

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM**Một số tính chất cần nhớ.****1. Môđun của số phức:**

▪ Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của vectơ \overrightarrow{OM} được gọi là môđun của số phức z . Kí hiệu $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

▪ Tính chất

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overrightarrow{OM}|$$

$$|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, (z' \neq 0) \quad \bullet \quad ||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

$$|kz| = |k| \cdot |z|, k \in \mathbb{R}$$

$$\star \text{ Chú ý: } |z^2| = |a^2 - b^2 + 2abi| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Lưu ý:

$$\bullet \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \geq 0)$$

$$\bullet \quad |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \leq 0)$$

$$\bullet \quad |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \leq 0)$$

$$\bullet \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \geq 0)$$

$$\bullet \quad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$\bullet \quad |z|^2 = |\bar{z}| |z| = |\bar{z}|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. Một số quỹ tích cần nhớ

Biểu thức liên hệ x, y	Quỹ tích điểm M
$ax + by + c = 0$ (1) $ z - a - bi = z - c - di $ (2)	(1) Đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ (2) Đường trung trực đoạn AB với $A(a, b), B(c, d)$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ hoặc $ z - a - bi = R$	Đường tròn tâm $I(a, b)$, bán kính R
$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ hoặc $ z - a - bi \leq R$	Hình tròn tâm $I(a, b)$, bán kính R
$r^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ hoặc $r \leq z - a - bi \leq R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a, b)$, bán kính lần lượt là r, R
$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = ay^2 + by + c \end{cases} (c \neq 0)$	Parabol
$\frac{(x + a)^2}{b^2} + \frac{(y + c)^2}{d^2} = 1$ (1) hoặc $ z - a_1 - b_1i + z - a_2 - b_2i = 2a$	(1) Elip (2) Elip nếu $2a > AB$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$ Đoạn AB nếu $2a = AB$
$\frac{(x + a)^2}{b^2} - \frac{(y + c)^2}{d^2} = 1$	Hypebol

Một số dạng đặc biệt cần lưu ý:

Dạng 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.**TQ1:** Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = |z|$, tìm $|z|_{\min}$. Khi đó ta có✓ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A(a; b)$

$$\checkmark \begin{cases} |z|_{\min} = \frac{1}{2}|z_0| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i \end{cases}$$

TQ2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z - a - bi| = |z - c - di|$. Tìm $|z|_{\min}$. Ta có✓ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A(a; b), B(c; d)$

$$\checkmark |z|_{\min} = d(O, AB) = \frac{|a^2 + b^2 - c^2 - d^2|}{2\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}}$$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - a - bi| = |z - c - di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|\bar{z} - a - bi| = |z - c - di| \Leftrightarrow |z - a + bi| = |z - c - di|.$$

✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|iz - a - bi| = |z - c - di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|iz - a - bi| = |z - c - di| \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a - bi}{i} \right| = \left| z + \frac{-c - di}{i} \right| \Leftrightarrow |z + b + ai| = |z + d + ci|.$$

Dạng 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.**TQ:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - a - bi| = R > 0 (|z - z_0| = R)$. Tìm $|z|_{\max}, |z|_{\min}$. Ta có✓ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R

$$\checkmark \begin{cases} |z|_{\max} = OI + R = \sqrt{a^2 + b^2} + R = |z_0| + R \\ |z|_{\min} = |OI - R| = \left| \sqrt{a^2 + b^2} - R \right| = \left| |z_0| - R \right| \end{cases}$$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.**Ví dụ 1:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz - a - bi| = R \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a - bi}{i} \right| = \frac{R}{|i|}$ (Chia hai vế cho $|i|$)

$$\Leftrightarrow |z + b + ai| = R$$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - a - bi| = R \Leftrightarrow |z - a + bi| = R$ (Lấy liên hợp 2 vế)**Ví dụ 3:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$$|(c + di)z - a - bi| = R \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a - bi}{c + di} \right| = \frac{R}{|c + di|} = \frac{R}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Hay viết gọn $|z_0 z - z_1| = R \Leftrightarrow \left| z - \frac{z_1}{z_0} \right| = \frac{R}{|z_0|}$ (Chia cả hai vế cho $|z_0|$)**Dạng 3:** Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.**TQ1:** (Elip chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - c| + |z + c| = 2a, (a > c)$ Khi đó ta có✓ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

$$\checkmark \begin{cases} |z|_{Max} = a \\ |z|_{Min} = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$$

TQ2: (Elip không chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$

Thỏa mãn $2a > |z_1 - z_2|$.

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc

Ta có

Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $ z - z_1 + z - z_2 = 2a, (z_1 - z_2 < 2a)$ và $z_1, z_2 \neq \pm c, \pm ci$. Tìm Max, Min của $P = z - z_0 $. Đặt $\begin{cases} z_1 - z_2 = 2c \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$	
Nếu $\left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right = 0$	$\begin{cases} P_{Max} = a \\ P_{Min} = b \end{cases}$ (dạng chính tắc)
Nếu $\begin{cases} \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right > a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$\begin{cases} P_{Max} = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right + a \\ P_{Min} = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right - a \end{cases}$
Nếu $\begin{cases} \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right < a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$P_{Max} = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right + a$
Nếu $ z_0 - z_1 = z_0 - z_2 $	$P_{Min} = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right - b$

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2018) Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 8$ B. $P = 10$ C. $P = 4$ D. $P = 6$

Câu 2. (Đề Tham Khảo 2017) Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

- A. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ B. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ C. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$ D. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$

Câu 3. (KTNL Gia Bình 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $|z - 1| = \sqrt{34}, |z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$ (trong đó m là số thực) và sao cho $|z_1 - z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $|z_1 + z_2|$ bằng

- A. $\sqrt{2}$ B. 10 C. 2 D. $\sqrt{130}$

Câu 4. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 1$. Số phức $z - i$ có môđun nhỏ nhất là:

- A. $\sqrt{5} - 2$. B. $\sqrt{5} - 1$. C. $\sqrt{5} + 1$. D. $\sqrt{5} + 2$.

- Câu 5. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{2z+i}{z} \right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.
- A. $\frac{M}{m} = 3$. B. $\frac{M}{m} = \frac{4}{3}$. C. $\frac{M}{m} = \frac{5}{3}$. D. $\frac{M}{m} = 2$.
- Câu 6.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$.
- A. $\sqrt{13} + 3$. B. $\sqrt{13} + 5$. C. $\sqrt{13} + 1$. D. $\sqrt{13} + 6$.
- Câu 7.** Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 3i + 4| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 + 7 - 24i|$ nằm trong khoảng nào?
- A. $(0; 1009)$. B. $(1009; 2018)$. C. $(2018; 4036)$. D. $(4036; +\infty)$.
- Câu 8. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = M + m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
- A. $A \in (\sqrt{34}; 6)$. B. $A \in (6; \sqrt{42})$. C. $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. D. $A \in (4; 3\sqrt{3})$.
- Câu 9. (Chuyên Hạ Long 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 6| + |z + 6| = 20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z . Tính $M - n$
- A. $M - n = 2$. B. $M - n = 4$. C. $M - n = 7$. D. $M - n = 14$.
- Câu 10. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng
- A. $4 + \sqrt{74}$. B. $2 + \sqrt{130}$. C. $4 + \sqrt{130}$. D. $16 + \sqrt{74}$.
- Câu 11. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.
- A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.
- Câu 12.** Biết số phức z thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$ và $|z|$ có giá trị nhỏ nhất. Phần thực của số phức z bằng:
- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $-\frac{2}{5}$. D. $-\frac{1}{5}$.
- Câu 13. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 2$. Số phức z mà $|z - 1|$ nhỏ nhất là
- A. $z = 1 + 5i$. B. $z = 1 + i$. C. $z = 1 + 3i$. D. $z = 1 - i$.
- Câu 14. (Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = M + m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $A \in (\sqrt{34}; 6)$. B. $A \in (6; \sqrt{42})$. C. $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. D. $A \in [4; 3\sqrt{3})$.

Câu 15. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i| = |\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. $-\frac{3}{10}$.

Câu 16. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left| \frac{z_1-i}{z_1+2-3i} \right| = 1; \left| \frac{z_2+i}{z_2-1+i} \right| = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là

A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\sqrt{2}-1$.

Câu 17. (Sở Bình Phước 2019) Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1| = \sqrt{34}$ và $|z+1+mi| = |z+m+2i|$, (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 2 B. 10 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{130}$

Câu 18. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z-3\sqrt{2}| = \sqrt{2}, |w-4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0, w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 1. D. $6\sqrt{2}$.

Câu 19. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8-6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $\sqrt{66}$. D. $3\sqrt{6}$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{39}{4}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 21. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Cho hai số phức z và $\omega = a+bi$ thỏa mãn $|z+\sqrt{5}| + |z-\sqrt{5}| = 6; 5a-4b-20=0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-\omega|$ là

A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$. B. $\frac{5}{\sqrt{41}}$. C. $\frac{4}{\sqrt{41}}$. D. $\frac{3}{41}$.

Câu 22. (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019) Gọi $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn điều kiện

$|z-1-2i| + |z+2-3i| = \sqrt{10}$ và

có mô đun nhỏ nhất. Tính $S = 7a + b$?

A. 7. B. 0. C. 5. D. -12.

Câu 23. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}| + 2|z-\bar{z}| = 8$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = |z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10} + \sqrt{34}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{10} + \sqrt{58}$. D. $\sqrt{5} + \sqrt{58}$.

- Câu 24. (Chuyên Bắc Giang -2019)** Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$.
- A. $\frac{13}{4}$ B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{11}{4}$
- Câu 25. (Chuyên Đại Học Vinh -2019)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng
- A. $5-\sqrt{21}$ B. $20-4\sqrt{21}$ C. $20-4\sqrt{22}$ D. $5-\sqrt{22}$
- Câu 26.** Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng
- A. -10 B. $-4-3\sqrt{5}$ C. -5 D. $-6-2\sqrt{5}$
- Câu 27. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.
- A. $\sqrt{2}-1$. B. $\sqrt{2}+1$. C. $2\sqrt{2}+1$. D. $2\sqrt{2}-1$.
- Câu 28. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho z là số phức thỏa mãn $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là
- A. $5\sqrt{2}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 29. (Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho các số phức $z_1=-2+i$, $z_2=2+i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức M^2-m^2 bằng
- A. 15. B. 7. C. 11. D. 8.
- Câu 30. (Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\leq|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:
- A. $\sqrt{13}+1$. B. $\sqrt{10}+1$. C. $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{10}$.
- Câu 31.** Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1-i|+|z-5-2i|$ bằng
- A. $1+\sqrt{10}$. B. 4. C. $\sqrt{17}$ D. 5.
- Câu 32. (SGD Cần Thơ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là
- A. $|w|=3\sqrt{137}$. B. $|w|=\sqrt{1258}$. C. $|w|=2\sqrt{309}$. D. $|w|=2\sqrt{314}$.
- Câu 33. (THPT Hậu Lộc 2 - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?
- A. $m=\sqrt{2}-1$. B. $m=2\sqrt{2}$. C. $m=2$. D. $m=2\sqrt{2}-2$.

- Câu 34. (SGD Bắc Giang - 2018)** Hcho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases} |z-3-2i| \leq 1 \\ |w+1+2i| \leq |w-2-i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{\min} của biểu thức $P = |z-w|$.
- A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$. B. $P_{\min} = \sqrt{2}+1$. C. $P_{\min} = \frac{5\sqrt{2}-2}{2}$. D. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$.
- Câu 35. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Cho số phức z thỏa $|z|=1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1|$. Tính $M-m$.
- A. $m = -4, n = 3$. B. $m = 4, n = 3$ C. $m = -4, n = 4$. D. $m = 4, n = -4$.
- Câu 36. (Chuyên Đh Vinh - 2018)** Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-1-2i| + |z-5-2i|$ bằng
- A. $6\sqrt{7}$. B. $4+2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{53}$. D. $4\sqrt{13}$.
- Câu 37. (Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Xét các số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-3-2i| = 2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i| + 2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $4-\sqrt{3}$. B. $2+\sqrt{3}$. C. 3 . D. $4+\sqrt{3}$.
- Câu 38. (Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4i|=1$ và $|z_2-3-4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z-z_1| + |z-2z_2| + 2$ bằng:
- A. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}$. B. $P_{\min} = 5-2\sqrt{3}$. C. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. D. $P_{\min} = 5+2\sqrt{5}$.
- Câu 39. (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên - 2019)** Trong các số phức thỏa mãn: $|z-1+i| = |\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là
- A. $\frac{3}{10}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. $-\frac{3}{10}$.
- Câu 40. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1|$. Tính $M-m$.
- A. $M-m=1$. B. $M-m=7$. C. $M-m=6$. D. $M-m=3$.
- Câu 41. (Bình Giang-Hải Dương 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 2|1-z|$ bằng
- A. $6\sqrt{5}$. B. $4\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 42. (SGD Hưng Yên 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2-z+1|$. Tính $M.m$
- A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{39}{4}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\frac{13}{4}$.

- Câu 43. (Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn: $|\bar{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - i| + |z - 4|$ là
- A. 5. B. 4. C. $3\sqrt{3}$. D. 6.
- Câu 44. (SGD Bến Tre 2019)** Cho các số phức $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -5 - 3i$. Tìm điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z_3 , biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ và mô đun số phức $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$. B. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. D. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.
- Câu 45. (SGD Cần Thơ 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z + 1 + i|$ bằng
- A. $\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{2}$. C. 20. D. $2\sqrt{5}$.
- Câu 46. (Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(2 - i)z - (2 + i)\bar{z} = 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng
- A. 1. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. 2. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- Câu 47. (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Số phức z có mô đun nhỏ nhất thỏa mãn $|-2 - 3i + \bar{z}| = |z - i|$ là
- A. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$. B. $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$. C. $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$. D. $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$.
- Câu 48. (Sở GD Nam Định - 2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $\left| \frac{(12 - 5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i} \right| = 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.
- A. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\sqrt{2}$.
- Câu 49. (Chuyên Nguyễn Huệ-HN-2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.
- A. $\min|w| = \frac{1}{2}$. B. $\min|w| = 1$. C. $\min|w| = \frac{3}{2}$. D. $\min|w| = 2$.
- Câu 50. (Kim Liên - Hà Nội 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 3 - 2i| + |z - 3 + i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2| + |z - 1 - 3i|$. Tìm M, m .
- A. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$. B. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}$; $m = \sqrt{2}$.
C. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$. D. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}$; $m = \sqrt{3}$.
- Câu 51. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 2$. Số phức z mà $|z - 1|$ nhỏ nhất là
- A. $z = 1 + 5i$. B. $z = 1 + i$. C. $z = 1 + 3i$. D. $z = 1 - i$.

- Câu 52. (Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz + 2i + 4| = 3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2$.
- A. 9. B. 2. C. 5. D. 4.
- Câu 53. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z + i|$.
- A. $5\sqrt{3}$. B. $\sqrt{41}$. C. $\sqrt{61}$. D. $3\sqrt{5}$.
- Câu 54. (Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa –2019)** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a + b - 5|$ là
- A. $3 - \sqrt{2}$. B. $2 - \sqrt{2}$. C. $3 - 2\sqrt{2}$. D. $2 + \sqrt{2}$.
- Câu 55. (Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |z + 2| + 2|z - 2|$.
- A. 10. B. $5\sqrt{2}$. C. $10\sqrt{2}$. D. 7.
- Câu 56. (THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\frac{z}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{i - a}{1 - a(a - 2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3; 4)$ (khi a thay đổi) là
- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.
- Câu 57. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $a^2 - b^2$ bằng
- A. 40. B. $4\sqrt{5}$. C. 20. D. $2\sqrt{5}$.
- Câu 58. (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng
- A. 8. B. $4\sqrt{3}$. C. 4. D. $2 + 2\sqrt{3}$.
- Câu 59. (Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z - 6)(8 + \overline{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng
- A. $5 - \sqrt{21}$. B. $20 - 4\sqrt{21}$. C. $20 - 4\sqrt{22}$. D. $5 - \sqrt{22}$.
- Câu 60. (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng
- A. 6. B. $2\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. 2.
- Câu 61. (SGD Đà Nẵng 2119)** Gọi z là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 8i| = \sqrt{17}$. Biết $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), tính $m = 2a^2 - 3b$
- A. $m = -18$. B. $m = 54$. C. $m = -10$. D. $m = 14$.

- Câu 62. (Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 - 3i| = 2\sqrt{2}$. Tính $P = 2a + b$ khi $|z + 1 + 6i| + |z - 7 - 2i|$ đạt giá trị lớn nhất.
- A. $P = 3$. B. $P = -3$. C. $P = 1$. D. $P = 7$.
- Câu 63. (SGD Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i|$ bằng
- A. $5\sqrt{6}$. B. $\sqrt{15}(1 + \sqrt{6})$. C. $6\sqrt{5}$. D. $\sqrt{10} + 3\sqrt{15}$.
- Câu 64. (Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z + 1 - i| = 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2|z - 4 + 5i| + |z + 1 - 7i|$ bằng $a\sqrt{b}$ (với a, b là các số nguyên tố). Tính $S = a + b$?
- A. 20. B. 18. C. 24. D. 17.
- Câu 65. (Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)** Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$ và thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng
- A. $\frac{56}{5}$. B. $\frac{28}{5}$. C. 6. D. 5.
- Câu 66.** Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất $T = |w + i|$
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 67.** Cho các số phức z thỏa mãn $|z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2\sqrt{3} + i| + |z - 3\sqrt{3} + 2i| + |z - 3i|$.
- A. 12. B. 6. C. 8. D. 10.
- Câu 68.** Cho số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z|^2 + 3y^2 = 16$. Biểu thức $P = \|z - i\| - |z - 2|$ đạt giá trị lớn nhất tại $(x_0; y_0)$ với $x_0 < 0, y_0 > 0$. Khi đó: $x_0^2 + y_0^2$ bằng
- A. $\frac{20 - 3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{20 + 3\sqrt{7}}{2}$. C. $\frac{20 + 3\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{20 - 3\sqrt{7}}{2}$.
- Câu 69.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 4| + |z - 4| = 10$ và $|z - 6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$.
- A. $S = 11$. B. $S = -5$. C. $S = -3$. D. $S = 5$.
- Câu 70.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$ và $|z - 6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$?
- A. $S = -3$. B. $S = 5$. C. $S = -5$. D. $S = 11$.
- Câu 71.** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$, M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |1 + z| + 2|1 - z|$. Giá trị của biểu thức $M + m$ bằng
- A. $2\sqrt{5} + 2$. B. 6. C. $2\sqrt{5} + 4$. D. 7.

Câu 72. Xét tập hợp S các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)|$. Biểu thức $Q = |z - \bar{z}|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0 = x_0 + y_0i$ (khi z thay đổi trong tập S). Tính giá trị $T = M \cdot x_0 y_0^2$.

- A. $T = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$. B. $T = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. C. $T = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. D. $T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 73. (THPT Hậu Lộc 2 2019) Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 8. B. $4\sqrt{3}$. C. 4. D. $2 + 2\sqrt{3}$.

Câu 74. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - i| + |z_1 - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z_1 + z_2|$.

- A. $2\sqrt{2} + 1$. B. $\sqrt{2} - 1$. C. $2\sqrt{2} - 1$. D. $\sqrt{2} + 1$.

Câu 75. (Trường THPT Hàm Rồng 2019) Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $|z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

- A. 8 B. 6. C. $\sqrt{41}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 76. (Chuyên ĐH Vinh- 2019) Cho các số phức z và ω thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{z}{\omega} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |\omega + 1 - i|$

- A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\sqrt{2}$

Câu 77. Cho số phức z và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 8i = 0$ (z_1 có phần thực dương). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - z_1| + |z_2 - z| + \left| \bar{z} + 2z_1 + \frac{z_2}{2} \right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n} + p\sqrt{q}$ (trong đó $n, p \in \mathbb{N}$; m, q là các số nguyên tố). Tổng $m + n - p - q$ bằng

- A. 3. B. 4. C. 0. D. 2.

Câu 78. Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A. 6. B. $2\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 79. (Sở Nam Định - 2019) Xét các số phức w, z thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2+i)(z-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2i| + |z - 6 - 2i|$.

- A. 7. B. $2\sqrt{53}$. C. $2\sqrt{58}$. D. $4\sqrt{13}$.

Câu 80. Cho hai số phức z_1, z_2 đều khác 1 và -1 sao cho $z_1^{44} = z_2^{58} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |z_1 - z_2|$ gần nhất với giá trị nào sau đây.

- A. $\frac{11}{100}$. B. $\frac{7}{205}$. C. $\frac{7}{200}$. D. $\frac{1}{200}$.

Câu 81. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2.$$

- A. $P = 9$. B. $P = 10$. C. $P = 8$. D. $P = 12$.

Câu 82. Cho số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z - 4 + 3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng:

- A. 28. B. 24. C. 26. D. 20.

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI

<https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing>

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương

https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5glEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

Tải nhiều tài liệu hơn tại: <http://diendangiaovientoan.vn/>

ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!