Chuyên đề 19 PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ + GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM**

## DẠNG 1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

### Dạng 1.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b}$ $(1)$

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)}$ $(2)$

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}}$ **(mũ hóa)** $(3)$

**Các bước giải phương trình & bất phương trình mũ – logarit**

□ **Bước 1**. Đặt điều kiện (điều kiện đại số $+$ điều kiện loga), ta cần chú ý:

$$\log_a b\xrightarrow{\text{ĐK}}\begin{cases}0<a\neq 1\\ b>0\end{cases}\ \text{và}\ \begin{cases}\log_a\left[f(x)\right] & \xrightarrow[\text{mũ lẻ}]{\text{ĐK}} f(x)>0\\ \log_a\left[f(x)\right] & \xrightarrow[\text{mũ chẵn}]{\text{ĐK}} f(x)\neq 0\end{cases}.$$

□ **Bước 2**. Dùng các công thức và biến đổi đưa về các cơ bản trên, rồi giải.

□ **Bước 3**. So với điều kiện và kết luận nghiệm.

**Câu 1.** **(Mã 110 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$ **B.** $S=\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\}$

**C.** $S=\{2+\sqrt{5}\}$ **D.** $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1\quad (*)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2(x-1)-\log_2(x+1)=1$

$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1)=\log_2(x+1)+\log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2=\log_2\left[2(x+1)\right]$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2x+2$

$\Leftrightarrow x^2-4x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{5}\,(L)\\x=2+\sqrt{5}\end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm phương trình $S=\{2+\sqrt{5}\}$

**Câu 2.** **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Viết lại phương trình ta được

$$\log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3\left(2x+3\right) \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3>0\\ x^2+4x=2x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

**Câu 3.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\dfrac{80}{9}$. **C.** $9$. **D.** $\dfrac{82}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3.\frac{1}{2}.\log_3 x.\frac{1}{3}\log_3 x.\frac{1}{4}\log_3 x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=9\\ x=\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$$

**Câu 4.** Nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ là

**A.** $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $x=\sqrt[3]{3}$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>0$

Ta có: $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3} \Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x=-\dfrac{1}{2}\log_2 3$

$\Leftrightarrow 2\log_2 x+\log_2 x+\log_2 3=0 \Leftrightarrow 3\log_2 x+\log_2 3=0$

$\Leftrightarrow \log_2 x^3+\log_2 3=0 \Leftrightarrow \log_2\left(3x^3\right)=0 \Leftrightarrow 3x^3=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

**Câu 5.** **(THPT Lê Quý Dôn Dà Nẵng 2019)** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(x+1\right)=\log_2\left(x^2+2\right)-1$. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

**Lời giải**

ĐK: $x>-1$

$$\log_{\sqrt{2}}\left(x+1\right)=\log_2\left(x^2+2\right)-1 \Rightarrow \left(x+1\right)^2=\frac{x^2+2}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0(TM)\\ x=-4(L)\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm có một phần tử

**Câu 6.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm thục của phương trình $3\log_3\left(x-1\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x-5\right)^3=3$ là

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x > 5$

$3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3 \Leftrightarrow 3\log_3(x-1) + 3\log_3(x-5) = 3$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1) + \log_3(x-5) = 1 \Leftrightarrow \log_3\left[(x-1)(x-5)\right] = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x = 3 + \sqrt{7}$

**Câu 7.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{2}$ (với $a, b$ là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q = a.b$ bằng

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $2 < x \neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0 \Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4| = 0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4| = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1\\(x-2)(x-4)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\x^2-6x+9=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\pm\sqrt{2}\\x=3\end{array}\right.$

So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm $x_1 = 3 + \sqrt{2}; x_2 = 3$

Ta được: $S = x_1 + x_2 = 6 + \sqrt{2} \Rightarrow a = 6; b = 1$. Vậy $Q = a.b = 6$.

**Câu 8.** **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$ là

**A.** $1$. **B.** $-1$. **C.** $2$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình tương đương $\log_2\left[(x+1)x\right] = 1 \Leftrightarrow (x+1)x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\,(\text{N})\\x=-2\,(\text{L})\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng $1$.

**Câu 9.** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\frac{1}{2}\log(x^2-4x-1) = \log 8x - \log 4x$ bằng

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình $\frac{1}{2}\log(x^2-4x-1) = \log 8x - \log 4x$ điều kiện $x > 2 + \sqrt{5}$

$\Rightarrow \log(x^2-4x-1) = 2\log\left(\frac{8x}{4x}\right)$

$\Leftrightarrow \log(x^2-4x-1) = \log(2^2)$

$\Leftrightarrow x^2-4x-1=4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Nghiệm $x=-1$ loại, $x=5$ thỏa mãn.

Suy ra tổng các nghiệm là $5$.

**Câu 10.** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** $6+\sqrt{2}$. **B.** $8+\sqrt{2}$. **C.** $8$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases} x>1 \\ x\neq 3 \end{cases}$.

$2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2 \Leftrightarrow \log_2(2x-2)^2+\log_2(x-3)^2=2$.

$\Leftrightarrow \log_2\left[(2x-2)(x-3)\right]^2=2 \Leftrightarrow \left(2x^2-8x+6\right)^2=2^2$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-8x+6=2 \\ 2x^2-8x+6=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+2=0\ (1) \\ x^2-4x+4=0\ (2) \end{array}\right.$.

+) $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2}\ (l) \end{array}\right.$.

+) $(2) \Leftrightarrow x=2$.

$\Rightarrow S=\left\{2;2+\sqrt{2}\right\}$.

Vậy tổng các nghiệm của $S$ là: $2+2+\sqrt{2}=4+\sqrt{2}$.

**Câu 11.** **(SGD Nam Định 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{81}}(x+3)^4$ bằng

**A.** $\sqrt{10}$. **B.** $3\sqrt{10}$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>3$.

$\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{81}}(x+3)^4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3\left(x^2-5x+6\right)-\frac{1}{2}\log_3(x-2)=-\frac{1}{2}\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-5x+6\right)-\log_3(x-2)+\log_3(x+3)=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-9\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-9=1 \Leftrightarrow x=\sqrt{10}$ (do điều kiện).

**Câu 12.** **(SGD Gia Lai 2019)** Cho hai số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2 xy$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $x = y$. **B.** $x > y$. **C.** $x < y$. **D.** $x = y^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với $x$, $y > 0$ ta có:

$\log_2\left(x^2 + y^2\right) = 1 + \log_2 xy \Leftrightarrow \log_2\left(x^2 + y^2\right) = \log_2 2xy$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy$.

$\Leftrightarrow x = y$.

**Câu 13.** Biết phương trình $\log_2\left(x^2 - 5x + 1\right) = \log_4 9$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$. Tích $x_1.x_2$ bằng:

**A.** $-8$. **B.** $-2$. **C.** $1$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\log_2\left(x^2 - 5x + 1\right) = \log_4 9 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - 5x + 1\right) = \log_2 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 3 > 0\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0\left(*\right)$

Phương trình $\left(*\right)$ có $a.c = -2 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy $x_1.x_2 = -2$.

**Câu 14.** **(Chuyên Long An-2019)** Tìm nghiệm phương trình $2\log_4 x + \log_2\left(x - 3\right) = 2$.

**A.** $x = 4$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 16$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x > 3$.

$2\log_4 x + \log_2\left(x - 3\right) = 2$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2\left(x - 3\right) = 2$

$\Leftrightarrow \log_2 x\left(x - 3\right) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = 4$.

**Câu 15.** **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x - 1\right)^2 + \log_{\sqrt{3}}\left(2x - 1\right) = 2$ là

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$\log_3\left(x - 1\right)^2 + \log_{\sqrt{3}}\left(2x - 1\right) = 2$, điều kiện $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$.

$\Leftrightarrow \log_3\left(x - 1\right)^2 + \log_3\left(2x - 1\right)^2 = \log_3 9$

$\Leftrightarrow \log_3\left[(x-1)(2x-1)\right]^2 = \log_3 9$

$\Leftrightarrow \left(2x^2-3x+1\right)^2 = 9$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x+1=-3 \\ 2x^2-3x+1=3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta có một nghiệm $x=2$ thỏa mãn.

**Câu 16.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Điều kiện:** $\begin{cases} x^2+4x>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x>-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

Ta có

$\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2+4x\right)-\log_3(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3(2x+3) \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3\,(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$

**Câu 17.** Biết nghiệm lớn nhất của phương trình $\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=1$ là $x=a+b\sqrt{2}$ ($a,b$ là hai số nguyên ). Giá trị của $a+2b$ bằng

**A.** $4$. **B.** $6$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x>\dfrac{1}{2}$.

$\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=1 \Leftrightarrow 2\log_2 x-\log_2(2x-1)=1 \Leftrightarrow \log_2\dfrac{x^2}{2x-1}=1 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0$.

Nghiệm lớn nhất của phương trình là $x=2+\sqrt{2} \Rightarrow a=2, b=1 \Rightarrow a+2b=4$.

**Câu 18.** Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

**A.** $6+\sqrt{2}$. **B.** $6$. **C.** $3+\sqrt{2}$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $\begin{cases} x > 2 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0 \Rightarrow \left[(x-2)(x-4)\right]^2=1$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1 \\ (x-2)(x-4)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0 \\ x^2-6x+9=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{2}\ (nhan) \\ x=3-\sqrt{2}\ (loai) \\ x=3\ (nhan)\end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ bằng $6+\sqrt{2}$.

**Câu 19.** Gọi $S$ là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log x^2+\log(x+10)=2-\log 4$. Tính $S$?

**A.** $S=-10$. **B.** $S=-15$. **C.** $S=-10+5\sqrt{2}$. **D.** $S=8-5\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện phương trình: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -10 \end{cases}$.

Phương trình: $\frac{1}{2}\log x^2+\log(x+10)=2-\log 4 \Leftrightarrow \log|x|+\log(x+10)+\log 4=2$

$\Leftrightarrow \log\left[4|x|(x+10)\right]=2 \Leftrightarrow 4|x|(x+10)=100 \Leftrightarrow |x|(x+10)=25\ (*)$.

+ Khi $-10<x<0$:

Phương trình $(*) \Leftrightarrow -x(x+10)=25 \Leftrightarrow x^2+10x+25=0 \Leftrightarrow x=-5$ (t/m).

+ Khi $x>0$:

Phương trình $(*) \Leftrightarrow x(x+10)=25 \Leftrightarrow x^2+10x-25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5+5\sqrt{2}\ \text{(t/m)} \\ x=-5-5\sqrt{2}\ \text{(l)}\end{array}\right.$.

Vậy $S=-5+\left(-5+5\sqrt{2}\right)=-10+5\sqrt{2}$.

**Câu 20.** Cho phương trình $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$. Tổng các nghiệm của phương trình trên là

**A.** $4+2\sqrt{6}$. **B.** $-4$. **C.** $4-2\sqrt{6}$. **D.** $2-2\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases} (x+1)^2>0 \\ 4-x>0 \\ 4+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ -4<x<4 \end{cases}$.

$\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$

$\Leftrightarrow \log_2|x+1|+\log_2 4=\log_2(4-x)+\log_2(4+x)$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2(16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x+1)=16-x^2 \\ 4(x+1)=-(16-x^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-12=0 \\ x^2-4x-20=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \\ x=2+2\sqrt{6} \\ x=2-2\sqrt{6} \end{array}\right.$.

So với điều kiện phương trình trình có 2 nghiệp $x=2; x=2-2\sqrt{6}$. Vậy tổng các nghiệm là $4-2\sqrt{2}$.

**Câu 21.** Cho $\log_8|x|+\log_4 y^2=5$ và $\log_8|y|+\log_4 x^2=7$. Tìm giá trị của biểu thức $P=|x|-|y|$.

**A.** $P=56$. **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=64$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$\log_8|x|+\log_4 y^2=5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2|x|+\frac{1}{2}\log_2 y^2=5$.

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt[3]{|x|}+\log_2|y|=5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{|x|}.|y|=2^5 \Leftrightarrow |x|.|y|^3=(2^5)^3=2^{15}\ (1)$.

Tương tự: $\log_8|y|+\log_4 x^2=7 \Leftrightarrow |y|.|x|^3=2^{21}\ (2)$.

Lấy $(1)$ nhân $(2)$ được $x^4.y^4=2^{36} \Leftrightarrow x^2.y^2=2^{18}\ (3)$.

Lấy $(1)$ chia $(2)$ được $\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{2^6} \Leftrightarrow x^2=2^6.y^2\ (4)$.

Thay $(4)$ vào $(3)$ được $2^6.y^4=2^{18} \Leftrightarrow y^4=2^{12}=(2^3)^4 \Leftrightarrow |y|=2^3=8$.

Thay $|y|=8$ vào $(4)$ được $x^2=2^6.64=(2^6)^2 \Leftrightarrow |x|=2^6=64$. Do đó $P=|x|-|y|=56$.

**Câu 22.** Cho $a,b,x>0$; $a>b$ và $b,x\neq 1$ thỏa mãn $\log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\frac{1}{\log_b x^2}$.

Khi đó biểu thức $P=\frac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}$ có giá trị bằng:

**A.** $P=\frac{5}{4}$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\frac{16}{15}$. **D.** $P=\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\frac{1}{\log_b x^2} \Leftrightarrow \log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\log_x\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow a+2b=3\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2-5ab+4b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(a-4b)=0 \Leftrightarrow a=4b$ (do $a>b$).

$P=\dfrac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}=\dfrac{32b^2+12b^2+b^2}{36b^2}=\dfrac{5}{4}$.

**Câu 23.** Cho $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, biết rằng $\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)=-2$ và $\log_2(\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{2}(\log_2 n+1)$. Giá trị của $n$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\sin x>0$; $\cos x>0$, $\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Theo bài ra $\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)=-2 \Leftrightarrow \log_2(\sin x.\cos x)=-2 \Leftrightarrow \sin x.\cos x=\dfrac{1}{4}$.

Do đó $\log_2(\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{2}(\log_2 n+1)$.

$\Leftrightarrow \log_2(\sin x+\cos x)^2=\log_2 n+1$

$\Leftrightarrow \log_2 n+1=\log_2\left(\sin^2 x+2\sin x.\cos x+\cos^2 x\right)$.

$\Leftrightarrow \log_2 n+1=\log_2\dfrac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow \log_2 n=\log_2\dfrac{3}{4}$.

$\Leftrightarrow n=\dfrac{3}{4}$.

**Câu 24.** **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Biết rằng phương trình $2\ln(x+2)+\ln 4=\ln x+4\ln 3$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ $(x_1<x_2)$. Tính $P=\dfrac{x_1}{x_2}$.

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $64$. **C.** $\dfrac{1}{64}$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0\ (*)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \ln(x+2)^2+\ln 4=\ln x+\ln 3^4 \Leftrightarrow \ln\left[4(x+2)^2\right]=\ln\left(x.3^4\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x.3^4>0 \\ 4(x+2)^2=81x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=16 \\ x=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$ thỏa mãn $(*)$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{4} \\ x_2=16 \end{cases} \Rightarrow P=\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{64}$.

**Câu 25.** **(THPT Lê Xoay - 2018)** Phương trình $\log_{49}x^2+\dfrac{1}{2}\log_7(x-1)^2=\log_7\left(\log_{\sqrt{3}}3\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$\log_{49} x^2 + \frac{1}{2}\log_7 (x-1)^2 = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3) \Leftrightarrow \log_7 |x| + \log_7 |x-1| = \log_7 2$

$\Leftrightarrow \log_7 |x(x-1)| = \log_7 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-1)=2 \\ x(x-1)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2-x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

**Câu 26.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** Vô nghiệm. **B.** Một nghiệm. **C.** Hai nghiệm. **D.** Ba nghiệm.

**Lời giải**

Điều kiện: $-4 < x < 4$ và $x \neq -1$.

Ta có $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3 \Leftrightarrow \log_2 (4|x+1|) = \log_2 [(4-x)(4+x)]$

$\Leftrightarrow 4|x+1| = 16 - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x+1)=16-x^2 \\ 4(x+1)=x^2-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-12=0 \\ x^2-4x-20=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \\ x=2+2\sqrt{6} \\ x=2-2\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2$ và $x=2-2\sqrt{6}$.

**Câu 27.** **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 (x+2) + \log_4 (x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ bằng

**A.** $6$. **B.** $3$. **C.** $9$. **D.** $12$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$ $(*)$.

Ta có $\log_2 (x+2) + \log_2 |x-5| - \log_2 8 = 0 \Leftrightarrow \log_2 [(x+2)|x-5|] = \log_2 8$

$\Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 5 \\ (x+2)(x-5)=8 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 5 \\ (x+2)(5-x)=8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn $(*)$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $6 + \frac{3+\sqrt{17}}{2} + \frac{3-\sqrt{17}}{2} = 9$.

**Câu 28.** **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Cho phương trình $\log_2 \left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3 \left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \log_6 \left|x - \sqrt{x^2-1}\right|$. Biết phương trình có một nghiệm là 1 và một nghiệm còn lại có dạng $x = \frac{1}{2}\left(a^{\log_b c} + a^{-\log_b c}\right)$ (với $a$, $c$ là các số nguyên tố và $a > c$).

Khi đó giá trị của $a^2 - 2b + 3c$ bằng:

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$ $(*)$

$\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \log_6\left|x - \sqrt{x^2-1}\right|$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3 \dfrac{1}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)} = \log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow -\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3 6.\log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left[\log_3 6.\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = 0 & (1) \\ \log_3 6.\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

$(2) \Leftrightarrow \log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3 6 = -1 \Leftrightarrow \log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \log_6 3$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-1} = 2^{\log_6 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2^{\log_6 3} \\ x^2 - 1 = \left(2^{\log_6 3} - x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(2^{\log_6 3} + 2^{-\log_6 3}\right).$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}\right)$. (thỏa mãn $(*)$)

Như vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 1$, $x = \dfrac{1}{2}\left(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}\right)$.

Khi đó $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$. Vậy $a^2 - 2b + 3c = 3$.

**Dạng 1.2 Phương pháp đặt ẩn phụ**

① Loại 1. $P\left(\log_a f(x)\right) = 0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t = \log_a f(x)$.

② Loại 2. Sử dụng công thức $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ để đặt $t = a^{\log_b x} \Rightarrow t = x^{\log_b a}$.

**Câu 29.** Phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \dfrac{5}{2}$ có hai nghiệm $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$. Khi đó tổng $x^2{}_1 + x_2$ bằng

**A.** $\dfrac{9}{2}$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện phương trình: $x > 0, x \ne 1$.

$\log_x 2 + \log_2 x = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \dfrac{5}{2}\log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$

Suy ra $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 4$.

Suy ra $x^2{}_1 + x_2 = 6$.

**Câu 30.** **(SGD Gia Lai 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x^2 + 8\log_2 x + 4 = 0$ là:

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x > 0$

$\log_2^2 x^2 + 8\log_2 x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x + 8\log_2 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\,(TM)$

**Câu 31.** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0$ là

**A.** $9$. **B.** $-7$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 7 = 0 \;\; (1)$

Do $a.c = -7 < 0$ nên phương trình $(1)$ có $2$ nghiệm $t_1; t_2$ phân biệt thỏa mãn $t_1 + t_2 = 2$.

Khi đó, các nghiệm của phương trình ban đầu là: $x_1 = 3^{t_1}$; $x_2 = 3^{t_2}$.

$\Rightarrow x_1.x_2 = 3^{t_1}.3^{t_2} = 3^{t_1+t_2} = 3^2 = 9$.

**Câu 32.** **(Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - \log_2 9.\log_3 x = 3$ là

**A.** $2$. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** $8$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_2^2 x - \log_2 9.\log_3 x = 3 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{array}\right.$

Vậy $S = \frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2}$.

**Câu 33.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Biết phương trình $\log_2^2(2x) - 5\log_2 x = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$. Tính $x_1.x_2$.

**A.** $8$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau: $\log^2{}_2 x - 3\log_2 x + 1 = 0$.

Do $\log_2 x_1$ và $\log_2 x_2$ là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 3t + 1 = 0$ nên

$\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 3$, mà $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = \log_2(x_1.x_2)$.

Suy ra $\log_2(x_1.x_2) = 3$ nên $x_1.x_2 = 8$.

**Câu 34.** **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0$ có 2 nghiệm $x_1, x_2$. Giá trị của $x_1x_2$ bằng

**A.** $128$. **B.** $64$. **C.** $9$. **D.** $512$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+ Điều kiện $x > 0$.

+ $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \\ \log_2 x = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} \\ x = 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0$).

Vậy $x_1x_2 = 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}.2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} = 128$.

**Câu 35.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho phương trình $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng

**A.** $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;9)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5 \Leftrightarrow (1+\log_2(2x))^2 - 2\log_2(2x) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{8} \end{array}\right.$.

Nghiệm nhỏ nhất là $x = \dfrac{1}{8} \in (0;1)$.

**Câu 36.** Gọi $T$ là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính $T$.

**A.** $L = 4$. **B.** $T = -5$. **C.** $T = 84$. **D.** $T = 5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3^4 = 81 \end{array}\right.$ ( thỏa mãn).

Vậy $T = 3 + 81 = 84$.

**Câu 37.** **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tính tích $x_1.x_2$.

**A.** $32$. **B.** $36$. **C.** $8$. **D.** $16$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\ x_2=16\end{array}\right.$. Vậy tích $x_1.x_2=32$.

**Câu 38.** **(Chuyên ĐH Vinh 2019)** Cho các số thực a, b thỏa mã $1<a<b$ và $\log_a b+\log_b a^2=3$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_{ab}\dfrac{a^2+b}{2}$.

**A.** $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $6$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_a b+\log_b a^2=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{\log_b a}+2\log_b a=3\Leftrightarrow$

$2\log^2{}_b a-3\log_b a+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_b a=1\\ \log_b a=1/2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}a=b & (L)\\ a=\sqrt{b} & (N)\end{array}\right.\Rightarrow b=a^2$

Vậy $T=\log_{ab}\dfrac{a^2+b}{2}=\log_{a^3}a^2=\dfrac{2}{3}$ nên đáp án D đúng.

**Câu 39.** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x-\log_2(2018x)-2019=0$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$. Tích $x_1.x_2$ bằng

**A.** $\log_2 2018$. **B.** $0,5$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐKXĐ: $x>0$.

$\log_2^2 x-\log_2(2018x)-2019=0\Leftrightarrow\log_2^2 x-\log_2 x-\log_2 2018-2019=0$.

Đặt $t=\log_2 x\Rightarrow x=2^t$, ta có $t^2-t-\log_2 2018-2019=0$ $(*)$

Gọi $t_1,t_2$ là hai nghiệm của $(*)$, ta có $x_1.x_2=2^{t_1+t_2}=2^1=2$.

**Câu 40.** Cho phương trình $\log_3^2(3x)-\log_3^2 x^2-1=0$. Biết phương trình có 2 nghiệm, tính tích $P$ của hai nghiệm đó.

**A.** $P=9$. **B.** $P=\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\sqrt[3]{9}$. **D.** $P=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_3^2(3x)-\log_3^2 x^2-1=0$ ( điều kiện $x>0$ ).

$\Leftrightarrow(1+\log_3 x)^2-(2\log_3 x)^2-1=0$.

Đặt $\log_3 x = t$ ta có phương trình $(1+t)^2-(2t)^2-1=0 \Leftrightarrow -3t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{2}{3} \\ t=0 \end{array}\right.$.

Với $t=0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x=1$.

Với $t=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_3 x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Vậy $P = 1.\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9}$.

**Câu 41.** **(THPT Ba Đình 2019)** Biết rằng phương trình $\log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3}$ có hai nghiệm $a$ và $b$. Khi đó $ab$ bằng

**A.** $8$. **B.** $81$. **C.** $9$. **D.** $64$.

**Lời giải**

**Đ/K:** $x>0$.

Phương trinh $\log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3} \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4.\log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2-\sqrt{3} \\ \log_3 x = 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{2-\sqrt{3}} \\ x = 3^{2+\sqrt{3}} \end{array}\right.$. Khi đó $a.b = 3^{2-\sqrt{3}}.3^{2+\sqrt{3}} = 81$.

**Câu 42.** **(Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Gọi $T$ là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính $T$.

**A.** $T=4$ **B.** $T=-4$ **C.** $T=84$ **D.** $T=5$

**Lời giải**

ĐKXĐ: $x>0$

Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (-\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3{}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=3^4 \end{array}\right.$

Vậy $T = 3 + 3^4 = 84$

**Câu 43.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Cho phương trình $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(1;3)$. **B.** $(5;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(3;5)$.

**Lời giải**

$\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5 \Leftrightarrow [1+\log_2(2x)]^2 - 2\log_2(2x) = 5 \Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 4 \\ 2x = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng $(0;1)$.

**Câu 44.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ là

**A.** $9$. **B.** $-7$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Dễ thấy phương trình bậc hai: $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt

Khi đó theo Vi-et, $\log_3 x_1+\log_3 x_2=-\frac{-2}{1}\Leftrightarrow \log_3(x_1.x_2)=2\Leftrightarrow x_1.x_2=9$.

**Câu 45.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho 2 số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $\log_9 a^4+\log_3 b=8$ và $\log_3 a+\log_{\sqrt[3]{3}} b=9$. Giá trị biểu thức $P=ab+1$ bằng

**A.** $82$. **B.** $27$. **C.** $243$. **D.** $244$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases}\log_9 a^4+\log_3 b=8\\ \log_3 a+\log_{\sqrt[3]{3}} b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\log_3 a+\log_3 b=8\\ \log_3 a+3\log_3 b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3 a=3\\ \log_3 b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=27\\ b=9\end{cases}$

Nên $P=ab+1=244$

**Câu 46.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Biết phương trình $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Giá trị $x_1.x_2$ bằng

**A.** 128 **B.** 64 **C.** 9 **D.** 512

**Lời giải**

**Chọn A**

Đk: $x>0$; $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=\frac{7-\sqrt{13}}{2}\\ \log_2 x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}\\ x=2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}\end{array}\right.$

Vậy $x_1.x_2=2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}.2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}=2^7=128$

**Câu 47.** **(Mã 104 2017)** Xét các số nguyên dương $a$, $b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3$, $x_4$ thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$.

**A.** $S_{\min}=17$ **B.** $S_{\min}=30$ **C.** $S_{\min}=25$ **D.** $S_{\min}=33$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $x>0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2>20a$.

Đặt $t=\ln x, u=\log x$ khi đó ta được $at^2+bt+5=0\,(1)$, $5t^2+bt+a=0\,(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm $t$ thì có một nghiệm $x$, một $u$ thì có một $x$.

Ta có $x_1.x_2=e^{t_1}.e^{t_2}=e^{t_1+t_2}=e^{-\frac{b}{a}}$, $x_3.x_4=10^{u_1+u_2}=10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a}>-\frac{b}{5}\ln 10\Leftrightarrow a>\frac{5}{\ln 10}\Leftrightarrow a\ge 3$ ( do $a,b$ nguyên dương), suy ra $b^2>60\Rightarrow b\ge 8$.

Vậy $S=2a+3b\ge 2.3+3.8=30$, suy ra $S_{\min}=30$ đạt được $a=3, b=8$.

**Câu 48.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x).\log_{25}^2 x = 1$.

**A.** $630$. **B.** $\frac{1}{125}$. **C.** $\frac{630}{625}$. **D.** $\frac{7}{125}$

**Lời giải**

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$.

Ta có $\log_x(125x).\log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_x 125 + \log_x x)\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (3.\log_x 5 + 1)\log_5^2 x = 4$

Đặt $\log_5 x = t$ phương trình tương đương:

$$\left(\frac{3}{t}+1\right)t^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\frac{1}{625} \end{array}\right.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $\frac{1}{125}$.

**Câu 49.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x).\log_{25}^2 x = 1$.

**A.** $630$. **<u>B</u>.** $\frac{1}{125}$. **C.** $\frac{630}{625}$. **D.** $\frac{7}{125}$

**Lời giải**

**<u>Chọn B</u>**

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$.

Ta có $\log_x(125x).\log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_x 125 + \log_x x)\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (3.\log_x 5 + 1)\log_5^2 x = 4$

Đặt $\log_5 x = t$ phương trình tương đương:

$$\left(\frac{3}{t}+1\right)t^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\frac{1}{625} \end{array}\right.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $\frac{1}{125}$.

**Câu 50.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Xét phương trình $(\log_2 x - 1)(\log_3 x + 2) = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Phương trình trên vô nghiệm.

**B.** Phương trình trên có nghiệm bé hơn 1.

**<u>C</u>.** Phương trình trên có nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm bé hơn 1.

**D.** Phương trình trên chỉ có nghiệm hơn 1.

**Lời giải**

**<u>Chọn C</u>**

$\left(\log_2 x-1\right)\left(\log_3 x+2\right)=3$, điều kiện $x>0$.

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x-1\right)\left(\log_3 2.\log_2 x+2\right)-3=0 \Leftrightarrow \log_3 2.\left(\log_2 x\right)^2+\left(2-\log_3 2\right)\log_2 x-5=0\ (1)$.

Đặt $t=\log_2 x$.

Phương trình $(1)$ trở thành: $\left(\log_3 2\right).t^2+\left(2-\log_3 2\right)t-5=0\ (2)$.

Phương trình $(2)$ có $ac<0$ nên luôn có hai nghiệm $t_1<0<t_2$.

Suy ra $x_1=2^{t_1}<2^0=1$ và $x_2=2^{t_2}>2^0=1$.

Vậy phương trình $(1)$ có nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm bé hơn 1.

**Câu 51.** **(Tham khảo 2018)** Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của $n$ để $u_n>5^{100}$ bằng

**A.** $247$. **B.** $248$. **C.** $229$. **D.** $290$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Có $u_{n+1}=2u_n=2^n u_1$. Xét $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ (*)

Đặt $t=\log u_1-2\log u_{10}$, điều kiện $t\ge -2$

Pt (*) trở thành $\sqrt{2+t}=-t \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 0 \\ t^2-t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=-1$

Với $t=-1 \Leftrightarrow \log u_1-2\log u_{10}=-1$ (với $\log u_{10}=\log\left(2^9.u_1\right)=9\log 2+\log u_1$)

$\Leftrightarrow \log u_1=1-18\log 2 \Leftrightarrow u_1=10^{1-18\log 2}$

Mặt khác $u_n=2^{n-1}u_1=2^{n-1}.10^{1-18\log 2}=2^n.5.10^{-18\log 2}>5^{100} \Rightarrow n>\log_2\left(5^{99}.10^{18\log 2}\right)\approx 247{,}87$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $n$ là $248$.

**Câu 52.** Cho $a$, $b$ là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $\dfrac{a}{b}$.

**A.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{b}=7-2\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a}{b}=7+2\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Đặt $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}=t$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=9^t \\ b=16^t \\ \dfrac{5b-a}{2}=12^t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{5.16^t-9^t}{2}=12^t \Leftrightarrow 9^t+2.12^t-5.16^t=0$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2t}+2.\left(\frac{3}{4}\right)^{t}-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{4}\right)^{t}=-1+\sqrt{6}\\ \left(\frac{3}{4}\right)^{t}=-1-\sqrt{6}\,(l)\end{array}\right.$.

$+\ \frac{a}{b}=\frac{9^t}{16^t}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}=\left(-1+\sqrt{6}\right)^2=7-2\sqrt{6}$.

**Câu 53.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Cho hai số thực dương $m,n$ thỏa mãn $\log_4\left(\frac{m}{2}\right)=\log_6 n=\log_9(m+n)$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{m}{n}$.

**A.** $P=2$. **B.** $P=1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=\log_4\left(\frac{m}{2}\right)=\log_6 n=\log_9(m+n) \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{m}{2}=4^t\\ n=6^t\\ m+n=9^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=4^{t+\frac{1}{2}}\\ n=6^t\\ m+n=9^t\end{cases}$

$\Rightarrow 2.4^t+6^t=9^t \Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}+\left(\frac{2}{3}\right)^{t}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{t}=-1(VN)\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{t}=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{t}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases}m=2.4^t\\ n=6^t\end{cases} \Rightarrow P=\frac{m}{n}=2.\left(\frac{4}{6}\right)^{t}=2.\left(\frac{2}{3}\right)^{t}=2.\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}}=2.\frac{1}{2}=1$.

Chọn **B.**

**Câu 54.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Giả sử $p,q$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}(p+q)$. Tính giá trị của $\frac{p}{q}$.

**A.** $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}(p+q) \Leftrightarrow \begin{cases}\log_{16} p=t\\ \log_{20} q=t\\ \log_{25}(p+q)=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p=16^t\\ q=20^t\\ p+q=25^t\end{cases} \Rightarrow 16^t+20^t=25^t$

$\Leftrightarrow \left(\frac{16}{25}\right)^{t}+\left(\frac{4}{5}\right)^{t}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,(vn)\\ \left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Suy ra $\frac{p}{q}=\left(\frac{4}{5}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 55.** **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x=1$ bằng

**A.** $\frac{7}{25}$. **B.** $\frac{630}{625}$. **C.** $\frac{1}{125}$. **D.** $630$.

**Lời giải**

Điều kiện: $0<x\neq 1$, ta có:

$\log_x(125x)\log_{25}^2 x=1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x+\log_{25}^2 x.\log_x 125=1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x+\frac{3}{2}\log_{25} x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_{25} x=\frac{1}{2}\\ \log_{25} x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=\frac{1}{25^2}\end{array}\right.$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là: $\frac{1}{125}$.

**Câu 56.** **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2018)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2 x+1}=1$

**A.** $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$. **B.** $1$. **C.** $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ \log_2 x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\geq \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{\log_2 x+1}=t$, $(t\geq 0)\Rightarrow \log_2 x=t^2-1$ ta có phương trình

$(t^2-1)^2+t=1 \Leftrightarrow t^4-2t^2+t=0 \Leftrightarrow t(t^3-2t+1)=0 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2-2t+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\ (t/m)\\ t=1\ (t/m)\\ t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (t/m)\\ t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (loai)\end{array}\right.$.

Với $t=0$ thì $\log_2 x=-1 \Leftrightarrow x=2^{-1}$.

Với $t=1$ thì $\log_2 x=0 \Leftrightarrow x=2^0$.

Với $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\log_2 x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

**Câu 57.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi $x$, $y$ các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(x+y\right)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a$, $b$ là hai số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

**A.** $T=26$. **B.** $T=29$. **C.** $T=20$. **D.** $T=25$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(x+y\right)$, ta có $\begin{cases} x=9^t \\ y=6^t \\ x+y=4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t+6^t=4^t$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^{t}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^{t}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,(loai) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{t}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{t}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{9}{6}\right)^t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Mà $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=1;b=5$.

Vậy $T=a^2+b^2=1^2+5^2=26$.

**Câu 58.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho các số thực dương $a,b$ thỏa mãn $\log_4 a=\log_6 b=\log_9\left(4a-5b\right)-1$. Đặt $T=\dfrac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $1<T<2$. **B.** $\dfrac{1}{2}<T<\dfrac{2}{3}$. **C.** $-2<T<0$. **D.** $0<T<\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả sử: $\log_4 a=\log_6 b=\log_9\left(4a-5b\right)-1=t\Rightarrow \begin{cases} a=4^t \\ b=6^t \\ 4a-5b=9^{t+1} \end{cases}$

Khi đó $4.4^t-5.6^t=9.9^t \Leftrightarrow 4.\left(\dfrac{4}{9}\right)^t-5.\left(\dfrac{6}{9}\right)^t=9 \Leftrightarrow 4.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2t}-5.\left(\dfrac{2}{3}\right)^t-9=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{t}=\frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{t}=-1 \quad (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow t=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow t=-2$$

Vậy $T=\dfrac{b}{a}=\left(\dfrac{6}{4}\right)^t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}=\dfrac{4}{9}\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Dạng 1.3 Phương pháp mũ hóa**

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}}$ **(mũ hóa)**

**Câu 59.** **(Cần Thơ 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(12-2^x\right)=5-x$ bằng

**A.** $2$. **B.** $32$. **C.** $6$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $12-2^x>0$ (*)

Khi đó $\log_2\left(12-2^x\right)=5-x\Leftrightarrow 12-2^x=2^{5-x}\Leftrightarrow 2^{2x}-12.2^x+32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=4\\2^x=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$

Ta thấy cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện (*), và tích bằng $2.3=6$.

**Câu 60.** Phương trình $\log_4\left(3.2^x\right)=x-1$ có nghiệm là $x_0$ thì nghiệm $x_0$ thuộc khoảng nào sau đây

**A.** $(1;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_4\left(3.2^x\right)=x-1\Leftrightarrow 3.2^x=4^{x-1}\Leftrightarrow 4^x-12.2^x=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=0,(vn)\\2^x=12\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\log_2 12\in(2;4)$.

**Câu 61.** Phương trình $\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Tính giá trị của $P=x_1+x_2$.

**A.** $6+4\sqrt{2}$. **B.** $12$. **C.** $\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $3.2^x-1>0\Leftrightarrow 2^x>\dfrac{1}{3}$ $(*)$.

$\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1\Leftrightarrow 3.2^x-1=4^{x-1}\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\left(2^x\right)^2-3.2^x+1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=6+4\sqrt{2}\ \ (\text{t/m}(*))\\2^x=6-4\sqrt{2}\ \ (\text{t/m}(*))\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)\\x=\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

Khi đó $P=\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)+\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)=\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)\left(6-4\sqrt{2}\right)=\log_2 4=2$.

**Câu 62.** **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Gọi $x_1,x_2$ (với $x_1<x_2$) là nghiệm của phương trình $\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$ khi đó giá trị của biểu thức $\sqrt{3^{x_1}}-\sqrt{3^{x_2}}$ là:

**A.** $1-\sqrt{3}$. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $2-\sqrt{3}$.

**Lời giải**

$\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$

$\Leftrightarrow 3^{2x-1}-3^{x-1}+1=3^x$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3=0$

$\Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$.

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0, x_2 = 1$. Ta được đáp án A là đúng.

**Câu 63.** **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)} = x$ là:

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Đk: $x > -3$

Đặt $t = \log_5(x+3) \Rightarrow x = 5^t - 3$, phương trình đã cho trở thành

$2^t = 5^t - 3 \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^t = 1$ (1)

Dễ thấy hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Với $t = 1$, ta có $\log_5(x+3) = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

**Câu 64.** **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Phương trình $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$ có hai ngiệm $x_1$, $x_2$. Tính $P = x_1 + x_2 + x_1x_2$.

**A.** $11$. **B.** $9$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Điều kiện**:** $2^x < 5$

$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2$.

**Câu 65.** **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho phương trình $\log_4(3.2^x - 1) = x - 1$ có hai nghiệm $x_1, x_2$. Tổng $x_1 + x_2$ là:

**A.** $\log_2(6 - 4\sqrt{2})$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $6 + 4\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

$\log_4(3.2^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 3.2^x - 1 = 4^{x-1} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} - 3.2^x + 1 = 0$ $(1)$.

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$. PT $(2) \Rightarrow \frac{1}{4}t^2 - 3t + 1 = 0$ $(2)$.

Giả sử $2$ nghiệm của PT $(2)$ là $t_1, t_2 \Rightarrow t_1.t_2 = 4 \Rightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 4 \Rightarrow 2^{x_1+x_2} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$.

## Dạng 1.4 Phương pháp hàm số, đánh giá

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x) = 0$ không quá một nghiệm trên **D.**

$\longrightarrow$ Để vận dụng định lý này, ta cần nhẩm được 1 nghiệm $x = x_o$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x = x_o$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u;\, v \in (a;b)$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$".

$\longrightarrow$ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

**Câu 66.** **(Đề tham khảo 2017)** Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $4$

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$.

Xét hàm số $y = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$.

$y' = 6(x-1) + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{6x^2 - 3}{x+1}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa điều kiện).

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ | $\searrow$ | $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vì $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

**Câu 67.** **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\ln(x-1) = \dfrac{1}{x-2}$ là:

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Hàm số $f(x) = \ln(x-1)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x-2}$ có $g'\left(x\right)=-\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}<0$, $\forall x\neq 2$ nên $g\left(x\right)$ luôn nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm.

**Câu 68.** **(THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Giải phương trình $\log_2 x.\log_3 x+x.\log_3 x+3=\log_2 x+3\log_3 x+x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $35$. **B.** $5$. **C.** $10$. **D.** $9$.

**Lời giải**

Điều kiện $x>0$.

$\log_2 x.\log_3 x+x.\log_3 x+3=\log_2 x+3\log_3 x+x \Leftrightarrow \left(\log_2 x+x-3\right)\left(\log_3 x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \log_2 x+x-3=0 \end{array}\right.$.

Ta có hàm số $f\left(x\right)=\log_2 x+x$ liên tục và đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ và $f\left(2\right)=3$ nên phương trình $\log_2 x+x-3=0$ có một nghiệm $x=2$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng $5$.

**Câu 69.** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2\left(x+3\right)=\log_2\left(x+1\right)+x^2-x-4+2\sqrt{x+3}$.

**A.** $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=1-\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>-1$.

Ta có:

$$\frac{1}{2}\log_2\left(x+3\right)=\log_2\left(x+1\right)+x^2-x-4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+3}+\left(\sqrt{x+3}-1\right)^2=\log_2\left(x+1\right)+x^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2 t+\left(t-1\right)^2$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

$$f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 2}+2\left(t-1\right)=\frac{1+2\ln 2\left(t^2-t\right)}{t\ln 2}=\frac{2\ln 2.\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\ln\sqrt{2}\right)}{t\ln 2}>0 \quad \forall t>0.$$

Vậy hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Suy ra

$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+3}\right)=f\left(x+1\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng $1$.

**Câu 70.** Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó $a, b$ là các số nguyên. Tính $2a+b$.

**A.** $3$. **B.** $8$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện:

$$\begin{cases} x>0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Ta có:

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right) - \log_5 x = 2\log_3(x-1) - 2\log_3\left(2\sqrt{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right) + 2\log_3\left(2\sqrt{x}\right) = \log_5 x + 2\log_3(x-1) \qquad (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_5(t+1) + 2\log_3(t)$ trên $(2;+\infty)$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 5} + \frac{2}{t.\ln 3} > 0$ với mọi $t \in (2;+\infty)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

Từ đó ta có $(*) \Leftrightarrow f\left(2\sqrt{x}\right) = f(x-1) \Rightarrow 2\sqrt{x} = x-1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy $\sqrt{x} = 1+\sqrt{2} \Rightarrow x = 3+2\sqrt{2} \Rightarrow a=3, b=2$

**Câu 71.** Số nghiệm thực của phương trình $2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 4^x\log_2(3x)$.

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đk: $x>0$.

Ta có $x+\sqrt{x^2+1} > 1, \forall x>0$ do đó $2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) > 0, \forall x>0$.

Với $0 < x \le \frac{1}{3}$ thì $\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) > 0 \\ 4^x\log_2(3x) \le 0 \end{cases}$, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $x > \frac{1}{3}$.

$$2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 4^x\log_2(3x) \Leftrightarrow 2^{x+\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 2^{3x}\log_2(3x).(*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t\log_2 t$, với $t>1$.

Có $f'(t) = 2^t\left(\frac{1}{t\ln 2} + \ln 2\log_2 t\right) \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in (1;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=f\left(3x\right)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=3x\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm thực.

**Câu 72.** **(Bắc Ninh - 2018)** Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2\left(x+2\right)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi $S$ là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của $S$ là

**A.** $S=-2$. **B.** $S=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **C.** $S=2$. **<u>D</u>.** $S=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

**Lời giải**

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} -2<x<-\frac{1}{2} \\ x>0 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2 t+\left(t-1\right)^2$, $t>0$.

Ta có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 2}+2\left(t-1\right)=\frac{2\ln 2.t^2-2\ln 2.t+1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t>0$, do đó hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{2}\log_2\left(x+2\right)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$. Vậy $S=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

**Câu 73.** **(Toán Học Và Tuổi Trẻ - 2018)** Biết $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với $a$, $b$ là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=16$. **B.** $a+b=11$. **<u>C</u>.** $a+b=14$. **D.** $a+b=13$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(\dfrac{(2x-1)^2}{2x}\right)+4x^2-4x+1=2x$

$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x \ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0$ với $t>0$

Vậy hàm số đồng biến

Phương trình $(1)$ trở thành $f\left((2x-1)^2\right)=f(2x) \Leftrightarrow (2x-1)^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

Vậy $x_1+2x_2=\left[\begin{array}{ll} \dfrac{9-\sqrt{5}}{4} & (l) \\ \dfrac{9+\sqrt{5}}{4} & (tm) \end{array}\right. \Rightarrow a=9;b=5 \Rightarrow a+b=9+5=14.$

**Câu 74. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)=2018$ là

**A.** $3$. **B.** $1$. **<u>C</u>.** $4$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)$ với $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=x+1-\dfrac{2x}{x^2-2}$; $f''(x)=1+\dfrac{2x^2+4}{\left(x^2-2\right)^2}>0, \forall x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Nên suy ra hàm số $f'(x)=x+1-\dfrac{2x}{x^2-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Mặ khác $f'(2).f'\left(\sqrt{3}\right)=1.\left(1-\sqrt{3}\right)<0$ và $f'(-3).f'(-2)=-\dfrac{8}{7}.1<0$ nên $f'(x)$ có đúng một nghiệm $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và đúng một nghiệm $b\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(a)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(b)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=2018$ có bốn nghiệm phân biệt.

**Câu 75.** **(THPT Lê Xoay - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\sin 2x-\cos x=1+\log_2\left(\sin x\right)$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Vì $\sin x>0$ và $\cos x>0$, $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình đã cho tương đương

$\sin 2x-\cos x+\log_2\left(\cos x\right)=1+\log_2\left(\sin x\right)+\log_2\left(\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\cos x\right)-\cos x=\log_2\left(\sin 2x\right)-\sin 2x\quad (*)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2 t-t$, với $t\in\left(0;1\right)$ ta có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 2}-1>0,\ \forall t\in\left(0;1\right)$.

Do đó, hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Từ phương trình $(*)$, ta có $f\left(\cos x\right)=f\left(\sin 2x\right)\Leftrightarrow \cos x=\sin 2x\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ hay $x=\frac{\pi}{6}$.

**Câu 76.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Phương trình $\log_3\left(x^2+2x-3\right)+x^2-x-7=\log_3\left(x+1\right)$ có số nghiệm là $T$ và tổng các nghiệm là $S$. Khi đó $T+S$ bằng

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

* Điều kiện $\begin{cases}x^2+2x-3>0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

* Ta có $x=3$ là một nghiệm của phương trình.

* Khi $x>1$, phương trình đã cho được viết lại $\log_3\left(\frac{x^2+2x-3}{x+1}\right)=-x^2+x+7\ (*)$.

* Phương trình $(*)$ có vế trái là hàm đồng biến và vế phải là hàm nghịch biến khi $x>1$ suy ra $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

* Vậy $T+S=4$.

**Câu 77.** **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Biết $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+3x_2=\frac{1}{4}\left(a+2\sqrt{b}\right)$ với $a,b$ là các số nguyên dương. Tính $a+b$

**A.** $a+b=14$. **B.** $a+b=16$. **C.** $a+b=17$. **D.** $a+b=15$.

**Lời giải**

$\frac{4x^2-4x+1}{2x}>0\Leftrightarrow\frac{\left(2x-1\right)^2}{2x}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{1}{2}\\x>0\end{cases}$.

$\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x$

Xét hàm $f(t)=\log_7 t+t\,(t>0)$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 7}+1>0\forall t>0$, vậy $f(t)=\log_7 t+t\,(t>0)$ là hàm đồng biến suy ra

$\log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x \Leftrightarrow (2x-1)^2=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$.

$x_1+3x_2=\frac{1}{4}\left(12+2\sqrt{5}\right)$.

**Câu 78.** **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho biết phương trình $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có nghiệm duy nhất $x=a+b\sqrt{2}$. Hỏi $m$ thuộc khoảng nào dưới đây để hàm số $y=\frac{mx+a-2}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;\ 2]$ bằng $-2$.

**A.** $m\in(7;\ 9)$. **B.** $m\in(6;\ 7)$. **C.** $m\in(2;\ 4)$. **D.** $m\in(4;\ 6)$.

**Lời giải**

+ Điều kiện: $x>1$.

Ta có: $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow \log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)-\log_5 x=\log_3(x-1)^2-\log_3\left(2\sqrt{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)+\log_3\left(2\sqrt{x}\right)^2=\log_5(x)+\log_3(x-1)^2$ (*).

Xét hàm số $f(t)=\log_5 t+\log_3(t-1)^2$, với $t>1$

có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 5}+\frac{2}{(t-1).\ln 3}>0,\ \forall t>1$

nên $f(t)$ đồng biến do đó (*) $\Leftrightarrow x=2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{2}$ (vì $x>1$)

$\Leftrightarrow x=3+2\sqrt{2}$. Vậy $a=3$.

+ Với $a=3$, ta xét hàm số $y=\frac{mx+1}{x-m}$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

$y'=\frac{-m^2-1}{(x-m)^2}<0$ do đó hàm số luôn nghịch biến.

Khi đó hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;\ 2]$ bằng $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m\notin[1;\ 2] \\ y(1)=-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1;\ 2] \\ \dfrac{m+1}{1-m} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

**DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ**

**Dạng 2.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số**

+ Nếu $a > 0,\ a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$.

+ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \log_a b.g(x)$ **(logarit hóa)**.

**Câu 1.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1}$ là

**A.** $x = -1;\ x = 2$. **B.** $x = 1;\ x = -2$. **C.** $x = 1;\ x = 2$. **D.** Vô nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{-(x^2-2x-3)} = 5^{x+1} \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1;\ x = 2$.

**Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$ là

**A.** $\{-1\}$. **B.** $\{-1; 2\}$. **C.** $\{-1; 4\}$. **D.** $\{2\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{-x^2+2x+3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = x + 1$.

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

**Câu 3.** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $2^{x^2+2x} = 8^{2-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} = 2^{6-3x} \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -6 \end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình bằng $-5$.

**Câu 4.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng:

**A.** $17$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$7^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}\Leftrightarrow 7^{x+1}=7^{-\left(x^2-2x-3\right)}\Leftrightarrow x+1=-x^2+2x+3\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=2\end{array}\right.$.

Vậy $x_1^2+x_2^2=5$.

**Câu 5.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}\Leftrightarrow 5^{3x-2}=5^{x^2}\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng $5$.

**Câu 6.** Nghiệm của phương trình $2^{7x-1}=8^{2x-1}$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$2^{7x-1}=8^{2x-1}\Leftrightarrow 2^{7x-1}=2^{3.(2x-1)}\Leftrightarrow 2^{7x-1}=2^{6x-3}\Leftrightarrow 7x-1=6x-3\Leftrightarrow x=-2$.

**Câu 7.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Giải phương trình $(2,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$.

**A.** $x\geq 1$. **B.** $x=1$. **C.** $x<1$. **D.** $x=2$.

**Lời giải**

Ta có $(2,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{5x-7}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-x-1}\Leftrightarrow 5x-7=-x-1\Leftrightarrow x=1$.

**Câu 8.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Phương trình $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $x_1x_2$.

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

Ta có $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}\Leftrightarrow x^2-4=2-6x\Leftrightarrow x^2+6x-6=0$.

Áp dụng Vi-ét suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thì $x_1x_2=-6$.

**Câu 9.** **(Sở Quảng Nam - 2018)** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=8^{2-x}$ bằng

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-6$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương: $2^{x^2+2x}=2^{3(2-x)}\Leftrightarrow x^2+2x=6-3x\Leftrightarrow x^2+5x-6=0$.

Do đó tổng các nghiệm của phương trình là: $S=-\dfrac{b}{a}=-5$.

**Câu 10.** **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là

**A.** $\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$. **B.** $\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$. **C.** $\{0;2\}$. **D.** $\left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}$.

**Lời giải**

Ta có $4^{x-x^2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\Leftrightarrow 2^{2x-2x^2}=2^{-x}\Leftrightarrow -2x^2+2x=-x\Leftrightarrow -2x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

**Câu 11.** **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Tính tổng $S=x_1+x_2$ biết $x_1$, $x_2$ là các giá trị thực thỏa mãn đẳng thức $2^{x^2-6x+1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-3}$.

**A.** $S=-5$. **B.** $S=8$. **C.** $S=4$. **D.** $S=2$.

**Lời giải**

Ta có $2^{x^2-6x+1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-3}\Leftrightarrow 2^{x^2-6x+1}=(2)^{-2(x-3)}\Leftrightarrow x^2-6x+1=-2x+6$

$\Leftrightarrow x^2-4x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=5\end{array}\right.\Rightarrow S=x_1+x_2=4$.

**Câu 12.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội - 2018)** Tích các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

**A.** $-2$. **B.** $-4$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

ĐKXĐ : $x\neq -1$

Vì $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)=1$ nên $\left(\sqrt{5}-2\right)=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{-x+1}{x+1}}$

$\Leftrightarrow x-1=\dfrac{-x+1}{x+1}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$. (thỏa điều kiện)

Suy ra tích hai nghiệm là $-2$.

**Câu 13.** **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Giải phương trình $4^{2x+3}=8^{4-x}$.

**A.** $x=\dfrac{6}{7}$. **B.** $x=\dfrac{2}{3}$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\dfrac{4}{5}$.

**Lời giải**

$4^{2x+3}=8^{4-x}\Leftrightarrow 2^{4x+6}=2^{12-3x}\Leftrightarrow 4x+6=12-3x\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{7}$.

**Câu 14.** **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho phương trình $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

**A.** Nghiệm của phương trình là các số vô tỷ.

**B.** Tổng các nghiệm của một phương trình là một số nguyên.

**C.** Tích các nghiệm của phương trình là một số âm.

**D.** Phương trình vô nghiệm.

**Lời giải.**

**Chọn C**

$2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}\Leftrightarrow 2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=2^{4x^2-4}\Leftrightarrow \left|\dfrac{28}{3}x+4\right|=4x^2-4\ (1)$.

TH1: Nếu $x>-\dfrac{3}{7}$. PT $(1)$: $\dfrac{28}{3}x+4=4x^2-4\Leftrightarrow 4x^2-\dfrac{28}{3}x-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\ \ (TM)\\ x=-\dfrac{2}{3}\ \ (L)\end{array}\right.$

TH1: Nếu $x\le -\dfrac{3}{7}$. PT $(1)$: $-\dfrac{28}{3}x-4=4x^2-4\Leftrightarrow 4x^2+\dfrac{28}{3}x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ \ (L)\\ x=-\dfrac{7}{3}\ \ (TM)\end{array}\right.$

Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{7}{3};3\right\}$.

**Dạng 2.2 Phương pháp đặt ẩn phụ**

① Loại 1. $P\left(a^{f(x)}\right)=0\xrightarrow{PP}$ đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0$.

② Loại 2. $\alpha.a^{2.f(x)}+\beta.(a.b)^{f(x)}+\lambda.b^{2.f(x)}=0\xrightarrow{PP}$ Chia hai vế cho $b^{2.f(x)}$, rồi đặt $t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$

(chia cho cơ số lớn nhất hoặc nhỏ nhất).

③ Loại 3. $a^{f(x)}+b^{f(x)}=c$ với $a.b=1\xrightarrow{PP}$ đặt $t=a^{f(x)}\Rightarrow b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}$.

④ Loại 4. $\alpha.a^{f(x)}+\left[\begin{array}{l} a^{f(x)}.a^{g(x)}\\ \dfrac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}}\end{array}\right.+\beta.a^{g(x)}+b=0\xrightarrow{PP}$ đặt $\begin{cases} u=a^{f(x)}\\ v=a^{g(x)}\end{cases}$.

**Câu 15.** **(Mã 123 2017)** Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$ ta được phương trình nào sau đây

**A.** $2t^2-3t=0$ **B.** $4t-3=0$ **C.** $t^2+t-3=0$ **D.** $t^2+2t-3=0$

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x+2.2^x-3=0$

**Câu 16.** **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Tập nghiệm của phương trình $5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1$ là

**A.** $\{1;-1;3\}$. **B.** $\{-1;1;3;6\}$. **C.** $\{-6;-1;1;3\}$. **D.** $\{1;3\}$.

**Lời giải**

$5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1\Leftrightarrow 5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{\left(x^2-4x+3\right)+\left(x^2+7x+6\right)}+1$.

Đặt $\begin{cases} a=x^2-4x+3 \\ b=x^2+7x+6 \end{cases}$, ta được phương trình:

$5^a+5^b=5^{a+b}+1\Leftrightarrow 5^a+5^b=5^a.5^b+1\Leftrightarrow\left(1-5^a\right)\left(1-5^b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 5^a=1 \\ 5^b=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x^2+7x+6=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình là $\{-6;-1;1;3\}$.

**Câu 17.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}\Leftrightarrow 9^x-6^x=2.4^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^x=2\ (*)$.

Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t$ với $t>0$, phương trình $(*)$ trở thành $t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=-1 & (\text{L}) \\ t=2 & \end{array}\right.$.

Với $t=2\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=2\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}2>0$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

**Câu 18.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $4^x-6.2^x+2=0$ bằng

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $6$. **D.** $2$.

**Lời giải**

$4^x-6.2^x+2=0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-6.2^x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2^x=3+\sqrt{7} \\ 2^x=3-\sqrt{7} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\log_2\left(3+\sqrt{7}\right) \\ x=\log_2\left(3-\sqrt{7}\right) \end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình

là $\log_2\left(3+\sqrt{7}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{7}\right)=\log_2\left[\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)\right]=\log_2 2=1$.

**Câu 19.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x+1}+3^{1-x}=10$ là

**A.** 1. **B.** 0. **C.** $-1$. **D.** 3.

**Lời giải**

Ta có: $3^{x+1}+3^{1-x}=10\Leftrightarrow 3.3^x+\frac{3}{3^x}=10$

Đặt $t=3^x\ (t>0)$, phương trình trở thành: $3t+\frac{3}{t}=10\Leftrightarrow 3t^2-10t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Với $t=3$ ta có $3^x=3\Leftrightarrow x=1$.

Với $t=\frac{1}{3}$ ta có $3^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^x=3^{-1}\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là: $1-1=0$.

**Câu 20.** Gọi $x_1,x_2$ là nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$. Khi đó $x_1^2+2x_2^2$ bằng

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right)^x.\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1$. Đặt $t=\left(2-\sqrt{3}\right)^x, t>0\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t+\frac{1}{t}=4\Rightarrow t^2-4t+1=0\Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}$.

Với $t=2-\sqrt{3}\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=1$.

Với $t=2+\sqrt{3}\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $x_1^2+2x_2^2=3$.

**Câu 21.** **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2.4^x-9.2^x+4=0$ bằng.

**A.** $2$. **B.** $-1$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Phương trình: $2.4^x-9.2^x+4=0$ (1) có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=2^x$ ( $t>0$) Khi đó pt( 1) trở thành:

$$2t^2-9t+4=0\Leftrightarrow(t-4)(2t-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4(tm)\\t=\frac{1}{2}(tm)\end{array}\right.$$

Với $t=4\Rightarrow 2^x=4\Leftrightarrow 2^x=2^2\Leftrightarrow x=2$

Với $t=\frac{1}{2}\Rightarrow 2^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2^x=2^{-1}\Leftrightarrow x=-1$

Phương trình có tập nghiệm là**:** $S=\{2;-1\}$**.** Vậy tổng tất cả các nghiệm của pt (1) là $1$.

**Câu 22.** **(THPT Nghĩa Hưng NĐ 2019)** Phương trình $6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Khi đó tổng hai nghiệm $x_1+x_2$ là.

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

$$6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0\Leftrightarrow\frac{6^{2x}}{6}-\frac{5.6^x}{6}+1=0\Leftrightarrow 6^{2x}-5.6^x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6^{x_1}=2\\6^{x_2}=3\end{array}\right..$$

$$\Rightarrow 6^{x_1}.6^{x_2}=3.2\Leftrightarrow 6^{x_1+x_2}=6\Leftrightarrow x_1+x_2=1.$$

**Câu 23.** Cho phương trình $25^x-20.5^{x-1}+3=0$. Khi đặt $t=5^x$, ta được phương trình nào sau đây.

**A.** $t^2-3=0$. **B.** $t^2-4t+3=0$. **C.** $t^2-20t+3=0$. **D.** $t-\frac{20}{t}+3=0$.

**Lời giải**

Ta có: $25^x - 20.5^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 20.\frac{5^x}{5} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 4.5^x + 3 = 0$

Đặt $t = 5^x$, $t > 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0$.

**Câu 24.** **(Sở Bình Phước -2019)** Tập nghiệm của phương trình $9^x - 4.3^x + 3 = 0$ là

**A.** $\{0;1\}$ **B.** $\{1\}$ **C.** $\{0\}$ **D.** $\{1;3\}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $9^x - 4.3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3^0 \\ 3^x = 3^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

**Câu 25.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Số nghiệm thực của phương trình $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$ là:

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Lời giải**

pt $\Leftrightarrow 4^{x-1} + 16.2^{x-1} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x-1} = -8 + 2\sqrt{17} \\ 2^{x-1} = -8 - 2\sqrt{17} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 + \log_2\left(-8 + 2\sqrt{7}\right)$

**Câu 26.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của phương trình $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$ là

**A.** $S = \left\{3; \frac{1}{3}\right\}$ **B.** $S = \{-1\}$ **C.** $S = \{1;-1\}$ **D.** $S = \{3;1\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$3^{2+x} + 3^{2-x} = 30 \Leftrightarrow 3.3^{2x} - 10.3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1$

**Câu 27.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $f(x) = x.5^x$. Tổng các nghiệm của phương trình $25^x + f'(x) - x.5^x.\ln 5 - 2 = 0$ là

**A.** $-2$ **B.** 0 **C.** $-1$ **D.** 1

**lời giải:**

**Chọn B**

Ta có $f(x) = x.5^x \Rightarrow f'(x) = 5^x + x.5^x.\ln 5$

Nên $25^x + f'(x) - x.5^x.\ln 5 - 2 = 0 \Rightarrow 25^x + 5^x - 2 = 0$

Đặt $t = 5^x\ (t > 0)$

Ta được phương trình $t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2\ (l) \end{array}\right. \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

**Câu 28.** **(Chuyên KHTN 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

**A.** 9. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 27.

**Lời giải**

$3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-18.3^x+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=9+3\sqrt{6}\\3^x=9-3\sqrt{6}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)\\x_2=\log_3\left(9-3\sqrt{6}\right)\end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là:

$x_1+x_2=\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)+\log_3\left(9-3\sqrt{6}\right)=\log_3\left[\left(9+3\sqrt{6}\right)\left(9-3\sqrt{6}\right)\right]=\log_3 27=3$.

**Câu 29.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

**A.** 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

**Lời giải**

Ta có: $9^x-6^x=2^{2x+1}\Leftrightarrow 9^x-6^x=2.4^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=-1(L)\\\left(\frac{3}{2}\right)^x=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}2$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

**Câu 30.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$ có tích các nghiệm là?

**A.** 0. **B.** 2. **C.** $-1$. **D.** 1.

**Lời giải**

Đặt $t=\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ $(t>0)\Rightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\frac{1}{t}$

Phương trình đã cho trở thành

$t+\frac{1}{t}-2\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}\,t+1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1+\sqrt{2}\\t=-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$

Với $t=1+\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^x=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow x=-1$

Với $t=-1+\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^x=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1$

Vậy tích 2 nghiệm của phương trình đã cho là $-1$

**Câu 31.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Gọi $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$.Tính $\left|x_1-x_2\right|$

**A.** 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Lờigiải

**Chọn D**

Đặt $2^{x^2-x}=t(t>0)$. Phương trình tương đương với

$t^2+2t-3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\end{array}\right.$

Vì $t>0\Rightarrow t=1\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow|x_1-x_2|=1$

**Câu 32.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Giải phương trình: $4^{1+x}+4^{1-x}=2\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+8$

**Lời giải**

$4^{1+x}+4^{1-x}=2\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+8\Leftrightarrow 4^{1+x}+4^{1-x}=4\left(2^{1+x}-2^{1-x}\right)+8$

Đặt $t=2^{1+x}-2^{1-x}\Rightarrow t^2=4^{1+x}+4^{1-x}-8$

Phương trình trở thành:

$t^2=4t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{1+x}-2^{1-x}=0\\2^{1+x}-2^{1-x}=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{1+x}=2^{1-x}\\2^{2x}-2.2^x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+x=1-x\\2^x=1-\sqrt{2}\quad(VN)\\2^x=1+\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

**Câu 33.** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x+8}-4.3^{x+5}+27=0$?

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $\frac{4}{27}$. **D.** $-\frac{4}{27}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $3^{2x+8}-4.3^{x+5}+27=0\Leftrightarrow 3^{2(x+4)}-12.3^{x+4}+27=0$.

Đặt $t=3^{x+4}\left(t\geq 0\right)$ ta được phương trình $t^2-12t+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=9\end{array}\right.$

từ đó ta có $\left[\begin{array}{l}3^{x+4}=3\\3^{x+4}=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-2\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm phương trình đã cho là -5.

**Câu 34.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0$ bằng

**A.** $0$. **B.** $18$. **C.** $3$. **D.** $27$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-18.3^x+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=9+3\sqrt{6}\\3^x=9-3\sqrt{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)\\x=\log_3\left(9-3\sqrt{6}\right)\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm là

$\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)+\log_3\left(9-3\sqrt{6}\right)=\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)\left(9-3\sqrt{6}\right)=\log_3 27=3$.

**Câu 35.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x+1}+3^{1-x}=10$ là

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $-1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Cách 1: Ta có $3^{x+1}+3^{1-x}=10\Leftrightarrow 3.3^x+\frac{3}{3^x}=10$.

Đặt $t=3^x, t>0$ phương trình trở thành $3t^2-10t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Với $t=3$ ta có $3^x=3 \Leftrightarrow x=1$

Với $t=\dfrac{1}{3}$ ta có $3^x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=-1$

**Câu 36.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^x+3^{4-x}=30$ bằng

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $9$. **D.** $27$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$3^x+3^{4-x}=30 \Leftrightarrow 3^x+\dfrac{81}{3^x}=30$.

Đặt $t=3^x\left(t>0\right)$, phương trình đã cho trở thành:

$t+\dfrac{81}{t}=30 \Leftrightarrow t^2-30t+81=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=27 \Rightarrow 3^x=27 \Leftrightarrow x=3 \\ t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1 \end{array}\right.$

Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình là $1.3=3$.

**Câu 37.** **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Kí hiệu $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm thực của phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$. Giá trị của $\left|x_1-x_2\right|$ bằng

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3 \Leftrightarrow \left(2^{x^2-x}\right)^2+2.2^{x^2-x}-3=0$.

Đặt $2^{x^2-x}=t>0$ ta được: $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Vì $t>0$ nên nhận $t=1$. Suy ra $2^{x^2-x}=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Như thế $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \end{cases}$.

Vậy $\left|x_1-x_2\right|=1$.

**Câu 38.** **(Đại học Hồng Đức 2019)** Cho phương trình $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}=4$. Tổng các nghiệm của phương trình trong $\left[-2\pi;2\pi\right]$ bằng

**A.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $0$. **D.** $\pi$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}=4 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{\sin x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{\sin x}=4$.

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^{\sin x}$, $t>0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$t+\frac{1}{t}=4 \Leftrightarrow t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2+\sqrt{3} \\ t=2-\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Với $t=2+\sqrt{3} \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \xrightarrow[x\in[-2\pi;2\pi]]{k\in\mathbb{Z}} x\in\left\{-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$.

Với $t=2-\sqrt{3} \Rightarrow \sin x=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \xrightarrow[x\in[-2\pi;2\pi]]{k\in\mathbb{Z}} x\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng $0$.

**Câu 39.** **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Gọi $a$ là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18.3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về $a$?

**A.** $(a-10)^2=1$.

**B.** $a$ cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}$.

**C.** $a^2+a+1=2$.

**D.** $a=10^2$.

**Lời giải**

Điều kiện $x>0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\log x}$ ta được $4\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}-18=0$.

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}$, $t>0$.

Ta có $4t^2-t-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{4} \\ t=-2\,(L) \end{array}\right.$.

Với $t=\frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \log x=2 \Leftrightarrow x=100$.

Vậy $a=100=10^2$.

**Câu 40.** **(THPT Lục Ngạn - 2018)** Nghiệm của phương trình $25^x-2(3-x)5^x+2x-7=0$ nằm trong khoảng nào sau đây?

**A.** $(5;10)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(0;1)$

**Lời giải**

Đặt $t=5^x$, $t>0$.

Phương trình trở thành: $t^2-2(3-x)t+2x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\,(L) \\ t=-2x+7 \end{array}\right.$.

Với $t=-2x+7$ ta có : $5^x=-2x+7 \Leftrightarrow 5^x+2x-7=0$.

Phương trình có một nghiệm $x=1$.

Với $x>1$ : $5^x+2x-7>5+2-7 \Leftrightarrow 5^x+2x-7>0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $x<1$ : $5^x+2x-7<5+2-7 \Leftrightarrow 5^x+2x-7<0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1\in(0;2)$.

**Câu 41.** **(THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15.2^{x+1}+1}\ge\left|2^x-1\right|+2^{x+1}$ bằng bao nhiêu?

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

Với $x\ge 0$ thì $\sqrt{15.2^{x+1}+1}\ge\left|2^x-1\right|+2^{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{30.2^x+1}\ge 3.2^x-1$. (1)

Đặt $t=2^x\ge 1$ thì $(1)\Leftrightarrow\sqrt{30t+1}\ge 3t-1\Leftrightarrow 30t+1\ge(3t-1)^2$

$\Leftrightarrow 9t^2-36t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 4$

$\Rightarrow 1\le 2^x\le 4\Rightarrow x\in\{0;1;2\}$.

**Câu 42.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6)** Cho phương trình $8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x$. Khi đặt $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

**A.** $8t^3-3t-12=0$. **B.** $8t^3+3t^2-t-10=0$. **C.** $8t^3-125=0$. **D.** $8t^3+t-36=0$.

**Lời giải**

Ta có $8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x \Leftrightarrow 8.2^{3x}+8.\dfrac{1}{2^{3x}}+24.2^x+24.\dfrac{1}{2^x}-125=0$

$\Leftrightarrow 8\left(2^{3x}+\dfrac{1}{2^{3x}}\right)+24\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)-125=0$.

Đặt $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$ $(t\ge 2)$. Khi đó ta có $2^{3x}+\dfrac{1}{2^{3x}}=t^3-3t$

Phương trình trở thành $8\left(t^3-3t\right)+24t-125=0\Leftrightarrow 8t^3-125=0$.

**Câu 43.** **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Gọi $S$ là tập nghiệm của của phương trình: $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$. Khi đó $S$ là

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{1;2;-1\}$. **C.** $\{1;2;-1;-5\}$. **D.** $\varnothing$.

**Lời giải**

Nhận xét:

Ta có $(x^2-3x+2)+(x^2+6x+5)=2x^2+3x+7$ do đó $4^{2x^2+3x+7}=4^{x^2-3x+2}.4^{x^2+6x+5}$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$(4^{x^2-3x+2}-4^{2x^2+3x+7})-(1-4^{x^2+6x+5})=0\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}(1-4^{x^2+6x+5})-(1-4^{x^2+6x+5})$

$$\Leftrightarrow (1-4^{x^2+6x+5})(4^{x^2-3x+2}-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^{x^2+6x+5}=1\\4^{x^2-3x+2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+6x+5=0\\x^2-3x+2=0\end{array}\right.$$

Vậy $S=\{1;2;-1;-5\}$.

Dạng 2.3 Phương pháp logarit hóa

***Dạng 1***: Phương trình: $a^{f(x)}=b\Leftrightarrow\begin{cases}0<a\neq 1,b>0\\ f(x)=\log_a b\end{cases}$

***Dạng 2***: Phương trình:
$a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow\log_a a^{f(x)}=\log_a b^{f(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x).\log_a b$
hoặc $\log_b a^{f(x)}=\log_b b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x).\log_b a=g(x)$.

**Câu 44.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Số giao điểm của các đồ thị hàm số $y=3^{x^2+1}$ và $y=5$ là

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=3^{x^2+1}$ và $y=5$ bằng số nghiệm của phương trình

$3^{x^2+1}=5$

+) $3^{x^2+1}=5\Leftrightarrow x^2+1=\log_3 5\Leftrightarrow x^2=\log_3 5-1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_3 5-1}$

+) Vậy số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=3^{x^2+1}$ và $y=5$ bằng 2

**Câu 45.** **(Sở GD Nam Định - 2019)** Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$

**A.** $-3\log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** $-1$. **D.** $1-\log_2 3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

PT $\Leftrightarrow\log_2 2^{x^2-1}=\log_2 3^{2x+3}$
$\Leftrightarrow x^2-1=(2x+3)\log_2 3$
$\Leftrightarrow x^2-2x.\log_2 3-1-3\log_2 3=0$

Do $1.(-1-3\log_2 3)<0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm thực phân biệt $x_1,x_2$.

Theo Vi-ét ta có $x_1x_2=-1-3\log_2 3=-\log_2 2-\log_2 27=-\log_2 54$.

**Câu 46.** Cho hai số thực $a>1,b>1$. Gọi $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $a^x.b^{x^2-1}=1$. Trong trường hợp biểu thức $S=\left(\frac{x_1.x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $a\geq b$. **B.** $a.b=4$. **C.** $a.b=2$. **D.** $a<b$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $a^x.b^{x^2-1}=1\Leftrightarrow x^2+x\log_b a-1=0$. Nhận thấy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu.

Theo Vi-et: $x_1+x_2=-\log_b a$; $x_1.x_2=-1$.

Khi đó: $S=\left(\frac{x_1.x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2=\log_a^2 b+\frac{4}{\log_a b}$.

Đặt $\log_a b=t,t>0$ ( Vì $a>1,b>1$), $S=t^2+\frac{4}{t}$; $S'=2t-\frac{4}{t^2}=\frac{2t^3-4}{t^2}$; $S'=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{2}$

| $t$ | $0$ | | $\sqrt[3]{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $S$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Suy ra biểu thức $S$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=\sqrt[3]{2}$ hay $\log_a b=\sqrt[3]{2}>1 \Rightarrow a<b$.

**Câu 47.** **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Cho $x$, $y$, $z$ là các số thực thỏa mãn $2^x=3^y=6^{-z}$. Giá trị của biểu thức $M=xy+yz+xz$ là:

**A.** 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

Đặt $2^x=3^y=6^{-z}=t$ với $t>0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x=t \\ 3^y=t \\ 6^{-z}=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\log_2 t \\ y=\log_3 t \\ z=-\log_6 t \end{cases}.$$

Mặt khác: $\log_6 t=\dfrac{1}{\log_t 6}=\dfrac{1}{\log_t 3+\log_t 2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_3 t}+\dfrac{1}{\log_2 t}}=\dfrac{\log_3 t.\log_2 t}{\log_3 t+\log_2 t}$.

$$M=xy+yz+xz=\log_3 t.\log_2 t-\log_3 t.\log_6 t-\log_6 t.\log_2 t=\log_3 t.\log_2 t-\left(\log_3 t+\log_2 t\right).\log_6 t$$

$$=\log_3 t.\log_2 t-\left(\log_3 t+\log_2 t\right).\frac{\log_3 t.\log_2 t}{\log_3 t+\log_2 t}=0.$$

**Câu 48.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi $x$, $y$ các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(x+y\right)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a, b$ là hai số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

**A.** $T=26$. **B.** $T=29$. **C.** $T=20$. **D.** $T=25$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(x+y\right)$, ta có $\begin{cases} x=9^t \\ y=6^t \\ x+y=4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t+6^t=4^t$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,(loai) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{9}{6}\right)^t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Mà $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a=1; b=5$.

Vậy $T=a^2+b^2=1^2+5^2=26$.

**Câu 49.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho các số thực dương $a,b$ thỏa mãn $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(4a-5b)-1$. Đặt $T=\frac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $1<T<2$. **B.** $\frac{1}{2}<T<\frac{2}{3}$. **C.** $-2<T<0$. **D.** $0<T<\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả sử: $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(4a-5b)-1=t\Rightarrow\begin{cases}a=4^t\\b=6^t\\4a-5b=9^{t+1}\end{cases}$

Khi đó $4.4^t-5.6^t=9.9^t\Leftrightarrow 4.\left(\frac{4}{9}\right)^t-5.\left(\frac{6}{9}\right)^t=9\Leftrightarrow 4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}-5.\left(\frac{2}{3}\right)^t-9=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{9}{4}\\\left(\frac{2}{3}\right)^t=-1\quad(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow t=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right)\Leftrightarrow t=-2$

Vậy $T=\frac{b}{a}=\left(\frac{6}{4}\right)^t=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{9}\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 50.** **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Phương trình $3^{x^2}.4^{x+1}-\frac{1}{3^x}=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tính $T=x_1.x_2+x_1+x_2$.

**A.** $T=-\log_3 4$. **B.** $T=\log_3 4$. **C.** $T=-1$. **D.** $T=1$.

**Lời giải**

Ta có $3^{x^2}.4^{x+1}-\frac{1}{3^x}=0$

$\Leftrightarrow 3^{x(x+1)}.4^{x+1}=1$

$\Leftrightarrow\log\left(3^{x(x+1)}.4^{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\log 3^{x(x+1)}+\log 4^{x+1}=0$

$\Leftrightarrow x(x+1)\log 3+(x+1)\log 4=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(x\log 3+\log 4)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\log_3 4\end{array}\right.$

Do đó $T=x_1.x_2+x_1+x_2=\log_3 4-(1+\log_3 4)=-1$

**Dạng 2.4 Phương pháp hàm số, đánh giá**

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x)=0$ không quá một nghiệm trên **D.**

$\longrightarrow$ Để vận dụng định lý này, ta cần nhẩm được 1 nghiệm $x = x_o$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x = x_o$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u;\ v \in (a;b)$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$".

$\longrightarrow$ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

**Câu 51.** **(SGD Nam Định 2019)** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ bằng.

**A.** $-1$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $15x.5^x = 5^{x+1} + 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1}(3x-1) = 27x + 23$ (1)

Dễ thấy $x = \frac{1}{3}$ không thỏa mãn phương trình trên nên ta có

$5^{x+1}(3x-1) = 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1} = \frac{27x+23}{3x-1}$. (2)

Hàm số $y = f(x) = 5^{x+1} = 5.5^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = g(x) = \frac{27x+23}{3x-1}$, có đạo hàm $g'(x) = -\frac{96}{(3x-1)^2} < 0$, nên nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Do đó trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, phương trình (2) có nhiều nhất một nghiệm.

Ta thấy $x = -1$ và $x = 1$ là các nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Do đó (2) và (1) có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 1$.

Tổng hai nghiệm này bằng $0$.

**Câu 52.** Cho số thực $\alpha$ sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2\cos(\alpha x)$ có đúng $2019$ nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ là

**A.** $2019$. **B.** $2018$. **C.** $4037$. **D.** $4038$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 2.2\cos^2\left(\alpha\frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2\cos\left(\alpha.\frac{x}{2}\right) & (1) \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2\cos\left(\alpha.\frac{x}{2}\right) & (2) \end{array}\right..$$

Ta thấy, nếu phương trình $2^x - 2^{-x} = 2\cos(\alpha x)$có 2019 nghiệm thực thì phương trình (1) cũng có 2019 nghiệm thực.

Nhận xét:

+ $x_0$ là nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow -x_0$ là nghiệm của phương trình (2).

+ $x_0 = 0$ không là nghiệm của hai phương trình $(1),(2)$.

Do đó, tổng số nghiệm của cả hai phương trình $(1),(2)$ là $4038$.

Vậy phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ có $4038$ nghiệm thực.

**Câu 53.** Biết $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với $a, b$ là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=13$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=14$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x > 0, x \neq \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7\left(4x^2-4x+1\right) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7(2x) + 2x$.

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 7} + 1 > 0\ \forall t > 0$ nên là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó ta có $4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Khi đó

$x_1 + 2x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} + 2\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right)$ hoặc $x_1 + 2x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} + 2\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1}{4}\left(9-\sqrt{5}\right)$.

Vậy $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}; x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$. Do đó $a = 9; b = 5$ và $a+b = 9+5 = 14$.

**Câu 54.** Phương trình $x\left(2^{x-1}+4\right) = 2^{x+1} + x^2$ có tổng các nghiệm bằng

**A.** 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

**Lời giải:**

**Chọn A.**

$$x\left(2^{x-1}+4\right) = 2^{x+1} + x^2 \Leftrightarrow x.2^{x-1} - 4.2^{x-1} + 4x - x^2 = 0$$

Ta có $\Leftrightarrow 2^{x-1}(x-4) - x(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(2^{x-1} - x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ 2^x = 2x\ (*) \end{array}\right.$$

Giải phương trình (*):

Xét hàm số $f(x) = 2^x - 2x$ có $f'(x) = 2^x\ln 2 - 2; f''(x) = 2^x\ln^2 2 > 0$. Suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mà ta thấy $f(1) = f(2) = 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm $x = 1; x = 2$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 7.

**Câu 55.** **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Tìm số nghiệm của phương trình $\left(|x|-1\right)^2 e^{|x|-1}-\log 2=0$.

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=|x|-1\geq -1$. Với $t\geq -1\Rightarrow |x|=t+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t+1 \\ x=-t-1 \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình trở thành $t^2e^t-\log 2=0 \qquad (1)$.

Số nghiệm của phương trình $(1)$ là số điểm chung của đồ thị hàm số $y=f(t)=t^2e^t-\log 2$ và đường thẳng $y=0$

Ta có: $f'(t)=e^t\left(t^2+2t\right)\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=0 & (TM) \\ t=-2 & (L) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $\frac{1}{e}-\log 2$ | $\searrow$ | $-\log 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ta có $-\log 2<0<\dfrac{1}{e}-\log 2$, dựa vào bảng biên thiên ta được phương trình $(1)$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1,t_2$ thỏa mãn $-1<t_1<t_2$ hay phương trình đã cho có 4 nghiệm $x$ phân biệt.

**Câu 56.** Tính số nghiệm của phương trình $\cot x=2^x$ trong khoảng $\left(\dfrac{11\pi}{12};2019\pi\right)$.

**A.** $2019$. **B.** $2018$. **C.** $1$. **D.** $2020$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Xét phương trình $\cot x=2^x \qquad (1)$.

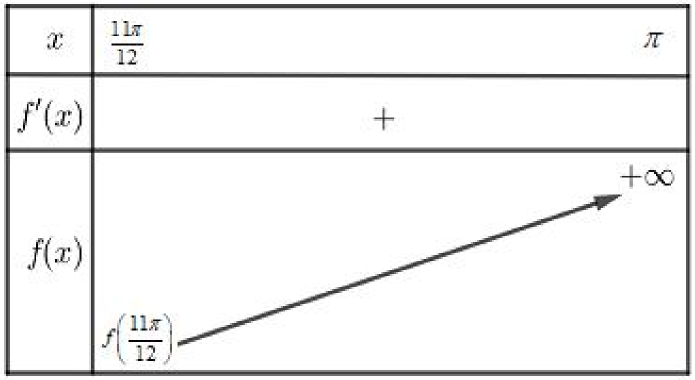
Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Xét hàm số $f(x)=2^x-\cot x, x\in\left(\dfrac{11\pi}{12};2019\pi\right)\backslash\{k\pi\}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow f'(x)=2^x.\ln 2+1+\cot^2 x>0\ \forall x\in\left(\dfrac{11\pi}{12};2019\pi\right)\backslash\{k\pi\}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

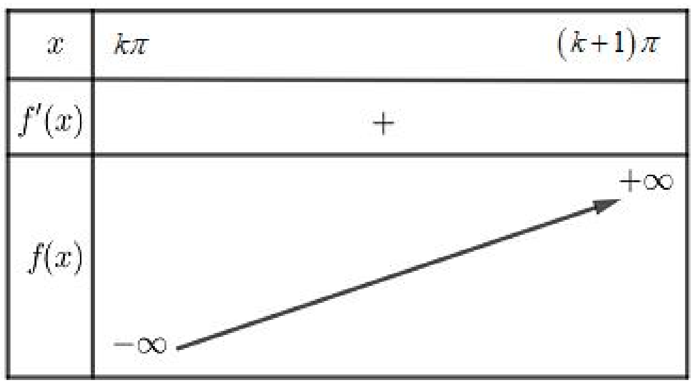
Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right);(\pi;2\pi);...;(2018\pi;2019\pi)$.

+) Trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$ ta có bảng biến thiên




Ta có $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2^{\frac{11\pi}{12}}-\cot\left(\frac{11\pi}{12}\right)\approx 11,0925>0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

+) Trên mỗi khoảng $(k\pi;(k+1)\pi), k\in\{1;2;....;2018\}$ ta có bảng biến thiên




Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy mỗi khoảng $(k\pi;(k+1)\pi), k\in\{1;2;....;2018\}$ phương trình $f(x)=0$ có đúng $1$ nghiệm. Mà có $2018$ khoảng nên phương trình $f(x)=0$ có đúng $2018$ nghiệm.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có $2018$ nghiệm.

**Câu 57.** Hỏi phương trình $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực ?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có : $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x \Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x+4\left(\frac{3}{5}\right)^x+5\left(\frac{4}{5}\right)^x-6=0$.

Xét hàm số $f(x)=3\left(\frac{2}{5}\right)^x+4\left(\frac{3}{5}\right)^x+5\left(\frac{4}{5}\right)^x-6$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Có $f'(x)=3\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+5\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm $(1)$.

Mặt khác $f(1).f(2)=\frac{8}{5}.\left(-\frac{22}{25}\right)=-\frac{176}{125}<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2).(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

**Câu 58.** **(SP Đồng Nai - 2019)** Phương trình $2019^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trên $[-5\pi;2019\pi]$?

**A.** $2025$. **B.** $2017$. **C.** $2022$. **D.** Vô nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét: $2019^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\Leftrightarrow 2019^{\sin x}=\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\quad(1)$.

Đặt: $t=\sin x, t\in[-1;1]$.

Khi đó $(1)$ trở thành $2019^t=t+\sqrt{1+t^2}\Leftrightarrow 2019^t\left(t-\sqrt{1+t^2}\right)=-1\quad(2)$.

Xét hàm số:

$$f(t)=2019^t\left(t-\sqrt{1+t^2}\right),\forall t\in[-1;1]\Rightarrow f'(t)=\frac{2019^t\left(t-\sqrt{1+t^2}\right)(\sqrt{1+t^2}\ln 2019-1)}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t-\sqrt{1+t^2}=0\\ \sqrt{1+t^2}\ln 2019-1=0\end{array}\right.$ vô nghiệm $\Rightarrow f'(t)<0,\forall t\in[-1;1]$.

$\Rightarrow(2)$ có nghiệm duy nhất $t=0\Rightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in Z$.

mà $x\in[-5\pi;2019\pi]\Rightarrow -5\pi\le k\pi\le 2019\pi\Leftrightarrow -5\le k\le 2019\Rightarrow k\in[-5;2019]$.

Kết luận: Có 2025 nghiệm thực trên $[-5\pi;2019\pi]$.

**Câu 59.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Số nghiệm của phương trình $3^{\log_7(x+4)}=x$ là

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện của phương trình: $x>-4$.

Với $x>0$ phương trình đã cho tương đương với phương trình $\log_7(x+4)=\log_3 x$.

Đặt $\log_7(x+4)=\log_3 x=t$.

Ta có $\begin{cases}x+4=7^t\\ x=3^t\end{cases}$ suy ra $7^t-3^t=4\Leftrightarrow 7^t=3^t+4\Leftrightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^t+4\left(\frac{1}{7}\right)^t-1=0\quad(1)$.

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{3}{7}\right)^t+4\left(\frac{1}{7}\right)^t-1,t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\left(\frac{3}{7}\right)^t\ln\left(\frac{3}{7}\right)+4\left(\frac{1}{7}\right)^t\ln\left(\frac{1}{7}\right)<0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Nên $f(t)$ nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.

Mà $f(1)=0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=1 \Leftrightarrow x=3$.

**Câu 60.** Cho các số thực $x$, $y$ với $x \geq 0$ thỏa mãn $e^{x+3y}+e^{xy+1}+x(y+1)+1=e^{-xy-1}+\frac{1}{e^{x+3y}}-3y$. Gọi $m$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y+1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

**A.** $m \in (2;3)$. **B.** $m \in (-1;0)$. **C.** $m \in (0;1)$. **D.** $m \in (1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết $e^{x+3y}+e^{xy+1}+x(y+1)+1=e^{-xy-1}+\frac{1}{e^{x+3y}}-3y$

$\Leftrightarrow e^{x+3y}-\frac{1}{e^{x+3y}}+(x+3y)=e^{-xy-1}-\frac{1}{e^{-xy-1}}+(-xy-1)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=e^t-\frac{1}{e^t}+t$ với $t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t)=e^t+\frac{1}{e^t}+1>0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng $f(x+3y)=f(-xy-1) \Rightarrow x+3y=-xy-1 \Rightarrow y=\frac{-x-1}{x+3} (x \geq 0)$.

Khi đó $T=x+2y+1=x-\frac{2x+2}{x+3}+1 \Rightarrow T'=1-\frac{4}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}>0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow T_{\min}=0-\frac{2.0+2}{0+3}+1=\frac{1}{3}=m$.

**Câu 61.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Số nghiệm của phương trình $x^2-5x-2=(x^2-8x+3).8^{3x-5}+(3x-5).8^{x^2-8x+3}$ là

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

Đặt $u=x^2-8x+3$, $v=3x-5$, phương trình đã cho viết lại là

$$u+v=u.8^v+v.8^u \Leftrightarrow u(1-8^v)=v(8^u-1) \ (*)$$

Ta thấy $u=0$ hoặc $v=0$ thỏa mãn phương trình $(*)$.

Với $u \neq 0$ và $v \neq 0$ ta có $(*) \Leftrightarrow \frac{1-8^v}{v}=\frac{8^u-1}{u} \quad (**)$

Ta thấy:

- Nếu $u>0$ thì $\frac{8^u-1}{u}>0$ và nếu $u<0$ thì $\frac{8^u-1}{u}>0$. Do đó $VP(**)>0, \forall u \neq 0$.
- Nếu $v>0$ thì $\frac{1-8^v}{v}<0$ và nếu $v<0$ thì $\frac{1-8^v}{v}<0$. Do đó $VT(**)<0, \forall v \neq 0$.

Từ đó suy ra $(**)$ vô nghiệm.

Như vậy, phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+3=0 \\ 3x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4+\sqrt{13} \\ x=4-\sqrt{13} \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình đã cho có $3$ nghiệm.

**Câu 62.** **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Tích tất cả các giá trị của $x$ thỏa mãn phương trình $\left(3^x-3\right)^2-\left(4^x-4\right)^2=\left(3^x+4^x-7\right)^2$ bằng

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

Phương trình $\Leftrightarrow \left(3^x+4^x-7\right)\left(3^x-4^x+1\right)=\left(3^x+4^x-7\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(3^x+4^x-7\right)\left(2.4^x-8\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2.4^x=8 & (1) \\ 3^x+4^x-7=0 & (2) \end{array}\right.$

Xét phương trình $(1)$: $(1) \Leftrightarrow 4^x=4 \Leftrightarrow x=1$.

Xét phương trình $(2)$: Xét hàm $f(x)=3^x+4^x-7$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm $f(x)$ liên tục và $f'(x)=3^x.\ln 3+4^x.\ln 4>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó, $(2) \Leftrightarrow f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$. Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng $1$.

**Câu 63.** **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Phương trình $e^x-e^{\sqrt{2x+1}}=1-x^2+2\sqrt{2x+1}$ có nghiệm trong khoảng nào?

**A.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐK: $x\ge -\dfrac{1}{2}$

$e^x-e^{\sqrt{2x+1}}=1-x^2+2\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow e^x-e^{\sqrt{2x+1}}=-(x+1)^2+\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow e^x+(x+1)^2=e^{\sqrt{2x+1}}+\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=e^t+(t+1)^2$ với $t\ge -\dfrac{1}{2}$

$f'(t)=e^t+2(t+1)>0$ với mọi $t\ge -\dfrac{1}{2}$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$(*) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt{2x+1}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2}.$$

## DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH TỔ HỢP CỦA MŨ VÀ LOGARIT

**Câu 1.** **(Tham khảo 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(7-3^x\right) = 2-x$ bằng

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $7$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định của phương trình là $7-3^x > 0 \Leftrightarrow 3^x < 7 \Leftrightarrow x < \log_3 7$.

$\log_3\left(7-3^x\right) = 2-x \Leftrightarrow 7-3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7-3^x = \dfrac{9}{3^x}$.

Đặt $t = 3^x$, với $0 < t < 7$, suy ra $x = \log_3 t$.

Ta có phương trình $t^2 - 7t - 9 = 0$ có hai nghiệm $t_1 = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ và $t_2 = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy có hai nghiệm $x_1, x_2$ tương ứng.

Ta có $x_1 + x_2 = \log_3 t_1 + \log_3 t_2 = \log_3 t_1.t_2$

Theo định lý Vi-ét ta có $t_1.t_2 = 9$, nên $x_1 + x_2 = \log_3 9 = 2$.

**Câu 2.** Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) = -2$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\log_6 5$. **C.** $5$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) = -2 \Leftrightarrow -2\log_5\left(6^{x+1} - 36^x\right) = -2 \Leftrightarrow \log_5\left(6^{x+1} - 36^x\right) = 1$.

$$\Leftrightarrow 6^{x+1} - 36^x = 5 \Leftrightarrow 6^{2x} - 6.6^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6^x = 1 \\ 6^x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_6 5 \end{array}\right..$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng: $0.\log_6 5 = 0$.

**Câu 3.** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(5-2^x\right) = 2-x$ bằng

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Điều kiện: $5-2^x > 0$.

$\log_2\left(5-2^x\right)=2-x \Leftrightarrow 5-2^x=2^{2-x} \Leftrightarrow 5-2^x=\dfrac{4}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x+4=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.(tmdk).$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là bằng $2$.

**Câu 4.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_2(4^x+4)=x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)$

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $2$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $2^{x+1}-3>0 \Leftrightarrow 2^x>\dfrac{3}{2}$.

Ta có: $\log_2(4^x+4)=x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3) \Leftrightarrow \log_2(4^x+4)=\log_2 2^x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)$

$\Leftrightarrow \log_2(4^x+4)=\log_2 2^x(2^{x+1}-3)$

$\Leftrightarrow 4^x+4=2^x(2^{x+1}-3)$

$\Leftrightarrow (2^x)^2-3.2^x-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=-1(\text{k t/m})\\2^x=4(\text{t/m})\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$.

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x=2$ thõa mãn. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm.

**Câu 5.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $\log\left(2-10^{2x}\right)=x$. Số tập con của $S$ bằng

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình $\log\left(2-10^{2x}\right)=x$, điều kiện $2-10^{2x}>0 \Leftrightarrow 2x<\log 2 \Leftrightarrow x<\log\sqrt{2}$.

Ta có $\log\left(2-10^{2x}\right)=x \Leftrightarrow 2-10^{2x}=10^x \Leftrightarrow 10^{2x}+10^x-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}10^x=-2\\10^x=1\end{array}\right. \Rightarrow x=\log 1=0$.

(Vì $10^x=-2<0$ vô nghiệm)

Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$ thỏa mãn điều kiện. loại

$\Rightarrow$ Số tập con của $S$ là $2^1=2$.

**Câu 6.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(6-2^x\right)=1-x$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định $6-2^x>0 \Leftrightarrow 2^x<6 \Leftrightarrow x<\log_2 6$

Ta có:

$\log_2\left(6-2^x\right)=1-x \Leftrightarrow 6-2^x=2^{1-x} \Leftrightarrow 6-2^x=\dfrac{2}{2^x} \Leftrightarrow -2^{2x}+6.2^x-2=0$

Hơn nữa $2^{x_1+x_2}=2^{x_1}.2^{x_2}=\dfrac{c}{a}=2 \Leftrightarrow x_1+x_2=1$

**Câu 7.** **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>0$.

PT: $\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)}=5 \quad (1)$.

Đặt $t=\dfrac{2x^2+1}{2x}=x+\dfrac{1}{2x}\geq 2\sqrt{x.\dfrac{1}{2x}}=\sqrt{2}$

PT trở thành $\log_2 t+2^t=5 \qquad (2)$.

Xét hàm $f\left(t\right)=\log_2 t+2^t \left(t\geq\sqrt{2}\right)$ là hàm đồng biến nên:

$\left(2\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow t=2$ (t/m).

Với $t=2$ thì $\dfrac{2x^2+1}{2x}=2\Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0$ (t/m). Vậy $x_1x_2=\dfrac{1}{2}$ (theo Viet ).

**Câu 8.** **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Phương trình $\log_2\left(5.2^x-4\right)=2x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình $\log_2\left(5.2^x-4\right)=2x \Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có một nghiệm nguyên dương.

**Câu 9.** **(SP Đồng Nai - 2019)** Phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$. Tính $P=x_1+x_2+x_1x_2$

**A.** $2$. **B.** $9$. **C.** $3$. **D.** $11$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $5-2^x>0\Leftrightarrow 0<2^x<5\Leftrightarrow x<\log_2 5$.

Phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x\Leftrightarrow 5-2^x=2^{2-x}\Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\Rightarrow x=0\ (n)\\2^x=4\Rightarrow x=2\ (n)\end{array}\right.$.

Khi đó $P=x_1+x_2+x_1x_2=2$.

**Câu 10.** Phương trình $\left(2^x-5\right)\left(\log_2 x-3\right)=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ (với $x_1<x_2$). Tính giá trị của biểu thức $K=x_1+3x_2$.

**A.** $K=32+\log_3 2$. **B.** $K=18+\log_2 5$. **C.** $K=24+\log_2 5$. **D.** $K=32+\log_2 3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x>0$.

$\left(2^x-5\right)\left(\log_2 x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x-5=0\\ \log_2 x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=5\\ \log_2 x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_2 5\\ x=8\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1=\log_2 5\\ x_2=8\end{array}\right.$.

Vậy $K=x_1+3x_2=\log_2 5+3.8=24+\log_2 5$.

**Câu 11.** Cho biết phương trình $\log_3(3^{x+1}-1)=2x+\log_{\frac{1}{3}} 2$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Hãy tính tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$.

**A.** $S=252$. **B.** $S=45$. **C.** $S=9$. **D.** $S=180$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_3(3^{x+1}-1)=2x+\log_{\frac{1}{3}} 2 \Leftrightarrow \log_3 2(3^{x+1}-1)=2x \Leftrightarrow 2.3^{x+1}-2=3^{2x}$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-6.3^x+2=0$.

Đặt $3^x=t,\ (t>0)$, phương trình trở thành $t^2-6.t+2=0$. Phương trình luôn có hai nghiệm dương phân biệt.

Đặt $3^{x_1}=t_1,\ 3^{x_2}=t_2,\ t_1+t_2=6,\ t_1.t_2=2$.

Ta có $S=(t_1^3+t_2^3)=(t_1+t_2)^3-3t_1.t_2(t_1+t_2)=216-3.2.6=180$

**Câu 12.** **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}2x\neq 0\\ \dfrac{2x^2+1}{2x}>0\end{array}\right. \Leftrightarrow x>0$.

Khi đó, $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5 \Leftrightarrow \log_2\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5 \Leftrightarrow \log_2\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)=5-2^{x+\frac{1}{2x}}$.

Đặt $t=x+\dfrac{1}{2x}\geq 2\sqrt{x.\dfrac{1}{2x}}=\sqrt{2}$, phương trình trở thành: $\log_2 t=5-2^t$, $t\geq\sqrt{2}$.

Xét $f\left(t\right)=\log_2 t$, $t\geq\sqrt{2}$. Ta có: $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t\geq\sqrt{2}$ nên $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Xét $g(t)=5-2^t$, $t\ge\sqrt{2}$. Ta có: $g'(t)=-2^t.\ln 2<0$, $\forall t\ge\sqrt{2}$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Từ đó phương trình $f(t)=g(t)$ có nhiều nhất một nghiệm $t\ge\sqrt{2}$. Ta nhận thấy $t=2$ là nghiệm, và đây là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_2 t=5-2^t$ trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Suy ra $x+\dfrac{1}{2x}=2\Rightarrow 2x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\\ x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$. Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện $x>0$, nên đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Tích hai nghiệm là: $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}.\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 13.** Số nghiệm của phương trình $\log_2\dfrac{2^x+4}{2^x+12}=x-3$

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình $\log_2\dfrac{2^x+4}{2^x+12}=x-3\Leftrightarrow\dfrac{2^x+4}{2^x+12}=2^{x-3}\Leftrightarrow 2^x+4=\dfrac{2^x}{2^3}\left(2^x+12\right)$

$\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+4.(2)^x-32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=4\\ 2^x=-8\end{array}\right.$.

+ Với $2^x=4\Leftrightarrow x=2$.

+ Với $2^x=-8$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có $1$ nghiệm.

**Câu 14.** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$. Điều kiện $\dfrac{2x^2+1}{2x}>0\Leftrightarrow x>0$.

Ta có $\dfrac{2x^2+1}{2x}\ge\dfrac{2\sqrt{2x^2.1}}{2x}=\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+2^t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2^t\ln 2>0,\forall t\ge\sqrt{2}$.

Phương trình $f(t)=\log_2 t+2^t=5\Leftrightarrow f(t)=f(2)\Rightarrow t=2$.

Vậy $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{2x}=2 \Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0$

Ta có phương trình $2x^2-4x+1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt có tích bằng $\frac{1}{2}$.

**Câu 15.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(10\left(\sqrt{2019}\right)^x-2019^x\right)=4$ bằng

**A.** $\log_{2019}16$. **B.** $2\log_{2019}16$. **C.** $\log_{2019}10$. **D.** $2\log_{2019}10$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_2\left(10\left(\sqrt{2019}\right)^x-2019^x\right)=4 \Leftrightarrow 10\left(\sqrt{2019}\right)^x-2019^x=16$ (1)

Đặt $t=2019^{\frac{x}{2}}\,(t>0)$ ta có PT (1) trở thành $10t-t^2=16 \Leftrightarrow t^2-10t+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=8 \end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $2019^{\frac{x}{2}}=2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\log_{2019}2 \Leftrightarrow x=2\log_{2019}2$

Với $t=8$ ta có $2019^{\frac{x}{2}}=8 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\log_{2019}8 \Leftrightarrow x=2\log_{2019}8$. Do đó tổng tất cả các nghiệm bằng

$2\log_{2019}2+2\log_{2019}8=2\left(\log_{2019}2+\log_{2019}8\right)=2\left(\log_{2019}2.8\right)=2\log_{2019}16$.

**Câu 16.** **(THPT Hòa Vang - Đà Nẵng - 2018)** Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ với $x>0$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$.

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $4$.

Lời giải

Do $x>0$ nên $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}\ge 2^2=4$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

Xét hàm $f(y)=4-(y-2)\sqrt{y+1}, y\ge -1$, ta có $f'(y)=-\left[\sqrt{y+1}+\frac{y-2}{2\sqrt{y+1}}\right]$

$=-\left(\frac{2y+2+y-2}{2\sqrt{y+1}}\right)=0 \Leftrightarrow y=0$. Lập bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{[-1;+\infty)} f(y)=16$ khi $y=0$.

Suy ra $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\le \log_2 16=4$.

Do đó $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$. Vậy $P=x^2+y^2-xy+1=2$.

**Câu 17.** **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Phương trình $(4x)^{\log_8 x}+x^{\log_8(4x)}=4$ có tập nghiệm là

**A.** $\{2;8\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{2};8\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right\}$. **D.** $\left\{2;\frac{1}{8}\right\}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>0$.

$(4x)^{\log_8 x}+x^{\log_8(4x)}=4$

$\Leftrightarrow (4x)^{\log_8 x}+(4x)^{\log_8 x}=4$

$\Leftrightarrow (4x)^{\log_8 x}=2$

$\Leftrightarrow \log_8 x\log_8(4x)=\log_8 2$

$\Leftrightarrow \log_8 x\left(\dfrac{2}{3}+\log_8 x\right)=\dfrac{1}{3}$.

Đặt $\text{t}=\log_8 x$.

Phương trình trở thành: $t\left(\dfrac{2}{3}+t\right)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow t^2+\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{3} \\ t=-1 \end{array}\right.$.

$t=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \log_8 x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=2$ (nhận).

$t=-1\Leftrightarrow \log_8 x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{8}$ (nhận).

Vậy tập nghiệm là $\left\{2;\dfrac{1}{8}\right\}$.

**Câu 18.** **(THPT Yên Lạc- 2018)** Tính tổng $S$ tất cả các nghiệm của phương trình: $\ln\left(\dfrac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5.3^x-30x-10=0$.

**A.** $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=3$

**Lời giải**

Điều kiện $x>-\dfrac{1}{3}$.

Phương trình tương đương

$\ln(5^x+3^x)-\ln(6x+2)+5(5^x+3^x)-5(6x+2)=0$

$\Leftrightarrow \ln(5^x+3^x)+5(5^x+3^x)=\ln(6x+2)+5(6x+2)$ (1).

Xét hàm sô $f(t)=\ln t+5t, t>0$. Có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+5>0$, $\forall t>0$ nên $f(t)$ đồng biến. Từ (1) suy ra $f(5^x+3^x)=f(6x+2)\Leftrightarrow 5^x+3^x=6x+2\Leftrightarrow 5^x+3^x-6x-2=0$

Xét $g(x)=5^x+3^x-6x-2$, $g'(x)=5^x\ln 5+3^x\ln 3-6$

$g''(x)=5^x(\ln 5)^2+3^x(\ln 3)^2>0\ \forall x>-\dfrac{1}{3}$.

Nên $g'(x)=0$ có không quá 1 nghiệm suy ra $g(x)=0$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Mà $g(0)=g(1)=0$. Vậy phương trình có nghiệm $0,1$. Do đó $S=1$.