4+\sqrt{3}$.

Câu 38. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4\text{i}|=1$ và $|z_2-3-4\text{i}|=\frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P_{\min}=\frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min}=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=\frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P_{\min}=5+2\sqrt{5}$.

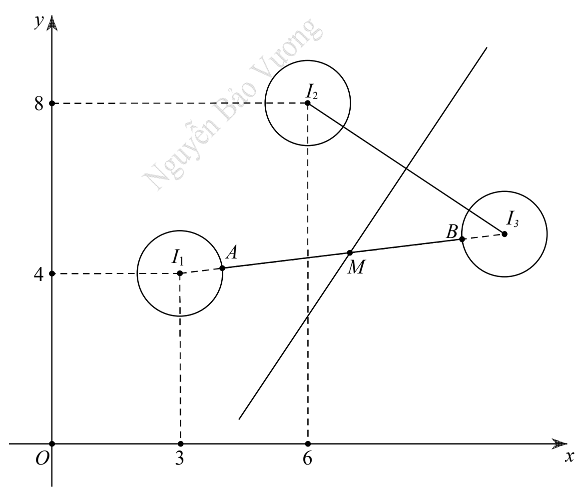
Lời giải

Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z_1, $2z_2$, z trên hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó quỹ tích của điểm M_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$;

quỹ tích của điểm M_2 là đường (C_2) tròn tâm $I(6;8)$, bán kính $R=1$;

quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d: 3x-2y-12=0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của MM_1+MM_2+2.



Gọi (C_3) có tâm $I_3\left(\frac{138}{13};\frac{64}{13}\right)$, $R=1$ là đường tròn đối xứng với (C_2) qua d. Khi đó

$\min\left(MM_1+MM_2+2\right)=\min\left(MM_1+MM_3+2\right)$ với $M_3\in(C_3)$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_3 với (C_1), (C_3). Khi đó với mọi điểm $M_1\in(C_1)$, $M_3\in(C_3)$, $M\in d$ ta có $MM_1+MM_3+2\geq AB+2$, dấu "=" xảy ra khi $M_1\equiv A, M_3\equiv B$. Do đó $P_{\min}=AB+2=I_1I_3-2+2=I_1I_3=\frac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên - 2019)** Trong các số phức thỏa mãn: $|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Lời giải

Chọn D

+ Gọi số phức cần tìm là $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

$\Rightarrow \bar{z} = a - bi$

+ $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$

$\Rightarrow |a + bi - 1 + i| = |a - bi + 1 - 2i|$

$\Leftrightarrow |a - 1 + (b+1)i| = |a + 1 - (b+2)i|$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+2)^2}$

$\Leftrightarrow 4a + 2b + 3 = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{4a+3}{2} = -2a - \dfrac{3}{2}$

+ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \left(2a + \dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5a^2 + 6a + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{5\left(a^2 + \dfrac{6}{5}a + \dfrac{9}{25}\right) + \dfrac{9}{20}}$

$= \sqrt{5\left(a + \dfrac{3}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{20}} \geq \sqrt{\dfrac{9}{20}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

$|z|$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $a = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow b = -\dfrac{3}{10}$.

Câu 40. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất của $P = \left|z^5 + \bar{z}^3 + 6z\right| - 2\left|z^4 + 1\right|$. Tính $M - m$.

A. $M - m = 1$. **B.** $M - m = 7$. **C.** $M - m = 6$. **D.** $M - m = 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z\bar{z} = |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Suy ra $P = \left|z^5 + \dfrac{1}{z^3} + 6z\right| - 2\left|z^4 + 1\right| = \dfrac{1}{|z|^3}\left|z^8 + 1 + 6z^4\right| - 2\left|z^4 + 1\right| = \left|z^8 + 6z^4 + 1\right| - 2\left|z^4 + 1\right|$

Đặt $w = z^4 \Rightarrow |w| = 1$, ta được $P = \left|w^2 + 6w + 1\right| - |2w + 2|$.

Gọi $w = x + yi$, vì $|w| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$.

$P = \left|x^2 + 6x + 1 - y^2 + 2y(x+3)i\right| - 2|x + 1 + yi| = \left|2x^2 + 6x + 2y(x+3)i\right| - 2|x + 1 + yi|$

$= 2|(x+3)(x+yi)| - 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2|(x+3)||x + yi| - 2\sqrt{2x+2}$

$= 2(x+3) - 2\sqrt{2x+2}$

Xét hàm số $f(x) = 2(x+3) - 2\sqrt{2x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

$f'(x) = 2 - 2\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+2} = 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $f(-1) = 4; f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3; f(1) = 4$

Vậy $M = 4, m = 3 \Rightarrow M - m = 1$.

Câu 41. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$; $(x;y\in\mathbb{R})$.

$|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)}$; $x\in[-1;1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\in(-1;1)$.

$f(1)=2$; $f(-1)=4$; $f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$ bằng $2\sqrt{5}$ khi $x=-\dfrac{3}{5}$, $y=\pm\dfrac{4}{5}$.

Câu 42. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Thay $|z|^2=1$ vào P ta có

$P=|z+1|+|z^2-z+1|=|z+1|+\left|z^2-z+|z|^2\right|=|z+1|+|z^2-z+z.\bar{z}|=|z+1|+|z||z+\bar{z}-1|$

$=|z+1|+|z+\bar{z}-1|$.

Mặt khác $|z+1|^2=(z+1)(\bar{z}+1)=2+z+\bar{z}$.

Đặt $t=z+\bar{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t\in[-2;2]$.

Suy ra $P=\sqrt{t+2}+|t-1|$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+|t-1|$ với $t\in[-2;2]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}+1$ với $t>1$. Suy ra $f'(t)>0$ với $t>1$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-1$ với $t<1$. Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	-2		$-\frac{7}{4}$		1		2
$f'(t)$	|	$+$	0	$-$	||	$+$	|
$f(t)$	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$\sqrt{3}$	↗	3

Từ bảng biến thiên suy ra $M=\frac{13}{4}$ tại $t=\frac{-7}{4}$ và $m=\sqrt{3}$ tại $t=2$.

Vậy $M.m=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

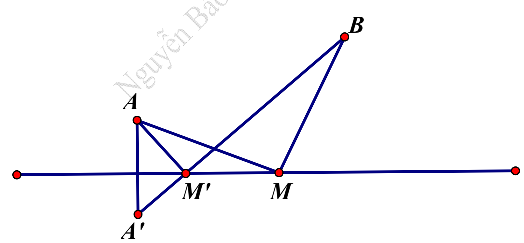
Câu 43. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn : $|\bar{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-i|+|z-4|$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có $|\bar{z}|=|z+2i| \Leftrightarrow y+1=0$, tức biểu diễn hình học của số phức thỏa mãn giả thiết là đường thẳng $y+1=0$. Xét điểm $A(0;1)$ và $B(4;0)$ thì $P=|z-i|+|z-4|=MA+MB$. Dễ thấy A,B cùng phía với đường thẳng $y+1=0$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng BA' trong đó $A'(0;-3)$ đối xứng với A qua đường thẳng $y+1=0$.



Do đó $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $BA'=5$.

Câu 44. **(SGD Bến Tre 2019)** Cho các số phức $z_1=1+3i$, $z_2=-5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3, biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô đun số phức $w=3z_3-z_2-2z_1$ đạt gí trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Trắc nghiệm: Thay tọa độ điểm M vào vế trái phương trình đường thẳng kết quả bằng 0 thỏa ta được đáp án A

Tự luận:

Ta có $w=3z_3-z_2-2z_1=3z_3+3-3i=3(z_3+1-i)\to|w|=3|z_3+1-i|=3AM$ với $A(-1;3)$

$M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3 nằm trên đường thẳng $d:x-2y+1=0$ và $A(-1;3)\notin d$.

Khi đó $|w|=3|z_3+1-i|=3AM$ đạt giá trị nhỏ nhất khi AM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ $AM\perp d$

$AM \perp d$ nên AM có phương trình: $2x+y+1=0$.

Khi đó $M = AM \cap d$ nên $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$.. **Chọn A**

Câu 45. **(SGD Cần Thơ 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

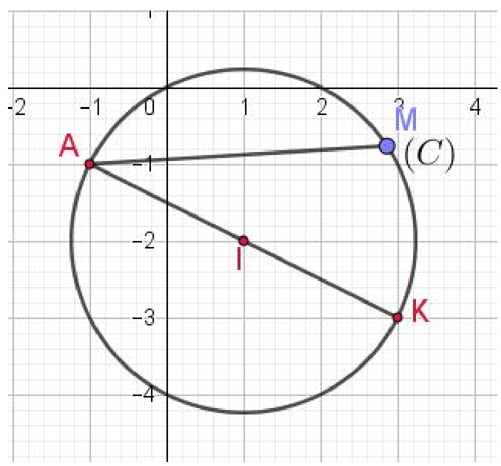
Cách 1.

Ta có $|z+1+i|=|z-1+2i+2-i|\le|z-1+2i|+|2-i|=2\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $z=3-3i$.

Vậy $\max|z+1+i|=2\sqrt{5}$.

Cách 2.



Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ thì từ điều kiện ta có: $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho z và $A(-1;-1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $-1-i$, khi đó $|z+1+i|=AM$ với M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$.

Dễ thấy $A\in(C)$, do đó $AM\le 2R=2\sqrt{5}$.

Suy ra $\max|z+1+i|=2\sqrt{5}$, đẳng thức xảy ra khi $M\equiv K$.

Cách 3.

$|z-1+2i|=\sqrt{5}$ $(*)$

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, khi ấy, ta có $(*)\Leftrightarrow|x+yi-1+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|(x-1)+(y+2)i|=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

Đặt $\begin{cases}x-1=\sqrt{5}\sin a\\ y+2=\sqrt{5}\cos a\end{cases}$. Ta có

$|z+1+i|=|(x+1)+(y+1)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(\sqrt{5}\sin a+2)^2+(\sqrt{5}\cos a-1)^2}$

$=\sqrt{10+4\sqrt{5}\sin a-2\sqrt{5}\cos a}$

$= \sqrt{10 + 10\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin a - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos a\right)} = \sqrt{10 + 10\sin(a - \varphi)}$ với $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$.

Vì $-1 \le \sin(a-\varphi) \le 1$ với mọi $a;\varphi \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{10-10} \le |z+1+i| \le \sqrt{10+10} \Leftrightarrow 0 \le |z+1+i| \le 2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ là $2\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi

$$\sin(a-\varphi) = 1 \Leftrightarrow a - \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow \begin{cases} \cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi + \varphi\right) = -\sin\varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi + \varphi\right) = \cos\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 1 = \sqrt{5}\sin a \\ y + 2 = \sqrt{5}\cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ y + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow z = 3 - 3i.$$

Câu 46. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z - (2+i)\overline{z} = 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** 2. **<u>D.</u>** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Giả sử $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$(2-i)z - (2+i)\overline{z} = 2i \Leftrightarrow (2-i)(x+yi) - (2+i)(x-yi) = 2i$

$\Leftrightarrow (2x+y) + (2y-x)i - [(2x+y) + (-2y+x)i] = 2i \Leftrightarrow (4y-2x)i = 2i \Leftrightarrow 4y - 2x = 2$

$\Leftrightarrow x = 2y - 1$.

Do đó $|z|^2 = x^2 + y^2 = (2y-1)^2 + y^2 = 5y^2 - 4y + 1 = \left(\sqrt{5}y - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{5} \ge \frac{1}{5}, \forall y \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\min|z| = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y = \frac{2}{5}$, $x = -\frac{1}{5}$.

Câu 47. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Số phức z có môđun nhỏ nhất thoả mãn $|-2-3i+\overline{z}| = |z-i|$ là

A. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$. **B.** $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$. **<u>C.</u>** $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$. **D.** $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Đặt $z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

Khi đó $|-2-3i+\overline{z}| = |z-i| \Leftrightarrow |(x-2) - (y+3)i| = |x + (y-1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn của z là đường thẳng $\Delta: x - 2y - 3 = 0$.

Ta có $\min|z| = \mathrm{d}(O, \Delta)$. Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với $\Delta \Rightarrow d: 2x + y = 0$.

Gọi $H = d \cap \Delta \Rightarrow H : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.

Khi đó z có môđun nhỏ nhất thoả mãn có điểm biểu diễn là H, tức là $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.

Câu 48. **(Sở GD Nam Định - 2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(12-5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i}\right| = 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $z \neq 2 + i$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow |12 - 5i| . \left|z + \frac{17 + 7i}{12 - 5i}\right| = 13|z - 2 - i| \Leftrightarrow |z + 1 + i| = |z - 2 - i| \ (1)$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$. Vì $z \neq 2 + i$ nên $M \neq N(2;1)$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 6x + 4y - 3 = 0$.

Ta thấy đường thẳng $d : 6x + 4y - 3 = 0$ không đi qua điểm $N(2;1)$ nên tập hợp điểm M là đường thẳng d.

Ngoài ra, $|z| = OM$ nên $|z|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất, tức là $OM = \mathrm{d}(O, d) = \frac{3}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{26}$.

Vậy $\min|z| = \frac{3\sqrt{13}}{26}$.

Câu 49. **(Chuyên Nguyễn Huệ-HN-2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min|w| = \frac{1}{2}$. **B.** $\min|w| = 1$. **C.** $\min|w| = \frac{3}{2}$. **D.** $\min|w| = 2$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$

$\Leftrightarrow |(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$

$\Leftrightarrow |z - 1 + 2i| . (|z - 1 - 2i| - |z - 1 + 3i|) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |z - 1 + 2i| = 0 & (1) \\ |z - 1 - 2i| = |z - 1 + 3i| & (2) \end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow z - 1 + 2i = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i$. Khi đó, $|w| = |1 - 2i - 2 + 2i| = 1 \ (3)$.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $(2) \Leftrightarrow |(x-1) + (y-2)i| = |(x-1) + (y+3)i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow (y-2)^2 = (y+3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = x - \frac{1}{2}i$.

$\Rightarrow |w| = \left|(x-2)+\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{(x-2)^2+\frac{9}{4}} \ge \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$. (4).

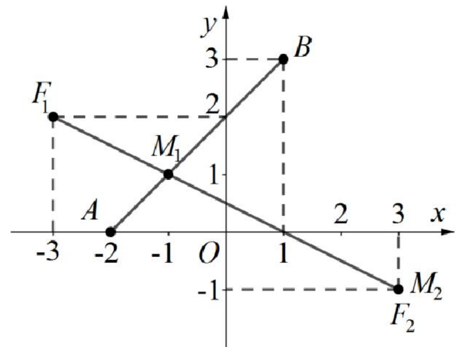
Từ (3) và $(4) \Rightarrow \min|w| = 1$.

Câu 50. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M = \sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.
B. $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = \sqrt{2}$.
C. $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.
D. $M = \sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, $F_1(-3;2)$, $F_2(3;-1)$, $A(-2;0)$ và $B(1;3)$.

Ta có $|z+3-2i|+|z-3+i| = 3\sqrt{5}$ và $F_1F_2 = 3\sqrt{5} \Rightarrow MF_1 + MF_2 = F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đoạn thẳng F_1F_2.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy:

+ $M = P_{\max} = M_2A + M_2B = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$.

+ $m = P_{\min} = M_1A + M_1B = AB = 3\sqrt{2}$.

Vậy $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.

Câu 51. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i| = 2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z = 1+5i$.
B. $z = 1+i$.
C. $z = 1+3i$.
D. $z = 1-i$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z = x+yi$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z-1-3i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -y^2+6y-5$

Vì $(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow -y^2+6y-5 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le 5$

$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{6y-5}$

Vì $1 \le y \le 5 \Leftrightarrow 1 \le 6y-5 \le 25 \Leftrightarrow 1 \le |z-1| \le 5$

Vậy $|z-1|$ nhỏ nhất khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ khi đó $z = 1+i$

Câu 52. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz+2i+4|=3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2$.

A. 9. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi, x, y\in\mathbb{R}$, ta có $M(z)=M(x;y)$

Khi đó: $|iz+2i+4|=3 \Leftrightarrow |i(x+yi)+2i+4|=3 \Leftrightarrow |(-y+4)+(x+2)i|=3$

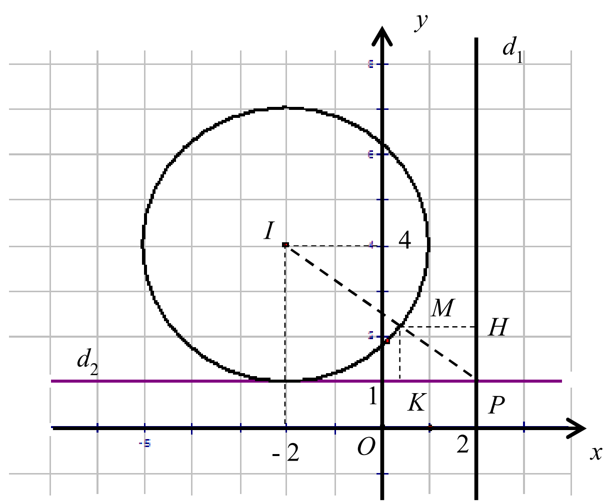
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=9$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(-2;4)$, bán kính $R=3$.

Mặt khác: $z_1=2+bi \Rightarrow A(z_1)=A(2;b) \Rightarrow$ Tập hợp điểm A là đường thẳng $d_1:\ x=2$.

$z_2=a+i \Rightarrow B(z_2)=B(a;1) \Rightarrow$ Tập hợp điểm B là đường thẳng $d_2:\ y=1$.

Giao điểm của d_1 và d_2 là $P(2;1)$.



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên d_1 và d_2.

Ta có: $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=MA^2+MB^2\ge MH^2+MK^2=MP^2$.

T đạt giá trị nhỏ nhất khi $A\equiv H, B\equiv K$ và I, M, P thẳng hàng (theo thứ tự đó).

Phương trình đường thẳng $IP:\begin{cases}x=2+4t\\ y=1-3t\end{cases} \Rightarrow M(2+4t;1-3t)$ (vì $M\in IP$).

Mà $M\in(C)$ nên ta có $(4+4t)^2+(-3-3t)^2=9 \Leftrightarrow (1+t)^2=\dfrac{9}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{2}{5}\\ t=-\dfrac{8}{5}\end{array}\right.$

- Với $t=-\dfrac{8}{5} \Rightarrow M\left(-\dfrac{22}{5};\dfrac{29}{5}\right)$ (loại)

- Với $t=-\dfrac{2}{5} \Rightarrow M\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{11}{5}\right) \Rightarrow z=\dfrac{2}{5}+\dfrac{11}{5}i \Rightarrow z_1=2+\dfrac{11}{5}i, z_2=\dfrac{2}{5}+i.$

Suy ra $MP_{\min} = IP - IM = IP - R = \sqrt{4^2 + (-3)^2} - 3 = 2$.

Vậy $T_{\min} = 2^2 = 4$ khi $z = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i, z_1 = 2 + \frac{11}{5}i, z_2 = \frac{2}{5} + i$.

Câu 53. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

+) Ta có: $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \quad (1)$.

+) $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = \left[(x+2)^2 + y^2\right] - \left[x^2 + (y-1)^2\right] = 4x + 2y + 3$

$= 4(x-3) + 2(y-4) + 23 \le \sqrt{(4^2+2^2)\left[(x-3)^2 + (y-4)^2\right]} + 23 = 33$.

$P = 33 \Leftrightarrow \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{2} \Leftrightarrow x - 3 = 2(y-4) \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 33$; Với $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 13$.

Vậy số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất là $z = 5 + 5i$. Khi đó $|z+i| = \sqrt{61}$.

Câu 54. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa –2019)** Cho số phức $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1-i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a+b-5|$ là

A. $3-\sqrt{2}$. **B.** $2-\sqrt{2}$. **C.** $3-2\sqrt{2}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Theo giả thiết ta có $|z-1-i| = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1$.

Đặt $a = 1 + \sin t$, $b = 1 + \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Khi đó $P = |a+b-5| = |\sin t + \cos t - 3| = \left|\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 3\right| = 3 - \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Ta có: $-1 \le \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le -\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2} \le P \le 3 + \sqrt{2}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $3 - \sqrt{2}$.

Cách 2:

Theo giả thiết ta có $|z-1-i| = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1 \Rightarrow a, b \in [0; 2]$.

Khi đó $P = |a+b-5| = 5 - a - b = 3 - \left[(a-1) + (b-1)\right]$.

Theo BĐT Bunhia ta có:

$$(a-1)+(b-1)\le\sqrt{(1^2+1^2).\left[(a-1)^2+(b-1)^2\right]}=\sqrt{2}$$

Do đó $P\ge 3-\sqrt{2}$.

Câu 55. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+2|+2|z-2|$.

A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z+2|^2=(a+2)^2+b^2$; $|z-2|^2=(a-2)^2+b^2$.

Suy ra: $|z+2|^2+|z-2|^2=2(a^2+b^2)+8=2|z|^2+8=10$.

Ta có: $A^2=(|z+2|+2|z-2|)^2\le(1^2+2^2)\left(|z+2|^2+|z-2|^2\right)=50$.

Vì $A\ge 0$ nên từ đó suy ra $A\le\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $5\sqrt{2}$.

Câu 56. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ (khi a thay đổi) là

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

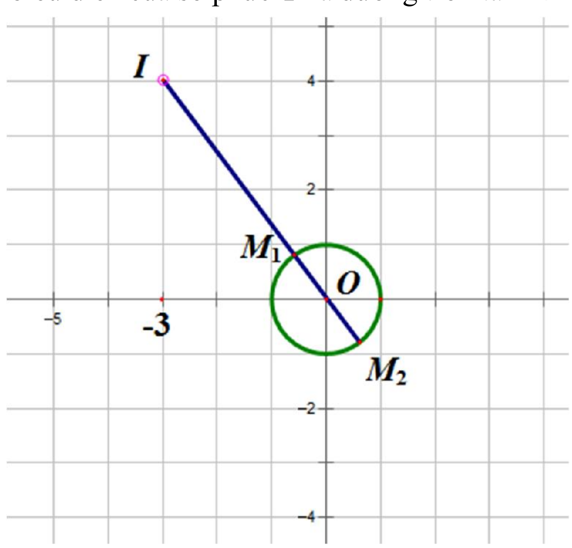
Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{i-a}{1-a(a-2i)}\Leftrightarrow\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{(i-a)(1-a^2-2ai)}{(a^2+1)^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{a^3+a+(a^2+1)i}{(a^2+1)^2}\Leftrightarrow z=\dfrac{a+i}{\sqrt{a^2+1}}\Rightarrow|z|=1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm O bán kính $R=1$.



Ta có: $OI = 5$. Do đó: $OM_{\min} = OM_1 = OI - R = 5 - 1 = 4$.

Câu 57. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = \sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $a^2 - b^2$ bằng

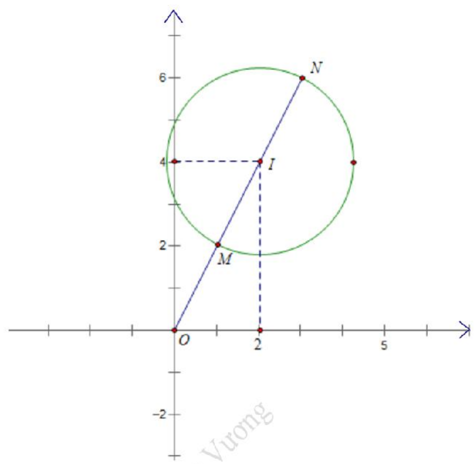
A. 40. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z-2-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.



Kẻ đường thẳng đi qua 2 điểm O và I cắt đường tròn tại 2 điểm M và N như hình vẽ.

$OI = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$; $IM = IN = R = \sqrt{5}$.

Từ hình vẽ ta thấy:

$|z|_{\min} = OM = OI - IM = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} = b$.

$|z|_{\max} = ON = OI + IN = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = a$.

Vậy $a^2 - b^2 = 40$.

Câu 58. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2 + 2\sqrt{3}$.

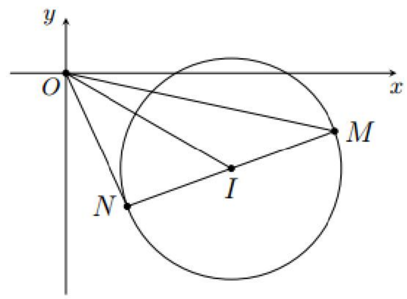
Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2.

Do $\begin{cases} |z_1 - 3 + \sqrt{3}i| = |z_2 - 3 + \sqrt{3}i| = 2 \\ |z_1 - z_2| = 4 \end{cases}$ nên $\begin{cases} M, N \in (C): (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 2^2 \\ MN = 4 = 2.2 \end{cases}$.

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I(3;-\sqrt{3})$, bán kính $R = 2$, do đó I là trung điểm MN, $OI = \sqrt{12}$.



Ta có $|z_1|+|z_2|=OM+ON\le\sqrt{(1+1)(OM^2+ON^2)}=\sqrt{2\left(2OI^2+\frac{MN^2}{2}\right)}=8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM=ON \Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI.

Câu 59. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $20-4\sqrt{22}$. **D.** $5-\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Ta có:

$(z-6)(8+\overline{zi})=(x+yi-6)(8+\overline{(x+yi)i})=(x-6)(8-y)+8xy+[-8x(x-6)+y(8-y)]i$

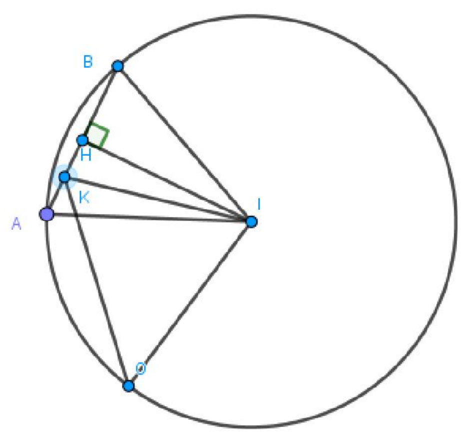
Để là $(z-6)(8+\overline{zi})$ số thực thì $-8x(x-6)+y(8-y)=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

Vậy điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 thuộc đường tròn tâm $I(3,4)$, bán kính $R=5$

Giả sử $z_1=x_1+y_1i$ có điểm biểu diễn $A(x_1,y_1)$; $z_2=x_2+y_2i$ có điểm biểu diễn $B(x_2,y_2)$.

Vì $|z_1-z_2|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=4 \Leftrightarrow AB=4$

Ta xét $|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|$



Gọi H là trung điểm AB, K là trung điểm HB, khi đó ta có:

$|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|2(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OB})|=|4\overrightarrow{OK}|=4OK$

Ta có $OI=IB=IA=5; AB=4;$ AH = HB = 2; $HK=1$ Suy ra $IH=\sqrt{21}\Rightarrow IK=\sqrt{22}$.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $OK+KI\ge OI \Leftrightarrow OK\ge OI-KI \Leftrightarrow OK\ge 5-\sqrt{22}$.

Suy ra $|z_1+3z_2|=4OK\ge 20-4\sqrt{22}$

Câu 60. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức mô đun : $\left|z_1+z_2\right|\ge\left|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right|$. Dấu bằng xảy ra $z_1=kz_2,(k\le 0)$.

Ta có: $2|z|=\left|z^2+1\right|\ge\left|\left|z^2\right|-1\right|\Leftrightarrow -2|z|\le\left|z^2\right|-1\le 2|z|$

Với $\left|z^2\right|-1\le 2|z|\Leftrightarrow\left|z^2\right|-2|z|-1\le 0\Rightarrow|z|\le 1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}|z|=1+\sqrt{2}\\ z^2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-3-2\sqrt{2}\\ z=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)i\end{cases}\Rightarrow|z|_{\max}=1+\sqrt{2}=\left|z_2\right|$

Với $\left|z^2\right|-1\ge -2|z|\Leftrightarrow\left|z^2\right|+2|z|-1\ge 0\Rightarrow|z|\ge -1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}|z|=\sqrt{2}-1\\ z^2=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3+2\sqrt{2}\\ z=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)i\end{cases}\Rightarrow|z|_{\min}=\sqrt{2}-1=\left|z_1\right|$

Vậy $\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2=6$.

Câu 61. **(SGD Đà Nẵng 2119)** Gọi z là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z-2-8i|=\sqrt{17}$. Biết $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$, tính $m=2a^2-3b$

A. $m=-18$. **B.** $m=54$. **C.** $m=-10$. **D.** $m=14$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $|z-2-8i|=\sqrt{17}\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+(b-8)^2}=\sqrt{17}\Leftrightarrow IM=\sqrt{17}$ với $I(2;8)$.

Suy ra: M thuộc đường tròn (C) có tâm I bán kính $R=\sqrt{17}$.

Lại có: $OI=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}>R$ nên O nằm ngoài (C).

GTNN của môđun z là $|z|_{\min}=OM_{\min}=OI-R=\sqrt{17}$ (1).

Đẳng thức xảy ra khi $M=OI\cap(C)$ và M nằm giữa O và I (2).

Từ (1) và (2) ta có M là trung điểm OI nên $M(1;4)$.

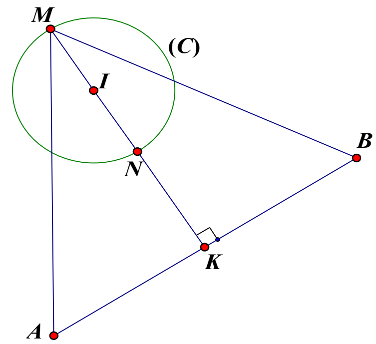
Suy ra $a=1;b=4$. Khi đó: $m=2a^2-3b=2-12=-10$.

Câu 62. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Xét các số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z+2-3i|=2\sqrt{2}$. Tính $P=2a+b$ khi $|z+1+6i|+|z-7-2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $A(-1;-6), B(7;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(8;8)$ và trung điểm của AB là $K(3;-2)$.

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $(a+2)^2+(b-3)^2=8$.

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{8}$.

Ta thấy $\overrightarrow{IK}=(5;-5) \Rightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng trung trực của AB.

Xét tam giác $MAB \Rightarrow MA^2+MB^2=2MK^2+\dfrac{AB^2}{2}$.

$\Rightarrow 2\left(MA^2+MB^2\right)=4MK^2+AB^2 \geq (MA+MB)^2 \Rightarrow MA+MB \leq \sqrt{4MK^2+AB^2}$.

Ta có $|z+1+6i|+|z-7-2i|$ là tổng khoảng cách từ điểm M trên đường tròn (C) tới hai điểm A và B.

Vậy $MA+MB$ lớn nhất khi: $\begin{cases} MA=MB \\ MK \max \end{cases}$. Điều này xảy ra khi M là giao điểm của IK với đường tròn (C) và M nằm ngoài đoạn IK.

Ta có phương trình của đường thẳng $IK: \begin{cases} x=-2+t \\ y=3-t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của IK với đường tròn (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3-t \\ (x+2)^2+(y-3)^2=8 \end{cases} \Rightarrow 2t^2=8 \Rightarrow t=\pm 2.$$

Vậy điểm M cần tìm ứng với $t=-2$ khi đó

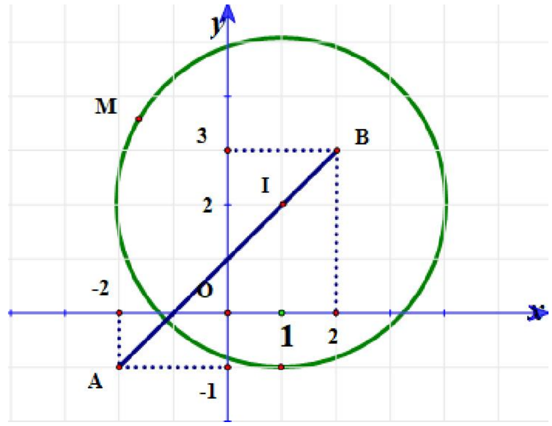
$M(-4;5) \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow P=2a+b=-8+5=-3$

Câu 63. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-3i|=3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+2+i|+\sqrt{6}|z-2-3i|$ bằng

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{15}\left(1+\sqrt{6}\right)$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}+3\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1

$\left|(1+i)z+1-3i\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i|\left|z+\dfrac{1-3i}{1+i}\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-(1+2i)|=3\ (1)$.

Gọi $\overrightarrow{OM}=(x;\ y)$, $\overrightarrow{OI}=(1;\ 2)$ là vec-tơ biểu diễn cho các số phức $z=x+iy$, $\mathrm{w}=1+2i$.

Từ (1) có $\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OI}\right|=3 \Leftrightarrow MI=3$.

Suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;2)$ bán kính $R=3$, $(C):(x-1)^2+(y-2)^3=9$

Gọi $\overrightarrow{OA}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;3)$ lần lượt là vec-tơ biểu diễn cho số phức $a=-2-i$, $b=2+3i$.

Có $\overrightarrow{IA}=(-3;-3)$, $\overrightarrow{IB}=(1;1)$. Suy ra $\overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Lúc đó $P=MA+\sqrt{6}MB=MA+\sqrt{2}.\sqrt{3}MB\ \leq \sqrt{3\left(MA^2+3MB^2\right)}$.

Có $MA^2+3MB^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+3\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2=4IM^2+IA^2+3IB^2$.

Có $IM^2=9$, $IA^2=18$, $IB^2=2$, nên $MA^2+3MB^2=60$.

Suy ra $P\leq\sqrt{3.60}=6\sqrt{5}$.

Có $P=6\sqrt{5}\ \Leftrightarrow \dfrac{MA}{1}=\dfrac{\sqrt{3}MB}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P=6\sqrt{5}$.

Cách 2.

Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z khi đó

$\left|(1+i)z+1-3i\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow |x-y+1+(x+y-3)i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-4=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=9$. Do đó M thuộc đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

Đặt $\begin{cases} a=x-1 \\ b=y-2 \end{cases}$ Ta có $a^2+b^2=9$. Gọi $A=(-2;-1)$, $B=(2;3)$

$P=|z+2+i|+\sqrt{6}|z-2-3i|=MA+\sqrt{6}MB=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{6\left[(x-2)^2+(y-3)^2\right]}$

$=\sqrt{(a+3)^2+(b+3)^2}+\sqrt{6\left[(a-1)^2+(b-1)^2\right]}=\sqrt{6(a+b)+27}+\sqrt{6}\sqrt{(-2)(a+b)+11}$

$=\sqrt{6(a+b)+27}+\sqrt{2}\sqrt{(-6)(a+b)+33}\leq\sqrt{(1+2)(27+33)}=6\sqrt{5}$.

Câu 64. **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z+1-i|=3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2|z-4+5i|+|z+1-7i|$ bằng $a\sqrt{b}$ (với a, b là các số nguyên tố). Tính $S=a+b$?

A. 20. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 17.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có:

$\left|z+1-i\right| = 3 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 9\left(C\right)$;

Suy ra, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $\left(C\right)$, có tâm là $I\left(-1;1\right)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có:

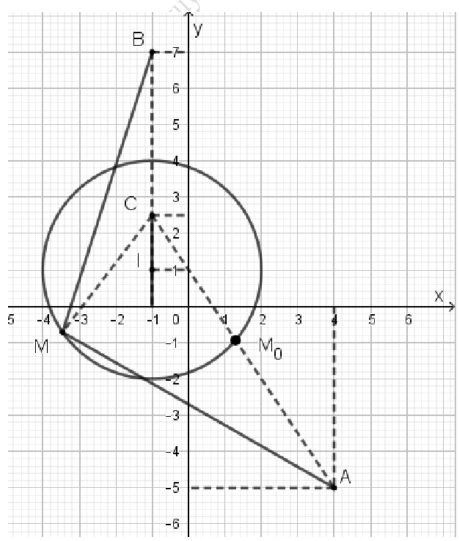
$$A = 2\left|z-4+5i\right| + \left|z+1-7i\right| = 2\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2} + \sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-7\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2} + \sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-7\right)^2+3\left(\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2-9\right)}$$

$$= 2\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2} + \sqrt{4x^2+8x+4y^2-20y+29}$$

$$= 2\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2} + 2\sqrt{x^2+2x+y^2-10y+\frac{29}{4}}$$

$$= 2\left(\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2} + \sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}\right).$$



Gọi $M\left(x;y\right) \in \left(C\right)$.

$$\Rightarrow A = 2\left|z-4+5i\right| + \left|z+1-7i\right| = 2MA + MB,\ A\left(4;-5\right); B\left(-1;7\right).$$

$$\Rightarrow A = 2MA + MB = 2\left(MA + MC\right),\ C\left(-1;\frac{5}{2}\right).$$

Ta có: $\overrightarrow{IC} = \left(0;\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{IC}\right| = \frac{3}{2} < R_{(C)}$.

Suy ra, điểm C nằm trong đường tròn (C).

Vậy, đường thẳng AC cắt đường tròn (C) tại hai điểm.

Do đó, để $A=2(MA+MC)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải nằm giữa hai điểm A và C.

$\Rightarrow A=2(MA+MC)\geq 2AC,\ AC=\dfrac{5\sqrt{13}}{2}$.

$\Rightarrow A\geq 5\sqrt{13}=a\sqrt{b}$.

Vậy, $a+b=18$.

Câu 65. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$ và thỏa mãn $|z_1-z_2|=\dfrac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\dfrac{56}{5}$. **B.** $\dfrac{28}{5}$. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z_1=x_1+y_1i,\ z_2=x_2+y_2i$, với $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$.

Do $|z_1-z_2|=\dfrac{8}{5}\Rightarrow |(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i|=\dfrac{8}{5}\Rightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\dfrac{8}{5}$

Gọi $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ $\Rightarrow M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\dfrac{8}{5}$.

Mà z_1 là nghiệm phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$

$\Rightarrow |(6-y_1)+(x_1-3)i|=|(2x_1-6)+(2y_1-9)i|\Rightarrow \sqrt{(6-y_1)^2+(x_1-3)^2}=\sqrt{(2x_1-6)^2+(2y_1-9)^2}$

$\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-6x_1-8y_1+24=0\Rightarrow M_1(x_1;y_1)\in$ đường tròn $(C): x^2+y^2-6x-8y+24=0$.

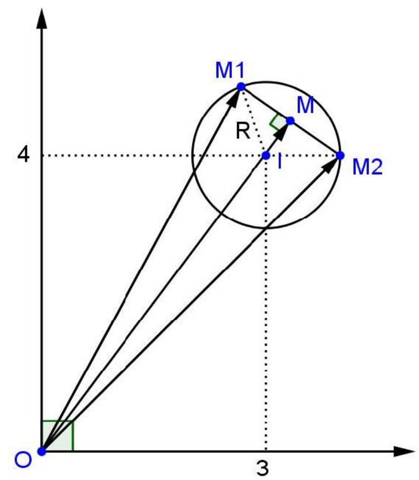
Tương tự $M_2(x_2;y_2)\in(C)$.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$.

Gọi M là trung điểm M_1M_2 $\Rightarrow IM\perp M_1M_2$, $IM=\sqrt{R^2-M_1M^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$, và $|z_1+z_2|=2OM$.

Mà $OM\leq OI+IM$, dấu bằng xảy ra khi O,I,M thẳng hàng. Khi đó $OM\perp M_1M_2$, và $OM=OI+IM=\dfrac{28}{5}$.

$\Rightarrow |z_1+z_2|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $2(OI+IM)$, bằng $\dfrac{56}{5}$.



Hoặc đánh giá chọn đáp án như sau:

Gọi $N(-x_2;-y_2) \Rightarrow NM_1 = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} = |z_1+z_2|$

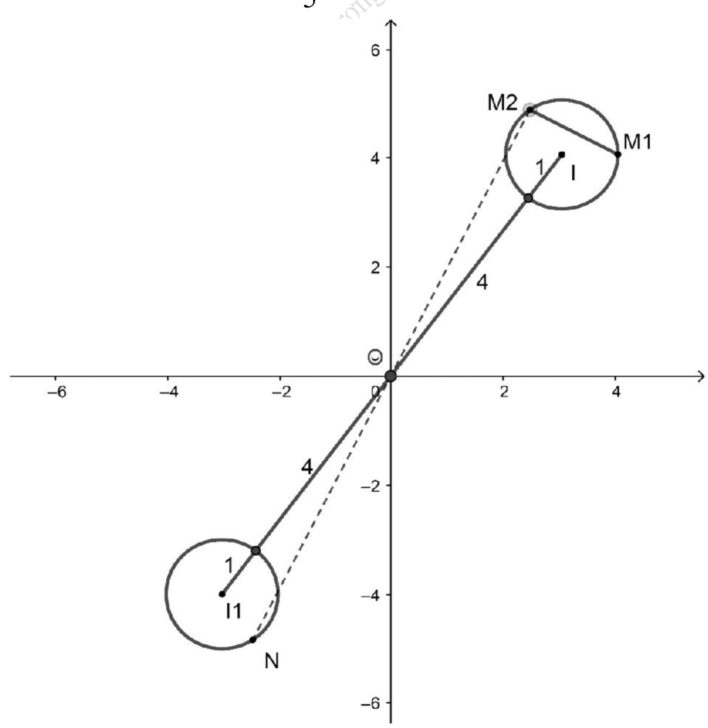
Và N đối xứng với M_2 qua gốc tọa độ O, $N \in$ đường tròn $(C_1): x^2+y^2+6x+8y+24=0$.

(C_1) có tâm $I_1(-3;-4)$, bán kính $R_1=1$, (C_1) đối xứng với (C) qua gốc tọa độ O.

Có $I_1I=10 \Rightarrow I_1I-R-R_1=8$.

Nhận xét: với mọi điểm $M_1 \in (C)$, $N \in (C_1)$ thì $M_1N \geq I_1I-R-R_1$. Loại các đáp án B,C,D

$\Rightarrow |z_1+z_2| = M_1N$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{56}{5}$.



Câu 66. Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T=|w+i|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$(3-i)|z|=\dfrac{z}{w-1}+1-i \Leftrightarrow \dfrac{z}{w-1}=3|z|-1+(1-|z|)i \Rightarrow \left|\dfrac{z}{w-1}\right|=\sqrt{(3|z|-1)^2+(1-|z|)^2}$..

Đặt $t=|z|$; $t>0$ (vì $|z|=0$ không thỏa phương trình trên).

(1) trở thành: $\dfrac{t}{|w-1|}=\sqrt{(3t-1)^2+(1-t)^2} \Leftrightarrow |w-1|=\dfrac{t}{\sqrt{10t^2-8t+2}}$..

$\Leftrightarrow |w-1|=\dfrac{1}{\sqrt{10-\dfrac{8}{t}+\dfrac{2}{t^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{1}{t}-2\right)^2+2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}};\forall t>0$..

Ta luôn có: $|w+i|\le|w-1|+|1+i|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\Rightarrow|w+i|\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$..

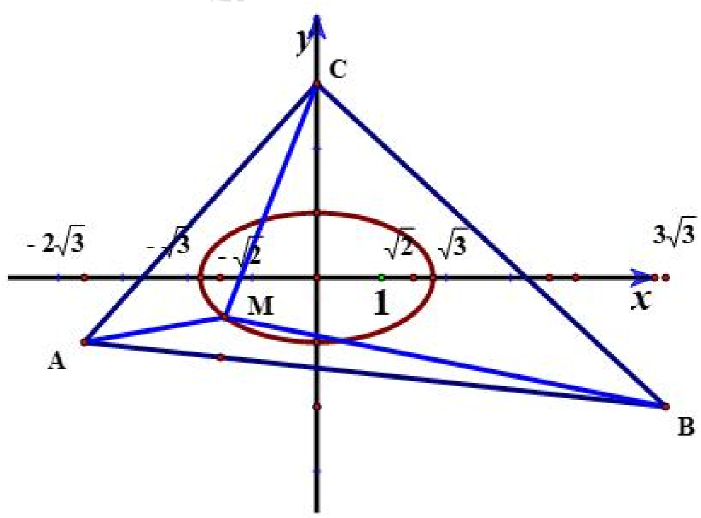
Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t=|z|=\dfrac{1}{2} \\ w-1=k(1+i) \\ |w+i|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{2}i \\ w=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i \end{cases}$.

Vậy: Giá trị lớn nhất của $T=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$..

Câu 67. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-\sqrt{2}|+|z+\sqrt{2}|=2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2\sqrt{3}+i|+|z-3\sqrt{3}+2i|+|z-3i|$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải



Chọn A

Gọi $M(x;y)$, $F_1(-\sqrt{2};0)$, $F_2(\sqrt{2};0)$, lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z=x+yi$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

Có $|z-\sqrt{2}|+|z+\sqrt{2}|=2\sqrt{3}\Leftrightarrow MF_1+MF_2=2\sqrt{3}$, có $2\sqrt{3}>F_1F_2=2\sqrt{2}$.

Suy ra $M(x;\, y)$ chạy trên (E) có tiêu cự $2c = 2\sqrt{2}$, độ dài trục lớn $2a = 2\sqrt{3}$, độ dài trục nhỏ $2b = 2$ và phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

Có $M(x;\, y) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$.

Có $P = \left|z + 2\sqrt{3} + i\right| + \left|z - 3\sqrt{3} + 2i\right| + \left|z - 3i\right|$.

$$= \sqrt{\left(x + 2\sqrt{3}\right)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{\left(x - 3\sqrt{3}\right)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}.$$

$$\ge \sqrt{\left(x + 2\sqrt{3}\right)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{\left(3\sqrt{3} - x\right)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(y-3)^2}.$$

$\ge \sqrt{\left(x + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - x\right)^2 + (2y+3)^2} + |y-3|$ (1) (Bất đẳng thức tam giác).

$= \sqrt{4y^2 + 12y + 84} + 3 - y$.

Đặt $f(y) = 2\sqrt{y^2 + 3y + 21} + 3 - y$, với $-1 \le y \le 1$.

Có $f'(y) = \dfrac{2y+3}{\sqrt{y^2 + 3y + 21}} - 1$.

$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 3y + 21} = 2y + 3$ (1),

Có $-1 \le y \le 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 3y^2 + 9y - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 1 & (\text{nhaän}) \\ y = -4 & (\text{loaïi}) \end{array}\right.$.

Có $f(-1) = 4 + 2\sqrt{19}$, $f(1) = 12$.

Suy ra $\underset{y \in [-1;1]}{Min} f(y) = 12 \Rightarrow P \ge 12$.

Đẳng thức (1) xảy ra khi $\begin{cases} x = 0, y = 1 \\ \dfrac{x + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - x} = \dfrac{y+1}{y+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1$.

Thử lại: Khi $x = 0, y = 1$ có $P = 12$.

Vậy $MinP = 12$ khi $x = 0, y = 1$.

Câu 68. Cho số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z|^2 + 3y^2 = 16$. Biểu thức $P = \left||z - i| - |z - 2|\right|$ đạt giá trị lớn nhất tại $(x_0\,;\, y_0)$ với $x_0 < 0, y_0 > 0$. Khi đó: $x_0^2 + y_0^2$ bằng

A. $\dfrac{20 - 3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{20 + 3\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{20 + 3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{20 - 3\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z|^2 + 3y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 16$.

$P = \left|\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right| = \left|\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(2-x)^2 + (-y)^2}\right|$

$\le \sqrt{(x + 2 - x)^2 + (y - 1 - y)^2} = \sqrt{5}$.

$$P_{\max}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x.(-y)=(2-x)(y-1)\\x.(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x^2+4y^2=16\\x<0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-2=0\\x(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x^2+4y^2=16\\x<0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-2y\\(2-2y)^2+4y^2-16=0\\x(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x<0\\y>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\\x=1-\sqrt{7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1-\sqrt{7}\\y_0=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\end{cases}\Rightarrow x_0^2+y_0^2=\frac{20-3\sqrt{7}}{2}.$$

Nhận xét: Bài này ta dùng bất đẳng thức véc tơ như sau

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2),\vec{b}=(b_1;b_2)\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2)$, ta có:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\ge\left|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\right|\Leftrightarrow\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}\ge\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right|.$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng $\Leftrightarrow\begin{cases}a_1b_2=a_2b_1\\a_1b_1<0\\a_2b_2<0\end{cases}$.

Câu 69. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+4|+|z-4|=10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$.

A. $S=11$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn B

Trong mp tọa độ Oxy, Ta gọi các điểm biểu diễn của các số phức:

$z=x+yi$ là $M(x;y)$; $z=-4+0i$ là $F_1(-4;0)$; $z=4+0i$ là $F_2(4;0)$.

Ta có: $|z+4|+|z-4|=10\Rightarrow MF_1+MF_2=10$. (1)

$$\begin{cases}MF_1^2=(x+4)^2+y^2\\MF_2^2=(x-4)^2+y^2\end{cases}\Rightarrow MF_1^2-MF_2^2=16x\Rightarrow MF_1-MF_2=\frac{8x}{5}.(2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $MF_1=5+\dfrac{4x}{5}$.

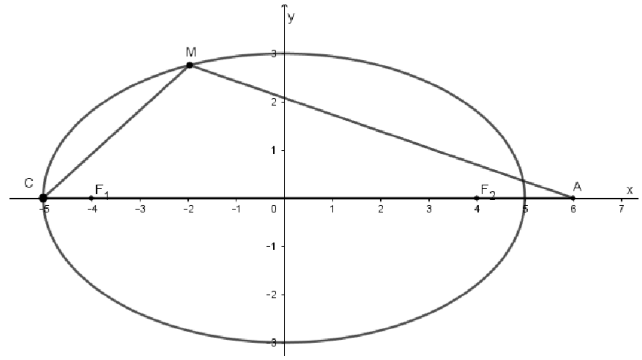
Mặt khác $MF_1^2=(x+4)^2+y^2\Rightarrow\left(5+\dfrac{4x}{5}\right)^2=(x+4)^2+y^2\Rightarrow\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức thỏa mãn $|z+4|+|z-4|=10$ là Elip có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Theo đề, ta cần tìm điểm thuộc (E) sau cho $|z-6|$ lớn nhất.

Ta gọi các điểm biểu diễn số phức: $z=6+0i$ là $A(6;0)$; $z=a+bi$ là $M(a;b)\in(E)$; $z=-5+0i$ là $C(-5;0)$.

Do đó, $|z-6|$ lớn nhất khi và chỉ khi MA lớn nhất.



Dựa, vào hình vẽ trên ta thấy để MA lớn nhất khi $M \equiv C(-5;0) \Rightarrow a=-5; b=0 \Rightarrow S=-5$.

Câu 70. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa $|z+4|+|z-4|=10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$?

A. $S=-3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=11$.

Lời giải

Chọn C

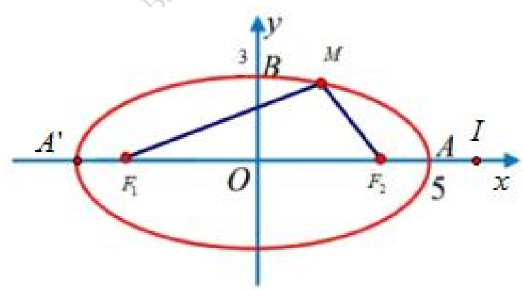
Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

$|z-4|+|z+4|=10 \Leftrightarrow |(a-4)+bi|+|(a+4)+bi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10(*)$

Xét $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$

Suy ra M thuộc Elip có $\begin{cases} c=4 \\ 2a=10 \Rightarrow a=5 \end{cases} \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=3$



Ta có: $|z-6|=\sqrt{(a-6)^2+b^2}=IM, I(6;0)$, suy ra $\max|z-6|=IA'$ hay điểm $M\equiv A'(-5;0) \Rightarrow z=-5+0i \Rightarrow S=-5$.

Câu 71. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$, M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|1+z|+2|1-z|$. Giá trị của biểu thức $M+m$ bằng

A. $2\sqrt{5}+2$. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{5}+4$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow A=|1+z|+2|1-z|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2+2x}+2\sqrt{2-2x}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2+2x}+2\sqrt{2-2x}$ với $x\in[-1;1]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2+2x}}-\frac{2}{\sqrt{2-2x}}=\frac{\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}}{\sqrt{2(1-x^2)}}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}=0\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}\in[-1;1].$$

Khi đó $f(-1)=4$; $f\left(-\frac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$; $f(1)=2$.

Do đó $M=\max\limits_{[-1;1]}f(x)=f\left(-\frac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$; $m=\min\limits_{[-1;1]}f(x)=f(1)=2$. Suy ra $M+m=2\sqrt{5}+2$.

Câu 72. Xét tập hợp S các số phức $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|3z-\bar{z}|=|(1+i)(2+2i)|$. Biểu thức $Q=|z-\bar{z}|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0=x_0+y_0i$ (khi z thay đổi trong tập S). Tính giá trị $T=M.x_0y_0^2$.

A. $T=-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $T=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=-\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|3z-\bar{z}|=|(1+i)(2+2i)|\Leftrightarrow 4x^2+16y^2=16\Leftrightarrow x^2+4y^2=4\Leftrightarrow 4y^2=4-x^2$

Do đó, $Q=|z-\bar{z}|(2-x)=\sqrt{4y^2}(2-x)=\sqrt{4-x^2}(2-x)=f(x)$, $(-2\le x\le 2)$.

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x-4}{\sqrt{4-x^2}},(-2<x<2).$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\notin(-2;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-1.$$

Mặt khác, $f(-2)=0, f(2)=0, f(-1)=3\sqrt{3}$.

Suy ra $M=3\sqrt{3}$ tại $x_0=-1, y_0^2=\frac{3}{4}$.

Vậy $T=\frac{-9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 73. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-3+\sqrt{3}i|=2$ và $|z_1-z_2|=4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

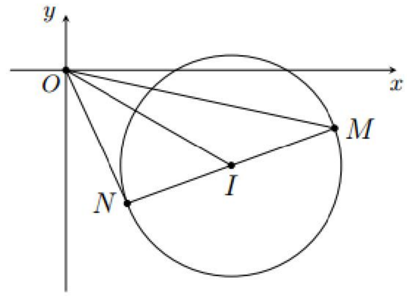
Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2.

Do $\begin{cases}|z_1-3+\sqrt{3}i|=|z_2-3+\sqrt{3}i|=2\\|z_1-z_2|=4\end{cases}$ nên $\begin{cases}M,N\in(C):(x-3)^2+(y+\sqrt{3})^2=2^2\\MN=4=2.2\end{cases}$.

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I(3;-\sqrt{3})$, bán kính $R=2$, do đó I là trung điểm MN, $OI=\sqrt{12}$.



Ta có $|z_1|+|z_2|=OM+ON\le\sqrt{(1+1)(OM^2+ON^2)}=\sqrt{2\left(2OI^2+\dfrac{MN^2}{2}\right)}=8$.

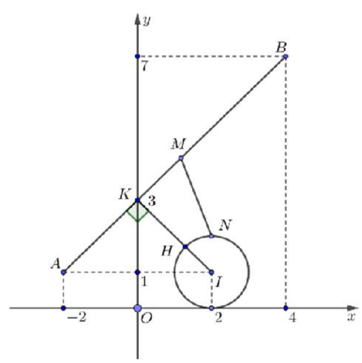
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM=ON\Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI.

Câu 74. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $2\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}+1$.

Lời giải

Chọn C



Trên mặt phẳng Oxy, gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z_1; $A(-2;1)$, $B(4;7)$ lần lượt là điểm biểu cho các số phức $-2+i$ và $4+7i$ $\Rightarrow AB=6\sqrt{2}$.

Từ đó ta được $MA+MB=6\sqrt{2}=AB$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z_1 là đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $d: x-y+3=0$.

Đặt $z_3=-z_2$, khi đó

$|iz_2-1+2i|=1\Leftrightarrow|-iz_3-1+2i|=1\Leftrightarrow|z_3-2-i|=1$. Gọi $N(c;d)$ là điểm biểu diễn cho z_3; $I(2;1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $2+i$, khi đó $IN=1$ nên tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z_3 là đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

$|z_1+z_2|=|z_1-z_3|=MN$.

Dễ thấy hình chiếu vuông góc của điểm $I(2;1)$ trên đường thẳng (d) là điểm $K(0;3)$ thuộc đoạn AB suy ra $MN\ge KH$ với H là giao điểm của IK với (C) và thuộc đoạn IK.

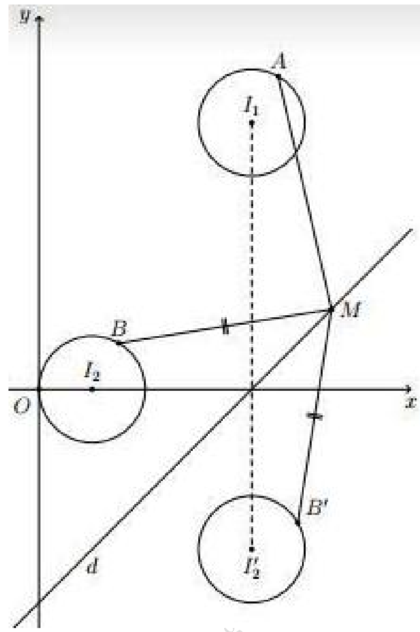
Do đó $\min MN=KH=d(I,AB)-R=2\sqrt{2}-1$. Vậy $\min|z_1+z_2|=2\sqrt{2}-1$

Câu 75. **(Trường Thpt Hàm Rồng 2019)** Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-4-5i|=|z_2-1|=1$ và $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i|$. Tính $|z_1-z_2|$ khi $P=|z-z_1|+|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 8 **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1. Suy ra A thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(4;5), R=1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức z_2. Suy ra B thuộc đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;0), R=1$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$

Theo giả thiết $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i| \Leftrightarrow x-y=4$. Suy ra M thuộc đường thẳng (d) $x-y-4=0$

Gọi (C_2') có tâm $I_2'(4;-3), R=1$ là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;0), R_2=1$ qua đường thẳng d. Gọi B' là điểm đối xứng với đối xứng với B qua đường thẳng d. Ta có $P=|z-z_1|+|z-z_2|=MA+MB=MA+MB'\geq AB'=I_1I_2'-R_1-R_2=6$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi A, B', I_1, I_2', M thẳng hàng. Khi đó $\overrightarrow{I_1A}=\frac{1}{8}\overrightarrow{I_1I_2'}$ suy ra $A(4;4)$ và $\overrightarrow{I_2B'}=\frac{1}{8}\overrightarrow{I_2'I_1}$ suy ra $B'(4;-2)\Rightarrow B(2;0)$. $AB=2\sqrt{5}$.

Vậy $|z_1-z_2|=2\sqrt{5}$.

Câu 76. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Cho các số phức z và ω thỏa mãn $(2+i)|z|=\frac{z}{\omega}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|\omega+1-i|$

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

$\left(2+i\right)\left|z\right| = \dfrac{z}{\omega}+1-i \Leftrightarrow \dfrac{z}{\omega} = \left(2+i\right)\left|z\right|-1+i.$

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{\omega} = \left(2\left|z\right|-1\right)+\left(\left|z\right|+1\right)i \Rightarrow \left|\dfrac{z}{\omega}\right| = \sqrt{\left(2\left|z\right|-1\right)^2+\left(\left|z\right|+1\right)^2} \Leftrightarrow \left|\omega\right| = \sqrt{\dfrac{\left|z\right|^2}{5\left|z\right|^2-2\left|z\right|+2}}$

$f\left(t\right) = \dfrac{t^2}{5t^2-2t+2}\left(t \geq 0\right) \Rightarrow f'\left(t\right) = \dfrac{-2t^2+4t}{\left(5t^2-2t+2\right)^2} \Rightarrow f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=2$

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
f(t)	0	+	0	-	
f(t)	↗		$\frac{2}{9}$		↘

Ta có $T = \left|\omega+1-i\right| \leq \left|z\right|+\left|1-i\right| \leq \sqrt{\dfrac{2}{9}}+\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Câu 77. Cho số phức z và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+8i=0$ (z_1 có phần thực dương). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|z-z_1\right|+\left|z_2-z\right|+\left|\overline{z}+2z_1+\dfrac{z_2}{2}\right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}+p\sqrt{q}$ (trong đó $n, p \in \mathbb{N}$; m , q là các số nguyên tố). Tổng $m+n-p-q$ bằng

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 0 . **D.** 2 .

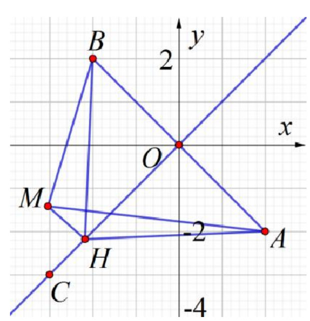
Lời giải

Chọn A

$z^2+8i=0 \Rightarrow z_1 = 2-2i$ và $z_2 = -2+2i$.

$P = \left|z-z_1\right|+\left|z_2-z\right|+\left|\overline{z}+2z_1+\dfrac{z_2}{2}\right| = \left|z-z_1\right|+\left|z-z_2\right|+\left|z+2\overline{z_1}+\dfrac{\overline{z_2}}{2}\right| = MA+MB+MC$.

Trong đó M , $A\left(2;-2\right)$, $B\left(-2;2\right)$, $C\left(-3;-3\right)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z , z_1 , z_2 , $\omega = -2\overline{z_1}-\dfrac{\overline{z_2}}{2} = -3-3i$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên OC .

Ta có $MA+MB \geq HA+HB \Rightarrow MA+MB+MC \geq HA+HB+HC$.

Do đó $P_{\min} = \left(MA+MB+MC\right)_{\min} = HA+HB+HC \Leftrightarrow M \equiv H \Rightarrow M \in OC: y=x$.

Gỉa sử $M\left(x;x\right)\left(x\in\left[-3;0\right)\right)\Rightarrow P=MA+MB+MC=\sqrt{2}\left(x+3\right)+2\sqrt{2\left(x^2+4\right)}$

$\Rightarrow P'=\sqrt{2}+2\sqrt{2}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\Rightarrow P'=0\Rightarrow x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\in\left[-3;0\right)$.

Vậy $P_{\min}=\sqrt{2}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+3\right)+2\sqrt{2\left[\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\right]}=2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

Suy ra $m=2$, $n=6$, $p=3$, $q=2\Rightarrow m+n-p-q=3$.

Câu 78. Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2\left|z\right|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}$.

$\left|z^2+1\right|=\left|a^2-b^2+1+2abi\right|=\sqrt{\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2}$; $2\left|z\right|=2\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có $\left|z^2+1\right|=2\left|z\right|\Rightarrow\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2=4\left(a^2+b^2\right)$

$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2+2\left(a^2-b^2\right)+1-4\left(a^2+b^2\right)=0\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2-6b^2+1=0$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)^2-6\left(a^2+b^2\right)+1=-4a^2$.

Vì $-4a^2\le 0,\forall a\in\mathbb{R}$ nên $\left(a^2+b^2\right)^2-6\left(a^2+b^2\right)+1\le 0\Rightarrow 3-2\sqrt{2}\le a^2+b^2\le 3+2\sqrt{2}$.

Suy ra $\sqrt{2}-1\le\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{2}+1\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{2}-1\\M=\sqrt{2}+1\end{cases}\Rightarrow m^2+M^2=6.$

$M=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\a^2+b^2=3+2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)\end{cases}.$

$m=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\a^2+b^2=3-2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)\end{cases}.$

Câu 79. **(Sở Nam Định - 2019)** Xét các số phức w, z thỏa mãn $\left|w+i\right|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=\left(2+i\right)\left(z-4\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z-2i\right|+\left|z-6-2i\right|$.

A. 7. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $2\sqrt{58}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có: $5w=(2+i)(z-4)\Leftrightarrow 5w+5i=(2+i)(z-4)+5i$

$\Rightarrow |5w+5i|=|(2+i)(z-4)+5i|\Rightarrow 5|w+i|=|(1+2i)(z-4+1+2i)|=\sqrt{5}|z-3+2i|$

$\Rightarrow 5.\dfrac{3\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}|z-3+2i|\Rightarrow |z-3+2i|=3$.

Ta có:

$|z+z_1|^2+|z-z_1|^2=2\left(|z|^2+|z_1|^2\right)$; $\forall z,z_1$. (1)

$|z|^2+|z_1|^2\geq \dfrac{\left(|z|+|z_1|\right)^2}{2}$; $\forall z,z_1$. (2)

Ta có: $P=|z-2i|+|z-6-2i|=|z-3-2i+3|+|z-3-2i-3|$.

Áp dụng (1) và (2), ta có:

$|z-3-2i+3|^2+|z-3-2i-3|^2=2\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

$$|z-3-2i+3|^2+|z-3-2i-3|^2\geq \frac{\left(|z-3-2i+3|+|z-3-2i-3|\right)^2}{2}=\frac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2}.$$

Vậy, ta có: $\dfrac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2}\leq 2\left(|z-3-2i|^2+9\right)\Rightarrow \left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2\leq 4\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

$\Rightarrow P^2\leq 4\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

Do $4\left(|z-3-2i|^2+9\right)=4\left(|z-3+2i-4i|^2+9\right)$ nên $P^2\leq 4\left(\left(|z-3+2i|+|-4i|\right)^2+9\right)$

$\Rightarrow P^2\leq 4\left(7^2+9\right)=232\Rightarrow P\leq 2\sqrt{58}$.

Cách 2.

Ta có: $5w=(2+i)(z-4)$ thay $|w+i|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow |z-3+2i|=3$.

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

Gọi $M\in(C)$.

Ta có: $P=|z-2i|+|z-6-2i|=AM+BM$; $A(0;2),B(6;2)$.

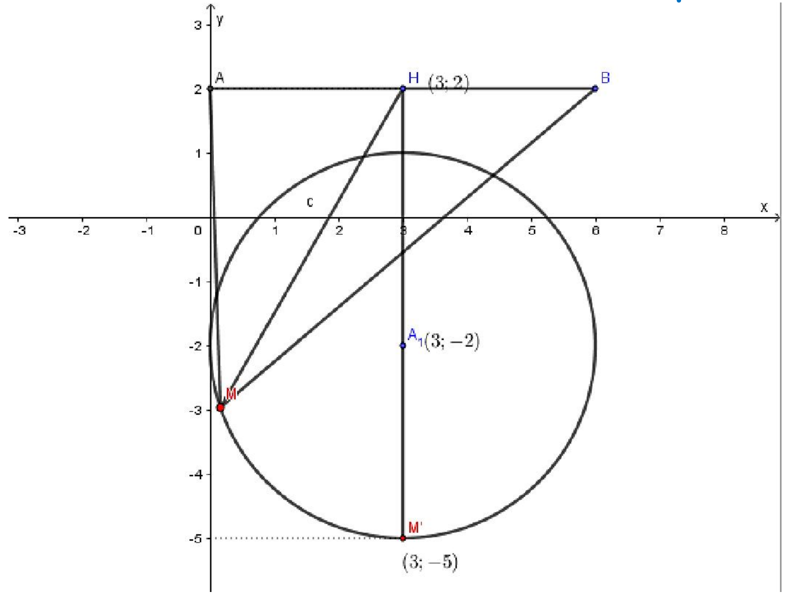
Suy ra $P\leq\sqrt{2\left(AM^2+BM^2\right)}$.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB.

Ta có: $P\leq\sqrt{2\left(AM^2+BM^2\right)}=\sqrt{2\left(2MH^2+\dfrac{AB^2}{2}\right)}=\sqrt{4MH^2+AB^2}$.

Vậy, $P=|z-2i|+|z-6-2i|$ đạt giá trị lớn nhất khi MH^2 đạt giá trị lớn nhất.

Dựa vào hình vẽ sau



Suy ra, MH^2 đạt giá trị lớn nhất khi $M \equiv M' \Rightarrow P^2 \le 232 \Rightarrow P = 2\sqrt{58}$.

Câu 80. Cho hai số phức $z_1; z_2$ đều khác 1 và -1 sao cho $z_1^{44} = z_2^{58} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |z_1 - z_2|$ gần nhất với giá trị nào sau đây.

A. $\frac{11}{100}$. **B.** $\frac{7}{205}$. **C.** $\frac{7}{200}$. **D.** $\frac{1}{200}$.

Lời giải

Chọn D

$z_1^{44} = z_2^{58} = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$

Gọi φ là một acgumen của z_1 và φ' là một acgumen của z_2 với $\varphi; \varphi' \in (0; 2\pi)$.

$z_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi; z_2 = \cos\varphi' + i\sin\varphi'$.

$$z_1^{44} = z_2^{58} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{44} = 1 \\ (\cos\varphi' + i\sin\varphi')^{58} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 44\varphi + i\sin 44\varphi = 1 \\ \cos 58\varphi' + i\sin 58\varphi' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 44\varphi = 1 \\ \sin 44\varphi = 0 \\ \cos 58\varphi' = 1 \\ \sin 58\varphi' = 0 \end{cases}.$$

$$\underset{z_2 \ne \pm 1}{\overset{z_1 \ne \pm 1}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \cos 44\varphi = 1 \\ \sin\varphi \ne 0 \\ \cos 58\varphi' = 1 \\ \sin\varphi' \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{k\pi}{22}; \varphi \ne k\pi \\ \varphi' = \dfrac{t\pi}{29}; \varphi' \ne t\pi \end{cases} (k; t \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{k\pi}{22}; \varphi \ne k\pi \\ \varphi \in (0; 2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 1 \le k \le 43; \\ k \ne 22 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{t\pi}{29}; \varphi \ne t\pi \\ \varphi \in (0; 2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \mathbb{Z} \\ 1 \le t \le 57. \\ t \ne 29 \end{cases}$$

$$T = |z_1 - z_2| = |\cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi' - i\sin\varphi'| = \sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + (\sin\varphi - \sin\varphi')^2}.$$

$=\sqrt{2-2\left(\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'\right)}=\sqrt{2-2\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{k\pi}{22}-\frac{t\pi}{29}\right)}$.

$T_{\min}=\left|z_1-z_2\right|_{\min}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{k\pi}{22}-\frac{t\pi}{29}\right)_{\max}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le k\le 43; k\ne 22\\1\le t\le 57; k\ne 29\\\left|29k-22t\right|_{\min}\end{cases}$.

Lấy $k=3;t=4$ thì $\left|29k-22t\right|_{\min}=1$; số nguyên dương nhỏ nhất.

Vậy $\min\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{3\pi}{22}-\frac{4\pi}{29}\right)}\simeq 0.00492$.

Câu 81. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z_1-z_2\right|^2+\left|z_2-z_3\right|^2+\left|z_3-z_1\right|^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=10$. **C.** $P=8$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A\left(x_1;y_1\right)$; $B\left(x_2;y_2\right)$; $C\left(x_3;y_3\right)$ là các điểm lần lượt biễu diễn các số phức z_1; z_2; z_3.

vì $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$ suy ra A; B; C thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 1.

Ta có $\left|z_1-z_2\right|=AB$; $\left|z_2-z_3\right|=BC$ $\left|z_3-z_1\right|=AC$.

Suy ra

$P=\left|z_1-z_2\right|^2+\left|z_2-z_3\right|^2+\left|z_3-z_1\right|^2=AB^2+BC^2+AC^2=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=6-2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right)=9-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2=9-\left(3\overrightarrow{OG}\right)^2=9-OG^2\le 9$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Dấu " = " xảy ra khi $G\equiv O$, hay ΔABC đều.

Câu 82. Cho số phức z thỏa mãn $3\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|\le 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $\left|z-4+3i\right|$. Giá trị của $M.m$ bằng:

A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.

Lời giải

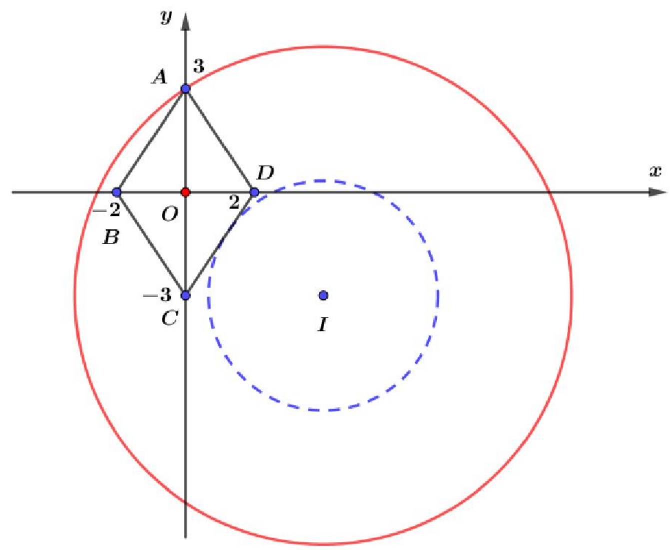
Chọn B

Gọi $z=x+yi$; $x;y\in\mathbb{R}$.

Xét $3\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|\le 12\Leftrightarrow 3\left|x\right|+2\left|y\right|\le 6$. (1)

Ta có: $P=\left|z-4+3i\right|=\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+3\right)^2}$ (2)

Tập hợp những điểm biểu diễn $z = x + yi$; $x; y \in \mathbb{R}$. thỏa mãn (1) là miền trong (tính cả biên) của hình thoi $ABCD$ với $A(0;3)$; $B(-2;0)$; $C(0;-3)$; $D(2;0)$ tạo bởi 4 đường thẳng $3|x| + 2|y| = 6$. Điểm biểu diễn z thỏa mãn (2) là đường tròn tâm $I(4;-3)$ bán kính $R = P \geq 0$.



P đạt min, max khi bán kính đường tròn đạt min, max khi xét sự tương giao với miền hình thoi $ABCD$.

Ta có đường tròn giao với miền hình thoi điểm gần tâm nhất khi đường tròn tiếp xúc cạnh CD: $3x - 2y - 6 = 0$ tương ứng có $m = \dfrac{|3.4 + 2.3 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$. Điểm giao xa nhất là đỉnh $A(0;3)$ của hình thoi. Do đó $M = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

$\Rightarrow M.m = 24$.