Chuyên đề 26 TÍCH PHÂN- PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Tích phân cơ bản có điều kiện

1.Định nghĩa: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên K; a,b là hai phần tử bất kì thuộc K, $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K. Hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ gọi là tích phân của của $f\left(x\right)$ từ a đến b và được kí hiệu: $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=F\left(x\right)\Big|_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

2. Các tính chất của tích phân:

+ $\int\limits_a^a f\left(x\right)dx=0$	+ $\int\limits_a^b \left[f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right]dx=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\pm\int\limits_a^b g\left(x\right)dx$
+ $\int\limits_b^a f\left(x\right)dx=-\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$	+ $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx$
+ $\int\limits_a^b k.f\left(x\right)dx=k.\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$	+ Nếu $f\left(x\right)\ge g\left(x\right)\ \forall x\in\left[a;b\right]$ thì $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\ge\int\limits_a^b g\left(x\right)dx$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$\int x^\alpha.dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int\left(ax+b\right)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{\left(ax+b\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\left|x\right|+C$	$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\left|ax+b\right|+C$
$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$	$\int\frac{1}{\left(ax+b\right)^2}dx=-\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$
$\int\sin x.dx=-\cos x+C$	$\int\sin\left(ax+b\right).dx=-\frac{1}{a}.\cos\left(ax+b\right)+C$
$\int\cos x.dx=\sin x+C$	$\int\cos\left(ax+b\right).dx=\frac{1}{a}.\sin\left(ax+b\right)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2x}.dx=-\cot x+C$	$\int\frac{1}{\sin^2\left(ax+b\right)}.dx=-\frac{1}{a}.\cot\left(ax+b\right)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2x}.dx=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2\left(ax+b\right)}.dx=\frac{1}{a}.\tan\left(ax+b\right)+C$
$\int e^x.dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}.dx=\frac{1}{a}.e^{ax+b}+C$
$\int a^x.dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

✍ **Nhận xét**. Khi thay x bằng $\left(ax+b\right)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Câu 1. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$. Biết $F(-1)=0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

A. $\ln 8+1$. **B.** $4\ln 2+1$. **C.** $2\ln 3+2$. **D.** $2\ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=F(2)-F(-1) \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{2}\dfrac{2}{x+2}=2\ln|x+2|\Big|_{-1}^{2}=2\ln 4-2\ln 1=2\ln 4$

$\Leftrightarrow F(2)-F(-1)=2\ln 4 \Leftrightarrow F(2)=2\ln 4$ (do $F(-1)=0$).

Câu 2. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2-4}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+15\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int(2\sin^2 x+1)\mathrm{d}x=\int(2-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$

Hay $f(x)=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Suy ra $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x$

$=x^2+\dfrac{1}{4}\cos 2x+4x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{16}+\pi-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$.

Câu 3. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3,\ \forall x\in R$, khi đó $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2\sin^2 x+3)\,\mathrm{d}x=\int(1-\cos 2x+3)\,\mathrm{d}x=\int(4-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=4x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

Ta có $f(0)=4$ nên $4.0-\dfrac{1}{2}\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$.

Nên $f(x)=4x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}.$$

Câu 4. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$.Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3, \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2+2}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2\cos^2 x+3)dx=\int(2.\frac{1+\cos 2x}{2}+3)dx$

$=\int(\cos 2x+4)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C$ do $f(0)=4\Rightarrow C=4$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4$ nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4)dx$

$=(-\frac{1}{4}\cos 2x+2x^2+4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$.

Câu 5. Biết rằng hàm số $f(x)=mx+n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $m+n=4$. **B.** $m+n=-4$. **C.** $m+n=2$. **D.** $m+n=-2$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(mx+n)\,\mathrm{d}x=\frac{m}{2}x^2+nx+\mathrm{C}$.

Lại có: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3\Rightarrow\left(\frac{m}{2}x^2+nx\right)\Big|_0^1=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}m+n=3\ (1)$.

$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8\Rightarrow\left(\frac{m}{2}x^2+nx\right)\Big|_0^2=8\Leftrightarrow 2m+2n=8\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{2}m+n=3\\2m+2n=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$.

$\Rightarrow m+n=4$.

Câu 6. Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$ và

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(ax^2+bx+c)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+\mathrm{C}$.

Lại có: $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^1=-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\ (1)$.

$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^2=-2\Leftrightarrow\frac{8}{3}a+2b+2c=-2\ (2)$.

$\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^3=\frac{13}{2}\Leftrightarrow 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\ (3)$.

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\frac{16}{3}\end{cases}$.

$\Rightarrow P=a+b+c=1+3+\left(-\frac{16}{3}\right)=-\frac{4}{3}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 $(0<a_1<a_2)$ thỏa mãn $\int\limits_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=0$. Hãy tính $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$.

A. $T=26$. **B.** $T=12$. **C.** $T=13$. **D.** $T=28$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=\left(x^2-3x\right)\Big|_1^a=a^2-3a+2$.

Vì $\int\limits_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=0$ nên $a^2-3a+2=0$, suy ra $\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=2\end{array}\right.$.

Lại có $0<a_1<a_2$ nên $a_1=1$; $a_2=2$.

Như vậy $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)=3^1+3^2+\log_2\left(\frac{2}{1}\right)=13$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho $\int\limits_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=\left(x^3-x^2+x\right)\Big|_0^m=m^3-m^2+m$.

$\int\limits_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0\Leftrightarrow m=2\in(0;4)$.

Vậy $m=2\in(0;4)$.

Câu 9. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho $I=\int_0^1\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa tích phân ta có $I=\int_0^1\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2-2m^2x\right)\Big|_0^1=-2m^2+2$.

Khi đó $I+6>0\Leftrightarrow -2m^2+2+6>0\Leftrightarrow -m^2+4>0\Leftrightarrow -2<m<2$

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 10. **(Sở GD Kon Tum - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a(2x-3)\mathrm{d}x\le 4$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^a(2x-3)\mathrm{d}x=\left(x^2-3x\right)\Big|_0^a=a^2-3a$.

Khi đó: $\int_0^a(2x-3)\mathrm{d}x\le 4\Leftrightarrow a^2-3a\le 4\Leftrightarrow -1\le a\le 4$

Mà $a\in\mathbb{N}^*$ nên $a\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh - HN 2018).** Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int_\pi^b 4\cos 2x dx=1$?

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\int_\pi^b 4\cos 2xdx=1\Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_\pi^b=1\Leftrightarrow \sin 2b=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ b=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.$.

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. **(Cần Thơ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$, $f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(0)+f(4)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\int\dfrac{4}{x^2-4}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$.

Do đó: $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x-2}{x+2}+C_1 & \text{khi } x<-2\\ \ln\dfrac{2-x}{x+2}+C_2 & \text{khi } -2<x<2\\ \ln\dfrac{x-2}{x+2}+C_3 & \text{khi } x>2\end{cases}$

$f(-3)=\ln 5+C_1$; $f(3)=\ln\dfrac{1}{5}+C_3$; $f(0)=C_2$; $f(-1)=\ln 3+C_2$; $f(1)=\ln\dfrac{1}{3}+C_2$;

$f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2\Leftrightarrow C_1+C_3=2C_2=2\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=2\\ C_2=1\end{cases}$.

Vậy $f(-4)+f(0)+f(4)=\ln 3+C_1+C_2+\ln\dfrac{1}{3}+C_3=C_1+C_2+C_3=3$.

Câu 13. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Biết $\int\limits_1^4\sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=a+e^b-e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$

A. $T=-3$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-4$. **D.** $T=-5$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^x}\right)^2$ nên

$\int\limits_1^4\sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=\int\limits_1^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^x}\right)dx=\left(\sqrt{x}-e^{-x}\right)\Big|_1^4=1+e^{-1}-e^{-4}$.

Vậy $a=1$, $b=-1$, $c=-4$. Suy ra $T=-4$.

Câu 14. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$, $f(-2)=\dfrac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng

A. $\dfrac{6\ln 2-3}{4}$. **B.** $\dfrac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\dfrac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $\dfrac{8\ln 2-3}{4}$.

Lời giải

Có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{x+1}{x^2}dx=\ln x-\dfrac{1}{x}+C$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C_1 & \text{khi } x<0\\ \ln|x|-\dfrac{1}{x}+C_2 & \text{khi } x>0\end{cases}$

Do $f(-2)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\ln 2+\dfrac{1}{2}+C_1=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C_1=1-\ln 2$

Do $f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}\Rightarrow\ln 2-\dfrac{1}{2}+C_2=2\ln 2-\dfrac{3}{2}\Rightarrow C_2=\ln 2-1$

Như vậy, $f(x)=\begin{cases} \ln|x|-\dfrac{1}{x}+1-\ln 2 & \text{khi } x<0 \\ \ln|x|-\dfrac{1}{x}+\ln 2-1 & \text{khi } x>0 \end{cases}$

Vậy $f(-1)+f(4)=(2-\ln 2)+\left(\ln 4-\dfrac{1}{4}+\ln 2-1\right)=\dfrac{8\ln 2+3}{4}$.

Câu 15. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng.

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+4}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f(x)=\int(2\cos^2 x+1)\mathrm{d}x=\int\left(2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+1\right)\mathrm{d}x=\int(\cos 2x+2)\mathrm{d}x$$

$$=\int\cos 2x\mathrm{d}x+\int 2\mathrm{d}x=\frac{\sin 2x}{2}+2x+C.$$

Lại có $f(0)=4\Leftrightarrow C=4\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sin 2x}{2}+2x+4$.

$$\Rightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 2x}{2}+2x+4\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\mathrm{d}(2x)+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 4\mathrm{d}x.$$

$$=\frac{-\cos 2x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+(x^2+4x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}.$$

Câu 16. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^4 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2-6}{18}$. **B.** $\dfrac{\pi^2-3}{32}$. **C.** $\dfrac{3\pi^2-16}{64}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2-6}{112}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3).$$

Suy ra $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}\int(\cos 4x-4\cos 2x+3)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{32}\sin 4x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{8}x+C$.

Vì $f(0)=0$ nên $C=0$ hay $f(x)=\dfrac{1}{32}\sin 4x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{8}x$.

Do đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right)\mathrm{d}x = \left.\left(-\frac{1}{128}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{3}{16}x^2\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(-\frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{3\pi^2}{64}\right) - \left(-\frac{1}{128} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3\pi^2 - 16}{64}$.

Dạng 2. Tích phân hàm số hữu tỷ

Tính $I = \int\limits_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$? với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không chứa căn.

□ Nếu bậc của tử $P(x) \geq$ bậc mẫu $Q(x) \xrightarrow{PP}$ chia đa thức.

□ Nếu bậc của tử $P(x) <$ bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu số **phân tích được thành tích** số $\xrightarrow{PP}$ đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

+ $\frac{1}{(ax+m)(bx+n)} = \frac{1}{an-bm}\left(\frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n}\right)$ (1)

+ $\frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}$.

+ $\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$ với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

+ $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$.

□ Nếu bậc tử $P(x) <$ bậc mẫu $Q(x)$ mà **mẫu không phân tích được thành tích số**, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

+ $I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, (n \in N^*) \xrightarrow{PP} x = a.\tan t$.

+ $I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, (\Delta < 0) = \int \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)\right]}$. Ta sẽ đặt $\longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}}\tan t$.

+ $I_3 = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}.dx$ với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Ta sẽ phân tích:

$I_3 = \frac{p}{2a}\underbrace{\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}}_{A} + \left(q - \frac{b.p}{2a}\right).\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}$ và giải A bằng cách đặt $t =$ mẫu số.

Câu 1. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Biết $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** 1. **<u>D</u>.** 0.

Lời giải

Ta có:

$\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = 2\int\limits_1^2 \frac{1}{2x+1}dx - \int\limits_1^2 \frac{1}{x+1}dx$

$= 2.\frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_1^2 - \ln|x+1|\Big|_1^2 = \ln(2x+1)\Big|_1^2 - \ln(x+1)\Big|_1^2 = \ln 5 - \ln 3 - (\ln 3 - \ln 2)$

$= \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 5$.

Do đó: $a = 1,\ b = -2,\ c = 1$. Vậy $a + b + c = 1 + (-2) + 1 = 0$.

Câu 2. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Biết $I = \int\limits_{-1}^{0} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2}dx = a\ln\frac{2}{3} + b, (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $a + 4b$ bằng

A. 50 **B.** 60 **C.** 59 **D.** 40

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int\limits_{-1}^{0} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2}dx = \int\limits_{-1}^{0} \left(3x + 11 + \frac{21}{x - 2}\right)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + 11x + 21.\ln|x - 2|\right)\Big|_{-1}^{0}$

$= 21.\ln\frac{2}{3} + \frac{19}{2}$. Suy ra $a = 21, b = \frac{19}{2}$. Vậy $a + 4b = 59$

Câu 3. Biết $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1}dx = \frac{-1}{m} + n\ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $m + n$.

A. $S = 1$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = -5$. **D.** $S = -1$.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1}dx = \int_0^1 (x - 1)dx - \int_0^1 \frac{dx}{x + 1} = \frac{(x - 1)^2}{2}\Big|_0^1 - \ln|x + 1|\Big|_0^1 = \frac{-1}{2} - \ln 2$

$\Rightarrow m = 2, n = -1 \Rightarrow m + n = 1$

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}dx = a - \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $I = \int\limits_0^1 \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{2x}{x^2 + 1}\right)dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}d\left(x^2 + 1\right) = x\Big|_0^1 - \ln\left(x^2 + 1\right)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$.

Câu 5. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int\limits_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}dx = a + \ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = 2$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 10$.

Lời giải

$\int\limits_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}dx = \int\limits_3^5 \left(x + \frac{1}{x + 1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x + 1|\right)\Big|_3^5 = 8 + \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = a - 2b = 2$.

Câu 6. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho $\int_1^2 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$?

A. $P=1$. **<u>B</u>.** $P=5$. **C.** $P=7$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 \left(x^2+\frac{x+1-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 \left(x^2+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^3}{3}+x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2=\frac{10}{3}+\ln 2-\ln 3=\frac{10}{3}+\ln\frac{2}{3}=\frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$.

Suy ra $a=2;b=3$. Vậy $a+b=5$.

Câu 7. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **<u>B</u>.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

$\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int_1^3 \frac{2}{x+1}dx-\int_1^3 \frac{1}{x+2}dx$

$=\left(2\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_1^3=2\ln 2+\ln 3-\ln 5$

Suy ra $a=2$, $b=1$, $c=-1$.

Nên $a+b+c=2+1-1=2$.

Câu 8. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 12 **B.** 6 **C.** 1 **<u>D</u>.** 64

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Ta có: $I=\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\int_3^4 \frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int_3^4 \frac{3(x-2)+2(x-1)}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int_3^4 \left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(3\ln|x-1|+2\ln|x-2|\right)\Big|_3^4=3\ln 3+2\ln 2-3\ln 2=3\ln 3-\ln 2+0.\ln 5$

Suy ra $\begin{cases}a=3\\b=-1\\c=0\end{cases}\Rightarrow 2^{a-3b+c}=2^6=64$.

Câu 9. Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

<u>A</u>. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=5$. **D.** $S=10$.

Lời giải

<u>Chọn A</u>

$\int\limits_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_3^5\left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\right|_3^5=8+\ln\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}\Rightarrow S=a-2b=2.$

Câu 10. Biết rằng $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z},a<10)$. Khi đó $a+b$ có giá trị bằng

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 12.

Lời giải

Xét $I=\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$.

Đặt $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$, với $t\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

Với $x=0$, ta có $t=\frac{\pi}{6}$.

Với $x=1$, ta có $t=\frac{\pi}{3}$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}t=\left.\frac{2}{\sqrt{3}}t\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. Từ đó suy ra $\begin{cases}a=3\\b=9\end{cases}\Rightarrow a+b=12$.

Câu 11. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Biết $\int\limits_0^2\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Lời giải

Ta có:

$\int\limits_0^2\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(1+\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(x-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right)\right|_0^2$

$=2-3\ln 3+2\ln 5$.

Vậy $a=2,b=-3,c=2$, do đó $abc=-12$.

Câu 12. **(THPT Nguyễn Trãi - Dà Nẵng - 2018)** Giả sử rằng $\int\limits_{-1}^0\frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=a\ln\frac{2}{3}+b$. Khi đó, giá trị của $a+2b$ là

A. 30. **B.** 60. **C.** 50. **D.** 40.

Lời giải

Ta có:

$$I=\int\limits_{-1}^0\frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=\int\limits_{-1}^0\left(3x+11+\frac{21}{x-2}\right)dx$$

$$\Rightarrow I=\left.\left[\frac{3x^2}{2}+11x+21.\ln|x-2|\right]\right|_{-1}^0=21.\ln 2+\frac{19}{2}-21.\ln 3$$

$$\Rightarrow I = 21\ln\frac{2}{3} + \frac{19}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ b = \dfrac{19}{2} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 40.$$

Câu 13. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b} + c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a - b^2 - c^3$.

A. -5. **B.** -4. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3}\mathrm{d}x = \int_1^4 \left(x + 2 + \frac{3(2x-1)}{x^2 - x + 3}\right)\mathrm{d}x$

$= \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^4 + 3\int_1^4 \frac{\mathrm{d}(x^2 - x + 3)}{x^2 - x + 3} = \frac{27}{2} + 3\ln\left|x^2 - x + 3\right|\Big|_1^4 = \frac{27}{2} + 3\ln 5$.

Mà $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b} + c\ln 5$, suy ra $a = 27$, $b = 2$, $c = 3$.

Vậy $P = a - b^2 - c^3 = -4$.

Câu 14. Cho $\int_0^1 \frac{4x^2 + 15x + 11}{2x^2 + 5x + 2}\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T = a.c - b$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có

$\int_0^1 \frac{4x^2 + 15x + 11}{2x^2 + 5x + 2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(4x^2 + 10x + 4) + (5x + 7)}{2x^2 + 5x + 2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2 + \frac{5x + 7}{2x^2 + 5x + 2}\right)\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \left(2 + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(2x + \ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1 = 2 - \ln 2 + \frac{5}{2}\ln 3$

Vậy $a = 2$, $b = -1$, $c = \frac{5}{2}$ nên $T = 6$.

Câu 15. **(SGD Bến Tre 2019)** Biết $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1}\mathrm{d}x = \frac{-1}{m} + n\ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $S = m + n$.

A. $S = -1$. **B.** $S = -5$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - 1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - x - \ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{-1}{2} - \ln 2$.

Suy ra $m = 2$; $n = -1$. Vậy $S = 1$.

Câu 16. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Bigg|_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3$.

Vậy $a=2,\ b=-1 \Rightarrow a+b=1$.

Câu 17. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^1 \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(2 - \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\right)\mathrm{d}x$

$= \int\limits_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left(2x - \ln|x+1| - 2\ln|x+2|\right)\Big|_0^1 = 2 + \ln 2 - 2\ln 3$.

Suy ra $a=2$; $b=1$; $c=-2$.

Vậy $a+b+c=1$.

Câu 18. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho biết $\int\limits_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3$, với $a,b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a^2 + b^2$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 25. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

$A = \frac{x-1}{x+3}\Bigg|_{x=-1} = -1, B = \frac{x-1}{x+1}\Bigg|_{x=-3} = 2$

$\int\limits_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = \int\limits_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3}\right)dx = -\ln|x+1|\Big|_0^2 + 2\ln|x+3|\Big|_0^2 = -\ln 3 + 2\ln 5 - 2\ln 3$

$= 2\ln 5 - 3\ln 3 = a\ln 5 + b\ln 3$

$\Rightarrow a = 2, b = -3 \Rightarrow T = 13$.

Câu 19. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Biết $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = a + b\ln 3 + c\ln 5$, $(a,b,c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}dx=\int_0^2\left(1+\frac{x-1}{x^2+4x+3}\right)dx=\int_0^2\left(1+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)dx$$

$$=\left(x-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right)\Big|_0^2=2+2\ln 5-3\ln 3=a+b\ln 3+c\ln 5.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\Rightarrow a.b.c=-12.\\ c=2\end{cases}$$

Câu 20. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}dx=\frac{a}{b}+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P=a-b^2-c^3$.

A. -5. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}dx=\int_1^4\left(x+2+\frac{3(2x-1)}{x^2-x+3}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x+3\ln\left(x^2-x+3\right)\right)\Big|_1^4=\frac{27}{2}+3\ln 5$.

Vậy $P=a-b^2-c^3=-4$.

Câu 21. **(Bình Phước - 2019)** Cho $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b^2-c^3$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int_2^3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Bigg|_2^3=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{3}{4}=4\ln 2-\ln 3-\ln 5$.

Suy ra $a=4, b=-1, c=-1$. Vậy $a+b^2-c^3=6$.

Câu 22. **(SGD Đà Nẵng 2019)** Cho $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 7$ với $a, b, c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $2a+3b+7c$ bằng

A. -9. **B.** 6. **C.** 15. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x}dx=\int_3^4 \frac{x+(x+3)}{x.(x+3)}dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)dx=\left(\ln|x(x+3)|\right)\Big|_3^4=\ln 28-\ln 18$

$=\ln\frac{14}{9}=\ln 14-\ln 9=\ln 2-2\ln 3+\ln 7$.

$\Rightarrow a=1$, $b=-2$, $c=1$.

Vậy $2a+3b+7c=3$.

Câu 23. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho $\int\limits_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx = a+b.\ln 2+c.\ln 3$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị $6a+b+c$ bằng:

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int\limits_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \left(\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{6}-\ln 2+\ln 3$.

$\Rightarrow a=-\frac{1}{6}, b=-1, c=1$, nên $6a+b+c=-1$.

Câu 24. **(SP Đồng Nai - 2019)** Biết $\int\limits_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6}dx = a\ln 2+b\ln 5+c\ln 6$. Tính $S=3a+2b+c$.

A. -11. **B.** -14. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6}dx = \int\limits_2^3\left(\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right)dx = \left(2\ln|x+2|+3\ln|x+3|\right)\Big|_2^3$

$=(2\ln 5+3\ln 6)-(2\ln 4+3\ln 5) = -4\ln 2-\ln 5+3\ln 6$.

$\Rightarrow a=-4,\ b=-1,\ c=3$.

Do đó $\Rightarrow S=3a+2b+c=-12-2+3=-11$.

Dạng 3. Tích phân đổi biến

② **Tích phân đổi biến**: $\boxed{\int\limits_a^b [f(x)].u'(x).dx = F[u(x)]\Big|_a^b = F[u(b)]-F[u(a)]}$.

Có sẵn   Tách từ hàm   Nhân

Các bước tính tích phân đổi biến số

- **Bước 1**. Biến đổi để chọn phép đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x).dx$ (quan trọng)
- **Bước 2**. Đổi cận: $\begin{cases} x=b \\ x=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=u(b) \\ t=u(a) \end{cases}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)
- **Bước 3**. Đưa về dạng $I=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t).dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

Một số phương pháp đổi biến số thường gặp

Đổi biến dạng 1. $\boxed{I=\int\limits_a^b \frac{f(x)}{g(x)}.dx = \underbrace{\int\limits_a^b h(x).dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_a^b f(g(x)).\frac{g'(x)}{g(x)}.dx}_{I_2}}$ với

Đổi biến dạng 2.

Nghĩa là nếu gặp tích phân **chứa căn thức** thì có khoảng 80% sẽ đặt $t=$ căn trừ một số trường hợp ngoại lệ sau:

1/ $I_1=\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x=a.\sin t$ hoặc $x=a.\cos t$.

(xuất phát từ công thức $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x=1-\sin^2 x\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x\end{array}\right)$

2/ $I_2=\int f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x=a.\tan t$ hoặc $x=a.\cot t$.

(mấu chốt xuất phát từ công thức $\tan^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$)

3/ $I_3=\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x=\dfrac{a}{\sin t}$ hoặc $x=\dfrac{a}{\cos t}$.

4/ $I_4=\int f\left(\sqrt{\dfrac{a\pm x}{a\mp x}}\right)dx \longrightarrow$ đặt $x=a.\cos 2t$.

5/ $I_5=\int \dfrac{dx}{\left(a+bx^n\right)\sqrt[n]{a+bx^n}} \longrightarrow$ đặt $x=\dfrac{1}{t}$.

6/ $I_6=\int R\left[\sqrt[s_1]{ax+b},......,\sqrt[s_k]{ax+b}\right].dx \longrightarrow$ đặt $t^n=ax+b$.

(trong đó n là bội số chung nhỏ nhất của $\{s_1;s_2;...;s_k\}$)

7/ $I_7=\int \dfrac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \longrightarrow$ đặt $t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$.

Đổi biến dạng 3. $\boxed{\int f(\ln x).\dfrac{1}{x}.dx \longrightarrow t=\ln x \Rightarrow dt=\dfrac{1}{x}.dx}$

Đổi biến dạng 4. $\boxed{\int f(\sin x).\cos x.dx \longrightarrow t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x.dx}$

Đổi biến dạng 5. $\boxed{\int f(\cos x).\sin x.dx \longrightarrow t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x.dx}$

Đổi biến dạng 6. $\boxed{\int f(\tan x).\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \longrightarrow t=\tan x \Rightarrow dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}}$

Đổi biến dạng 7. $\boxed{\int f(\cot x).\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \longrightarrow t=\cot x \Rightarrow dt=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}}$

Đổi biến dạng 8. $\left[\begin{array}{l}\int f(\sin x+\cos x).(\sin x-\cos x)dx \\ \int f(\sin x-\cos x).(\sin x+\cos x)dx\end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\sin x+\cos x \\ t=\sin x-\cos x\end{array}\right.$

Đổi biến dạng 9. $\left[\begin{array}{l}\int f(ax^2+b)^n .xdx \longrightarrow t=ax^2+b \Rightarrow dt=2axdx \\ \int f(ax+b)^n .xdx \longrightarrow t=ax+b \Rightarrow dt=adx\end{array}\right.$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo -2019)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** -1

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x+2 \Rightarrow dt=dx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=2$; $x=1 \Rightarrow t=3$

$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=\int\limits_2^3 \frac{(t-2)dt}{t^2}=\int\limits_2^3 \left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left.\left(\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\right|_2^3=\ln 3+\frac{2}{3}-(\ln 2+1)=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3$

Suy ra $a=-\frac{1}{3}; b=-1; c=1$

$3a+b+c=-1-1+1=-1$.

Câu 2. Tính $K=\int\limits_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $K=\ln 2$. **B.** $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. **C.** $K=2\ln 2$. **D.** $K=\ln\frac{8}{3}$.

Lời giải

Đặt $t=x^2-1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$

Với $x=2 \Rightarrow t=3$; $x=3 \Rightarrow t=8$

Ta có $K=\frac{1}{2}\int\limits_3^8 \frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_3^8=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

Câu 3. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5}\mathrm{d}x$, giả sử đặt $t=1+x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int\limits_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$.

C. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$. **D.** $I=\frac{3}{2}\int\limits_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$.

Lời giải

Ta có: $t=1+x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$.

$x=1 \Rightarrow t=2$.

$$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{x^7}{\left(1+x^2\right)^5}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x.x^6}{\left(1+x^2\right)^5}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t.$$

Câu 4. **(KTNL Gia Bình Năm 2019)** Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=1$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Điều kiện tích phân tồn tại là $a+x^2\neq 0,\forall x\in[0;1]\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>0 \end{array}\right.$

Đặt $t=a+x^2 \Rightarrow dt=2\mathrm{xdx}$. Khi đó

$$\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_a^{1+a}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+a}{a}\right|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+a=e^2a \\ 1+a=-e^2a \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{e^2-1} \\ a=\frac{-1}{e^2+1} \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện ta được $a=\frac{1}{e^2-1}$.

Câu 5. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=0$ và $f'(x)=2019.2020.x(x-1)^{2018},\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{2021}$. **B.** $\frac{1}{1011}$. **C.** $-\frac{2}{2021}$. **D.** $-\frac{1}{1011}$.

Lời giải

Chọn C

Cần nhớ: $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$ và $\int(ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$.

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2019.2020.x(x-1)^{2018}\,\mathrm{d}x=2019.2020\int x(x-1)^{2018}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x-1\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ và $x=t+1$.

Suy ra $f(x)=2019.2020\int(t+1)t^{2018}\,\mathrm{d}t=2019.2020\int\left(t^{2019}+t^{2018}\right)\mathrm{d}t$

$$=2019.2020\left(\frac{t^{2020}}{2020}+\frac{t^{2019}}{2019}\right)+C=2019t^{2020}+2020t^{2019}+C.$$

Từ đó $f(x)=2019(x-1)^{2020}+2020(x-1)^{2019}+C$.

Mà $f(1)=0\Leftrightarrow 2019(1-1)^{2020}+2020(1-1)^{2019}+C=0\Leftrightarrow C=0.$

Suy ra $f(x)=2019(x-1)^{2020}+2020(x-1)^{2019}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[2019(x-1)^{2020}+2020(x-1)^{2019}\right]\mathrm{d}x=\left[2019.\frac{(x-1)^{2021}}{2021}+2020.\frac{(x-1)^{2020}}{2020}\right]\Bigg|_0^1$

$$=-\left(-\frac{2019}{2021}+1\right)=-\frac{2}{2021}.$$

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x+2 \Rightarrow dt = dx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=2$; $x=1 \Rightarrow t=3$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = \int_2^3 \frac{(t-2)dt}{t^2} = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2}\right)dt = \left(\ln|t| + \frac{2}{t}\right)\Bigg|_2^3 = \ln 3 + \frac{2}{3} - (\ln 2 + 1) = -\frac{1}{3} - \ln 2 + \ln 3$$

Suy ra $a = -\frac{1}{3}; b = -1; c = 1$

$3a+b+c = -1-1+1 = -1$.

Câu 7. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A,B,C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A+7B$.

A. $\frac{23}{252}$ **B.** $\frac{241}{252}$ **C.** $\frac{52}{9}$ **D.** $\frac{7}{9}$

Lời giải.

Đặt $t = 3x-2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$.

Khi đó.

$$\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{t+2}{3} t^6\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\int\left(t^7 + 2t^6\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\left(\frac{t^8}{8} + \frac{2t^7}{7}\right) + C.$$

$$= \frac{1}{36}(3x-2)^8 + \frac{4}{63}(3x-2)^7 + C.$$

Từ đó ta có $A = \frac{1}{36}$, $B = \frac{4}{63}$. Suy ra $12A+7B = \frac{7}{9}$.

Câu 8. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Biết $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x = a - \ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$

Đặt $t = x+1 \Rightarrow \begin{cases} dt = dx \\ x = t-1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=0 \leftrightarrow t=1 \\ x=1 \leftrightarrow t=2 \end{cases}$

Khi đó

$$I = \int_1^2 \frac{2(t-1)^2 + 3(t-1) + 3}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2t^2 - t + 2}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left(2t - \ln t - \frac{2}{t}\right)\Bigg|_1^2 = 3 - \ln 2.$$

Suy ra $P = 3^2 + 2^2 = 13$.

Câu 9. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho $\int\limits_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x = m\left(e^p - e^q\right)$ với m, p, $q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** $\dfrac{22}{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot e^{3x-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(e^5 - e^2\right)$. Suy ra $m = \frac{1}{3}$, $p = 5$ và $q = 2$.

Vậy $m+p+q = \frac{1}{3}+5+2 = \frac{22}{3}$.

Câu 10. Biết rằng $\int\limits_0^1 xe^{x^2+2}\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\left(e^b - e^c\right)$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^1 xe^{x^2+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2+2}\mathrm{d}\left(x^2+2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)$.

Nên $a=1$, $b=3$, $c=2$.

Vậy $a+b+c=6$.

Câu 11. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Biết $\int\limits_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx = \ln\left(ae+b\right)$ với a,b là các số nguyên dương.

Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 - ab + b^2$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

$$\int\limits_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx = \int\limits_1^e \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}dx = \int\limits_1^e \frac{d\left(x+\ln x\right)}{x+\ln x} = \ln\left(x+\ln x\right)\Big|_1^e = \ln\left(e+1\right)$$

Vậy $a=1,\ b=1$ nên $T = a^2 - ab + b^2 = 1$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int\limits_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m,n,p,q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m+n+p+q$.

A. $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=7$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int\limits_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = \int\limits_1^2 \left(x^2+2x+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx = \int\limits_1^2 \left(x^2+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx + \int\limits_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$

Xét

$$I_1=\int_1^2\left(x^2+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx=\int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}.\frac{x^2+1}{x^2}dx=\int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x-\frac{1}{x}\right)=\int_1^2 x^2d\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x^2\right)=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$$

$$\Rightarrow I_1+\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 \qquad \Rightarrow I=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2=4e^{\frac{3}{2}}-1$$

Do $\int_1^2(x+1)^2e^{x-\frac{1}{x}}dx=me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó $m,n,p,q\in\mathbb{Z}^+$ và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản $\Rightarrow\begin{cases}m=4\\n=1\\p=3\\q=2\end{cases}$

Khi đó, $T=m+n+p+q=4+1+3+2=10$.

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\int_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

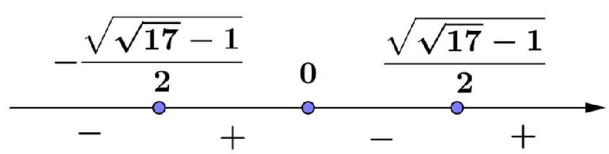
Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_{2x}^{x^2}\frac{\mathrm{d}\left(1+t^2\right)}{1+t^2}=\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{2x}^{x^2}=\ln\left(1+x^4\right)-\ln\left(1+4x^2\right)$.

$f'(x)=\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{8x^2}{1+4x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{8x}{1+4x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{17}-1}}{2}\end{array}\right.$.

Trục xét dấu:



Từ đó ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=f(1)=5$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=10$ **B.** $I=-5$ **C.** $I=0$ **D.** $I=5$

Lời giải

Chọn C

$I=\int_0^1 f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}\left(f(x)\right)=e^{f(x)}\Big|_0^1=e^{f(1)}-e^{f(0)}=e^5-e^5=0$.

Câu 15. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x>0$.

Khi đó $\int_3^8 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{197}{6}$. **C.** $\frac{29}{2}$. **D.** $\frac{181}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x+1=t^2\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Khi đó, $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int \frac{t^2-1}{t^2-t}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int \frac{(t-1).(t+1)}{t.(t-1)}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int (2t+2)\mathrm{d}t$

$=t^2+2t+C=(x+1)+2\sqrt{x+1}+C$.

Mà $f(3)=3\Leftrightarrow (3+1)+2\sqrt{3+1}+C=3\Leftrightarrow C=-5$.

$\Rightarrow f(x)=(x+1)+2\sqrt{x+1}-5=x+2\sqrt{x+1}-4$.

$\Rightarrow \int\limits_3^8 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}-4x\right)\right|_3^8=36-\frac{19}{6}=\frac{197}{6}$.

Câu 16. **(Mã 102 2018)** Cho $\int\limits_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=-2c$ **B.** $a+b=-2c$ **C.** $a+b=c$ **D.** $a-b=-c$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow 2tdt=dx$.

Với $x=5\Rightarrow t=3$; $x=21\Rightarrow t=5$

Ta có $\int\limits_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=2\int\limits_3^5\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{2}\left.\left(\ln|t-2|-\ln|t+2|\right)\right|_3^5=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 7$.

Câu 17. **(Mã 101 2018)** Cho $\int\limits_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=3c$ **B.** $a-b=-3c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=c$

Lời giải

Chọn. A.

Đặt $t=\sqrt{x+9}\Rightarrow t^2=x+9\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=16\Rightarrow t=5$, $x=55\Rightarrow t=8$.

Do đó $\int\limits_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=\int\limits_5^8\frac{2t\mathrm{d}t}{t(t^2-9)}=2\int\limits_5^8\frac{\mathrm{d}t}{t^2-9}=\frac{1}{3}\int\limits_5^8\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left.\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right|_5^8$

$=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{11}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 11$.

Vậy $a=\frac{2}{3};b=\frac{1}{3};c=-\frac{1}{3}\Rightarrow a-b=-c$.

Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^3 \sqrt{u}du$ **B.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du$ **C.** $I=2\int_0^3 \sqrt{u}du$ **D.** $I=\int_1^2 \sqrt{u}du$

Lời giải

Chọn A

$I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$

đặt $u=x^2-1 \Rightarrow du=2xdx$. Đổi cận $x=1\Rightarrow u=0$; $x=2\Rightarrow u=3$

Nên $I=\int_0^3 \sqrt{u}du$

Câu 19. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Giả sử tích phân $I=\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=a+b\ln 3+c\ln 5$. Lúc đó

A. $a+b+c=\frac{5}{3}$. **B.** $a+b+c=\frac{4}{3}$. **C.** $a+b+c=\frac{7}{3}$. **D.** $a+b+c=\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{3x+1}$. Ta có $t^2=3x+1\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$.

Đổi cận

x	1	5
t	2	4

Ta có $I=\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=\int_2^4 \frac{1}{1+t}.\frac{2}{3}tdt$

$=\frac{2}{3}\int_2^4 \frac{t}{t+1}dt$

$=\frac{2}{3}\int_2^4\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{2}{3}\left(t-\ln|1+t|\right)\Big|_2^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 5$.

Do đó $a=\frac{4}{3}; b=\frac{2}{3}; c=-\frac{2}{3}$.

Vậy $a+b+c=\frac{4}{3}$.

Câu 20. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(2)=0$ và $f'(x)=\frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{a}{b}$ $\left(a,b\in\mathbb{Z}, b>0, \frac{a}{b}\right.$ là phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng

A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x).\mathrm{d}x=\int \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}.\mathrm{d}x=\int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{17}{2}}{\sqrt{2x-3}}.\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}\sqrt{2x-3}+\frac{17}{2\sqrt{2x-3}}\right).\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{\frac{3}{2}}+\frac{17}{2}.\sqrt{2x-3}+C=\frac{1}{6}\sqrt{(2x-3)^3}+\frac{17}{2}.\sqrt{2x-3}+C$.

Mà $f(2)=0\Leftrightarrow=\frac{1}{6}\sqrt{(2.2-3)^3}+\frac{17}{2}.\sqrt{2.2-3}+C=0\Leftrightarrow\frac{1}{6}+\frac{17}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{26}{3}$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{6}\sqrt{(2x-3)^3}+\frac{17}{2}.\sqrt{2x-3}-\frac{26}{3}$

Do đó $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_4^7\left[\frac{1}{6}\sqrt{(x-3)^3}+\frac{17}{2}.\sqrt{x-3}-\frac{26}{3}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{6}\frac{\sqrt{(x-3)^5}}{\frac{5}{2}}+\frac{17}{2}.\frac{\sqrt{(x-3)^3}}{\frac{3}{2}}-\frac{26}{3}x\right]\Bigg|_4^7$

$=\left[\frac{1}{15}\sqrt{(x-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(x-3)^3}-\frac{26}{3}x\right]\Bigg|_4^7$

$=\left[\frac{1}{15}\sqrt{(7-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(7-3)^3}-\frac{26}{3}.7\right]-\left[\frac{1}{15}\sqrt{(4-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(4-3)^3}-\frac{26}{3}.4\right]$

$=\left[\frac{1}{15}\sqrt{(7-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(7-3)^3}-\frac{26}{3}.7\right]-\left[\frac{1}{15}\sqrt{(4-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(4-3)^3}-\frac{26}{3}.4\right]$

$=\frac{236}{15}$.

Suy ra $a=236, b=15$. Vậy $a+b=251$.

Câu 21. **(Nam Định - 2018)** Biết tích phân $\int_0^{\ln 6}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+3}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x+3\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases}x=\ln 6\\ x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\ t=2\end{cases}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx = \int\limits_2^3 \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = \int\limits_2^3 \left(2-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \left(2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = (6-2\ln 4)-(4-2\ln 3)$

$= 2-4\ln 2+2\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=2 \end{cases}.$

Vậy $T=0$.

Câu 22. **(Chuyên Vinh - 2018)** Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2=3x+1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{2t}{3}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=2$

Khi đó $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \frac{1}{t}.t\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \mathrm{d}t = \frac{2}{3}t\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Cách khác: Sử dụng công thức $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$ thì $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2018)** Biết $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=18$ **B.** $P=46$ **C.** $P=24$ **D.** $P=12$

Lời giải

Chọn B

Cách 1

$\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}dx$

Đăt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \Rightarrow dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx \Leftrightarrow 2dt = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx$

Khi đó $I = \int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{2}{t^2}dt = \left(\frac{-2}{t}\right)\Bigg|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

$\Rightarrow P=a+b+c=32+12+2=46$.

Cách 2

$\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \int\limits_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}dx$

$= \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx = \left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = 2\sqrt{2}-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{2} = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

Câu 24. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{3}{4}$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{1+\ln x}=t \Rightarrow \ln x = t^2-1 \Rightarrow \frac{dx}{x}=2tdt$

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \to t=1 \\ x=e \to t=\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int\limits_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Suy ra $a=\frac{4}{3}; b=-\frac{2}{3} \Rightarrow S=a+b=\frac{2}{3}$

Câu 25. **(Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho tích phân $I=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$ và $x=4\sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$. **B.** $I=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\mathrm{d}t$.

C. $I=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t$. **D.** $I=-16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}t$.

Lời giải

Đặt $x=4\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 4\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=2\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}4|\cos t|.4\cos t\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}4|\cos t|.4\cos t\mathrm{d}t = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}|\cos t|.\cos t\mathrm{d}t$.

Mà vì $t\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ thì $\cos t>0$ nên khi đó $I=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}t = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$.

Câu 26. Biết $\int\limits_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 5$ $(a,b,c\in Q)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2=3x+1 \Rightarrow 2\mathrm{tdt}=3\mathrm{dx} \Rightarrow \mathrm{dx}=\frac{2}{3}\mathrm{tdt}$

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=2$; $x=5 \Rightarrow t=4$

$$\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=\frac{2}{3}\int_2^4 \frac{t}{1+t}dt=\frac{2}{3}\int_2^4 (1-\frac{1}{1+t})dt=\frac{2}{3}(t-\ln|t+1|)\Big|_2^4=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\ln 5+\frac{2}{3}\ln 3.$$

$$\Rightarrow a=\frac{4}{3}, b=\frac{2}{3}, c=-\frac{2}{3}\ \Rightarrow a+b+c=\frac{4}{3}.$$

Câu 27. Cho $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12   **<u>B</u>.** 10   **C.** 18   **D.** 15

Lời giải

<u>Chọn B</u>

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x.\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}}dx$$

• Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\Rightarrow\ dx=\frac{-1}{t^2}dt$

Đổi cận: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow\ t=2$; $x=1\Rightarrow\ t=1$

Khi đó: $I=\int_2^1\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}\left(\frac{-1}{t^2}dt\right)=\int_1^2\frac{t^2dt}{t^3.\sqrt{1+t^3}}$

• Đặt $u=\sqrt{1+t^3}\ \Rightarrow\ u^2=1+t^3\ \Rightarrow\ t^3=u^2-1\Rightarrow\ 3t^2dt=2u\,du\Rightarrow\ t^2dt=\frac{2u\,du}{3}$

Đổi cận: $t=1\Rightarrow\ u=\sqrt{2}$; $t=2\Rightarrow\ u=3$

Ta có: $I=\int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{\frac{2u\,du}{3}}{\left(u^2-1\right).u}=\frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{3}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

Suy ra $a=3,\ b=3,\ c=2,\ d=2$. Vậy $a+b+c+d=10$.

Câu 28. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx=\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$

A. 0.   **<u>B</u>.** 1.   **C.** 2.   **D.** 91.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[3]{1+x^2}\Rightarrow t^3=1+x^2\Rightarrow 3t^2dt=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{3t^2dt}{2}$.

Đổi cận:

x	0	$\sqrt{7}$
t	1	2

$$\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx=\int_1^2\frac{t^3-1}{t}.\frac{3t^2}{2}dt=\frac{3}{2}.\int_1^2\left(t^4-t\right)dt=\frac{3}{2}.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{141}{20}.$$

$\Rightarrow m-7n=141-7.20=1$.

Câu 29. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Biết rằng $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$ **B.** $-\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn A

$A=\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}$

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=2$

$$A=\int\limits_1^2 \frac{\frac{2}{3}tdt}{t^2+5t+6}=\frac{2}{3}\int\limits_1^2 \frac{t}{(t+2)(t+3)}dt=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\left(\frac{-2}{t+2}+\frac{3}{t+3}\right)dt=\frac{2}{3}\left(-2\ln|t+2|+3\ln|t+3|\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{2}{3}(-2\ln 4+3\ln 5+2\ln 3-3\ln 4)=\frac{2}{3}(-10\ln 2+2\ln 3+3\ln 5)=-\frac{20}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 3+2\ln 5$$

Vậy: $a+b+c=-\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+2=-\frac{10}{3}$.

Câu 30. Biết $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{3}{4}$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{1+\ln x}=t\Rightarrow \ln x=t^2-1\Rightarrow \frac{dx}{x}=2tdt$

Đổi cận $\begin{cases} x=1\rightarrow t=1 \\ x=e\rightarrow t=\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)2tdt}{t}=2\int\limits_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Suy ra $a=\frac{4}{3};b=-\frac{2}{3}\Rightarrow S=a+b=\frac{2}{3}$

Câu 31. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho $\int\limits_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 9 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx =$$

$t = 4+2\sqrt{x+1} \Rightarrow (t-4)^2 = 4(x+1)$

$\Rightarrow 2(t-4)dt = 4dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 6$

$x = 3 \Rightarrow t = 8$

$$I = \int_6^8 \frac{t^2-8t+16-4}{8t}.(t-4)dt = \int_6^8 \frac{t^3-12t^2+44t-48}{8t}dt = \int_6^8 \frac{t^2}{8} - \frac{3t}{2} + \frac{11}{2} - \frac{6}{t}dt$$

$$= \left(\frac{t^3}{24} - \frac{3t^2}{4} + \frac{11}{2}t - 6\ln|t|\right)\Big|_6^8 = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3$$

$\Rightarrow a+b+c = 1$

Câu 32. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a}{d} + b\ln 2 + c\ln d$, với a,b,c,d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 28. **D.** -2.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1$

$\Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x = 0 \to t = 1$; $x = 3 \to t = 2$

$$I = \int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}.2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6\ln|t+2|\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3.$$

Suy ra $a = 7, b = -12, c = 6, d = 3$. Do đó $a+b+c+d = 4$.

Câu 33. Tính $I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

A. $I = (a^2+1)\sqrt{a^2+1} - 1$.

B. $I = \frac{1}{3}\left[(a^2+1)\sqrt{a^2+1} - 1\right]$.

C. $I = \frac{1}{3}\left[(a^2+1)\sqrt{a^2+1} + 1\right]$.

D. $I = (a^2+1)\sqrt{a^2+1} + 1$.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_0^a x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow u^2 = x^2+1 \Rightarrow u\mathrm{d}u = x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = a \Rightarrow u = \sqrt{a^2+1}$.

Vậy $I = \int_1^{\sqrt{a^2+1}} u^2\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{3}\left[(a^2+1)\sqrt{a^2+1} - 1\right]$.

Câu 34. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ bằng tích phân nào dưới đây?

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$. **B.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y}\mathrm{d}y$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$.

Lời giải

Đặt $x=\sin^2 y$ ta có $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\sin^2 y\right) \Leftrightarrow \mathrm{d}x=2\sin y.\cos y\mathrm{d}y$

Khi $x=0 \Rightarrow y=0$ và $x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{\pi}{4}$.

Suy ra $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y}.2\sin y\cos y\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$.

Câu 35. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Biết $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\ln 5-c\ln 2$ với a,b,c là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $P=3a+2b+c$.

A. 11. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2=x^2+1 \Rightarrow xdx=tdt$

Đổi cận: $x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2, x=2\sqrt{2} \Rightarrow t=3$.

Khi đó $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1}dx=\int_2^3 \frac{tdt}{t^2+t-2}=\left.\left(\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{2}{3}\ln|t+2|\right)\right|_2^3$

$=\left(\frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{3}\ln 5\right)-\left(\frac{2}{3}\ln 4\right)=\frac{2}{3}\ln 5-\ln 2$.

Vậy $a=3, b=2, c=1 \Rightarrow 3a+2b+c=14$.

Câu 36. **(Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Cho tích phân $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx=a+b\sqrt{6}+c\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right)+d\ln 2$ với a,b,c,d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a+b+c+d$.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{3}{25}$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{20}$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{25-x^2} \Rightarrow t^2=25-x^2 \Rightarrow x\,dx=-t\,dt$

Khi đó:

$$I=\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx=\int_3^{2\sqrt{6}} \frac{t^2}{25-t^2}dt=\int_3^{2\sqrt{6}} \left(-1+\frac{25}{25-t^2}\right)dt=\int_3^{2\sqrt{6}} \left(-1+\frac{5}{2(5-t)}+\frac{5}{2(5+t)}\right)dt$$

$$=\left.\left(-t+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{5+t}{5-t}\right|\right)\right|_3^{2\sqrt{6}}=3-2\sqrt{6}+\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right)-5\ln 2.$$

Vậy $a=3,\ b=-2,\ c=\frac{5}{2},\ d=-5 \Rightarrow a+b+c+d=-\frac{3}{2}$.

Câu 37. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ nếu đổi biến số $x=2\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì ta được.

A. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t$. **<u>B</u>.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}t\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Lời giải

$x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$.

Với $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos t\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos t}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t.$$

Câu 38. **(THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018)** Biết $\int\limits_0^1\frac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{a\sqrt{b}+c}{15}$ với a, b, c là các số nguyên và $b\ge 0$. Tính $P=a+b^2-c$.

A. $P=3$. **<u>B</u>.** $P=7$. **C.** $P=-7$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_0^1\frac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\int\limits_0^1 x^3\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx=\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx-\int\limits_0^1 x^4dx=A-\frac{1}{5}$$

+ Tính A: Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\ \Rightarrow\ t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$

$$A=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right).t^2dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt=\left.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{15}$$

$$I=\frac{-1+2\sqrt{2}}{15}\ \Rightarrow\ a=2;\ b=2;\ c=-1$$

$$P=a+b^2-c=7$$

Câu 39. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x$ theo n.

<u>A</u>. $I=\frac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\frac{1}{2n}$. **C.** $I=\frac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\frac{1}{2n+1}$.

Lời giải

Với $n\in\mathbb{N}^*$, khi đó:

Đặt $t=1-x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\to t=1; x=1\to t=0$

Khi đó $I=-\frac{1}{2}\int\limits_1^0 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{2n+2}$

Cách 2: Ta có $d\left(1-x^2\right)=-2x\mathrm{d}x \to -\frac{1}{2}d\left(1-x^2\right)=x\mathrm{d}x$

$$I=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2}.\left.\frac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{2n+2}$$

Câu 40. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Giả sử $I=\int_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\frac{2}{3}+b$ với a, b là số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6\Rightarrow \mathrm{d}x=6.t^5\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=64\Rightarrow t=2$.

Suy ra $I=\int_1^2\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int_1^2\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int_1^2\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$=6\int_1^2\left(t^2-t+1\right)\mathrm{d}t-6\int_1^2\frac{1}{t+1}\mathrm{d}(t+1)$

$=6\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)\right|_1^2-6\ln|t+1|\Big|_1^2=6\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{6}\right)-6(\ln 3-\ln 2)=11-6\ln\frac{3}{2}=6\ln\frac{2}{3}+11$.

Từ đó suy ra $\begin{cases}a=6\\ b=11\end{cases}\Rightarrow a-b=-5$.

Câu 41. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\sqrt{2}\right)=-2$ và $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{6-x^2}},\forall x\in\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. Khi đó $\int_0^{\sqrt{3}}f(x).\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{3\pi}{4}$. **B.** $\frac{3\pi+6}{4}$. **C.** $\frac{\pi+2}{4}$. **D.** $-\frac{3\pi+6}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall x\in\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)\Rightarrow f(x)=\int f'(x).\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{6-x^2}}.\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{6-x^2}}.\mathrm{d}\left(6-x^2\right)=-\frac{1}{2}.2\sqrt{6-x^2}+C$.

Mà $f\left(\sqrt{2}\right)=-2\Leftrightarrow -\sqrt{6-2}+C=-2\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $f(x)=-\sqrt{6-x^2}$.

Do đó $I=\int_0^{\sqrt{3}}f(x).\mathrm{d}x=-\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{6-x^2}.\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\sqrt{6}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\sqrt{6}\cos t.dt$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Suy ra $I=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{6-6\sin^2 t}.\sqrt{6}.\cos t.dt=-6\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t.dt=-3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2t+1).dt=-3\left(\frac{1}{2}\sin 2t+t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=-3\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi+6}{4}$.

Câu 42. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Biết $\int_1^2\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}dx=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P=a+2b+c-7$.

A. $-\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{86}{27}$. **C.** -2. **D.** $\frac{67}{27}$.

Lời giải

Ta có

$\int_1^2\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}dx=\int_1^2 x\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)dx=\int_1^2\left(3x^2-x\sqrt{9x^2-1}\right)dx=\int_1^2 3x^2dx-\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}dx$

$=x^3\Big|_1^2+\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}dx=7+\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}dx$.

Tính $\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}dx$.

Đặt $\sqrt{9x^2-1}=t\Rightarrow 9x^2-1=t^2\Rightarrow xdx=\frac{tdt}{9}$.

Khi $x=1$ thì $t=2\sqrt{2}$; khi $x=2$ thì $t=\sqrt{35}$.

Khi đó $\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}dx=\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}}t\frac{tdt}{9}=\frac{t^3}{27}\Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}}=\frac{35}{27}\sqrt{35}-\frac{16}{27}\sqrt{2}$.

Vậy $\int_1^2\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}dx=7-\frac{35}{27}\sqrt{35}+\frac{16}{27}\sqrt{2}\Rightarrow a=7$, $b=\frac{16}{27}$, $c=-\frac{35}{27}$.

Vậy $P=a+2b+c-7=7+\frac{32}{27}-\frac{35}{27}-7=-\frac{1}{9}$.

Câu 43. **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Biết $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Lời giải

Đặt $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=2\frac{dt}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2}=-2\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$

$=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}\Rightarrow a=32$, $b=12$, $c=4$

Vậy $P=a+b+c=48$

Câu 44. **(SởPhú Thọ - 2018)** Biết $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3$.

Lời giải

$I=\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}=\int\limits_0^4 \frac{2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)-\left(\sqrt{2x+1}+2\right)dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}$

$=\int\limits_0^4 \frac{2dx}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}-\int\limits_0^4 \frac{dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$.

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow udu=dx$. Với $x=0\Rightarrow u=1$, với $x=4\Rightarrow u=3$.

Suy ra $I=\int\limits_1^3 \frac{2udu}{u+2}-\int\limits_1^3 \frac{udu}{u+1}=\int\limits_1^3\left(2-\frac{4}{u+2}\right)du-\int\limits_1^3\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du$

$=\left(u-4\ln|u+2|+\ln|u+1|\right)\Big|_1^3=2-4\ln\frac{5}{3}+\ln 2$

$\Rightarrow a=2$, $b=1$, $c=1\Rightarrow T=2.1+1-4=1$.

Câu 45. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x\cos^2 2x,\forall\in R$.

Khi đó $\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int \cos x\cos^2 2xdx=\int\cos x\left(1-2\sin^2 x\right)^2dx$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$.

$\Rightarrow f(x)=\int\left(1-2t^2\right)^2dt=\int\left(1-4t^2+4t^4\right)dt=t-\frac{4}{3}t^3+\frac{4}{5}t^5+C=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x+C$.

Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x=\sin x\left(1-\frac{4}{3}\sin^2 x+\frac{4}{5}\sin^4 x\right)$.

$=\sin x\left[1-\frac{4}{3}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{4}{5}\left(1-\cos^2 x\right)^2\right]$.

Ta có $\int\limits_0^{\pi} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}\sin x\left[1-\frac{4}{3}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{4}{5}\left(1-\cos^2 x\right)^2\right]\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\pi\Rightarrow t=-1$.

Khi đó, $\int\limits_0^{\pi} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left[1-\frac{4}{3}\left(1-t^2\right)+\frac{4}{5}\left(1-t^2\right)^2\right]\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{7}{15}-\frac{4}{15}t^2+\frac{4}{5}t^4\right)\mathrm{d}t$

$=\left.\left(\frac{7}{15}t-\frac{4}{45}t^3+\frac{4}{5}t^4\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{242}{225}$.

Câu 46. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x=a\ln\frac{4}{b}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\left(\sin x\right)}{\sin^2 x-5\sin x+6}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\left(\sin x\right)}{\left(\sin x-2\right)\left(\sin x-3\right)}$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\sin x\right)$.

Đổi cận: Khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Khi đó

$I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\left(t-2\right)\left(t-3\right)}=\int\limits_0^1\left(\frac{-1}{t-2}+\frac{1}{t-3}\right)\mathrm{d}t=\left[\ln\left|t-3\right|-\ln\left|t-2\right|\right]\Big|_0^1=\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$.

Ta có $a=1$, $b=3$.

Vậy giá trị của $a+b=1+3=4$.

Câu 47. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}$ **B.** $I=-\frac{1}{4}\pi^4$ **C.** $I=-\pi^4$ **D.** $I=0$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x dx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx\Leftrightarrow -dt=\sin x dx$

Đổi cận: Với $x=0\Rightarrow t=1$; với $x=\pi\Rightarrow t=-1$.

Vậy $I=-\int\limits_1^{-1}t^3dt=\int\limits_{-1}^{1}t^3dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1}=\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=0$.

Cách khác : Bấm máy tính.

Câu 48. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x=a\ln\frac{4}{c}+b$, tính tổng $S=a+b+c$

A. $S=1$. **B.** $S=4$. **C.** $S=3$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{t^2-5t+6}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow a=1, \mathrm{b}=0, c=3 \Rightarrow S=a+b+c=4$.

Câu 49. **(Bình Dương 2018)** Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}.\sin x\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=2+\cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

A. $I=\int_3^2\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int_2^3\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **C.** $I=2\int_3^2\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{t}\mathrm{d}t$.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}.\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x+2)=-\int_3^2\sqrt{t}\mathrm{d}t=\int_2^3\sqrt{t}\mathrm{d}t$.

Câu 50. **(Đồng Tháp - 2018)** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=\tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}u^2\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int_0^2\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$. **C.** $I=-\int_0^1 u^2\mathrm{d}u$. **D.** $I=\int_0^1 u^2\mathrm{d}u$.

Lời giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

Đặt $u=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$, $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=1$

Suy ra: $I=\int_0^1 u^2\mathrm{d}u$.

Câu 51. **(THTP Lê Quý Đôn - Hà Nội - 2018)** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}+\frac{9}{20}$. **D.** $I=\frac{9}{4}$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó: $I=\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t=\left.\frac{-1}{2t^2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$.

Câu 52. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}$.

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2a+b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $2a-b=0$. **D.** $a+2b=0$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{5}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$

$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{2}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln t\Big|_{2}^{\frac{5}{2}}=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln 5-2\ln 2$

Vậy ta được $a=1;b=-2$.

Câu 53. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số $a\in(0;20\pi)$ sao cho $\int\limits_0^a\sin^5x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{7}$.

A. 10. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 19.

Lời giải

$I=\int\limits_0^a\sin^5x\sin 2x\mathrm{d}x=2\int\limits_0^a\sin^6x.\cos x\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$ và $\begin{cases}\sin a=b;\ \ b\in[-1;1]\\ \sin 0=0\end{cases}$.

$I=2\int\limits_0^b t^6\mathrm{d}t=2.\left.\frac{t^7}{7}\right|_0^b=\frac{2b^7}{7}$.

Theo giả thiết: $\int\limits_0^a\sin^5x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{2b^7}{7}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow b=1\Leftrightarrow\sin a=1\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

$a\in(0;20\pi)\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{2}+k2\pi<20\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<k2\pi<\frac{39\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<k<\frac{39}{4}$.

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $k\in\{0;1;2;...;9\}$.

Câu 54. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$.

Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}-8}{3}$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}+8}{3}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}-8}{3}$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)$$

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}\Rightarrow 2tdt=\cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+1}{\sqrt{1+\sin x}}\cos xdx$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2(t^2-1)+1}{t}2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}}\left(2t^2-1\right)dt=2\left(\frac{2t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}+F(0)=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}+2=\frac{8+2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 55. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\frac{a\sqrt{3}+b}{c}$, với $a,b\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{Z}^+$ và a,b,c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.** -1.

Lời giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx.$$

Đặt $t=1+\tan\frac{x}{2}\Rightarrow 2dt=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=3-\sqrt{3}$.

$$I=\int_1^{3-\sqrt{3}}\frac{2dt}{t^2}=-\frac{2}{t}\Bigg|_1^{3-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+3}{3}.$$

Suy ra $a=-1,b=3,c=3$ nên $a+b+c=5$.

Câu 56. Cho tích phân số $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}dx=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $2a-b=0$.. **D.** $a+2b=0$..

Lời giải

+ Xét: $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}dx$

+ Đặt $u=cosx+2\Rightarrow du=-\sin xdx\Rightarrow \sin xdx=-du$

+ Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=\frac{5}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=2\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{-1}{u}du=-\ln|u|\Big|_{\frac{5}{2}}^{2}=-\left(\ln 2-\ln\frac{5}{2}\right)=\ln 5-2\ln 2\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}.$

Câu 57. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\cos x)^2-5\cos x+6}dx=a\ln\frac{4}{c}+b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c>0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$

Ta có:

$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\cos x)^2-5\cos x+6}dx=-\int\limits_{1}^{0}\frac{1}{t^2-5t+6}dt=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}\right)dt=\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Big|_{0}^{1}=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$

$=a\ln\frac{4}{c}+b$.

Do đó: $\begin{cases}a=1\\ c=3\\ b=0\end{cases}$.

Vậy $S=a+b+c=4$.

Câu 58. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=1$ và $f'(x)=\tan^3 x+\tan x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\frac{a+\pi}{b}$; $a,b\in\mathbb{Q}$, khi đó $b-a$ bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f'(x)=\tan^3 x+\tan x,\forall x\in\mathbb{R}$ ta có

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\tan^3 x+\tan x)dx=\int\tan x(1+\tan^2 x)dx=\int\tan x.d(\tan x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$,

Ta có $f(0)=1$ suy ra $C=1$ vậy $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+1$.

Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 2)dx$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1 + 1)dx = \frac{1}{2}(\tan x + x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 + \frac{\pi}{4}) = \frac{4+\pi}{8}.$$

Từ đây ta được $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow b - a = 4$.

Vậy $b - a = 4$.

Câu 59. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_0^{\pi} 16 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 10\pi^2$. **B.** $I = 160\pi$. **C.** $I = 16\pi^2$. **D.** $I = -10\pi^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x = (\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4\sin^6 x$

$= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4\sin^6 x = \cos^4 x \sin^2 x - \sin^4 x \cos^2 x - \cos^6 x - 3\sin^6 x$

$= \cos^4 x \sin^2 x - \sin^4 x \cos^2 x - 2\sin^6 x - (\cos^6 x + \sin^6 x)$

$= \sin^2 x(\cos^4 x - \sin^4 x) - \sin^4 x(\cos^2 x + \sin^2 x) - (1 - 3\cos^2 x.\sin^2 x) = 4\cos^2 x.\sin^2 x - 2\sin^4 x - 1$

$= -\frac{3}{4}\cos 4x + \cos 2x - \frac{5}{4}$.

Suy ra:

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int(\sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x)\mathrm{d}x = \int\left(-\frac{3}{4}\cos 4x + \cos 2x - \frac{5}{4}\right)\mathrm{d}x$

$= -\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x + C$.

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = -\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x$.

Suy ra:

$I = \int\limits_0^{\pi} 16 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} 16\left(-\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi}(-3\sin 4x + 8\sin 2x - 20x)\mathrm{d}x$

$= \left(\frac{3}{4}\cos 4x - 4\cos 2x - 10x^2\right)\Big|_0^{\pi} = -10\pi^2$.

Câu 60. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x + 1} = a + b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Đặt $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_1^e \frac{dt}{t(t+1)}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=\left(1-\ln(1+e)\right)-(-\ln 2)$$

$$=1+\ln\frac{2}{1+e}=1-\ln\frac{1+e}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Cách 2. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1\frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=x\Big|_0^1-\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}$.

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Câu 61. **(Cần Thơ - 2018)** Cho tích phân $I=\int_1^e \frac{3\ln x+1}{x}dx$. Nếu đặt $t=\ln x$ thì

A. $I=\int_0^1 \frac{3t+1}{e^t}dt$. **B.** $I=\int_1^e\frac{3t+1}{t}dt$. **C.** $I=\int_1^e(3t+1)dt$. **D.** $I=\int_0^1(3t+1)dt$.

Lời giải

Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. Đổi cận $x=e\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\int_1^e\frac{3\ln x+1}{x}dx=\int_0^1(3t+1)dt$.

Câu 62. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx=a\ln 3+b\ln 2+\frac{c}{3}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $a^2+b^2+c^2=1$. **B.** $a^2+b^2+c^2=11$. **C.** $a^2+b^2+c^2=9$. **D.** $a^2+b^2+c^2=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx$, đặt $\ln x+2=t\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt$

$$I=\int_2^3\frac{t-2}{t^2}dt=\int_2^3\frac{1}{t}dt-2\int_2^3\frac{1}{t^2}dt=\ln t\Big|_2^3+\frac{2}{t}\Big|_2^3=\ln 3-\ln 2+\frac{2}{3}-\frac{2}{2}=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}$$

Suy ra $a=1;b=-1;c=-1$, vậy $a^2+b^2+c^2=3$. **Chọn D.**

Câu 63. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Biết $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)dx=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a,b,c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là:

A. $T=11$. **B.** $T=9$. **C.** $T=10$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Đặt $x^2+9=t\Rightarrow 2xdx=dt\Leftrightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}.\int_9^{25}\ln t.dt=\frac{1}{2}(t.\ln t-t)\Big|_9^{25}=\frac{1}{2}\left[(25\ln 25-25)-(9\ln 9-9)\right]=25\ln 5-9\ln 3-8$.

Suy ra $T=a+b+c=25-9-8=8$.

Câu 64. Cho $I=\int\limits_1^{e}\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx$ có kết quả dạng $I=\ln a+b$ với $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab=-1$. **B.** $2ab=1$. **C.** $-b+\ln\frac{3}{2a}=-\frac{1}{3}$. **D.** $-b+\ln\frac{3}{2a}=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Đặt $\ln x+2=t\Leftrightarrow \ln x=t-2\Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=e$ thì $t=3$.

Khi đó $I=\int\limits_2^3\frac{t-2}{t^2}dt=\int\limits_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy $2ab=-1$.

Câu 65. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho $\int\limits_1^{e}\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0$; $x=e\Rightarrow t=1$. Khi đó:

$I=\int\limits_1^{e}\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\int\limits_0^1\frac{2t+1}{(t+2)^2}dt=\int\limits_0^1\left(\frac{-3}{(t+2)^2}+\frac{2}{t+2}\right)dt=\left(\frac{3}{t+2}+2\ln|t+2|\right)\Big|_0^1=\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}$.

Vậy $a+b+c+d=9+4+1+2=16$.

Câu 66. **(Kim Liên - Hà Nội – 2018)** Biết $\int\limits_0^1\frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{m}+\frac{1}{e\ln n}\ln\left(p+\frac{e}{e+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^1\frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx=\int\limits_0^1\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+e.2^x}\right)dx=\frac{1}{4}+\int\limits_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{4}+J$.

Tính $J=\int\limits_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx$. Đặt $\pi+e.2^x=t\Rightarrow e.2^x\ln 2dx=dt\Leftrightarrow 2^xdx=\frac{1}{e.\ln 2}dt$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=\pi+e$; khi $x=1$ thì $t=\pi+2e$.

$J=\int\limits_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{e\ln 2}\int\limits_{\pi+e}^{\pi+2e}\frac{1}{t}dt=\frac{1}{e\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+e}^{\pi+2e}=\frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\frac{e}{e+\pi}\right)$.

Khi đó $\int\limits_0^1\frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\frac{e}{e+\pi}\right)\Rightarrow m=4$, $n=2$, $p=1$. Vậy $S=7$.

Câu 67. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho $\int\limits_1^e \frac{(3x^3-1)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}dx=a.e^3+b+c.\ln(e+1)$ với a,b,c là các số nguyên và $\ln e=1$. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=14$. **C.** $P=10$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Ta có

$$I=\int\limits_1^e \frac{(3x^3-1)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}dx=\int\limits_1^e \frac{3x^2(1+x\ln x)-(1+\ln x)}{1+x\ln x}dx=\int\limits_1^e 3x^2dx-\int\limits_1^e \frac{(1+\ln x)}{1+x\ln x}dx=e^3-1-A$$

Tính $A=\int\limits_1^e \frac{(1+\ln x)}{1+x\ln x}dx$. Đặt $t=1+x\ln x\Rightarrow dt=(1+\ln x)dx$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=e\Rightarrow t=e+1\end{cases}$. Khi đó $A=\int\limits_1^{1+e}\frac{dt}{t}=\ln t\Big|_1^{1+e}=\ln(e+1)$.

Vậy $I=e^3-1-\ln(e+1)\longrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\Rightarrow P=a^2+b^2+c^2=3\\ c=-1\end{cases}$.

Câu 68. Biết $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}+4}=\frac{1}{c}(\ln a-\ln b+\ln c)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=2a-b+c$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=3$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}+4}=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+3}$.

Đặt: $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$, $x=\ln 2\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int_1^2\frac{1}{t^2+4t+3}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t+3}\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 5+\ln 2)$.

Suy ra $a=3$, $b=5$, $c=2$. Vậy $P=2a-b+c=3$.

Câu 69. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Biết $\int\limits_1^2\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\ln(\ln a+b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2+ab$.

A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^2\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\int\limits_1^2\frac{x+1}{x(x+\ln x)}dx$.

Đặt $t=x+\ln x\Rightarrow dt=\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x+1}{x}dx$.

Khi $x=1\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=2+\ln 2$.

Khi đó $I=\int\limits_1^{2+\ln 2}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^{2+\ln 2}=\ln(\ln 2+2)$. Suy ra $\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$.

Vậy $P=8$.

Câu 70. **(Chuyên Thái Bình 2018)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}+b\ln\left(\mathrm{e}+c\right)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

A. $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{\left(x+1\right)\mathrm{e}^x x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x\mathrm{e}^x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+x\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=\mathrm{e}+1$.

Khi đó: $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}+1}\frac{t-1}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_1^{\mathrm{e}+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln\left|t\right|\right)\Big|_1^{\mathrm{e}+1}=\mathrm{e}-\ln\left(\mathrm{e}+1\right)$.

Suy ra: $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

Vậy: $P=a+2b-c=-2$.

Câu 71. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ biết $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$ và $f'\left(x\right)=xe^{x^2}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 xf\left(x\right)dx$ bằng

A. $\frac{e+1}{4}$. **B.** $\frac{e-1}{4}$. **C.** $\frac{e-1}{2}$. **D.** $\frac{e+1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right).\mathrm{d}x=\int x.e^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{x^2}.\mathrm{d}\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Mà $f\left(0\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1 xf\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{4}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{4}$.

Câu 72. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Biết rằng $\int\limits_1^e \frac{2\ln x+1}{x\left(\ln x+1\right)^2}\mathrm{d}x=a\ln 2-\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=10$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\ln x+1=t$. Ta có: $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=e\Rightarrow t=2$.

Ta có: $\int\limits_1^e\frac{2\ln x+1}{x\left(\ln x+1\right)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{2\left(t-1\right)+1}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(2\ln\left|t\right|+\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{1}{2}$.

Suy ra: $a=2$; $b=1$; $c=2$. Khi đó: $S=a+b+c=5$.

Dạng 4. Tích phân từng phần

Nếu u,v có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$ thì $\boxed{I=\int_a^b u.dv=u.v\Big|_a^b-\int_a^b v.du}$.

Chọn $\begin{cases} u=.............. \xrightarrow{\text{Vi phân}} du=..........\,dx \\ dv=........\,dx \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v=............... \end{cases}$

Nhận dạng: **tích hai hàm khác loại nhân nhau** (ví dụ: mũ nhân lượng giác,…)
Thứ tự ưu tiên **chọn u** là: **"log – đa – lượng – mũ"** và **dv là phần còn lại**.

Nghĩa là nếu có ln hay $\log_a x$ thì chọn $u=\ln$ hay $u=\log_a x=\dfrac{1}{\ln a}.\ln x$ và $dv=$ còn lại. Nếu không có ln; log thì chọn $u=$ đa thức và $dv=$ còn lại,…

CHÚ Ý:. $\int_a^b(\text{hàm mũ}).(\text{lượng giác}).\,dx \longrightarrow$ tích phân từng phần luân hồi.
Nghĩa là sau khi đặt u, dv để tính tích phân từng phần và tiếp tục tính $\int udv$ sẽ xuất hiện lại tích phân ban đầu. Giả sử tích phân được tính ban đầu là I và nếu lặp lại, ta sẽ không giải tiếp mà xem đây là phương trình bậc nhất ẩn là I $\overset{\text{giải}}{\Longrightarrow}$ I.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx$, nếu đặt $u=x^2$ thì $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx$ bằng

A. $2\int\limits_0^2 e^u du$. **B.** $2\int\limits_0^4 e^u du$. **C.** $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 e^u du$. **D.** $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 e^u du$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=x^2 \Rightarrow du=2xdx \Leftrightarrow xdx=\dfrac{du}{2}$.

Khi $x=0\Rightarrow u=0$, khi $x=2\Rightarrow u=4$.

Do đó $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 e^u du$.

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I=\int\limits_1^e x\ln xdx$:

A. $I=\dfrac{e^2-1}{4}$ **B.** $I=\dfrac{1}{2}$ **C.** $I=\dfrac{e^2-2}{2}$ **D.** $I=\dfrac{e^2+1}{4}$

Lời giải

Chọn D

$I=\int\limits_1^e x\ln xdx$. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^e-\int\limits_0^e \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_0^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}.$$

Câu 3. **(Mã 103 2018)** Cho $\int\limits_1^e (1+x\ln x)\,dx = ae^2+be+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a+b=-c$ **C.** $a-b=c$ **D.** $a-b=-c$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_1^e (1+x\ln x)\,dx = \int\limits_1^e 1.dx + \int\limits_1^e x\ln x\,dx = e-1+\int\limits_1^e x\ln x\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv = x.dx \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_1^e x\ln x\,dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int\limits_1^e x\,dx = \dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\int\limits_1^e (1+x\ln x)\,dx = e-1+\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{e^2}{4}+e-\dfrac{3}{4}$ nên $a=\dfrac{1}{4}$, $b=1$, $c=-\dfrac{3}{4}$.

Vậy $a-b=c$.

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Cho $\int\limits_1^e (2+x\ln x)dx = ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a-b=c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=-c$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^e (2+x\ln x)dx = \int\limits_1^e 2dx + \int\limits_1^e x\ln x dx = 2x\Big|_1^e + I = 2e-2+I$ với $I=\int\limits_1^e x\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^e (2+x\ln x)dx = 2e-2+\frac{e^2+1}{4} = \frac{1}{4}e^2+2e-\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=2 \\ c=-\dfrac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=c$$

Câu 5. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Biết $\int\limits_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx = a\ln 2-\dfrac{b}{c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P=13a+10b+84c$.

A. 193. **B.** 191. **C.** 190. **D.** 189.

Lời giải

Chọn B

Đặt: $\begin{cases} u = \ln\left(x^2+1\right) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó: $\int\limits_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $a=1, b=1, c=2$. Vậy $P = 13a+10b+84c = 191$.

Câu 6. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho a là số thực dương. Tính $I = \int\limits_0^a \sin^{2016} x.\cos\left(2018x\right)dx$ bằng:

A. $I = \dfrac{\cos^{2017} a.\sin 2017a}{2016}$.

B. $I = \dfrac{\sin^{2017} a.\cos 2017a}{2017}$.

C. $I = \dfrac{\sin^{2017} a.\cos 2017a}{2016}$.

D. $I = \dfrac{\cos^{2017} a.\cos 2017a}{2017}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int\limits_0^a \sin^{2016} x.\cos\left(2017x+x\right)dx = \int\limits_0^a \sin^{2016} x.\left[\cos\left(2017x\right).\cos x - \sin\left(2017x\right).\sin x\right]dx$

$= \int\limits_0^a \sin^{2016} x\cos\left(2017x\right).\cos x dx - \int\limits_0^a \sin^{2017} x\sin\left(2017x\right)dx$.

Xét $J = \int\limits_0^a \sin^{2016} x\cos\left(2017x\right).\cos x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \cos\left(2017x\right) \\ du = \sin^{2016} x.\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2017\sin\left(2017x\right)dx \\ v = \dfrac{1}{2017}\sin^{2017} x \end{cases}$.

Khi đó $J = \cos\left(2017x\right).\dfrac{1}{2017}\sin^{2017} x\Big|_0^a + \int\limits_0^a \sin^{2017} x.\sin\left(2017x\right)dx$.

Suy ra $I = \cos\left(2017x\right).\dfrac{1}{2017}\sin^{2017} x\Big|_0^a + \int\limits_0^a \sin^{2017} x.\sin\left(2017x\right)dx - \int\limits_0^a \sin^{2017} x.\sin\left(2017x\right)dx$.

$= \cos\left(2017x\right).\dfrac{1}{2017}\sin^{2017} x\Big|_0^a = \dfrac{1}{2017}\sin^{2017} a.\cos\left(2017a\right)$.

Câu 7. **(Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right) = -1$ và $f'\left(x\right) = x\left(6+12x+e^{-x}\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $3e$.

B. $3e^{-1}$.

C. $4-3e^{-1}$.

D. $-3e^{-1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=x\left(6+12x+e^{-x}\right),\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int x\left(6+12x+e^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(6x+12x^2\right)\mathrm{d}x+\int xe^{-x}\mathrm{d}x$

Mà $\int\left(6x+12x^2\right)\mathrm{d}x=3x^2+4x^3+C$

Xét $\int xe^{-x}\mathrm{d}x$: Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=e^{-x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-e^{-x}\end{cases}$

$\int xe^{-x}\mathrm{d}x=-xe^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}x=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-(x+1)e^{-x}+C$

Suy ra $f(x)=3x^2+4x^3-(x+1)e^{-x}+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $f(0)=-1\Rightarrow C=0$ nên $f(x)=3x^2+4x^3-(x+1)e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3x^2+4x^3-(x+1)e^{-x}\right)\mathrm{d}x=\left(x^3+x^4\right)\Big|_0^1-\int_0^1(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x=2-\int_0^1(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$

Xét $\int_0^1(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$: Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=e^{-x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-e^{-x}\end{cases}$

$\int_0^1(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x=-(x+1)e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x=-2e^{-1}+1-e^{-x}\Big|_0^1=-2e^{-1}+1-e^{-1}+1=2-3e^{-1}$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3e^{-1}$.

Câu 8. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Biết $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=a\ln5+b\ln3+c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=9$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=10$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+9\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}$, ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2+9}{2}\end{cases}$.

Do đó

$I=\dfrac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\int_0^4\dfrac{x^2+9}{2}.\dfrac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x=\dfrac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\int_0^4 x\mathrm{d}x$

$=\dfrac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4=\dfrac{25}{2}\ln25-\dfrac{9}{2}\ln9-8=25\ln5-9\ln3-8=a\ln5+b\ln3+c$.

Suy ra $\begin{cases} a = 25 \\ b = -9 \Rightarrow a+b+c=8. \\ c = -8 \end{cases}$

Cách 2

Ta có $I = \int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t = x^2 + 9 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 9$, $x = 4 \Rightarrow t = 25$

Suy ra $I = \int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_9^{25} \ln t\mathrm{d}t$

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}t \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ v = t \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int\limits_9^{25} t\ln t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t.\ln t\Big|_9^{25} - \int\limits_9^{25} t.\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(t.\ln t\Big|_9^{25} - \int\limits_9^{25}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(t.\ln t\Big|_9^{25} - t\Big|_9^{25}\right)$$

$$= \frac{25}{2}\ln 25 - \frac{9}{2}\ln 9 - 8 = 25\ln 5 - 9\ln 3 - 8 = a\ln 5 + b\ln 3 + c.$$

Suy ra $\begin{cases} a = 25 \\ b = -9 \Rightarrow a+b+c=8. \\ c = -8 \end{cases}$

Câu 9. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Xét hàm số $f(x) = e^x + \int\limits_0^1 xf(x)dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng

A. 5622. **B.** 5620. **C.** 5618. **D.** 5621.

Lờigiải

ChọnA

Từ $f(x) = e^x + \int\limits_0^1 xf(x)dx$. (1)

Lấy đạo hàm hai vế, suyra $f'(x) = e^x$.

Khi đó, $f(x) = \int f'(x)dx = \int e^x dx = e^x + C$. (2)

Từ (1) và (2) suyra: $C = \int\limits_0^1 xf(x)dx \Leftrightarrow C = \int\limits_0^1 x(e^x + \mathrm{C})dx \Leftrightarrow C = \int\limits_0^1 xe^x dx + \int\limits_0^1 \mathrm{C}x\, dx$

$$\Leftrightarrow C = 1 + \frac{Cx^2}{2}\Bigg|_0^1 \Leftrightarrow C = 1 + \frac{C}{2} \Leftrightarrow C = 2.$$

Vậy $f(x) = e^x + 2 \Rightarrow f(\ln(5620)) = e^{\ln(5620)} + 2 = 5620 + 2 = 5622$.

Câu 10. Tích phân $\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$ bằng

A. $\frac{-5-3e^2}{4}$. **B.** $\frac{5-3e^2}{4}$. **C.** $\frac{5-3e^2}{2}$. **D.** $\frac{5+3e^2}{4}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

Suy ra

$$\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx = (x-2)\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^2 + 1 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^2 + 1 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}e^2 + \frac{5}{4} = \frac{5-3e^2}{4}.$$

Câu 11. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$, tích $a.b$ bằng

A. -15. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: a, $b \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$\Rightarrow \int_0^1 (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = (2x-1)e^x\Big|_0^1 = 1 + e = a + b.e$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy tích $a.b = 1$.

Câu 12. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{b}{c} + a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

A. $P = 6$. **B.** $P = 5$. **C.** $P = -6$. **D.** $P = 4$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left(\frac{-\ln x}{x} + \frac{-1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

$\Rightarrow b = 1, c = 2, a = \frac{-1}{2} \Rightarrow P = 2a + 3b + c = 4$.

Câu 13. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x\mathrm{d}x$. Tìm đẳng thức đúng?

A. $I=-(x-1)\cos 2x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

B. $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

C. $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

D. $I=-(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=(x-1) \\ \mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$. Do đó:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Câu 14. **(Chuyên KHTN 2019)** Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a,b,c sao cho $\int_2^3(4x+2)\ln x\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 19. **B.** -19. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} \ln x=u\Rightarrow \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u \\ (4x+2)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow 2x^2+2x=v \end{cases}$

Khi đó

$$\int_2^3(4x+2)\ln x\mathrm{d}x=\ln x.(2x^2+2x)\Big|_2^3-2\int_2^3(x+1)\mathrm{d}x=24\ln 3-12\ln 2-2.\frac{7}{2}=-7-12\ln 2+24\ln 3.$$

Vậy $a=-7;\ b=-12;\ c=24\Rightarrow a+b+c=5$.

Câu 15. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho $\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx=a\ln 2+b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $P=a+4b$.

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=3$ **D.** $P=-3$

Lời giải

$$\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\ln(1+x)\left(\frac{-1}{x}\right)'\mathrm{d}x=\ln(1+x).\frac{-1}{x}\Big|_1^2-\int_1^2\frac{1}{x+1}.\frac{-1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2-\ln(1+x)\Big|_1^2+\ln x\Big|_1^2$$

$$=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2-\ln 3+2\ln 2=\frac{-3}{2}\ln 3+3\ln 2\Rightarrow a=3,b=\frac{-3}{2}.$$

Vậy $a+4b=-3$.

Câu 16. Tính tích phân $I=\int_1^{2^{1000}}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$, ta được

A. $I=-\dfrac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+1001\ln\dfrac{2}{1+2^{1000}}$. **B.** $I=-\dfrac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}+\ln\dfrac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

C. $I=\dfrac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}-1001\ln\dfrac{2}{1+2^{1000}}$. **D.** $I=\dfrac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}-\ln\dfrac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=-\dfrac{1}{x+1}\end{cases}$

$\Rightarrow I=-\dfrac{\ln x}{x+1}\Big|_1^{2^{1000}}+\int\limits_1^{2^{1000}}\dfrac{1}{x+1}.\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{\ln 2^{1000}}{2^{1000}+1}+\int\limits_1^{21000}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=-\dfrac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\left|\dfrac{x}{x=1}\right|\Big\|_1^{2^{1000}}$

$=-\dfrac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\dfrac{2^{1000}}{2^{1000}+1}-\ln\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\dfrac{2^{1001}}{2^{1000}+1}=-\dfrac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+1001\ln\dfrac{2}{1+2^{1000}}$.

Câu 17. Biết $\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{dx}=\mathrm{a.lnb}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

A. $6a+7b=33$. **B.** $6a+7b=25$. **C.** $6a+7b=42$. **D.** $6a+7b=39$.

Lời giải

Xét $I=\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=2xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ v=x^2-1\end{cases}$.

Ta có $I=(x^2-1)\ln(x+1)\big|_0^2-\int\limits_0^2\dfrac{x^2-1}{x+1}dx=3\ln 3-\int\limits_0^2(x-1)dx=3\ln 3-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^2=3\ln 3$.

Vậy $a=3,b=3\Rightarrow 6a+7b=39$.

Câu 18. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Biết rằng $\int\limits_1^a\ln xdx=1+2a,\ (a>1)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a\in(18;21)$. **B.** $a\in(1;4)$. **C.** $a\in(11;14)$. **D.** $a\in(6;9)$.

Lời giải

Đặt $u=\ln x\ \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx$

$dv=dx\ \Rightarrow v=x$

Ta có $\int\limits_1^a\ln xdx=a.\ln a-\int\limits_1^a dx=a\ln a-a+1=1+2a$

$\Rightarrow a\ln a=3a\Leftrightarrow\ln a=3\Leftrightarrow a=e^3$.

Vậy $a\in(18;21)$.

Câu 19. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int\limits_0^1(x-2)e^x\mathrm{dx}=a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -1.

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x-2)e^x dx = (x-2)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -e+2-e^x\Big|_0^1 = 3-2e = a+be$

với $a;b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a=3, b=-2 \Rightarrow a+b=1$

Câu 20. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh -2019)** Tính tích phân $I = \int_1^2 xe^x dx$.

A. $I = e^2$. **B.** $I = -e^2$. **C.** $I = e$. **D.** $I = 3e^2 - 2e$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$I = \int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - \left(e^2 - e\right) = e^2$.

Câu 21. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Biết rằng $\int_2^3 x\ln x\,dx = m\ln 3 + n\ln 2 + p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Tính $m+n+2p$

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow \int_2^3 x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \frac{x^2}{4}\Big|_2^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{5}{4}$.

Suy ra $m+n+2p=0$.

Câu 22. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Biết $\int_0^2 2x\ln(1+x)dx = a.\ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a+4b$.

A. 42. **B.** 21. **C.** 12. **D.** 32.

Lời giải

Xét $I = \int_0^2 2x\ln(1+x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x}dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}$.

Ta có: $I = \left(x^2-1\right)\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2-1}{x+1}dx = 3\ln 3 - \int_0^2 (x-1)dx = 3\ln 3 - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^2 = 3\ln 3$.

Vậy $a=3$, $b=3 \Rightarrow 3a+4b=21$.

Câu 23. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

A. $P=6$ **B.** $P=-6$ **C.** $P=5$ **D.** $P=4$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}.\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x}.\mathrm{d}x \\ v=-\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có $I=\left(\frac{-1}{x}.\ln x\right)\Big|_1^2+\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}\ln 2-\frac{1}{x}\Big|_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow b=1, c=2, a=-\frac{1}{2}$. Khi đó

$P=2\left(\frac{-1}{2}\right)+3.1+2=4$.

Câu 24. Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$. Khi đó, giá trị của a^2+b bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 9.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\tan x \end{cases}$

$I=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}.\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$

$=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{1}{2}-\ln 1=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2 \Rightarrow a=3; b=2$. Vậy $a^2+b=11$.

Câu 25. Cho $\int \ln\left(x^2-x\right)dx=F(x), F(2)=2\ln 2-4$. Khi đó $I=\int_2^3\left[\frac{F(x)+2x+\ln(x-1)}{x}\right]dx$ bằng

A. $3\ln 3-3$. **B.** $3\ln 3-2$. **C.** $3\ln 3-1$. **D.** $3\ln 3-4$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x^2-x\right) \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=\frac{2x-1}{x^2-x} \\ v=x \end{cases}$

Suy ra $F(x)=\int \ln\left(x^2-x\right)dx=x\ln\left(x^2-x\right)-\int \frac{2x-1}{x-1}dx=x\ln\left(x^2-x\right)-2x-\ln|x-1|+C$

$F(2)=2\ln 2-4 \Rightarrow C=0$ suy ra $F(x)=x\ln\left(x^2-x\right)-2x-\ln|x-1|$

Khi đó: $I=\int_2^3\left[\frac{F(x)+2x+\ln(x-1)}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_2^3 \ln\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=F(3)-F(2)=3\ln 3-2$.

Câu 26. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Biết $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b$.

A. $T=9$. **B.** $T=13$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Lời giải

Xét $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}x.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$.

$$I=x.\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x=x.\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=\left[x\tan x+\ln(\cos x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2.$$

Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}\Rightarrow T=a^2+b=11.$

Câu 27. **(Thpt Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho $\int\limits_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+2(b+c)$ là:

A. 0. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần:

Đặt: $\begin{cases}u=\ln(1+2x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ \text{chãn } v=-\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{-(2x+1)}{x}\end{cases}$.

$$\Rightarrow\int\limits_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{-(2x+1)}{x}\cdot\ln(1+2x)\Big|_1^2+\int\limits_1^2\frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{5}{2}\ln 5+3\ln 3\right)+2\ln|x|\Big|_1^2$$

$$=\frac{-5}{2}\ln 5+3\ln 3+2\ln 2.$$

$\Rightarrow a=-5$, $b=3$, $c=2$.

Vậy $a+2(b+c)=5$.

Câu 28. Cho $\int\limits_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P=ab$.

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=0$. **C.** $P=\frac{-9}{2}$. **D.** $P=-3$.

Lời giải

Ta có $I=\int\limits_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(1+x) \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\ v=-\frac{1}{x}. \end{cases}$

Khi đó $I=-\frac{1}{x}\ln(1+x)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+2\ln 2-\ln 3=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3.$

Suy ra $a=3$, $b=-\frac{3}{2}$. Vậy $P=ab=\frac{-9}{2}$.

Câu 29. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int\limits_0^1 (x-2)e^x dx = a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases} u=x-2 \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases} \Rightarrow \int\limits_0^1 (x-2)e^x dx=(x-2)e^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x dx=-e+2-e^x\Big|_0^1=3-2e=a+be$

với $a;b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=3, b=-2\Rightarrow a+b=1$

Câu 30. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$ **B.** $\frac{5}{8}$ **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{17}{8}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=\ln(\sin x+2\cos x)\Rightarrow du=\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\Rightarrow v=\tan x+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=(\tan x+2)\ln(\sin x+2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$=3\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)-2\ln 2-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\tan x)\mathrm{d}x=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\left(x+2\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=3\ln 3-\frac{5}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\Rightarrow a=3,\ b=-\frac{5}{2},\ c=-\frac{1}{4}.$

Vậy $abc=18$.

Câu 31. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

A. 12. **B.** 1. **C.** 24. **D.** 64.

Lời giải

Ta có: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left[x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+1\right]e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{\frac{1}{12}}^{12}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Đặt: $\begin{cases}u=x\\ dv=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx\end{cases}\to\begin{cases}du=dx\\ v=e^{x+\frac{1}{x}}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx=x.e^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12}-\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$=12e^{12+\frac{1}{12}}-\frac{1}{12}e^{12+\frac{1}{12}}=\frac{143}{12}e^{\frac{145}{12}}$.

Vậy: $a=143;b=12;c=145;d=12$. Dó đó: $bc-ad=12.145-143.12=24$.

Câu 32. **(THPT Yên Khánh A 2018)** Cho $\int_0^2\frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ln 3$ (với $a,c\in\mathbb{Z};b,d\in\mathbb{N}^*;\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $P=(a+b)(c+d)$.

A. 7. **B.** -7. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\int_0^2\frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x-\int_0^2\frac{2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

$\int_0^2\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x-\int_0^2\frac{2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\left(\ln|x+2|+\frac{2}{x+2}\right)\Big|_0^2=\ln 2-\frac{1}{2}$.

$I=\int_0^2\frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{(x+2)^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=\frac{-1}{(x+2)}+1=\frac{x+1}{x+2}\end{cases}$

Suy ra $I=\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x+2)}\right)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{1}{(x+2)}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\ln 3-\ln 2$.

Do đó $\int_0^2\frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\ln 3\Rightarrow P=(-1+2)(3+4)=7$.

Câu 33. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(1)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ với $x>-1$. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a\ln\frac{b}{c}-d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương, $b\le 3$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$, với C là hằng số tùy ý.

Do $f(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow \ln 2+\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C=-\ln 2$.

Khi đó, ta có

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-\ln 2\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\ln(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\ln 2\int_1^2\mathrm{d}x.$$

Xét $I=\int_1^2\ln(x+1)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\\ v=x\end{cases}$, khi đó ta có

$$I=x.\ln(x+1)\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{x+1}=2\ln 3-\ln 2-\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{x+1}=2\ln 3-\ln 2-\int_1^2\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=2\ln 3-\ln 2-1+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

Khi đó,

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2\ln 3-\ln 2-1+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\ln 2\int_1^2\mathrm{d}x=2\ln 3-\ln 2-1+2\ln 3-2\ln 2-\ln 2=4\ln\frac{3}{2}-1.$$

Suy ra $\begin{cases}a=4\\ b=3\\ c=2\\ d=1\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d=10$.