Chuyên đề 29 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

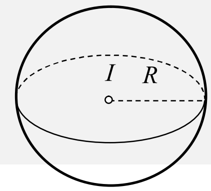
Dạng 1. Xác định tâm, bán kính của mặt cầu

• *Mặt cầu tâm* $I(a;b;c)$ *và có bán kính* R *có phương trình* $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

• *Phương trình* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ *với* $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ *và bán kính* $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

• *Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:*
Hệ số trước x^2, y^2, z^2 *phải bằng nhau và* $a^2+b^2+c^2-d>0$.



Câu 1. **(Sở Phú Thọ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

A. 4 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0$

$\Leftrightarrow m^2-2m-10<0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}$

Theo bài ra $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}\Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu.

A. $1<m<2$. **B.** $m<1$ hoặc $m>2$. **C.** $-2\le m\le 1$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Lời giải

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu là: $(m+2)^2+4m^2-19m+6>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$.

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình mặt cầu?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$

$\Leftrightarrow (x+2m)^2+(y+m)^2+(z-m)^2=28-3m^2$ (1).

(1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 28-3m^2>0\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}}<m<\sqrt{\frac{28}{3}}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

A. $\{1;10\}$. **B.** $\{2;-10\}$. **C.** $\{-1;11\}$. **D.** $\{1;-11\}$.

Lời giải

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi}=4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}$.

Do đó: $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=11 \end{array}\right.$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Quý Dôn - Dà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:

A. $R=2$. **B.** $R=\sqrt{3}$. **C.** $R=3$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Giả sử $M(x;y;z)$.

Ta có: $MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2$; $MB^2=x^2+(y-2)^2+z^2$; $MC^2=x^2+y^2+(z-3)^2$.

$MA^2=MB^2+MC^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2+x^2+y^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow -2x+1=(y-2)^2+x^2+(z-3)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{2}$.

Câu 6. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $l=2\sqrt{13}$. **B.** $l=2\sqrt{41}$. **C.** $l=2\sqrt{26}$. **D.** $l=2\sqrt{11}$.

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x;\ y;\ 0)$.

$$\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2+4^2=(y+3)^2+1^2 \\ x^2-2x+1+16=x^2-4x+4+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow l=2R=2\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=2\sqrt{26}.$$

Câu 7. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì O, A, B, C thuộc (S) nên ta có:

$$\begin{cases} d=0 \\ 1+2a+d=0 \\ 4-4c+d=0 \\ 9+6b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}.$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 8. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội -2019)** Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0),B(1;3;0),C(-1;0;3),D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=2\sqrt{2}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=6$. **D.** $R=\sqrt{6}$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+c^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-3)^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

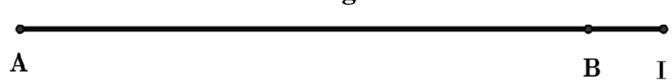
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$$

Bán kính: $R=IA=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$.

Câu 9. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hai điểm A,B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có:

$MA=3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2=9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Leftrightarrow IA^2-9IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}\right)=8MI^2$ (1)

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB=\frac{1}{2};IA=\frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$ suy ra $M \in S\left(I;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 10. **(Sở Bình Phước - 2018)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

A. $m<-5$ hoặc $m>1$. **B.** $-5<m<1$. **C.** $m<-5$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2+b^2>c^2$

$\Leftrightarrow (m+2)^2+4m^2+m^2-5m^2-9>0 \Leftrightarrow m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>1 \end{array}\right.$.

Câu 11. **(Yên Phong 1 - 2018)** Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $I(3;-2;-1)$. **B.** $I(2;-1;0)$. **C.** $I(3;-2;1)$. **D.** $I(-3;-2;1)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-a;1-b;2-c); \overrightarrow{IH}=(4-a;-3-b;-2-c)$

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{IH} \Rightarrow \begin{cases} -a=-3(4-a) \\ 1-b=-3(-3-b) \\ 2-c=-3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2;-1).$$

Câu 12. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy và đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu là

A. $(2;-1;0)$. **B.** $(-2;1;0)$. **C.** $(0;0;-2)$. **D.** $(0;0;0)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi tâm $I(a;b;c)$ và phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Do $I \in (Oxy) \Leftrightarrow c=0 \Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by+d=0$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A\in(S) \\ B\in(S) \\ C\in(S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-d=21 \\ 2a-6b-d=11 \\ 4a+4b-d=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ d=-21 \end{cases}.$$

Vậy $I(-2;1;0)$.

Câu 13. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(9;18;-27)$. **B.** $(-3;-6;9)$. **C.** $(3;6;-9)$. **D.** $(-9;-18;27)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi tọa độ các điểm trên ba tia Ox,Oy,Oz lần lượt là $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\dfrac{a}{3}=-6\\ \dfrac{b}{3}=-12\\ \dfrac{c}{3}=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-18\\ b=-36\\ c=54\end{cases}$.

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-2pz+q=0$. Vì (S) qua các điểm O,A,B,C nên ta có hệ:

$$\begin{cases}q=0\\ 36m+q=-18^2\\ 72n+q=-36^2\\ -108p+q=-54^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-9\\ n=-18\\ p=27\\ q=0\end{cases}.$$

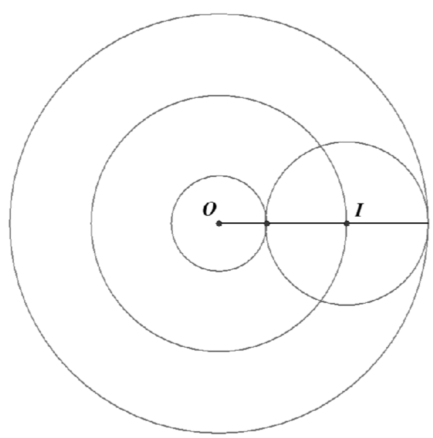
Vậy tọa độ tâm mặt cầu (S) là $(-9;-18;27)$.

Câu 14. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$ với α,β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox,Oy và Oz. Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

A. 40π. **B.** 4π. **C.** 20π. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn A



Ta dễ dàng chứng minh được: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Mặt cầu (S) có tâm $I(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

Suy ra tâm I thuộc mặt cầu (S') có tâm $\mathrm{O}(0;0;0), \mathrm{R}=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1$

Mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$.

Mặt cầu (S_1) có tâm là O, bán kính $R_1=|OI-R|=|1-2|=1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm là O, bán kính $R_2 = OI + R = 1 + 2 = 3$.

Vậy tổng diện tích hai mặt cầu bằng $4\pi\left(R_1^2 + R_2^2\right) = 4\pi\left(1^2 + 3^2\right) = 40\pi$.

Câu 15. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2;-m;0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - \left(3m^2 - 2m\right)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$. với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1;2)$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 16. **(Sở Kon Tum 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-4)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có diện tích bằng

A. 116π. **B.** $\frac{29\pi}{4}$. **C.** 29π. **D.** 16π.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

(S) đi qua 4 điểm O, A, B, C nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} d = 0 \\ 9 - 6a + d = 0 \\ 4 + 4b + d = 0 \\ 16 + 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -1 \\ c = -2 \\ d = 0 \end{cases}$.

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{3}{2};-1;-2\right)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) bằng $\frac{29\pi}{4}$.

Cách 2:

Khối tứ diện $OABC$ có 3 cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc tại O. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $OABC$ có bán kính $R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp $OABC$ bằng $\frac{29\pi}{4}$.

Câu 17. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $R=\sqrt{41}$. **B.** $R=\sqrt{15}$. **C.** $R=\sqrt{13}$. **D.** $R=\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với tọa độ tâm $I(a;b;c)$.

Ta có:

$I(a;b;c)\in(Oxy)\Rightarrow c=0$;

$\begin{cases}A\in(S)\\B\in(S)\\C\in(S)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a-4b+d=-21\\-2a+6b+d=-11\\-4a-4b+d=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\d=-21\end{cases}$;

$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4+1+0+21}=\sqrt{26}$.

Câu 18. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Bán kính của (S) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Vì (S) tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên ta có $IA\perp Ox$, $IB\perp Oy$, $IC\perp Oz$ hay A, B, C tương ứng là hình chiếu của I trên Ox, Oy, $Oz\Rightarrow I(a;b;c)$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Vì (S) đi qua A, B, C, D nên ta có: $\begin{cases}a^2=b^2=c^2=d\ (1)\\5-2b-4c+d=0\ (2)\end{cases}$.

Vì $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ nên $0<d\neq1$. Mặt khác, từ $(1)\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{2d}$.

- TH1: Từ $(1)\Rightarrow b=c=\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5-6\sqrt{d}+d=0\Leftrightarrow d=25$ (nhận).

$\Rightarrow R=\sqrt{2.25}=5\sqrt{2}$.

- TH2: Từ $(1)\Rightarrow b=c=-\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5+6\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).
- TH3: Từ $(1)\Rightarrow b=\sqrt{d}$, $c=-\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5+2\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).
- TH4: Từ $(1)\Rightarrow b=-\sqrt{d}$, $c=\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5-2\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R=5\sqrt{2}$.

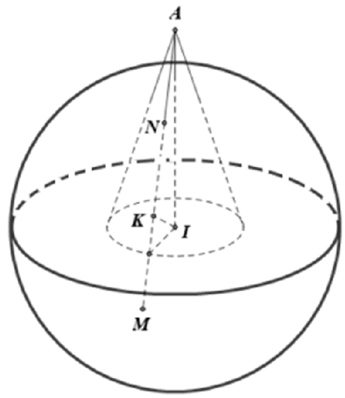
Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM = 3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{71}{3}$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{70}{3}$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{74}{3}$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{76}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi hình chiếu vuông góc của I trên MN là K.

Dễ thấy $AN = NK = \frac{1}{3}AM$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Có $AM.AN = AI^2 - R^2 = 4 \Rightarrow AN^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow KN = AN = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IK = \sqrt{IN^2 - KN^2} = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Nhận thấy mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) chính là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ có bán kính $IK = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{71}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a-b+c$.

A. $P=6$. **B.** $P=0$. **C.** $P=3$. **D.** $P=9$.

Lời giải

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên $d(I,(Oyz)) = d(I,(Ozx)) = d(I,(Oxy))$

$$\Leftrightarrow |a|=|b|=|c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a=b=-c \\ a=-b=c \\ a=-b=-c \end{array}\right.$$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a=-b=c$ thì phương trình $AI = d(I,(Oxy))$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a=-b=c$ thì $I(a;-a;a)$

$AI = d(I,(Oyx)) \Leftrightarrow (a-1)^2+(a-1)^2+(a-4)^2=a^2 \Leftrightarrow a^2-6a+9=0 \Leftrightarrow a=3$

Khi đó $P=a-b+c=9$.

Câu 21. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

<u>A</u>. $r=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

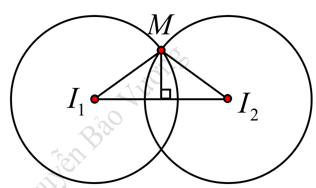
Gọi $M(x;y;z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$\overrightarrow{AM}=(x;y+1;z-2)$, $\overrightarrow{BM}=(x-2;y+3;z)$, $\overrightarrow{CM}=(x+2;y-1;z-1)$, $\overrightarrow{DM}=(x;y+1;z-3)$.

Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1\\ \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x(x-2)+(y+1)(y+3)+z(z-2)=1\\ x(x+2)+(y+1)(y-1)+(z-1)(z-3)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0\end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1)$, $R_1=2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1;0;2)$, $R_2=2$.



Ta có: $I_1I_2=\sqrt{5}$.

Dễ thấy: $r=\sqrt{R_1^2-\left(\dfrac{I_1I_2}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu

① ***<u>Dạng 1</u>. Cơ bản*** $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I(a;b;c)\\ \bullet\ BK:R\end{cases} \Rightarrow (S):\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$.

② ***<u>Dạng 2</u>. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và đi qua điểm*** A.

<u>Phương pháp</u>: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=IA\end{cases}$ ***(dạng 1)***

③ ***<u>Dạng 3</u>. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có đường kính*** AB, ***với*** A, B ***cho trước.***

<u>Phương pháp</u>: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=\dfrac{1}{2}AB\end{cases}$ *là trung điểm của* AB.

④ ***<u>Dạng 4</u>. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và tiếp xúc với các trục và mp tọa độ.***

<u>Phương pháp</u>: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=IM\end{cases}$ *với M là hình chiếu của* I *lên trục hoặc mp tọa*

⑤ ***<u>Dạng 5</u>. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và tiếp xúc với mặt phẳng*** (P).

<u>Phương pháp</u>: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=d\left[I;(P)\right]\end{cases}$

- *Khoảng cách từ điểm* $M(x_M;y_M;z_M)$ *đến mặt phẳng* $(P): ax+by+cz+d=0$ *được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

⑥ ***Dạng 6. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***đi qua bốn điểm*** A, B, C, D.

Phương pháp: Gọi $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Vì $A, B, C, D\in(S)$ *nên tìm được 4 phương trình* $\Rightarrow a, b, c, d\Rightarrow(S)$.

⑦ ***Dạng 7. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***đi qua 3 điểm*** A, B, C ***và tâm thuộc mp*** (P).

Phương pháp: Gọi $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Vì $A, B, C\in(S)$ *nên tìm được 3 phương trình và* $I(a;b;c)\in(P)$ *là phương trình thứ tư.*

Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a, b, c, d\Rightarrow(S)$.

⑧ ***Dạng 8. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và cắt mặt phẳng*** (P) ***theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính*** r***.(dạng này mình sẽ đưa vào bài phương trình mặt phẳng, các bạn học cũng có thể tự tìm để hiểu hơn)***

Phương pháp: Dựa vào mối liên hệ $\boxed{R^2=d^2_{[I;(P)]}+r^2}$ *và cần nhớ* $C=2\pi r$ *và* $S_{\text{đt}}=\pi r^2$.

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=13$ **B.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$ **D.** $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A

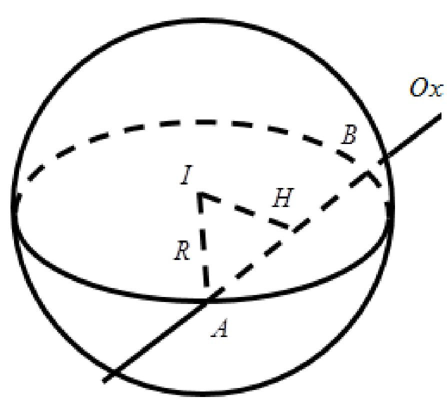
Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0) \Rightarrow IM=\sqrt{13}$ .Suy ra phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM là: $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Câu 2. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm *I*, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$.

$IH=\sqrt{13}\Rightarrow R=IA=\sqrt{IH^2+AH^2}=4$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 3. **(Sgd Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+1$ là

A. $m=5$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=\sqrt{5}$.

Lời giải

Mặt cầu (S): $(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+1$ có tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R=\sqrt{m^2+1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy)\Leftrightarrow d(I,(Oxy))=R$

$\Leftrightarrow 2=\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow m^2=3\Leftrightarrow m=\sqrt{3}$ (do m dương).

Câu 4. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **D.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

Lời giải

Với điểm $M(1;-2;3)$ thì hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0)$

Có $IM=\sqrt{13}$ vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;0)$ bán kính IM là: $(x-1)^2+y^2+z^2=13$

Câu 5. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

Lời giải

Ta có mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

Trong đáp án C ta có: $\begin{cases} a=2\\ b=-1\\ c=-1\\ d=2\end{cases}\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4}=2$.

Câu 6. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A,B có phương trình.

A. $x^2+y^2+z^2-8x+2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+8x+2=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x+2=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-8x-2=0$.

Lời giải

Gọi $I(a;0;0)\in Ox\Rightarrow \overrightarrow{IA}(1-a;1;2);\overrightarrow{IB}(3-a;2;-3)$.

Do (S) đi qua hai điểm A,B nên $IA=IB\Leftrightarrow\sqrt{(1-a)^2+5}=\sqrt{(3-a)^2+13}\Leftrightarrow 4a=16\Leftrightarrow a=4$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R = IA = \sqrt{14}$.

$\Rightarrow (S):(x-4)^2+y^2+z^2=14 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-8x+2=0.$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$ **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$ **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

Lời giải

Ta có: $S=4\pi R^2=4\pi \Leftrightarrow R=1$

Vậy (S) tâm $I(1;1;1)$ bán kính $R=1$ có pt: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

Câu 8. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

D. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases} 18-6a-6b+d=0 \\ 18-6a-6c+d=0 \\ 18-6b-6c+d=0 \\ 27-6a-6b-6c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a-6b+d=-18 \\ -6a-6c+d=-18 \\ -6b-6c+d=-18 \\ -6a-6b-6c+d=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=\frac{3}{2} \\ c=\frac{3}{2} \\ d=0 \end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Câu 9. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $A(2;\ 4;\ 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2^2+0^2+0^2-2.a.2-2.b.0-2.c.0+d=0 \\ 0^2+4^2+0^2-2.a.0-2.b.4-2.c.0+d=0 \\ 0^2+0^2+6^2-2.a.0-2.b.0-2.c.6+d=0 \\ 2^2+4^2+6^2-2.a.2-2.b.4-2.c.6+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+d=-4 \\ -8b+d=-16 \\ -12c+d=-36 \\ -4a-8b-12c+d=-56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \\ d=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0 \Rightarrow I(1;\ 2;\ 3)$ và $R=\sqrt{14} \Rightarrow R'=2\sqrt{14}$.

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1;\ 2;\ 3)$ và $R'=2\sqrt{14}:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$.

Câu 10. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Lời giải

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy \Rightarrow M(0;1;0)$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM=\sqrt{13}$.

Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

Câu 11. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và có thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$. **B.** $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=4$.

Lời giải

Thể tích mặt cầu là $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Theo đề bài ta có $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{256\pi}{3} \Leftrightarrow R=4$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1;4;2)$ và bán kính $R=4$ là $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$.

Câu 12. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S). Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$. **B.** $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=144$.

C. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$. **D.** $(x+9)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=25$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1;1;0), R=2.$ $II'=10$.

Gọi R' là bán kính của mặt cầu (S'). Theo giả thiết, ta có $R'+R=II' \Leftrightarrow R'=II'-R=8$.

Khi đó phương trình mặt cầu (S'): $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$.

Câu 13. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$.
B. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$.
D. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$d(I,(Oxy))=d(I,(Oyz))=d(I,(Oxz)) \Leftrightarrow |a|=|b|=|c|=R \quad (1)$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1;-1;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA=R \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=R^2 \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2+(c-4)^2=R^2 \\ a=c=-b=R>0 \quad (do(1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(-a+1)^2+(a-4)^2=a^2 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-12a+18=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6a+9=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=-3 \\ R=3 \end{cases} \Rightarrow (S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9.$$

Câu 14. (**Kim Liên - Hà Nội – 2018**) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(\frac{-8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

A. $x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$.
B. $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1$.
D. $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN.

Ta áp dụng tính chất sau : "Cho tam giác OMN với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a.\overrightarrow{IO}+b.\overrightarrow{IM}+c.\overrightarrow{IN}=\vec{0}$, với $a=MN$, $b=ON$, $c=OM$".

Ta có $OM=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$, $ON=\sqrt{\left(\frac{-8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=4$.

$$MN=\sqrt{\left(\frac{-8}{3}-2\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2+\left(\frac{8}{3}-1\right)^2}=5.$$

$$5.\overrightarrow{IO}+4.\overrightarrow{IM}+3.\overrightarrow{IN}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{5.0+4.2+3.\left(\dfrac{-8}{3}\right)}{3+4+5}=0\\ y_I=\dfrac{5.0+4.2+3.\left(\dfrac{4}{3}\right)}{3+4+5}=1\\ z_I=\dfrac{5.0+4.2+3.\left(\dfrac{8}{3}\right)}{3+4+5}=1\end{cases}.$$

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$.

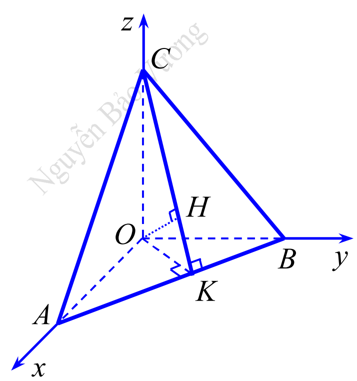
Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên mặt cầu có bán kính $R=d(I,(Oxz))=1$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

Câu 15. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $x^2+y^2+z^2=81$. **B.** $x^2+y^2+z^2=1$. **C.** $x^2+y^2+z^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2=25$.

Lời giải



Ta có H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow OH\perp(ABC)$.

Thật vậy :

$$\begin{cases}OC\perp OA\\ OC\perp OB\end{cases}\Rightarrow OC\perp AB\ (1)$$

Mà $CH\perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB\perp(OHC)$ $\Rightarrow AB\perp OH$ (*)

Tương tự $BC\perp(OAH)$ $\Rightarrow BC\perp OH$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OH\perp(ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R=OH=3$.

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) là $(S): x^2+y^2+z^2=9$.

Câu 16. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$. **D.** $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$d(I,(Oxy))=d(I,(Oyz))=d(I,(Oxz)) \Leftrightarrow |a|=|b|=|c|=R \ \ (1)$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1;-1;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA=R \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=R^2 \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2+(c-4)^2=R^2 \\ a=c=-b=R>0 \ \ (do(1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(-a+1)^2+(a-4)^2=a^2 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-12a+18=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6a+9=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=-3 \\ R=3 \end{cases} \Rightarrow (S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9.$$