Chuyên đề 34 TẬP HỢP ĐIỂM SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Dạng toán. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

— Bước 1. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

— Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x,y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	**Kết luận tập hợp điểm** $M(x;y)$
$Ax+By+C=0.$	Là đường thẳng $d: Ax+By+C=0$.
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$	Là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0.$	Là hình tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$R_1^2\le (x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2.$	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2.
$y=ax^2+bx+c,\ (a\ne 0).$	Là một parabol có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.
$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ với $MF_1+MF_2=2a$ và $F_1F_2=2c<2a$.	Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2-b^2},(a>b>0)$.
$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ với $\left\|MF_1-MF_2\right\|=2a$ và $F_1F_2=2c>2a$.	Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$ với $a,b>0$.
$MA=MB$.	Là đường trung trực đoạng thẳng AB.

Lưu ý

Đối với bài toán dạng này, người ra đề thường cho thông qua hai cách:

— **Trực tiếp**, nghĩa là tìm tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn tính chất K.

— **Gián tiếp**, nghĩa là tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=f(z)$ mà số phức z thỏa mãn tính chất K nào đó, chẳng hạn: $f\left(z,\bar{z},|z|\right)=0,...$

Dạng 1. Tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn

Câu 1. **(Mã 102 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng:

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $\left(\overline{z}+3i\right)\left(z-3\right)=\left|z\right|^2-3\overline{z}+3iz-9i$ là số thuần ảo khi

$x^2+y^2-3x-3y=0$. Đây là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2. **(Mã 103 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}+2i\right)\left(z-2\right)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Vì $\left(\overline{z}+2i\right)\left(z-2\right)=\left[x+\left(2-y\right)i\right]\left[\left(x-2\right)+yi\right]=\left[x\left(x-2\right)-y\left(2-y\right)\right]+\left[xy+\left(x-2\right)\left(2-y\right)\right]i$ là số thuần ảo nên có phần thực bằng không do đó $x\left(x-2\right)-y\left(2-y\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=2$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 3. **(Mã 104 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 44. **B.** 52. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $w = x + yi$ với x, y là các số thực.

Ta có $w=\frac{5+iz}{1+z} \Leftrightarrow z=\frac{w-5}{i-w}$.

Lại có $\left|z\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{w-5}{i-w}\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|w-5\right|=\sqrt{2}\left|w-i\right| \Leftrightarrow \left(x-5\right)^2+y^2=2\left[x^2+\left(y-1\right)^2\right]$

$\Leftrightarrow \left(x+5\right)^2+\left(y-4\right)^2=52$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}-2i\right)\left(z+2\right)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

Ta có: $\left(\overline{z}-2i\right)\left(z+2\right)=\left(a-bi-2i\right)\left(a+bi+2\right)=a^2+2a+b^2+2b-2\left(a+b+2\right)i$

Vì $\left(\overline{z}-2i\right)\left(z+2\right)$ là số thuần ảo nên ta có $a^2+2a+b^2+2b=0\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2=2$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 5. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=22$ **B.** $r=4$ **C.** $r=5$ **D.** $r=20$

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=a+bi;w=x+yi;\left(a,b,x,y\in\mathbb{R}\right)$

Theo đề $w=\left(3+4i\right)z+i\Rightarrow x+yi=\left(3+4i\right)\left(a+bi\right)+i$

$\Leftrightarrow x+yi=\left(3a-4b\right)+\left(3b+4a+1\right)i\Leftrightarrow\begin{cases}x=3a-4b\\y=3b+4a+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3a-4b\\y-1=3b+4a\end{cases}$ Ta có

$x^2+\left(y-1\right)^2=\left(3a-4b\right)^2+\left(4a+3b\right)^2=25a^2+25b^2=25\left(a^2+b^2\right)$

Mà $|z|=4\Leftrightarrow a^2+b^2=16$. Vậy $x^2+\left(y-1\right)^2=25.16=400$

Bán kính đường tròn là $r=\sqrt{400}=20$.

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $\left(1;1\right)$ **B.** $\left(-1;1\right)$ **C.** $\left(-1;-1\right)$ **D.** $\left(1;-1\right)$

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi\ \Rightarrow\overline{z}=x-yi$

$\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$

$=z.\overline{z}+2z+2i\overline{z}+4i$

$=x^2+y^2+2\left(x+yi\right)+2i\left(x-yi\right)+4i$

$=x^2+y^2+2x+2y+\left(2x+2y+4\right)i$

$\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+2y=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm là $I\left(-1;-1\right)$.

Câu 7. **(Mã 101 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}+i\right)\left(z+2\right)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{5}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

$\left(\overline{z}+i\right)\left(z+2\right)=\left[x+\left(1-y\right)i\right]\left[\left(x+2\right)+yi\right]$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x\left(x+2\right)+y\left(y-1\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(-1;\dfrac{1}{2}\right), R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 8. **(Mã 101 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 26. **D.** 34.

Lời giải

<u>C</u>họn <u>B</u>

$w=\dfrac{4+iz}{1+z}\Leftrightarrow\left(1+z\right)w=4+iz\Leftrightarrow z\left(w-i\right)=4-w$

$\Leftrightarrow|z|.|w-i|=|4-w|\Leftrightarrow\sqrt{2}.|w-i|=|4-w|$ (*)

Gọi $w=x+yi,\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ khi đó thay vào (*) ta có:

$\sqrt{2}.|x+yi-i|=|4-x-yi|\Leftrightarrow 2\left[x^2+\left(y-1\right)^2\right]=\left(x-4\right)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+8x-4y-14=0\Leftrightarrow\left(x+4\right)^2+\left(y-2\right)^2=34$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.

Câu 9. **(Mã 102 - 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\dfrac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

<u>C</u>họn <u>A</u>

Ta có: $w=\dfrac{3+iz}{1+z}\Leftrightarrow w+wz=3+iz\Leftrightarrow w-3=\left(i-w\right)z$.

$\Rightarrow|w-3|=|\left(i-w\right)z|\Leftrightarrow|w-3|=|\left(i-w\right)||z|$.

Gọi $w=x+yi,\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Do đó, $|w-3|=|\left(i-w\right)||z|\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(1-y\right)^2}.\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+y^2=2x^2+2\left(1-y\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y-7=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ là đường tròn có tâm $I\left(-3;2\right)$ và bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

Câu 10. **(Mã 103 - 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $w=x+yi; x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$w=\dfrac{2+iz}{1+z}\Leftrightarrow w(1+z)=2+iz\Leftrightarrow w-2=z(i-w)\quad\Rightarrow|w-2|=|z(i-w)|\Leftrightarrow|w-2|=|z|\cdot|z(i-w)|$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=2\left(x^2+(1-y)^2\right)\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-2)^2=10(*)$

Từ $(*)$ suy ra điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{10}$.

Câu 11. **(THPT Gia Lộc Hải Dương -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $\mathrm{w}=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

A. $I(3;-2)$. **B.** $I(-3;2)$. **C.** $I(3;2)$. **D.** $I(-3;-2)$.

Lời giải

Cách 1.

Đặt $\mathrm{w}=x+yi$.Ta có $\mathrm{w}=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow x+yi=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow(2-i)z=(x-3)+(y+2)i$.

$\Leftrightarrow\left(4-i^2\right)z=\left[(x-3)+(y+2)i\right].(2+i)$.

$\Leftrightarrow z=\dfrac{2x-y-8}{5}+\dfrac{x+2y+1}{5}i$.

Vì $|z|=2$ nên $\left(\dfrac{2x-y-8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{x+2y+1}{5}\right)^2=4$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+4y+13=20$.

$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=20$.

Vây tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$.

Cách 2.

Đặt $z=a+bi; \mathrm{w}=x+yi$.

Vì $|z|=2$ nên $a^2+b^2=4$.

Ta có $\mathrm{w}=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow x+yi+2i-3=(2-i)(a+bi)$.

$\Leftrightarrow(x-3)+(y+2)i=(2a+b)+(2b-a)i$.

$\Rightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=(2a+b)^2+(2b-a)^2$.

$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=5\left(a^2+b^2\right)$.

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=20$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$.

Câu 12. **(ĐỀ MẪU KSNL ĐHQG TPHCM 2019)** Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $z.\overline{z}=1$ là

A. một đường thẳng. **B.** một đường tròn. **C.** một elip. **D.** một điểm.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $\overline{z}=x-yi$.

Vì $z.\overline{z}=1\Leftrightarrow(x+yi)(x-yi)=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z cần tìm là đường tròn đơn vị.

Câu 13. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức z thỏa $|z-1+2i|=3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=2z+i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(2;-3)$. **B.** $I(1;1)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức w.

Ta có $w=2z+i\Leftrightarrow z=\dfrac{w-i}{2}$.

Do đó $|z-1+2i|=3\Leftrightarrow\left|\dfrac{w-i}{2}-1+2i\right|=3\Leftrightarrow|w-2+3i|=6\Leftrightarrow MI=6$, với $I(2;-3)$.

Do đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=6$.

Câu 14. **(Chuyên Sơn La 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$ là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-i|=|(1+i)z|$.

$\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|(1+i)(x+yi)|\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|(x-y)+(x+y)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1=0\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $(0;-1)$.

Câu 15. **(Quang Trung Đống Đa Hà Nội -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z}{i+2}\right|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A. $r=1$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=2$.. **D.** $r=\sqrt{3}$..

Lời giải

Ta có: $\left|\frac{z}{i+2}\right|=1\Leftrightarrow|z|=|i+2|=\sqrt{5}$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính $r=\sqrt{5}$.

Câu 16. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=3$ là

A. đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=9$.
B. đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.
C. đường tròn tâm $I(-1;-2)$, bán kính $R=3$.
D. đường thẳng có phương trình $x+2y-3=0$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử điểm $\mathrm{M}(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có:

$|z-1-2i|=3\Leftrightarrow|(x-1)+(y-2)\mathrm{i}|=3\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=9$

Vậy điểm $\mathrm{M}(x;y)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

Câu 17. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\overline{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

A. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn tâm $I\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(2;1)$,bán kính $R=\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ điểm $A(2;0);B(0;1)$.

Lời giải

Gọi số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\overline{z}=x-yi$.

Thay vào điều kiện ta được:

$(2-z)(\overline{z}+i)$.

$=(2-x-yi)(x-yi+i)$.

$=\left[(2-x)-yi\right]\left[x+(1-y)i\right]$.

$=(2-x)x+y(1-y)+\left[(2-x)(1-y)-xy\right]i$.

$(2-z)(\overline{z}+i)$ là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$(2-x)x+y(1-y)=0$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-y=0$.

Vậy số phức $z=x+yi$ thuộc đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$.

A. Đường tròn tâm $I(0;\ 1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. **B.** Đường tròn tâm $I(1;\ 0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(-1;\ 0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. **D.** Đường tròn tâm $I(0;\ -1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$|z-i|=|(1+i)z| \Leftrightarrow a^2+(b+1)^2=2$ nên tập điểm M là Đường tròn tâm $I(0;\ -1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 19. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z-i|=4$ là đường cong có phương trình

A. $(x-1)^2+y^2=4$ **B.** $x^2+(y-1)^2=4$ **C.** $(x-1)^2+y^2=16$ **D.** $x^2+(y-1)^2=16$

lời giải:

Ta có $|z-i|=4 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=4 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=16$

Câu 20. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I(2;-1)$; $R=4$. **B.** $I(2;-1)$; $R=2$. **C.** $I(-2;-1)$; $R=4$. **D.** $I(-2;-1)$; $R=2$.

Lời giải

Giả sử số phức thỏa mãn bài toán có dạng $z=x+yi\ \left(x,\ y\in\mathbb{R}\right)$.

Suy ra $\overline{z}+2-i=x-yi+2-i=x+2-(y+1)i$.

Do đó: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4 \Leftrightarrow |x+2-(y+1)i|=4 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=16$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R=4$.

Câu 21. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=2$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là:

A. $I(-1;1), R=4$. **B.** $I(-1;1), R=2$. **C.** $I(1;-1), R=2$. **D.** $I(1;-1), R=4$.

Lời giải

Gọi $z=a+bi$, với $x,y\in\mathbb{R}$, ta có:

$|z-1+i|=2 \Leftrightarrow |x+yi-1+i|=2 \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=2$.

Câu 22. **(Chuyên KHTN 2019)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z-5+i|=2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(2;-3), R=\sqrt{2}$. **B.** $I(2;-3), R=2$. **C.** $I(-2;3), R=\sqrt{2}$. **D.** $I(-2;3), R=2$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi, \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Ta có:

$|(1+i)z-5+i|=2 \Rightarrow |(1+i)(x+yi)-5+i|=2 \Leftrightarrow |(x-y-5)+(x+y+1)i|=2$

$\Leftrightarrow (x-y-5)^2+(x+y+1)^2=4 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-8x+12y+22=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y+11=0$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(2;-3)$ và $R=\sqrt{2}$.

Câu 23. **(Chuyên KHTN -2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$. Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Có $w=\frac{z+2}{z-2i}=\frac{a+2+bi}{a+(b-2)i}=\frac{(a+2+bi)\left[a-(b-2)i\right]}{a^2+(b-2)^2}$

$=\frac{a(a+2)+b(b-2)+\left[-(a+2)(b-2)+ab\right]i}{a^2+(b-2)^2}$

w là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2)+b(b-2)=0 \ (1) \\ a^2+(b-2)^2\neq 0 \end{cases}$

Có $(1)\Leftrightarrow a^2+b^2+2a-2b=0$.

Suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019)** Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thoả mãn đồng thời $|z|=m$ và $|z-4m+3mi|=m^2$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Đặt $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có điểm biểu diễn z là $M(x;y)$.

Với $m=0$, ta có $z=0$, thoả mãn yêu cầu bài toán.

Với $m>0$, ta có:

+ $|z|=m\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0;0)$, bán kính $R=m$

+ $|z-4m+3mi|=m^2\Leftrightarrow (x-4m)^2+(y+3m)^2=m^4$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $I'(4m;-3m)$, bán kính $R'=m^2$.

+) Có duy nhất một số phức z thoả mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} II'=R+R' \\ II'=|R-R'| \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5m=m^2+m \\ 5m=|m^2-m| \end{array}\right. \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=6 \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m=0$, suy ra $m\in\{0;4;6\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị của m là 10.

Câu 25. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn: $|z+2-i|=3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức $w=1+\overline{z}$ là

A. Đường tròn tâm $I(-2;1)$ bán kính $R=3$.

B. Đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.

C. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=9$.

D. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Lời giải

Gọi $w=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$. Số phức w được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

Từ $w=1+\overline{z}$ suy ra $x+yi=1+\overline{z}\Leftrightarrow\overline{z}=(x-1)+yi\Rightarrow z=(x-1)-yi$.

Mà $|z+2-i|=3$ nên ta có:

$|(x-1)-yi+2-i|=3\Leftrightarrow|(x+1)-(y+1)i|=3\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=3\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+1)^2=3^2$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Câu 26. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2\sqrt{5}$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w=i+(2-i)z$ cùng thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó?

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=20$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=i+(2-i)z\Leftrightarrow w-i=(2-i)z$. Suy ra $|w-i|=|(2-i)z|=|2-i|.|z|=10$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w trên mặt phẳng tọa độ nằm trên đường tròn có bán kính $r=10$.

Câu 27. **Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}-2i)(z+3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng**

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{11}$ **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó:

$$w=(\overline{z}-2i)(z+3)=[x+(-y-2)i][(x+3)+yi]=x(x+3)+y(y+2)+[xy+(x+3)(-y-2)]i$$

Do w là số thuần ảo

$$\Leftrightarrow x(x+3)+y(y+2)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+3x+2y=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{13}{4}.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(-\frac{3}{2};-1\right)$, bán kính

$$R=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 28. Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. 9. **B.** 36. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Gọi $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Theo đề bài ta có:

$w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i\Leftrightarrow w-i=\left(1+i\sqrt{8}\right)z\Leftrightarrow w-i=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)-\left(1+i\sqrt{8}\right)$

$\Leftrightarrow w-i+1+i\sqrt{8}=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)\Leftrightarrow (x+1)+\left(y-1+\sqrt{8}\right)i=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+\left(y-1+\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}.2\Leftrightarrow (x+1)^2+\left(y-1+\sqrt{8}\right)^2=36$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i$ là một đường tròn có bán kính $r=6$.

Câu 29. Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=16$.

C. $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=9$. **D.** $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$.

Lời giải

+)Đặt $z=x+yi$

Khi đó $|z-5-3i|=5\Leftrightarrow|x-5+(y-3)i|=5\Leftrightarrow(x-5)^2+(y-3)^2=25\ (C)$

Gọi A, B lần lượt là 2 điểm biểu diễn số phức z_1,z_2

$\Rightarrow$ A, B thuộc đường tròn (C) có tâm I (5; 3), bán kính R = 5 và $|z_1-z_2|=8\Rightarrow AB=8$

+) Gọi H là điểm biểu diễn số phức $w'=\dfrac{z_1+z_2}{2}$

$\Rightarrow$ H là trung điểm AB $\Rightarrow AH=\dfrac{AB}{2}=4$

Xét tam giác AIH vuông tại H có AH = 4, AI = 5 nên $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\Rightarrow$ H thuộc đường tròn (C') có tâm I (5; 3), bán kính $R'=3$ **(*)**

+) Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OH}$

$\Rightarrow$ M là ảnh của H qua phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2 với O là gốc tọa độ (**)

Từ **(*)**và (**)$\Rightarrow$ tập hợp M là đường tròn (C'') là ảnh của (C') phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2

+) Giả sử đường tròn (C'') có tâm J (a; b) và bán kính R''

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2.5=10\\ b=2.3=6\\ R''=2.R'=6\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C'') là $(x-10)^2+(y-6)^2=36$

Câu 30. **(Chuyên KHTN - 2018).** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(-2;-1);R=4$. **B.** $I(-2;-1);R=2$. **C.** $I(2;-1);R=4$. **D.** $I(2;-1);I(2;-1)$.

Lời giải

Gọi số phức $z=x+iy\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Ta có:

$\left|\overline{z}+2-i\right|=4\Leftrightarrow\left|(x+2)+(-y-1)i\right|=4\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+1)^2=16$

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm $I(-2;-1)$ và có bán kính $R=4$.

Câu 31. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1-i)\overline{z}+2i$ là

A. Một đường tròn. **B.** Một đường thẳng.
C. Một Elip. **D.** Một parabol hoặc hyperbol.

Lời giải

Ta có: $w=(1-i)\overline{z}+2i\Leftrightarrow w-2i=(1-i)\overline{z}\Leftrightarrow|w-2i|=|(1-i)||\overline{z}|\Leftrightarrow|w-2i|=2\sqrt{2}$.

Do đó, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;2)$ và bán kính $2\sqrt{2}$.

Câu 32. **(Đồng Tháp 2018)** Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z+1|=|1-i-2z|$ là đường tròn (C). Tính bán kính R của đường tròn (C)

A. $R=\frac{10}{9}$. **B.** $R=2\sqrt{3}$. **C.** $R=\frac{7}{3}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$

$$|a+bi+1|=|1-i-2(a+bi)|\Leftrightarrow\sqrt{(a+1)^2+b^2}=\sqrt{(1-2a)^2+(-1-2b)^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+2a+1+b^2=1-4a+4a^2+1+4b+4b^2\Leftrightarrow a^2+b^2-2a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}=0$$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(1;-\frac{2}{3}\right)$,

Bán kính $R=\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 33. **(SGD - Hà Tĩnh - 2018)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z-i|=6$ là một đường tròn có bán kính bằng:

A. 3. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $z=a+bi$ ta có $|2z-i|=6 \Leftrightarrow |2a+2bi-i|=6 \Leftrightarrow \sqrt{4a^2+(2b-1)^2}=6$.

$4a^2+4b^2-4b-35=0 \Leftrightarrow a^2+b^2-b-\frac{35}{4}=0 \Leftrightarrow a^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=9$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R=3$.

Cách 2: $|2z-i|=6 \Leftrightarrow \left|z-\left(0+\frac{1}{2}i\right)\right|=3$. Gọi I là điểm biểu diễn số phức $0+\frac{1}{2}i$, M là điểm biểu diễn số phức z. Ta có $MI=3$. Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R=3$.

Câu 34. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z-3i+5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn trên.

A. $I(-6;-4), R=2\sqrt{5}$. **B.** $I(6;4), R=10$.
C. $I(6;4), R=2\sqrt{5}$. **D.** $I(-6;4), R=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $w=(2-i)z-3i+5 \Leftrightarrow w=(2-i)(z+1-3i)+6+4i$

$\Leftrightarrow w-6-4i=(2-i)(z+1-3i)$

$\Rightarrow |w-6-4i|=|(2-i)(z+1-3i)|=2\sqrt{5}$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$

$|w-6-4i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-6)+(y-4)i|=2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+(y-4)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số w là đường tròn tâm $I(6;4)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Câu 35. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó bằng?

A. 7. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Ta có $w=3-2i+(2-i)z \Leftrightarrow z=\frac{w-3+2i}{2-i}$. Đặt $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $z=\frac{x+yi-3+2i}{2-i}$.

Ta có $|z|=2 \Rightarrow \left|\frac{x+yi-3+2i}{2-i}\right|=2 \Leftrightarrow \frac{|x-3+(y+2)i|}{|2-i|}=2 \Leftrightarrow \frac{|x-3+(y+2)i|}{|2-i|}=2$

$\Leftrightarrow \left|x-3+\left(y+2\right)i\right|=2\left|2-i\right| \Leftrightarrow \left|x-3+\left(y+2\right)i\right|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(x-3\right)^2+\left(y+2\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+\left(2-i\right)z$ là một đường tròn có bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Câu 36. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-5-3i\right|=5$, đồng thời $\left|z_1-z_2\right|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

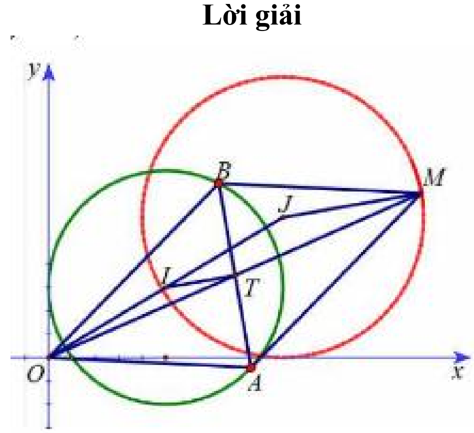
A. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

B. $\left(x-10\right)^2+\left(y-6\right)^2=36$.

C. $\left(x-10\right)^2+\left(y-6\right)^2=16$.

D. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$.

Lời giải



Gọi A, B, M là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w. Khi đó A, B thuộc đường tròn $\left(C\right):\left(x-5\right)^2+\left(y-3\right)^2=25$ và $AB=\left|z_1-z_2\right|=8$.

$\left(C\right)$ có tâm $I\left(5;3\right)$ và bán kính $R=5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT=\sqrt{IA^2-TA^2}=3$.

Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J\left(10;6\right)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM, do đó $JM=2IT=6$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $\left(x-10\right)^2+\left(y-6\right)^2=36$.

Câu 37. **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Xét số phức z thỏa mãn $\left|z-3i+4\right|=3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(12-5i)\overline{z}+4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=13$. **B.** $r=39$. **C.** $r=17$ **D.** $r=3$.

Lời giải

Gọi số phức $w=x+yi$, với $x,y\in R$, biểu diễn bởi $M(x;y)$

$w=(12-5i)\overline{z}+4i \Leftrightarrow x+yi=(12-5i)\overline{z}+4i \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{x+(y-4)i}{12-5i}$

$\Rightarrow z=\dfrac{x-(y-4)i}{12+5i}$

Ta có : $\left|z-3i+4\right|=3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-(y-4)i}{12+5i}-3i+4\right|=3$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{x+63-(y+12)i}{12+5i}\right|=3 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(x+63)^2+(y+12)^2}}{\sqrt{12^2+5^2}}=3 \Leftrightarrow (x+63)^2+(y+12)^2=39^2$

Vậy $r=39$.

Câu 38. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3\right|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B.** $r=1$. **C.** $r=4$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $w=x+yi$.

$w=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i \Leftrightarrow x+yi=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i \Leftrightarrow z=\dfrac{x-1+\left(y+2\right)i}{1-\sqrt{3}i}$

$\Leftrightarrow z=\left[x-1+\left(y+2\right)i\right]\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)=\dfrac{\left(x-1\right)-\sqrt{3}\left(y+2\right)}{4}+\dfrac{\left(y+2\right)+\left(x-1\right)\sqrt{3}}{4}i$

$\Rightarrow z-3=\dfrac{\left(x-13\right)-\sqrt{3}\left(y+2\right)}{4}+\dfrac{\left(y+2\right)+\left(x-1\right)\sqrt{3}}{4}i$

$\left|z-3\right|=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\left(x-13\right)-\sqrt{3}\left(y+2\right)}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\left(y+2\right)+\left(x-1\right)\sqrt{3}}{4}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \left(x-13\right)^2-2\sqrt{3}\left(x-13\right)\left(y+2\right)+3\left(y+2\right)^2+\left(y+2\right)^2+2\left(y+2\right)\left(x-1\right)\sqrt{3}+3\left(x-1\right)^2=16$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x+\left(4+6\sqrt{3}\right)y+12\sqrt{3}+43=0$

Bán kính $r=\sqrt{4^2+\left(-2-3\sqrt{3}\right)^2-12\sqrt{3}-43}=2$.

Câu 39. **(THPT Lệ Thủy-Quảng Bình 2017)** Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy.

A. $m=-5;\ m=3$. **B.** $m=5;\ m=-3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi$, $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó.

$\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4 \Leftrightarrow \left|x+yi+m-1+\sqrt{3}i\right|=4$.

$\Leftrightarrow \left|\left(x+m-1\right)+\left(y+\sqrt{3}\right)i\right|=4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+m-1\right)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}=4$.

$\Leftrightarrow \left(x+m-1\right)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=16$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I\left(1-m;-\sqrt{3}\right)$ và bán kính $R=4$. Để đường tròn này tiếp xúc với trục Oy thì $\left|1-m\right|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-m=4\\1-m=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-3\\m=5\end{array}\right.$.

Vậy $m=5; m=-3$.

Câu 40. **(Cụm 4 HCM 2017** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(1-i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B.** $r=4$. **C.** $r=\sqrt{2}$. **D.** $r=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$w=(1-i)z+i \Leftrightarrow z=\dfrac{w-i}{1-i}$; đặt $w=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow z=\dfrac{x+yi-i}{1-i}$. Ta có $|z-2|=2 \Leftrightarrow\Rightarrow \left|\dfrac{x+yi-i}{1-i}-2\right|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(x+yi-i)(1+i)}{2}-2\right|=2$.

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{(x+yi-i)(1+i)}{2}-2\right|=2 \Leftrightarrow |x+xi+yi-y-i+1-4|=4 \Leftrightarrow |x-y-3+(x+y-1)i|=4$

$\Leftrightarrow (x-y-3)^2+(x+y-1)^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+9-2xy+6y-6x+x^2+y^2+1+2xy-2y-2x=16$.

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-8x+4y-6=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-3=0$

Đường tròn có bán kính là $R=\sqrt{2^2+1^2+3}=2\sqrt{2}$.

Câu 41. **(Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội –2018)** Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\overline{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{R})$ và $w=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

$(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=25 \Leftrightarrow [a-2+(b+1)i][a-2-(b+1)i]=25$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2=25$ (1)

Theo giả thiết: $w=2\overline{z}-2+3i \Leftrightarrow x+yi=2(a-bi)-2+3i \Leftrightarrow x+yi=2a-2+(3-2b)i$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2a-2 \\ y=3-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+2}{2} \\ b=\dfrac{3-y}{2} \end{cases} \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được: $\left(\dfrac{x+2}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{3-y}{2}+1\right)^2=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=100$.

Suy ra, tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $R=10$.

Vậy $a+b+c=17$.

Câu 42. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-(2-3i)|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường elip.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết $\left|z-(2-3i)\right| \le 2 \Leftrightarrow \left|x+yi-(2-3i)\right| \le 2$.

$\Leftrightarrow \left|(x-2)+(y+3)i\right| \le 2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 \le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một hình tròn.

Câu 43. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+i+1\right| = \left|\bar{z}-2i\right|$ và $\left|z\right| = 1$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$ và $M(z) = M(x;y)$

$$\begin{cases} \left|z+i+1\right| = \left|\bar{z}-2i\right| \\ \left|z\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2 = x^2+(y+2)^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+1 = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng $\Delta: -x+y+1=0$ và đường tròn $x^2+y^2=1$ có tâm $O(0;0), R=1$

Ta có $d(O,\Delta) = \dfrac{\left|-0+0+1\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1 = R$

Suy ra đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm hay có hai số phức z thỏa mãn.

Câu 44. **(SGD Điện Biên - 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(z-4i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $(-1;-2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $(z-4i)(\bar{z}+2) = x^2+y^2+2x-4y+(2y-4x-8)i$.

$(z-4i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 = 5$.

Tập hợp các điểm biễn diễn của số phức z là mộ đường tròn có tâm $I(-1;2)$,bán kính $R=\sqrt{5}$.

Câu 45. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\bar{z}+1+2i\right| = 1$ là

A. đường tròn $I(1;2)$, bán kính $R=1$. **B.** đường tròn $I(-1;-2)$, bán kính $R=1$.

C. đường tròn $I\left(-1;2\right)$, bán kính $R=1$. **D.** đường tròn $I\left(1;-2\right)$, bán kính $R=1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi;\left(x,y\in R\right)$

Khi đó: $\left|\overline{z}+1+2i\right|=1\Leftrightarrow\left|\left(x+1\right)+\left(-y+2\right)i\right|=1\Leftrightarrow\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(-y+2\right)^2}=1$

$\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $I\left(-1;2\right)$, bán kính $R=1$.

Câu 46. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho số phức z thảo mãn $\left(z+1-3i\right)\left(\overline{z}+1+3i\right)=25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính c. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(z+1-3i\right)\left(\overline{z}+1+3i\right)=25\Leftrightarrow z.\overline{z}+\left(z+\overline{z}\right)+\left(z-\overline{z}\right)3i=15$ $(*)$.

Đặt $z=x+yi$, $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ khi đó $\begin{cases}z.\overline{z}=x^2+y^2\\ z+\overline{z}=2x\\ z-\overline{z}=2yi\end{cases}$.

Thay vào $(*)$ ta được $x^2+y^2+2x-6y-15=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn z thuộc đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(-1;3\right)$ và bán kính $R=5$.

Suy ra $\begin{cases}a=-1\\ b=3\\ c=5\end{cases}$. Vậy $a+b+c=7$.

Cách 2:

Đặt $z_0=-1+3i$ và $R=5$.

Ta có $\left|z-z_0\right|\left|\overline{z}-\overline{z}_0\right|=\left|z-z_0\right|\left|\overline{z-z_0}\right|=\left|z-z_0\right|^2$.

Suy ra $\left|z-z_0\right|\left|\overline{z}-\overline{z}_0\right|=R^2\Leftrightarrow\left|z-z_0\right|^2=R^2\Leftrightarrow\left|z-z_0\right|=R$, với $R>0$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm $I\left(-1;3\right)$, bán kính $R=5$.

Suy ra $\begin{cases}a=-1\\ b=3\\ c=5\end{cases}$. Vậy $a+b+c=7$.

Câu 47. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R. Tính R.

A. $R=8$. **B.** $R=2$. **C.** $R=16$. **D.** $R=4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $w=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$.

$w=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z+2$

$\Rightarrow x+yi=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z+2\Leftrightarrow x+yi=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)\left(z-1\right)+1+\sqrt{3}\,i+2$

$\Leftrightarrow x-3+\left(y-\sqrt{3}\right)i=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)\left(z-1\right)$

$\Rightarrow\left|x-3+\left(y-\sqrt{3}\right)i\right|=\left|\left(1+\sqrt{3}\,i\right)\left(z-1\right)\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}=\left|1+\sqrt{3}\,i\right|\left|z-1\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}=4$

$\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=16.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z+2$ là đường tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$, bán kính bằng $R=4$..

Câu 48. Cho số phức z thoả mãn $|z-1|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=\left(2+3i\right)\overline{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $5\sqrt{13}$. **B.** $5\sqrt{17}$. **C.** $5\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $|z-1|=\left|\overline{z-1}\right|=\left|\overline{z}-1\right|=5$.

Khi đó: $w=\left(2+3i\right)\overline{z}+3+4i\Leftrightarrow w=\left(2+3i\right)\left(\overline{z}-1\right)+3+4i-2-3i\Leftrightarrow w-1-i=\left(2+3i\right)\left(\overline{z}-1\right)$

$\Leftrightarrow|w-1-i|=|2+3i|.\left|\overline{z}-1\right|=5\sqrt{13}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn bán kính $R=5\sqrt{13}$.

Câu 49. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=\sqrt{5}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z+i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=5$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$w=(1+2i)z+i\Leftrightarrow w-i=(1+2i)z\Rightarrow|w-i|=|(1+2i)z|$

$\Rightarrow|w-i|=|(1+2i)|.|z|\Rightarrow|w-i|=5$. Gọi $w=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó

$|w - i| = 5 \Leftrightarrow |x + yi - i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 25.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính $r = 5$.

Câu 50. Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1-i)(z+1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Tổng $a+b+R$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Đặt $w = a + bi$ với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $w = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow a + bi = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow a + (b+1)i = (1-i)z + 1 - i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{a - 1 + (b+2)i}{1-i} = \dfrac{[(a-1)+(b+2)i](1+i)}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{a-b-3+(a+b+1)i}{2}$.

Vì $|z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(a-b-3)^2}{4} + \dfrac{(a+b+1)^2}{4}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-b-3)^2 + (a+b+1)^2 = 32$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a + 4b - 11 = 0$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 4$.

Từ đó suy ra $a = 1, b = -2, R = 4 \Rightarrow a + b + R = 1 + (-2) + 4 = 3$.

Cách 2: Đặt $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $w = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow w + i = (1-i)(z+1) \Leftrightarrow w + i = (1-i)z + 1 - i$

$\Leftrightarrow w - 1 + 2i = (1-i)z$.

Lấy môđun hai vế ta được $|w - 1 + 2i| = |(1-i)z| \Leftrightarrow |x + yi - 1 + 2i| = |1-i||z|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 4$.

Từ đó suy ra $a = 1, b = -2, R = 4 \Rightarrow a + b + R = 1 + (-2) + 4 = 3$.

Câu 51. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = \overline{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|\overline{z}| = |z| = 3$.

Từ $w = \overline{z} + i \Rightarrow w - i = \overline{z} \Rightarrow |w - i| = |\overline{z}| \Rightarrow |w - i| = 3$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$.

Dạng 2. Tập hợp điểm biểu diễn là đường thẳng

Câu 52. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có $|z+2|=|z-i| \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow 4x+4=-2y+1 \Leftrightarrow 4x+2y+3=0$

Do đó ta chọn đáp án **A.**

Câu 53. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|z+2|$. Trong mặt phẳng phức, quỹ tích điểm biểu diễn các số phức z.

A. là đường thẳng $3x+y+1=0$. **B.** là đường thẳng $3x-y+1=0$.
C. là đường thẳng $3x+y-1=0$. **D.** là đường thẳng $3x-y-1=0$.

Lời giải

Giả sử số phức z có dạng: $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Ta có: $|z-1+i|=|z+2| \Leftrightarrow |x+yi-1+i|=|x+yi+2| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x+2)+yi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2$

$\Leftrightarrow 6x-2y+2=0 \Leftrightarrow 3x-y+1=0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $3x-y+1=0$.

Câu 54. Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2+i|=|\overline{z}-3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=x+1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=-x-1$. **D.** $y=x-1$.

Lời giải

$|z+2+i|=|\overline{z}-3i| \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=x^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow 4x-4y-4=0 \Leftrightarrow y=x-1$.

Câu 55. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $x-2y+1=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $x-2y=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có: $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i| \Leftrightarrow |x+yi-1+2i|=|x-yi+1+2i|$

$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i|=|(x+1)+(2-y)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(2-y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-4y+4 \Leftrightarrow 4x-8y=0 \Leftrightarrow x-2y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x-2y=0$.

Câu 56. Xét các số phức z thỏa mãn $z\left(\bar{z}-2+i\right)+4i-1$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng d. Diện tích tam giác giới hạn bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ \left(a,b\in R\right)$.

Khi đó $z\left(\bar{z}-2+i\right)+4i-1=\left(a+bi\right)\left(a-bi-2+i\right)+4i-1=\left(a+bi\right).\left[\left(a-2\right)+\left(1-b\right)i\right]+4i-1$

$=a\left(a-2\right)-b\left(1-b\right)+\left[a\left(1-b\right)+b\left(a-2\right)\right]i+4i-1$

$=a\left(a-2\right)-b\left(1-b\right)-1+\left(a-2b+4\right)i$.

+ $z\left(\bar{z}-2+i\right)+4i-1$ là số thực suy ra $a-2b+4=0$.

+ Số phức z có điểm biểu diễn $M\left(a;b\right)\to M\in d: x-2y+4=0$.

+ Đường thẳng d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại $A\left(-4;0\right)$ và $B\left(0;2\right)\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.OA.OB=4$.

Câu 57. **(Đề Thi Công Bằng KHTN -2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|z+2\right|=\left|z-i\right|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, với a,b thuộc $\mathbb{R}$. Khi đó, $M(\mathrm{a};\mathrm{b})$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $\left|z+2\right|=\left|z-i\right| \Leftrightarrow \left|a+2+bi\right|=\left|a+(\mathrm{b}-1)i\right| \Leftrightarrow \sqrt{(\mathrm{a}+2)^2+b^2}=\sqrt{a^2+(\mathrm{b}-1)^2}$

$\Leftrightarrow (\mathrm{a}+2)^2+b^2=a^2+(\mathrm{b}-1)^2 \Leftrightarrow 4a+2b+3=0 \Leftrightarrow$ điểm $M(\mathrm{a};\mathrm{b})$ thuộc đường thẳng $4x+2y+3=0$

Vậy, tập hợp các điểm M thỏa mãn bài ra là đường thẳng $4x+2y+3=0$.

Câu 58. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn: $\left|z-1\right|=\left|z-2+3i\right|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A. Đường tròn tâm $I\left(1;2\right)$, bán kính $R=1$.

B. Đường thẳng có phương trình $2x-6y+12=0$.

C. Đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.

D. Đường thẳng có phương trình $x-5y-6=0$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$; (x, $y\in\mathbb{R}$).

Ta có: $\left|z-1\right|=\left|z-2+3i\right| \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+y^2=\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2 \Leftrightarrow x-3y-6=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.

Câu 59. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$.

A. $d:6x+4y-3=0$. **B.** $d:x+2y-1=0$.
C. $(C):x^2+y^2-2x+2y+1=0$. **D.** $(C):x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R}) \\ z\neq 2+i \end{cases}$, ta có: $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13 \Leftrightarrow \left|(12-5i)z+17+7i\right|=13|z-2-i|$

$\Leftrightarrow \left|(12-5i)(z+1+i)\right|=13|z-2-i| \Leftrightarrow |12-5i||z+1+i|=13|z-2-i| \Leftrightarrow 13|z+1+i|=13|z-2-i|$

$\Leftrightarrow |z+1+i|=|z-2-i| \Leftrightarrow |x+yi+1+i|=|x+yi-2-i| \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6x+4y-3=0$.(thỏa điều kiện $z\neq 2+i$)

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $6x+4y-3=0$.

Câu 60. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2-i-|z|(1-i)=0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x-y+5=0$. **B.** $x-y+2=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x+y+1=0$.

Lời giải

Ta có $z+2-i-|z|(1-i)=0 \Leftrightarrow x+yi+2-i-(1-i)\sqrt{x^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow x+2-\sqrt{x^2+y^2}+\left(y-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2-\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ y-1+\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow x+2-\sqrt{x^2+y^2}+y-1+\sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x+y+1=0$.

Do đó M thuộc đường thẳng $x+y+1=0$.

Câu 61. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2+(\bar{z})^2+2|z|^2\right|=16$ là hai đường thẳng d_1,d_2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1,d_2 là bao nhiêu?

A. $d(d_1,d_2)=1$. **B.** $d(d_1,d_2)=6$. **C.** $d(d_1,d_2)=2$. **D.** $d(d_1,d_2)=4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi(x,y\in R)$

Ta có: $\left|z^2+(\bar{z})^2+2|z|^2\right|=16 \Leftrightarrow \left|x^2+2xyi-y^2+x^2-2xyi-y^2+2x^2+2y^2\right|=16$

$\Leftrightarrow |4x^2|=16 \Leftrightarrow x=\pm 2 \Rightarrow d(d_1,d_2)=4$

Ở đây lưu ý hai đường thẳng x = 2 và x = -2 song song với nhau.

Câu 62. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=|\overline{z}-3+4i|$ là?

A. Parabol $y^2=4x$. **B.** Đường thẳng $6x+8y-25=0$.

C. Đường tròn $x^2+y^2-4=0$. **D.** Elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ và $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của z.

Ta có $\begin{cases}|z|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \overline{z}-3+4i=x-iy-3+4i=\left(x-3\right)\left(-y+4\right)i\end{cases}$.

$\Rightarrow|\overline{z}-3+4i|=\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(-y+4\right)^2}$.

Vậy $|z|=|\overline{z}-3+4i|\Leftrightarrow x^2+y^2=\left(x-3\right)^2+\left(-y+4\right)^2\Leftrightarrow 6x+8y-25=0$.

Câu 63. Cho số phức z thỏa: $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là.

A. Một đường thẳng có phương trình: $-20x+32y+47=0$.

B. Một đường có phương trình: $3y^2+20x+2y-20=0$.

C. Một đường thẳng có phương trình: $20x+16y+47=0$.

D. Một đường thẳng có phương trình: $20x-16y-47=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

Ta có.

$2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$

$\Leftrightarrow 2|\left(x-2\right)+\left(y+3\right)i|=|\left(-1-2x\right)+\left(2y+2\right)i|$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2}=\sqrt{\left(-1-2x\right)^2+\left(2y+2\right)^2}$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2+y^2-4x+6y+13\right)=4x^2+4y^2+4x+8y+5$.

$\Leftrightarrow 20x-16y-47=0$

Vậy tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$ là đường thẳng $20x-16y-47=0$.

Câu 64. **(SGD Hưng Yên 2019)** Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biễu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

A. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

B. Trục Ox.

C. Trục Oy.

D. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$, bỏ đi điểm $O\left(0;0\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$. Số phức z được biểu diễn bởi $M\left(x;y\right)$.

Ta có: $z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$.

Vì z^2 là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0, tức là $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow y^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

Câu 65. **(SGD Bến Tre 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=|\bar{z}+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $4x-2y-1=0$. **B.** $4x-6y-1=0$. **C.** $4x+2y-1=0$. **D.** $4x-2y+1=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$.

$\Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

$|z-2-i|=|\bar{z}+2i| \Rightarrow |x+yi-2-i|=|x-yi+2i|$

$\Leftrightarrow |x-2+(y-1)i|=|x+(2-y)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(2-y)^2}$

$\Leftrightarrow -4x+4-2y+1=-4y+4 \Leftrightarrow 4x-2y-1=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng $4x-2y-1=0$.

Câu 66. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2+z|=|z-i|$.

A. Đường thẳng $4x+2y+3=0$. **B.** Điểm $M(-1;1/2)$.

C. Đường thẳng $2x+y+3=0$. **D.** Đường thẳng $4x+2y-3=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$, $x,y\in\mathbb{R}$ là điểm biểu diễn số phức z. Suy ra $z=x+iy$.

$|2+z|=|z-i| \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow 4x+2y+3=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $4x+2y+3=0$.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $2|z-2+3i|=|2i-1-2\bar{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng có phương trình:

A. $20x-16y-47=0$. **B.** $20x+6y-47=0$. **C.** $20x+16y+47=0$. **D.** $20x+16y-47=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

$2|z-2+3i|=|2i-1-2\bar{z}| \Rightarrow 2|x+yi-2+3i|=|2i-1-2(x-yi)|$

$\Leftrightarrow 2\left|x-2+\left(y+3\right)i\right|=\left|-2x-1+\left(2y+2\right)i\right|$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2}=\sqrt{\left(-2x-1\right)^2+\left(2y+2\right)^2}$

$\Leftrightarrow 4\left[\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2\right]=\left(-2x-1\right)^2+\left(2y+2\right)^2$

$\Leftrightarrow -16x+24y+16+36=4x+8y+1+4$

$\Leftrightarrow 20x-16y-47=0$.

Câu 68. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho số phức thỏa mãn $\left|z-i\right|=\left|z-1+2i\right|$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=\left(2-i\right)z+1$ trên mặt phẳng phức là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x+7y+9=0$. **B.** $x+7y-9=0$. **C.** $x-7y-9=0$. **D.** $x-7y+9=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\omega=\left(2-i\right)z+1\Leftrightarrow z=\dfrac{\omega-1}{2-i}$.

Gọi $\omega=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\left|z-i\right|=\left|z-1+2i\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\omega-1}{2-i}-i\right|=\left|\dfrac{\omega-1}{2-i}-1+2i\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\left(x-2\right)+\left(y-2\right)i}{2-i}\right|=\left|\dfrac{\left(x-1\right)+\left(y+5\right)i}{2-i}\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2}=\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y+5\right)^2}\Leftrightarrow x+7y+9=0.$

Kết luận: Tập hợp điểm biểu diễn số phức ω trên mặt phẳng phức là một đường thẳng có phương trình $x+7y+9=0.$

Dạng 3. Tập hợp điểm biểu diễn là đường conic

Câu 69. **(Sở Bình Phước 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|$ là

A. Một điểm **B.** Một đường tròn **C.** Một đường thẳng **D.** Một Parabol

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\ \left(x,\ y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\overline{z}=x-yi$.

Khi đó $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|\Leftrightarrow 2\left|x+\left(y-1\right)i\right|=\left|\left(2y+2\right)i\right|$

$\Leftrightarrow 4\left[x^2+\left(y-1\right)^2\right]=\left(2y+2\right)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-8y+4=4y^2+8y+4$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}$ là một Parabol.

Câu 70. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường elip. **B.** Một đường parabol.
C. Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

Xét hai điểm $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$, khi đó theo giả thiết:

$|z+2|+|z-2|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=4$.

Mà $F_1F_2=4$, nên $MF_1+MF_2=F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn của z chính là đoạn thẳng F_1F_2.

Câu 71. Xét các số phức z thoả mãn $\dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{z}{2}$ là parabol có toạ độ đỉnh

A. $I\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$. **C.** $I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi$ $(a,b\in R)$.

Khi đó $\dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}=\dfrac{a-1+(b+1)i}{1+2ai}=\dfrac{\left[a-1+(b+1)i\right](1-2ai)}{1+4a^2}$

$=\dfrac{a-1+2a(b+1)+\left[-2a(a-1)+b+1\right]i}{1+4a^2}$.

$\dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực suy ra $-2a(a-1)+b+1=0 \Leftrightarrow b=2a^2-2a-1 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2}=4.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-2.\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}$.

Số phức $\dfrac{z}{2}$ có điểm biểu diễn $M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2}\right) \Rightarrow$ quỹ tích M là parabol có phương trình

$y=4x^2-2x-\dfrac{1}{2}$

Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{z}{2}$ là parabol có toạ độ đỉnh $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$.

Câu 72. **(Chuyên KHTN 2019)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z+2-i|+|z-4-i|=10 \Leftrightarrow |x+2+(y-1)i|+|x-4+(y-1)i|=10.$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$ (*)

Đặt $A(-2;1), B(4;1) \Rightarrow AB=\sqrt{(4+2)^2+0^2}=6.$

Khi đó phương trình (*) trở thành: $MA+MB=10.$

Khi đó tập hợp những điểm M thỏa mãn phương trình (*) là một elip với.

+ Độ dài trục lớn $2a=10 \Rightarrow a=\frac{10}{2}=5.$

+ Tiêu cự $2c=AB=6 \Rightarrow c=\frac{6}{2}=3.$

+ Độ dài trục bé $2b$ với $b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16 \Rightarrow b=4.$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$ là diện tích Elip trên: $S=\pi ab=\pi 4.5=20\pi$.

Câu 73. **(CHUYÊN VINH 2017)** Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3|z+i|=|2\overline{z}+-z+3i|$. Tìm tập hợp tất cả những điểm M như vậy.

A. Một đường thẳng. **B.** Một parabol. **C.** Một elip. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z=x+yi$ có điểm biểu diễn là $M(x,y)$ trên mặt phẳng tọa độ:

Theo đề bài ta có: $3|z+i|=|2\overline{z}-z+3i| \Leftrightarrow |3(x+yi)+3i|=|2(x-yi)-(x+yi)+3i| \Leftrightarrow$.

$|3x+(3y+3)i|=|x+(3-3y)| \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+(3y+3)^2}=\sqrt{x^2+(3-3y)^2} \Leftrightarrow$.

$9x^2+(3y+3)^2=x^2+(3-3y)^2 \Leftrightarrow 8x^2+36y=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{9}x^2.$

Vậy tập hợp các điểm $M(x,y)$ biểu diễn số phức z theo yêu cầu của đề bài là Một parabol $y=-\frac{2}{9}x^2.$

Câu 74. **(Sở Bình Phước 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=8$. Trong mặt phẳng phức tập hợp những điểm M biểu diễn cho số phức z là?

A. $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=64$. **B.** $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

C. $(E):\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=8$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y)$, $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$.

Ta có $|z+2|+|z-2|=8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=8 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=8$.

Do đó điểm $M(x;y)$ nằm trên elip (E) có $2a=8 \Leftrightarrow a=4,$ ta có $F_1F_2=2c \Leftrightarrow 4=2c \Leftrightarrow c=2$.

Ta có $b^2=a^2-c^2=16-4=12$. Vậy tập hợp các điểm M là elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

Câu 75. **(THPT Nguyễn Trãi 2017)** Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|$ là hình gì?

A. Một đường tròn. **B.** Một đường Parabol.
C. Một đường Elip. **D.** Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B

☑ Đặt $z=x+yi\Rightarrow \overline{z}=x-yi$ điểm biểu diễn của z là $M\left(x;y\right)$. Ta có:

$2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|\Leftrightarrow 2\left|x+yi-i\right|=\left|\left(x+yi\right)-\left(x-yi\right)+2i\right|$

$\Leftrightarrow 2\left|x+\left(y-1\right)i\right|=\left|2\left(y+1\right)i\right|\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}=2\left|y+1\right|\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường Parabol.

Câu 76. **(THPT Hai Bà Trưng- Huế 2017)** Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z+4\right|+\left|z-4\right|=10$..

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

B. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M\left(x;y\right)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{\left(x+4\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}=12$.

C. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O\left(0;0\right)$ và có bán kính $R=4$.

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$..

Gọi $A\left(4;0\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=4$..

Gọi $B\left(-4;0\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-4$..

Khi đó: $\left|z+4\right|+\left|z-4\right|=10\Leftrightarrow MA+MB=10.$(*).

Hệ thức trên chứng tỏ tập hợp các điểm M là elip nhận A,B là các tiêu điểm.

Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\left(a>b>0,a^2=b^2+c^2\right)$.

Từ (*) ta có: $2a=10\Leftrightarrow a=5$..

$AB=2c\Leftrightarrow 8=2c\Leftrightarrow c=4\Rightarrow b^2=a^2-c^2=9$.

Vậy quỹ tích các điểm M là elip: $\left(E\right):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

Câu 77. **(Chuyên Bến Tre 2017)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z+4\right|+\left|z-4\right|=10$. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường có phương trình.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn B

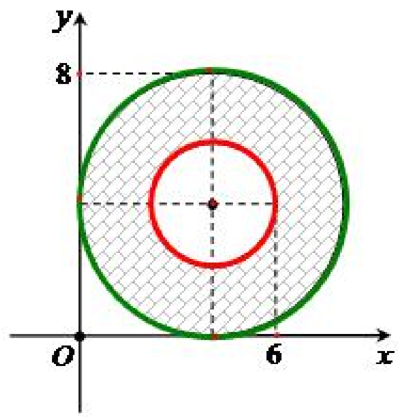
Gọi $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức $z=x+yi\ \left(x,y\in R\right)$.

Từ giả thiết ta có $\sqrt{\left(x+4\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}=10\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$ với $F_1\left(-4;0\right)$, $F_2\left(4;0\right)$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Dạng 4. Tập hợp điểm biểu diễn là một miền

Câu 78. Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?



A. $6\le\left|z\right|\le 8$. **B.** $2\le\left|z+4+4i\right|\le 4$. **C.** $2\le\left|z-4-4i\right|\le 4$. **D.** $4\le\left|z-4-4i\right|\le 16$.

Lời giải

Dễ thấy điểm $I\left(4;4\right)$ là tâm của hai đường tròn.

Đường tròn nhỏ có phương trình là: $\left(x-4\right)^2+\left(y-4\right)^2=4$.

Đường tròn to có phương trình là: $\left(x-4\right)^2+\left(y-4\right)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa mãn đề bài là $2\le\left|z-4-4i\right|\le 4$.

Câu 79. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $\left|z-\left(2-3i\right)\right|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường Elip.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo bài ra: $\left|z-\left(2-3i\right)\right|\le 2\Leftrightarrow\left|x+yi-\left(2-3i\right)\right|\le 2$

$\Leftrightarrow\left|x-2+(y+3)i\right|\le 2\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2}\le 2\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2\le 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là hình tròn tâm $I\left(2;-3\right)$, bán kính $R=2$.

Câu 80. Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $\left|z+4-4i\right|\le 2$ là

A. Hình tròn tâm $I\left(4;-4\right)$, bán kính $R=4$. **B.** Hình tròn tâm $I\left(4;-4\right)$, bán kính $R=2$.

C. Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=2$. **D.** Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=4$.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi$; $(x;y\in\mathbb{R})$.

$|z+4-4i|\le 2$.

$\Rightarrow |x+yi+4-4i|\le 2$

$\Leftrightarrow |x+4+(y-4)i|\le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y-4)^2}\le 2$

$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-4)^2\le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z+4-4i|\le 2$ là hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=2$.

Câu 81. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội -2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích của hình phẳng đó.

A. $S=25\pi$. **B.** $S=8\pi$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Lời giải

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z;

$A(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức $-1+3i$.

Khi đó, $AM=|z-3i+1|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}$

$\Rightarrow 3^2\le(a+1)^2+(b-3)^2\le 25$, tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn $(A;3)$ và $(A;5)$, kể cả các điểm nằm trên hai đường tròn này.

$S=25\pi-9\pi=16\pi(dvdt)$.

Câu 82. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong mặt phẳng Oxy cho số phức z có điểm biểu diến nằm trong cung phần tư thứ (I). Hỏi điểm biểu diễn số phức $w=\frac{1}{iz}$ nằm trong cung phần tư thứ mấy?

A. Cung (IV). **B.** Cung (II). **C.** Cung (III). **D.** Cung (I).

Lời giải

Vì số phức z có điểm biểu diễn nằm trong cung phần tư thứ (I) nên gọi $z=a+bi,(a>0,b>0)$.

$\Rightarrow w=\frac{1}{iz}=\frac{1}{i(a+bi)}=\frac{1}{-b+ai}=\frac{-b-ai}{a^2+b^2}=\frac{-b}{a^2+b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}i$

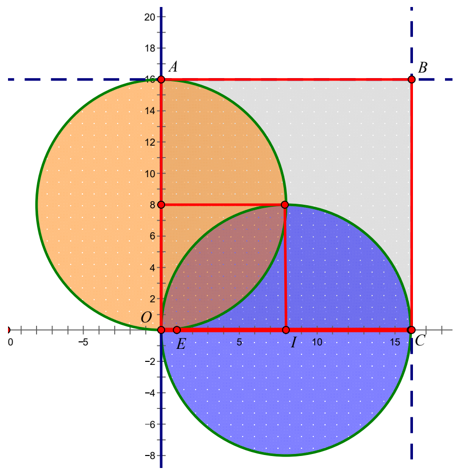
Do $a>0,b>0\Rightarrow\frac{-b}{a^2+b^2}<0,-\frac{a}{a^2+b^2}<0$.

Vậy điểm biểu diễn w nằm trong cung phần tư thứ (III).

Câu 83. **(Sở Nam Định - 2018)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{\bar{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tính diện tích S của (H)

A. $S=32(6-\pi)$. **B.** $S=16(4-\pi)$. **C.** $S=256.$. **D.** $S=64\pi.$.

Lời giải.



Gọi $z=x+yi,\ x,y\in R$ khi đó điểm biểu diễn của z là $M(x;y)$.

$\frac{z}{16}=\frac{x+yi}{16}=\frac{x}{16}+\frac{y}{16}i$ theo giả thiết $\begin{cases}0\le \frac{x}{16}\le 1\\ 0\le \frac{y}{16}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 16\\ 0\le y\le 16\end{cases}$ (I)

$$\frac{16}{\bar{z}}=\frac{16}{x-yi}=\frac{16(x+yi)}{x^2+y^2}=\frac{16x}{x^2+y^2}+\frac{16y}{x^2+y^2}i$$

Theo giả thiết $\begin{cases}0\le \frac{16x}{x^2+y^2}\le 1\\ 0\le \frac{16y}{x^2+y^2}\le 1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}0\le 16x\le x^2+y^2\\ 0\le 16y\le x^2+y^2\end{cases}$ S_3

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0, y\ge 0\\ x^2+y^2-16x\ge 0\\ x^2+y^2-16y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0, y\le 0\\ (x-8)^2+y^2\ge 64 \text{ (II)}\\ x^2+(y-8)^2\ge 64\end{cases}$$

Gọi S_1 là diện tích hình vuông OABC có cạnh bằng 16, $S_1=16^2=256$.

S_2 là diện tích hình tròn có bán kính bằng 8.

S_3 là diện tích phần giao của hai nửa đường tròn như hình vẽ.

$$S=S_1-S_2+S_3=256-64\pi+2\left(\frac{1}{4}\pi 8^2-\frac{1}{2}8^2\right)$$

Vậy $S=256-64\pi+32\pi-64=32\left(6-\pi\right)$.

Câu 84. **(Sở Yên Bái - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3\le\left|z-3i+1\right|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

A. $S=4\pi$. **B.** $S=25\pi$. **C.** $S=8\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Lời giải

Gọi $z=a+bi\ \left(a;b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $3\le\left|z-3i+1\right|\le 5\Leftrightarrow 3\le\left|a+bi-3i+1\right|\le 5\Leftrightarrow 9\le\left(a-3\right)^2+\left(b+1\right)^2\le 25$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn có tâm $I\left(3;-1\right)$ bán kính lần lượt là 3 và 5.

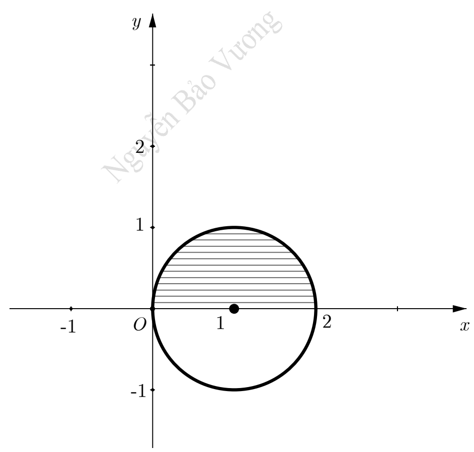
Vì vậy $S=\pi\left(5^2-3^2\right)\ =\ 16\pi$.

Câu 85. **(Sở Hà Tĩnh 2017)** Biết số phức z thõa mãn $\left|z-1\right|\le 1$ và $z-\overline{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng biểu diễn số phức z có diện tích là:

A. 2π. **B.** π^2. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** π.

Lời giải

Chọn C



Đặt $z=x+yi\Rightarrow\overline{z}=x+yi$ khi đó ta có:

$\left|z-1\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\left(x+yi\right)-1\right|\le 1$.

$\Leftrightarrow\left|\left(x-1\right)+yi\right|\le 1\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+y^2\le 1\ \left(1\right)$.

$z-\overline{z}=\left(x+yi\right)-\left(x-yi\right)=2yi$ có phần ảo không âm suy ra $y\ge 0\ \left(2\right)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra phần mặt phẳng biểu diễn số phức z là nửa hình tròn tâm $I\left(1;0\right)$ bán kính $r=1$, diện tích của nó bằng $\dfrac{1}{2}\cdot r^2\pi=\dfrac{\pi}{2}$ (đvdt).

Câu 86. **(Chuyên Võ Nguyên Giáp 2017)** Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ $0xy$ sao cho $\left|2z-\overline{z}\right|\le 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H.

A. $\dfrac{3\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **C.** 6π. **D.** 3π.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi,\ (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $\left|2(x+yi)-(x-yi)\right| \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9y^2} \le 3 \Leftrightarrow x^2+9y^2 \le 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1} \le 1$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền trong của Elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1} \le 1$.

Ta có $a = 3,\ b = 1$, nên diện tích hình H cần tìm bằng $\frac{1}{4}$ diện tích Elip.

Vậy $S = \frac{1}{4}.\pi.a.b = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 87. **(Chuyên Thái Nguyên 2017)** Tập hợp các số phức $w = (1+i)z+1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1| \le 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

A. 2π . **B.** π . **C.** 3π . **D.** 4π .

Lời giải

Chọn A

Gọi $w = x + yi; x; y \in \mathbb{R}$.

Ta có $w = (1+i)z+1 \Leftrightarrow z = \frac{w-1}{1+i}$.

Do đó $|z-1| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w-1}{1+i}-1\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w-2-i}{1+i}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{(x-2)+(y-1)i}{1+i}\right| \le 1$.

$\Leftrightarrow \left|\frac{(x-2)+(y-1)i}{1+i}\right| \le 1 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$.

Vậy diện tích hình tròn đó là $S = 2\pi$.

Câu 88. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi = \frac{z+2\bar{z}-3i}{z^2+2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2+i)(z+i) = 3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}\right) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (IV). **B.** Góc phần tư thứ (I).
C. Góc phần tư thứ (II). **D.** Góc phần tư thứ (III).

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(2+i)(z+i) = 3-i+z \Rightarrow z = 1-i \Rightarrow w = \frac{5}{4}+\frac{1}{4}i \Rightarrow M\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \tan\varphi = \frac{1}{5}$.

Lúc đó: $\sin 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \frac{5}{13} > 0$; $\cos 2\varphi = \frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \frac{12}{13} > 0$.

Câu 89. **(TRẦN HƯNG ĐẠO – NB-2017)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i| \le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=9\pi$. **B.** $S=12\pi$. **C.** $S=16\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Lời giải

Chọn C

$w=2z+1-i\Rightarrow z=\dfrac{w-1+i}{2}$

$|z-3+4i|\le 2\Leftrightarrow\left|\dfrac{w-1+i}{2}-3+4i\right|\le 2\Leftrightarrow|w-1+i-6+8i|\le 4\Leftrightarrow|w-7+9i|\le 4\ (1)$

Giả sử $w=x+yi\quad(x,y\in\mathbb{R})$, khi đó $(1)\Leftrightarrow(x-7)^2+(y+9)^2\le 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $r=4$.

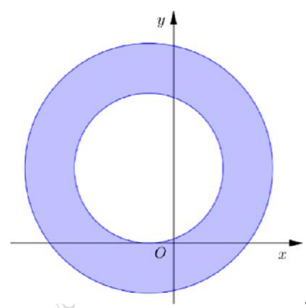
Vậy diện tích cần tìm là $S=\pi.4^2=16\pi$.

Câu 90. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Khánh Hòa – 2017)**Biết số phức z thỏa điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng:

A. 9π. **B.** 16π. **C.** 25. **D.** 4π .

Lời giải

Chọn B



Gọi $z=x+yi$.

(với $x,y\in\mathbb{R}$)$\Rightarrow 3\le|z-3i+1|\le 5\Leftrightarrow 9\le(x+1)^2+(y-3)^2\le 25$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn bán kính $R=5$ và $r=3$. Diện tích $S=\pi\left(R^2-r^2\right)=16\pi$.

Câu 91. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường Parabol. **B.** Một đường Elip. **C.** Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z+2|+|z-2|=4\Leftrightarrow|(x+2)+yi|+|(x-2)+yi|=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$

Xét $F_1(-2;0),F_2(2;0)\Rightarrow F_1F_2=4$.

$MF_1+MF_2=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

Suy ra $MF_1+MF_2=F_1F_2\Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng F_1F_2

Vậy tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z là một đoạn thẳng F_1F_2.

Câu 92. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=25\pi$ **B.** $S=9\pi$ **C.** $S=12\pi$ **D.** $S=16\pi$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $w=2z+1-i \Leftrightarrow 2z=w-1+i$.

Ta có: $|z-3+4i|\le 2 \Leftrightarrow |2z-6+8i|\le 4 \Leftrightarrow |w-1+i-6+8i|\le 4 \Leftrightarrow |w-7+9i|\le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $R=4$.

Do đó diện tích hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính là $S=16\pi$.

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases}|z+\overline{z}|\ge 12\\ |z-4-3i|\le 2\sqrt{2}\end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

A. $4\pi-4$. **B.** $8\pi-8$. **C.** $2\pi-4$. **D.** $8\pi-4$.

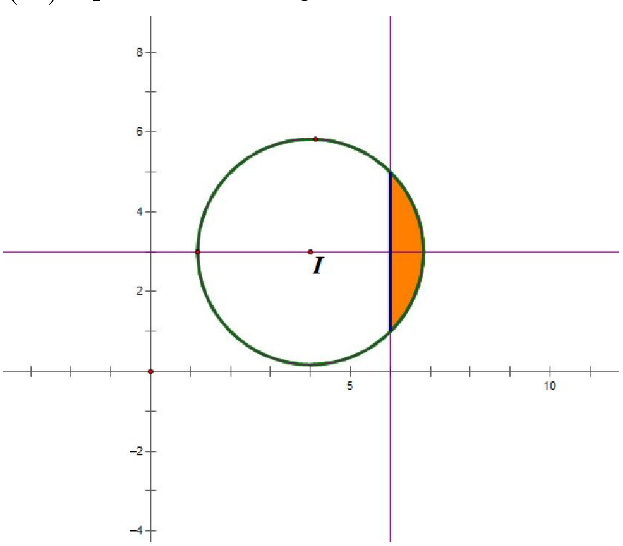
Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$; $(x,y\in\mathbb{R})$; $\Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

Ta có $\begin{cases}|z+\overline{z}|\ge 12\\ |z-4-3i|\le 2\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2|x|\ge 12\\ (x-4)^2+(y-3)^2\le 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|\ge 6\\ (x-4)^2+(y-3)^2\le 8\end{cases}(H)$.

(H) là phần tô đậm trong hình vẽ.



Giải hệ : $\begin{cases}y=3\\ (x-4)^2+(y-3)^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3\\ x=4\pm 2\sqrt{2}\end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=3$ cắt đường tròn (C) tại $E\left(4-2\sqrt{2};3\right)$ và $F\left(4+2\sqrt{2};3\right)$.

Vậy diện tích của hình phẳng (H) là: $2.\int_{6}^{4+2\sqrt{2}}\left(3+\sqrt{8-(x-4)^2}-3\right)dx = 2\pi-4$.

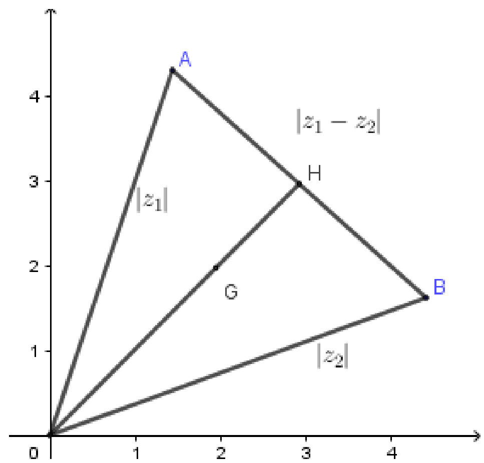
Dạng 5. Một số dạng toán khác

Câu 94. Các điểm A,B tương ứng là điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy, G là trọng tâm tam giác OAB, biết $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=12$. Độ dài đoạn OG bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $OA=OB=AB=12 \Rightarrow \Delta OAB$ đều.

$\Rightarrow OG=\dfrac{2}{3}AH=4\sqrt{3}$ (do $AH=6\sqrt{3}$ đường cao trong tam giác đều).

Kết luận: $OG=4\sqrt{3}$.

Câu 95. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi(x;y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z+2-i|+|z-4-i|=10 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2-2y+1+4x+4}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1+16-8x}=10$.

Đặt $\begin{cases} c=x^2+y^2-2y+1 \\ d=4x+4 \Rightarrow 16-8x=24-2d \end{cases}$.

Thay vào ta có: $\sqrt{c+d}+\sqrt{c+24-2d}=10 \Leftrightarrow 9d^2-400c+56d+5776=0$.

$\Rightarrow 9(4x+4)^2-400(x^2+y^2-2y+1)+56(4x+4)+5776=0 \Leftrightarrow 256(x-1)^2+400(y-1)^2=6400$.

Đặt $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-1 \end{cases}$ ta thu được tập hợp số phức z là một Elip có phương trình: $\dfrac{X^2}{25}+\dfrac{Y^2}{16}=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức chính là diện tích của Elip trên.
Áp dụng công thức tính diện tích Elip với $a=5,b=4$ ta được: $S=\pi.a.b=20\pi$.

Câu 96. Cho hai điểm *A, B* là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Hỏi ba điểm *O, A, B* tạo thành tam giác gì? (*O* là gốc tọa độ) Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Vuông cân tại *O*. **B.** Vuông tại *O*. **C.** Đều. **D.** Cân tại *O*.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+1=0$.

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2| \Rightarrow OA=OB$.

(1) $\Leftrightarrow (z_1-z_2)^2=-z_1z_2$.

Lấy modul 2 vế: $|z_1-z_2|^2=|-z_1z_2|=|z_1|^2$.

$\Rightarrow AB^2=OA^2 \Rightarrow OA=OB=AB$.

Vậy tam giác OAB là tam giác đều.

Câu 97. **(Sở Kon Tum 2019)** Cho các số phức $z_1=3-2i, z_2=1+4i, z_3=-1+i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm A,B,C. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $2\sqrt{17}$. **B.** 12. **C.** $4\sqrt{13}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

$z_1=3-2i, z_2=1+4i, z_3=-1+i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm $A,B,C \Rightarrow A(3;-2),B(1;4),C(-1;1)$.

$\overrightarrow{AB}=(x_1;y_1),\overrightarrow{AC}=(x_2;y_2) \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

$\overrightarrow{AB}=(-2;6),\overrightarrow{AC}=(-4;3)$

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}|(-2).3-(-4).6|=9$.

Câu 98. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trong mặt phẳng tọa độ, I là trung điểm MN, O là gốc tọa độ, (3 điểm O,M,N không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây luôn **đúng**?

A. $|z_1-z_2|=2(OM+ON)$. **B.** $|z_1+z_2|=OI$.

C. $|z_1-z_2|=OM+ON$. **D.** $|z_1+z_2|=2OI$.

Lời giải

Chọn D

Vì M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ và 3 điểm O, M, N không thẳng hàng.

Nên ta có $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = NM$ loại đáp án $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$ và $|z_1 - z_2| = OM + ON$

Mặt khác $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = |2\overrightarrow{OI}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI$ (theo quy tắc đường trung tuyến của tam giác) loại đáp án $|z_1 + z_2| = OI$.

Câu 99. Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng:

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết, $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ nên: $\begin{cases} x = m - 2 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x + 2 \\ y = (x+2)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 4x + 3$.

$\Rightarrow (C): y = x^2 + 4x + 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành:

$$S = \int_{-3}^{-1} |x^2 + 4x + 3| \mathrm{d}x = \left| \int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3) \mathrm{d}x \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right) \Bigg|_{-3}^{-1} \right| = \left| -\frac{4}{3} - 0 \right| = \frac{4}{3}.$$

Vậy $S = \frac{4}{3}$.

Câu 100. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 + 2i$; $1 + \sqrt{3} + i$; $1 + \sqrt{3} - i$; $1 - 2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diện số phức có phần thực là

A. $\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $A(1;2); B(1 + \sqrt{3}; 1); C(1 + \sqrt{3}; -1); D(1; -2)$

Có $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}; AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$ nên tứ giác $ABCD$ là nửa lục giác đều

Vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác là trung điểm của AD và $I(1;0)$ nên biểu diễn số phức là $z = 1 + 0i \Leftrightarrow z = 1$, có phần thực là 1

Câu 101. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Xét hai điểm A,B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+3i)z$. Biết rằng diện tích của tam giác OAB bằng 6, môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $OA=|z|$, $OB=|(1+3i)z|=\sqrt{10}|z|$, $AB=|z(1+3i-1)|=|3iz|=3|z|$.

Ta thấy $OB^2=AB^2+OA^2=10|z|^2 \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại ***A***.

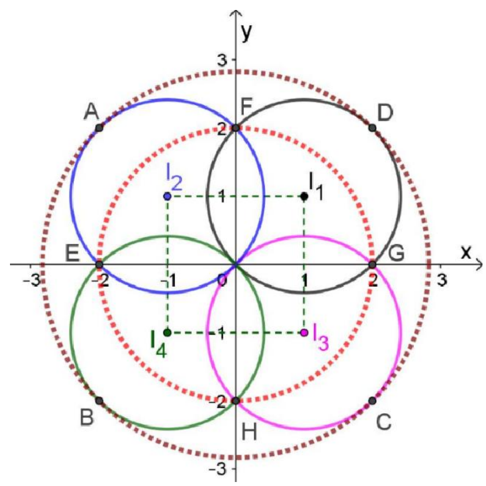
Do đó $S_{OAB}=6 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AB.OA=\dfrac{1}{2}3|z|.|z|=6 \Rightarrow |z|=2.$

Câu 102. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|$ và $|z|=m$?

A. $\{2;2\sqrt{2}\}$. **B.** $[2;2\sqrt{2}]$. **C.** $\{2\}$. **D.** $(2;2\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $z=x+yi\,(x,y\in R)$

$$\begin{cases}|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|\\ |z|=m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{4x^2}+\sqrt{4y^2}=x^2+y^2\\ \sqrt{x^2+y^2}=m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2|x|-2|y|=0\,(1)\\ x^2+y^2-m^2=0\,(2)\end{cases}$$

Điều kiện (1) cho ta bốn đường tròn:

+ (C_1) có tâm $I_1(1;1)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

+ (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{2}$.

+ (C_3) có tâm $I_3(1;-1)$ và bán kính $R_3=\sqrt{2}$.

+ (C_4) có tâm $I_4(-1;-1)$ và bán kính $R_4=\sqrt{2}$.

Điều kiện (2) là đường tròn (C) tâm O và bán kính $R=|m|$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy điều kiện để có đúng 4 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn (C) tiếp xúc với 4 đường tròn (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) tại D,A,B,C **hoặc** đi qua các giao điểm E,F,G,H của bốn đường tròn đó.

Suy ra $m = 2\sqrt{2}$ hoặc $m = 2$.

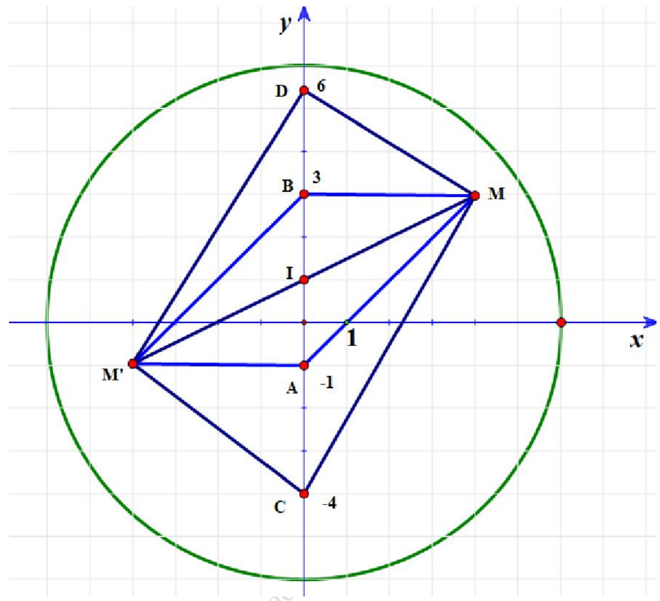
Cách 2: dùng điều kiện trên rồi thử các đáp án.

Câu 103. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Có bao nhiêu số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn $|z+i| + |z-3i| = |z+4i| + |z-6i|$ và $|z| \le 10$.

A. 12. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(a;b)$, $A(0;-1)$, $B(0;3)$, $C(0;-4)$, $D(0;6)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức $z = a + bi$, $-i$, $3i$, $-4i$, $6i$.

Trường hợp 1: Xét trường hợp M không thuộc Oy. Gọi I là trung điểm AB khi đó I cũng là trung điểm CD. Do (M, A, B), (M, C, D) không thẳng hàng. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua I.

Theo tính chất hình bình hành ta có $MA + MB = MB + M'B$; $MC + MD = MD + M'D$.

Dễ thấy $MD + M'D > MB + M'B$ vậy trường hợp này không có điểm M thỏa mãn.

Trường hợp 2: Xét trường hợp M thuộc $Oy \Rightarrow M(0;m)$, $(|m| \le 10)$.

$$MA + MB = MC + MD \Leftrightarrow |m+1| + |m-3| = |m+4| + |m-6| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 6 \\ m \le -4 \end{array}\right..$$

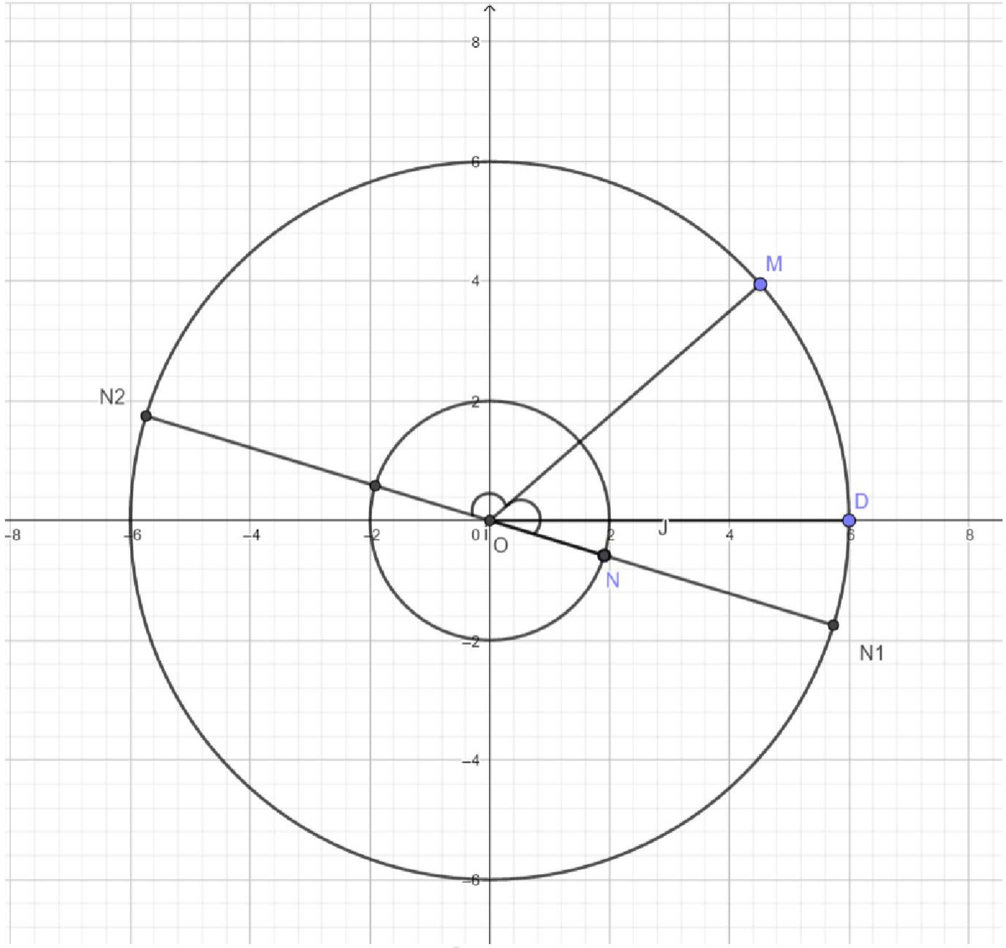
Kết hợp điều kiện $\Rightarrow m \in [-10;-4] \cup [6;10]$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 12 giá trị.

Câu 104. Cho hai số phức $z_1; z_2$ thoả mãn: $|z_1| = 6, |z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, iz_2. Biết $\widehat{MON} = 60^0$, khi đó giá trị của biểu thức $|z_1^2 + 9z_2^2|$ bằng

A. 18. **B.** $36\sqrt{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$|z_1| = 6$ nên điểm biểu diễn của số phức z_1 là điểm M nằm trên đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 6.

$|3iz_2| = |3||iz_2| = 6$ nên điểm biểu diễn của số phức $3iz_2$ là điểm N_1 (N_1 là giao điểm của tia ON với đường tròn (C), N là điểm biểu diễn của số phức iz_2), điểm biểu diễn của số phức $-3iz_2$ là điểm N_2 đối xứng với điểm N_1 qua O.

Theo giả thiết: $\widehat{MON} = 60^0 \Rightarrow \widehat{MON_1} = 60^0; \widehat{MON_2} = 120^0$

Ta có:

$$\left|z_1^2 + 9z_2^2\right| = \left|z_1^2 - (3iz_2)^2\right| = |z_1 - 3iz_2||z_1 + 3iz_2| = |z_1 - 3iz_2||z_1 - (-3iz_2)|$$
$$= MN_1.MN_2 = 6.6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

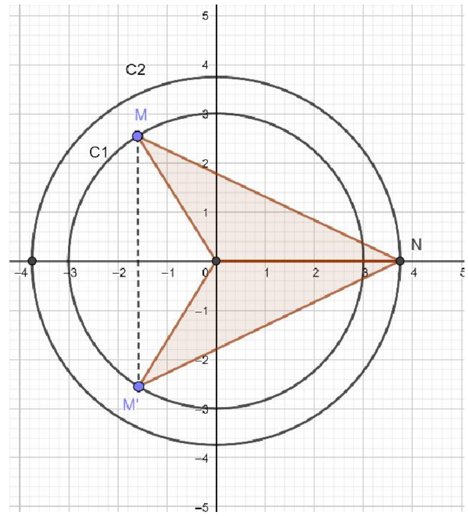
Câu 105. (SP Đồng Nai - 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi$. Tìm $|b|$

A. $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b| = \frac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b| = \frac{3}{8}$. **D.** $|b| = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1



Giả sử $z_1 = x_1 + y_1 i \leftrightarrow M(x_1; y_1)$ và $z_2 = x_2 + y_2 i \leftrightarrow N(x_2; y_2)$

Theo giả thiết ta có: $OM = 3, ON = 4, MN = \sqrt{37}$

Suy ra: tập hợp các điểm biểu diễn z_1 là đường tròn (C_1) có tâm $O, R_1 = 3$

tập hợp các điểm biểu diễn z_2 là đường tròn (C_2) có tâm $O, R_2 = 4$

Xét tam giác OMN có $\cos\left(\widehat{MON}\right) = \dfrac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2.OM.ON} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MON} = 120^0$ (không đổi)

Suy ra M là ảnh của N qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự $V_{\left(O;\frac{3}{4}\right)}$ và phép quay $Q_{(O,120^0)}$ hoặc phép quay $Q_{(O,-120^0)}$

Như vậy ứng với mỗi điểm N ta có 2 điểm M đối xứng nhau qua ON thỏa yêu cầu bài toán

Không mất tính tổng quát của bài toán ta chọn $N(4;0)$ khi đó M, M' đối xứng qua Ox

Vì $\begin{cases} \widehat{MON} = 120^0 \\ \widehat{NOy} = 90^0 \end{cases}$ suy ra $\widehat{yOM} = 30^0 \Rightarrow \begin{cases} x_M = -OM.\sin 30^0 = -\dfrac{3}{2} \\ y_M = OM.\cos 30^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M'\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Khi đó $z_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i, z_2 = 4$ suy ra $z = \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{3}{8} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}i$

Và $z_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i, z_2 = 4$ suy ra $z = \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{3}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}i$

Vậy $|b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Cách 2

Ta có: $\begin{cases} |z_1| = 3\ (1) \\ |z_2| = 4\ (2) \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{37}\ (3) \end{cases}$

Mặt khác $z = \dfrac{z_1}{z_2} = a + bi \Rightarrow z_1 = z.z_2\ (4)$

Thay (4) vào (1) và (3) ta được: $\begin{cases} |z|.|z_2| = 3 \\ |z-1|.|z_2| = \sqrt{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \dfrac{3}{4} \\ |z-1| = \dfrac{\sqrt{37}}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{9}{16} \\ (a-1)^2 + b^2 = \dfrac{37}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 1 = \dfrac{28}{16} \\ b^2 = \dfrac{9}{16} - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{8} \\ b^2 = \dfrac{27}{64} \end{cases} \Rightarrow |b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$$