Variational Auto Encoder (VAE)

# Section 1: Understand VAE

A diagram of a mathematical equation

AI-generated content may be incorrect.

对于模型，做出如下假设

而我们需要拟合 和 。我们拟合的概率分布如下

根据 Naïve Bayes：

ELBO: Evidence Lower Bound

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

因此优化目标从 MLE 转换为优化 ELBO

**Reconstruction Term:** 可以看作是通过 Encoder 获得的term ），之后对这个 进行重建出 ，并对其进行 MLE。因此使其最大化，也就是使输入 和输出 的重建差值最小。也就是最小化一个 L2：

**Prior Matching Term：**我们这里假设了 Latent 是一个 Gaussian Distribution，也就是 。（如果不考虑方差为 1，则会退化成 AE）。

而我们也定义了 ，因此 PMT可以重写为：

A diagram of a computer program

AI-generated content may be incorrect.

A screenshot of a graph

AI-generated content may be incorrect.

# Section 2: Mathematics behind VAE

## Mathematics Background

KL Divergence:

MLE:

## Variational Inference

即我们需要拟合Decoder的生成项的分布（Latent Variable Model, LVM），也就是

这里做出的假设是

引入 的概率分布

的选择非常重要，注意到

也就是对于MLE的近似误差是 。

## Variational Autoencoder

我们定义 Encoder 为：

因此可以定义优化问题：

可以对 Regularizer 进行解析优化（Analytic Form）

给定 和 是 factorised Gaussian distributions，则有解析式：

单变量情况分析：

多维变量情况：

代入单变量解析，可得

会发现 Regularizer 只和 有关。至此 Regulariser 优化完毕。

重建损失仍然intractable，因为存在数学期望。使用 MC Estimate (Monte Carlo)：

因此梯度可以被表示为

可以发现第一项仍为期望，也需要进行 MC 估计（重参数技巧 Reparameterisation Trick）

## Reparameterisation Trick

如直接对其 MC 估计时，其需要采样 ，这个采样依赖参数 ，因此使用 RT 去去除对参数 的依赖。

可以注意到：

记 , ，即

LOTUS: 如果有一个随机变量 是另一个随机变量 的函数：，那么

如果将 看作 ，

由此可以改写原式：

这时进行 MC 时，则会变成

至此

## Summary

A screenshot of a math problem

AI-generated content may be incorrect.A white sheet with black text and red text

AI-generated content may be incorrect.

# Section 3: Conditional VAE

假设额外的信息为 ，则 Latent Variable Model 被定义为

通常 ，如果 是连续，则有

类似的，我们优化 ELBO

尽管 的选择是自由的，但使用 并用灵活的神经网络对其进行参数化将得到最佳的后验近似。

关于 最大化 ELMO 等价于最小化KL散度 ：

如果我们用 替代，那么除非学习到的生成器退化（degenerate）：，否则最优解不会得到精确的后验近似。在这种情况下， 信息被忽略（即），模型不再是条件生成模型。