[[1]](#footnote-2)Cuadratura Gaussiana

|  |
| --- |
| Leonardo Mejía, Marlon Pachacama, Kevin Pallo, Bladimir Pillajo |
| Escuela Politécnica Nacional. |
| Facultad de Ingeniería de Sistemas y Computación. |
| Métodos Numéricos.  [leonardo.mejia@epn.edu.ec](mailto:leonardo.mejia@epn.edu.ec) , [marlon.pachacama@epn.edu.ec](mailto:marlon.pachacama@epn.edu.ec), [hilton.pillajo@epn.edu.ec](mailto:hilton.pillajo@epn.edu.ec),  [kevin.pallo@epn.edu.ec](mailto:kevin.pallo@epn.edu.ec) |

*Resumen*—En análisis numérico el método conocido como Cuadratura Gaussiana implementado por el matemático Carl Friedrich Gauss quien, establecido las reglas de cuadratura, basado en el uso magistral de las series, en el que el problema se reformula como uno de aproximaciones funcional que se resuelve con la ayuda de fracciones continuas. Este método se basa en muestrear el integrando de la función cuya integral se desea encontrar, a valores que representan raíces de polinomios ortogonales. Los más importantes de estos son los polinomios de Legendre, tal cuadratura dará resultados precisos solo si aproximado por un polinomio dentro del rango .

# Introducción

El presente artículo se centra en el problema de la construcción de diferentes fórmulas las cuales nos aporten a comprender de una manera fácil y eficaz el método de la Cuadratura Gaussiana, que se basa por un lado en la teoría de los polinomios ortogonales y por otro el desarrollo de métodos necesarios y apropiados desde el punto de vista numérico.

El objetivo principal es el de establecer diversos conceptos y resultados que aporten al fundamento de fórmulas de integración aproximada y el complemento de conocimientos esenciales para poder lograr con éxito este proyecto de métodos numéricos

Existe una comparación entre dos métodos importantes. Uno de estos métodos es el que se abordara en todo el trayecto del proyecto que es la Cuadratura Gaussiana es un algoritmo cuya concepción requiere matemáticas nada triviales y, a cambio, puede ejecutarse en el cálculo manual por la sencillez de su implementación., por el contrario el otro método con él se hace la comparación es el famoso método de Montecarlo que es un algoritmo simple, fácil de describir cuya ejecución consiste en repetir varias veces algunos pasos muy sencillos, debe hacerse necesariamente en un ordenador.[1]

# Método

El Desarrollo de la siguiente sección se centra principalmente al marco teórico con el cual se está abordando el tema de la Cuadratura Gaussiana y a su vez el lenguaje de programación en el cual será implementado que es PHP.

Cuadratura Gaussiana

Este método se base en mostrar el integrando de la función cuya integral se desea encontrar, a valores que representan raíces de polinomios ortogonales. Los más populares de estos son los polinomios de Legendre.[2]

En general un conjunto de funciones se conoce como ortogonales en un intervalo , si

Donde es una función de ponderación no negativa en .

Si las funciones son polinomios, estos se designan como polinomios ortogonales.

## Polinomios de Legendre

Los primeros cinco polinomios de Legendre son:

El polinomio de Legendre de grado se puede obtener por medio de la fórmula de Rodrigues

O bien a partir de la formula recursiva

Las relaciones de ortogonalidad y normalización, con las funciones de ponderación (peso) igual a 1, son:

## Cuadratura Gaussiana

El propósito es discutir la fórmula de integración Gaussiana que aproxima

Y mostrar que con un simple cambio de variables se pueden extender los límites de integración a valores distintos a .

La aproximación de la integral definida se puede definir como

El problema consiste en encontrar las constantes . Para encontrar las mencionadas constantes, partimos de la suposición básica de que la formula representa sin aproximaciones, es decir, exactamente un polinomio de orden o menor.

Primero mostramos que los puntos , son iguales a las raíces del polinomio de Legendre

Tomemos un polinomio arbitrario de grado . En términos de polinomios de Legendre puede expresarse como

Como ejemplo supongamos

De la ecuación y obtenemos

Comparando esta última expresión con la inicial obtenemos:

De donde obtenemos finalmente

Sustituyendo esto en , obtenemos

Este simple ejemplo muestra que cualquier polinomio se puede escribir en términos de polinomios de Legendre

A partir de la definición de ortogonalidad expresada en :

Observemos que , es un polinomio de grado , y por tanto representa exactamente polinomios de grado o menos, lo cual constituye el requisito básico mencionado antes, en la definición de la ecuación , para la selección de y

Comparando con obtenemos:

Como es un polinomio arbitrario, no es cero en general. Así mismo las funciones de ponderación o pesos no pueden ser todos cero, de lo contrario la ecuación será igual a cero, lo cual constituye el caso trivial.

Dado lo anterior la única condición para la ecuación será:

Lo anterior implica que son las raíces del polinomio de Legendre

Para existen raices distintas

Como ejemplo, para

Por lo que las raíces son

Mientras que para el caso

Por lo que las raíces son

Para la determinación de los coeficientes de nuevo tomamos en consideración el requisito establecido en ), esto es, que si al integrar es un polinomio de grado o memos, dicha ecuación no involucra una aproximación.

Por definición, el polinomio de Lagrange para aproximar cualquier polinomio degrado , que pasa por puntos se puede expresar como

Por lo que

Dado que es una constante

Comparando con tenemos

Es común encontrar la definición de y por tanto en términos de polinomio de Legendre. Esto se obtiene como sigue

El polinomio:

para todo pero

De acuerdo a L’Hopital

(Dado que la derivada del denominador es igual a 1), donde es una de las raíces del polinomio de Legendre

De lo anterior, el polinomio de Lagrange puede expresarse como

Por tanto, las funciones de ponderación (pesos) se definen alternativamente como

Para ejemplificar consideremos

Por lo que las raíces son y su derivada

De donde

Mientras que para el caso

Por lo que las raíces son y su respectiva derivada

De donde

## Limites de Integración

Dado que os límites de integración asociado con este desarrollo son , en un problema de aplicación habrá que ajustar el procedimiento de la Cuadratura Gaussiana a los límites de la aplicación particular. Lo anterior se logra mediante un simple cambio de variable.

Definimos una relación lineal con la nueva variable

En este caso

Se convertirá en

Dado que la Cuadratura Gauss-Legendre se define

La integral se puede aproximar como

Esta fórmula es la apropiada para usarse en la programación de este método a nivel de lenguaje de máquina, en lugar de usar una transformación simbólica de . En este caso los puntos base se transforma y los factores de ponderación se modifican al multiplicarse por la constante

Por ejemplo, usamos la fórmula de Cuadratura Gauss-Legendre de dos puntos para calcular

La fórmula de Cuadratura Gauss-Legendre será (para el método de dos puntos)

# Resultados (aplicación)

Se implementa todo lo estudiado en lenguaje de programación PhP. Entonces a continuación se detalla lo que se realizó y los que métodos se implementaron.

Primero vamos a hacer detalles a la interfaz que vamos a utilizar:

|  |
| --- |
|  |
| Figura1: “Interfaz Gráfica” |

En la figura 1 se muestra la pantalla en general que nosotros vamos a utilizar, para destacar nosotros utilizamos una graficadora online, en este caso GeoGebra, que nos permite visualizar la gráfica que vamos a utilizar.

|  |
| --- |
|  |
| Figura2: “Campos” |

Para la ejecución del programa necesitamos los siguientes campos que se muestran en la figura2. Que son los limites superior e inferior para la integral, así como el grado del polinomio, para en el último campo escribir la función que deseemos integrar. Entonces por ejemplo tenemos:

|  |
| --- |
|  |
| Figura3: “Campos” |

Cuando hemos ingresado todos los datos del campo nosotros podemos hacer él envió de los datos, haciendo clic en “Enviar consulta”. Y con eso obtenemos lo siguiente:

|  |
| --- |
|  |
| Figura4: “Tabla de Resultados” |

En la figura4 se puede observar los datos que ingresamos y se mostrara el resultado que es el valor aproximado a la integral.

|  |
| --- |
|  |
| Figura5: “Grafica de la función” |

En cuanto a la gráfica de la función que nosotros obtenemos, deberemos ingresar la función para observar cómo es la gráfica la función.

Ahora para los métodos que nosotros utilizamos en la implementación de la cuadratura Gaussiana.

Utilizaremos la ecuación (12) para la base de la estructura que vamos a implementar:

Entonces para iniciar nosotros debemos obtener la función de una manera que el lenguaje pueda reconocer y con esto realizar las operaciones que tenemos

|  |
| --- |
|  |
| Figura6: “Método función” |

Este método nos permite obtener la función que se ingresó, de una manera que, en la programación, que en este caso es PHP, para utilizar en el lenguaje PHP.

|  |
| --- |
|  |
| Figura7: “Polinomio de Legrange” |

Calculamos el polinomio de Lagrange con su fórmula para los “n” grados que se ingresó en el campo de figura3.

|  |
| --- |
|  |
| Figura8: “Derivada de Legrange” |

Tenemos también el método que nos permite calcular la derivada de la función, en el método también utiliza el polinomio de la figura7

|  |
| --- |
|  |
| Figura9: “Método de la Secante” |

Usamos el método de la secante para hallar una posible raíz. Se usa el método de la secante bisección, se coloca una condición de parada que nosotros colocamos una tolerancia de 10e-9.

|  |
| --- |
|  |
| Figura10: “Localiza las raíces” |

Para localizar las raíces primero damos valores iniciales para calcular raíces entre -1 y 1 como se puede observar en el primero “for”. Con la ayuda de la función secante que se detalló más arriba.

|  |
| --- |
|  |
| Figura11: “Calcular la Wi” |

Entonces podemos calcular el Wi con la ayuda de la derivación de Lagrange, un método de la figura8.

|  |
| --- |
|  |
| Figura12: “Calcular la Xi” |

Calculamos el Xi de la formula como se muestra en la figura12 utilizando la raíz que se calculó anteriormente con el localizar raíz de la figura

Entonces aplicando esto tenemos el siguiente código

|  |
| --- |
|  |
| Figura13: “Calcular la integral” |

Primero calculamos el sumatorio f(Xi)\* Wi con esto se calcula la integral como se muestra en la figura de cuadratura Gaussiana de orden mayor utilizando los métodos anteriores obtenemos el resultado de la ecuación 12.

# Conclusiones

Como se puede observar se implementó el uso de la integración con el método de cuadratura Gaussiana, teniendo en cuenta todos los parámetros que esta necesita, como son el Polinomio de Lagrange, los límites que son recomendados, y derivación de Langrage también se puede tener en cuenta el uso de anteriores métodos como el de la Secante. Esto con el fin de obtener el valor de la integral, usando este método, que nos muestra un resultado casi exacto.

# Referencias

[1] Sanz-Serna, J. M. *La Cuadratura Gaussinana segun Gauss.* Madrid, 2011.

[2]*Geofísica.* s.f. http://mmc.geofisica.unam.mx/acl/EDP/Biblioteca/GaussQuad/Bibliografia/CUADRATURA\_GAUSSIANA.pdf (último acceso: 25 de 07 de 2020).

# Autores



# Leonardo Mejía

# Estudiante de la Facultad de Sistemas en la carrera de Ingeniería en Computación

# C:\Users\OSITO\Downloads\received_1589749687760269.jpeg

# Marlon Pachacama

# Estudiante de la Facultad de Sistemas en la carrera de Ingeniería en Computación



# Kevin Pallo

# Estudiante de la Facultad de Sistemas en la carrera de Ingeniería en Computación



Bladimir Pillajo

# Estudiante de la Facultad de Sistemas en la carrera de Ingeniería en Computación

1. . [↑](#footnote-ref-2)