

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI**I – Kiến thức cần nhớ**

— Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$\Delta: y = k(x - x_0) + y_0 \quad \text{Với } k = y'(x_0) \text{ là hệ số góc tiếp tuyến.}$$

— Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc nhau \Leftrightarrow hệ

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm (nhớ: "hàm = hàm, đạo = đạo")}$$

II – Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước**

— Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_0)$.

— Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc $k \Rightarrow y'(x_0) = k$ (i)

— Giải (i) tìm được $x_0 \longrightarrow y_0 = f(x_0) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_0) + y_0$.

✎ **Lưu ý.** Hệ số góc $k = y'(x_0)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan \alpha$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left| \frac{k - a}{1 + k.a} \right| = \tan \alpha$

② **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua (kể từ) điểm $A(x_A; y_A)$**

— Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $y_0 = f(x_0)$ và $k = y'(x_0)$ theo x_0 .

— Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0; y_0)$ là $\Delta: y = k(x - x_0) + y_0$.

— Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_0) + y_0$ (i)

— Giải phương trình (i) $\longrightarrow x_0 \longrightarrow y_0$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ .

③ **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước**

— Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_0)$ theo x_0 .

— Đề cho $\begin{cases} \Delta OAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với Ox một góc } 45^\circ \text{ và } O \notin \Delta & (i) \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA.OB = 2S & (ii) \end{cases}$

— Giải (i) hoặc (ii) $\longrightarrow x_0 \longrightarrow y_0; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ .

④ **Tìm những điểm trên đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ mà từ đó vẽ được 1, 2, 3, ..., n tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$**

— Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax + by + c = 0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_M) + y_M$ (iii)

— Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = số nghiệm x của (iii).

⑤ **Tìm những điểm $M(x_M; y_M)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau**

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_M) + y_M$ (iii)

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) \Leftrightarrow (iii) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

— Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$.

🔍 Lưu ý.

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì

$$\begin{cases} (iii): \text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2. \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0. \end{cases}$$

— Đối với bài toán tìm điểm $M \in (C): y = f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o; y_o)$ và Δ là tiếp tuyến với $k = f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k = f'(x_o) = k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o) \cdot k_d = -1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o; y_o)$.

Câu 1. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

A. $y = 9x + 7$. B. $y = -9x - 7$. C. $y = -9x + 7$. D. $y = 9x - 7$.

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

A. $y = -2x + 3$. B. $y = -2x - 3$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = 2x + 3$.

Câu 3. (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị (C). Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là:

A. $k = 0$ B. $k = -2$ C. $k = 6$ D. $k = 9$

Câu 4. (GKI THPT Việt Đức Hà Nội -2019) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị

hàm số tại điểm $M(1; 0)$ là

A. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ D. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

Câu 5. (Chuyên Lê Thánh Tông -2019) Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

A. $m \neq 0$. B. $m > 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 6. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến Năm 2019) Tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{1-x}{x+1}$ tại điểm có

tung độ bằng 1 song song với đường thẳng

A. (d): $y = 2x - 1$. B. (d): $y = -x + 1$. C. (d): $y = x - 1$. D. (d): $y = -2x + 2$.

- Câu 7. (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y = 4x + 2\cos 2x$ có đồ thị là (C) . Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là
- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. C. $x = \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- Câu 8. (Chuyên Hưng Yên 2019)** Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.
- A. Có hệ số góc bằng -1 . B. Song song với trục hoành.
C. Có hệ số góc dương. D. Song song với đường thẳng $x = 1$.
- Câu 9. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3$ tại điểm cực tiểu của đồ thị cắt đồ thị ở A, B khác tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $4\sqrt{2}$.
- Câu 10.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x-m+1}$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 7$.
- A. $m = 7$. B. $m = \sqrt{7}$. C. $m = 4$. D. $m \in \mathbb{R}$.
- Câu 11. (Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng tất cả các giá trị các phân tử của S là
- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
- Câu 12. (Mã 102 2018)** Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$.
- A. 3 B. 1 C. 0 D. 2
- Câu 13. (Mã 101 2018)** Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ khác A thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$
- A. 0 B. 3 C. 1 D. 2
- Câu 14. (Mã 103 -2018)** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?
- A. 0 B. 3 C. 1 D. 2
- Câu 15. (Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$, ($ab \neq -2$). Biết rằng a, b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng

A. -2.

B. 4.

C. -1.

D. 5.

Câu 16. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 10.

B. 9.

C. 0.

D. 4.

Câu 17. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O . Khi đó $a+b$ bằng

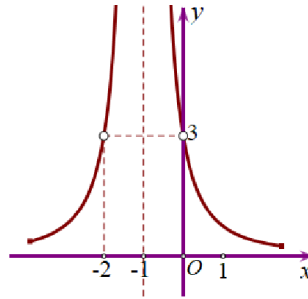
A. -1.

B. 0.

C. 2.

D. -3.

Câu 18. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0$) có đồ thị (C) . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.



A. $x - 3y + 2 = 0$.

B. $x + 3y - 2 = 0$.

C. $x + 3y + 2 = 0$.

D. $x - 3y - 2 = 0$.

Câu 19. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau. Hỏi khi M, N thay đổi, đường thẳng MN luôn đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. Điểm $N(-1; -5)$

B. Điểm $M(1; -5)$

C. Điểm $Q(1; 5)$

D. Điểm $P(-1; 5)$

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

A. $3\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 21. (HSG Bắc Ninh 2019) Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

A. 5

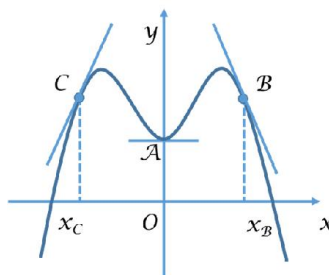
B. 2

C. 0

D. 1

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 5(x_1 - x_2)$

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 23.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-3}{x+2}$ đi qua giao điểm của hai đường tiệm cận?
- A. 1. B. Không có. C. Vô số. D. 2.
- Câu 24.** (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB cân tại O . Khi đó $a+b$ bằng
- A. -1. B. 0. C. 2. D. -3.
- Câu 25.** (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ (C). Xét hai điểm $A(a; y_A)$ và $B(b; y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua $D(5; 3)$. Phương trình của AB là
- A. $x - y - 2 = 0$. B. $x + y - 8 = 0$. C. $x - 3y + 4 = 0$. D. $x - 2y + 1 = 0$.
- Câu 26.** (THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019) Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B . Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là H . Tính độ dài đường thẳng OH .
- A. $\sqrt{34}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{58}$.
- Câu 27.** (Chuyên Thái Bình - 2019) Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng
- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{11}{5}$.
- Câu 28.** (Chuyên Hà Tĩnh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $f(1) > -3$. B. $f(1) < -3$. C. $f(1) \leq -\frac{11}{4}$. D. $f(1) \geq -\frac{11}{4}$.
- Câu 29.** (Sở Nam Định - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, biết tại các điểm A, B, C đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



- A. $f'(x_C) < f'(x_A) < f'(x_B)$. B. $f'(x_A) < f'(x_B) < f'(x_C)$.
 C. $f'(x_A) < f'(x_C) < f'(x_B)$. D. $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+3)x^2 + 3$ (C). Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn qua $A(-1; -1)$ kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) là $\Delta_1 : y = -1$ và Δ_2 tiếp xúc với (C) tại N và cắt (C) tại điểm P ($P \neq N$) có hoành độ là $x = 3$.

A. Không tồn tại m . B. $m = 2$. C. $m = 0$; $m = -2$. D. $m = -2$.

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C). Số phần tử của S là

A. 9. B. 7. C. 3. D. 5

BẠN HỌC THAM KHẢO THÊM DẠNG CÂU KHÁC TẠI

<https://drive.google.com/drive/folders/15DX-hbY5paR0iUmcs4RU1DkA1-7QpKlG?usp=sharing>

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương

https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

Tải nhiều tài liệu hơn tại: <http://diendangiaovientoan.vn/>

ĐỂ NHẬN TÀI LIỆU SỚM NHẤT NHÉ!