TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để giải bài toán chuyển động

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(\text{m/s})$ **B.** $9(\text{m/s})$ **C.** $42(\text{m/s})$ **D.** $25(\text{m/s})$

Lời giải

Chọn D

Ta có $v_B(t)=\int a.\text{d}t=at+C$, $v_B(0)=0\Rightarrow C=0 \Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\text{d}t=\left.\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\right|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B=\int_0^{15}at.\text{d}t=\left.\frac{at^2}{2}\right|_0^{15}=\frac{225a}{2}.$$

Ta có $\frac{375}{2}=\frac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\frac{5}{3}.15=25(\text{m/s})$.

Câu 2. **(Mã 104 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $21(m/s)$ **B.** $25(m/s)$ **C.** $36(m/s)$ **D.** $30(m/s)$

Lời giải

Chọn D

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\text{d}t=at+C$ mà $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\text{d}t=\int_0^{15}at\text{d}t\Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t)=2.15=30(m/s)$.

Câu 3. **(Đề Minh Họa 2017)** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $-5t+10=0 \Leftrightarrow t=2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s=\int_0^2(-5t+10)\,dt=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10m.$$

Câu 4. **(Mã 102 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\,(m/s)$, trong đó t(giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$(a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $20(m/s)$ **C.** $16(m/s)$ **D.** $13(m/s)$

Lời giải

Chọn C

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S=\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)dt=96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t)=\int a\,dt=at+C$.

Tại thời điểm $t=3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3)=0 \Leftrightarrow C=-3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là $S_2=\int_3^{15}(at-3a)\,dt=\left(\frac{at^2}{2}-3at\right)\Big|_3^{15}=72a(m)$.

Vậy $72a=96 \Leftrightarrow a=\frac{4}{3}(m/s^2)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15)=16(m/s)$.

Câu 5. **(Mã 101 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $10(m/s)$ **C.** $7(m/s)$ **D.** $22(m/s)$

Lời giải

Chọn A

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được tới lúc đó là $\int_0^{15} v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{15}\left(\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{540}t^3+\frac{11}{36}t^2\right)\Big|_0^{15} = 75(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $y(t)=\int a.\mathrm{d}t = a.t+C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y(0)=0 \Leftrightarrow C=0$;

Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t)\mathrm{d}t = 75 \Leftrightarrow \int_0^{10} a.t\mathrm{d}t = 75 \Leftrightarrow \frac{a.t^2}{2}\Big|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy có $y(t)=\frac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y(10)=15(m/s)$.

Câu 6. **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $18(\mathrm{m/s})$ **B.** $108(\mathrm{m/s})$ **C.** $64(\mathrm{m/s})$ **D.** $24(\mathrm{m/s})$

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của vật chuyển động là $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t=f(t)$

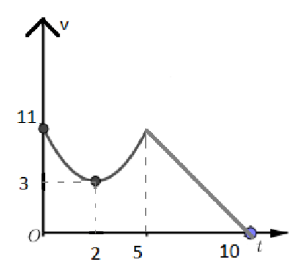
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;6]$

Ta có $f'(t)=-3t+12 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4\in[0;6]$

$f(0)=0; f(4)=24; f(6)=18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24(\mathrm{m/s})$.

Câu 7. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parapol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$.Cho đỉnh Parapol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



A. $\frac{181}{2}$. **B.** 90. **C.** 92. **D.** $\frac{545}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Parapol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \le t \le 5(s)$

Do $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua $I(3;2); A(0;11)$ nên

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8. \\ c = 11 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \le t \le 5(s)$ là

$$S = \int_0^5 \left(2x^2 - 8x + 11\right) dx = \frac{115}{3}(m)$$

Ta có $f(5) = 21$

Gọi $d: y = ax + b$ khi $5 \le t \le 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;21)$ và $C(10;0)$ nên:

$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{21}{5}. \\ b = 42 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5 \le t \le 10(s)$ là

$$S = \int_5^{10} \left(-\frac{26}{5}x + 52\right) dx = \frac{105}{2}(m)$$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10(s)$ là $S = \frac{115}{3} + \frac{105}{2} = \frac{545}{6}$.

Câu 8. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. 20 m. **B.** 30 m. **C.** 10 m. **D.** 40 m.

Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s = \int_0^4 (-5t + 20) dt = 40(m)$.

Câu 9. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $8m$. **B.** $12m$. **C.** $15m$. **D.** $10m$.

Lời giải

Lấy mốc thời gian $(t = 0)$ là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t) = 0$, tức là $v(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$$\int_0^2 (-6t + 12) \mathrm{d}t = \left(-3t^2 + 12t\right)\Big|_0^2 = 12\ (m).$$

Câu 10. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(\text{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 38m. **B.** 37,2m. **C.** 37,5m. **D.** 37m.

Lời giải

Chọn C

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó quảng đường xe đi được tính từ lúc bắt đầu hãm phanh đến khi dừng hẳn là:

$$S = \int_0^5 (-3t + 15)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{3t^2}{2} + 15t\right)\Big|_0^5 = 37,5\,\mathrm{m}$$

Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 11. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ (*m/s*), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 *m* **B.** 20 *m* **C.** 40 *m* **D.** 10 *m*

Lời giải

Chọn B

Lúc bắt đầu đạp phanh, ô tô có vận tốc $20\,m/s \Rightarrow v(t_0) = -10t_0 + 20 = 20 \Leftrightarrow t_0 = 0$

Ô tô dừng hẳn khi đó vận tốc $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow 20 - 10t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2$.

Do đó ô tô di chuyển được thêm là: $\int_0^2 (20 - 10t)\,dt = (20t - 5t^2)\big|_0^2 = 20(m)$

Câu 12. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$. **B.** $25m$. **C.** $50m$. **D.** $16m$.

Lời giải

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S = 3.10 + \int_0^5 (-2t + 10)dt = 30 + 25 = 55m$.

Câu 13. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a\ (m/s), (t \ge 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0.

A. $v_0 = 35m/s$. **B.** $v_0 = 25m/s$. **C.** $v_0 = 10m/s$. **D.** $v_0 = 20m/s$.

Lời giải

- Tại thời điểm $t=6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có

$v(6)=v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}.6+a=v_0 \Leftrightarrow a=v_0+15$, suy ra $v(t)=-\frac{5}{2}t+v_0+15$.

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k)=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{5}.\left(v_0+15\right) \Leftrightarrow k=\frac{2v_0}{5}+6$.

- Tổng quãng đường vật đi được là $80=6.v_0+\int_6^k\left(-\frac{5}{2}t+v_0+15\right)dt$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0+\left.\left(-\frac{5}{4}t^2+v_0.t+15t\right)\right|_6^k$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}(k^2-6^2)+v_0.(k-6)+15(k-6)$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}\left(\frac{4\left(v_0\right)^2}{25}+\frac{24v_0}{5}\right)+v_0.\frac{2v_0}{5}+15.\frac{2v_0}{5}$

$\Leftrightarrow \left(v_0\right)^2+36.v_0-400=0$

$\Leftrightarrow v_0=10$

Câu 14. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v\left(t\right)=7t$ $\left(\text{m/s}\right)$. Đi được 5 $\left(\text{s}\right)$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35$ $\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

A. 87.5 mét. **B.** 96.5 mét. **C.** 102.5 mét. **D.** 105 mét.

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được trong 5 $\left(\text{s}\right)$ đầu là $s_1=\int_0^5 7t\text{d}t=7\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^5=87,5$ (mét).

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}\left(t\right)=35-35t$ (m/s). Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}\left(t\right)=0 \Leftrightarrow 35-35t=0 \Leftrightarrow t=1$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

$s_2=\int_0^1\left(35-35t\right)\text{d}t=\left.\left(35t-35\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^1=17.5$ (mét).

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $s=s_1+s_2=87.5+17.5=105$ (mét).

Câu 15. **(Chuyên Lê Hồng Phong - NĐ - 2018)** Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a\left(t\right)=t^2+4t$ $\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70,25$ m. **B.** $68,25$ m. **C.** $67,25$ m. **D.** $69,75$ m.

Lời giải

$a\left(t\right)=t^2+4t \Rightarrow v\left(t\right)=\int a\left(t\right)\text{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C$ $\left(C\in\mathbb{R}\right)$.

Mà $v(0)=C=15 \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$.

Vậy $S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+15\right)dt=69,75$ m.

Câu 16. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=10+t+9t^2-t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu) là

A. $t=6(s)$. **B.** $t=3(s)$. **C.** $t=2(s)$. **D.** $t=5(s)$.

Lời giải

$v(t)=s'(t)=-3t^2+18t+1$.

Dễ thấy hàm số $v(t)$ là hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol với hệ số $a=-3<0$.

Do đó $v_{\max}$ đạt tại đỉnh $I(3;28)$ của parabol.

Vậy Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất $t=3(s)$.

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ $(\mathrm{m/s})$. Đi được $5\mathrm{s}$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70$ $(\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25$ (m). **B.** $S=87,5$ (m). **C.** $S=94$ (m). **D.** $S=95,7$ (m).

Lời giải

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau $5\mathrm{s}$ ô tô đạt vận tốc là $v(5)=35(\mathrm{m/s})$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t)=35-70(t-5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t=5,5\mathrm{s}$.

Quãng đường ô tô đi được là $S=\int_0^5 7t\,dt+\int_5^{5,5}\left[35-70(t-5)\right]dt=96,25(\mathrm{m})$.

Câu 18. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t$ $(\mathrm{m/s})$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12(\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường $s(\mathrm{m})$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

A. $s=168(\mathrm{m})$. **B.** $s=166(\mathrm{m})$. **C.** $s=144(\mathrm{m})$. **D.** $s=152(\mathrm{m})$.

Lời giải

Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.
Quãng đường xe đi được là:

$S_1=\int_0^{12} v_1(t)\,dt=\int_0^{12} 2t\,dt=t^2\Big|_0^{12}=144(\mathrm{m})$.

Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.
Ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t)=\int a\,dt=-12t+c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0)=v_1(12)=2.12=24(\mathrm{m/s})$.

$\Rightarrow -12.0+c=24 \Rightarrow c=24 \Rightarrow v_2(t)=-12t+24$.

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:
$-12t+24=0 \Leftrightarrow t=2$.

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S_2=\int_0^2 v_2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2(-12t+24)\,\mathrm{d}t=\left(-6t^2+24t\right)\Big|_0^2=24(\mathrm{m}).$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S=S_1+S_2=168(\mathrm{m})$.

Câu 19. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1\,\mathrm{m}$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,\mathrm{m/s}$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng $\mathrm{m/s}$), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Lời giải

Ta có: $v_A(0)=16\,\mathrm{m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t)=0 \Leftrightarrow t=4\,\mathrm{s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s=\int_0^4(16-4t)\,\mathrm{d}t=32\,\mathrm{m}$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1\,\mathrm{m}$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $33\,\mathrm{m}$.

Câu 20. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Một vật chuyển động với vận tốc $10\,\mathrm{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. $136\mathrm{m}$. **B.** $126\mathrm{m}$. **C.** $276\mathrm{m}$. **D.** $216\mathrm{m}$.

Lời giải

Ta có $v(0)=10\,\mathrm{m/s}$ và $v(t)=\int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^t\left(t^2+3t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^t=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2$.

Quãng đường vật đi được là $S=\int_0^6 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^6\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_0^6=216\,\mathrm{m}$.

Câu 21. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}(m)$. **B.** $2000(m)$. **C.** $500(m)$. **D.** $\frac{4000}{3}(m)$.

Lời giải

Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ là $v(t)=200 \Leftrightarrow t^2+10t=200 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=10\\t=-20\end{array}\right. \Leftrightarrow t=10$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$s=\int\limits_0^{10}\left(t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+5t\right)\Big|_0^{10}=\frac{2500}{3}(m)$.

Câu 22. **(Sở Lào Cai - 2018)** Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-2t\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

A. $18m$. **B.** $36m$. **C.** $22,5m$. **D.** $6,75m$.

Lời giải

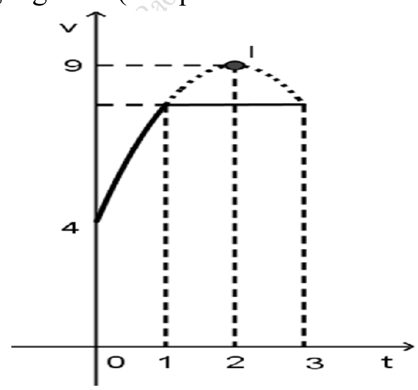
$a(t)=6-2t\left(m/s^2\right)\Rightarrow v(t)=\int(6-2t)dt=6t-t^2+C$

Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t=0$ thì $v=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v(t)=6t-t^2$.

$v(t)=6t-t^2$ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi $t=-\frac{b}{2a}=3\,(s)$

Quảng đường xe đi trong 3 giây đầu là: $S=\int\limits_0^3\left(6t-t^2\right)dt=18m$.

Câu 23. **(Mã 123 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s=21,58(km)$ **B.** $s=23,25(km)$ **C.** $s=13,83(km)$ **D.** $s=15,50(km)$

Lời giải

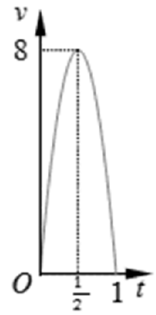
Chọn A

Gọi phương trình của parabol $v=at^2+bt+c$ ta có hệ như sau: $\begin{cases}c=4\\4a+2b+c=9\\-\frac{b}{2a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\c=4\\a=-\frac{5}{4}\end{cases}$

Với $t=1$ ta có $v=\frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s=\int\limits_0^1\left(-\frac{5}{4}t^2+5t+4\right)dt+\int\limits_1^3\frac{31}{4}dt=\frac{259}{12}\approx 21,583$

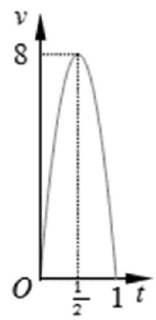
Câu 24. **(Mã 104 2017)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s=2,3$ (km) **B.** $s=4,5$ (km) **C.** $s=5,3$ (km) **D.** $s=4$ (km)

Lời giải

Chọn B



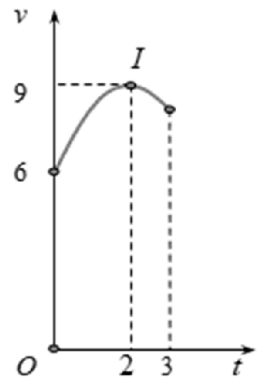
Gọi parabol là $(P): y=ax^2+bx+c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra $(P): y=-32x^2+32x$.

Vậy quảng đường người đó đi được là $s=\int_0^{\frac{3}{4}}\left(-32x^2+32x\right)\mathrm{d}x=4,5$ (km).

Câu 25. **(Mã 110 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s=25,25\left(\text{km}\right)$ **B.** $s=24,25\left(\text{km}\right)$ **C.** $s=24,75\left(\text{km}\right)$ **D.** $s=26,75\left(\text{km}\right)$

Lời giải

Chọn C

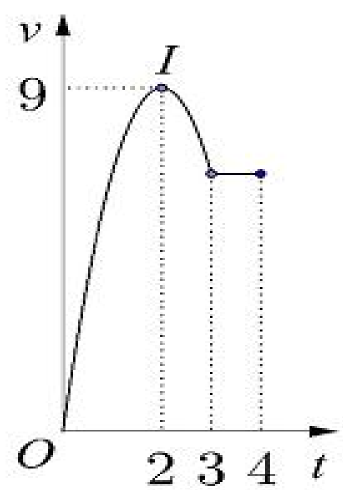
Gọi $v\left(t\right)=a.t^2+bt+c$.

Đồ thị $v\left(t\right)$ là một phần parabol có đỉnh $I\left(2;9\right)$ và đi qua điểm $A\left(0;6\right)$ nên

$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ a.2^2+b.2+c=9\\ a.0^2+b.0+c=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3}{4}\\ b=3\\ c=6\end{cases}$. Tìm được $v\left(t\right)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$

Vậy $S=\int\limits_0^3\left(-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6\right)dt=24,75$ (km)

Câu 26. **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(2;9\right)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=24$ (km) **B.** $s=28,5$ (km) **C.** $s=27$ (km) **D.** $s=26,5$ (km)

Lời giải

Chọn B

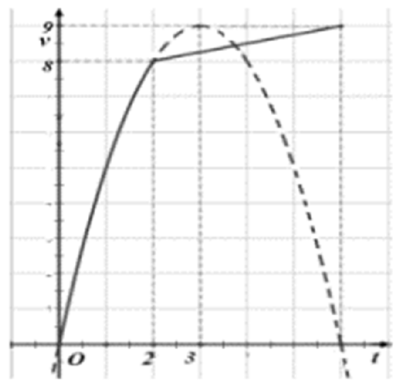
Gọi $\left(P\right):y=ax^2+bx+c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y=\dfrac{-9}{4}x^2+9x$.

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y=\dfrac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S=\int\limits_0^3\left(\dfrac{-9}{4}x^2+9x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^4\dfrac{27}{4}\mathrm{d}x=27\ (km)$.

Câu 27. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\dfrac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



A. $\dfrac{130}{3}(km)$. **B.** $9(km)$. **C.** $40(km)$. **D.** $\dfrac{134}{3}(km)$.

Lời giải

Chọn A

+ Vì Parabol đi qua O(0; 0) và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là $(P): y=v(t)=-t^2+6t;\forall t\in[0;2]$

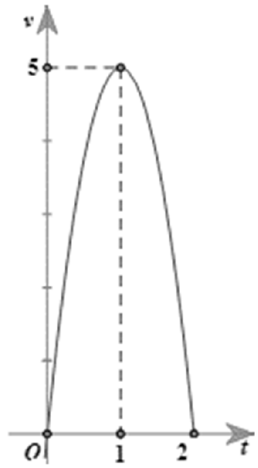
+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y=\dfrac{1}{4}t+m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m=\dfrac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y=\dfrac{1}{4}t+\dfrac{15}{2};\forall t\in[2;6]$

+ Quảng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S=S_1+S_2=\int\limits_0^2\left(-t^2+6t\right)dt+\int\limits_2^6\left(\dfrac{1}{4}t+\dfrac{15}{2}\right)dt=\dfrac{130}{3}(km)$$

Câu 28. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (*km/h*) phụ thuộc vào thời gian t (*h*) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung *Ov* như hình vẽ. Tính quảng đường *S* người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



A. $2,11\,\text{km}$. **B.** $6,67\,\text{km}$. **C.** $5,63$ km. **D.** $5,63\,\text{km}$.

Lời giải

Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S=\int_0^{1,5} v(t)\mathrm{d}t$.

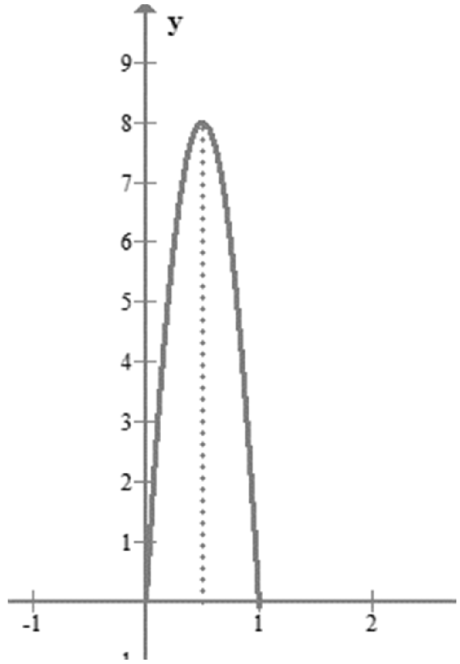
Đồ thị $v=v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t)=at^2+bt$.

Đồ thị $v=v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=10\end{cases}\Rightarrow v(t)=-5t^2+10t$$

$$S=\int_0^{1,5}\left(-5t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\frac{45}{8}\approx 5,63.$$

Câu 29. **(SGD Đồng Tháp - 2018)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



A. $5,3\ (\text{km})$. **B.** $4,5\ (\text{km})$. **C.** $4\ (\text{km})$. **D.** $2,3\ (\text{km})$.

Lời giải

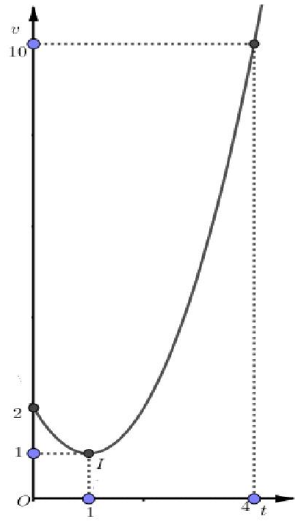
Trước hết ta tìm công thức biểu thị vận tốc theo thời gian, giả sử $v(t)=at^2+bt+c$.

Khi đó dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c=0 \\ a\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\left(\frac{1}{2}\right)+c=8 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases}.$$

Do đó quãng đường người đó đi được sau 45 phút là $S=\int_0^{\frac{45}{60}}\left(32t-32t^2\right)dt=4,5\ (\text{km})$.

Câu 30. **(Chuyên Hạ Long 2018)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=6$ (km). **B.** $s=8$ (km). **C.** $s=\dfrac{40}{3}$ (km). **D.** $s=\dfrac{46}{3}$ (km).

Lời giải

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t)=at^2+bt+c$. Dựa vào đồ thị ta có:

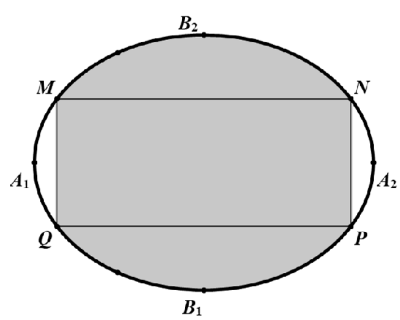
$$\begin{cases} c=2 \\ \dfrac{-b}{2a}=1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t)=t^2-2t+2.$$

Với $t=4 \Rightarrow v(4)=10$ (thỏa mãn).

Từ đó $s=\int\limits_0^4 (t^2-2t+2)dt=\dfrac{40}{3}(km)$.

Dạng 2. Ứng dụng tích phân để giải một số bài toán thực tế

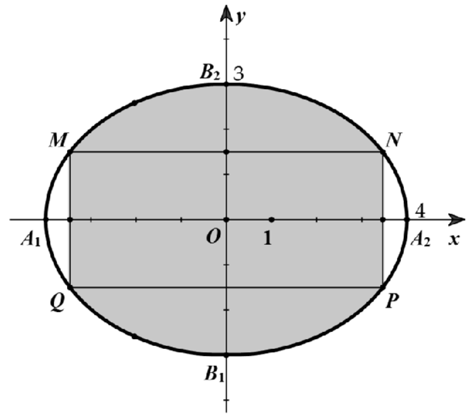
Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 vnđ/m^2 và phần còn lại 100.000 vnđ/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8\text{m}$, $B_1B_2=6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3\text{m}$?



A. 5.526.000 đồng. **B.** 5.782.000 đồng **C.** 7.322.000 đồng. **D.** 7.213.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Với $\begin{cases} A_1A_2=8=2a \\ B_1B_2=6=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \to (E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Suy ra diên tích của hình elip là $S_{(E)}=\pi a.b=12\pi\ (\mathrm{m}^2)$.

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ=3 \to M\left(x;\frac{3}{2}\right)\in(E)$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow x^2=12 \to M\left(-2\sqrt{3};\frac{3}{2}\right);N\left(2\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)$

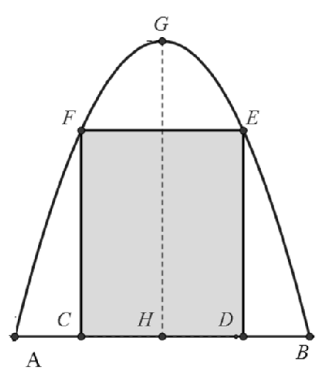
Gọi $S_1;S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

Ta có: $S_2=4.\frac{3}{4}\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=3\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{x=4\sin t} S_2=4\pi-6\sqrt{3}\ (\mathrm{m}^2)$

Suy ra: $S_1=S_{(E)}-S_2=8\pi+6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$T=\left(4\pi-6\sqrt{3}\right).100+\left(8\pi+6\sqrt{3}\right).200\simeq 7.322.000$ (đồng).

Câu 2. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

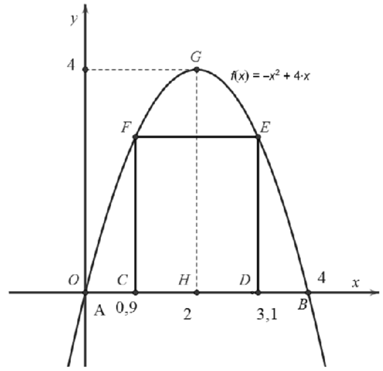


A. 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có $\begin{cases} c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \\ a.2^2+b.2+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y=f(x)=-x^2+4x$.

Diện tích của cả cổng là $S=\int\limits_0^4\left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\dfrac{x^3}{3}+2x^2\right)\right|_0^4=\dfrac{32}{3}\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

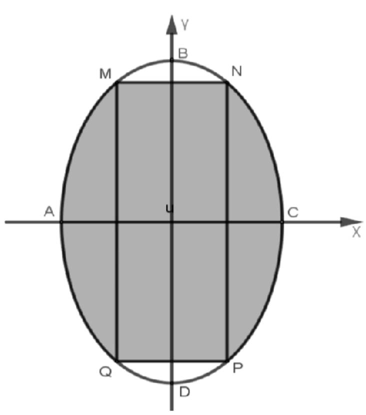
Mặt khác chiều cao $CF=DE=f(0,9)=2,79(\mathrm{m})$; $CD=4-2.0,9=2,2\ (\mathrm{m})$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF}=CD.CF=6,138\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh}=S-S_{CDEF}=\dfrac{32}{3}-6,14=\dfrac{6793}{1500}\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000+\dfrac{6793}{1500}.900000=11441400$ đồng.

Câu 3. Một biển quảng cáo với 4 đỉnh A,B,C,D như hình vẽ. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000(đ/m^2) sơn phần còn lại là 100.000đ/m^2. Cho $AC=8m; BD=10m; MN=4m$ Hỏi số tiền sơn gần với số tiền nào sau đây:



A. 12204000$đ$. . **B.** 14207000$đ$.. **C.** 11503000$đ$.. **D.** 10894000$đ$.

Lời giải

elip có phương trình là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. Vì $MN=4\Rightarrow x_N=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y_N=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y_N=\frac{-5\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

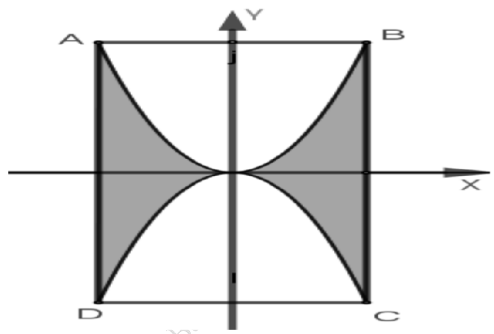
Diện tích phần tô đậm là $S_1=2\int\limits_{\frac{-5\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\frac{4}{5}\sqrt{25-y^2}dy\approx 59,21\quad (m^2)$

Diện tích elip là $S=\pi.4.5=20\pi\quad (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2=S-S_1\approx 3,622\quad (m^2)$

Tổng chi phí trang chí là: $T=59,21.200000+3,622.100000=12204200đ$.

Câu 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đính đá với giá thành

$500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB=4dm; BC=8dm.$ Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

Lời giải

Vì $AB=4dm; BC=8dm.\Rightarrow A(-2;4),\ B(2;4), C(2;-4), D(-2;-4)$.

parabol là: $y=x^2$ hoặc $y=-x^2$

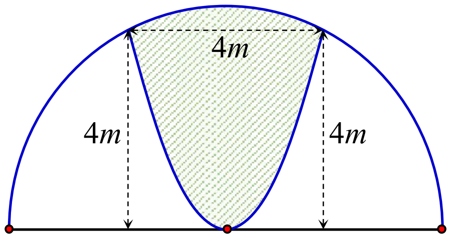
Diện tích phần tô đậm là $S_1=4\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{32}{3}\quad (dm^2)$

Diện tích hình chữ nhật là $S=4.8=32\quad (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2=S-S_1=32-\frac{32}{3}=\frac{64}{3}\quad (dm^2)$

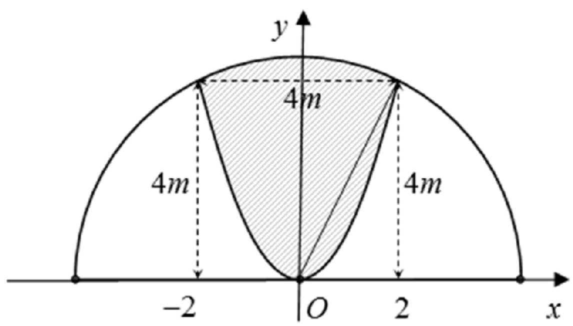
Tổng chi phí trang chí là: $T=\left(\frac{32}{3}.5000+\frac{64}{3}.2500\right).1000\approx 106666667đ$

Câu 5. **(Thanh Hóa 2019)** Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 3.738.574 **(đồng).** **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 3.926.990 (đồng). **D.** 4.115.408 (đồng).

Lời giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta có bán kính của đường tròn là $R=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

Phương trình của nửa đường tròn (C) là: $x^2+y^2=20, y\geq 0 \Rightarrow y=\sqrt{20-x^2}$.

Parabol (P) có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình: $y=x^2$.

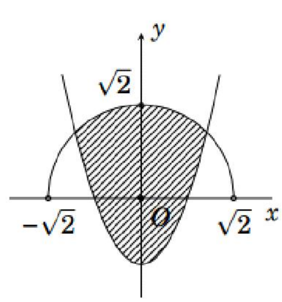
Diện tích phần tô màu là: $S_1=\int_{-2}^{2}\left[\sqrt{20-x^2}-x^2\right]\mathrm{d}x \approx 11,94\left(m^2\right)$.

Diện tích phần không tô màu là: $S_2=\frac{1}{2}.\pi.\left(2\sqrt{5}\right)^2-S_1\approx 10\pi-11,94\left(m^2\right)$.

Số tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó là:

$150000.11,94+100000.(10\pi-11,94)\approx 3.738.593$.

Câu 6. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}\,(m)$ Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



A. $\dfrac{3\pi-2}{6}\times 250000$. **B.** $\dfrac{3\pi+10}{6}\times 250000$. **C.** $\dfrac{3\pi+10}{3}\times 250000$. **D.** $\dfrac{3\pi+2}{6}\times 250000$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ $x^2+y^2=2$.

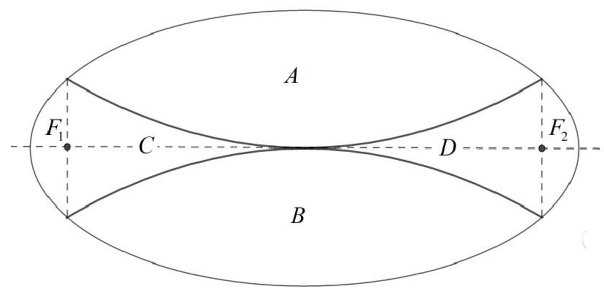
Tọa độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm hệ $\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ y=2x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=1 \\ x=1, y=1 \end{array}\right.$

Diện tích vườn hoa là $S=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi+10}{6}$.

số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu là $\dfrac{3\pi+10}{6}\times 250000$.

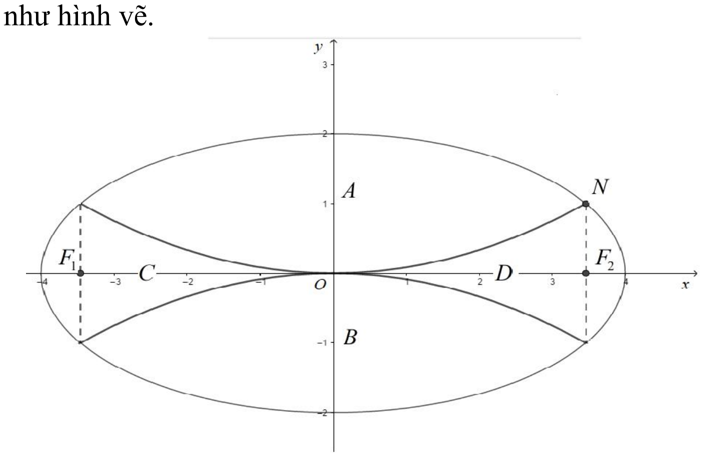
Câu 7. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 5.676.000 đ. **B.** 4.766.000 đ. **C.** 4.656.000 đ. **D.** 5.455.000 đ.



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do elip có độ dài trục lớn $2a=8\Leftrightarrow a=4$, độ dài trục nhỏ $2b=4\Leftrightarrow b=2$.

Diện tích của (E) là: $S_{(E)}=\pi ab=8\pi$.

Phương trình chính tắc (E) là: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Suy ra $y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}$ $\Rightarrow F_2\left(2\sqrt{3};\ 0\right)$.

Do N và F_2 có cùng hoành độ $\Rightarrow N\left(2\sqrt{3};\ 1\right)$.

Gọi $(P): y = kx^2$ là parabol nằm ở phía trên trục Ox.

Do $N \in (P)$ ta có $1 = k\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{12}$. Suy ra $(P): y = \dfrac{1}{12}x^2$.

Diện tích phần A là $S_A = \displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12}x^2\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12}x^2\right)\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_0^{2\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{d}x$.

* Xét $I_1 = \displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = 4\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 4\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{3}$
t	0	$\dfrac{\pi}{3}$

Khi đó $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\,\mathrm{d}t = 16\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 8\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= 8\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

* Ta có $I_2 = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}x^3\Big|_0^{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra: $S_A = I_1 - I_2 = \dfrac{8\pi + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_A + S_B = 2S_A = \dfrac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$.

Tổng diện tích phần C, D là: $S_C + S_D = S_{(E)} - (S_A + S_B) = \dfrac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên là:

$\dfrac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}.250000 + \dfrac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3}.150000 \approx 5676000$ đ.

Câu 8. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An -2019)** Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

A. 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 218 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi O, I lần lượt là tâm của các đường tròn bán kính bằng 20 mét và bán kính bằng 15 mét. Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ, vì $OI = 30$ mét nên $I(0; 30)$. Phương trình hai đường tròn lần lượt là $x^2 + y^2 = 20^2$ và $x^2 + (y-30)^2 = 15^2$. Gọi A, B là các giao điểm của hai đường tròn đó.

Tọa độ A, B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20^2 \\ x^2 + (y-30)^2 = 15^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{5\sqrt{455}}{12} \\ y = \dfrac{215}{12} \end{cases}$.

Tổng diện tích hai đường tròn là $\pi\left(20^2+15^2\right)=625\pi$ (mét vuông).

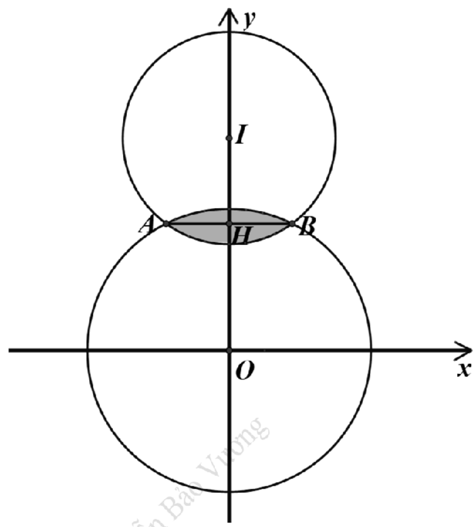
Phần giao của hai hình tròn chính là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=30-\sqrt{15^2-x^2}$ và $y=\sqrt{20^2-x^2}$. Do đó diện tích phần giao giữa hai hình tròn là

$$S=\int_{-\frac{5\sqrt{455}}{12}}^{\frac{5\sqrt{455}}{12}}\left(\sqrt{20^2-x^2}+\sqrt{15^2-x^2}-30\right)\mathrm{d}x\approx 60,2546 \text{ (mét vuông).}$$

Số tiền để làm phần giao giữa hai hình tròn là $300.000 \text{x} 60,2546\approx 18.076.386$ (đồng).

Số tiền để làm phần còn lại là $100.000 \text{x} \left(625\pi-2 \text{x} 60,2546\right)=184.299.220$ (đồng).

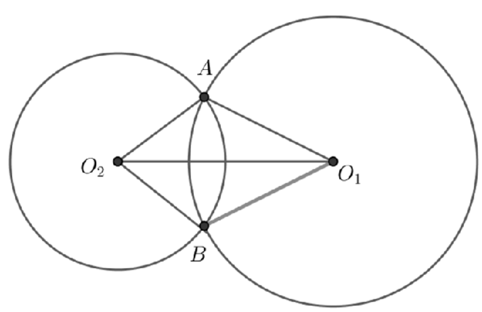
Vậy tổng số tiền làm sân khấu là $184.299.220+18.076.386\approx 202.375.606$ (đồng).



Câu 9. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 218 triệu đồng. **B.** 202 triệu đồng.
C. 200 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

Lời giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn bán kính 20 m và 15 m. A, B là hai giao điểm của hai đường tròn.

Ta có $O_1A=O_1B=20$ m; $O_2A=O_2B=15$ m; $O_1O_2=30$ m.

$$\cos\widehat{BO_1O_2}=\frac{O_1B^2+O_1O_2{}^2-O_2B^2}{2O_1B.O_1O_2}=\frac{43}{48}\Rightarrow\widehat{BO_1O_2}\approx 26°23'.$$

Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có O_1O_2 là tia phân giác $\widehat{AO_1B}$

$\Rightarrow \widehat{AO_1B} = 2\widehat{O_2O_1B} = 52,77°$.

Suy ra diện tích hình quạt tròn O_1AB là $S_{O_1AB} = \pi.20^2.\dfrac{52,77}{360} \approx 184,2\left(\mathrm{m}^2\right)$.

$S_{\Delta O_1AB} = \dfrac{1}{2}O_1A.O_1B.\sin\widehat{AO_1B} \approx 159,2\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung $\overset{\frown}{AmB}$ trong đường tròn (O_1).

$\Rightarrow S_1 = S_{O_1AB} - S_{\Delta O_1AB} = 25\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Chứng minh tương tự ta được diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung $\overset{\frown}{AmB}$ trong đường tròn (O_2) là $S_2 \approx 35\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Suy ra diện tích phần giao nhau là $S = S_1 + S_2 = 60\left(\mathrm{m}^2\right)$.

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần giao nhau $60.300\,000 = 18\,000\,000$ (nghìn đồng).

Tổng diện tích của hai hình tròn là $S' = \pi 20^2 + \pi 15^2 \approx 1963\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần không giao nhau là $S' - S = 1903\left(\mathrm{m}^2\right)$.

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần không giao nhau $1903.100\,000 = 190\,300\,000$ (nghìn đồng).

Số tiền làm mặt sân là $18\,000\,000 + 190\,000\,000 = 208\,300\,000$ (nghìn đồng)

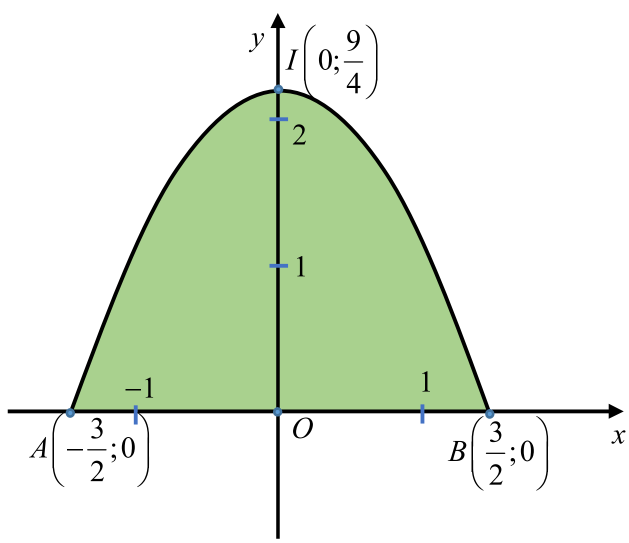
$= 208,3$ (triệu đồng).

Câu 10. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Lời giải

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{9}{4}=c,\left(I\in(P)\right) \\ \dfrac{9}{4}a-\dfrac{3}{2}b+c=0\left(A\in(P)\right) \\ \dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+c=0\left(B\in(P)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{9}{4} \\ a=-1 \\ b=0 \end{cases}$.

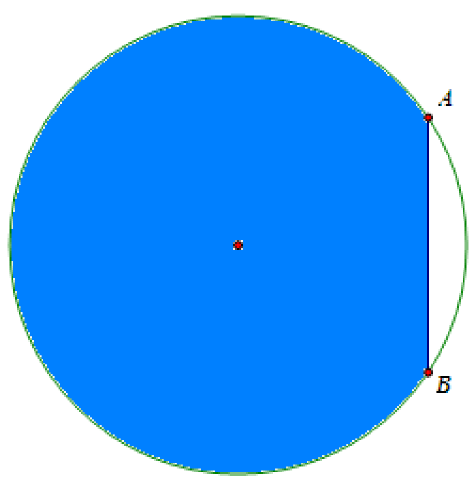
Vậy $(P): y=-x^2+\dfrac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{9}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

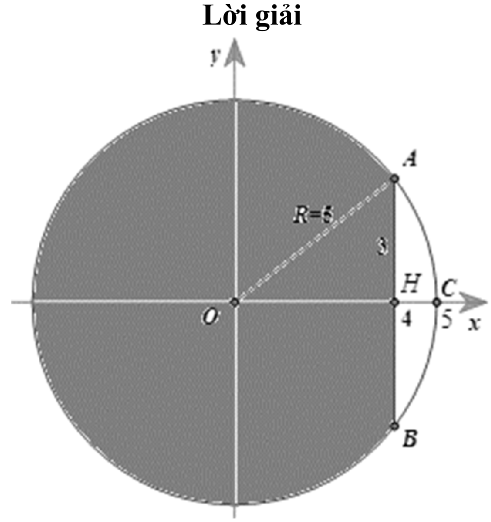
Số tiền phải trả là: $\dfrac{9}{2}.1500000=6750000$ đồng.

Câu 11. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018)** Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó $AB=6m$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền ?



A. 3722 nghìn đồng. **D.** 7445 nghìn đồng. **C.** 7446 nghìn đồng. **B.** 3723 nghìn đồng.

Lời giải



Diện tích miếng đất là $S_1=\pi R^2=25\pi$ (m^2).

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ta có phương trình của đường tròn biên là $x^2+y^2=25$.

$R=5, AH=3 \Rightarrow OH=4$.

$\Rightarrow$ Phương trình của cung tròn nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ là $y=\sqrt{25-x^2}$, với $4\le x\le 5$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trống là $S_2=2\int_4^5\sqrt{25-x^2}\,dx$ (m²).

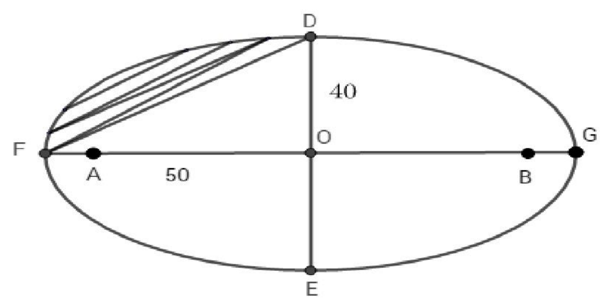
$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trồng cây là $S=S_1-S_2=25\pi-2\int_4^5\sqrt{25-x^2}\,dx$.

$\Rightarrow$ Số tiền thu được là $T=100S=100(25\pi-2\int_4^5\sqrt{25-x^2}\,dx)\approx 7445$ (nghìn đồng).

Câu 12. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng $100(\text{m})$ và trục nhỏ bằng $80(\text{m})$ được chia làm hai phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập của cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến phần nghìn).

A. 31904000. **B.** 23991000. **C.** 10566000. **D.** 17635000.

Lời giải



Gọi phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

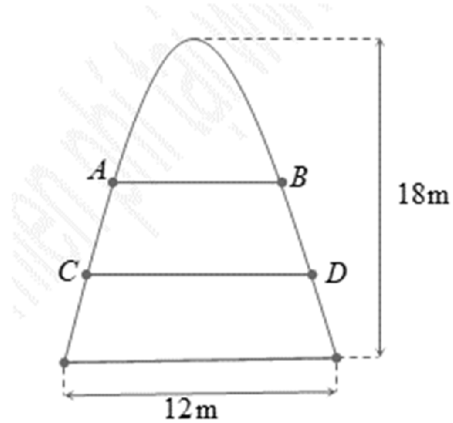
Theo giả thiết, ta có $2a=100\Rightarrow a=50$; $2b=80\Rightarrow b=40$.

Diện tích phần trồng cây con (phần gạch sọc) bằng $\dfrac{1}{4}$ diện tích của elip trừ đi diện tích tam giác DOF. Do đó diện tích phần trồng cây con là $S_1=\dfrac{\pi ab}{4}-\dfrac{ab}{2}$ (m^2).

Diện tích phần trồng rau (phần không gạch sọc) bằng $\dfrac{3}{4}$ diện tích elip cộng với diện tích tam giác DOF. Do đó diện tích phần trồng rau là $S_2=\dfrac{3\pi ab}{4}+\dfrac{ab}{2}$ (m^2).

Thu nhập của cả mảnh vườn là $\left(\dfrac{\pi ab}{4}-\dfrac{ab}{2}\right)\cdot 2000+\left(\dfrac{3\pi ab}{4}+\dfrac{ab}{2}\right)\cdot 4000\approx 23991000$.

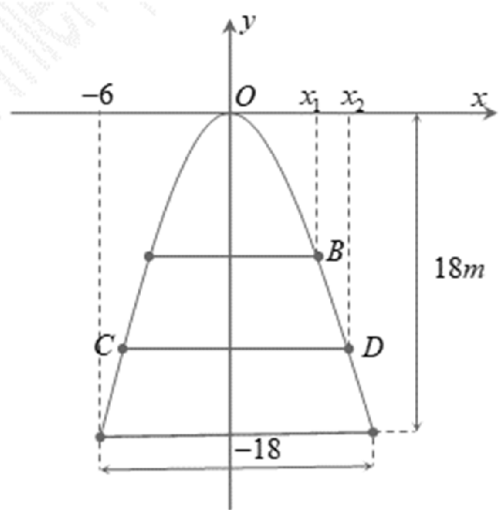
Câu 13. **(Chuyên Vinh - 2018)** Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

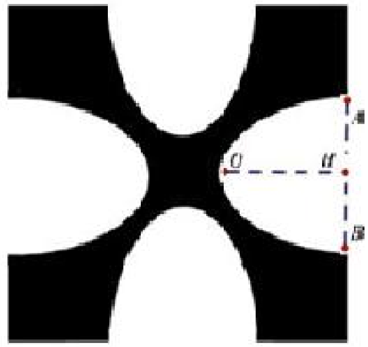
$$S_1 = 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]dx = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng CD $y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]dx = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x\right)\Bigg|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

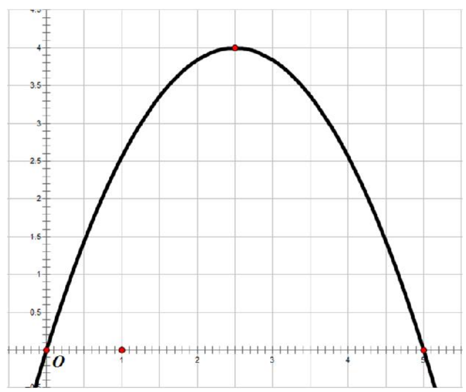
Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 14. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** 50 cm^2.

Lời giải



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là: $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x\right)\text{d}x = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3}\ \text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100\text{ cm}^2$.

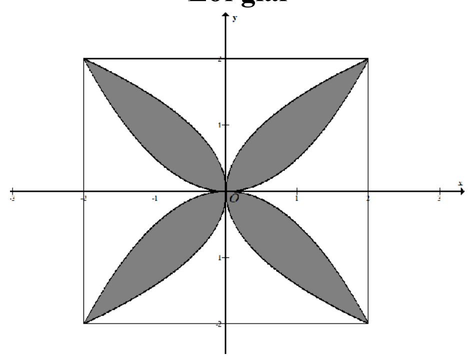
Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}\ \text{cm}^2$.

Câu 15. **(Chuyên Vinh - 2018)** Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).

Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{800}{3}\,\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{400}{3}\,\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Lời giải



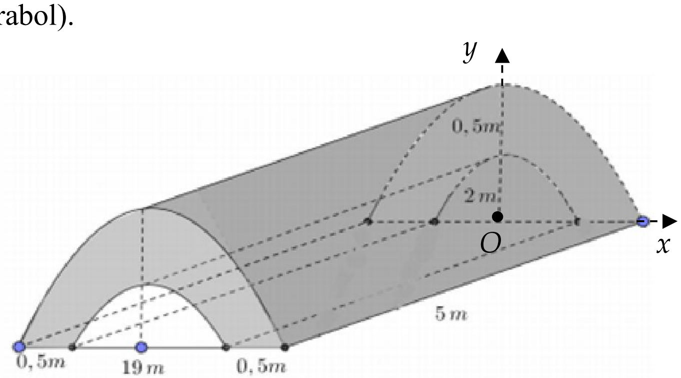
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm = 1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=-\dfrac{x^2}{2}$, $x=-\dfrac{y^2}{2}$, $x=\dfrac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x=0; x=2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right)=\frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right).$$

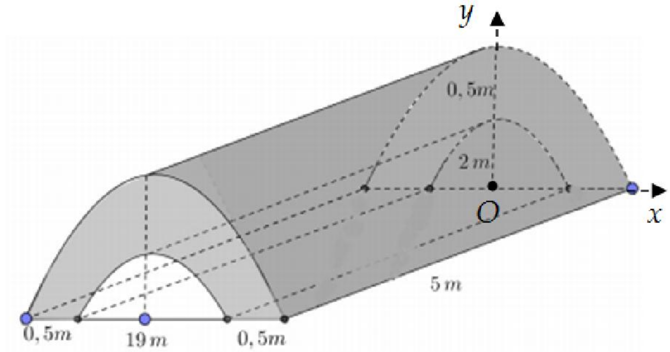
Câu 16. **(THPT Cẩm Giàng 2 -2019)** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. $19\,\text{m}^3$. **B.** $21\,\text{m}^3$. **C.** $18\,\text{m}^3$. **D.** $40\,\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a_2.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$.

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40\,m^3$.

Câu 17. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. 30 m^3 **B.** 36 m^3 **C.** 40 m^3 **D.** 41 m^3

Lời giải

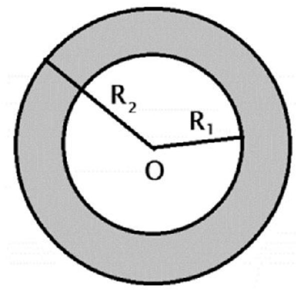
Chọn B

Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có AB = 3 mét, BC = 6 mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + b, a \neq 0$. Do I, A, B thuộc nên ta có $y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

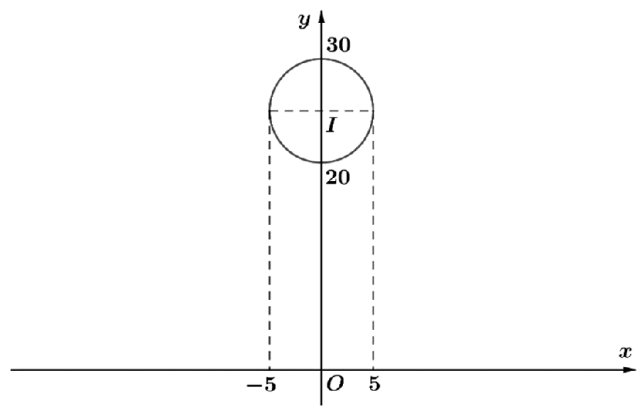
$$V = 6.2\int_0^{\frac{3}{2}}(-\frac{4}{3}x^2 + 3)dx = 36$$

Câu 18. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30cm$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



A. $1250\pi^2 cm^3$. **B.** $1400\pi^2 cm^3$. **C.** $2500\pi^2 cm^3$. **D.** $600\pi^2 cm^3$.

Lời giải



Thể tích săm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0;25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox.

Ta có phương trình đường tròn là $x^2+(y-25)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=25+\sqrt{25-x^2} \\ y=25-\sqrt{25-x^2} \end{array}\right., x\in[-5;5]$.

Vậy $V=\pi.\left[\int\limits_{-5}^{5}\left(25+\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int\limits_{-5}^{5}\left(25-\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]=100\pi.\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x$.

Ta có $\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 5

$\Rightarrow \int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\pi.5^2=\frac{25\pi}{2}$.

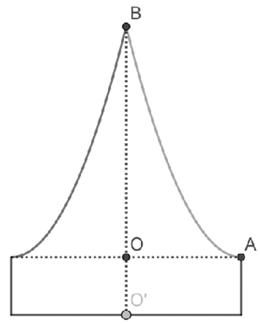
Suy ra $V=100\pi.\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=100\pi.\frac{25\pi}{2}=1250\pi^2 cm^3$

Chú ý: Có thể bấm máy tích phân, ta

được $V=\pi\left[\int\limits_{-5}^{5}\left(25+\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int\limits_{-5}^{5}\left(25-\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]\approx 3927\pi cm^3$.

Kiểm tra các đáp án ta chọn đáp án **A.**

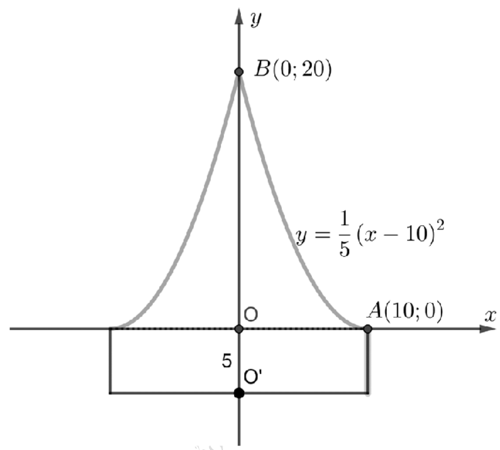
Câu 19. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **B.** $\frac{2500\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **C.** $\frac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **D.** $\frac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$

Lời giải

Chọn B



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA=10$ cm và đường cao $OO'=5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V=V_1+V_2$

$V_1=5.10^2\pi=500\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y=a(x-10)^2$.

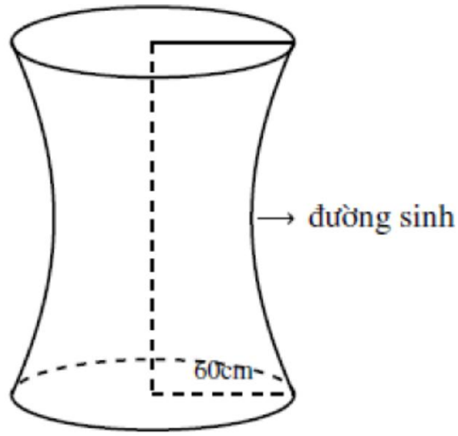
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a=\frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y=\frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x=10-\sqrt{5y}$ (do $x<10$).

Suy ra $V_2=\pi\int_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2 \text{dy}=\pi\left(3000-\frac{8000}{3}\right)=\frac{1000}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Do đó $V=V_1+V_2=\frac{1000}{3}\pi+500\pi=\frac{2500}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

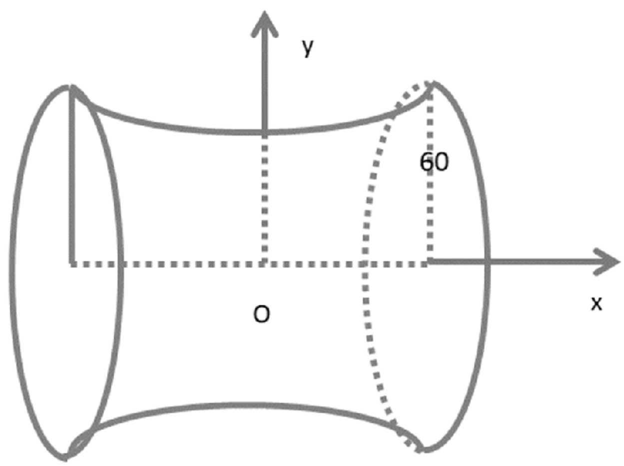
Câu 20. Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của chiếc trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $V = 344963\,\text{cm}^3$ **B.** $V = 344964\,\text{cm}^3$ **C.** $V = 208347\,\text{cm}^3$ **D.** $V = 208346\,\text{cm}^3$

Lời giải

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (trục hoành là trục của chiếc trống, gốc tọa độ là trung điểm của đường cao chiếc trống, đơn vị: dm).



Gọi (E) là elip có phương trình $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ thì ảnh của (E) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(0;6)$ là elip (E') có phương trình $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-6)^2}{9}=1$.

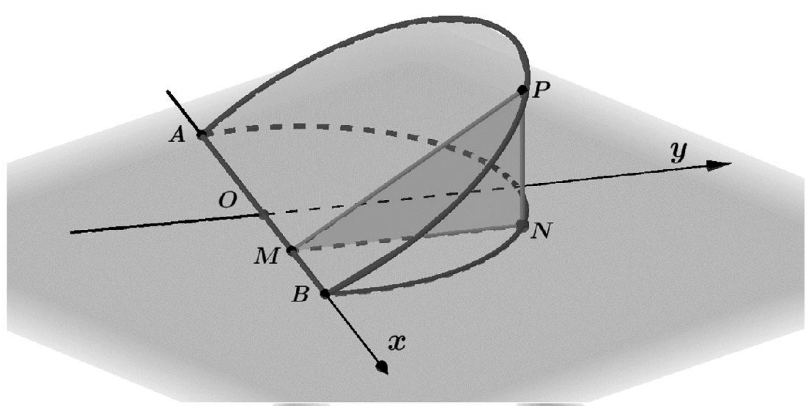
Suy ra, phương trình của đường sinh là: $y = 6-\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

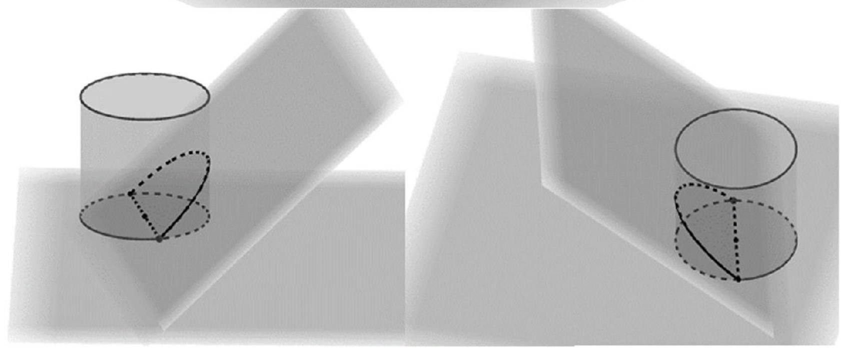
Do đó, thể tích của chiếc trống là: $V=\pi\int_{-4}^{4}\left(6-\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)^2 dx \approx 344,964\ \left(\text{dm}^3\right)$.

Câu 21. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30^0 ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2, với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng?

A. $V_1=\dfrac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. **B.** $V_1=\dfrac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **C.** $V_1=\dfrac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. **D.** $V_1=\dfrac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

Lời giải





Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R;R]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x, cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP vuông tại N và có $\widehat{PMN}=30^0$.

Ta có $NM=y=\sqrt{R^2-x^2} \Rightarrow NP=MN.\tan 30^0=\dfrac{\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{3}}$.

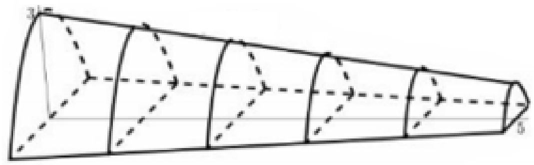
ΔMNP có diện tích $S(x)=\dfrac{1}{2}NM.NP=\dfrac{1}{2}.\dfrac{R^2-x^2}{\sqrt{3}}$.

Thể tích hình nêm là $V_1=\int\limits_{-R}^{R}S(x)dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-R}^{R}\dfrac{R^2-x^2}{\sqrt{3}}dx=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(R^2x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^{R}=\dfrac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.

* **<u>Chú ý</u>**: Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm:

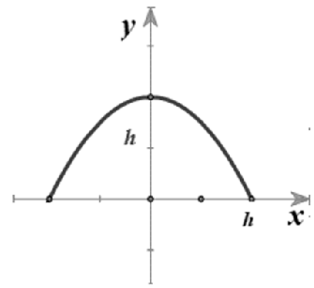
$V_1=\dfrac{2}{3}R^2h=\dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha$, trong đó $R=\dfrac{AB}{2}$, $\alpha=\widehat{PMN}$.

Câu 22. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho một mô hình $3-D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài $5(\text{cm})$; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parobol cho bởi công thức $y=3-\dfrac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29 . **B.** 27 . **C.** 31. **D.** 33.

Lời giải



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

Có $B(h;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} \; (do\, h > 0)$

Diện tích S của thiết diện: $S = \int_{-h}^{h}\left(-\frac{1}{h}x^2 + h\right)\mathrm{dx} = \frac{4h^2}{3}$, $h = 3 - \frac{2}{5}x$

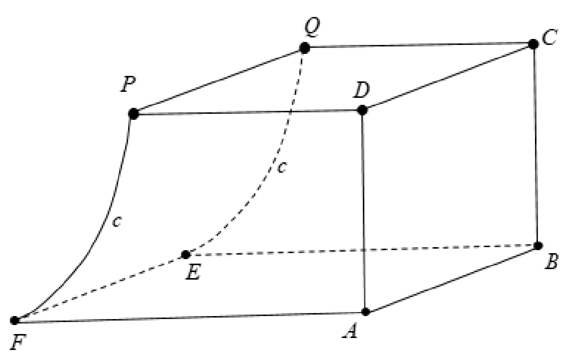
$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x)\mathrm{dx} = \int_0^5 \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2 \mathrm{dx} \approx 28,888$

$\Rightarrow V \approx 29 \left(\mathrm{cm}^3\right)$

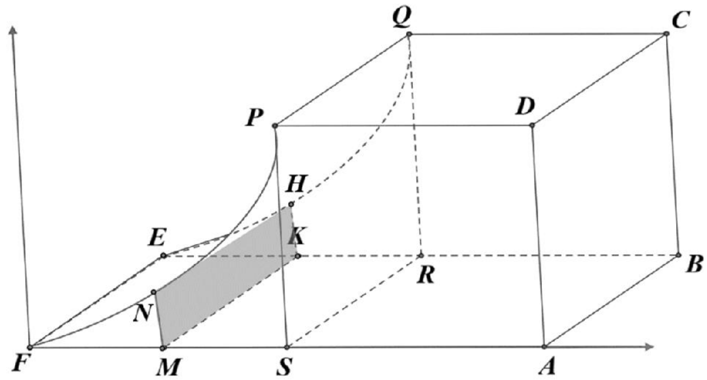
Câu 23. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5\,cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5\,cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Thể tích của chi tiết máy bằng

A. $\frac{395}{24}cm^3$. **B.** $\frac{50}{3}cm^3$. **C.** $\frac{125}{8}cm^3$. **D.** $\frac{425}{24}cm^3$.

Lời giải



Gọi hình chiếu của P,Q trên AF và BE là R và S. Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5\,cm$, thể tích $V_1=\frac{125}{8}cm^3$ và phần còn lại có thể tích V_2. Khi đó thể tích vật thể $V=V_1+V_2=\frac{125}{8}+V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F, Ox trùng với FA, Oy trùng với tia Fy song song với AD. Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y=ax^2$, đi qua điểm $P\left(1;\frac{5}{2}\right)$ do đó

$a=\frac{5}{2}\Rightarrow y=\frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x;0;0), 0\le x\le 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN=\frac{5}{2}x^2$ và $MK=\frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x)=\frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2=\int\limits_0^1 \frac{25}{4}x^2dx=\frac{25}{12}$

Từ đó $V=\frac{125}{8}+\frac{25}{12}=\frac{425}{24}cm^3$

Câu 24. **(THPT Lục Ngạn 2018)** Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Lời giải

Đường elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$ có phương trình

$$+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1\Leftrightarrow y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)\Leftrightarrow y=\pm\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}.$$

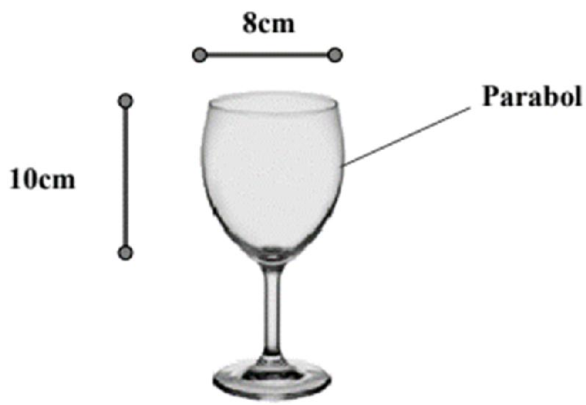
Do đó thể tích quả dưa là

$$V=\pi\int\limits_{-14}^{14}\left(\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2\text{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\int\limits_{-14}^{14}\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)^2\text{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2.\left(x-\frac{x^3}{3.14^2}\right)\Bigg|_{-14}^{14}=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2.\frac{56}{3}$$

$$=\frac{8750\pi}{3}\text{cm}^3.$$

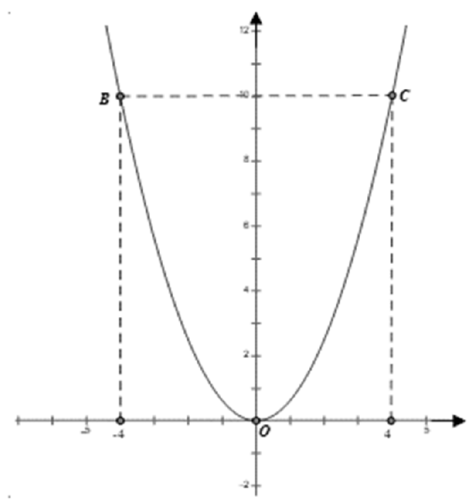
Do đó tiền bán nước thu được là $\dfrac{8750\pi.20000}{3.1000} \approx 183259$ đồng.

Câu 25. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



A. $V \approx 320cm^3$. **B.** $V \approx 1005,31cm^3$. **C.** $V \approx 251,33cm^3$. **D.** $V \approx 502,65cm^3$.

Lời giải

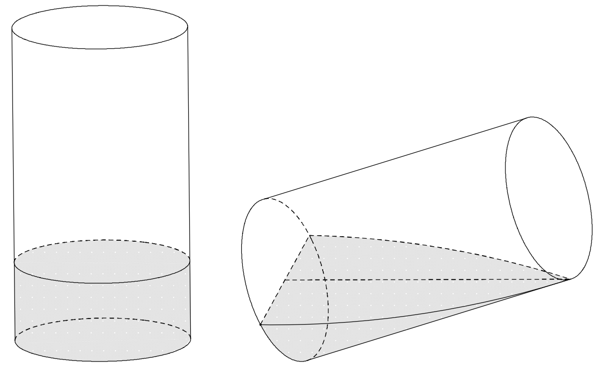


Parabol có phương trình $y = \dfrac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc:

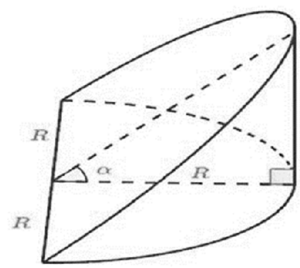
$$V = \pi\int_0^{10}\left(\frac{8}{5}y\right).dy \approx 251,33.$$

Câu 26. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. $240\,\text{cm}^3$. **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $120\,\text{cm}^3$. **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải



Cách 1. Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

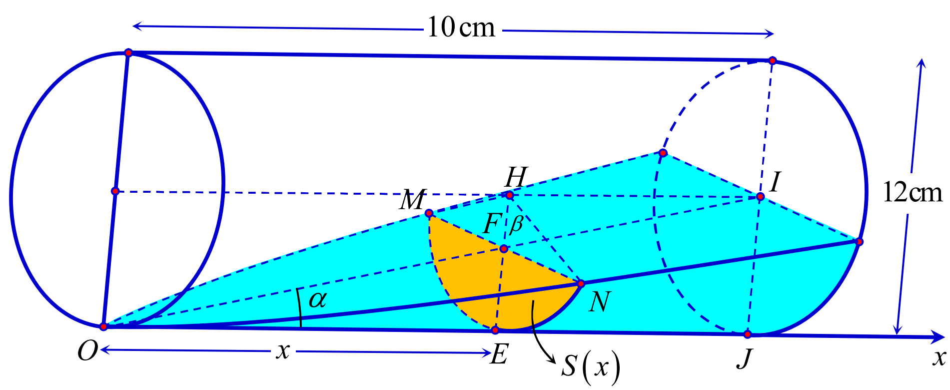
$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}.\sqrt{R^2-x^2}.\tan\alpha \Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha$.

Thể tích hình cái nêm là: $V=\frac{1}{2}\tan\alpha\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

$\Rightarrow V_{kn}=\frac{2}{3}R^3.\frac{h}{R}=240\,\text{cm}^3$.

Cách 2. Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h\ge x\ge 0$.

Gọi $\widehat{IOJ}=\alpha,\widehat{FHN}=\beta,OE=x$

$\tan\alpha=\frac{IJ}{OJ}=\frac{6}{10}=\frac{EF}{OE}\Rightarrow EF=\frac{6x}{10}\Rightarrow HF=6-\frac{6x}{10}$.

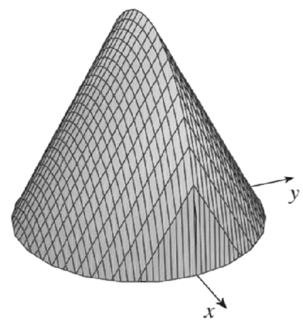
$$\cos\beta=\frac{HF}{HN}=\frac{6-\frac{6x}{10}}{6}=1-\frac{x}{10};\ \beta=\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)$$

$$S(x)=S_{(hinh\,quat)}-S_{HMN}=\frac{1}{2}HN^2.2\beta-\frac{1}{2}HM.HN.\sin 2\beta$$

$$\Rightarrow S(x)=6^2\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)-\frac{1}{2}.6.6.2\left(1-\frac{x}{10}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{10}\right)^2}$$

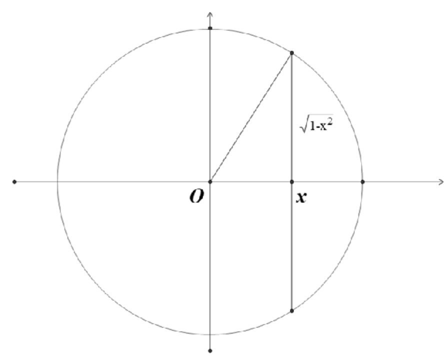
$$\Rightarrow V=\int_0^{10}S(x)\mathrm{d}x=\int_0^{10}\left(36\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)-36\left(1-\frac{x}{10}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{10}\right)^2}\right)\mathrm{d}x=240.$$

Câu 27. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu -- 2018)** Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (-1\le x\le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=3\sqrt{3}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\pi$.

Lời giải



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O.

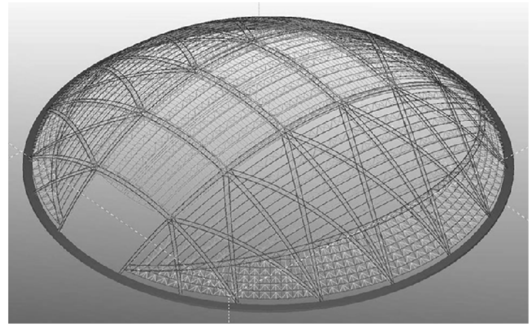
Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a=2\sqrt{1-x^2}$.

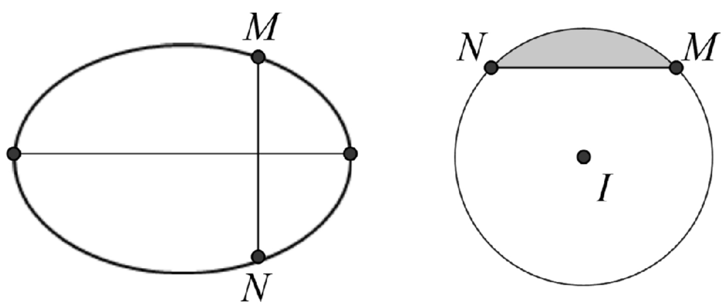
Diện tích tam giác thiết diện là: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\left(1-x^2\right)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V=2\int_0^1 Sdx=2\int_0^1\sqrt{3}\left(1-x^2\right)=2\sqrt{3}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 28. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M,N (hình 3) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?

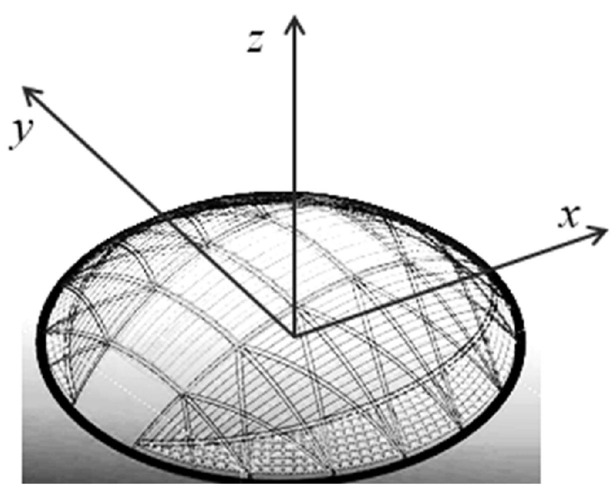


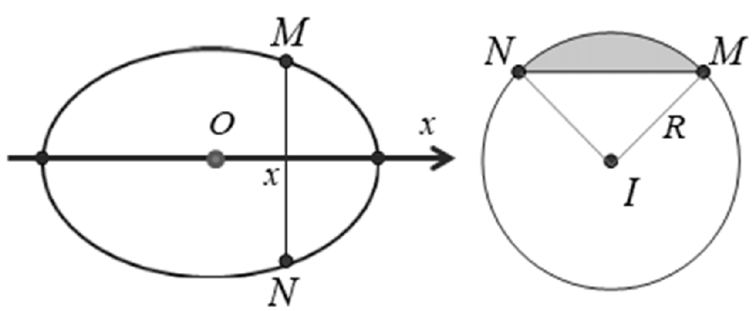


Hình 3

A. $57793m^3$. **B.** $115586m^3$. **C.** $32162m^3$. **D.** $101793m^3$.

Lời giải





Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d\left(O,MN\right)=x$

$\left(E\right):\dfrac{x^2}{75^2}+\dfrac{y^2}{45^2}=1.$

Lúc đó $MN=2y=2\sqrt{45^2\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)}=90\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}$

$\Rightarrow R=\dfrac{MN}{\sqrt{2}}=\dfrac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}\Rightarrow R^2=\dfrac{90^2}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)$

$S\left(x\right)=\dfrac{1}{4}\pi R^2-\dfrac{1}{2}R^2=\left(\dfrac{1}{4}\pi-\dfrac{1}{2}\right)R^2=\left(\pi-2\right)\dfrac{2025}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right).$

Thể tích khoảng không cần tìm là

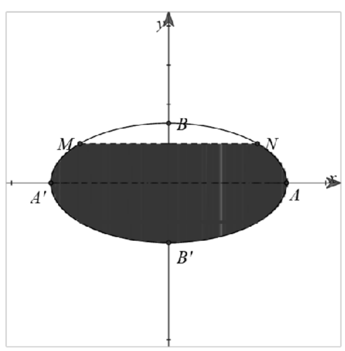
$V=\int\limits_{-75}^{75}\left(\pi-2\right)\dfrac{2025}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)\approx 115586m^3.$

Câu 29. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A. $V=1{,}52\text{m}^3$. **B.** $V=1{,}31\text{m}^3$. **C.** $V=1{,}27\text{m}^3$. **D.** $V=1{,}19\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{5}=\dfrac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6\text{m}$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y=\frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$ ta có $y=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$.

Do đường thẳng $y=\frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\frac{1}{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=\frac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\frac{\pi}{3}$; Khi $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\frac{\pi}{3}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy $S_2=\frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{\pi}{15}-\frac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1,52$.

Câu 30. **(Sở Yên Bái - 2018)** Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $280\,\text{cm}$. Giả sử $h\left(t\right)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t)=\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

A. 2 giờ 36 giây. **B.** 2 giờ 34 giây. **C.** 2 giờ 35 giây. **D.** 2 giờ 36 giây.

Lời giải

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây).

Ta có: $\int_0^x\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}\mathrm{d}t=210\Rightarrow\frac{3}{4}\left(t+3\right)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^x=105000\Rightarrow(x+3)\sqrt[3]{x+3}-3\sqrt[3]{3}=140000$

$\Rightarrow\sqrt[3]{\left(x+3\right)^4}=3\sqrt[3]{3}+140000\Rightarrow x+3=\sqrt[4]{\left(3\sqrt[3]{3}+140000\right)^3}\Rightarrow x=\sqrt[4]{\left(3\sqrt[3]{3}+140000\right)^3}-3$

$\Rightarrow x\approx 7234,8256$.

Câu 31. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh 2018)** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

A. $1458m^3$. **B.** $600m^3$. **C.** $2200m^3$. **D.** $4200m^3$.

Lời giải

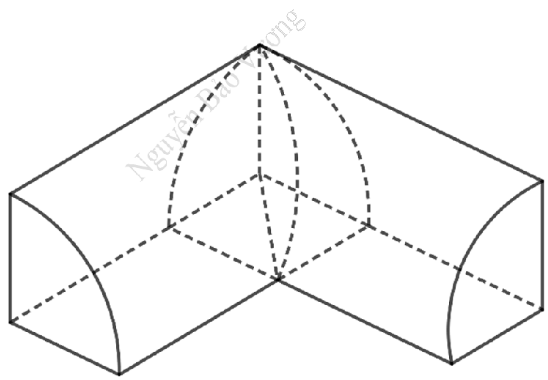
$$\int_0^3 (6at^2+2bt)\,\mathrm{d}t=90 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^3=90 \Leftrightarrow 54a+9b=90 \ (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2+2bt)\,\mathrm{d}t=504 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^6=504 \Leftrightarrow 432a+36b=504 \ (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=6 \end{cases}$. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V=\int_0^9 (4t^2+12t)\,\mathrm{d}t=\left(\frac{4}{3}t^3+6t^2\right)\Bigg|_0^9=1458\left(m^3\right).$$

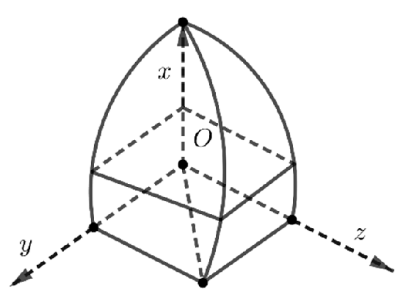
Câu 32. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H).



A. $V_{(H)}=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{(H)}=\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V_{(H)}=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



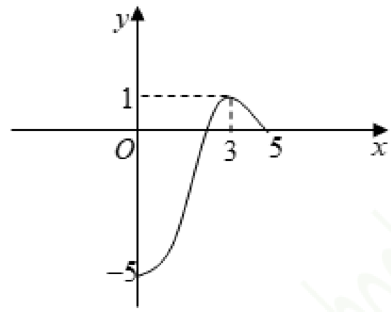
• Đặt hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp (Oyz) cắt trục Ox tại x: thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh $\sqrt{a^2-x^2}$ $(0\le x\le a)$.

• Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích: $S(x)=a^2-x^2$.

• Vậy $V_{(H)}=\int\limits_0^a S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^a\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^a=\frac{2a^3}{3}$.

Dạng 3. Ứng dụng tích phân để giải quyết một số bài toán đại số

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

C. $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

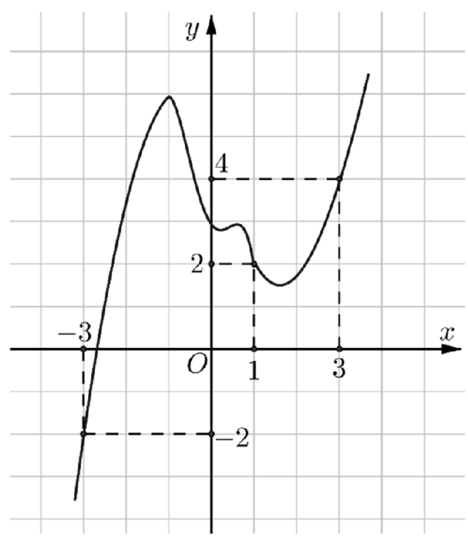
Lời giải

Ta có $\int\limits_3^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(3)>0$, do đó $f(5)>f(3)$.

$\int\limits_0^3 f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(0)<0$, do đó $f(3)<f(0)$

$\int\limits_0^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(0)<0$, do đó $f(5)<f(0)$

Câu 2. **(Mã 110 B 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1)>g(-3)>g(3)$ **B.** $g(1)>g(3)>g(-3)$

C. $g(3)>g(-3)>g(1)$ **D.** $g(-3)>g(3)>g(1)$

Lời giải

Chọn B

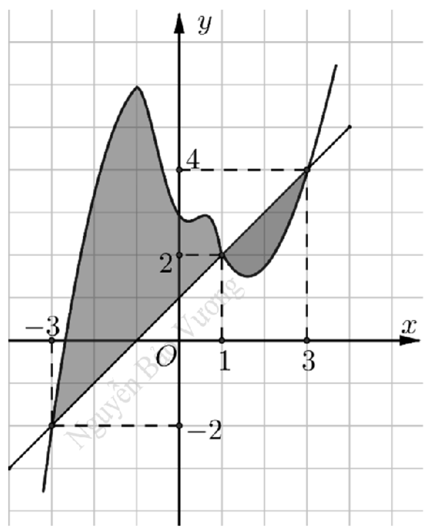
Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(-3)<g(1)$ và $g(3)<g(1)$. (1)



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f'(x),\ y=x+1,\ x=-3,\ x=1$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x+1,\ y=f'(x),\ x=1,\ x=3$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy: $S_1>S_2>0$.

Suy ra: $S_1-S_2>0$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x>0$$

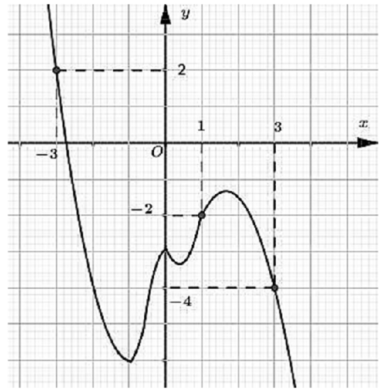
$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0.$$

Khi đó: $g(3)-g(-3)=\int_{-3}^{3}g'(x)\mathrm{d}x=2\int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Câu 3. **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ của hàm số như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$ **B.** $g(1)<g(-3)<g(3)$

C. $g(-3)<g(3)<g(-1)$ **D.** $g(1)<g(3)<g(-3)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow x\in\{-3;1;3\}$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(-3)$	↘	$g(1)$	↗	$g(3)$	↘	$-\infty$

Suy ra $g(3)>g(1)$.

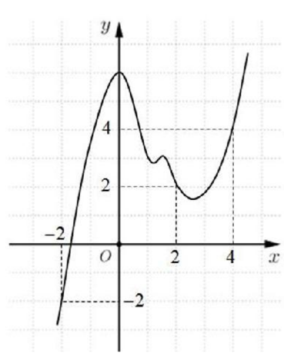
Kết hợp với BBT ta có:

$$\int_{-3}^{1}\left(-g'(x)\right)\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{1}^{-3}g'(x)\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow g(-3)-g(1)>g(3)-g(1)\Leftrightarrow g(-3)>g(3)$$

Vậy ta có $g(-3)>g(3)>g(1)$.

Câu 4. **(Mã123 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(4)=h(-2)<h(2)$ **B.** $h(2)>h(-2)>h(4)$

C. $h(4)=h(-2)>h(2)$ **D.** $h(2)>h(4)>h(-2)$

Lời giải

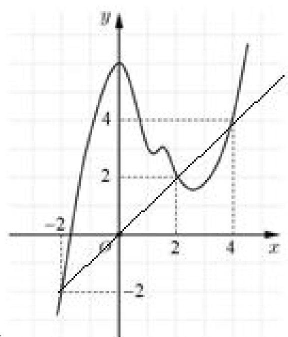
Chọn D

Ta có $h'(x)=2\left[f'(x)-x\right];h'(x)=0\Rightarrow x\in\{-2;2;4\}$.

Bảng biến thiên

x		-2		2		4	
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$h(4)$	$\nearrow$

Suy ra $h(2)>h(4)$.

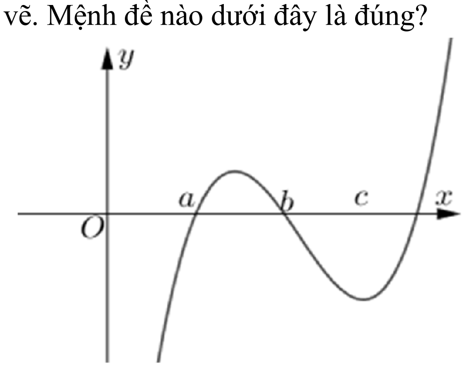


Kết hợp với đồ thị hàm số y=x ta có

$\int_{-2}^{4}h'(x)\mathrm{d}x>0\Leftrightarrow h(4)-h(-2)>0\Leftrightarrow h(4)>h(-2)$.

Vậy ta có $h(2)>h(4)>h(-2)$.

Câu 5. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(b)>f(a)>f(c)$. **B.** $f(a)>f(b)>f(c)$.

C. $f(c)>f(a)>f(b)$. **D.** $f(c)>f(b)>f(a)$.

Lời giải

Chọn A

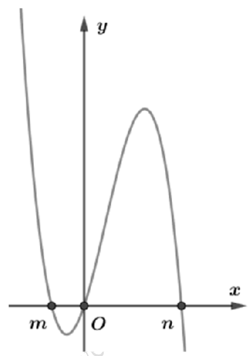
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

Ta có $S_1 = \int_a^b |f'(x)|dx = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$, $S_2 = \int_b^c |f'(x)|dx = -\int_b^c f'(x)dx = f(b) - f(c)$.

Vì $\begin{cases} S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(b) - f(a) < f(b) - f(c) \Leftrightarrow f(c) < f(a) \\ \int_a^b f'(x)dx > 0 \Leftrightarrow f(b) > f(a) \end{cases} \Rightarrow f(c) < f(a) < f(b)$

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $f(0) < 0 < f(m)$. **B.** $f(0) > 0$.

C. $f(m) < 0 < f(n)$. **D.** $f(0) < 0 < f(n)$.

Lời giải

Chọn A

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \\ x = n \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(m)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(n)$	$\searrow$	$-\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f'(x)$; $Ox; x = m; Oy$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f'(x); Oy; x = n$

Từ hình vẽ ta thấy $S_2 > S_1$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{n} |f'(x)|dx > \int_{m}^{0} |f'(x)|dx$

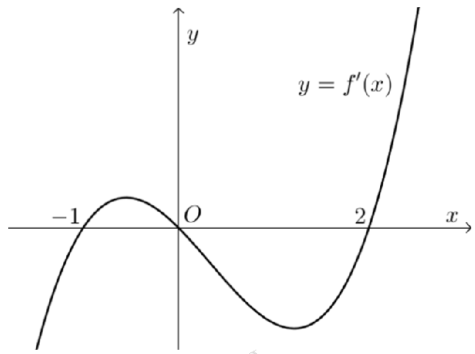
$\Leftrightarrow \int_{0}^{n} f'(x)dx > \int_{m}^{0} -f'(x)dx$

$\Leftrightarrow f(n) - f(0) > -[f(0) - f(m)]$

$\Leftrightarrow f(n) > f(m)$.

Từ bảng biến thiên kết hợp với điều kiện $f(n) > f(m)$ ta thấy để phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow f(0) < 0 < f(m)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $f(0) > f(2) > f(-1)$.
<u>B</u>. $f(0) > f(-1) > f(2)$.
C. $f(2) > f(0) > f(-1)$.
D. $f(-1) > f(0) > f(2)$.

Lời giải

Theo đồ thị, ta có:

$f(0) - f(-1) = \int_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x > 0$

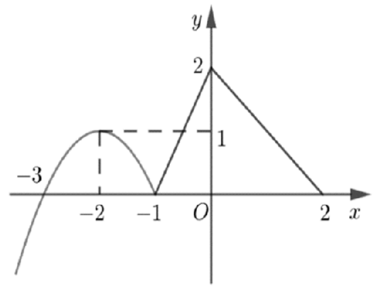
$\Rightarrow f(0) > f(-1)$ (1),

$f(2) - f(-1) = \int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f'(x)\mathrm{d}x < 0$

$\Rightarrow f(-1) > f(2)$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow f(0) > f(-1) > f(2)$.

Câu 8. **(Phú Thọ -2019)** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$.)



Biết $f(-3)=0,$ giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$ **B.** $\frac{31}{6}$ **C.** $\frac{35}{3}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Parabol $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(-2;1)$ và đi qua điểm $(-3;0)$ nên ta có

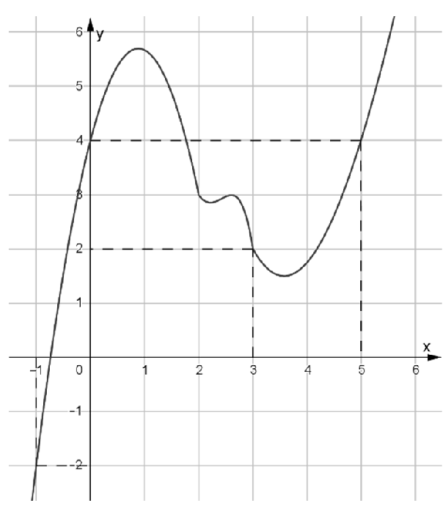
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=-2 \\ 4a-2b+c=1 \\ 9a-3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-4 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow y=-x^2-4x-3.$$

Do $f(-3)=0$ nên $f(-1)+f(1)=\left[f(1)-f(0)\right]+\left[f(0)-f(-1)\right]+2\left[f(-1)-f(-3)\right]$

$$=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 f'(x)\mathrm{d}x+2\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)\mathrm{d}x=S_1+S_2+2\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)\mathrm{d}x=1+\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{31}{6}.$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-1, x=0$ và $x=0, x=1$. Dễ thấy $S_1=1;\ S_2=\frac{3}{2}$.

Câu 9. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-1)<g(3)<g(5)$. **B.** $g(-1)<g(5)<g(3)$.

C. $g(5)<g(-1)<g(3)$. **D.** $g(3)<g(5)<g(-1)$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)-(x-1)\right]$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$.

Dựa vào đồ thị ta có các nghiệm sau: $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$	$g(5)$	$\nearrow$	

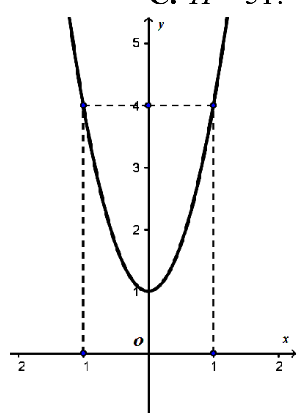
Ngoài ra dựa vào đồ thị ta có $\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x > -\frac{1}{2}\int_{3}^{5} g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow g(x)\Big|_{-1}^{3} > -g(x)\Big|_{3}^{5}$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-1) > g(3)-g(5) \Leftrightarrow g(5) > g(-1)$.

Vậy $g(3) > g(5) > g(-1)$.

Câu 10. **(THPT Hậu Lộc 2 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$?

A. $H=45$. **B.** $H=64$. **C.** $H=51$. **D.** $H=58$.



Lời giải

Theo bài ra $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ do đó $y=f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y=f'(x)=a'x^2+b'x+c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} c'=1 \\ a'-b'+c'=4 \\ a'+b'+c'=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=3 \\ b'=0 \\ c'=1 \end{cases} \Rightarrow y=f'(x)=3x^2+1$.

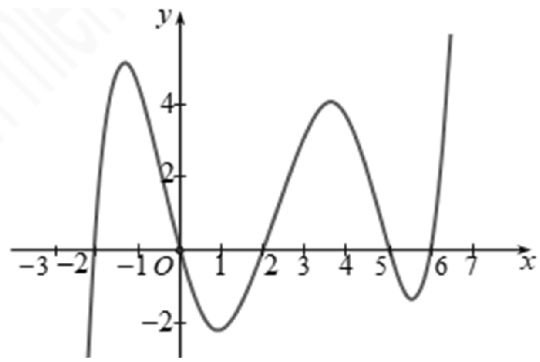
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, trục Ox, $x=4$, $x=2$.

Ta có $S=\int\limits_2^4 (3x^2+1)\,\mathrm{d}x=58$.

Lại có: $S=\int\limits_2^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_2^4=f(4)-f(2)$.

Do đó: $H=f(4)-f(2)=58$.

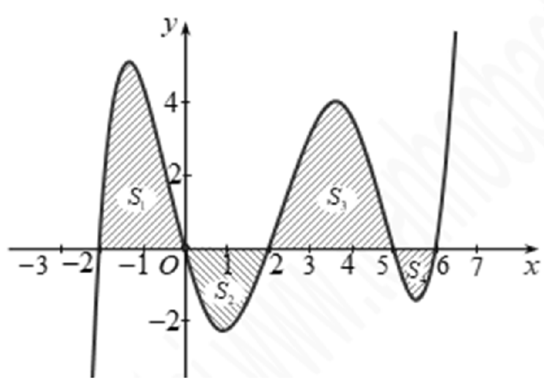
Câu 11. **(Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M=\max\limits_{[-2;6]} f(x)$, $m=\min\limits_{[-2;6]} f(x)$, $T=M+m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T=f(0)+f(-2)$. **<u>B</u>.** $T=f(5)+f(-2)$.

C. $T=f(5)+f(6)$. **D.** $T=f(0)+f(2)$.

Lời giải



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với và trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

◈ $\int\limits_{-2}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x > \int\limits_{0}^{2} -f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-2}^{0} > f(x)\Big|_{2}^{0}$

$\Leftrightarrow f(0)-f(-2)>f(0)-f(2) \Leftrightarrow f(-2)<f(2)$

◈ $\int\limits_{0}^{2} -f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_{2}^{5} f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{0} < f(x)\Big|_{2}^{5}$

$\Leftrightarrow f(0)-f(2)<f(5)-f(2) \Leftrightarrow f(0)<f(5)$

◈ $\int\limits_{2}^{5} f'(x)\,\mathrm{d}x > \int\limits_{5}^{6} -f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{5} > f(x)\Big|_{6}^{5}$

$\Leftrightarrow f(5)-f(2)>f(5)-f(6) \Leftrightarrow f(2)<f(6)$

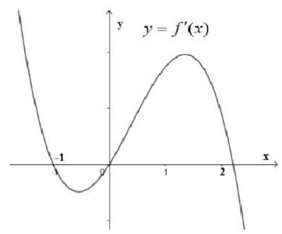
Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M=\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(5)$ và $m=\min\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-2)$

Khi đó $T=f(5)+f(-2)$.

Câu 12. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong
các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



A. $a+c>0$. **B.** $a+b+c+d<0$.
C. $a+c<b+d$. **D.** $b+d-c>0$.

Lời giải

Chọn A

Theo đồ thị ta có $f'(0)=0 \Leftrightarrow d=0$ và hệ số $a<0$.

Xét $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx=f(x)\Big|_{-1}^{0}=-a+b-c+d$, mà $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx<0$ nên ta có $-a+b-c+d<0\,(1)$

Hay $a+c>b+d$. Do đó ta loại **C.**

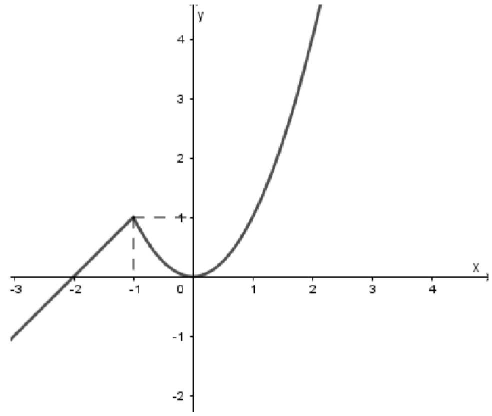
Thay $d=0$ ta có $a>b-c$, vì $a<0$ nên $b-c<0$. Loại **D.**

Xét $\int\limits_{0}^{1} f'(x)dx=f(x)\Big|_{0}^{1}=a+b+c+d$, mà $\int\limits_{0}^{1} f'(x)dx>0$ nên ta có $a+b+c+d>0\,(2)$.

Do đó ta loại **B.**

Từ (2) ta có $-a-b-c-d<0$ cộng từng vế với (1) ta có $a+c>0$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị gồm một phần đường thẳng và một phần parabol có đỉnh là gốc tọa độ O như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $\dfrac{26}{3}$. **B.** $\dfrac{38}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có, phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$.

Từ hình vẽ, ta thấy đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;0), B(-1;1)$.

Suy ra, ta có hệ phương trình $\begin{cases} -2a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = x + 2$.

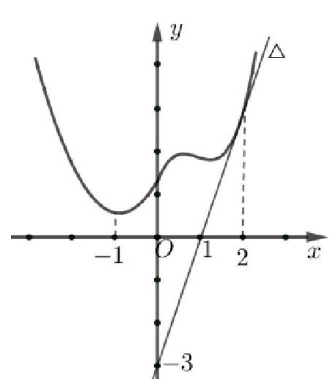
Ta có, phương trình parabol có dạng $y = ax^2,\ a \neq 0$.

Từ hình vẽ, ta thấy parabol đi qua điểm $B(-1;1) \Rightarrow y = x^2$.

Do đó, hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x + 2,\ x \leq -1 \\ x^2 \quad ,x \geq -1 \end{cases}$.

Vậy, $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1}(x+2)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} x^2\mathrm{d}x = \left.\dfrac{(x+2)^2}{2}\right|_{-3}^{-1} + \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{-1}^{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + 9 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{28}{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x = 2$. Tính $\int\limits_{1}^{4} f''(x-2)\mathrm{d}x$



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

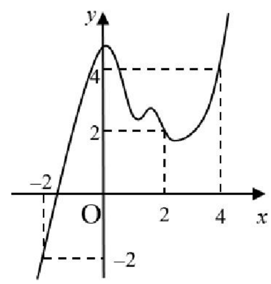
Chọn C

Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua các điểm $(0;-3)$ và $(1;0)$ nên $\Delta: y=3x-3$ suy ra hệ số góc của Δ là $k=3 \Rightarrow f'(2)=3$.

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ suy ra $f'(-1)=0$.

Vậy $\int_1^4 f''(x-2)\mathrm{d}x = f'(x-2)\Big|_1^4 = f'(2)-f'(-1)=3-0=3$.

Câu 15. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị của biểu thức $I=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 10.

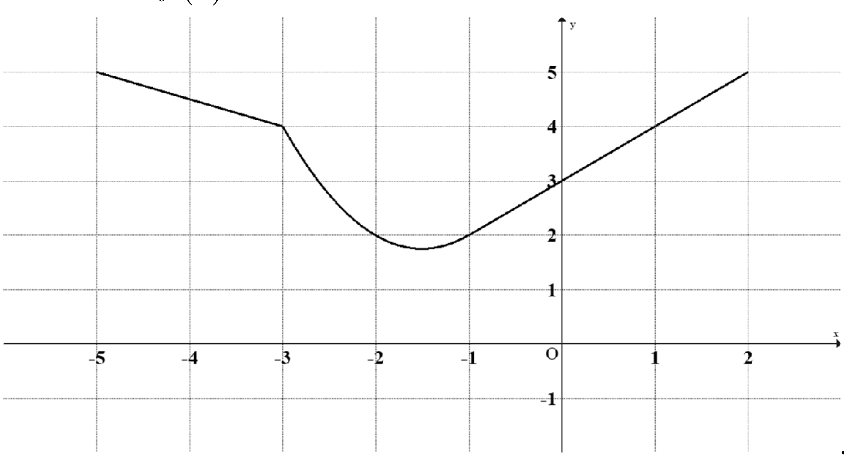
Lời giải

Chọn C

Xét $I=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}(x-2)+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}(x+2)$

$=f(x-2)\Big|_0^4+f(x+2)\Big|_0^2=\left[f(2)-f(-2)\right]+\left[f(4)-f(2)\right]=f(4)-f(-2)=4-(-2)=6.$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $F'(x)=f(x), \forall x\in[-5;2]$ và $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{14}{3}$. Tính $F(2)-F(-5)$

A. $\frac{-145}{6}$. **B.** $\frac{-89}{6}$. **C.** $\frac{145}{6}$. **D.** $\frac{89}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy, đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[-5;2]$được xây dựng bởi ba hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{khi} -5\le x<-3 \\ f_2(x) \text{khi} -3\le x\le -1 \\ f_3(x) \text{khi} -1<x\le 2 \end{cases}$. Trong đó:.

$f_1(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-5;5)$ và $(-3;4)$ có phương trình: $f_1(x)=\frac{-x+5}{2}$.

$f_2(x)$ có đồ thị là một đường cong nối từ điểm $(-3;4)$ đến điểm $(-1;2)$.

$f_3(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-1;2)$ và $(0;3)$ có phương trình $f_3(x)=x+3$.

Vậy: $F(2)-F(-5)=\int_{-5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-3} f_1(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-3}^{-1} f_2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2} f_3(x)\,\mathrm{d}x$.

$=\int_{-5}^{-3}\frac{-x+5}{2}\mathrm{d}x+\int_{-3}^{-1} f_2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}(x+3)\,\mathrm{d}x==9+\frac{14}{3}+\frac{21}{2}=\frac{145}{6}$.