DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7+8+9 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán tương giao đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3 (CHỨA THAM SỐ)

📖 **Bài toán tổng quát**: Tìm các giá trị của tham số m để để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K? **(dạng có điều kiện)**

✍ **Phương pháp giải**:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhẩm nghiệm đặc biệt $x = x_o$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_o)\cdot(ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_o \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{array}\right..$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_o) \neq 0 \end{cases}$. Giải hệ này, tìm được giá trị $m \in D_1$.

Bước 3. Gọi $A(x_o; px_o + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b'}{a}$ và $x_1x_2 = \dfrac{c'}{a}$ (1)

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2 (2)

Thế (1) vào (2) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m. Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến cấp số

- **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

- **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị *của tham số.*

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx^2+2m=0$ $(*)$

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0=-\dfrac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=m$.

Thay $x=m$ vào phương trình $(*)$, ta được $m^3-3m.m^2+2m=0\Leftrightarrow -2m^3+2m=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=0\end{array}\right.$.

Thử lại:

- Với $m=1$, ta được $x^3-3x^2+2=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\x=1\\x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Do đó $m=1$ thỏa mãn.

- Với $m=-1$, ta được $x^3+3x^2-2=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1+\sqrt{3}\\x=-1\\x=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Do đó $m=-1$ thỏa mãn.

- Với $m=0$, ta được $x^3=0\Leftrightarrow x=0$.

Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

Vậy $m=\pm1$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 2. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ (C) cắt đường thẳng $d:y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1,x_2,x_3.

A. $m>-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$x^3-3x^2+2=m(x-1)$ (1)

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+2+m=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x-m-2)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\f(x)=x^2-2x-m-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f(x)=x^2-2x-m-2=0\quad(2)\end{array}\right.$

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x=1$, vậy để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+m+2>0\\f(1)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\m\neq-3\end{cases}\Leftrightarrow m>-3$.

Vậy $m>-3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

A. $x_B + y_B = -5$ **B.** $x_B + y_B = -2$ **C.** $x_B + y_B = 4$ **D.** $x_B + y_B = 7$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và $y = x^3 - x + 3$:

$$x^3 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

Vậy $A(1;3); B(-2;-3) \Rightarrow x_B + y_B = -5$

Câu 4. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng $m_1, m_2\ (m_1 > m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2?

A. $m_1 + m_2 = 0$. **B.** $m_1^2 + 2m_2 > 4$. **C.** $m_2^2 + 2m_1 > 4$. **D.** $m_1 - m_2 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$$x^3 + 3mx^2 - m^3 = m^2x + 2m^3$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^3 - m^2x\right) + \left(3mx^2 - 3m^3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - m^2\right) + 3m\left(x^2 - m^2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 3m)\left(x^2 - m^2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3m \\ x = m \\ x = -m \end{array}\right.$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + (-m)^4 + (-3m)^4 = 83$

$\Leftrightarrow 83m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy $m_1 = 1, m_2 = -1$ hay $m_1 + m_2 = 0$.

Câu 5. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m \in (-\infty; -4)$. **B.** $m \in (-4; 0)$.

C. $m \in (0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4<m<0$

Câu 6. **(Mã 123 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A,B,C phân biệt sao $AB=BC$

A. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ **B.** $m\in(-2;+\infty)$

C. $m\in\mathbb{R}$ **D.** $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^3-3x^2+x+2=mx-m+1\Leftrightarrow x^3-3x^2+x-mx+m+1=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x-m-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-m-1=0\end{array}\right.$. Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2-2x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Hay $\begin{cases}1+m+1>0\\1-2-m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\m\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow m>-2$. Với $m>-2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là $1,x_1,x_2$ (x_1,x_2 là nghiệm của $x^2-2x-m-1=0$). Mà $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ suy ra điểm có hoành độ x=1 luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên luôn có 3 điểm A,B,C thoả mãn $AB=BC$

Vậy $m>-2$.

Câu 7. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+(m^2-2)x+2m^2+4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m=\pm2$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B(0;2m^2+4)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3+(m^2-2)x+2m^2+4=0\Leftrightarrow(x+2)(x^2-2x+m^2+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\(x-1)^2+m^2+1=0 \quad (vn)\end{array}\right.$$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2;0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.2.(2m^2+4)=8\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}.$

Câu 8. **(Mã 110 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;-1)$ **B.** $m\in(-\infty:+\infty)$ **C.** $m\in(1:+\infty)$ **D.** $m\in(-\infty;3)$

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$x^3-3x^2-m+2=-mx\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x+m-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+m-2=0\end{array}\right.$

Đặt nghiệm $x_2=1$. Từ giải thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2-2x+m-2=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1+x_3=2=2x_2$)

Vậy ta chỉ cần $\Delta'=1-(m-2)>0 \Leftrightarrow m<3$

Câu 9. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty]$. **B.** $m\in(-\infty;-2]$. **C.** $m\in(-2;2)$. **D.** $m\in[-2;2]$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3+3x^2-2$, $y'=3x^2+6x$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3+3x^2-2=m\,(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra PT (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-2<m<2$.

Câu 10. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3-x+3=2x+1$

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Vì $x_B<x_A$ Vậy $x_B=1; y_B=3 \Rightarrow x_B+y_B=4$

Câu 11. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2 \Rightarrow y'=6x^2-6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$$\begin{cases}(C): y=2x^3-3x^2\\ d: y=2m+1\end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m+1=-1\\2m+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{2}$.

Câu 12. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l}m<1\\m>2\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\frac{2}{3}\\m\leq 1\end{cases}\\m\geq 2\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\frac{2}{3}\\m<1\end{cases}\\m>2\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}m\leq 1\\m\geq 2\end{array}\right.$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm chung là: $x^3+2mx^2+3(m-1)x+5=-x+5$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-2)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+3m-2=0\ (1)\end{array}\right.$

Đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-3m+2>0\\3m-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\m<1\end{array}\right.\\m\neq\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\frac{2}{3}\\m<1\end{cases}\\m>2\end{array}\right.$.

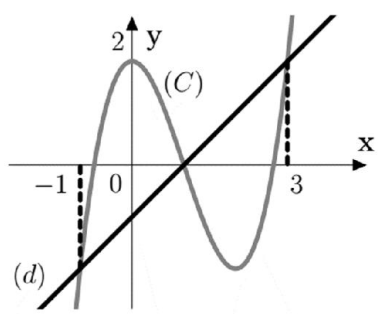
Câu 13. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y=x-1$. Biết phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1<x_2<x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng

A. -3.

B. $-\frac{7}{3}$.

C. -2.

D. $-\frac{5}{2}$.



Lời giải

+Ta có: $f(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

$f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(x)-(x-1)=a(x+1)(x-1)(x-3)$

$\Rightarrow f(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)+x-1$; $f(0)=2 \Leftrightarrow a=1$.

$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+x-1$.

$+ f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1=x_2 \\ (x+1)(x-3)+1=0\ (2) \end{array}\right.$.

x_1, x_3 là các nghiệm của (2) nên ta có $x_1x_3=-2$.

thẳng $y=\frac{5}{2}$ nên từ đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 14. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3mx+3=3x+1 \Leftrightarrow x^3-3x+2=3mx \Leftrightarrow 3m=\frac{x^3-3x+2}{x}$ (1).

Xét hàm $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x}=x^2-3+\frac{2}{x}$; $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m<0$. Mà m nguyên và $m \in [-2018;2019]$ nên có 2018 giá trị thỏa mãn.

Câu 15. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Phương trình $x^3-6mx+5=5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi

A. $m=0$. **B.** $m=-1 \vee m=1$. **C.** $m=1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương: $x^3-6mx+5-5m^2=0$.

Đặt $y=f(x)=x^3-6mx+5-5m^2$ có $f'(x)=3x^2-6m$; $f''(x)=6x$.

PT đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $f(x_1).f(x_2)<0$.

3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng nên $x_2-x_1=x_3-x_2$.

Suy ra, x_2 là hoành độ của tâm đối xứng hay là nghiệm của $f''(x)=0$.

Cho $f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Với $x=0$ ta có: $5-5m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Thử lại:

• Với $m=1$ thì ta có $x^3-6x+5=5 \Leftrightarrow x(x^2-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

•Với $m=-1$ thì ta có: $x^3+6x+5=5 \Leftrightarrow x(x^2+6)=0 \Leftrightarrow x=0$

Câu 16. Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ và đường thẳng $y=x+4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1;3)$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

+) Gọi đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ là (C_m) và đồ thị hàm số $y = x + 4$ là (d).

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0\,(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{array}\right.$$

+) Gọi $g(x) = x^2 + 2mx + m + 2$.

+) (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \quad (a) \\ m \neq -2 \end{cases}$$

+) $x = 0$ là hoành độ điểm A, hoành độ điểm B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $g(x) = 0$

+) $BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left[(x_2+4) - (x_1+4)\right]^2 = 2(x_2 - x_1)^2$ (do B, C thuộc đường thẳng (d))

$$= 2\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right] = 8\left(m^2 - m - 2\right)$$

+) Viết phương trình đường thẳng (d) dưới dạng $x - y + 4 = 0$, ta có

$$d(I,(d)) = \frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

+) $S_{IBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.d(I,(d)) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}BC^2.\left[d(I,(d))\right]^2 = 128$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}8\left(m^2 - m - 2\right).2 = 128$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1+\sqrt{137}}{2} \\ m = \dfrac{1-\sqrt{137}}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa điều kiện } (a))$$

+) Vậy tổng tất cả các giá trị m là 1.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow 3mx = x^3 - 3x + 2$. (1)

+ Dễ thấy $x = 0$ không thỏa.

+ $(1) \Leftrightarrow 3m = x^2 - 3 + \frac{2}{x} = f(x)$.

+ $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

+ Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung $\Leftrightarrow 3m < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

+ Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2018; 2019]$ nên có 2018 giá trị.

Câu 18. Đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m = 3$. **B.** $m = 2$ hoặc $m = 3$.
C. $m = -2$ hoặc $m = -3$. **D.** $m = -2$ hoặc $m = 3$

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + (m-2) = 0 \ (*) \end{array}\right..$$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại 3 điểm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Giả sử B$(x_1; x_1 + 4)$; C$(x_2; x_2 + 4)$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (*) khi đó

$$BC = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1.x_2} = \sqrt{8m^2 - 8m - 16}.$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2}BC.d(M,d) = \frac{1}{2}.BC.\frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}.$$

Ta có $m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $m = 3$.

Câu 19. **(THPT Minh Khai - lần 1)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \end{cases} \\ m \geq 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \end{cases} \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5 = -x + 5$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0 \ (1) \end{array}\right..$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0^2+2m.0+3m-2\neq 0 \\ \Delta' = m^2-3m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\neq \dfrac{2}{3} \\ m<1 \end{cases} \\ m>2 \end{array}\right. .$$

Câu 20. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2 \Rightarrow y'=6x^2-6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$$\begin{cases} (C): y=2x^3-3x^2 \\ d: y=2m+1 \end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+1=-1 \\ 2m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3}{2}$.

Câu 21. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y=x-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình

$x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5=x-m+1$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2+(2m-2)x-m+3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=2 \\ x^2+(2m-2)x-m+3=0 \ \ (1) \end{array}\right.$.

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(m-1)^2+(m-3)>0 \\ 4+(2m-2).2-m+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ (2).

Khi đó, $\begin{cases} x_1+x_2=-(2m-2) \\ x_1x_2=-m+3 \end{cases}$.

Theo giả thiết $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_3^2=20$

$$\Leftrightarrow (2m-2)^2+2(m-3)+4=20 \Leftrightarrow 2m^2-3m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn (2)).}$$

Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm của phương trình

$-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2=0.\ (*)$

Giả sử đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Khi đó ta có

$y=-2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=-2x^3+2(x_1+x_2+x_3)x^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x+2x_1x_2x_3$.

Đồng nhất thức ta được

$$\begin{cases} 2(x_1+x_2+x_3)=-3m^2 \\ -2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=m^3+2m \\ 2x_1x_2x_3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{3m^2}{2} & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-\dfrac{m^3+2m}{2} & (2) \\ x_1x_2x_3=1 & (3) \end{cases}$$

Vì $x_1,\ x_2,\ x_3$ lập thành cấp số nhân nên $x_1x_3=x_2^2$. (4)

Từ (2) và (3): $x_2=1$. Thay vào phương trình $(*)$ rút ra được $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Với $m=0 \Rightarrow$ phương trình $(*)$: $-2x^3+2=0 \Leftrightarrow x=1$ (không thỏa mãn).

Với $m=1 \Rightarrow$ phương trình $(*)$: $-2x^3-3x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=1 \\ x_3=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Với $m=2 \Rightarrow$ phương trình $(*)$: $x^3+6x^2-6x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-7-\sqrt{45}}{2} \\ x_2=1 \\ x_3=\dfrac{-7+\sqrt{45}}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 23. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Tìm m để đồ thị (C) của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

A. $m=14$. **B.** $m=15$. **C.** $m=16$. **D.** $m=17$.

Lời giải

Chọn C

$d\left(O,BC\right)=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$

$BC=\sqrt{\left(x_B-x_C\right)^2+\left(y_b-y_c\right)^2}=\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(x_B-x_C\right)^2}$

$=\sqrt{\left(m^2+1\right)\left[\left(x_B+x_C\right)^2-4x_Bx_C\right]}=\sqrt{\left(m^2+1\right)4m}$

$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}d\left(O,BC\right).BC=m\sqrt{m}=64\Leftrightarrow m=16.$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3x^2+4=mx+m\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x^2-4x+4-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \left(x-2\right)^2=m\left(*\right)\end{array}\right.$

Để d cắt $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt phương trình $\left(*\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m\neq 9\end{cases}$

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{m}\Rightarrow B\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right)\\ x=2+\sqrt{m}\Rightarrow C\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)\end{array}\right.$

$\overrightarrow{OB}=\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right),\overrightarrow{OC}=\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)$

$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=m\sqrt{m}=64\Rightarrow m=16.$

Câu 24. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=x^3-8x^2+8x$ có đồ thị $\left(C\right)$ và hàm số $y=x^2+(8-a)x-b$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) có đồ thị $\left(P\right)$. Biết đồ thị hàm số $\left(C\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại ba điểm có hoành độ nằm trong $\left[-1;5\right]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

A. -729. **B.** 375. **C.** 225. **D.** -384.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3-8x^2+8x=x^2+(8-a)x-b\Leftrightarrow x^3-9x^2+ax+b=0$ (1).

Gọi m,n,p là 3 nghiệm của phương trình (1) ta có $\begin{cases}m+n+p=9\\ mn+np+pm=a\\ mnp=-b\end{cases}$

Do $\left(C\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại ba điểm có hoành độ nằm trong $\left[-1;5\right]$ nên

$\begin{cases}(m+1)(n+1)(p+1)\geq 0\\ (5-m)(5-n)(5-p)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mnp+(mn+np+pm)+(m+n+p)+1\geq 0\\ -mnp+5(mn+np+pm)-25(m+n+p)+125\geq 0\end{cases}$

Cộng vế theo vế của hệ phương trình trên ta có $6(mn+np+pm)-24(m+n+p)-124\geq 0\Leftrightarrow mn+np+pm\geq 15\Rightarrow a\geq 15.$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}mnp\geq -25\\ mnp\leq -25\end{cases}\Leftrightarrow mnp=-25\Rightarrow b=25$

Vậy tích $ab=375.$

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm là

$x^3-8x^2+8x=x^2+(8-a)x-b\Leftrightarrow x^3-9x^2+ax+b=0$ (1).

Khi đó phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left[-1;5\right]$.

Đặt $f(x)=x^3-9x^2+ax+b$ suy ra $f'(x)=3x^2-18x+a$. Để phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $[-1;5]$ thì $f'(x)=3x^2-18x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;5] \Leftrightarrow a=-3x^2+18x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;5]$.

Xét hàm số $g(x)=-3x^2+18x$ suy ra $g'(x)=-6x+18$, ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$.

Bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	-1		3		5
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	21	$\nearrow$	27	$\searrow$	15

Từ BBT ta có $15 \le a < 27$ suy ra giá trị nhỏ nhất của a bằng 15 khi $x=5$, khi đó $b=25$.

Vậy tích $ab=375$.

Câu 25. **(Sở Quảng Trị 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-mx+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $-1<x_1+x_2+x_3<3$?.

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$(d)\, y=-mx+m$, $(C)\, y=x^3+mx^2+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C): $x^3+mx^2+mx=0$ (1).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+mx+m=0 \;\;(2) \end{array}\right.$$

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2), $x_3=0$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm x_1,x_2 phân biệt và khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0, \Delta=m^2-4m \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty).$$

(1) có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa $-1<x_1+x_2+x_3<3$, với $x_1+x_2=-m$, $x_3=0$.

$\Leftrightarrow -1<-m<3$

$\Leftrightarrow -3<m<1$, mà $m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, $m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow m\in\{-2;-1\}$. Vậy có 2 giá trị m.

Câu 26. **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m=\frac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\frac{\pm1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\frac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\frac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \;\;(1)$$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0$

$\Leftrightarrow x.\left[x^2+2mx+(m+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x^2+2mx+m+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$.

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2+2m.0+m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ \begin{cases} m<-1 \\ m \neq -2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C.

$\Rightarrow B(x_1;x_1+4)$ và $C(x_2;x_2+4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB}=(x_1-1;x_2+1)$ và $\overrightarrow{KC}=(x_2-1;x_2+1)$.

$\Rightarrow S_{\Delta KBC}=\dfrac{\left|(x_1-1)(x_2+1)-(x_2-1)(x_1+1)\right|}{2}=|x_1-x_2|$.

Theo đề bài: $S_{\Delta KBC}=8\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_1-x_2|=8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=128 \Leftrightarrow S^2-4P=128$

$\Leftrightarrow (-2m)^2-4(m+2)=128 \Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ (nhận).

Vậy tất cả các giá trị m thỏa đề là $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$.

Câu 27. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

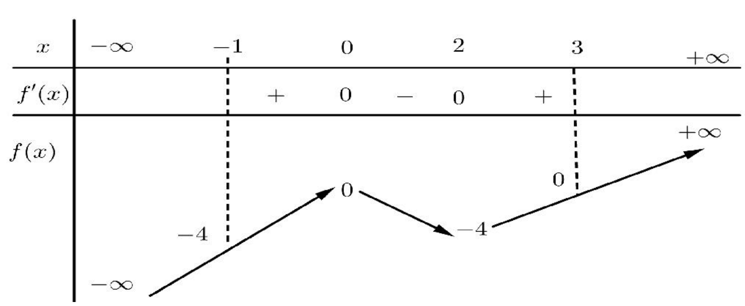
Cách 1: Ta có $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2=m^3-3m^2 \Leftrightarrow f(x)=f(m)\,(1)$

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2$.

$f'(x)=3x^2-6x,\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

$f(x)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0 \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - m^3\right) - 3\left(x^2 - m^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x - m)\left[x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m = 0 \ \ (*) \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-3)^2 - 4\left(m^2 - 3m\right) > 0 \\ m^2 + (m-3)m + m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(-3m-3) > 0 \\ 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1$ (vì $m \in \mathbb{Z}$).

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Câu 28. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P = 3 + 2b + c$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = b + c + d$. **D.** $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.

Lời giải

Chọn B

Vì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Ta có $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3)$.

Khi đó: $\begin{cases} f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ f'(x_2) = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) \\ f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{cases}$

Suy ra $P = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{1}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$.

$= \frac{(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3) + (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = 0$.

Câu 29. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$ $(a \neq 0)$

Ta có: $AB: y = 3x - 2$, $AC: y = 4x - 3$, $BC: y = 5x - 6$.

Khi đó:

Hoành độ của M là nghiệm của phương trình: $a(x_M-1)(x_M-2)(x_M-3)+x_M^2=3x_M-2 \Leftrightarrow a(x_M-1)(x_M-2)(x_M-3)+(x_M-1)(x_M-2)=0$

$\Leftrightarrow a(x_M-3)+1=0 \Leftrightarrow x_M=3-\dfrac{1}{a}$.

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình: $a(x_N-1)(x_N-2)(x_N-3)+x_N^2=4x_N-3 \Leftrightarrow a(x_N-1)(x_N-2)(x_N-3)+(x_N-1)(x_N-3)=0$

$\Leftrightarrow a(x_N-2)+1=0 \Leftrightarrow x_N=2-\dfrac{1}{a}$.

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình: $a(x_P-1)(x_P-2)(x_P-3)+x_P^2=5x_P-6 \Leftrightarrow a(x_P-1)(x_P-2)(x_P-3)+(x_P-2)(x_P-3)=0$

$\Leftrightarrow a(x_P-1)+1=0 \Leftrightarrow x_P=1-\dfrac{1}{a}$.

Từ giả thuyết ta có; $x_M+x_N+x_P=5 \Leftrightarrow 6-\dfrac{3}{a}=5 \Leftrightarrow a=3$.

Do đó: $f(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$

$f(0)=-18$.

Câu 30. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $d: y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_2^2>5$.

A. $m\ge -3$. **B.** $m\ge -2$ **C.** $m>-3$. **D.** $m>-2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3x^2+2=m(x-1) \Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+m+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ g(x)=x^2-2x-(m+2)=0\ (*) \end{array}\right.$.

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ g(1)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+(m+2)>0 \\ 1-2-m-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m\ne -3 \end{cases} \Leftrightarrow m>-3$.

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm phương trình $(*)$.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_2+x_3=2 \\ x_2.x_3=-(m+2) \end{cases}$.

Theo bài ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5 \Leftrightarrow 1+x_2^2+x_3^2>5 \Leftrightarrow x_2^2+x_3^2>4$

$\Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3>4 \Leftrightarrow 4+2(m+2)>4 \Leftrightarrow m>-2$.

So sánh với điều kiện ở trên suy ra $m>-2$.

Kết luận: $m>-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

A. $T=-10$. **B.** $T=10$. **C.** $T=-12$. **D.** $T=12$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox là nghiệm của phương trình : $x^3+3x^2-9x+2m+1=0 \Leftrightarrow -x^3-3x^2+9x=2m+1$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=-x^3-3x^2+9x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$f'\left(x\right)=-3x^2-6x+9,\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -3x^2-6x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số $f\left(x\right)=-x^3-3x^2+9x$ tại hai điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên suy ra : $\left[\begin{array}{l}2m+1=5\\2m+1=-27\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-14\end{array}\right.\Rightarrow S=\left\{-14;2\right\}$.

Tổng của các phần tử thuộc tập S là : $T=-14+2=-12$.

Dạng 2. Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến (CHỨA THAM SỐ)

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Tìm tham số m để đường thẳng $d:y=\alpha x+\beta$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

□ **Bước 1**. (Bước này giống nhau ở các bài toán tương giao của hàm nhất biến)

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và $\left(C\right)$: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow g\left(x\right)=\alpha cx^2+\left(\beta c+\alpha d-a\right)x+\beta d-b=0,\ \forall x\neq-\dfrac{d}{c}$.

- Để d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g\left(x\right)=0$ có nghiệm nghiệm phân biệt $\neq-\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow\begin{cases}c\alpha\neq0;\ \Delta>0\\g\left(-\dfrac{d}{c}\right)\neq0\end{cases}$.

Giải hệ này, ta sẽ tìm được $m\in D_1\ \left(i\right)$

-Gọi $A\left(x_1;\alpha x_1+\beta\right),\ B\left(x_2;\alpha y_2+\beta\right)$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm của $g\left(x\right)=0$ Theo Viét:

$S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta c+\alpha d-a}{c\alpha};\ P=x_1x_2=\dfrac{\beta d-b}{\alpha c}\ \left(ii\right)$

□ **Bước 2**.

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của $x_1,x_2\ \left(iii\right)$

-Thế $\left(ii\right)$ vào $\left(iii\right)$ sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải nó sẽ tìm được $m\in D_2\ \left(*\right)$

-Từ $\left(i\right),\left(*\right)\Rightarrow m\in\left(D_1\cap D_2\right)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến tương giao giữa đường thẳng $y=kx+p$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Giả sử $d: y = kx + p$ *cắt đồ thị hàm số* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *tại* 2 *điểm phân biệt* M, N.

Với $kx + p = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *cho ta phương trình có dạng:* $Ax^2 + Bx + C = 0$ *thỏa điều kiện* $cx + d \neq 0$, *có* $\Delta = B^2 - 4AC$. *Khi đó:*

1). $M(x_1; kx_1 + p), N(x_2; kx_2 + p) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow MN = \sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}$

Chú ý: khi $\min MN$ *thì tồn tại* $\min \Delta, k = const$

2). $OM^2 + ON^2 = (k^2+1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)2kp + 2p^2$

3). $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = (x_1.x_2)(1+k^2) + (x_1 + x_2)kp + p^2$

4). $OM = ON \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1+k^2) + 2kp = 0$

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

A. 4036. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4034.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + m$ và đường cong $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$

$x + m = \dfrac{2x-3}{x-1} \Leftrightarrow (x+m)(x-1) = 2x - 3 \ (x \neq 1)$.

$\Leftrightarrow x^2 + mx - x - m = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m + 3 = 0 \quad (*)$

Ta có $\Delta = (m-3)^2 - 4(-m+3) = m^2 - 6m + 9 + 4m - 12 = m^2 - 2m - 3$.

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3).1 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \quad (lđ) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Theo giả thiết: $-2020 \leq m \leq 2020$ và $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$ nên $\left[\begin{array}{l} -2020 \leq m < -1 \\ 3 < m \leq 2020 \end{array}\right.$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-2020 \leq m < -1$, suy ra có $\dfrac{-2-(-2020)}{1} + 1 = 2019$ giá trị nguyên m.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $3 < m \leq 2020$, suy ra có $\dfrac{2020-4}{1} + 1 = 2017$ giá trị nguyên m.

Tóm lại có tất cả $2019 + 2017 = 4036$ giá trị nguyên của tham số m.

Câu 2. **(ĐHQG TPHCM 2019)** Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$. **D.** $-3 < m < 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho

$\dfrac{x-3}{x+1}=x+2m \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2m)(x+1)=x-3\\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow x^2+2mx+2m+3=0\ \ (*)$. (vì khi $x=-1$ thì phương trình trở thành $0=-4$ vô lí).

Để đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt. Khi đó m phải thoả mãn $\Delta'_{(*)}>0 \Leftrightarrow m^2-2m-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>3\end{array}\right.$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m là $\left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>3\end{array}\right.$.

Câu 3. **(Gia Lai 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;+\infty)$. **B.** $m\in(-1;+\infty)$. **C.** $m\in(-2;4)$. **D.** $m\in(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+3}{x+1}=2x+m$ (*), với điều kiện xác định $x\neq -1$.

Biến đổi (*) về thành: $2x^2+(m+1)x+m-3=0$ (**).

Theo yêu cầu đề bài, phương trình (**) cần có hai nghiệm phân biệt khác -1, tức là:

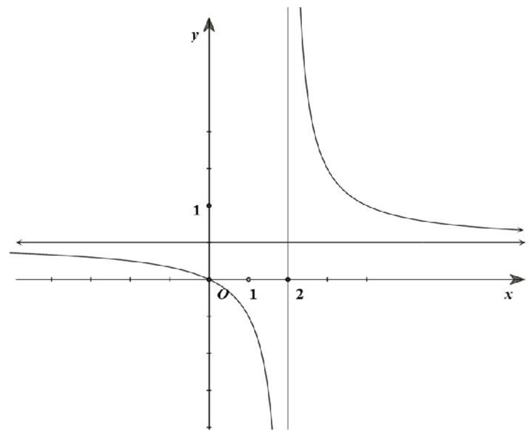
$$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-4.2.(m-3)>0\\ 2.(-1)^2+(m+1).(-1)+m-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-6m+25>0\\ -2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;+\infty).$$

Câu 4. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Gọi $A\left(a;\dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b;\dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) $(a<2<b)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(b-a;\dfrac{b}{b-2}-\dfrac{a}{a-2}\right)=\left(b-a;\dfrac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $(b-2)(2-a)\leq\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Suy ra: $AB^2=(b-a)^2+\dfrac{(b-a)^2}{\left[(b-2)(2-a)\right]^2}\geq(b-a)^2+\dfrac{64}{(b-a)^2}\geq16$

$\Rightarrow AB\geq4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2-\sqrt{2}$ và $b=2+\sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min}=4$.

Câu 5. **(Chuyên Nguyễn Du ĐăkLăk 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}\ (C)$ và đường thẳng $d: y=-x+m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\dfrac{x}{x-1}=-x+m$, (điều kiện $x\neq1$).

Phương trình tương đương $x^2-mx+m=0\ (1)$.

Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\neq1$ điều kiện cần và đủ là $m<0\vee m>4$.

Khi đó hai giao điểm là $A(x_1;-x_1+m)$; $B(x_2;-x_2+m)$.

Ta có $OA=\sqrt{m^2-2m}$; $OB=\sqrt{m^2-2m}$; $AB=\sqrt{2(m^2-4m)}$; $d(O,d)=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$.

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.AB.d(O,d)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{OA.OB.AB}{4R}$.

Suy ra $\dfrac{1}{2}.\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{(m^2-2m).\sqrt{2(m^2-4m)}}{4.2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow m^2-2m=4|m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\ (l)\\ m=6\ (n)\\ m=-2\ (n)\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}\ (C)$ và đường thẳng $d: y=x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

A. $m>-1$. **B.** $-5<m<-1$. **C.** $m<-5$. **D.** $m<-5$ hoặc $m>-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{1-x}=x+m\ \ (x\neq1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=x+m-x^2-mx\\ x\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(m+1)x-(m+1)=0\ (*)\\ x\neq1\end{cases}$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m+1) - (m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 > 0 \\ 1 \neq 0 \text{ (t/m)} \end{cases} \Leftrightarrow m < -5$ hoặc $m > -1$.

Câu 7. **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** -9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} < 0$, $\forall x \in D$ và đường thẳng $d: y = x - m$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với mọi giá trị của tham số m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\dfrac{x+3}{x+1} = x - m$

$\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 3 = 0 \quad (x \neq -1)$.

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - mx - m - 3 = 0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A + x_B = m$.

Mặt khác, $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A + x_B + x_O = 3x_G$

$\Leftrightarrow x_A + x_B = 6$

$\Leftrightarrow m = 6$.

Vậy $m = 6$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. **(Sở Nam Định 2019)** Cho hàm số $y = \dfrac{3x - 2m}{mx + 1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

A. $-\dfrac{4}{9}$. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

Với $m \neq 0$, xét phương trình $\dfrac{3x - 2m}{mx + 1} = 3x - 3m \Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$. (*)

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1; 3x_1 - 3m)$, $B(x_2; 3x_2 - 3m)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C(m;0)$ và $D(0;-3m)$.

Gọi $h = d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD.

Theo giả thiết: $S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AB.h = 2.\dfrac{1}{2}CD.h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + \left[3(x_1 - x_2)\right]^2 = 4\left[m^2 + (-3m)^2\right]$

$\Leftrightarrow 10(x_1 - x_2)^2 = 40m^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2$

$\Leftrightarrow m^2 + \dfrac{4}{3} = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{2}{3}$.

Vậy tích các giá trị của m là $-\frac{4}{9}$.

Câu 9. **(Gia Lai 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $-3x+m=\frac{2x+1}{x-1}$ (*)

Với điều kiện $x\neq 1$, (*) $\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (1)

Đường thẳng $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1, điều kiện:

$$\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\ 3.1^2-(m+1).1+m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-10m-11>0\\ 3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>11\end{array}\right. .\ (**)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt phương trình (1). Theo Vi-et ta có: $x_1+x_2=\frac{m+1}{3}$.

Gọi M là trung điểm AB, ta có: $M\left(\frac{m+1}{6};\frac{m-1}{2}\right)$. Giả sử $G(x;y)$ là trọng tâm tam giác OAB, ta có $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}.\frac{m+1}{6}\\ y=\frac{2}{3}.\frac{m-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{m+1}{9}\\ y=\frac{m-1}{3}\end{cases}$. Vậy $G\left(\frac{m+1}{9};\frac{m-1}{3}\right)$.

Mặt khác, điểm G thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$ nên ta có: $\frac{m+1}{9}-2.\frac{m-1}{3}-2=0$

$\Leftrightarrow m=-\frac{11}{5}$ (thỏa mãn (**)). Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Giả sử $m=-\frac{b}{a}$, $a,b\in\mathbb{Z}^+$, $(a,b)=1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta:x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 21.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1}=-3x+m$, $x\neq 1$.

$\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (*).

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Suy ra

$$\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\ 3.1^2-(m+1).1+(m+1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m+1<0\\ m+1>12\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>11\end{array}\right. .$$

Khi đó $A\left(x_1;-3x_1+m\right)$, $B\left(x_2;-3x_2+m\right)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ đồng thời thoả mãn $x_1+x_2=\dfrac{m+1}{3}$.

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB, ta có $G\left(\dfrac{m+1}{9};\dfrac{m-1}{3}\right)$.

Mà $G\in\Delta$ nên $\dfrac{m+1}{9}-2\dfrac{m-1}{3}-2=0\Rightarrow m=-\dfrac{11}{5}$. Suy ra $\begin{cases}a=11\\b=5\end{cases}$.

Vậy $a+2b=21$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d:y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T=a+b$ bằng

A. $T=2$. **B.** $T=\dfrac{5}{2}$. **C.** $T=4$. **D.** $T=\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ: $\dfrac{3x+2}{x+2}=ax+2b-4;x\neq-2$.

$\Leftrightarrow ax^2+\left(2a+2b-7\right)x-10=0(*)$.

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\(2a+2b-7)^2-4a\left(4b-10\right)>0\left(2*\right)\\4\neq0\end{cases}$

Gọi $A\left(x_1;ax_1+2b-4\right);B\left(x_2;ax_2+2b-4\right)$.

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases}x_1+x_2=0\\4b-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\b=2\end{cases}$

Theo Viét của phương trình (*) ta có $x_1+x_2=\dfrac{7-2a-2b}{a}$.

$\Rightarrow\dfrac{7-2a-2b}{a}=0\Leftrightarrow7-2a-2b=0\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

Thay $\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=2\end{cases}$ vào điều kiện (2*) thấy thỏa mãn.

Vậy $a+b=\dfrac{7}{2}$.

Câu 12. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:$ $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng Δ: $x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

A. $m=-\dfrac{11}{5}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{5}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ hai điểm A, B là nghiệm của phương trình $-3x+m=\dfrac{2x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow\left(-3x+m\right)\left(x-1\right)=2x+1$ (vì $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình).

$\Leftrightarrow3x^2-\left(m+1\right)x+m+1=0$ (*)

Điều kiện: $\Delta>0\Leftrightarrow(m+1)^2-4.3(m+1)>0\Leftrightarrow(m+1)(m-11)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>11\end{array}\right.$.

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thỏa mãn $x_A+x_B=\dfrac{m+1}{3}$.

Gọi $A(x_A;-3x_A+m)$, $B(x_B;-3x_B+m)$ thì trọng tâm của tam giác OAB là $G\left(\dfrac{x_A+x_B}{3};\dfrac{-3(x_A+x_B)+2m}{3}\right)$ hay $G\left(\dfrac{m+1}{9};\dfrac{m-1}{3}\right)$.

$G\in\Delta\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{9}-2.\dfrac{m-1}{3}-2=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{5}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tập hợp tất cả các giá trị $a\in\mathbb{R}$ để qua điểm $M(0;a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm M.

A. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng có hệ số góc k đi qua điểm $M(0;a)$ có dạng $y=kx+a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=kx+a$ là:

$\dfrac{2x}{x-1}=kx+a\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\2x=kx^2-kx+ax-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\kx^2+(a-k-2)x-a=0\,(*)\end{cases}$.

Ta cần tìm điều kiện của a để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{x_1+x_2}{2}=0\Leftrightarrow x_1+x_2=0$.

Điều kiện này tương đương với $\begin{cases}k\neq0\\(a-k-2)^2+4ka>0\\k.1^2+(a-k-2).1-a\neq0\\x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq0\\(a-k-2)^2+4ka>0\\-2\neq0\\\dfrac{k+2-a}{k}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq0\\k=a-2\\4(a-2)a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2\neq0\\k=a-2\\a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)\end{cases}\Rightarrow a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Câu 14. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN\leq10$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số: $x\neq-1$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(m-1)x+m+1=0\\x\neq-1\end{cases}$.

Đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình $x^2+(m-1)x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 3 - 2\sqrt{3} \\ m > 3 + 2\sqrt{3} \end{array} \right.$ (*).

Gọi $M\left(x_1; x_1 + m\right)$, $N\left(x_2; x_2 + m\right)$ là tọa độ giao điểm đường thẳng $y = x + m$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Theo bài cho $MN \le 10 \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x_2 - x_1\right)^2} \le 10 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 \le 50$

Áp dụng định lí Viét cho phương trình $x^2 + \left(m-1\right)x + m + 1 = 0$ ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1.x_2 = m + 1 \end{cases}$.

Ta có $MN \le 10 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 \le 50 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 53 \le \Leftrightarrow 3 - \sqrt{62} \le m \le 3 + \sqrt{62}$

Kết hợp với (*) thì $m \in \left(3 - \sqrt{62}; 3 - 2\sqrt{3}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{3}; 3 + \sqrt{62}\right)$.

Các số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \left\{7, 8, 9, 10\right\}$.

Câu 15. Cho là đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

A. 1. **B.** $\dfrac{2}{5}$ **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 (ld) \\ kx^2 + \left(3k-1\right)x + 2k = 0 \quad \left(1\right) \end{cases}$.

Ycbt tương đương có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\left|kx_1 + 2k + 1\right| = \left|kx_2 + 2k + 1\right|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k\left(x_1 + x_2\right) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \\ 1 - 3k + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow k = -3.$

Câu 16. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $\left(-\infty; 0\right] \cup \left[16; +\infty\right)$ **B.** $\left(16; +\infty\right)$ **C.** $\left(-\infty; 0\right)$ **D.** $\left(-\infty; 0\right) \cup \left(16; +\infty\right)$

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $\dfrac{x-3}{x+1} = mx + 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = \left(mx+1\right)\left(x+1\right) \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + mx + 4 = 0 \quad \left(*\right) \\ x \neq -1 \end{cases}$

Để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 hay $\begin{cases} \Delta > 0 \\ m\left(-1\right)^2 + m\left(-1\right) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; 0\right) \cup \left(16; +\infty\right)$.

Câu 17. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Gọi $M\left(a;\,b\right)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $\left(4a+5\right)^2+\left(2b-7\right)^2$.

A. 162. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 0.

Lời giải

Gọi $\left(C\right)$ là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và đường thẳng d là:

$$\frac{x-2}{x}=2x+6\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0\ \left(x\neq 0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right..$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt $M_1\left(-2;2\right)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$.

Ta có $d\left(M;d\right)\geq 0,\forall M\ \Rightarrow \min d\left(M;d\right)=0$ khi $M\in d$.

Mà $M\in\left(C\right)\ \Rightarrow M=d\cap\left(C\right)\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(-2;2\right)\\ M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\end{array}\right.$.

Với $M\left(-2;2\right)\Rightarrow a=-2, b=2\Rightarrow\left(4a+5\right)^2+\left(2b-7\right)^2=18$.

Với $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2},\ b=5\Rightarrow\left(4a+5\right)^2+\left(2b-7\right)^2=18$.

Câu 18. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 (với O là gốc tọa độ)?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{1-x}=x-m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x^2-mx+m=0\quad(*)\end{cases}$

Để có hia điểm phân biệt A,B thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\begin{cases}1-m+m\neq 0\\ m^2-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>4\\ m<0\end{array}\right.$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biết x_1, x_2 thỏa mãn:

$\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=m\end{cases}$

Giả sử $A\left(x_1;x_1-m\right),B\left(x_2;x_2-m\right)$, suy ra: $\overrightarrow{OA}\left(x_1;x_1-m\right),\overrightarrow{OB}\left(x_2;x_2-m\right)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 suy ra:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\cos 60^0\Leftrightarrow\frac{\left|x_1x_2+\left(x_1-m\right)\left(x_2-m\right)\right|}{\sqrt{x_1^2+\left(x_1-m\right)^2}\sqrt{x_2^2+\left(x_2-m\right)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|2x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2\right|}{\sqrt{x_1^2x_2^2+\left(x_1x_2-mx_2\right)^2+x_1^2\left(x_1x_2-m\right)^2+\left[\left(x_1-m\right)\left(x_2-m\right)\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m-m^2+m^2\right|}{\sqrt{m^2+\left(m-mx_2\right)^2+\left(m-mx_1\right)^2+\left[x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m\right|}{\sqrt{m^2+\left(m-mx_2\right)^2+\left(m-mx_1\right)^2+\left[m-m^2+m^2\right]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2+\left(1-x_2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2+\left(1-x_2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2=16$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)=12$$

$$\Leftrightarrow m^2-4m-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Câu 19. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Để đường thẳng $d: y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$ $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(-4;-2\right)$ **B.** $m\in\left(2;4\right)$ **C.** $m\in\left(-2;0\right)$ **D.** $m\in\left(0;2\right)$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$:

$\frac{2x}{x-1}=x-m+2 \Leftrightarrow x^2-\left(m+1\right)x+m-2=0$ $\left(*\right)$ (vì $x=1$ không phải là nghiệm).

Đường thẳng d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta=\left(m+1\right)^2-4\left(m-2\right)=\left(m-1\right)^2+8>0, \forall m\in\mathbb{R}$.

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1.x_2=m-2 \end{cases}$

Khi đó $A\left(x_1;x_1-m+2\right)$, $B\left(x_2;x_2-m+2\right)$.

$AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(x_2-m+2-x_1+m-2\right)^2}=\sqrt{2\left(x_2-x_1\right)^2}=\sqrt{2}\sqrt{\left(x_2+x_1\right)^2-4x_1x_2}$.

$=\sqrt{2}\sqrt{\left(m-1\right)^2+8}\geq 4$.

AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB=4 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 20. **(THPT Lương Tài Số 2 2019)** Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m. Tìm hoành độ trung điểm của AB?

A. $m+1$ **B.** $-m-1$ **C.** $-2m-2$ **D.** $-2m+1$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và d là:

$$\frac{x^2+3}{x+1}=2x+2m \Leftrightarrow x^2+2\left(1+m\right)x+2m-3=0 \ \left(1\right), \left(x\neq-1\right).$$

Đường thẳng d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ Phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (1+m)^2 - (2m-3) > 0 \\ (-1)^2 + 2(1+m).(-1) + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0, \forall m \\ -4 \neq 0 \end{cases}$.

Khi đó, gọi $A(x_1; 2x_1 + 2m)$; $B(x_2; 2x_2 + 2m)$

Hoành độ trung điểm của AB là $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2+2m}{2} = -m-1$.

Câu 21. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1 : x = -1$ và tiệm cận ngang $d_2 : y = 2$.

Do $M \in (H) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{2x_0+3}{x_0+1}\right)$.

Xét $d(M, d_1) + d(M, d_2) = |x_0 + 1| + \left|\frac{2x_0+3}{x_0+1} - 2\right| = |x_0 + 1| + \left|\frac{1}{x_0+1}\right| \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|x_0 + 1| = \left|\frac{1}{x_0+1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Theo đề bài, ta có $x_0 < 0$ nên nhận $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy $x_0 + y_0 = -1$.

Câu 22. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** -27. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-2x+1}{x+1} = -x + m$ (1)

Điều kiện: $x \neq -1$.

Phương trình (1) $\Rightarrow \frac{-2x+1}{x+1} = -x + m$

$\Leftrightarrow -2x + 1 = (-x + m)(x + 1)$

$\Leftrightarrow -x^2 + (m+1)x + m - 1 = 0$ (2).

Để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 > 0$.

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -3 - 2\sqrt{3}\right) \cup \left(-3 + 2\sqrt{3}; +\infty\right)$ (3).

Gọi $A(x_A; -x_A + m), B(x_B; -x_B + m)$ là tọa độ giao điểm:

Theo đề ta có:

$AB \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \leq 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(x_B-x_A\right)^2=8 \Leftrightarrow x_B^2-2x_A.x_B+x_A^2-4\le 0$

$\Leftrightarrow \left(x_A+x_B\right)^2-4x_A.x_B-4\le 0$.

$\Leftrightarrow (m+1)^2-4(1-m)-4<0$

$\Leftrightarrow m^2+6m-7<0 \Leftrightarrow m\in(-7;1)\,(4)$

Từ (3) và (4) ta có $m\in\left(-7;-3-2\sqrt{2}\right)\cup\left(-3+2\sqrt{2};1\right)$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-6;0\}$

Chọn **A.**

Câu 23. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y=m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d': y=2-m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C), D(x_D;y_D)$ với $x_C<x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D=-3$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x-m^2=(x+1)(m-x)$

$\Leftrightarrow x^2+(3-m)x-m^2-m=0$ suy ra $x_A.x_B=-m^2-m; x_A+x_B=m-3$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x-m^2=(x+1)(2-m-x)$

$\Leftrightarrow x^2+(m+1)x-m^2+m-2=0$ suy ra $x_C.x_D=-m^2+m-2; x_C+x_D=-m-1$

Mặc khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2-2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_A=-3\\ x_D=1\end{array}\right.$. Suy ra

$m^2+6m+9=5m^2-2m+9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=2\end{array}\right.$.

Dạng 3. Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số trùng phương (CHỨA THAM SỐ)

. **Bài toán tổng quát**: Tìm m để đường thẳng $d: y=\alpha$ cắt đồ thị $(C): y=f(x;m)=ax^4+bx^2+c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4+bx^2+c-\alpha=0$ (1)

Đặt $t=x^2\ge 0$ thì $(1)\Leftrightarrow at^2+bt+c-\alpha=0$ (2)

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m\in D_1$. Cụ thể:

- Để $d\cap(C)=n=4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện: $0<t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Rightarrow m\in D_1$.

- Để $d\cap(C)=n=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện: $0=t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases}c-\alpha=0\\ \dfrac{b}{a}<0\end{cases} \Rightarrow m\in D_1$.

- Để $d\cap(C)=n=2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac<0 \\ \begin{cases}\Delta=0 \\ S>0\end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow m \in D_1$.

• Để $d \cap (C) = n = 1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép $=0$ hoặc $\begin{cases} t_1<0 \\ t_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=0 \\ c-\alpha=0\end{cases} \vee \begin{cases} c-\alpha=0 \\ \dfrac{b}{a}>0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1$.

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của t_1, t_2 (3)

Thế biểu thức tổng, tích vào (3) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải chúng ta sẽ tìm được $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

 Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1), *đặt* $t = x^2 \geq 0$, *thì có:* $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Để (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt thì* (2) *có hai nghiệm phân biệt dương, tức là:* $\begin{cases} \Delta>0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1.t_2>0 \end{cases}$

Khi đó (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt lần lượt là* $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ *lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi:* $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$. *Theo định lý Vi – et* $t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a}$ *suy ra* $t_1 = -\dfrac{b}{10a}; t_2 = -\dfrac{9b}{10a}$, *kết hợp* $t_1.t_2 = \dfrac{c}{a}$ *nên có:* $9ab^2 = 100a^2c$

Tóm lại: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ *cắt trục hoành tại* 3 *điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng, thì điều kiện cần và đủ là:* $\begin{cases} b^2-4ac>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \\ 9ab^2=100a^2c \end{cases}$

Câu 1. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $(-1;3)$. **<u>B</u>.** $(-3;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-3;0)$.

Lời giải

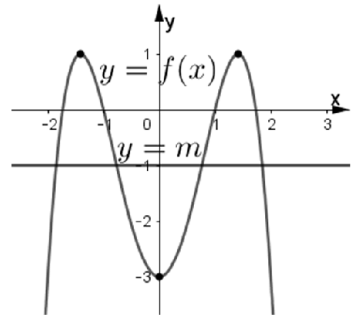
<u>Chọn B</u>

Ta có: $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 3 = m$.

Xét hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$, khi đó:

$y' = -4x^3 + 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Suy ra $y_{CD} = 1; y_{CT} = -3$.



Vậy để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì: $-3 < m < 1 \Rightarrow m \in (-3;1)$.

Câu 2. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m-1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x^4 - 2mx^2 + (2m-1) = 0$.

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + (2m-1) = 0$ (*).

Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \neq 1 \\ m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \text{ hay } m \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}.$$

Câu 3. **(THPT Lương Thế Vinh - Hn - 2018)** Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m = 2$. **B.** $m = \frac{3}{2}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$x^4 - 3x^2 - 2 = m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0 \quad (1)$.

Vì $m > 0 \Leftrightarrow -2 - m < 0$ hay phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$x^2 = \frac{3+\sqrt{4m+17}}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}}$ và $x_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}}$.

Khi đó: $A(x_1;m)$, $B(x_2;m)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 + m^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{4m+17}}{2} = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3 \geq 0 \\ 4m^4 - 12m^2 - 4m - 8 = 0 \end{cases} \xleftrightarrow[2m^2-3\geq 0]{m>0} m = 2.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $-\frac{1}{4} < m < 0$. **B.** $0 < m < \frac{1}{4}$. **C.** $m > 0$. **D.** $m > -\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=x^4-x^2$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-2x.$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<m<0$.

Câu 5. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là $0,\ 1,\ m,\ n$. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=3$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ các giao điểm lần lượt là $A(0;0), B(1;-1), C(m;m^4-2m^2),\ D(n;n^4-2n^2)$.

Đường thẳng qua các điểm A,B,C,D có phương trình: $y=-x$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2x^2=-x\Leftrightarrow x^4-2x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x^2+x-1=0\ (*)\end{array}\right.$

Vậy m,n là các nghiệm của phương trình $(*)$.

Khi đó: $S=m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=3$.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4=0$

Đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

$(*)\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x+4=(2-m)x^2$

$\Leftrightarrow 2-m=x^2-4x+\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{x^2}$

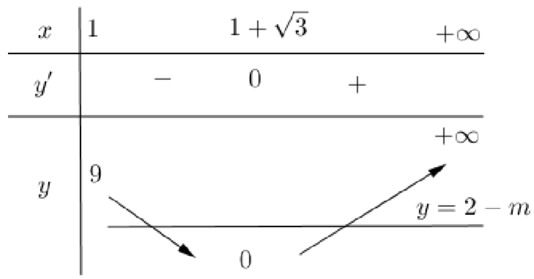
Đây là phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y=x^2-4x+\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{x^2}\ (x>1)$ với đường thẳng $y=2-m$ song song với trục hoành.

Xét hàm số $y=x^2-4x+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}\ (x>1)$.

$y'=2x-4-\frac{8}{x^2}-\frac{8}{x^3}=\frac{2x^4-4x^3-8x-8}{x^2}$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3}\ (\text{loại}) \\ x=1+\sqrt{3}\ (\text{nhận}) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, ycbt $\Leftrightarrow 0<2-m<9 \Leftrightarrow -7<m<2$.

Vì m nguyên nên $m\in\{-6,-5,...,1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 7. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hàm số $f(x)=-4x^4+8x^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

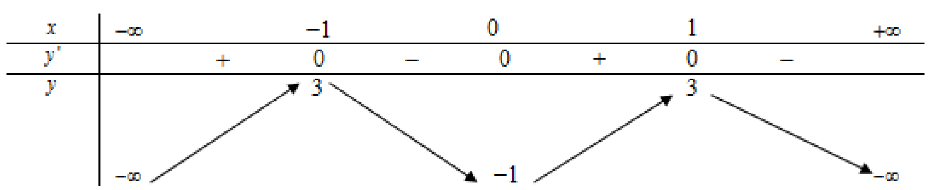
A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **<u>D</u>.** 1.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

$f'(x)=-16x^3+16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Phương trình $f(x)=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=-4x^4+8x^2-1\ (C)$ và đường thẳng $y=m$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m<-1 \end{array}\right.$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Câu 8. **(Sở Thanh Hóa 2018)** Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a;b)$ (với $a,b\in\mathbb{Q}$, a, b là phân số tối giản). Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -63. **B.** 63. **<u>C</u>.** 95. **D.** -95.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4+2mx^2+m=-3$. Đặt $x^2=t$, $t\ge 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2+2mt+m+3=0$ (1) và đặt $f(t)=t^2+2mt+m+3$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=-3$ tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0<t_1<t_2$ và khi đó hoành độ bốn giao điểm là $-\sqrt{t_2}<-\sqrt{t_1}<\sqrt{t_1}<\sqrt{t_2}$.

Do đó, từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases}\sqrt{t_2}>2\\ \sqrt{t_1}<1\end{cases}$ hay $0<t_1<1<4<t_2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}f(0)>0\\ f(1)<0\\ f(4)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+3>0\\ 3m+4<0\\ 9m+19<0\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<-\dfrac{19}{9}$.

Vậy $a=-3$, $b=-\dfrac{19}{9}$ nên $15ab=95$.

Câu 9. **(Chuyên Hà Tĩnh 2018)** Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(1;3)$. **D.** $m^2\in(0;1)$.

Lời giải

$y'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{41}{4}$	↗	-10	↘	$-\frac{41}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y=m^2\ge 0$ luôn phía trên trục hoành

Nên nó luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi $A\left(\sqrt{a};m^2\right)$ và $B\left(-\sqrt{a};m^2\right)$ là giao điểm của hai đồ thị đã cho, với $a>0$

Ta có

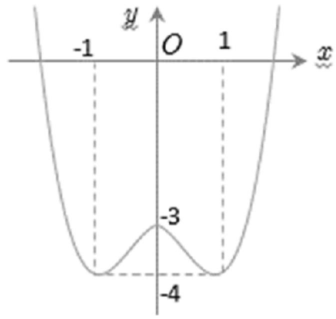
❍ $A\in(C)$ $\Leftrightarrow a^2-a-10=m^2$ (1)

❍ Tam giác OAB cân tại O nên tam giác OAB vuông tại O $\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ $\Leftrightarrow m^4=a$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow m^8-m^4-m^2-10=0\Leftrightarrow t^4-t^2-t-10=0$, với $t=m^2>0$.

$\Leftrightarrow(t-2)(t^3+2t^2+3t+5)=0$ $\Leftrightarrow t=2$ $\Leftrightarrow m^2=2\in(1;3)$.

Câu 10. **(Sở Bình Phước 2018)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có 2 nghiệm phân biệt.



A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m \le \frac{1}{2}$. **C.** $0<m<\frac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy, phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt khi

$\left[\begin{array}{l} 2m-4=-4 \\ 2m-4>-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 11. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2+3+2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2 \le m \le -\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}<m<2$. **C.** $-2<m<-\frac{3}{2}$. **D.** $3<m<4$.

Lời giải

- Ta có: $-x^4+2x^2+3+2m=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2-3=2m$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $y=x^4-2x^2-3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

- Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$ và đường thẳng $y=2m$.
- Từ BBT ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-4<2m<-3 \Leftrightarrow -2<m<-\frac{3}{2}$.

Câu 12. **(THPT Vân Nội - Hà Nội - 2018)** Tất cả các giá trị thực của tham số m, để đồ thị hàm số $y=x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2$ không cắt trục hoành.

A. $m \ge \sqrt{3}+1$. **B.** $m<3$. **C.** $m>\sqrt{3}+1$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2=0 \quad (1)$

Đặt $t=x^2 \ge 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-2(2-m)t+m^2-2m-2=0 \quad (2)$

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm âm

$$\text{Hay } \left[\begin{array}{l} \Delta' = -2m+6<0 \\ \begin{cases} \Delta' = -2m+6 \ge 0 \\ 2-m<0 \\ m^2-2m-2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ \begin{cases} m \le 3 \\ m>2 \\ \left[\begin{array}{l} m>1+\sqrt{3} \\ m<1-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ 1+\sqrt{3}<m\le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>1+\sqrt{3}.$$

Câu 13. **(Sở Nam Định - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $m\in\left(-1;\dfrac{-5}{6}\right)$. **B.** $m\in(-3;-1)$. **C.** $m\in(-3;1)$. **D.** $m\in(-4;-1)$.

Lời giải

C1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x^2\ge 0$ pt trở thành $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \quad (2)$

$g(t)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$

Để pt (1) có 4 nghiệm phân biệt thì pt (2) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\text{Hay } \begin{cases} m+1\ne 0 \\ \Delta'>0 \\ t_1.t_2>0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne -1 \\ (2m-3)^2-(m+1)(6m+5)>0 \\ \dfrac{6m+5}{m+1}>0 \\ \dfrac{2m-3}{m+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne -1 \\ \dfrac{-23-\sqrt{561}}{4}<m<\dfrac{-23+\sqrt{561}}{4} \\ m<-1 \vee m>-\dfrac{5}{6} \\ m<-1 \vee m>\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1-1<0 \\ t_2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow (t_1-1)(t_2-1)<0 \Leftrightarrow t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6m+5}{m+1}-\frac{2(2m-3)}{m+1}+1<0 \Leftrightarrow \frac{3m+12}{m+1}<0 \Leftrightarrow -4<m<-1$$

Kết hợp với (*) ta có $m\in(-4;-1)$ thỏa yêu cầu bài toán.

C2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x^2\ge 0$ pt trở thành $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \quad (2)$

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$ (biểu thức $t^2-4t+6\ne 0, \forall t$)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$, với $t\in(0;+\infty)$

Ta có $f(t)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và có

$$f'(t)=\frac{10t^2-2t-56}{\left(t^2-4t+6\right)^2}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1-\sqrt{561}}{10}<0\\ t=\dfrac{1+\sqrt{561}}{10}>1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	0		1		$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$		$+\infty$
$f'(t)$			$-$		0	$+$	
$f(t)$	$-\frac{5}{6}$	↘	-4	↘		↗	-1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$ tại hai giao điểm có hoàng độ thỏa $0<t_1<1<t_2$ khi $-4<m<-1$.

Câu 14. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $d:y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $-\frac{1}{3}<m<1$ và $m\neq 0$ **B.** $-\frac{1}{2}<m<1$ và $m\neq 0$

C. $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$ và $m\neq 0$ **D.** $-\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$ và $m\neq 0$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng d là $x^4-(3m+2)x^2+3m=-1$

$\Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0$

Đặt $t=x^2$, $(t\geq 0)$, phương trình trở thành $t^2-(3m+2)t+3m+1=0$ (2)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=3m+1\end{array}\right.$$

Đường thẳng $d:y=-1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0<t_1<t_2<4$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3m+1\neq 1\\ 0<3m+1<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ -\dfrac{1}{3}<m<1\end{cases}$$