AP325－APCS 實作題檢測從三級到五級

程設資結迷惘，算法遞迴如夢，冷月豈可葬編程，柳絮靜待東風。

鄭愁予：「我打江南走過，那等在季節裏的容顏如蓮花的開落，東風不來，三月的柳絮不飛，你的心如小小寂寞的城，...」直到遇上了程式，.....。

釋出版本紀錄：

2020/6/24, v:0.1, chapter 0~1。
2020/6/30, v0.2, chapter 2.
2020/7/6, v0.4, 加入第三第四章，增加 Q-2-15，修訂第一章部分文字。
2020/7/10, v0.5, 加入第五章。

作者：吳邦一

目錄

例題與習題目錄

註：例題習題中標示(@@)符號者題目稍難，標示(*)者可能超過 APCS 考試範圍，標示(APCS)者表示該題為從出現於過去考試的類似題，如有標註 subtask 表示這一題的解法為當初考試的某一子題而非 100 分的解。

0. 教材說明與預備知識

0.1. 教材說明

這是一份針對程式上機考試與競賽的教材，特別是 APCS 實作考試，325 是 3-to-5 的意思，這份教材主要目標是協助已經具有 APCS 實作三級分程度的人能夠進步到 5 級分。

APCS 實作考試每次出 4 題，每題 100 分，三級分是 150~249 分，四級分 250~349 分，而 350 分以上是五級分。由於題目的難度排列幾乎都是從簡單到難，因此，三級分程度大概是會做前兩題，而要達到五級分大概是最多只能錯半題，所以可以簡單的說，要達到四五級就是要答對第三第四題。根據過去的考題以及官網公告的成績說明，前兩題只需要基本指令的運用，包括：輸入輸出、運算、判斷式、迴圈、以及簡單的陣列運用，而第三與第四題則涉及常見的資料結構與演算法。以往程式設計的課程大多只在大學，以一般大學程式設計教科書以及大學資訊科系的課程來看，第三四題所需要的技術大概包含程式設計課的後半段以及資料結構與演算法的一部份，這就造成學習者在尋找教材時的困難，因為要把資料結構與演算法的教科書內容都學完要花很多時間。另外一方面，APCS 實作考試的形式與題型與程式競賽相似，程式競賽雖然網路上可以找到很多教材與資源，但是範圍太廣而且難度太深，而且多半是以英文撰寫的，對三級分的程式初學者來說，很難自己裁剪。

這份教材就是以具有 APCS 實作題三級分的人為對象，來講解說明四五級分所需要的解題技術與技巧，涵蓋基礎的資料結構與演算法，它適合想要在 APCS 實作考試拿到好成績的人，也適合競賽程式的初學者，以及對程式解題有興趣的人。如果你是剛開始學習程式，這份教材應該不適合，建議先找一本基礎程式設計的教科書或是教材，從頭開始一步一步紮實的學習與做練習。

這份教材的內容與特色如下：

- 在這一章裡面，除了教材介紹外，也說明一些預備知識。下一章開始則依主題區分為：遞迴、排序與二分搜、佇列與堆疊、貪心演算法、分治、動態規劃、樹狀圖、以及圖的走訪。
- 對於每一個主題，除了介紹常用的技巧之外，著重在以例題與習題展現解題技巧。例題與習題除了包括該主題的一些經典題目，也涵蓋過去考題出現過的以及未來可能出現技巧。所有的例題與習題除了題目敘述的範例之外，都提供足夠強度的測試資料以方便學習者測試自己的程式。

- 所有的例題都提供範例程式，有些例題會給多個不同的寫法，習題則是給予適當的提示。由於最適合程式檢測與競賽的語言是 C++，所以教材中的範例程式都採用 C++。檢測與競賽並不必須使用物件導向的寫法，但是 C++的 STL 中有許多好用的函式庫，本教材中也適度的介紹這些常用的資料結構與庫存函式。以 APCS 的難度，雖然幾乎每一題都是不需要使用特殊的資料結構就可以寫得出來，但是使用適當的資料結構常常可以有更簡單的寫法，何況在一般程式競賽中，STL 往往是非要不可的。

- 本教材是針對考試與競賽，所以範例程式的寫法是適合考場的寫法，而非發展軟體的好程式風格。因為時間壓力，考場的程式寫法有幾個不好的特性包括：比較簡短、變數名稱不具意義、濫用全域變數。但因為本教材是要寫給學習者看的，所以也不會刻意簡短而且會加上適當的註解，也不會採用巨集(#define)方式來縮短程式碼，但是會教一些在考場可以偷懶的技巧。

本教材例題習題所附測資檔名的命名方式以下面的例子說明，例如檔名為

P_1_2_3.in

表示是例題 P_1_2 的第 3 筆輸入測資，而

P_1_2_3.out

則是它對應的正確輸出結果。測資都是純文字檔，採 unix 格式，Unix 格式與 Windows 文字檔的換行符號不同，但目前 Win 10 下的筆記本也可以開啟 unix 格式的文字檔。

0.2. 預備知識

這份教材假設讀者已經有了一點撰寫 C 或 C++程式的基礎，所以撰寫與編譯程式的工具(IDE 或者命令列編譯)就不做介紹。在這一節中要提出一些預備知識，這些知識對於程式考試與比賽時撰寫程式有幫助。在本教材中的範例程式都採用與 APCS 相同的編譯環境，簡單說 C++版本為 C++ 11，而編譯器優化為 O2，也就是編譯命令類似是：

```
g++ -O2 -std=c++11 my_prog.cpp
```

如果是使用 IDE 的人，記得在 compiler 設定的地方設定這兩個參數，例如 Code::Block 是在 settings 下面選 compiler 然後勾選相關的設定。

接下來我們將說明以下主題。

- 基本 C++模板與輸入輸出
- 程式測試與測試資料
- 複雜度估算

- 需要留意的事

0.2.1. 基本 C++模板與輸入輸出

C++與 C 一樣，在使用庫存函數前都必須引入需要的標頭檔，剛開始寫簡單程式的時候，我們通常只需要使用

#include <cstdio> // 或者 C 的<stdio.h>

但是隨著使用庫存函數的增加，往往要引入多個標頭檔，更麻煩的是記不住該引入那些標頭檔，這裡介紹一個萬用的標頭檔，我們建議以下列範例的形式來寫程式。注意前兩行，其中第一行讓我們不需要再引入任何其它的標頭檔，而第二行讓我們使用一些資料結構與庫存函數時不需要寫出全名。如果你目前不能了解它們的意義，建議先不要追根究柢，記起來就好了，將來再去了解。

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    // code here
    return 0;
}
```

輸入與輸出是程式中最基本的指令，C 最常用的輸入輸出是 scanf/printf，而 C++最常用的是 cin/cout。在 C++裡面當然也可以用 scanf/printf，相較之下，cin/cout 用起來比較簡單，不過它卻有個缺點，就是效率不佳，在資料量小的時候無所謂，但是當資料量很大時，往往光用 cin 讀入資料就已經 TLE(time limit exceed, 執行超過時限)。這不是太不合理了嗎？同樣的程式如果把 cin 換成 scanf 可能就不會 TLE 了。事實上如果上網查 cin TLE 會找到解方，這解方就是在程式的開頭中加上兩行，所以程式就像以下這樣：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    ios::sync_with_stdio(0);
    cin.tie(0);
    // code here
    return 0;
}
```

至於原因呢？也是有點複雜，所以一開始只好硬記起來，如果有興趣了解，可以上網查一下。這書一開始就叫人硬記一些東西，實在不是好的學習方式，這實在也是不得已，如果一開始就解釋一大堆可能把初學者搞得頭昏眼花。如果不想記這兩行，還有個方式就是不要用 cin/cout，只用 scanf/printf 就沒有這個問題了，本書的範例大部分的時候都是採用 scanf/printf。

這裡要特別提醒一件事，假設你加了上面那兩行之後，就千萬不可以把 cin/cout 與 scanf/printf 混用，例如你在程式中同時有使用 cout 與 printf，那麼可能會發生一些不可預期的事：在程式中輸出的東西的先後順序可能會亂掉。簡言之，下面兩個方法選一個使用，但不要混用：

- 使用 scanf/printf，或者
- 使用 cin/cout 加上那兩行。

0.2.2. 程式測試與測試資料

一個程式寫出來之後必須經過測試，除了語法沒有問題之外，更重要的是它可以計算出正確的答案而且可以在需求的執行時間之內完成計算。要測試程式就是拿資料餵給程式，看看程式的執行結果與時間是否符合要求，我們在考場寫出來的程式，繳交後也是以這個方式來進行測試。要測試程式第一步就必須有測資(測試資料)，產生適合的測資不是一件簡單的事，對某些題目來說根本就是比解答還要困難。本教材的例題與習題都有提供測資，有些人可能未必了解測資的使用方法，所以以下做一些簡介。

所謂的測資是指一組輸入以及它對應的正確輸出答案。一支程式的標準行為就是讀入資料，進行計算，然後輸出結果。通常我們寫好一支程式在電腦上執行時，它就會等待輸入，此時我們可以鍵入測試用的輸入，等待它輸出結果，然後再比對答案。如果是在視窗環境下，我們也可以用複製貼上的方式將輸入資料拷貝過去，但這方法在資料量太大的時候就無法使用，另外有個缺點是這樣做無法量測程式的執行時間。

在 C/C++裡面有三個定義的系統輸入輸出裝置，分別是：

- stdin：標準輸入裝置(standard in)，預設是鍵盤。
- stdout：標準輸出裝置(standard out)，預設是螢幕。
- stderr：標準錯誤記錄裝置(standard error)，預設是螢幕。

我們在程式中執行 scanf/cin 這一類輸入指令時，就是到 stdin 去抓資料，而 printf/cout 這些指令時是將資料輸出至 stdout。而這些裝置其實都可以改變的，這就是輸入輸出的重新導向(I/O redirection)，我們介紹兩個方法來做。

如果是用 unix 環境下以命令列執行程式，則以下列方式可以將輸入輸出重導：

```
./a.out <test.in >test.out
```

其中 a.out 是執行檔的名稱，在後面加上 <test.in 的意思就是將 test.in 當作輸入裝置，也就是原本所有從鍵盤讀取的動作都會變成從 test.in 檔案中去讀取。而 >test.out 則是將輸出重新導向至 test.out 檔案，原本會輸出至 stdout 的都會變成寫入檔案 test.out 中。輸入與輸出的重導可以只作其中任何一個，也可以兩者都做。

另外一個方法是在程式裡面下指令。我們可以在程式中以下列兩個指令來做 IO 重導：

```
freopen("test.in", "r", stdin);

freopen("test.out","w", stdout);
```

freopen 的意思是 file reopen，上述第一個指令的意思是將檔案 test.in 當作 stdin 來重新開啟，其中"r"的意思是 read 模式。第二個指令就是要求將檔案 test.out 當作 stdout 重新開啟，"w"的意思則是 write 模式。這兩個指令可以只執行其中一個，也可以兩個都做，也可以在一個程式裡面重導多次。

在很多場合，輸出的內容很少，當我們要測試程式的時候，我們只要做輸入重導，然後看輸出的結果是否與測資的輸出內容一樣就可以了。在某些場合，輸出也很大，或者想輸出訊息除錯，那就可以利用輸出重導把輸出的內容寫到檔案。如果要將程式的輸出與測資的輸出檔做比較，在 unix 下可以用 diff 來比較檔案內容。如果是 Windows 呢？可能要自己寫一支簡單的程式來比較兩個檔案。好在這份教材大部分的輸出都很小，用眼睛看就可以比較。另外要提醒一點，如果我們將輸出重新導向了，但還是想要在螢幕上輸出訊息的話，那可以利用 stderr 來輸出至螢幕，以下的例子展示如何使用。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    int a, b;
    freopen("test.in","r",stdin);
    freopen("test.out","w",stdout);
    scanf("%d%d", &a, &b); // read from test.in
    fprintf(stderr,"a=%d, b=%d\n", a, b); // output to screen
    printf("%d", a+b); // output to test.out
    return 0;
}
```

測試程式另一個問題是程式的執行時間是否符合題目要求。檢測考試與競賽的題目需要講求效率，每一題都有執行時限(time limit)，這是指對於每一筆測資，繳交的程式必須在此時限內完成計算。在 unix 環境下我們可以用以下的指令來量測執行時間：

```
time a.out <test.in
```

其中 a.out 是執行檔。如果是在 windows 環境下，有些 IDE(如 Code::Blocks)在執行後會顯示執行時間，如果只要簡單的估計是可以，但要注意時間包含等待輸入的時間，所以通常要將輸入重導後顯示的時間才比較真實。下面介紹一個在程式中計算執行時間的方法。我們可以在程式中加上指令來計算時間，請看以下的範例：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    clock_t t1, t2;
    t1=clock();
    // code here
    t2=clock();
    fprintf(stderr,"time from t1 to t2 = %f sec.\n", \
        (float)(t2-t1)/CLOCKS_PER_SEC);

    return 0;
}
```

這裡提醒一下，在考試時候時間寶貴，大部分的考試與比賽只有小的範例並未提供大測資，多數人也未必能多餘的時間去產生測資。只有在平常練習的時候，或者是考試時間非常充裕的時候，才適合去產生測資與精確量測時間。大部分的題目不需要去仔細的量測時間，只要估算複雜度就足夠了，複雜度就是下一節要談的主題。

0.2.3. 複雜度估算

要評估程式的執行效率，最準確的做法是量測時間，但是程式的執行時間牽涉的因素太多，而且不同資料量的時候會有不同表現，所以通常我們用複雜度來評估一支程式或演算法的效率。複雜度涉及一些定義與數學的計算，所以並不容易，這一節我們來講如何做簡易的複雜度估算，雖然只是講簡易的部分，但這些知識幾乎足以面對大部分常見的狀況。

複雜度估算方式

複雜度以 O(f(n))來表示，念作 big-O，也確實一定要大寫，小寫的 o 有不同的意義，其中習慣上以 n 來表示資料量，而 f(n)是 n 的函數，複雜度代表的意義是「當資料量為 n 時，這個程式(演算法)的執行時間(執行指令數)不超過 f(n)的某個常數倍」。對於常見的問題，資料量大小就是輸入的資料量，例如輸入整數的個數，或者輸入字串的長度，常見的複雜度有：O(n)、O(nlog(n))、$O(n^2)$、$O(2^n)$等等。Big-O 的計算與表示有下面幾個原則：

- 根據定義，不計算常數倍數，所以我們只說 O(n)而不會說 O(3n)或 O(5n)。因為常數倍數不計，所以 log(n)不必指明底是 2 或 10。
- 兩個函數相加的 Big-O 等於比較大的函數。也就是說，若當 n 足夠大的時候 f(n)≥g(n)，則 O(f(n)+g(n)) = O(f(n))。如果一個程式分成兩段，一段的複雜度是 O(f(n))，另外一段是 O(g(n))，則整個程式的複雜度等於複雜度比較大的那一段。
- 如果某一段程式的複雜度是 O(f(n))而這段程式執行了 g(n)次，則複雜度為 O(f(n)×g(n))。
- 程式的複雜度通常會因為輸入資料不同而改變，即使是相同的資料量，對某些資料需要的計算量少，對某些資料的計算量大。一般的複雜度指的是 worst-case 複雜度，也就是最難計算的資料所需的時間。

來看一些常見的例子。下面這段程式是一個迴圈跑 n 次，每一次作一個乘法與一個加法，所以複雜度是 O(2×n)=O(n)。(事實上每次迴圈還需要做 i++與 i<n 兩個指令，所以應該是 4n，反正都是 O(n))

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    total += a[i]*i;
}
```

下面這段程式在計算一個陣列中有多少的反序對，也就是有多少(i,j)滿足

i<j 而 a[i]>a[j]。

程式有兩層迴圈，所以內層的 if 指令一共被執行 C(n,2)=n(n-1)/2 次，而 if 指令做一個比較與一個可能的加法，所以是 O(1)，整個來看複雜度是 $O(n(n-1)/2)=O(n^2)$，因為只需要看最高項次。

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    for (int j=i+1; j<n; j++)
        if (a[j]<a[i])
            inversion++;
```

```
}
```

接下來看一個線性搜尋的例子，在一個陣列中找到某個數字。在下面的程式中，迴圈執行的次數並不一定，如果運氣好可能第一個 a[0]就是 x，而運氣不好可能需要跑到 i=n 時才確定找不到。因為複雜度要以 worst-case 來看，所以複雜度是 O(n)。

```
for (i=0; i<n; i++) {
    if (a[i] == x)
        break;
}
if (i<n)
    printf("found\n");
else printf("not found\n");
```

程式的結構大致是迴圈或遞迴，迴圈的複雜度通常依照上面所說複雜度乘法的原則就可以計算，但遞迴複雜度也有一套分析的方法，但牽涉一些數學也比較困難。另外有的時候也需要使用均攤分析(amortized analysis)，在後面的章節中，我們會碰到一些例子，屆時會視需要說明。

由資料量大小推估所需複雜度

在解題時，題目會說明資料量的大小與執行時限(time limit)，我們可以根據這兩個數字來推估這一題需要的時間複雜度是多少。同樣的題目，複雜度的需求不同，就是不同的難度。在 APCS 與大部分高中的程式比賽中，通常採取 IOI 模式，也就是一個題目中會區分子題(或稱子任務)，最常見的子題區分方式就是資料量的大小不同。

對於簡單題(例如 APCS 的第一第二題)，通常是沒有效率的問題，所以複雜度並不重要，但是，對於比較要求計算效率的第三第四題，會估算題目所需的複雜度，對思考解答就非常的重要。在一般的考試與競賽中，執行時限的訂定方式有兩種：多筆測資的執行時間限制或者是單筆測資的執行時間限制。APCS 採取 IOI 模式，所以大部分的時候都是指單一筆測資的執行時限。

程式的執行時間很難精確估算，因為每一秒可以執行的指令數牽涉的因素很多，例如：硬體速度、作業系統與編譯器、是否開啟編譯器優化、以及指令類型等等。當要估算複雜度時，建議可以一秒 10^6~10^7 的指令數量來估計，所以，假設執行一筆測資的時限為 1 秒，我們可以得到下面常見的複雜度推估：

n	超過 1 萬	數千	數百	20~25	10
複雜度	O(n) or O(nlog(n))	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(2^n)$	O(n!)

舉例來說，如果有一題的資料量上限為 5 萬，那麼這一題需要的複雜度就是 O(n)或 O(nlog(n))；如果資料上限是 200，那麼需求的複雜度可能是 $O(n^3)$。

那麼，可不可能發生題目敘述中說資料量上限 100000，但是測資中的資料量只有 1000 呢？如果出題者想要的複雜度是 O(n)或 O(nlog(n))，那是測資出弱了，這是在高水準的考試與比賽中不應該出現的情形，因為它會不利於有能力者而造成不公平。如果出題者想要的複雜度只是 $O(n^2)$，那更糟糕了，出題者自己的程式都過不了宣稱的資料。實際考試與比賽中，照理說是不會出現這些狀況，但是也不能排除出題失誤的可能。

複雜度需要留意的幾件事

在本節最後，我們要提出幾個複雜度容易誤解與需要被注意的地方。

- 常用到的庫存函式 sort/qsort 的複雜度可以用 O(nlog(n))來看，雖然理論上 worst-case 也許不是。
- 理論上 Big-O 是指上限，而未必是緊實的上限(tight bound)。一個程式的複雜度如果是 O(n)，你說它是 $O(n^2)$ 理論上也沒有錯，但一般來說，我們會講盡可能緊實的上限，但並非每一個程式的緊實上限都能被準確計算。
- 複雜度有無限多種，但如果簡單來看，指數函數上升的速度遠遠高過多項式函數，因此一個演算法的複雜度如果是指數函數，通常能解的資料量大小就很小。在探討一個問題是否容易解時，指的是它是否有多項式複雜度的解，這裡的多項式函數只要指數是常數就可以，不一定要整數常數，例如 $O(n^{2.5})$ 也視作多項式複雜度。
- 複雜度是輸入資料量的函數，而且評估的是當資料量趨近於無限大時的行為。輸入資料量通常是資料的個數(數字個數，字串長度)，但是如果涉及大數運算時，必須以輸入資料的二進位編碼長度當做資料量大小。例如，對於一個輸入的正整數，我們可以用下列簡單的試除法來檢驗它是否是質數：

```
for (i=2; i*i<=n; i++)
    if (n%i == 0) break;
if (i*i > n) printf("prime\n");
else printf("not a prime\n");
```

這個程式的複雜度是多少？$O(\sqrt{n})$是沒錯，但它是多項式複雜度嗎？非也，這裡的資料量是多少？輸入一個數，所以是 1？那就算不出複雜度了。輸入一個數字必須輸入它的二進位編碼，所以資料量的大小是 log(n)，因此，上面的程式其實是指數函數複雜度，令 L=log(n)，它的複雜度是 $O(2^{L/2})$。其實道理不難懂，所謂在一般情形下，指的是數字的運算可以在常數個指令完成的狀況，但電腦 CPU 的 bit

數為有限長度，當數字過大時，一個加法或乘法就必須軟體的方式來完成，也就不是常數個指令可以完成的。再舉一個例子，考慮以下問題：

Problem Q：輸入一個正整數 n，請計算並輸出 1+2+…+n 的值。

用最直接的方法跑一個迴圈去做連加的總和，這樣的程式複雜度是 O(n)，大家都知道等差級數的和可以用梯形公式計算，因此，我們可以寫出下面的程式：

```
scanf("%d", &n);
printf("%d\n", n*(n+1)/2);
```

這個程式的複雜度是多少？O(1)，沒錯吧？是。那麼，我們可以說：「Problem Q 存在 O(1)複雜度的解」嗎？答案卻是否，當 n 趨近無限大時，計算一個乘法或加法就不能在 O(1)時間內完成。也就是說這個程式的複雜度是 O(1)但它並不能完全解 Q。

現實中並不存在無窮大，所有的題目都有範圍，有人也可以說，在理論上，只要界定了有限範圍，任何題目都可以在 O(1)解決，因為即使複雜度高達 $O(2^{10000})$也是常數，只是要算到地老天荒海枯石爛而已。這麼講好像複雜度理論沒有用？其實不是的，在大部分的場合，n 在合理的範圍時就已經達到理論上的趨近無窮大，Big-O 也都可以讓我們正確的估算程式的效率，理論不是沒用，只是不能亂用。我們唯一要注意的是，Big-O 忽略常數，但是實際使用時，不可完全忽視常數帶來的影響，特別如果有可能是很大的常數。

0.2.4. 需要留意的事

這一節中提出一些需要注意的事，程式解題講求題目與解答的完整完善，或者可以說測資往往都很刁鑽，只要符合題目敘述的各種狀況都需要考慮，此外，為了測試效率，常常需要大的測資，對於程式解題比較沒有經驗的人，需要留意一些容易犯的錯誤。

整數 overflow

C++可以用來表示整數的資料型態目前有 char, short, int 與 long long int(也可以只寫 long long)，每種型態有它可以表示的範圍，實際的範圍可以查技術文件，每個型態也還可以指定為 unsigned 來表示非負的整數並且讓範圍再多一個位元。

解題程式通常不太需要過度節省記憶體，所以整數通常只會用 int 與 long long，目前在大多數系統上，前者是 32-bits 而後者是 64-bits。變數如果超過可以表示的範圍(不管太大或太小)，就會發生 overflow(溢位)的錯誤，這種錯誤不是語法上的，

所以編譯器無法幫你得知，有些語法上可能的溢位，編譯器會給予警告，但是很多人寫程式的時候就是習慣不看警告的，因此溢位帶來的錯誤往往很難除錯。

請看以下的程式，因為 p 的值在 2^{31} 以內，(a*b)%p 的結果必然是整數的範圍之內，但是 b = (a*b)%p; 這個指令的結果卻是錯的，發生了溢位的錯誤。我們要了解，這樣一行 C 的指令實際的運算過程是：先計算(a*b)，再除以 p 取餘數，最後才把結果存入 b。但是當計算 a*b 時，因為兩個運算子都是 int，所以會以 int 的型態來做計算，也就發生了 overflow，後面就沒救了。如同範例程式中顯示的，解決的方法有兩個，一個改成 b = ((LL)a*b)%p，其中(LL)是要求做型態轉換成 LL，這樣就不會 overflow 了，另外一種偷懶的方式是乾脆就使用 long long 的資料型態來處理，缺點是多佔一點記憶體，在一般的解題場合不太需要省記憶體，所以是很多人偷懶所採取的方法。

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010
typedef long long LL;
int main() {
    int a, b, p=1000000009;
    a = p-1, b = p-2;
    b = (a*b)%p; // overflow before %
    printf("%d\n",b);
    // correct
    a = p-1, b = p-2;
    b = ((LL)a*b)%p; // type casting to LL
    printf("%d\n",b);
    // or using LL
    LL c = p-2;
    c = (a*c)%p; // auto type-casting
    printf("%lld\n",c);

    return 0;
}
```

另外一個類似的情形經常發生在移位運算，如果我們寫

```
long long x = 1<<40;
```

預期得到 2^{40}，但事實上在存到 x 之前就溢位了，因為 1 和 40 都會被當 int 看待，正確的寫法是

```
long long x = (long long)1<<40;
```

類似的錯誤也發生在整數轉到浮點數的時候，例如

```
int a=2, b=3;
float f = b/a;
```

有些人這樣寫期待 f 會得到 1.5 的結果，事實不然，因為在將值存到 f 之前，b/a 是兩個整數相除，所以答案是 1，存到 f 時轉成浮點數，但捨去的小數部分就像是到了殯儀館才叫醫生，來不及了。

再提醒一次，Overflow 是很多人不小心容易犯的錯，而且很難除錯。這裡也提供一些除錯時的技巧，找出問題與印出某些資訊是除錯最主要的步驟，下面兩個指令有時可以派上用場

assert(判斷式); // 若判斷式不成立，則中斷程式，並且告知停在此處
fprintf(stderr,"…", xxx);//用法跟 printf 一樣，輸出至 stderr

有些 overflow 的錯誤可以藉著偵測是否變成負值找出來，我們在重要的地方下 assert(b>=0);可以偵測 b 是否因為溢位變成負值。

浮點數的 rounding error

跟整數一樣，浮點數在電腦中也有它能表示的範圍以及精準度。如果把下面這段程式打進電腦執行一下，結果或許會讓你驚奇。

```
#include <cstdio>
int main() {
    printf("%.20f\n", 0.3);
    double a=0.3, b=0.1+0.2;
    printf("%.20f %.20f\n", a, b);
    return 0;
}
```

浮點數儲存時會產生捨位誤差(rounding error)，其原因除了儲存空間有限之外，二進制的世界與十進制一樣也存在著無限循環小數。事實上，0.3 在二進制之下就是個無限循環小數，因此不可能準確的儲存。

因為浮點數存在捨位誤差，不同的計算順序也可能導致不同的誤差，數學上的恆等式並不完全適用在浮點數的程式裡面。所以，一般解題程式的考試與競賽常常避免出浮點數的題目，因為在裁判系統上會比較麻煩，但有時還是可以看到浮點數的程式題目。無論如何，不管是否是競賽程式或是撰寫一般的軟體，在處理浮點數時，都必須對捨位誤差有所認識。一個必須知道的知識就是，浮點數基本上不應該使用==來判斷兩數是否相等，而應該以相減的絕對值是否小於某個允許誤差來判斷是否相等。

判斷式的 short-circuit evaluation

下面是一個很簡單常見的程式片段，這段程式想要在一個陣列中找尋是否有個元素等於 x，我們在判斷式中除了 a[i]!=x 之外，也寫了陣列範圍的終止條件 i<5，但事實上這個程式是錯的，有的時候沒事，在某些環境下有的時候會導致執行錯誤，原因是條件式內的兩個條件順序寫反了！

```
#include <cstdio>
int main() {
    int a[5]={1,2,3,4,5}, i=0, x=6;
    while (a[i]!=x && i<5)
        i++;
    printf("%d\n", i);
    return 0;
}
```

正確的寫法是

```
while (i<5 && a[i]!=x)
```

這是唬弄人吧？誰不知道在邏輯上(A && B)與(B && A)是等價的呢？在程式的世界裡真的不一樣。當程式執行到一個判斷式的時候，它必須計算此判斷式的真偽，對於(A && B)這樣由兩個條件以「&&」結合的判斷式，會先計算第一個 A，如果 A 為真，再計算 B 是否為真；如果 A 為假，已知整個判斷式必然是假，所以並不會去計算 B。以上面的例子來說，當 i 是 5 的時候，對於(i<5 && a[i]!=x)，會先計算 i<5，如發現不成立就不會去計算 a[i]!=x。但如果像程式裡面反過來寫，就會先計算 a[i]!=x，因為 i=5，就發生陣列超出範圍的問題。

對於布林運算式，只有在第一個條件不足以判斷整個的真偽時，才會去計算第二個。這樣的設計稱為 short-circuit evaluation。同樣的情形發生在(A || B)的狀況，若 A 為 true，就不會再計算 B 了。

除了對陣列超過範圍的保護，這樣的設計也用來避免發生計算錯誤，例如我們要檢查兩數 a/b 是否大於 x，若無法確保 b 是否可能為 0，我們就應該寫成

```
if (b!=0 && a/b>x)
```

這樣才能保護不會發生除 0 的錯誤。

編譯器優化

所謂編譯器優化是指，當編譯器編譯我們的程式成為執行檔的時候，會幫助將程式變得速度更快或是檔案變得更小。C/C++的優化有不同層級，目前多數考試與比賽規定的環境是第二級優化(-O2)。編譯器優化的原則是不會變動原來程式的行為，只會提升效率。如果我們的程式本來就寫得很好，那優化不會做太多事，但是如果本來的程式寫得很爛，

它可能幫你做了很多事。利用編譯器優化偷懶也不是不可以，但是至少寫程式的人自己應該知道，否則一直有壞的習慣而不自知，碰到沒有優化或者優化不能幫忙的情況，就慘了。來看一個例子：

```
for (int i=1;i<strlen(s);i++) {
    if (s[i]=='t') cnt++;
}
printf("%d\n",cnt);
```

這個程式片段計算字串 s 中有多少't'，是很常見的片段也是經常見到的寫法。事實上這是很不好的寫法，因為依照 C 的 for 迴圈的行為，第一次進入迴圈以及每次迴圈到底要再次進入前，都會去檢查迴圈進入條件是否成立。也就是說，如果這麼寫的話，strlen(s)這個呼叫函數計算字串長度的動作會被執行 O(n)次，其中 n 是字串長度，因為計算一次 strlen(s)就是 O(n)，所以這個程式片段的時間是 $O(n^2)$！那麼為什麼很多人都這麼寫呢？如果字串很短的時候，浪費一點點時間是不被察覺的，另外一個原因是開了編譯器優化，在此狀況下，編譯器的優話功能會發現字串長度在迴圈中沒有被改變的可能，因此 strlen(s)的動作被移到迴圈之外，所以執行檔中 strlen(s)只有被執行一次，效率因此大幅提高。以下是正確的寫法：

```
for (int i=1, len=strlen(s); i<len; i++) {
    if (s[i]=='t') cnt++;
}
printf("%d\n",cnt);
```

如果有人覺得反正編譯器會優化，不懂也沒關係，有一天寫出下面這樣的程式可能就慘了。因為迴圈內有動到字串中的值，可能影響 strlen(s)，因此編譯器不會幫你優化。

```
for (int i=1; i<strlen(s); i++) {
    if (s[i]=='t') {
        cnt++;
        s[i]=ch;
    }
}
printf("%d\n",cnt);
```

最後我們在看一個優化的例子，請看下面的程式，猜猜看這個程式要跑多久。這個程式有個 10 萬的整數陣列，有個 i-迴圈計算有幾個 6，迴圈內還有個 jk 雙迴圈計算某個叫 foo 的東西，依照複雜度計算這是 $O(n^3)$，所以要指令數量是 10^{15}，大概要跑很久吧。

```
#include <bits/stdc++.h>
#define N 100010
int main() {
```

```
    int a[N], i, j, k, n=100000;
    for (i=0; i<n; i++) a[i]=rand()%100;
    int cnt=0, foo=0;
    for (i=0; i<n; i++) {
        if (a[i]==6) cnt++;
        for (j=0;j<n;j++)
            for (k=0;k<n;k++)
                if (a[j]+a[k]<a[i])
                    foo++;
    }
    printf("%d\n", cnt);
    return 0;
}
```

如果編譯器開了優化，這個程式瞬間就跑完了；如果不開優化，那可真是跑很久。原因何在？如果你稍微修改程式，在結束前輸出 foo，那麼即使加了優化，也要跑很久。真相逐漸浮現，因為編譯器優化時發現，那個 jk 雙迴圈中計算的 foo 在之後並沒有被用到(jk 的值變化也沒有影像到後面)，所以編譯器把那個雙迴圈整個當作垃圾給丟掉了，在執行檔中根本沒有這段程式碼。

再次強調，利用優化來偷懶不是不行，但要知其所以然，知道何時不可偷懶，也知道正確的寫法。

1. 遞迴

「遞迴是大事化小，要記得小事化無。」

「暴力或許可以解決一切，但是可能必須等到地球毀滅。」

「遞迴搜尋如同末日世界，心中有樹而程式(城市)中無樹。」

本章介紹遞迴函數的基本方法與運用，也介紹使用窮舉暴搜的方法。

1.1. 基本觀念與用法

遞迴在數學上是函數直接或間接以自己定義自己，在程式上則是函數直接或間接呼叫自己。遞迴是一個非常重要的程式結構，在演算法上扮演重要的角色，許多的算法策略都是以遞迴為基礎出發的，例如分治與動態規劃。學習遞迴是一件重要的事，不過遞迴的思考方式與一般的不同，它不是直接的給予答案，而是間接的說明答案與答案的關係，不少程式的學習者對遞迴感到困難。以簡單的階乘為例，如果採直接的定義：

> 對正整數 n，fac(n)定義為所有不大於 n 的正整數的乘積，也就是
> fac(n) = 1 × 2 × 3 × … × n。

如果採遞迴的定義，則是：

> fac(1) = 1; and
> fac(n) = n × fac(n-1) for n>1。

若以 n=3 為例，直接的定義告訴你如何計算 fac(3)，而遞迴的定義並不直接告訴你 fac(3)是多少，而是
fac(3) = 3 × fac(2)，而
fac(2) = 2 × fac(1)，最後才知道
fac(1) = 1。

所以要得到 fac(3)的值，我們再逐步迭代回去，
fac(2) = 2 × fac(1) = 2 × 1 = 2，
fac(3) = 3 × fac(2) = 3 × 2 = 6。

現在大多數的程式語言都支援遞迴函數的寫法，而函數呼叫與轉移的過程，正如上面逐步推導的過程一樣，雖然過程有點複雜，但不是寫程式的人的事，以程式來撰寫遞迴函數幾乎就跟定義一模一樣。上面的階乘函數以程式來實作可以寫成：

```
int fac(int n) {
    if (n == 1) return 1;
    return n * fac(n-1);
}
```

再舉一個很有名的費式數列(Fibonacci)來作為例子。費式數列的定義：

F(1) = F(2) = 1;

F(n) = F(n-1) + F(n-2) for n>2.

以程式來實作可以寫成：

```
int f(int n) {
    if (n <= 2) return 1;
    return f(n-1) + f(n-2);
}
```

遞迴函數一定會有終端條件(也稱邊界條件)，例如上面費式數列的 F(1) = F(2) = 1 以及階乘的 fac(1) = 1，通常的寫法都是先寫終端條件。遞迴程式與其數學定義非常相似，通常只要把數學符號換成適當的指令就可以了。上面的兩個例子中，程式裡面就只有一個簡單的計算，有時候也會帶有迴圈，例如 Catalan number 的遞迴式定義：

$$C_0 = 1 \text{ and } C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \times C_{n-1-i} \quad \text{for } n \geq 1.$$

程式如下：

```
int cat(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    int sum = 0;
    for (int i = 0; i<n; i++)
        sum += cat(i) * cat(n-1-i);
    return sum;
}
```

遞迴程式雖然好寫，但往往有效率不佳的問題，通常遞迴函數裡面只呼叫一次自己的效率比較不會有問題，但如果像 Fibonacci 與 Catalan number，一個呼叫兩個或是更多個，其複雜度通常都是指數成長，演算法裡面有些策略是來改善純遞迴的效率，例如動態規劃，這在以後的章節中再說明。

遞迴通常使用的時機有兩類：

- 根據定義來實作。
- 為了計算答案，以遞迴來進行窮舉暴搜。

以下我們分別來舉一些例題與習題。

1.2. 實作遞迴定義

例題 P-1-1. 合成函數(1)

令 f(x)=2x-1, g(x,y)=x+2y-3。本題要計算一個合成函數的值，例如 f(g(f(1),3))=f(g(1,3))=f(4)=7。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入一行，長度不超過 1000，它是一個 f 與 g 的合成函數，但所有的括弧與逗號都換成空白。輸入的整數絕對值皆不超過 1000。

輸出：輸出函數值。最後答案與運算過程不會超過正負 10 億的區間。

範例輸入：

```
f g f 1 3
```

範例輸出：

```
7
```

題解：合成函數的意思是它的傳入參數可能是個數字也可能是另外一個函數值。以遞迴的觀念來思考，我們可以將一個合成函數的表示式定義為一個函式 eval()，這個函式從輸入讀取字串，回傳函數值。其流程只有兩個主要步驟，第一步是讀取一個字串，根據題目定義，這個字串只有 3 種情形：f, g 或是一個數字。第二步是根據這個字串分別去進行 f 或 g 函數值的計算或是直接回傳字串代表的數字。至於如何計算 f 與 g 的函數值呢？如果是 f，因為它有一個傳入參數，這個參數也是個合成函數，所以我們遞迴呼叫 eval()來取得此參數值，再根據定義計算。如果是 g，就要呼叫 eval()兩次取得兩個參數。 以下是演算法流程：

```
int eval() // 一個遞迴函式，回傳表示式的值
    讀入一個空白間隔的字串 token;
    if token 是 f then
```

```
        x = eval();
        return 2*x - 1;
    else if token 是 g then
        x = eval();
        y = eval();
        return x + 2*y - 3;
    else // token 是一個數字字串
        return token 代表的數字
end of eval()
```

程式實作時，每次我們用字串的輸入來取得下一個字串，而字串可能需要轉成數字，這可以用庫存函數 atoi() 來做。

```
// p 1.1a
#include <bits/stdc++.h>
int eval(){
    int val, x, y, z;
    char token[7];
    scanf("%s", token);
    if (token[0] == 'f') {
        x = eval();
        return 2*x - 1;
    } else if (token[0] == 'g') {
        x = eval();
        y = eval();
        return x + 2*y -3;
    } else {
        return atoi(token);
    }
}

int main() {
    printf("%d\n", eval());
    return 0;
}
```

atoi() 是一個常用的函數，可以把字串轉成對應的整數，名字的由來是 ascii-to-int。當然也有其它的方式來轉換，這一題甚至可以只用 scanf() 就可以，這要利用 scanf() 的回傳值。我們可以將 eval() 改寫如下，請看程式中的註解。

```
// p_1_1b
int eval(){
    int val, x, y, z;
    char c;
    // first try to read an int, if successful, return the int
    if (scanf("%d",&val) == 1) {
        return val;
    }
    // otherwise, it is a function name: f or g
    scanf("%c", &c);
    if (c == 'f') {
```

```
        x = eval(); // f has one variable
        return 2*x-1;
    } else if (c == 'g') {
        x = eval(); // g has two variables
        y = eval();
        return x + 2*y -3;
    }
}
```

下面是個類似的習題。

習題 Q-1-2. 合成函數(2) (APCS201902)

令 f(x)=2x-3；g(x,y)=2x+y-7；h(x,y,z)=3x-2y+z。本題要計算一個合成函數的值，例如 h(f(5),g(3,4),3)=h(7,3,3)=18。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入一行，長度不超過 1000，它是一個 f, g, 與 h 的合成函數，但所有的括弧與逗號都換成空白。輸入的整數絕對值皆不超過 1000。

輸出：輸出函數值。最後答案與運算過程不會超過正負 10 億的區間。

範例輸入：

```
h f 5 g 3 4 3
```

範例輸出：

```
18
```

每個例題與習題都若干筆測資在檔案內，請自行練習。再看下一個例題。

例題 P-1-3. 棍子中點切割

有一台切割棍子的機器，每次將一段棍子會送入此台機器時，機器會偵測棍子上標示的可切割點，然後計算出最接近中點的切割點，並於此切割點將棍子切割成兩段，切割後的每一段棍子都會被繼續送入機器進行切割，直到每一段棍子都沒有切割點為止。請注意，如果最接近中點的切割點有二，則會選擇座標較小的切割點。每一段棍子的切割成本是該段棍子的長度，輸入一根長度 L 的棍子上面 N 個切割點位置的座標，請計算出切割總成本。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行有兩個正整數 N 與 L。第二行有 N 個正整數，依序代表由小到大的切割點座標 p[1]~p[N]，數字間以空白隔開，座標的標示的方式是以棍子左端為 0，而右端為 L。N ≤ 5e4，L< 1e9。

輸出：切割總成本點。

範例輸入：

```
4 10
1 2 4 6
```

範例輸出：

```
22
```

範例說明：第一次會切割在座標 4 的位置，切成兩段 [0, 4], [4, 10]，成本 10；

[0, 4] 切成 [0, 2] 與 [2, 4]，成本 4；

[4, 10] 切成 [4, 6] 與 [6, 10]，成本 6；

[0, 2] 切成 [0, 1] 與 [1, 2]；成本 2；

總成本 10+4+6+2 = 22

P-1-3 題解：棍子切斷後，要針對切開的兩段重複做切割的動作，所以是遞迴的題型。因為切點的座標值並不會改變，我們可以將座標的陣列放在全域變數中，遞迴函數需要傳入的是本次切割的左右端點。因為總成本可能大過一個 int 可以存的範圍，我們以 long long 型態來宣告變數，函數的架構很簡單：

```
// 座標存於 p[]
// 遞迴函式，回傳此段的總成本
long long cut(int left, int right) {
    找出離中點最近的切割點 m;
    return p[right]-p[left] + cut(left,m) + cut(m,right);
}
```

至於如何找到某一段的中點呢？離兩端等距的點座標應該是

```
x = (p[right] + p[left])/2
```

所以我們要找某個 m，滿足 p[m-1] < x <= p[m]，然後要找的切割點就是 m-1 或 m，看這兩點哪一點離中點較近，如相等就取 m-1。這一題因為數值的範圍所限，採取最簡單的線性搜尋即可，但二分搜是更快的方法，因為座標是遞增的。以下看實作，先

看以線性搜尋的範例程式。

```
 // p_1_3a, linear search middle-point
#include <cstdio>
#define N 50010
typedef long long LL;
LL p[N];

// find the cut in (left,right), and then recursively
LL cut(int left, int right) {
    if (right-left<=1) return 0;
    LL len=p[right]-p[left], k=(p[right]+p[left])/2;
    int m=left;
    while (p[m]<k) m++; // linear search the first >=k
    if (p[m-1]-p[left] >= p[right]-p[m]) // check if m-1 is better
        m--;
    return len + cut(left, m) + cut(m, right);
}

int main() {
    int i, n, l;
    scanf("%d%d", &n, &l);
    p[0]=0; p[n+1]=l; // left and right ends
    for (i=1; i<=n; i++) scanf("%lld", &p[i]);
    printf("%lld\n",cut(0, n+1));
    return 0;
}
```

主程式中我們只需做輸入的動作，我們把頭尾加上左右端的座標，然後直接呼叫遞迴函數取得答案。如果採用二分搜來找中點，我們可以自己寫，也可以呼叫 C++ STL 的庫存函數。二分搜的寫法通常有兩種：一種(比較常見的)是維護搜尋範圍的左右端，每次以中點來進行比較，縮減一半的範圍。在陣列中以二分搜搜尋某個元素的話，這種方法是不會有甚麼問題，但是二分搜應用的範圍其實很廣，在某些場合這個方法很容易不小心寫錯。這裡推薦另外一種二分搜的寫法，它的寫法很直覺也不容易寫錯。

```
// 跳躍法二分搜
// 假設遞增值存於 p[]，在 p[s]~p[t]找到最後一個 < x 的位置
k = s; // k 存目前位置, jump 是每次要往前跳的距離，逐步所減
for (jump = (t - s)/2; jump>0; jump /= 2) {
    while (k+jump<t && p[k+jump]<x) // 還能往前跳就跳
        k += jump;
}
```

唯一要提醒的有兩點：第一是要先確認 p[s]<x，否則最後的結果 m=s 而 p[m]>=x；第二是內迴圈要用 while 而不能只用 if，因為事實上內迴圈做多會做兩次。

我們來看看應用在這題時的寫法，以下只顯示副程式，其他部分沒變就省略了。

```
LL cut(int left, int right) {
    if (right-left<=1) return 0;
    int m=left;
    LL k=(p[right]+p[left])/2;
    for (int jump=(right-left)/2;jump>0; jump>>=1) {
        while (m+jump<right && p[m+jump]<k)
            m+=jump;
    }
    if (p[m]-p[left] < p[right]-p[m+1])
        m++;
    return p[right]-p[left] + cut(left, m) + cut(m, right);
}
```

我們也可以呼叫 C++ STL 中的函數來做二分搜。以下程式是一個範例。
呼叫 lower_bound(s,t,x) 會在[s,t)的區間內找到第一個>= x 的位置，回傳的是位置，所以把它減去起始位置就是得到索引值。

```
// 偷懶的方法，加以下這兩行就可以使用 STL 中的資料結構與演算法函數
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 50010
typedef long long LL;
LL p[N];

// find the cut in (left,right), and then recursively
LL cut(int left, int right) {
    if (right-left<=1) return 0;
    LL k=(p[right]+p[left])/2;

    int m=lower_bound(p+left, p+right,k)-p;
    if (p[m-1]-p[left] >= p[right]-p[m])
        m--;
    return p[right]-p[left] + cut(left, m) + cut(m, right);
}
```

有關二分搜在下一章裡面會有更多的說明與應用。

習題 Q-1-4. 支點切割 (APCS201802) (@@)

輸入一個大小為 N 的一維整數陣列 p[]，要找其中一個所謂的最佳切點將陣列切成左右兩塊，然後針對左右兩個子陣列繼續切割，切割的終止條件有兩個：子陣列範圍小於 3 或切到給定的層級 K 就不再切割。而所謂最佳切點的要求是讓左右各點數字與到切點距離的乘積總和差異盡可能的小，也就是說，若區段的範圍是[s,t]，則要

找出切點 m，使得 | $\sum_{i=s}^{t} p[i] \times (i-m)$ | 越小越好，如果有兩個最佳切點，則選擇編號較小的。所謂切割層級的限制，第一次切以第一層計算

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行有兩個正整數 N 與 K。第二行有 N 個正整數，代表陣列內容 p[1] ~ p[N]，數字間以空白隔開，總和不超過 10^9。N ≤ 50000，切割層級限制 K<30。

輸出：所有切點的 p[ ]值總和。

範例一輸入： 7 3 2 4 1 3 7 6 9	範例一輸出： 11
範例二輸入： 5 1 1 2 3 4 5	範例二輸出： 4

範例一說明：第一層切在 7，切成第二層的[2,4,1,3]與[6,9]。左邊[2,4,1,3]切在 4 與 1 都是最佳，選擇 4 來切，切成[2]與[1,3]，右邊[6,9]不到 3 個就不切了。第三層都不到 3 個，所以終止。總計切兩個位置 7+4=11。

範例二說明：第一層切在 4，切出[1,2,3]與[5]，因為 K=1，所以不再切。

提示：與 P_1_3 類似，只是找切割點的定義不同，終端條件多了一個切割層級。

習題 Q-1-5. 二維黑白影像編碼 (APCS201810)

假設 n 是 2 的冪次，也就是存在某個非負整數 k 使得 $n = 2^k$。將一個 n*n 的黑白影像以下列遞迴方式編碼：
如果每一格像素都是白色，我們用 0 來表示；
如果每一格像素都是黑色，我們用 1 來表示；
否則，並非每一格像素都同色，先將影像**均等劃分**為四個邊長為 n/2 的小正方形後，然後表示如下：先寫下 2，之後依續接上左上、右上、左下、右下四塊的編碼。

輸入編碼字串 S 以及影像尺寸 n，請計算原始影像中有多少個像素是 1。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是影像的編碼 S，字串長度小於 1,100,000。第二行為正整數 n，$1 \le n \le 1024$，中 n 必為 2 的冪次。

輸出格式：輸出有多少個像素是 1。

範例輸入：

```
2020020100010
8
```

範例輸出：

```
17
```

1.3. 以遞迴窮舉暴搜

窮舉(Enumeration)與暴搜(Brute Force)是一種透過嘗試所有可能來搜尋答案的演算法策略。通常它的效率很差，但是在有些場合也是沒有辦法中的辦法。暴搜通常是窮舉某種組合結構，例如：n 取 2 的組合，所有子集合，或是所有排列等等。因為暴搜也有效率的差異，所以還是有值得學習之處。通常以迴圈窮舉的效率不如以遞迴方式來做，遞迴的暴搜方式如同以樹狀圖來展開所有組合，所以也稱為分枝演算法或 Tree searching algorithm，這類演算法可以另外加上一些技巧來減少執行時間，不過這個部份比較困能，這裡不談。

以下舉一些例子，先看一個迴圈窮舉的例題，本題用來說明，未附測資。

例題 P-1-6. 最接近的區間和

假設陣列 A[1..n]中存放著某些整數，另外給了一個整數 K，請計算哪一個連續區段的和最接近 K 而不超過 K。

(這個問題有更有效率的解，在此我們先說明窮舉的解法。)

要尋找的是一個連續區段，一個連續區段可以用一對駐標[i,j]來定義，因此我們可以窮舉所有的 1<=i<=j<=n。剩下的問題是對於任一區段[i,j]，如何計算 A[i..j]區間的和。最直接的做法是另外用一個迴圈來計算，這導致以下的程式：

```
// O(n^3) for range-sum
int best = K; // solution for empty range
```

```
for (int i=1; i<=n; i++) {
    for (int j=i; j<=n; j++) {
        int sum=0;
        for (int r=i; r<=j; r++)
            sum += A[r];
        if (sum<=K && K-sum<best)
            best = K-sum;
    }
}
printf("%d\n", best);
```

上述程式的複雜度是 O(n³)。如果我們認真想一下，會發現事實上這個程式可以改進的。對於固定的左端 i，若我們已經算出[i,j]區間的和，那麼要計算[i,j+1]的區間和只需要再加上 A[j+1]就可以了，而不需要整段重算。於是我們可以得到以下 O(n²)的程式：

```
// O(n^2) for range-sum
int best = K; // solution for empty range
for (int i=1; i<=n; i++) {
    int sum=0;
    for (int j=i; j<=n; j++) {
        sum += A[j]; // sum of A[i] ~ A[j]
        if (sum<=K && K-sum<best)
            best = K-sum;
    }
}
printf("%d\n", best);
```

另外一種 O(n²)的程式解法是利用前綴和(prefix sum)，前綴和是指：對每一項 i，從最前面一直加到第 i 項的和，也就是定義 $\text{ps[i]} = \sum_{j=1}^{i} A[j]$，前綴和有許多應用，基本上，我們可以把它看成一個前處理，例如，如果已經算好所有的前綴和，那麼，對任意區間[i,j]，我們只需要一個減法就可以計算出此區間的和，因為

$\sum_{r=i}^{j} A[j] = \text{ps[j]} - ps[i-1]$。

此外，我們只需要 O(n)的運算就可以計算出所有的前綴和，因為 ps[i]=ps[i-1]+A[i]。以下是利用 prefix-sum 的寫法，為了方便，我們設 ps[0] = 0。

```
// O(n^2) for range-sum, using prefix sum
ps[0]=0;
for (int i=1; i<=n; i++)
    ps[i]=ps[i-1]+A[i];
int best = K; // solution for empty range
for (int i=1; i<=n; i++) {
    for (int j=i; j<=n; j++) {
        int sum = ps[j] - ps[i-1];
        if (sum<=K && K-sum<best)
```

```
            best = K-sum;
    }
}
printf("%d\n", best);
```

接下來看一個暴搜子集合的例題。

例題 P-1-7. 子集合乘積

輸入 n 個正整數，請計算其中有多少組合的相乘積除以 P 的餘數為 1，每個數字可以選取或不選取但不可重複選，輸入的數字可能重複。P=10009，0<n<26。

輸入第一行是 n，第二行是 n 個以空白間隔的正整數。

輸出有多少種組合。若輸入為{1, 1, 2}，則有三種組合，選第一個 1，選第 2 個 1，以及選兩個 1。

time limit = 1 sec。

我們以窮舉所有的子集合的方式來找答案，這裡的集合是指 multi-set，也就是允許相同元素，這只是題目描述上的問題，對解法沒有影響。要窮舉子集合有兩個方法：迴圈窮舉以及遞迴，遞迴會比較好寫也較有效率。先介紹迴圈窮舉的方法。

因為通常元素個數很有限，我們可以用一個整數來表達一個集合的子集合：第 i 個 bit 是 1 或 0 代表第 i 個元素在或不在此子集合中。看以下的範例程式：

```
// subset product = 1 mod P, using loop
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    int n, ans=0;
    long long P=10009, A[26];
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++) scanf("%lld", &A[i]);
    for (int s=1; s< (1<<n); s++) { // for each subset s
        long long prod=1;
        for (int j=0;j<n;j++) { // check j-th bit
            if (s & (1<<j)) // if j-th bit is 1
                prod = (prod*A[j])%P; // remember %
        }
        if (prod==1) ans++;
    }
    printf("%d\n", ans);
}
```

以下是遞迴的寫法。為了簡短方便，我們把變數都放在全域變數。遞迴副程式 rec(i, prod)之參數的意義是指目前考慮第 i 個元素是否選取納入子集合，而 prod 是目前已納入子集合元素的乘積。

遞迴的寫法時間複雜度是 O(2^n) 而迴圈的寫法時間複雜度是 O(n*2^n)。

```
// subset product = 1 mod P, using recursion
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int n, ans=0;
long long P=10009, A[26];
// for i-th element, current product=prod
void rec(int i, int prod) {
    if (i>=n) { // terminal condition
        if (prod==1) ans++;
        return;
    }
    rec(i+1, (prod*A[i])%P); // select A[i]
    rec(i+1, prod); // discard A[i]
    return;
}

int main() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++) scanf("%lld", &A[i]);
    ans=0;
    rec(0,1);
    printf("%d\n", ans-1); // -1 for empty subset
    return 0;
}
```

習題 Q-1-8. 子集合的和 (APCS201810, subtask)

輸入 n 個正整數，請計算各種組合中，其和最接近 P 但不超過 P 的和是多少。每個元素可以選取或不選取但不可重複選，輸入的數字可能重複。P<=1000000009，0 < n < 26。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 n 與 P，第二行 n 個整數是 A[i]，同行數字以空白間隔。

輸出格式：最接近 P 但不超過 P 的和。

範例輸入：

```
5 17
5 5 8 3 10
```

範例輸出：

16

接著舉一個窮舉排列的例子。西洋棋的棋盤是一個 8*8 的方格，其中皇后的攻擊方式是皇后所在位置的八方位不限距離，也就是只要是在同行、同列或同對角線(包含 45 度與 135 度兩條對斜線)，都可以攻擊。一個有名的八皇后問題是問說：在西洋棋盤上有多少種擺放方式可以擺上 8 個皇后使得彼此之間都不會被攻擊到。這個問題可以延伸到不一定限於是 8*8 的棋盤，而是 N*N 的棋盤上擺放 N 個皇后。八皇后問題有兩個版本，這裡假設不可以旋轉棋盤。

例題 P-1-9. N-Queen 解的個數

計算 N-Queen 有幾組不同的解，對所有 0 < N < 15。

(本題無須測資)

要擺上 N 個皇后，那麼顯然每一列恰有一個皇后，不可以多也不可以少。所以每一組解需要表示每一列的皇后放置在哪一行，也就是說，我們可以以一個陣列 p[N]來表示一組解。因為兩個皇后不可能在同一行，所以 p[N]必然是一個 0~N-1 的排列。我們可以嘗試所有可能的排列，對每一個排列來檢查是否有任兩個皇后在同一斜線上(同行同列不需要檢查了)。

要產生所有排列通常是以字典順序(lexicographic order)的方式依序產生下一個排列，這裡我們不講這個方法，而介紹使用庫存函數 next_permutation()，它的作用是找到目前排列在字典順序的下一個排列，用法是傳入目前排列所在的陣列位置[s,t)，留意 C++庫存函數中區間的表示方式幾乎都是左閉右開區間。回傳值是一個 bool，當找不到下一個的時候回傳 false，否則回傳 true。下面是迴圈窮舉的範例程式，其中檢查是否在同一條對角線可以很簡單的檢查 「abs(p[i]-p[j]) == j-i」。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

int nq(int n) {
    int p[14], total=0;
    for (int i=0;i<n;i++) p[i]=i; //first permutation
    do {
        // check valid
        bool valid=true;
        for (int i=0; i<n; i++) for (int j=i+1;j<n;j++)
            if (abs(p[i]-p[j])==j-i) { // one the same diagonal
```

```
                valid=false;
                break;
            }
        if (valid) total++;
    } while (next_permutation(p, p+n)); // until no-next
    return total;
}

int main() {
    for (int i=1;i<15;i++)
        printf("%d ",nq(i));
    return 0;

}
```

接著看遞迴的寫法，每呼叫一次遞迴，我們檢查這一列的每個位置是否可以放置皇后而不被之前所放置的皇后攻擊。對於每一個可以放的位置，我們就嘗試放下並往下一層遞迴呼叫，如果最後放到第 n 列就表示全部 n 列都放置成功。

```
// number of n-queens, recursion
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

// k is current row, p[] are column indexes of previous rows
int nqr(int n, int k, int p[]) {
    if (k>=n) return 1; // no more rows, successful
    int total=0;
    for (int i=0;i<n;i++) { // try each column
        // check valid
        bool valid=true;
        for (int j=0;j<k;j++)
            if (p[j]==i || abs(i-p[j])==k-j) {
                valid=false;
                break;
            }
        if (!valid) continue;
        p[k]=i;
        total+=nqr(n,k+1,p);
    }
    return total;
}

int main() {
    int p[15];
    for (int i=1;i<15;i++)
        printf("%d ",nqr(i,0,p));
    return 0;

}
```

副程式中我們對每一個可能的位置 i 都以一個 j-迴圈檢查該位置是否被 (j,p[j]) 攻擊，這似乎有點缺乏效率。我們可以對每一個 (j,p[j]) 標記它在此列可以攻擊的位置，這樣就更有效率了。以下是這樣修改後的程式碼，這個程式大約比前一個快了一

倍，比迴圈窮舉的方法則快了百倍。以迴圈窮舉的方法複雜度是 O(n²×n!)，而遞迴的方法不會超過 O(n×n!)，而且實際上比 O(n×n!)快很多，因為你可以看得到，在遞迴過程中，被已放置皇后攻擊的位置都被略去了，所以實際上並未嘗試所有排列。這種情況下我們知道他的複雜度上限，但真正準確的複雜度往往難以分析，如果以實際程式來量測，n=10 時，n!=39,916,800，但遞迴被呼叫的次數只有 16,6926 次，差了非常多。

```
// number of n-queens, recursion, better
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

// k is current row, p[] are column indexes of previous rows
int nqr(int n, int k, int p[]) {
    if (k>=n) return 1; // no more rows, successful
    int total=0;
    bool valid[n];
    for (int i=0;i<n;i++) valid[i]=true;
    // mark positions attacked by (j,p[j])
    for (int j=0; j<k; j++) {
        valid[p[j]]=false;
        int i=k-j+p[j];
        if (i<n) valid[i]=false;
        i=p[j]-(k-j);
        if (i>=0) valid[i]=false;
    }
    for (int i=0;i<n;i++) { // try each column
        if (valid[i]) {
            p[k]=i;
            total+=nqr(n,k+1,p);
        }
    }
    return total;
}

int main() {
    int p[15];
    for (int i=1;i<12;i++)
        printf("%d ",nqr(i,0,p));
    return 0;

}
```

以下是一個類似的習題。

習題 Q-1-10. 最多得分的皇后

在一個 n*n 的方格棋盤上每一個格子都有一個正整數的得分，如果將一個皇后放在某格子上就可以得到該格子的分數，請問在放置的皇后不可以互相攻擊的條件下，最

多可以得到幾分，皇后的個數不限制。0 < n < 14。每格得分數不超過 100。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 n，接下來 n 行是格子分數，由上而下，由左而右，同行數字以空白間隔。

輸出格式：最大得分。

範例輸入：

```
3
1 4 2
5 3 2
7 8 5
```

範例輸出：

```
11
```

說明：選擇 4 與 7。

(請注意：是否限定恰好 n 個皇后答案不同，但解法類似)

上面幾個例子都可以看到遞迴窮舉通常比迴圈窮舉來得有效率，有些問題迴圈的方法甚至很不好寫，而遞迴要容易得多，以下的習題是一個例子。

習題 Q-1-11. 刪除矩形邊界 – 遞迴 (APCS201910, subtask)

一個矩形的邊界是指它的最上與最下列以及最左與作右行。對於一個元素皆為 0 與 1 的矩陣，每次可以刪除四條邊界的其中之一，要以逐步刪除邊界的方式將整個矩陣全部刪除。刪除一個邊界的成本就是「該邊界上 0 的個數與 1 的個數中較小的」。例如一個邊界如果包含 3 個 0 與 5 個 1，刪除該邊界的成本就是 min{3,5} = 3。

根據定義，只有一列或只有一行的矩陣的刪除成本是 0。不同的刪除順序會導致不同的成本，本題的目標是要找到最小成本的刪除順序。0 < n < 14。每格得分數不超過 100。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是兩個正整數 m 和 n，以下 m 行是矩陣內容，順序是由上而下，由左至右，矩陣內容為 0 或 1，同一行數字中間以一個空白間隔。m + n <=13。

輸出格式：最小刪除成本。

範例輸入：

```
3 5
0 0 0 1 0
1 0 1 1 1
0 0 0 1 0
```

範例輸出：

```
1
```

提示：將目前的矩陣範圍當作遞迴傳入的參數，對四個邊界的每一個，遞迴計算刪除該邊界後子矩陣的成本，對四種情形取最小值，遞迴的終止條件是：如果只有一列或一行則成本為 0。(本題有更有效率的 DP 解法)

2. 排序與二分搜

「完全無序，沒有效率；排序完整，增刪折騰；完美和完整不是同一回事。」
(sorted array vs. balanced tree)

「上窮碧落下黃泉，姐在何處尋不見，人間測得上或下，不入地獄，就是上天；
天上地下千里遠，每次遞迴皆減半，歷經十世終不悔，除非無姐，終能相見。」
(binary search)

本章介紹排序與二分搜的基本用法與應用，同時也介紹其推廣運用，包括快速冪與折半枚舉。從這一章開始，我們會介紹到一些 C++的 container，這些容器都是一些別人已經寫好的資料結構，對於 APCS 這樣程度的考試來說，不使用這些容器也都可以考到五級分，但是使用這些容器往往可以簡化我們的程式，所以我們還是介紹常用的一些使用方式。如果你對程式還不是很熟練覺得學太多新的東西會負擔太大，那麼可以暫時略過你覺得比較複雜的部份。此外，這些容器的完整使用說明其實還蠻複雜的，這份教材中只會介紹簡單與常用的功能，需要更完整的說明，網路上都有技術文件可以參考，只要搜尋 C++就可找到。

2.1. 排序

排序是將一群資料根據某種順序由小到大排列，最常見的順序就是數字的由小到大或是由大到小，當然也可能是字元字串或是其他使用者自訂的順序。排序是非常重要的程序，計算機科學在發展初期就研發了很多種的排序演算法，這些演算法目前依然常常用在教學上當作例子與學習教材。在這裡我們主要介紹它的應用技巧而非排序演算法，對排序演算法有興趣的人可以查網路。

排序通常有幾個運用的時機：

- 需要把相同資料排在一起
- 便於快速搜尋
- 做為其他演算法的執行順序，例如 Sweeping-line, Greedy, DP。

在考試與競賽的場合，最重要的是會使用庫存的排序函數，在 C 是 qsort()，在 C++是 sort()，這些庫存函數都非常的有效率，如果要自己寫出這麼有效率的排序需要花費很多的時間還不一定能寫好。以下我們先介紹它的使用方式與考試競賽的使用技巧，qsort 的使用比較麻煩，我們建議使用 C++的 sort()。

最簡單使用 sort()的方式就是針對一群數字的排序，例如陣列中的整數，傳入的第一個參數代表排序的起始位置，第二個參數是排序範圍結束的**下一個位置**。其使用方式如下面的範例程式所示範，其中我們用了一個 random_shuffle()的函數，它是用來將某個範圍的順序弄亂的。請注意，C++中函數定義區間時，幾乎都是左閉右開區間，例如以上的 sort()與 random_shuffle()：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 10
void show(int a[], int n) {
    for (int i=0;i<n-1;i++)
        printf("%3d ",a[i]);
    printf("%3d\n",a[n-1]);
    return;
}

int main() {
    int a[N], n=10;
    for (int i=0;i<n;i++) a[i]=rand()%100;
    show(a,n);
    printf("Sort entire array\n");
    sort(a, a+n);
    show(a,n);

    printf("Random shuffle\n");
    random_shuffle(a, a+n);
    show(a,n);

    printf("Sort a[3..7]\n");
    sort(a+3, a+8);
    show(a,n);
    return 0;
}
```

如果想要由大排到小，通常有兩個方法：一種是將原來的數字變號(x 變-x)，另外一種方法是自行指定比較函數。事實上 sort()除了前兩個參數指定範圍之外，還可以傳入第三個參數，第三個參數是一個比較函數，這個函數負責告訴 sort()排序的順序是什麼：比較函數必須傳入兩個參數，如果第一個參數要排在第二個的前面就回傳 true，否則回傳 false。這樣聽起來很複雜，看例子比較簡單，我們也一起說明多欄位資料的排序。

先看 cmp1(int s, int t)，它傳入兩個整數，回傳是否 s>t，意思是前面的要比較大。第 36 行 sort(a, a+n, cmp1);會讓資料從大排到小。我們也可以呼叫庫存的比較函數 greater，如第 40 行的寫法，但這個寫法可能不容易記得。為了展示多欄位資料的排序，我們定義了一個結構 struct point 用來存放平面座標，並且展示了三個不同的比較函數讓資料依照不同的要求來排序。

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 10
void show(int a[], int n) {
    for (int i=0;i<n-1;i++)
        printf("%3d ",a[i]);
    printf("%3d\n",a[n-1]);
    return;
}

bool cmp1(int s, int t) {
    return s>t;
}
struct point {
    int x,y;
};
bool cmp2(point &s, point &t) {
    return s.x < t.x;
}
bool cmp3(point &s, point &t) {
    return s.y > t.y;
}
bool cmp4(point &s, point &t) {
    return s.x+s.y < t.x+t.y;
}
void showp(point a[], int n) {
    for (int i=0;i<n-1;i++)
        printf("(%2d, %2d) ",a[i].x, a[i].y);
    printf("(%2d, %2d)\n",a[n-1].x, a[n-1].y);
    return;
}
int main() {
    int a[N], n=10;
    for (int i=0;i<n;i++) a[i]=rand()%100;
    show(a,n);
    printf("from large to small\n");
    sort(a, a+n, cmp1);
    show(a,n);

    printf("Using greater\n");
    sort(a, a+n, greater<int>());
    show(a,n);

    point p[N];
    for (int i=0;i<n;i++)
        p[i].x=rand()%100, p[i].y=rand()%100;
    printf("%d points on the plane\n");
    showp(p,n);

    printf("sorted for x from small to large\n");
    sort(p, p+n, cmp2);
    showp(p,n);
    printf("sorted for y from large to small\n");
    sort(p, p+n, cmp3);
    showp(p,n);
```

```
55     printf("sorted for x+y from small to large\n");
56     sort(p, p+n, cmp4);
57     showp(p,n);
58     return 0;
59 }
```

多欄位資料的排序在很多地方都用得到，初學者應該要花時間了解 struct 與其排序的寫法。我們以下再說明一個偷懶的方法，考試與競賽時常碰到多欄位資料的排序，尤其是兩個欄位，例如平面 XY 座標或是線段左右端點，如果不想寫 struct，有沒有辦法偷懶呢？答案是有的。

C++ STL 中有定義好的 pair 可以用來存兩個欄位的資料，而 pair 的比較運算(<)就是兩個欄位的字典順序(lexicographic order)，也就是先比第一個欄位，如果第一欄位相同再比第二欄位。在應用時，我們只要把要排序的欄位放在第一欄位就可以了。要提醒幾件事：

- pair 的第一欄位叫做 first 而第二欄位叫做 second；
- 建構一個 pair 可很簡單的以用大括號{}，例如 p[i]={5, 3};但如果是比較舊版的 C++可能並不支援這個寫法，如果不支援大括號直接建構的場合，就要用 make_pair()的函數，在網路上看比較舊的程式碼可能會很常看到類似 make_pair(5,3)這樣的寫法。

此外，如果超過兩個欄位呢？事實上也有做法，但這裡並不鼓勵初學者學太多庫存函數來偷懶，而且 struct 與比較函數還是應該要學的。如果有興趣的人可以自己去查詢 C++ tuple。以下看簡單的例子來了解用法。

```
00 #include <bits/stdc++.h>
01 using namespace std;
02 #define N 10
03
04 void showp(pair<int,int> a[], int n) {
05     for (int i=0;i<n-1;i++)
06         printf("(%1d, %1d) ",a[i].first, a[i].second);
07     printf("(%1d, %1d)\n",a[n-1].first, a[n-1].second);
08     return;
09 }
10 int main() {
11     pair<int,int> p[N];
12     int n=10;
13     for (int i=0;i<n;i++)
14         p[i]={rand()%10, rand()%10};
15     showp(p,n);
16
17     printf("sorted by lexicographic order\n");
18     sort(p, p+n);
19     showp(p,n);
```

```
20
21      vector<pair<int,int>> q(p, p+n); // copy p to q
22      for (auto s:q) {
23          printf("(%d,%d) ", s.first, s.second);
24      }
25      printf("\nsorted by greater order\n");
26      sort(q.begin(), q.end(), greater<pair<int,int>>());
27      for (auto s:q) {
28          printf("(%d,%d) ", s.first, s.second);
29      }
30
31      return 0;
32  }
```

第 21 行開始的最後一段我們是展示了如何對 vector 使用 sort()，並且使用 greater 將它從大到小排序。vector 基本上可以看成陣列，只是長度可變，除非在處理樹狀圖與圖形問題上，通常不一定要使用，如果暫時對你太複雜，你都可以用陣列來替換它。

下面的例題是排序的一個應用，常用在某些題目的前置處理，為了方便練習，我們把它寫成題目的樣子。

例題 P-2-1. 不同的數–排序

假設有 N 個整數要被讀到一個陣列中，我們想要將這些數字排序並去除重複的數字，例如輸入的整數序列是 (5, 3, 9, 3, 15, 9, 8, 9)，這些數如從小到大排是 (3, 3, 5, 8, 9, 9, 9, 15)，去除重複者後為(3, 5, 8, 9, 15)。寫一個函數，傳回有多少不同的數字並且將結果放在陣列中回傳。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入兩行，第一行是正整數 N，N 不超過 10 萬，第二行是 N 個整數，大小不超過 10^9，以空白間隔。

輸出： 第一行輸出有多少相異整數，第二行輸出這些相異整數，相鄰數字之間以一個空白間隔。

範例輸入：

```
7
0 3 9 3 3 -1 0
```

範例結果：

```
4
0 -1 3 9
```

請看以下的範例程式。函數 distinct()傳入兩整數陣列：from[]是要傳進來的數字，to[]是擺放結果的陣列，另外 n 是傳入數字的個數。我們不希望破壞原陣列的內容，先將資料複製到另外一個 vector v，並且將 from[]的內容複製到 v。接著將 v 內容排序，排序後相同的數字會在一起，因此除了 v[0]之外，只要是 v[i]!=v[i-1]的 v[i]都是一個相異的數字。請留意我們以變數 num 儲存目前找到相異數的個數，並且 to[num]就是儲存位置，將相異數字複製到 to[num]之後必須將 num 的值增加 1，這兩個動作可以寫成一個指令來完成：

```
to[num++] = v[i];
```

```
// P_2_1 distinct number -- sort
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010

int distinct(int from[], int to[], int n) {
    if (n<1) return 0;
    vector<int> v(from, from+n); // copy from[] to v
    sort(v.begin(), v.end());
    to[0]=v[0];
    int num=1; // number of distinct number
    for (int i=1; i<n; i++)
        if (v[i]!=v[i-1]) // distinct
            to[num++] = v[i];
    return num;
}
int main() {
    int a[N], b[N],n, k;
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d", a+i);
    k=distinct(a,b,n);
    printf("%d\n",k);
    for (int i=0;i<k-1;i++)
        printf("%d ",b[i]);
    printf("%d\n",b[k-1]);
    return 0;
}
```

2.2. 搜尋

在一群資料中搜尋某筆資料，通常有線性搜尋與二分搜尋，線性搜尋就是一個一個找過去，在沒有順序的資料中，也只好如此。如果資料已經依照順序排好，我們可以採用二分搜尋，原因是效率好太多了。以一個 100 萬筆的資料來說，線性搜尋可能需要比對

100 萬次，而二分搜尋的 worst case 複雜度是 O(log(n))，最多只要比較 20 次就可以找到了，也就是有 5 萬倍的效率差異，所以對很多問題是非用不可。二分搜除了自己寫之外，也有庫存函數可以呼叫，此外，C++也有一些好用的資料結構可以達到搜尋的目的，我們在這一節中會介紹以下技巧：

- 基本二分搜的寫法
- C++的二分搜函數以及相關資料結構

此外，二分搜尋不單是在一群資料中找資料，它往往也搭配其他演算法策略使用，這一部份會出現在後續的章節中。

基本二分搜的寫法

最簡單的二分搜是在一個排好序的陣列中尋找某個元素，找到了回傳 index，否則回傳找不到(例如-1)，這樣的二分搜好寫也不容易寫錯，以下是個範例。二分搜的重點在於 left 與 right 兩變數紀錄著搜尋範圍的左右邊界，每次取出中間位置來比較，結果是找到了或捨棄左半邊或捨棄右半邊。當 left>right 表示搜尋區間已經沒有了，這時離開迴圈，因為要找的元素不存在。若初始的區間範圍是 n，時間複雜度是 O(log(n))，原因是區間長度每次都減半。

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 10
// binary search x between a[left..right]
int bsearch(int a[], int left, int right, int x) {
    while (left <=right) {
        int mid=(left+right)/2; // middle element
        if (a[mid]==x) return mid;
        if (a[mid]<x) left = mid+1; // search right part
        else right = mid-1; // search left part
    }
    return -1;
}

int main() {
    int p[N];
    int n=10;
    for (int i=0;i<n;i++)
        p[i]=rand()%100;
    sort(p, p+n);
    for (int i=0;i<n;i++) printf("%d ",p[i]);
    printf("\n");

    printf("search %d => return %d\n",p[7], bsearch(p,0,n-1,p[7]));
    int t=rand()%100;
    printf("search %d => return %d\n",t, bsearch(p,0,n-1,t));

    return 0;
```

```
}
```

在很多時候，我們需要知道不只是某元素在不在，當它不在時，希望找到小於它的最大值的位置(或是大於它的最小值)，這看似只要把上述程式簡單修改一下就好了，但事實上很容易寫錯。假設我們需要知道第一個大於等於 x 的位置，我們將前述程式直接修改如下。

```
// find the first >= x between a[left..right]
int bsearch(int a[], int left, int right, int x) {
    while (left <=right) {
        int mid=(left+right)/2; // middle element
        if (a[mid]==x) return mid;
        if (a[mid]<x) left = mid+1; // search right part
        else right = mid-1; // search left part
    }
    return ???; // maybe wrong
}
```

你檢查後可能發現應該要回傳 left 是對的，事實上很多人會弄錯，另外也會不小心寫成無窮迴圈。這個寫法並非一定不好，這裡只是希望提醒讀者這個寫法容易犯錯。比較推薦的寫法在前一章曾經提出過，不是用左右搜的方式，而是用一路往前跳的方式，你想想看，正常人如果反覆的向左向右是不是很容易昏頭，一路往前應該比較不容易搞錯。

請看以下的範例程式，傳入的是搜尋區間的大小 n，在一開始檢查一下 a[0]是否就是所要答案，如果不是，程式中就會一直保持 a[po]<x 這個不變性，在此特性下，只要還能往前跳就往跳，跳的距離每次把它折半。

```
// binary search the first >=x between a[0..n-1]
int jump_search(int a[], int n, int x) {
    if (a[0]>=x) return 0; // check the first
    int po=0; // the current position, always < x
    for (int jump=n/2; jump>0; jump/=2) { //jump distance
        while (po+jump<n && a[po+jump]<x)
            po += jump;
    }
    return po+1;
}
```

時間複雜度也是 O(log(n))，因為跳的距離每次折半，而且內層的 while 迴圈至多執行兩次(不會很難證明)。

C++的二分搜函數以及相關資料結構

C++中提供了許多跟搜尋有關的函數以及資料結構，在考試或比賽中，如果是適合的題目，使用庫存函數可以節省時間也避免錯誤，這裡介紹一些基本的用法。常用的二分搜相關函數有下列三個：

- binary_search()
- lower_bound()
- upper_bound()

其實只要學會使用 lower_bound()，這個函數是用來找到第一個**大於等於**某個值的位置，另外兩個都很像，upper_bound()找到第一個**大於**某值的位置，而 binary_search()是只傳回是否找到。

與 sort()一樣，函數 lower_bound()允許自訂比較函數，當用在基本資料型態且以內定的比較函數時，它的用法最簡單，例如資料是整數且以小於來比較。下面的範例我們示範用於陣列與 vector。基本上，呼叫時以

```
lower_bound(first, last, t);
```

要求在[first, last)的範圍內以二分搜找到第一個大於或等於 t 的值，找到時回傳所在位置，找不到時(t 比最後一個大)，回傳 last。以下有幾點請注意：

- 找到時回傳的是位置，要得到陣列索引值就將它減去陣列起始位置。
- 呼叫 lower_bound()必須確定搜尋範圍是排好序的，如果你針對亂七八糟的資料以 lower_bound()去進行二分搜，只會得到亂七八糟的結果，編譯器是不會告訴你沒排序的。
- 搜尋範圍是傳統的左閉右開區間，也就是不含 last；
- 找不到時回傳 last，通常這個位置是超過陣列的範圍，所以沒確定找到時不可以直接去引用該位置的值。

以下這個範例程式很簡單，可以把它拿來執行一下就可以了解 lower_bound 的基本運用。

```
// demo lower_bound for int array
// binary search the first >=x
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 5

int main() {
    int p[N]={5, 1, 8, 3, 9};
    int n=5;
    sort(p, p+n);
    for (int i=0;i<n;i++) printf("%d ",p[i]);
```

```
    printf("\n");
    for (int i=0;i<5;i++) {
        int t=i*3;
        // search [first=p, last=p+n) to find the first >=t
        int ndx=lower_bound(p, p+n, t) - p;
        if (ndx<n)
            printf("The first >=%d is at [%d]\n",t, ndx);
        else // return the last address if not found
            printf("No one >=%d\n",t);
    }
    // for vector
    vector<int> v(p, p+n); // copy p to vector v
    for (int i=0;i<5;i++) {
        int t=i*3;
        int ndx=lower_bound(v.begin(), v.end(), t) - v.begin();
        if (ndx<n)
            printf("The first >=%d is at [%d]\n",t, ndx);
        else // return v.end() if not found
            printf("No one >=%d\n",t);
    }

    return 0;
}
```

與 sort()一樣，當我們要使用非內定的比較函數或是資料為多欄位結構時，我們就需要自己寫比較函數，同樣地，一個偷懶的方法是使用庫存的結構 pair。以下的範例程式展示結構資料的二分搜以及利用 pair 來存放資料而逃避寫比較函數的方式

```
// demo lower_bound for struct and pair
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 5
struct point {
    int x,y;
};
// compare by only x
bool pcmp(point s, point t) {
    return s.x < t.x;
}
int main() {
    point p[N];
    int n=5;
    for (int i=0;i<n;i++) p[i].x=rand()%10, p[i].y=rand()%10;
    sort(p, p+n, pcmp);
    for (int i=0;i<n;i++) printf("(%d,%d) ",p[i].x, p[i].y);
    printf("\n");
    for (int i=0;i<5;i++) {
        point t={i*3,rand()%10};
        int ndx=lower_bound(p, p+n, t, pcmp) - p;
        if (ndx<n)
            printf("Find >=(%d,%d) at [%d]=(%d,%d)\n", \
                  t.x, t.y, ndx,p[ndx].x, p[ndx].y);
        else
            printf("No one >=(%d,%d)\n",t.x, t.y);
    }
    // for vector
```

```
    vector<point> v(p, p+n);
    for (int i=0;i<5;i++) {
        point t={i*3,rand()%10};
        auto q=lower_bound(v.begin(), v.end(), t, pcmp);
        if (q!=v.end())
            printf("Find >=(%d,%d) at [%d]=(%d,%d)\n", \
                  t.x, t.y, q-v.begin(), q->x, q->y);
        else
            printf("No x>=(%d,%d)\n",t.x, t.y);
    }
    // using pair, default compare function
    printf("Compare by x and then y\n");
    vector<pair<int,int>> a;
    for (point e:v) a.push_back({e.x,e.y});
    for (int i=0;i<5;i++) {
        pair<int,int> t={i*3,rand()%10};
        auto q=lower_bound(a.begin(), a.end(), t);
        if (q!=a.end())
            printf("Find >=(%d,%d) at [%d]=(%d,%d)\n", \
                t.first,t.second, q-a.begin(), q->first, q->second);
        else
            printf("No x>=(%d,%d)\n",t.first, t.second);
    }
    printf("Compare by only x\n");
    for (int i=0;i<5;i++) {
        pair<int,int> t={i*3,rand()%10};
        // set t.second to minimum to ignore comparison of y-value
        auto q=lower_bound(a.begin(), a.end(), make_pair(t.first,-1));
        if (q!=a.end())
            printf("Find >=(%d,%d) at [%d]=(%d,%d)\n", \
                  t.first,t.second, q-a.begin(), q->first, q->second);
        else
            printf("No x>=(%d,%d)\n",t.first, t.second);
    }

    return 0;
}
```

下面一個例題是一個有趣的排序與搜尋練習，也是實際解題時經常需要用的步驟，它有個名字是「離散化」，雖然這個名字似乎不是那麼恰當，但是從以前就這麼多人這樣稱呼它。它需要用到前一個例題 P_2_1 (不同的數) 當作它的步驟。

例題 P-2-2. 離散化 - sort

假設有 N 個整數要被讀到一個陣列中，我們想要將這些整數置換成從 0 開始依序排列的整數並且維持它們原來的大小關係，例如輸入的整數序列是 (5, 3, 9, 3, 15, 9, 8, 9)，這些數如從小到大排是 (3, 3, 5, 8, 9, 9, 9, 15)，去除重複者後為(3, 5, 8, 9, 15)，所以我們要替換的是：

3 ➔ 0

5 ➔ 1

8 ➔ 2

9 ➔ 3

15 ➔ 4

所以原先的序列就會變成(1, 0, 9, 0, 4, 3, 2, 3)。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入兩行，第一行是正整數 N，N 不超過 10 萬，第二行是 N 個整數，大小不超過 10^9，以空白間隔。

輸出：輸出置換後的序列，兩數之間以一個空白間隔。

範例輸入：

```
7
0 3 9 3 3 -1 0
```

範例輸出：

```
1 2 3 2 2 0 1
```

如果已經了解如何處理不同的數字，加上二分搜尋就可以簡單地處理這個問題，請看以下範例。我們先呼叫剛才寫好的函數將陣列中的相異數字排序在 b[]陣列中，然後，對於原陣列 a[]中的每一個數字，將其置換成它在 b[]中的 index 就可以了，而要快速的在 b[]中找到 a[i]，我們用二分搜，自己寫或是呼叫 lower_bound()都可以，因為 a[i]一定在 b[]中，所以我們不需要擔心找不到的情形。

```
// P_2_2 discretization -- sort
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010

int distinct(int from[], int to[], int n) {
    if (n<1) return 0;
    vector<int> v(from, from+n); // copy from[] to v
    sort(v.begin(), v.end());
    to[0]=v[0];
    int num=1; // number of distinct number
    for (int i=1; i<n; i++)
        if (v[i]!=v[i-1]) // distinct
            to[num++] = v[i];
    return num;
}
int main() {
    int a[N], b[N],n, k;
    // input data
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++)
```

```
        scanf("%d", a+i);
    // sort distinct number to b
    k=distinct(a,b,n);
    // replace number with its rank
    for (int i=0;i<n;i++) {
        a[i] = lower_bound(b, b+k,a[i]) - b; // always found
    }
    // output
    for (int i=0;i<n-1;i++)
        printf("%d ",a[i]);
    printf("%d\n",a[n-1]);
    return 0;
}
```

檔案中範例程式 P_2_2b.cpp 則是以自己寫二分搜的方式來做，這裡就不把它列出來了。

C++可供搜尋的容器(set/map)(*)

C++的 set 可以看成一個容器，它其實是一個稱為平衡的二元搜尋樹(BST, Binary Search Tree)的動態的資料結構，所謂動態資料結構指的是可以(有效率的)做插入與刪除。在這裡我們著重在如何使用它而非它的原理，我們只要知道在 set 中插入、刪除與搜尋一個元素都可以在 O(log(n))的時間完成，此外它是有順序的，如果我們從頭到尾做一個歷遍(Traversal)，它經過的資料的順序就是由小到大排列的，它是一個非常有效能而且容易使用的技術，值得花一些時間加以練習。

在以下的範例中，我們展示了 set 的基本用法，包含如何宣告、歷遍、插入資料、刪除資料、以及搜尋資料。有件事情要特別注意，set 和一般中學數學中的一般集合一樣，不允許多重元素，如果 set 中插入已經有的元素，事實上該插入的動作是不成功的，set 的 insert()有多種形式，其中有的會回傳是否成功，需要了解的人可以參考網路上的技術文件。

```
// demo set
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 10
#define P 10

int main() {
    set<int> S; // a set S for storing int
    printf("Insert: ");
    for (int i=0;i<N;i++) {
        int t=rand()%P;
        S.insert(t); // insert an element into S
        printf("%d ",t);
    }
    printf("\nTraversal after insertion: ");
    for (auto it=S.begin(); it!=S.end(); it++) {
```

```
        printf("%d ", *it); // iterator as a pointer
    }
    printf("\nAnother traversal: for (int e:S)");
    for (int e: S) { // for each element e in S, do ...
        printf("%d ", e);
    }
    printf("\nClear and re-insert data:\n");
    S.clear(); // clear set t empty
    for (int i=0;i<N;i++)
        S.insert(i*5);
    for (int e: S)
        printf("%d ", e);
    printf("\n");
    // to find if an element in the set
    auto it=S.find(15);
    if (it!=S.end()) // return end() when not found
        printf("find 15 in S\n");
    else printf("15 is not in S\n");
    int x=15;
    printf("After S.erase(15)\n");
    S.erase(x); // erase element of value x
    it=S.find(x);
    if (it!=S.end())
        printf("find %d in S\n",x);
    else printf("%d is not in S\n",x);
    // find lower_bound, the first one >=x
    it=S.lower_bound(x);
    if (it!=S.end())
        printf("lower_bound of %d is %d\n", x, *it);
    else printf("no lower_bound of %d\n",x);
    // find upper_bound, the first one >x
    x=(N-1)*5;
    it=S.upper_bound(x);
    if (it!=S.end())
        printf("upper_bound of %d is %d\n", x, *it);
    else printf("no upper_bound of %d\n",x);

    return 0;
}
```

除了 set 之外，C++中有幾個與它很類似資料結構，包括 multiset 以及 map 與 multimap。顧名思義，multiset 與 set 的差別在於允許多重元素，也就是相同的元素可以有多個。而 map 與 set 其實是相同的資料結構，只是它比 set 多提供了一個欄位，也就是說它的每一個元素是一個兩個欄位的 pair 資料類型，第一個欄位(名字是 first)是 key，第二個欄位(second)可以用來存放其它想要的資料，所以它的用途更廣。map 與 set 一樣不可以有相同 key 的元素，如果需要重元素則可以使用 multimap。map 還有一個特殊的地方是它可以使用類似陣列的[]表示式，在下面的範例中我們也示範了這樣的用法。

```
// demo multi-set, map
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 10
```

```
#define P 10

int main() {
    multiset<int> S;
    printf("Insert: ");
    for (int i=0;i<N;i++) {
        int t=rand()%P;
        S.insert(t);
        printf("%d ",t);
    }
    printf("\nTraversal after insertion: ");
    for (int e: S) {
        printf("%d ", e);
    }
    printf("\nClear and re-insert data:");
    S.clear(); // clear set
    vector<int> v({5,5,2,3,7,7,8});
    S.insert(v.begin(), v.end());
    for (int e: S)
        printf("%d ", e);
    printf("\nAfter S.erase(5): ");
    S.erase(5);
    for (int e: S)
        printf("%d ", e);
    printf("\nAfter erase one of 7: ");
    auto it=S.find(7);
    if (it!=S.end())
        S.erase(it);
    for (int e: S)
        printf("%d ", e);
    printf("\n");
    // demo map
    map<char, int> M;
    char str[100]="a demo of c++ map", ch;
    int len=strlen(str);
    for (int i=0; i<len; i++) M[str[i]]+=1;
    printf("\nAfter insert %s: ",str);
    for (auto e: M)
        printf("(%c:%d)", e.first, e.second);
    printf("\n");
    ch='x';
    auto mit=M.find(ch);
    if (mit==M.end())
        printf("No %c in M\n",ch);
    else printf("count(%c)=%d\n",ch,mit->second);
    ch='m';
    printf("M[%c]=%d\n",ch,M[ch]);
    ch='y';
    printf("M[%c]=%d\n",ch,M[ch]);
    M['y'] = 5;
    printf("After M['y']=5, M[%c]=%d\n",ch,M[ch]);
    printf("After erase('y'), ");
    M.erase(ch);
    mit=M.find(ch);
    if (mit==M.end())
        printf("No %c in M\n",ch);
    M[ch];
    printf("After M['y'];, M[%c]=%d\n",ch,M[ch]);
```

```
    return 0;
}
```

上面的範例中我們特別示範了 multiset 中刪除元素的兩種不同方法，刪除相同鍵值的所有元素或是刪除某一個元素。C++是物件導向的程式語言，往往一個相同的函數名字可以有多種不同的呼叫方式，這與傳統 C 語言有很大的差異，好處是使用起來更方便，但壞處是用錯了會不知道，因為 compiler 往往抓不到這一類錯誤，它算是語意的錯誤而非語法錯誤。以下再舉一個容易被誤用的例子，請看下面的程式。

這支程式其實沒有要做甚麼事情，只是建構一個很大的 set，然後在這個 set 中做 100 次的 lower_bound()搜尋。set 的搜尋應該是程式中的第一個寫法，在程式中我們寫了第二個寫法，那其實是用在陣列或 vector 上的 lower_bound 的寫法，兩邊名字一樣讓我們好記，但是它其實是不同，壞就壞在第二種寫法對 compiler 來說並不算錯誤，只是，它跑起來很慢。你可以試試看，執行時間相差非常的多。

```
// misusing lower_bound
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 500000
#define P 1000000009
int ran30(int n) {
#if RAND_MAX < 40000
    return ((rand()<<15)|rand())%n;
#else
    return rand()%n;
#endif
}
int main() {
    set<int> S;
    for (int i=0;i<N;i++)
        S.insert(ran30(P));
    vector<int> v;
    int n=100;
    for (int i=0;i<n;i++) v.push_back(ran30(P));
    clock_t t1,t2;
    t1=clock();
    int total=0;
    for (int x:v) {
        auto f=S.lower_bound(x);
        if (f!=S.end())
            total=(total+*f)%P;
    }
    t2=clock();
    printf("total=%d, time=%f\n",total,(float)(t2-t1)/CLOCKS_PER_SEC);
    // misusing lower_bound
    t1=clock();
    total=0;
    for (int x:v) {
        auto f=lower_bound(S.begin(), S.end(), x);
        if (f!=S.end())
            total=(total+*f)%P;
    }
```

```
    t2=clock();
    printf("bad using lower_bound, total=%d, time=%f\n", \
        total,(float)(t2-t1)/CLOCKS_PER_SEC);
    return 0;
}
```

上面這支程式中還有兩點可以提醒：第一點是程式中為什麼寫了一個奇怪的副程式 ran30()來產生亂數，而不直接用 rand()%n 就好呢？其實是因為目前某些電腦上還有很多 C++編譯器的版本的 rand()函數是 15-bit 的隨機亂數。這樣寫可以讓在不同編譯器下都可以達到足夠大的亂數範圍。

接下來我們以前面看過的例題 P_2_2 來做 set/map 的練習，就是做離散化。前面用的是排序以及二分搜，事實上用 set/map 也是很好寫。

例題 P-2-2C. 離散化 - set/map (*)

題目敘述請見例題 P-2-2。

我們利用 set/map 不可以重複 key 而且也是從小排到大的特性，只要將所有的資料裝進去，就自然可以達到第一個步驟找出相異數字的目的，在第二步驟的替換工作方面，因為不像陣列可以直接以 index 來替換，我們在開始查詢前，先從小到大走一遍，設定每一個值要替換的值，為了這個目的，我們需要用 map 來做，因為要把替換的值(相異數的排序位置)放在 map 的第二欄位。以下是範例程式。

```
// P_2_2 discretization -- map
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010

int main() {
    int a[N],n, k;
    // input data
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d", a+i);
    map<int,int> S;
    for (int i=0;i<n;i++)
        S[a[i]] = 0; // insert a[i] and set rank=0
    int r=0;
    // traversal and set rank in second
    for (auto it=S.begin(); it!=S.end(); ++it) {
        it->second = r++;
    }
    // replace number with its rank
    for (int i=0;i<n;i++) {
        a[i] = S.find(a[i]) -> second; // always found
        // find() return the iterator, then take the rank
```

```
        // or S.lower_bound(a[i]) -> second;
    }
    // output
    for (int i=0;i<n-1;i++)
        printf("%d ",a[i]);
    printf("%d\n",a[n-1]);
    return 0;
}
```

2.3. 其他相關技巧介紹

在這一節中，我們將介紹以下主題：

- Bitonic sequence 的搜尋
- 快速冪

Bitonic sequence 的搜尋

Bitonic sequence 是指先遞增後遞減(或者先遞減再遞增)的序列，也有人叫它一山峰(一山谷)序列。在單調遞增序列(函數)中可以用二分搜來找第一個超越 0 值或某值的位置，那麼對於 Bitonic 序列是否可以類似二分搜有效率地找到極值呢？例如在一山谷的序列中找最小值。答案是有的，常用的方法有兩種：三分搜以及差分二分搜。

與二分搜一樣，我們始終維護一個搜尋區間，二分搜是每次將區間二等分，一個比較之後刪除一半。三分搜是將區間三等分，如果 1/3 的位置大於 2/3 的位置，可以丟掉左邊的 1/3；反之，如果 2/3 的位置較大，則可以丟棄右邊 1/3 的區間。如此每次可以將區間長度減少 1/3，在 O(log(n))次比較可以找到最低點。

另外一個方法更簡單，若序列 f 為先遞減再遞增(一山谷)，則差分
g[i]=f[i]-f[i-1]
在前半段是負的，在後半段是正的，只要以二分搜找到差分序列第一個大於等於 0 的位置就是 f 的最小值。

快速冪

所謂快速冪是如何快速計算 x^y 的方法，這裡要探討的不是浮點數的運算，通常是針對整數，而這個數字通常都大到超過整數變數的範圍，所以通常都是求模(mod) P 的運算，也就是給定 x, y, P，要計算 x^y (mod P)。庫存函數中計算指數的函數都是浮點數的運算，會有運算誤差，所以不能用。

例題 P-2-3. 快速冪

輸入正整數 x, y, 與 p，計算 $x^y \pmod p$。x, y, p 皆不超過 1e9+9。例如 x=2, y=5, p=11，則答案是 10。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入 x, y, 與 p 在同一行，以空白間隔。

輸出格式：輸出計算結果。

範例輸入：

```
2 5 11
```

範例輸出：

```
10
```

計算指數最直接的方法就是按照定義一個一個的乘，如下列的程式碼，提醒一下，每次運算後都要取餘數，否則有 overflow 的可能。

```
t = 1;
for (int i =0; i<y; i++)
    t =(t*x) % p;
```

但是這個方法效率太差，如果 y 是 10 億就要執行 10 億次乘法運算。前面介紹二分搜逐步縮減跳躍距離的方法，以類似的概念，我們可以設計出只要 log(y) 次乘法的方法，這個方法以遞迴的形式最簡單。在以下範例中我們同時展示遞迴與迴圈兩種寫法。

```
// find x^y mod P, 32-bit positive int x, y, p
#include <cstdio>
typedef long long LL;
LL exp(LL x, LL y, LL p) {
    if (y==0) return 1;
    if (y & 1) return (exp(x, y-1,p)*x)%p;
    // otherwise y is even
    LL t=exp(x, y/2, p);
    return (t*t)%p;
}

LL exp2(LL x,LL y,LL p) {
    LL t=1, xi=x, i=1; // t is result, xi = x^ (2^i)
    while (y>0) {
        if (y & 1) // odd, (i-1)-bit of y = 1
            t=(t*xi)%p;
```

```
        y>>=1;
        xi=(xi*xi)%p;
        i=i*2; // i is useless, for explanation
    }
    return t;
}

int main() {
    long long x, y, p, res;
    scanf("%lld%lld%lld", &x, &y, &p);
    printf("%lld\n",res=exp(x, y,p));
    if (res!=exp2(x,y,p))
        fprintf(stderr,"different result");
    return 0;
}
```

遞迴的寫法很好懂，若 y 是奇數則先遞迴求出 y-1 次方後再乘一次 y；若 y 是偶數則求出 y/2 次方後自乘，終止條件為 y=0 時結果是 1。遞迴的版本中，xi 是每次自乘的結果，所以它的內容是 x 的 1 次方、2 次方、4 次方、8 次方、…這樣的方式變化，將 y 以二進制來看，對每一個 bit 為 1 的位置，把對應項的 x 次方乘到結果中就是答案。舉例來說，若 y=19，二進制是 10011，就是要計算

$x^{17} = x^{16} * x^{2} * x^{1}$。

兩種寫法的效率差不多，都是很快的方法，遞迴版本尤其容易記。以下是一個稍加變化的習題，給一個提示：當 x 大到超過 long long 的時候，我們需要先求 x 除以 p 的餘數，而除以 p 的餘數可以一位一位的累加計算。例如 x=123, p=5，x 可以看成 (1*10+2)*10+3，所以 x 除以 p 的餘數也就等於 ((((1*10%p+2)%p)*10)%p+3)%p。

習題 Q-2-4. 快速冪--200 位整數

題目與輸入皆同於 P-2-3，但 x 的範圍是不超過 200 位的正整數

範例輸入：

```
12345678901234567890123456789O 5 11
```

範例輸出：

```
10
```

快速計算費式數列

利用快速冪我們可以計算費式數列的第 n 項。

習題 Q-2-5. 快速計算費式數列第 n 項

令 f[0]=0, f[1]=1, 以及 f[n]=f[n-1]+f[n-2] for n>1。輸入非負整數 n，請輸出 f[n]除以 p 的餘數, p=1000000007。$n<2^{31}$。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入可能有多行，每一行有一個整數是一筆測資，最後一行以-1 代表結束，不需要處理該筆測資。

輸出格式：每一行依序輸出計算結果。

範例輸入：

```
6
123456789
100
-1
```

範例輸出：

```
8
62791945
687995182
```

Q_2_5 說明：我們可以將費式序列的定義寫成以下矩陣的形式

- $\begin{bmatrix} f[n] \\ f[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f[n-1] \\ f[n-2] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f[1] \\ f[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

將上式迭代展開，因為矩陣滿足結合律，所以可以得到

- $\begin{bmatrix} f[n] \\ f[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \times \begin{bmatrix} f[1] \\ f[0] \end{bmatrix}$

如果我們可以很快的算出那個矩陣 A 的 n-1 次方，就可以得出

$f[n]=A^{n-1}[0][0]$。

2.4. 其他例題與習題

排序與搜尋大多都會與其他的演算法結合，成為某個解題方法中的一個步驟，單獨考排序的並不多。以下舉一些例子，先看一個很常見的基本問題。

例題 P-2-6. Two-Number problem

假設 A 為 m 個相異整數的集合，B 為 n 個相異整數的集合，而 K 是一個整數。請計算有多少對(a, b)的組合滿足 a ∈ A, b ∈ B 且 a+b = K。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入可能有多行，第一行有三個整數 m, n 與 K，第二行有 m 個整數是 A 中的元素，第三行有 n 個整數 B 中的元素一筆測資。同一行相鄰數字間以空白間隔。兩集合元素個數均不超過 10 萬，整數的絕對值不超過 10 億。

輸出格式：輸出組合個數。

範例輸入：

```
3 4 2
1 6 -3
5 1 -1 -3
```

範例輸出：

```
2
```

這一題有多個解法，基本的想法是排序後搜尋，有下列幾種作法：

- 將 A 排序後，對 B 中的每一個 b，以二分搜在 A 中尋找 K-b。
- 將 A 與 B 分別排序後，對 B 中的每一個 b，以滑動的方式找 K-b。
- 把 A 放進 set 來做
- 把 A 放進 unordered_set 來做

由於作法類似，我們省略過第一與第四種。以下是第二種的範例程式，在 a 與 b 分別排序後，由前往後對於每一個 a[i]，以 while 迴圈往其找到第一個小於等於 k - a[i] 的位置，請注意，由於 a[i]是由小到大，因此 j 每次不必從最尾端重新開始，只要從前一次停下的位置開始就可以了，所以如果不計排序，這個程式的複雜度是 O(m+n)。這個在陣列中維護兩個位置的方法，也有人稱為 Two-pointers method(雙指針方法)，它雖然用了雙迴圈但複雜度並不是平方，類似的情形我們在下一章會看到更多例子。

```
// p_2_6a find a+b=k
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
```

```
#define N 100010
int a[N], b[N];

int main() {
    int m, n, k,i;
    scanf("%d %d %d", &m,&n,&k);
    for (i=0;i<m;i++) scanf("%d", a+i);
    for (i=0;i<n;i++) scanf("%d", b+i);
    sort(a, a+m); // sort a from small to large
    sort(b, b+n); // sort b from small to large
    int j=n-1; // index of b, from n-1 to 0
    int ans=0;
    for (i=0; i<m; i++) { // each a[i]
        while (j>0 && b[j]>k-a[i]) // backward linear search
            j--;
        if (a[i]+b[j]==k) ans++;
    }
    printf("%d\n",ans);
    return 0;
}
```

接下來看用利用 set 的做法，請看以下範例程式，我們可以注意到，在這個例子上我們甚至不需要用到任何陣列。

```
// p_2_6b find a+b=k, using set
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010

int main() {
    int m, n, k,i,t;
    scanf("%d %d %d", &m,&n,&k);
    set<int> S;
    // read A into set
    for (i=0;i<m;i++) {
        scanf("%d", &t);
        S.insert(t);
    }
    int ans=0;
    for (i=0;i<n;i++) { // for each t in B
        scanf("%d", &t);
        if (S.find(k-t)!=S.end()) // search k-t in A
            ans++;
    }
    printf("%d\n",ans);
    return 0;
}
```

接下來是一個與前者類似但較複雜一點的習題。

習題 Q-2-7. 互補團隊 (APCS201906)

前 *m* 個英文大寫字母每個代表一個人物，以一個字串表示一個團隊，字串由前 *m* 個英文大寫字母組成，不計順序也不管是否重複出現，有出現的字母表示該人物出現在團隊中。兩個團隊**沒有相同的成員而且聯集起來是所有 *m* 個人物**，則這兩個團隊稱為「互補團隊」。輸入 *m* 以及 *n* 個團隊，請計算有幾對是互補團隊。我們假設沒有兩個相同的團隊。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是兩個整數 m 與 n，2 ≤ m ≤ 26，1 ≤ n ≤ 50000。第二行開始有 n 行，每行一個字串代表一個團隊，每個字串的長度不超過 100。

輸出格式：輸出有多少對互補團隊。

範例輸入：

```
10 5
AJBA
HCEFGGC
BIJDAIJ
EFCDHGI
HCEFGA
```

範例輸出：

```
2
```

解題提示：與前面的例題在結構上是相似的，前面是找數字，這裡是找集合。因為字串中有重複的字母而且沒有照順序，我們需要將每一個集合表示成唯一的表式方式才能夠有效的搜尋。有兩個方法可以做：

- 將每個字串去除重複字母且裡面的字母是由小到大排列的。例如 AJBA 就改成 ABJ，HCEFGGC 就改成 CEFGH。
- 以一個整數表示一個集合，第 i 個 bit 設為 1 代表第 i 個字母在集合中，否則為 0。此法在在第一章窮舉子集合時也介紹過。

第二種方法要比第一種方法更快，因為數字的搜尋要比字串來得快。以下的程式片段可以將一個字串轉換成對應以及互補集合的整數：

```
//transforming a string to corresponding int
    ff = (1<<m) - 1; // bits 0~(m-1) are 1
    scanf("%s",s);
    int len=strlen(s), team=0;
```

```
    for (int j=0;j<len;j++) // 1 for existing
        teams |= 1<<(s[j] - 'A'); // set bit to 1
    complement = ff - teams[i]; // int of the complement
```

以下的習題我們用來展示如何求 Modular multiplicative inverse，就是在模運算下的乘法反元素，有些人稱為「模反元素」或「模逆元」。

對於任何一個正整數 a，它的模 P 乘法反元素就是滿足 (a * b) % P = 1 的整數 b，這裡的 % 就是取餘數運算。計算 a 的模逆元是一個很重要的運算也有許多運用，最簡單的方法是如以下的窮舉測試：

```
for (b=1; b<P; b++)
    if ((a * b) % P == 1) {
        // b is an inverse
    }
```

窮舉法的問題在於效率太差。在許多運用場合 P 是一個質數，而且探討的整數範圍都只在 0 ~ P-1。在這些假設下有一個重要的數學性質可以幫助我們快速的計算模逆元 (費馬小定理)：「若 P 為質數，對任意正整數 a，a^{P-2} 是 a 在 [1, P-1] 區間的唯一乘法反元素。」根據這個性質搭配快速冪就可以用 O(log(P)) 的運算計算出模逆元。另外一種求模逆元的方法是使用 Extended Euclidean algorithm，這裡就不介紹了。

習題 Q-2-8. 模逆元 (*)

輸入 n 個正整數，以及一個質數 P，請計算每一個輸入數的模逆元。輸入的正整數的大小不超過 P，P<=1000000009，0 < n < 10。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 n 與 P，第二行 n 個整數，同行數字以空白間隔。

輸出格式：依照輸入順序輸出每一個數的模逆元，相鄰數字間間隔一個空白。

範例輸入：

```
3 7
3 4 1
```

範例輸出：

```
5 2 1
```

註：費馬小定理屬於數論中的定理，應該不在 APCS 考試的背景知識內，但如果題目中給予提示說明，則模逆元並非屬於一定不可以考的範圍。

透過下面的例題，我們要來介紹折半枚舉的技巧，這一題算是有難度的題目。

例題 P-2-9. 子集合乘積(折半枚舉) (@@)

輸入 n 個正整數 A[1..n]，以及一個質數 P，請計算 A 中元素各種組合中，有多少種組合其相乘積除以 P 的餘數等於 1。每個元素可以選取或不選取但不可重複選，A 中的數字可能重複。P<=1000000009，0 < n < 37。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 n 與 P，第二行 n 個整數是 A[i]，同行數字以空白間隔。

輸出格式：滿足條件的組合數，因為數字可能太大，請輸出該組合數除以 P 的餘數。

範例輸入：

```
5 11
1 1 2 6 10
```

範例輸出：

```
7
```

說明乘積等於 1 的組合有：(1), (1), (1,1), (2,6), (1,2,6), (1,2,6), (1,1,2,6)共 7 種

我們可以透過枚舉所有的子集合來測試哪些的組合乘積為 1。在第一章我們說明過以遞迴來枚舉所有子集的方法，他的效率是 O(2^n)，在這裡 n 可能達到 36，顯然無法在一秒內完成。以下的範例程式是一個修改的方法，在相同的乘積多的場合他的效率會有所改善，但不足以通過這一題所有測資。這個程式的方法也很直接，我們逐一考慮每一個元素，以一個 map M1 來記錄著目前所有可能的子集合乘積，相同的乘積只記錄一筆，但記錄能產生此乘積的子集合個數。對於下一個元素 a[i]，把原有的所有可能在乘上此新元素，就是新的可能乘積。在計算過程，新的乘積不能直接加到原來的裡面，否則無法分辨新舊。因此要利用一個 map M2 來暫存，當一個元素處理完畢後交換 M1 與 M2，以便下一個元素時再從 M1 計算到 M2。

```
// subset product = 1 mod P, slow method
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;
```

```
int main() {
    int i, n;
    LL p, a[50];
    scanf("%d%lld", &n, &p);
    for (i=0;i<n;i++)
        scanf("%lld", &a[i]);
    map<LL,LL> M1; // (product, number)
    M1[a[0]]=1; // The first element appear once
    for (i=1;i<n;i++) { // for each element
        // compute from M1 to M2
        map<LL,LL> M2(M1); // copy M1 to M2
        for (auto e:M1) {
            LL t=(e.first*a[i])%p;
            M2[t]+=e.second;
        }
        M2[a[i]] +=1; // for {a[i]}
        M1.swap(M2);
    }
    printf("%lld\n", M1[1]);
    return 0;
}
```

在這種場合我們可以用折半枚舉來做的更有效率一點。

對於 n 個數字，我們先將他任意均分為兩半 A 與 B，我們要找的解(子集合乘積等於 1)有三種可能：在 A 中、在 B 中、以及跨 AB 兩端(包含兩邊的元素)。我們對 A 與 B 分別去窮舉它們的子集合乘積，可以找到在 A 中與在 B 中的解。對於跨兩邊的解，我們以下列方式計算：將其中一邊(例如 B)的所有子集合乘積予以排序後，我們對每一個 A 的子集合乘積 x，在 B 的子集合乘積中去搜尋 x 的模逆元(使得 xy = 1 的 y)。

有一點必須留意，我們要把 B 的子集合乘積中，將相同的乘積予以合併，原因是這一題我們需要找出組合數，若相同元素太多，一個 x 需要搜尋很多的模逆元就會太花時間。至於 A 那一邊，合併也可以提升效率，但 worst case 複雜度沒有影響。我們可以算一下整個時間複雜度：對 n/2 個元素窮舉子集合需要 $O(2^{n/2})$，兩邊都做所以乘以 2，排序需要 $O(n*2^{n/2})$，接著對 $2^{n/2}$ 個數字在 $2^{n/2}$ 個數字中做二分搜，需要的時間是 $O(n*2^{n/2})$，所以總時間複雜度是 $O(n*2^{n/2})$，這比起單純窮舉 $O(2^n)$ 要快得多了。以下是範例程式，其中求模逆元是前面介紹過的快速冪方法。

```
// subset product = 1 mod P, O(n*2^(n/2)), sort
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;
LL sa[1<<19], sb[1<<19]; // subset product of a and b

// generate all products of subsets of v[]
// save result in prod[], return length of prod[]
int subset(LL v[], int len, LL prod[], LL p) {
    int k=0; // size of prod[]
```

```
    for (int i=0;i<len;i++) {
        for (int j=0;j<k;j++) { // (each subset)*v[i]
            prod[k+j]=(prod[j]*v[i])%p;
        }
        prod[k+k]=v[i]; // for subset {v[i]}
        k += k+1;
    }
    return k;
}
// find x^y mod P
LL exp(LL x, LL y, LL p) {
    if (y==0) return 1;
    if (y & 1) return (exp(x, y-1,p)*x)%p;
    // otherwise y is even
    LL t=exp(x, y/2, p);
    return (t*t)%p;
}

int main() {
    int i, n;
    LL a[30], b[30]; // input data
    LL p;
    scanf("%d%lld", &n, &p);
    int len_a=n/2;
    int len_b=n-len_a;
    for (i=0;i<len_a;i++)  // half in a
        scanf("%lld", &a[i]);
    for (i=0;i<len_b;i++)  // half in b
        scanf("%lld", &b[i]);
    int len_sa=subset(a,len_a,sa,p); // all subsets of a
    int len_sb=subset(b,len_b,sb,p); // all subsets of a
    sort(sb, sb+len_sb);
    // merge same element of sb, assume not empty
    LL num[1<<19], len_sb2=1;
    num[0]=1; //its multiplicity
    for (i=1;i<len_sb;i++) {
        if (sb[i]!=sb[i-1]) { // new element
            sb[len_sb2]=sb[i];
            num[len_sb2]=1;
            len_sb2++;
        }
        else {
            num[len_sb2-1]++;
        }
    }
    LL ans = (sb[0]==1) ? num[0]: 0; // the number of 1 in sb2
    // compute 1 in sa and cross the two sides
    // for each x in sa, find its inverse in sb2
    for (i=0; i<len_sa; i++) {
        if (sa[i]==1) ans=(ans+1)%p;
        LL y = exp(sa[i], p-2, p); // inverse
        int it = lower_bound(sb, sb+len_sb2, y) - sb;
        if (it<len_sb2 && sb[it]==y)  // found
            ans = (ans + num[it])%p;
    }
    printf("%lld\n", ans);
    return 0;
}
```

這一題當然也可以用 set/map 來做，因為需要合併，我們用 map 來做會比前一支程式方便，時間複雜度則是相同的。這裡的輸入元素放在 vector 中，而子集合窮舉是以遞迴方式寫的，在遞迴到最後時將所產生的子集合乘積放入 map 中。

```
// subset product = 1 mod P, O(n*2^(n/2)), using map
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;
// recursive generate product of subsets of v[0..i]
// current product=prod, result stored in M
void rec(vector<LL> &v, int i, LL prod, map<LL,LL> &M, LL p) {
    if (i>=v.size()) { // terminal condition
        M[prod] += 1; // insert into map
        return;
    }
    rec(v, i+1, (prod*v[i])%p, M, p); // select v[i]
    rec(v, i+1, prod, M, p); // discard v[i]
    return;
}
// find x^y mod P
LL exp(LL x, LL y, LL p) {
    if (y==0) return 1;
    if (y & 1) return (exp(x, y-1,p)*x)%p;
    // otherwise y is even
    LL t=exp(x, y/2, p);
    return (t*t)%p;
}

int main() {
    int i, n;
    vector<LL> a, b; // input data
    LL p;
    scanf("%d%lld", &n, &p);
    for (i=0;i<n/2;i++) { // half in a
        LL t;
        scanf("%lld", &t);
        a.push_back(t);
    }
    for ( ;i<n;i++) { // half in b
        LL t;
        scanf("%lld", &t);
        b.push_back(t);
    }
    map<LL,LL> M1, M2;
    rec(a,0,1,M1,p); // all subsets of a
    rec(b,0,1,M2,p); // all subsets of b
    M1[1] -= 1; // empty set was counted as product 1
    M2[1] -= 1; // empty set
    LL ans=M1[1]+M2[1]; // the number of 1 in both sides
    // compute 1 cross the two sides
    // for each x in M1, find its inverse in M2
    for (auto e: M1) {
```

```
        LL x=e.first, num=e.second;
        LL y = exp(x, p-2, p); // inverse of x
        //printf("%lld, %lld; ",x,y);
        auto it=M2.find(y);
        if (it!=M2.end()) { // found
            ans = (ans + num*it->second)%p;
        }
    }
    printf("%lld\n", ans);
    return 0;
}
```

最後我們給一個類似的習題，這個題目在上一章也出現過，當時的 n<26，現在把他放寬到 38，解法跟前面的例題很類似，注意這裡的 P 不一定也不需要是質數。因為沒有要求模逆元也不必做合併，這題比前面的例題簡單一點，請注意數字的範圍需要使用 long long。

例題 Q-2-10. 子集合的和(折半枚舉)

輸入 n 個正整數 A[1..n]，另外給了一個整數 P，請計算 A 中元素各種組合中，其和最接近 P 但不超過 P 的和是多少。每個元素可以選取或不選取但不可重複選，A 中的數字可能重複。A[i]與 P 均不超過 2^{60}，$0 < n \leq 38$。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 n 與 P，第二行 n 個整數是 A[i]，同行數字以空白間隔。

輸出格式：最接近 P 但不超過 P 的和。

範例輸入：

```
5 17
5 5 8 3 10
```

範例輸出：

```
16
```

在例題 P-1-6，我們提出了一個尋找最接近區間和的問題，當時用來展示一些窮舉的技巧，只有提出 O(n²)的方法，以下的例題我們來展示如何有效率的解這個問題。

例題 P-2-11. 最接近的區間和 (*)

輸入一個整數序列(A[1], A[2], …, A[n])，另外給了一個非負整數 K，請計算哪一個連續區段的和最接近 K 而不超過 K。n 不超過 10 萬，數字總和不超過 10 億。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 n 與 K，第二行 n 個整數是 A[i]，同行數字以空白間隔。

輸出格式：在所有區間和中，最接近 K 但不超過 K 的和。

範例輸入：

```
5 10
5 -5 8 -3 4
```

範例輸出：

```
9
```

題目並沒說輸入的是正數，這裡的輸入數字當然有可能是負的，否則有另外一種解法(下一章會討論)。一個區段可以用兩端點[l,r]表示，對於可能的右端 r，我們要設法找到最好的左端 l，最好的意思就是讓 A[l:r]的和最接近 K 而不超過 K，如此一來，然後對所有的 r 再找出最好的解就是最佳解。所以問題的核心再如何對任一右端計算出最好的解。

在 P-1-6 中我們介紹過前綴和(Prefix-sum)，令 ps[i]表示前 i 項的和，為方便起見定義 ps[0]=0。對任一右端 r，sum(A[i:r])=ps[r]-ps[i-1]，因此，要使 sum(A[i:r])不超過 K 又最接近 K，就是要找 ps[i-1]≥ ps[r]-K 的最小值。解法呼之欲出了，讓 r 從小往大跑，以資料結構維護好所有 i<r 的 ps[i]，然後找到 ps[r]-K 的 lower_bound()。那麼該用甚麼資料結構呢？因為必須不斷的將 prefix-sum 加入，所以必須以動態的資料結構來處理，set 就會符合需要。時間複雜度是 O(nlog(n))，因為在 set 中搜尋是 O(log(n))。

我們程式其實很簡單，但必須使用到 set(或是其他更複雜的資料結構)，所以這一題基本上算超過 APCS 的考試範圍。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    int n, psum=0, k, v;
    scanf("%d%d", &n, &k);
    set<int> S({0}); // record the prefix_sum
    int best=0; // solution of empty range
    for (int r=0; r<n; r++) {
        scanf("%d", &v);
```

```
        psum += v; //prefix-sum(r)
        auto it=S.lower_bound(psum-k);
        if (it!=S.end()) // found
            best=max(best, psum-*it); //currently best
        S.insert(psum); // insert prefix-sum(r)
    }
    printf("%d\n",best);
    return 0;
}
```

以下的習題是二維版本的類似題。給一個提示，對所有列的範圍[i, j]，把第 i 列到第 j 列"黏"起來變成一個一維陣列，然後用 P-1-11 的方法去做，這樣的時間複雜度會是 O(M²Nlog(N))。

習題 Q-2-12. 最接近的子矩陣和 (108 高中全國賽) (*)

輸入一個整數二維矩陣 A[M][N]，另外給了一個整數 K，請計算哪一個子矩陣的和，也就是對所有 1≤i≤j≤M and 1≤p≤q≤N， $\sum_{s=i}^{j}\sum_{t=p}^{q}A[s][t]$ 最接近 K 而不超過 K。M ≤ 50 且 M × N ≤ 300,000，每一個整數的絕對值不超過 3,000。

Time limit: 1 秒

輸入格式：每筆測資的第一行有一個正整數 K；第二行有兩個正整數 M 與 N。接下來，由上而下，從左至右，有 M 行輸入，每一行有 N 個整數，每一個整數的絕對值不超過 3,000，代表 A[s][t]，同行整數間以空格隔開。

輸出格式：在所有子矩陣和中，最接近 K 但不超過 K 的和。

範例輸入：

```
6
2 3
-1 -1 1
2 2 2
```

範例輸出：

```
6
```

以下習題是 108 年高中全國賽某一題的核心要算的，是快速冪的一個應用。

習題 Q-2-13. 無理數的快速冪 (108 高中全國賽, simplifed)

若$s+t\sqrt{2}=(x+y\sqrt{2})^n$，其中 x, y, s, t 均為正整數，輸入 x,y 與 n，請計算並輸出 s 與 t 除以 p 的餘數。p=10^9+9 且 x,y,n < p。

Time limit: 1 秒

輸入格式：一行含三個正整數，依序為 x, y 與 n，以空格隔開。

輸出格式：s 與 t，中間空一格。

範例輸入：

```
2 3 2
```

範例輸出：

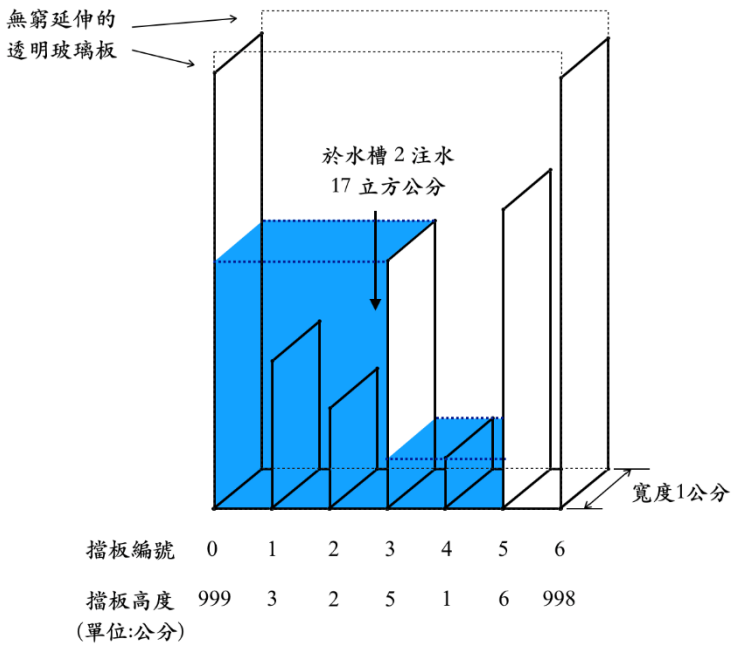
```
22 12
```

下一題是 108 高中全國賽的題目，有多種解法，題目需要一些思考，但其實有個漂亮的解法是排序與遞迴的聯合運用，不需要特別的資料結構與方法。這一題有點難，如果做得出來應該已經超過 APCS 五級分的程度了。

習題 Q-2-14. 水槽 (108 高中全國賽) (@@)

我們用一排 n 個擋板建造水槽。擋板的寬度為 1，高度為正整數且均不相同，水槽前後是兩片長寬均為無限大的玻璃板 (見下圖例)。相鄰擋板的距離都是 1，故相鄰二擋板之間會形成底面積 1 平方的水槽。

擋板由左而右依序由 0 到 $n-1$ 編號，第 i 及 $i+1$ 檔板中間的水槽稱為水槽 i。現在將總量為 w 立方公分的水緩緩注入水槽 i。注意水量可能溢出到別的水槽，但是由於所有擋板高度都不同，所以每當溢出時，只會先從一個方向溢出。請計算將總量為 w 立方公分的水緩緩注入水槽 i 後，所有水槽的水深。本題最左的擋板與最右的擋板是所有擋板中最高的兩個，並且保證欲注入的水不會溢出到左右邊界之外；另外，所有水槽的最後水深一定都是整數。以下圖為例，於水槽 2 注入 17 立方公分的水後，各水槽的水深依序為 5, 5, 5, 1, 1, 0。



Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行有三個正整數 n (3 ≤ n ≤ 10^5)、i (0 ≤ i ≤ n − 2) 和 w (1 ≤ w ≤ 10^{12})，分別代表擋板數、注水水槽編號，及水量。第二行有 n 個以空白間隔的正整數，代表由左到右擋板的高度，每個擋板高度為正整數且不超過 10^9)。請注意注水量可能超過一個 32-bit 整數的範圍。。

輸出格式：輸出爲一行，共 *n* − 1 個整數，依序代表各個水槽水深，數字之間以一個空白間隔。

範例輸入：

```
8 3 27
9 7 5 3 4 6 8 10
```

範例輸出：

```
0 6 6 6 6 3 0
```

Q_2_14 解題提示：我們維護一個水槽高度尚未被決定的區間[left,right)，區間以外的水槽高度都已經確定。遞迴函數
rec(left, right, water, input)計算水量 water 從編號 input 進入後區間的各高度。

如果區間只剩一個水槽，該水槽高度=水量，結束；

否則，在區間中找出最高的隔板，假設此隔板高度為 H。區間被此隔板分成左右兩邊，考慮下面三種情形：

- water >=(right-left)*H，水量足以讓兩邊都至少 H，區間內所有水槽高度皆是相同的平均值，結束。
- 水量不足以越過輸入這一邊，那麼，另外一邊一定不會有水，縮小區間遞迴呼叫。
- 水量會越過輸入這一邊，那麼，輸入這一邊的水槽高度一定都是 H，把水量扣掉後遞迴呼叫另外一邊。

為了要找出區間內的最高隔板，我們可以一開始把所有隔板的依照高度從高到低排列，每次要找某區間最高隔板時，我們檢視目前最高的隔板，如果在我們要的區間，那就找到了；如果不在我們要的區間，這個隔板以後也不會用到(想想為何)，可以直接丟掉。因此，只要一開始把隔板排序後依序往後找就可以了，不需要特殊的資料結構，但是要把隔板的高度與位置一起存，所以需要一個兩個欄位資料的排序。

以下的例題我們來展示如何有效率的解這個問題。

例題 P-2-15. 圓環出口 (APCS202007)

有 *n* 個房間排列成一個圓環，以順時針方向由 0 到 *n* - 1 編號。玩家只能順時針方向依序通過這些房間。每當離開第 *i* 號房間進入下一個房間時，即可獲得 p(i)點。玩家必須依序取得 *m* 把鑰匙，鑰匙編號由 0 至 *m*-1，兌換編號 *i* 的鑰匙所需的點數為 Q(i)。一旦玩家手中的點數達到 Q(i)就會自動獲得編號 *i* 的鑰匙，而且手中所有的點數就會被「全數收回」，接著要再從當下所在的房間出發，重新收集點數兌換下一把鑰匙。遊戲開始時，玩家位於 0 號房。請計算玩家拿到最後一把鑰匙時所在的房間編號。

以下是一個例子。有 7 個房間，p(i)依序是(2, 1, 5, 4, 3, 5, 3)，其中 0 號房間的點數是 2。假設所需要的鑰匙為 3 把，Q(i) 依序是(8, 9, 12)。從 0 號房出發，在「離開 2 號房，進入 3 號房」時，獲得恰好 2+1+5 = 8 點，因此在進入 3 號房時玩家兌換到 0 號鑰匙；接著從 3 號房開始繼續累積點數，直到「離開 5 號房，進入 6 號房」時，手中的點數為 12，於是在進入 6 號房時獲得 1 號鑰匙，手中點數再次被清空。最後，從 6 號房出發，直到「離開 3 號房，進入 4 號房」時，方可獲得至少 12 點的點數，來兌換最後一把鑰匙。因此，拿到最後一把鑰匙時所在的房間編號為 4。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行有兩個正整數 n 與 m，第二行有 n 個正整數，依序是各房間的點數 p(i)，第三行有 m 個正整數依序是各鑰匙需要的點數 Q(i)，。同一行連續二數

字間以空白隔開。n 不超過 2e5，m 不超過 2e4，p(i)總和不超過 1e9，Q(i)不超過所有 p(i)總和。

輸出格式：輸出拿到最後一把鑰匙時所在的房間編號。

範例輸入：

```
7 3
2 1 5 4 3 5 3
8 9 12
```

範例輸出：

```
4
```

簡單說，這個題目就是每次要在一個正整數陣列中，對於某個開始位置，找到一個最小的區間，滿足區間和大於等於某輸入 Q(i)。關於圓環，有兩個簡單的處理方式，一個是判斷超過結尾時，從頭開始；另外一種方式是將陣列重複兩次，每次找到後除以 n 取餘數。最簡單的搜尋方法就是一個一個往下找，程式也很好寫，但是效率不夠好，以下是範例程式。

```
#include <cstdio>
#define N 200010
int p[N];

int main() {
    int i, n, m;
    scanf("%d%d",&n, &m);
    for (i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", &p[i]);
    int room=0; // current room
    for (i=0; i<m; i++) {
        int q;
        scanf("%d", &q);
        while (q>0) {
            q -= p[room++];
            if (room==n) room=0; //the next of n-1
        }
    }
    printf("%d\n",room);
    return 0;
}
```

要有效率的搜尋，腦海中浮現的自然是二分搜，但是二分搜必須是在單調序列上才能使用，而且我們要找的是區間和。在 P-1-6 中我們介紹過前綴和(Prefix-sum)，如果我們把所有房間的點數改成計算出前綴和，那麼正數的前綴和必然是遞增的，而我們要

找的區間和也自然的轉換成找一個前綴和。關於二分搜，我們推薦前面介紹的一路往前跳的寫法，以下是範例程式。第 10 行的迴圈計算前綴和，然後第 13 行的迴圈處理每一次需求的點數，在第 15 行，如果目前房間不是 0，就將所需的點數 q 加上前一個房間的前綴和，這就是我們要搜尋的前綴和；因為本題是圓環，在第 17 行我們判斷是否需求會超過陣列尾端從 0 開始。接著進行二分搜，因為我們要始終保持 p[room]<q 這個特性，要小心在二分搜開始往前跳之前，先檢查目前位置是否滿足，跳要結束時所在位置是最後一個小於 q 的，所以根據題意，要加 2 才是下一個開始位置。

```
00 // P-2-15, repeatedly search range sum in circular array
01 #include <cstdio>
02 #define N 500010
03 int p[N];
04
05 int main() {
06     int i, n, m;
07     scanf("%d%d",&n, &m);
08     for (i=0; i<n; i++)
09         scanf("%d", &p[i]);
10     for (i=1; i<n; i++)
11         p[i] += p[i-1];
12     int room=0, q, total=p[n-1];
13     for (i=0; i<m; i++) {
14         scanf("%d", &q);
15         if (room != 0) // desired prefix-sum
16             q += p[room-1];
17         if (q > total) // over the end
18             room = 0, q -= total;
19         // find the last one < q
20         if (p[room] >= q) { // current room is enough
21             room =(room+1)%n;
22             continue;
23         }
24         // binary search
25         for (int jump=(n-room)/2; jump>0; jump/=2) {
26             while (room+jump<n && p[room+jump]<q)
27                 room += jump;
28         }
29         room = (room+2)%n; // room+1 is the first >=q
30     }
31     printf("%d\n",room);
32     return 0;
33 }
34
```

我們當然也可以用 STL 的 lower_bound 來做二分搜，以下是範例程式，這裡我們以將原來陣列複製一份在後面的方式來處理圓環轉過尾端從開始的問題。其他的寫法都類似。

```cpp
// P-2-15, using extended array and lower_bound
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 500010
int p[N];

int main() {
    int i, n, m;
    scanf("%d%d",&n, &m);
    for (i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", &p[i]);
    for (i=0; i<n; i++) // double array
        p[n+i] = p[i];
    // prefix sum
    for (i=1; i<2*n; i++)
        p[i] += p[i-1];
    int room=0, q;
    for (i=0; i<m; i++) {
        scanf("%d", &q);
        if (room != 0) // desired prefix-sum
            q += p[room-1];
        // binary search the first >= q
        room = lower_bound(p+room, p+2*n, q) - p;
        room = (room+1)%n; // adjust
    }
    printf("%d\n",room);
    return 0;
}
```

3. 佇列與堆疊

想到堆疊，想到深度；想到深度就想到歐陽修這首蝶戀花：

「庭院深深深幾許，楊柳堆煙，簾幕無重數。玉勒雕鞍遊冶處，樓高不見章臺路。雨橫風狂三月暮，門掩黃昏，無計留春住。淚眼問花花不語，亂紅飛過鞦韆去。」

關於窗戶：

「Where there's will, there's a way;
where there's way, there's a wall;
where there's wall, there's a window.」

這一章介紹三個基本的資料結構：佇列(queue)、堆疊(stack)與雙向佇列(deque，念做 "deck"，正式名稱是 double-ended queue)，除了說明基本原理與應用外，也介紹一種與雙向佇列類似的演算法：滑動視窗(sliding window)。另外我們也介紹鏈結串列(linked list)，這是一種在實際用途很廣，但是在解題上比較少用的資料結構。這幾種資料結構都是課本上的基本資料結構，有很多應用。滑動視窗這個名字倒是有很多不同的稱呼方式，也有稱為爬行法，或認為是雙指針(two-pointers)方法的一種。反正名稱不是那麼重要，懂得原理與會運用才是最重要的事。我們先介紹基本原理與實作方式，然後再來看應用的題目。

3.1. 基本原理與實作

佇列、堆疊與雙向佇列都是簡單的資料結構，簡單到可以自己實作，但也有 STL 的容器可以使用，自己實作的在碰到空間問題時會比較麻煩，所以使用 STL 或許比較好一點。不過在解題的場合，很少會碰到空間問題，因此兩種方式都可以。這三種資料結構都是"線性"的，可以在一維陣列實作。鏈結串列最大的優點是將線性的資料放在不連續的位置，這特性在實際系統與軟體中有時非常重要，也因如此，串列需要以指標與記憶體配置來搭配。但解題的場合很少有空間的問題，也幾乎都避免使用 pointer，所以串列部分我們只說明解題中常見的方法。

佇列(queue)

佇列就好像是一群人排隊排成一列，有一個出口與一個入口，通常出口稱為前端(front)而入口稱謂後端(back)。成員進入時只能從入口進入，也就是加入尾端；離

開時只能依序從出口離開，佇列的特性是先進先出(FIFO, first-in first-out)。與陣列一樣，在標準的佇列中，所有的成員必須是相同的資料型態。佇列通常需要四個基本操作，新增、刪除、查看出口的成員、以及檢查是否為空，有時也會查詢目前成員數。

我們可以很簡單的以陣列來實作佇列，在解題的場合，空間通常不是問題，所以我們宣告一個足夠大的陣列，初始時後端在陣列開頭的位置，每次加入時，後端往後移，每次刪除時，從陣列前端離開，在一連串操作時，佇列相當於在此陣列中往後滑動。我們需要維護好兩個變數，front 記著佇列前端出口位置，back 記著佇列後端入口位置。請看下面的範例程式展示著自製佇列的基本用法以及支援的四個操作。我們沿用 STL 的名詞，加入稱為 push，刪除稱為 pop，這名字其實來自堆疊。

```
// self-made queue
#include <bits/stdc++.h>
#define N 1000
int main() {
    int Q[N], front=0, back=0;
    int n, t;
    char cmd[10];
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++) {
        scanf("%s", cmd);
        if (strcmp(cmd,"push")==0) {
            scanf("%d", &t);
            Q[back++]=t; // push(t)
        }
        else if (strcmp(cmd,"pop")==0) {
            if (front==back) printf("empty\n");
            else {
                t=Q[front++]; // pop to t
                // save Q[front] to t, and then front++
                printf("%d\n",t);
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

這個程式在檔案中有輸入資料可以測試，它有若干個命令，每個命令是 push 一個數字或是 pop，程式讀取每一個命令，如果是 push 就將資料加入 queue，如果是 pop 要先檢查佇列是否是空的，否則刪除資料並輸出。下面是以 STL 提供的 queue 來做一樣的事，目的只是展示如何操作。宣告時 queue<int> Q，意義就是宣告一個 int 型態的 queue 名字叫做 Q。

```
// ch3_2 STL queue
```

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    queue<int> Q;
    int n, t;
    char cmd[10];
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++) {
        scanf("%s", cmd);
        if (strcmp(cmd,"push")==0) {
            scanf("%d", &t);
            Q.push(t);
        }
        else if (strcmp(cmd,"pop")==0) {
            if (Q.empty()) printf("empty\n");
            else {
                t=Q.front();
                Q.pop();
                printf("%d\n",t);
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

堆疊(Stack)

堆疊像是把子彈放入子彈夾(可能沒看過)，或者想像把硬幣堆疊在桌上。堆疊的出口與入口相同，就是最上面那一個，通常稱為 top。成員進入時只能從上方壓入(往上疊)，稱為 push；離開時只有頂端 top 的成員可以離開。堆疊的特性是後進先出(LIFO, last-in first-out)。在標準的堆疊中，所有的成員也必須是相同的資料型態。堆疊通常需要四個基本操作，push、pop、查看 top 的成員、以及檢查是否為空。

以陣列來實作堆疊比佇列更簡單，因為只有一端開口，我們將堆疊的底部設在陣列開頭之處，每次 push 時 top 往後移，每次 pop 時，top 往前移，在一連串操作時，堆疊只是 top 位置前後移動，像是一端黏在牆壁的彈簧，我們只要維護好一個變數 top 就可以了。請看下面的範例程式，它的測試資料與佇列相同。不熟悉的讀者可以用範例程式來了解用法。

```cpp
// ch3_3 self-made stack, test data = ch3_1.in
#include <bits/stdc++.h>
#define N 1000
int main() {
    int S[N], top=-1;
```

```
    int n, t;
    char cmd[10];
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++) {
        scanf("%s", cmd);
        if (strcmp(cmd,"push")==0) {
            scanf("%d", &t);
            S[++top]=t; // push(t)
        }
        else if (strcmp(cmd,"pop")==0) {
            if (top<0) printf("empty\n");
            else {
                t=S[top--];
                printf("%d\n",t);
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

下面的範例是以 STL 提供的 stack 來做一樣的事。宣告時 stack<int> S，意義就是宣告一個 int 型態的 stack 名字叫做 S。

```
// ch3_4 STL stack, test data at ch3_1.in
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 1000
int main() {
    stack<int> S;
    int n, t;
    char cmd[10];
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0;i<n;i++) {
        scanf("%s", cmd);
        if (strcmp(cmd,"push")==0) {
            scanf("%d", &t);
            S.push(t); // push(t)
        }
        else if (strcmp(cmd,"pop")==0) {
            if (S.empty()) printf("empty\n");
            else {
                t=S.top();
                S.pop();
                printf("%d\n",t);
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

雙向佇列(deque)

如果了解了 queue 的操作之後，deque 的操作就容易了解了，它與 queue 很類似，差異在它的前後都可以進出，所以加入與刪除的操作有 push_front, push_back, pop_front, pop_back 四種，這些操作的意義都可以從名字上了解。雙向佇列建議直接使用 STL，因為自己做的話，會需要處理空間的問題，比較麻煩，除非使用時已知它只會從一端加入，那就跟 queue 的製作很類似了。因為與 queue 很類似，這裡我們就不再提供範例，在後面的題目中會碰到。

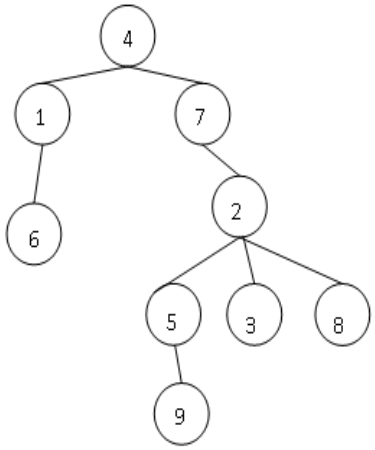
3.2. 應用例題與習題

佇列堆疊與雙向佇列常常是用其他演算法裡面做為一個基本步驟，單獨出現的不算太多。尤其單純 queue 的題目並不多，除非是簡單的操作模擬，但是在樹與圖的走訪卻是非常重要，這些要等到後續單元介紹了圖與樹的基本概念後再介紹比較合適。這裡提出一個例題,事實上是 tree 的題目,因為不需要太多專業術語,可以先放在此處當作 queue 的例題，等到後面的章節會再提出其他解法。

例題 P-3-1. 樹的高度與根 (bottom-up) (APCS201710)

有一個大家族有 N 個成員，編號 1~N，我們請每個成員寫下此家族中哪幾位是他的孩子。我們要計算每個人有幾代的子孫，這個值稱為他在這個族譜中的高度，也就是說，編號 i 的人如果高度記做 h(i)，那麼 h(i)就表示在所有 i 的子孫中，最遠的子孫與他隔了幾代。本題假設除了最高的一位祖先(稱為 root)之外,其他成員的 parent 都在此家族中(且只有一個 parent)。本題要計算所有成員高度的總和以及根的編號。

右圖是一個例子，每個成員是一個圈起來的號碼，劃線相聯的表示上面的點是下面點的 parent。編號 4 是根，有兩個孩子 1 與 7。編號 6, 9, 3, 8 都沒有孩子，h(6)=h(9)=h(3)=h(8)=0，此外 h(2)=2 因為 9 與他隔兩代。你可以看出來 h(5)=h(1)=1，h(7)=3, h(4)=4，所以高度總和是 11。



Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行有一個正整數 N。接下來有 N 行，第 i 行的第一個數字 k 代表 i 有 k 個孩子，第 i 行接下來的 k 個數字就是孩子的編號。每一行的相鄰數字間以空白隔開。N ≤ 1e5。

輸出：第一行輸出根的編號，第二行輸出高度總和。

範例輸入：

```
9
1 6
3 5 3 8
0
2 1 7
1 9
0
1 2
0
0
```

範例結果：

```
4
11
```


沒有處理過樹狀圖的人可能會覺得這題複雜，但其實不難，這裡我們盡量不使用樹的術語來講。首先我們用個陣列把每個人的 parent 讀進來，第一個問題是如何找根。沒有 parent 的就是根，所以很簡單，只要看看哪個點沒有 parent 就行了。第二個問題要找高度，因為我們有每個點的 parent，一個直覺的做法就是：

> 從每一個點 i 出發，依據 parent 一直往上走直到無路可走(到達 root)，並且用一個記步器 cnt 記錄走了幾步。每到一個點 j，根據 cnt 就可以知道 i 是 j 的第幾代子孫。因為高度是要取所有子孫離他最遠的，所以到達 j 點時，就取 h[j]=max(h[j],cnt)；在所有的點都走完之後，各點的高度就已經算好了。

夠簡單吧！以下是這個解法的範例程式。

```
// tree height slow method O(nL), L=tree height
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010

int main() {
    int parent[N]={0};  // parent of node i
    int h[N]={0};  // height of node i
```

```
    int deg[N]; // num of children
    int n, i, j, ch;
    scanf("%d", &n);
    for (i=1; i<=n; i++) {
        scanf("%d", &deg[i]); // num of children
        for (j=0; j<deg[i]; j++) {
            scanf("%d", &ch);
            parent[ch] = i; // set parent
        }
    }
    int root;
    for (root=1; root<=n; root++)
        if (parent[root]==0) break; // no parent
    printf("%d\n", root);
    long long step=0;
    for (i=1; i<=n; i++) { // for each
        int cnt=0; // num of step from i
        // go up until root
        for (j=i; j!=0; j=parent[j]) {
            h[j]=max(h[j],cnt);
            cnt++; step++;
        }
    }
    long long total=0;
    for (i=1; i<=n; i++)
        total += h[i];
    printf("%lld\n",total);
    fprintf(stderr," %lld steps, ans=%lld\n", step, total);
    return 0;
}
```

這程式雖然容易理解，答案跑出來也是對的，但是有個問題，跑太慢，他的複雜度是多少呢？以一個極端的例子來看，如果這個家族 10 萬個成員全部都是單傳，最高祖先的高度是 99999，那麼這個程式的複雜度是多少呢？你或許會抗議哪裡有這麼多代的家族呀！唉呀，競賽程式就是這樣會給刁鑽的測資，worst case 就真的很 worst，況且題目根本沒說是人的家族，細菌 10 萬代就很有可能。好了，廢話少說，因為上面這個程式裡，每個點都要往上爬到根，所以在這個極端的例子裏，最下面的要跑 99999，倒數第二的要跑 99998，…，所以總共的複雜度約是 1 加到 99999，複雜度是 $O(n^2)$，一秒是跑不完的。

找到問題就設法改善吧。程式跑太慢通常是做了太多重複的事，在前面這個 10 萬代單傳的例子裏，這個方法之所以慢，就是走了太多一樣的路：最下一層的往上爬了 N 層，他的 parent(倒數第二層)爬了 N-1 層，兩位爬的路幾乎重複，假設倒數第二層確定知道自己的高度是 1 的話，那這兩位重疊的路只要爬一次不需要爬兩次。也就是說，對於 i 點，如果 h[i]已經確定，那麼 i 的子孫不必每位都爬 i 到根那段路，只要從 i 的高度往上計算爬一次就好了。那麼，要如何確定 i 的高度呢？根據定義，只要 i 的子孫都已經爬到 i 點，i 的高度就確知了。因為子孫關係有遞移性，我們得到一個結論：

如果我們可以調整計算的順序，使得「每個點都在他的所有孩子之後計算，那麼，每個點只需要向他的 parent 回報自己的高度就可以了」。

這樣一個順序我們稱為由下而上的順序(bottom-up sequence)。假設 seq[]存放著一個 bottom-up 順序，那麼，計算高度只需要以下簡單的程式碼：

```
for (i=0; i<n; i++){
    int v = seq[i];
    h[parent[v]] = max(h[parent[v]], h[v]+1);
}
```

所以重點在於如何找出一個 bottom-up 順序，這就是 queue 出場的時候了，請看以下的算法。我們說一個點可以離開是指他的孩子都已經離開，顯然這樣的離開順序是一個 bottom-up sequence：

對所有 i，以 deg[i]紀錄 i 目前還在的孩子數量，以一個 queue Q 放置所有可以離開但尚未離開的點，一開始把所有 deg[]為 0 的點放入 Q 中。每次從 Q 中拿出一個點 v，讓 v 離開，更新他 parent 的 deg[]，如果他 parent 的 deg[]降為 0，就將他 parent 放入 Q。

結合這樣的順序，我們可以將上面的程式改成下面的範例程式，這裡我們使用 STL 的 queue，另外我們也不需要特別去找 root，因為 bottom-up 順序的最後一個必然是 root。

```
// tree height bottom-up dp, using STL queue
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010

int main() {
    int parent[N]={0};  // parent of node i
    int h[N]={0};  // height of node i
    int deg[N]; // num of children
    queue<int> Q;
    int n, i, j, ch;
    scanf("%d", &n);
    for (i=1; i<=n; i++) {
        scanf("%d", &deg[i]);
        if (deg[i] == 0) Q.push(i);
        for (j=0; j<deg[i]; j++) {
            scanf("%d", &ch);
            parent[ch] = i;
        }
    }
    int root, total=0; // total height
    // a bottom-up traversal
    while (1) { // queue is not empty
        int v = Q.front(); // pop Q to v
```

```
        Q.pop();
        total += h[v]; // add to total
        int p = parent[v];
        if (p == 0) { // root
            root = v;
            break;
        }
        h[p] = max(h[p],h[v]+1);
        if (--deg[p] == 0)  // push parent to queue
            Q.push(p);
    }
    // root must be the last one in the queue
    printf("%d\n%d\n",root,total);
    return 0;
}
```

計算一下時間複雜度，輸入把 deg[]為 0 的放入 Q 中，花了 O(n)；while 迴圈裡面只有 O(1)的運算，問題是 while 迴圈做了幾次，因為每次有一點離開點 Q，而一個點不可能進入 Q 兩次，所以整個時間複雜度是 O(n)，比改善前好太多了。這個題目在 APCS 五級分的程度已經算難的，如果第一次看 tree 就看得懂，恭禧你，如果不太能了解，沒關係，後面還有專門的章節來講樹狀圖。

接下來要看個比較簡單的例子，這是堆疊運用的經典題目。

例題 P-3-2. 括弧配對

在本題中我們假設有三種括弧：{},(),[]。輸入一個由括弧組成的字串，請判斷是否是**平衡的**，括弧可以巢狀但是不可以交叉，例如「()[]{[]}」、「[(())){}]」、「[(){}{}]{}()」都是平衡的，但「([)]」不是平衡的，此外「()[」也不是，因為[沒有配對。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入包括若干行，最多 20 行，每行是一個表示式，由六個括弧字元組成的字串，沒有其他字元，字串長度不超過 150。

輸出：依序輸出每行是否是平衡的括弧，是則輸出 yes，否則輸出 no。

範例輸入：

```
()[]{[]}
[(())){}]
[(){}{}]{}()
([)]
```

```
()[
```

範例結果：

```
yes
yes
yes
no
no
```

括弧配對其實是計算表示式(expression evaluation)的其中一個環節，是資料結構課程中的一個重要課題，因為這是程式 compiler 裡面一定要做的工作。括弧的結構事實上也是遞迴定義的，所以可以用遞迴的方式做，但用堆疊更簡單。用堆疊檢查括弧是否平衡的算法也很直覺，基本上我們要找到每一個右括弧對應的左括弧，算法如下：

啟用一個 stack S。掃描輸入字串的每一個字元，
　如果是左括弧的一種：將他壓入 S；
　否則(是右括弧)，取出堆疊最上方的左括弧與其配對，如果不配，則錯誤。
如果字串結束後堆疊中還有東西，也是錯誤。如果都沒錯誤則是平衡的。

本題有三種括弧，在實作時要避免很繁瑣的窮舉三種括弧，我們使用了一個小技巧，請看以下的範例程式。將 6 種括弧字元對應到整數 0~5，先排左括弧再排右括弧，同類的一對的讓他們剛好差 3，這樣可以簡單的檢查是否配對。為了做這個對應，我們先宣告了一個字串 ch[7]="([{)]}";對每一個輸入字元 in[i]，用一個字串函數 strchr() 來找出 in[i]在 ch[]中的位置，這個函數如果不熟悉，也可以自己寫一個簡單的迴圈(如同程式中的註解)。

```
// p3-2 parenthesis matching, no STL
#include <bits/stdc++.h>

int main() {
  char in[210], ch[7]="([{)]}";
  int S[210], top; // stack
  while (scanf("%s",in)!=EOF) {
    top=-1; // clear stack
    int len=strlen(in);
    assert(len<=150);
    bool error=false;
    for (int i=0;i<len;i++) {
        int k=strchr(ch,in[i])-ch;
        //or using: for (k=0; k<6 && ch[k]!=in[i]; k++);
        assert(k<6); // no invalid char
        if (k<3) // left
            S[++top]=k; // push
        else {
```

```
            if (top<0 || k!=S[top]+3) { //mismatch
                error=true;
                break;
            }
            top--; // pop
        }
    }
    if (top>=0) error=true;
    printf((error)?"no\n":"yes\n");
  }
  return 0;
}
```

上面的程式是自製堆疊，如果使用 STL，則如下面的範例，程式雷同，就不多做解釋了。但是有件事情要提醒一下，因為這題有多筆測資要處理，你可以注意到我們把堆疊宣告在一個副程式中，每一筆測資呼叫一次副程式，這樣做的好處是每一筆測資進來的時候不必把 stack 清空，如果是寫在主程式中以迴圈處理每一筆測資(像上面那支範例的寫法)，那要留意你的寫法是否 stack 可能留有前一筆測資留下來的東西，而要將 stack 清空必須把他 pop() 到空為止。

```
// p3-2 parenthesis matching, using STL
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int sol() {
    stack<int> S;
    char in[210], ch[7]="([{)]}";
    if (scanf("%s",in)==EOF) return -1;
    // fprintf(stderr,"input length=%d\n",strlen(in));
    bool error=false;
    for (int i=0,len=strlen(in);i<len;i++) {
        int sym=strchr(ch,in[i])-ch;
        if (sym>=6) {
            fprintf(stderr,"i=%d, %d, %c",i, sym, in[i]);
            return -1;
        }
        assert(sym>=0 && sym<6);
        if (sym<3) { // left
            S.push(sym);
        }
        else {
            if (S.empty() || sym!=S.top()+3) {//mismatch
                error=true;
                break;
            }
            //match
            S.pop();
```

```
        }
    }
    if (!S.empty()) error=true;
    printf((error)?"no\n":"yes\n");
    return 0;
}
int main() {
    while (sol()==0) ;
    return 0;
}
```

下一個習題，我們是一個簡化版的計算表示式，輸入一個數學運算式，請計算出他的值，計算式中的運算只有加減乘除，其中除法是整數除法，運算的數字都只有一位正整數。

習題 Q-3-3. 加減乘除

輸入一個只有加減乘除的計算式，請計算並輸出其結果。其中的數字皆為一位正整數，計算結果的絕對值不會超過 10 億。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入一行是一個計算式，長度不超過 100。假設是一個正確的計算式。

輸出：輸出計算結果。

範例輸入：

```
5+2*3-6-7*2
```

範例結果：

```
-9
```

提示：因為加減乘除都是左結合的二元運算，左結合是指連續兩個運算時先算左邊，例如 2-3-5=(2-3)-5。現在需要考慮的只有先乘除後加減。

一開始先將第一個數字放起來，接著從前往後掃描計算式，每次考慮兩個字元，第一個一定是個運算符號(op)第二個一定是個數字(num)。如果 op 是個乘法或除法，我們可以立刻將前面的運算結果與 num 做運算，因為沒有別的運算優先權高與乘除。如果是加法或減法，我們必須考慮兩種情形：(1)如果之前有被保留的運算要先執行，目前的運算要保留，因為後面可能是乘除法；(2)如果之前沒有被保留的運算，這個運算要被保留。在考慮一連串的運算過程中，最多只有一個運算會被保留，而且這個被保留的運算

必定是加法或減法。最後要提醒一點：全部的運算都考慮完畢後要檢查是否有被保留的運算。

完整的 expression evaluation 可以在資料結構的課本上或是網路上查到，要考慮的因素很多所以做法比較複雜。

下面一題是堆疊運用的經典題。

例題 P-3-4. 最接近的高人 (APCS201902, subtask)

對於一個人來說，只要比他高的人就是高人。有 N 個人排成一列，對於每一個人，要找出排在他前方離他最近的高人，排在之後的高人不算，假設任兩個相鄰的人的距離都是 1，本題要計算每個人和他前方最近高人的距離之總和。如果這個人前方沒有高人(前方沒人比他高)，距離以他的位置計算(等價於假設最前方有個無窮高的高人)。

Time limit: 0.5 秒

輸入格式：第一行有一個正整數 N，第二行有 N 個正整數依序代表每個人的身高，相鄰數字間以空白隔開。N≤2e5，身高不超過 1e7。

輸出：輸出每個人與前方最近高人的距離總和。

範例輸入：

```
8
8 6 3 3 1 5 8 1
```

範例結果：

```
18
```

最天真無邪又直接的方法就是：對每一個 i，從 i-1 開始往前一一尋找，直到碰到比他大的數字或者前方已走投無路。為了方便起見，我們可以假設在最前方位置 0 的地方有個無限大的數字，這樣可以簡化減少邊界的檢查。但是這個方法太慢，算一下複雜度，在最壞的情形下，每個人都要看過前方的所有人，所以複雜度是 $O(n^2)$。這一題 n 是 2e5，一定是 O(n)或 O(nlog(n))的方法。

要改善複雜度，要想想是否有沒有用的計算或資料。假設身高資料放在陣列 a[]，如果 a[i-1] ≤ a[i]，那麼 a[i-1]不可能是 i 之後的人的高人，因為由後往前找的時候會先碰到 a[i]，如果 a[i]不夠高，a[i-1]也一定不夠高。同樣的道理，當我們計算到 i 的時候，任何 j<i 且 a[j] ≤ a[i]的 a[j]都是沒有用的。如果我們丟掉那些沒有用的，會剩下甚麼呢？一個遞減的序列，只要維護好這個遞減序列，就可以提高計算效率。單調序列要用二分搜嗎？其實連二分搜都不需要，想想看，當處理 a[i]時，我

們要先把單調序列後方不大於 a[i]的成員全部去除，然後最後一個就是 a[i]要找的高人，因為既然要做去除的動作，就一個一個比較就好了。那麼，要如何維護這個單調序列呢？第一個想法可能是將那些沒用的刪除，那可不行，陣列禁不起的折騰就是插入與刪除，因為必須搬動其後的所有資料。想想我們要做的動作：每次會從序列後方刪除一些東西，在加入一個東西。答案呼之欲出了，因為只從後方加入與刪除，堆疊是最適合的。請看以下的範例程式，這個程式非常簡單。

身高資料放在 a[i]，讀入之後就不再變動。準備一個堆疊 S 放置那個單調序列在 a[]中的索引位置。對每一個 a[i]，從堆疊中 pop 掉所有不大於它的東西，然後推疊的最上方就是 i 的高人，接著把 a[i] push 進堆疊。

```
// p_3_4a, stack for index
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 300010
#define oo 10000001
int a[N];
stack<int> S; // for index
int main() {
    int i,n;
    long long total=0; // total distance
    scanf("%d",&n);
    S.push(0);
    a[0]=oo;
    for (i=1; i<=n; i++) {
        scanf("%d",&a[i]);
    }
    for (i=1; i<=n; i++) {
        while (a[S.top()] <= a[i])
            S.pop();
        total += i - S.top();
        S.push(i);
    }
    printf("%lld\n",total);
    return 0;
}
```

時間複雜度？看到雙迴圈以為是 O(n²)嗎？跑跑看就知道這麼快一定不是 O(n²)，難不成測資出太弱了！台語說：事情不像憨人想的那麼簡單。這個程式雖然有個雙迴圈，內層 while 迴圈也的確有可能某幾次跑到 O(n)，但是整體的複雜度其實只有 O(n)，原因是，雖然單一次 while 迴圈可能跑很多個 pop，但是全體算起來不會 pop 超過 n 次，因為每個傢伙只會進入堆疊一次，進去一次不可能出來兩次，所以整體的複雜度是 O(n)。這種算總帳的方式來計算複雜度稱為均攤分析(amortized analysis)，這個題目是均攤分析的經典教學題目。

上面的範例程式把資料放在 a[]，用 stack 存 index，事實上我們也可以只存那個單調序列，這樣在 stack 中要存身高與位置，以下是這樣的寫法，這只是給有興趣的人參考，上面那個寫法就夠好了。

```
// p_3_4, stack
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 300010
#define oo 10000001
stack<pair<int,int>> S; // (b[i],i)
int main() {
    int i,bi,n;
    long long total=0; // total distance
    scanf("%d",&n);
    S.push({oo<<1,0});
    for (i=1; i<=n; i++) {
        scanf("%d",&bi);
        // <=bi is useless
        while (S.top().first <= bi)
            S.pop();
        total += i - S.top().second;
        S.push({bi,i});
    }
    printf("%lld\n",total);
    return 0;
}
```

前面的做法是由前往後掃，做到 i 的時候往前找 i 的對象(高人)。射鵰英雄傳的歐陽鋒都可以逆練九陰真經了，這個題目是不是可以倒著來解：由後往前，做到 i 時看看 i 是誰的對象(高人)。確實可以，基本想法是這樣：

> 由後往前掃，使用一個資料結構存 S 放目前尚未找到高人的人。掃到 i 時，我們檢查 i 是那些人的高人，也就是 S 中那些人的身高小於 i 的身高，然後將這些人從 S 中移除，最後把 i 放入 S 中，結束這一回合。

為了讓有興趣的人練習資料結構，我們介紹使用 map 來做的方法，因為身高可能相同，我們要用 multiset。(APCS 的難度應該不會考到 map，但有興趣的人或學習競賽的人可以練習。)

```
// p_3_4c, using multimap
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 300010
#define oo 10000001
int a[N];
```

```
int main() {
    int i,n;
    long long total=0; // total distance
    scanf("%d",&n);
    a[0]=oo;
    for (i=1; i<=n; i++) {
        scanf("%d",&a[i]);
    }
    multimap<int,int> M; //(a[i],i) of unsolved
    for (i=n; i>=0; i--) {
        auto it=M.begin();
        // find the whose solution is i
        while (it!=M.end()&& it->first<a[i]) {
            total += it->second - i; // add distance
            it=M.erase(it); // erase and point to next
        }
        M.insert({a[i],i});
    }
    printf("%lld\n",total);
    return 0;
}
```

下面這一題，是前一題的一種變化，我們當作習題。

習題 Q-3-5. 帶著板凳排雞排的高人 (APCS201902)

身高高不一定比較厲害，個子矮的如果帶板凳可能會變高。有 n 個人排隊買雞排，由前往後從 1 到 n 編號，編號 i 的身高為 h(i)而他帶的板凳高度為 p(i)。若 j 在 i 之前且 j 的身高大於 i 站在自己板凳上的高度，也就是說 h(j)>h(i)+p(i)，則 j 是 i 的「無法超越的位置」，若 j 是 i 最後的無法超越位置，則兩人之間的人數 (i-j-1)稱為 i 的「最大可挑戰人數」S(i)；如果 i 沒有無法超越位置，則最大可挑戰人數 S(i)=i-1，也就是排在他之前全部的人數。

舉例來說，假設 n=5，身高 h 依序為(5, 4, 1, 1, 3)而板凳高度 p 依序是 (0, 0, 4, 0, 1)。計算可得 h(i)+p(i)=(5, 4, 5, 1,4)，編號 1 的人前面沒有人，所以 1 的最大可挑戰人數 S(1) = 0。對編號 2 的人而言，h(2)+p(2)= 4，而往前看到第一個大於 4 的是 h(1)=5，所以 S(2)=2-1-1=0。而 h(3)+p(3) =5，前面沒有人的身高大於 5，所以 S(3)=2。而 h(4)+p(4)=1， h(2) = 4 > 1，所以位置 2 是 4 的無法超越位置，S(4)=4-2-1=1。同理可求出 S(5)=3，他的不可超越位置是 1 的身高 5。

輸入 h()與 p()，請計算所有人 $S(i)$的總和。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行為 n，n ≤ 2e5；第二行有 n 個正整數，依序是 h(1)~h(n)；第三行有 n 個非負整數，依序代表是 p(1)~p(n)；數值都不超過 1e7，同一行數字之間都是以空白間隔。

輸出：輸出 S(i)的總和。答案可能超過 2^{32}，但不會超過 2^{60}。

範例輸入：

```
5
5 4 1 1 3
0 0 4 0 1
```

範例結果：

```
6
```

習題 Q-3-5 提示：本題與例題 P-3-4 的主要差異是多了板凳高度，另外有個小差異是計算的值略有不同。例題的題解中最重要的重點是我們只要維護一個單調遞減序列，既然是單調序列，就可以用二分搜找到第 i 個人站在板凳上的高度。此外，例題中我們介紹了另外一種使用 multimap 的解法，一樣可以稍作修改後解此題。

雖然保護樹木很重要，尤其學資料結構與演算法的人，對樹總是抱持著尊敬的心，但是有些樹種的目的就是要砍下來當木材的，請環保人士不要對下一題的名字抗議。來看下一個例題，砍樹。

例題 P-3-6. 砍樹 (APCS202001)

N 棵樹種在一排，現階段砍樹必須符合以下的條件：「讓它向左或向右倒下，倒下時不會超過林場的左右範圍之外，也不會壓到其它尚未砍除的樹木。」。你的工作就是計算能砍除的樹木。若 c[i]代表第 i 棵樹的位置座標，h[i]代表高度。向左倒下壓到的範圍為[c[i]-h[i],c[i]]，而向右倒下壓到的範圍為[c[i],c[i]+h[i]]。如果倒下的範圍內有其它尚未砍除的樹就稱為壓到，剛好在端點不算壓到。

我們可以不斷找到滿足砍除條件的樹木，將它砍倒後移除，然後再去找下一棵可以砍除的樹木，直到沒有樹木可以砍為止。無論砍樹的順序為何，最後能砍除的樹木是相同的。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行為正整數 N 以及一個正整數 *L*，代表樹的數量與右邊界的座標；第二行有 N 個正整數代表這 N 棵樹的座標，座標是從小到大排序的；第三行有 N 個正整數代表樹的高度。同一行數字之間以空白間隔，N≤1e5，L 與樹高都不超過 1e9。

輸出：第一行輸出能被砍除之樹木數量，第二行輸出能被砍除之樹木中最高的高度。

範例輸入：

```
6 140
10 30 50 70 100 125
30 15 55 10 55 25
```

範例結果：

```
4
30
```

題目中有句話：無論砍樹的順序為何，最後能砍除的樹木是相同的。所以不斷找到滿足砍除條件的樹木，將它砍倒後移除，直到沒有樹木可以砍為止，就可以得到正確的答案，問題只是效率好不好。我們先看看天真的作法。

寫程式最重要的是知道每次要做甚麼事情，資料中存放的是甚麼，有何特性。如果我們用陣列來存這些樹，那麼立刻碰到一個問題：當樹被砍掉了之後怎麼辦？我們當然必須維護好陣列中是沒有被砍掉的樹，否則判斷就會出問題。第一個想法就是想要把砍倒的樹的資料從陣列中移除，那麼陣列中如何移除資料呢？只能把後面的往前搬，陣列最經不起插入與刪除的折騰，好吧，反正電腦累，程式碼倒是簡單。

下面的範例程式是這樣的想法寫出來的。先寫一個副程式從頭到尾檢查找到第一根可以砍的樹。這裡我們加了一個小技巧，在兩個邊界種上無限高的樹，這是常用的技巧，目的是省卻檢查邊界條件的麻煩。主程式中每次呼叫副程式，找到可以砍的樹之後就藉著搬移後面的資料來移除這筆資料。

```c
// O(n^2), remove cut tree from array
#include <stdio.h>
#define N 100010
#define oo 1000000000
// return a removable tree; return -1 if none
int removable(int c[], int h[], int k) {
    for (int i=1; i<k-1; i++)
        if ((c[i]-h[i]>=c[i-1]) || (c[i]+h[i]<=c[i+1]))
        return i;
    return -1;
}

int main() {
    int n, l, c[N], h[N]; // center and height
    int total=0, high=0; // total removed and max height
    scanf("%d%d",&n,&l);
    // set left and right boundaries
```

```
    c[0]=0, h[0]=oo;
    c[n+1]=l, h[n+1]=oo;
    for (int i=1;i<=n;i++)
        scanf("%d",&c[i]);
    for (int i=1;i<=n;i++)
        scanf("%d",&h[i]);
    n += 2; // two boundary
    while (1) {
        int cut = removable(c, h, n); // the previous alive
        if (cut < 0) break;
        total++;
        if (h[cut] > high) high=h[cut];
        // remove cut from array
        for (int i=cut; i<n-1; i++)
            h[i] = h[i+1]; // overwrite by next
        for (int i=cut; i<n-1; i++)
            c[i] = c[i+1];
        n--;
    }
    printf("%d\n%d\n", total, high);
    return 0;
}
```

複雜度如何？O(n²)，因為砍樹的順序剛好是從前往後，那麼總共搬移的資料量就會是從 1 加到 n-1。處理陣列資料被移除的方式除了真的把他移除之外，還有一種常用的方法是將他標記，這一題我們可以把砍除的樹標記為高度 0，這麼一來刪除就只花 O(1)，但是有一好沒兩好，我們在檢查左右存活的樹的時候，就必須往左往右尋找，因為旁邊的樹可能已經被砍除。以下是這樣寫出來的程式，很不幸，複雜度還是 O(n²)。

```
// P_3_6, n^2 method, mark removed tree
#include <stdio.h>
#define N 100010
#define oo 1000000000

int main() {
    int n, l, c[N], h[N]; // center and height;
    int total=0, high=0; // total removed and max height
    scanf("%d%d",&n,&l);
    // set left and right boundaries
    c[0]=0, c[n+1]=l;
    h[0]=h[n+1]=oo;
    for (int i=1; i<=n; i++)
        scanf("%d", &c[i]);
    for (int i=1; i<=n; i++)
        scanf("%d", &h[i]);
    // repeat until no tree can be removed
    while (1) {
        int i;
        for (i=1; i<=n; i++) { // check each tree
```

```
            if (h[i]==0) continue; // already removed
            int prev=i-1, next=i+1;
            while (h[prev]==0) prev--; // previous remaining tree
            while (h[next]==0) next++; // next remaining tree
            if (c[i]-h[i]>=c[prev] || c[i]+h[i]<=c[next])
                break; // removable
        }
        if (i>n) break; // no tree can be removed
        total++;
        if (h[i] > high) high=h[i];
        h[i]=0;
    }
    printf("%d\n%d\n", total, high);
    return 0;
}
```

這一題有人以為應該從矮的樹開始砍，但這顯然沒有甚麼幫助，因為高的樹可能比矮的樹先砍除。其實我們只要想想：目前不能被砍除的樹，什麼狀況會變成可以砍除呢？一定與他相鄰的(還存活的)樹被砍掉，才有可能空出多餘的空間。加油！解法就快要浮現了。

假設我們以一個佇列 Q 存放那些砍除的樹，一開始先檢查一次那些樹可以被砍除，把他們放入 Q，然後我們一次將 Q 中的樹拿出來，檢查他左右相鄰的樹是否可以變成可以砍除，如果可以，就砍除並放入 Q，這樣做直到 Q 中沒有樹為止。因為每一棵被砍除的樹都有考慮他的左右，所以不會漏砍。這是個正確的算法，但是這個過程中牽涉一個問題，就是必須很快的決定某棵樹的左右鄰居。趁這個機會我們簡單介紹一下串列鏈結(linked list)。

串列鏈結(Linked list)

串列是一個很重要的資料結構，顧名思義，他是將資料以鏈結的方式串成一列。他最重要的運用場合是當資料無法依序儲存在連續空間的時候，否則，用陣列會比串列更簡單有效率。但是陣列的缺點就是必須連續擺放，在某些應用時，這個限制變得不可能，例如檔案存在硬碟中，因為檔案會新增與刪除，所以將一個檔案放在連續的磁碟位置變得不可能。鏈結串列的概念是不必把資料連續擺放，只要對每一筆資料記載他的下一筆所在位置，有了這些資料，我們就可以一筆接一筆的把全部的資料追蹤一遍了。鏈結串列有單向與雙向，看應用而定，雙向的串列我們會儲存每一個資料的前一筆與下一筆鏈結，單向的只存下一筆。

通常鏈結串列在運用時多半搭配記憶體的配置(memory allocation)與指標(pointer)變數，但是在解題程式中，我們通常會避免這兩個東西，原因之一是指標很難除錯，另外一個原因是解題的程式通常都有辦法避掉指標，另外用偷懶的方式來做。

這份教材是針對考試與競賽的解題，所以我們就不對這個部份多做說明了，有興趣的讀者可以很容易在網路上或者資料結構的教科書中找到教學文件。在解題的場合，我們可以在陣列中構造所需的鏈結串列，用陣列的索引(index)來取代記憶體位置(指標)。我們接著就看看串列如何用在例題 P-3-6。

在下面的範例程式中，我們定義了一個 struct，裡面存放一棵樹的資料，包括：位置、高度、前一棵的位置、下一棵的位置、以及是否還存活。這裡需要使用雙向鏈結，其中前一棵與下一棵的位置都是指在陣列中的索引值。如前所述，我們以一個佇列 Q 存放那些砍除的樹。函數 removable()用來檢查第 i 棵樹是否可以被砍掉，如果可以，我們會將他從串列中移除，並且放入 Q 中。把一筆資料從串列中移除不需要像陣列一樣搬一大堆資料，只需要將左邊的 next 改成 i 的 next，把右邊的 pre 改成 i 的 pre，這樣在串列中沿著鏈結追蹤時就再也找不到 i 了，也就相當於從串列中移除了。

主程式一開始先做一次地毯式搜索，對每一個檢查每一個 i 呼叫一次 removable(i)，接著進入一個 while 迴圈，迴圈會一直做到 Q 必成空的為止。迴圈中每次從 Q 中拿出一棵樹，對他的左右會叫一次 removable()。這個程式的複雜度是多少？很顯然 removable()是 O(1)，因為其中沒有迴圈也沒有遞迴。因為每棵樹最多只會被放入 Q 中一次，所以整體的複雜度是 O(n)。

```
// P_3_6b, topological sort and linked list
#include <queue>
#include <cstdio>
using namespace std;
#define N 100010
#define oo 1000000001
struct {
    int c, h; // center and height
    int pre, next; // linked list
    int alive;
} tree[N];
queue<int> Q; // queue for removed tree
// check if i is removable, if yes, remove it
void removable(int i) {
    if (!tree[i].alive) return;
    int s=tree[i].pre, t=tree[i].next;
    if (tree[i].c - tree[i].h >= tree[s].c \
        || tree[i].c+tree[i].h<=tree[t].c) {
        tree[i].alive = 0;
        Q.push(i); // insert into queue
        tree[s].next = t; //remove from linked list
        tree[t].pre =s;
    }
    return;
}

int main() {
```

```
    int n,l,i;
    int total=0, high=0;
    scanf("%d%d",&n,&l);
    // initial data
    for (i=1; i<=n; i++)
        scanf("%d", &tree[i].c);
    for (i=1; i<=n; i++)
        scanf("%d", &tree[i].h);
    for (i=1; i<=n; i++) {
        tree[i].pre = i-1;
        tree[i].next = i+1;
        tree[i].alive = 1;
    }
    // two boundaries
    tree[0].c = 0, tree[0].h = oo;
    tree[n+1].c = l, tree[n+1].h = oo;
    // initial check
    for (i=1; i<=n; i++)
        removable(i);
    while (!Q.empty()) {
        int v=Q.front();
        Q.pop();
        total++;
        high = max(high, tree[v].h);
        // check its previous and next
        removable(tree[v].pre);
        removable(tree[v].next);
    }
    printf("%d\n%d\n", total,high);
    return 0;
}
```

上面這個程式的方法，其實類似於圖論演算法中計算 dag 的 topological sort 所用的方式，我們在後續介紹圖的章節中會再介紹。事實上，這一題還有更簡單的作法。

回到剛才講到的關鍵點：一棵目前不能被砍除的樹，只有在相鄰的樹被砍掉後才有可能變成可以砍除。假設我們從前往後掃描所有的樹，可以砍的就砍了，不能砍的暫且保留起來，那麼被保留的樹和時會變成可以被砍呢？因為他的左方(前方)不會變動(我們從左往右做)，所以一定是右邊的樹被砍了之後才有可能。此外，那些被保留的樹，一定只有最後一棵需要考慮！因為其他的被保留樹的右邊都沒有動。好了，最後的問題是要怎麼存那些被保留的樹呢？我們一樣可以用鏈結串列，但是沒有必要，因為我們只要知道每一棵樹還存活的的前一棵樹就可以，而且(重點是)我們只需要檢查最後一棵保留樹，也只需要從後面往前刪除。答案出來了，用堆疊就夠了。

以下是用堆疊寫的範例程式。需要留意的是，當一棵樹被砍除時，我們要用一個 while 迴圈對堆疊出口的樹做檢查，因為可能砍到一棵可能引發連鎖效應一路往前砍掉很多棵。複雜度 O(n)，因為每個樹最多只進入堆疊一次。請注意我們在堆疊中只放樹的 index，當然也可以寫成在堆疊中存放樹的位置與高度。

```cpp
// P_3_6, O(n) using stack
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010
#define oo 1000000000

int main() {
    int n,l,i, c[N],h[N];
    int total=0, high=0; // num of removable and max height
    stack<int> S; // the index of remaining trees so far
    scanf("%d%d",&n,&l);
    // oo trees at two boundaries
    c[0]=0;
    h[0]=oo;
    c[n+1]=l;
    h[n+1]=oo;
    for (i=1;i<=n;i++)
        scanf("%d", &c[i]);
    for (i=1;i<=n;i++)
        scanf("%d", &h[i]);
    S.push(0);
    for (i=1;i<=n;i++) { // scan from left to right
        // if i is removable
        if (c[i]-h[i]>=c[S.top()] || c[i]+h[i]<=c[i+1]) {
            total++;
            high = max(high, h[i]);
            // backward check remaining tree in stack
            while (c[S.top()]+h[S.top()]<=c[i+1]) {
                total++; high = max(high, h[S.top()]);
                S.pop();
            }
        } else { // i is not removable
            S.push(i);
        }
    }
    printf("%d\n%d\n", total,high);
    return 0;
}
```

滑動視窗(Sliding window)

接下來要介紹滑動視窗的技巧，這個名字可能不是很統一，基本上是以兩個指標維護一段區間，然後逐步將這區間從前往後(從左往右)移動。維護兩個指標這一類的方法也有人稱為雙指標法，但也包含兩個指標從兩端往中間移動，就像我們曾在介紹過，在排好序的序列中尋找兩數相加之和的問題時，可以用兩個指標逐步移動來做，會比連續的二分搜還好。也有人稱為爬行法，維護一個逐步右移的區段很像是毛毛蟲的爬行，前方先往前，後方再跟上，不斷的重複這個亦步亦趨的方式。反正名稱不重要，我們來看看一些例子。

下一個例題與 P-2-11 幾乎相同，但此處限制輸入的數字為正整數，原題正負不限，所以這一題比較簡單。原題必須以 set 來解超過 APCS 考試範圍，這一題則是滑動視窗的基本題型。

例題 P-3-7. 正整數序列之最接近的區間和

輸入一個正整數序列(A[1], A[2], …, A[n])，另外給了一個非負整數 K，請計算哪些連續區段的和最接近 K 而不超過 K，以及這樣的區間有幾個。n 不超過 20 萬，輸入數字與 K 皆不超過 10 億。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 n 與 K，第二行 n 個整數是 A[i]，同行數字以空白間隔。

輸出格式：第一行輸出最接近 K 但不超過 K 的和，第二行輸出這樣的區間有幾個。

範例輸入：

```
5 10
4 3 1 7 4
```

範例輸出：

```
8
2
```

說明：(4,3,1)與(1,7)兩個區間的和都是 8。

假設一開始我們先固定左端在 0 的位置，從 0 開始一直移動右端以尋找最好的右端，也就是區段的和不超過 K 的最大，因為數字都是正的，右端越往右移，區段和就越大，所以當移動到不能再移時(否則就會超過 K)，我們就找到了「以 0 為左端的最好區間」。接著我們將這個區段(視窗)逐步右移，每次先將右端往右移動一格，這時總和可能會超過 K，所以我們要移動左端直到滿足區段和不超過 K 為止。每次右端移動一格，就會找到以此為右端的最佳解，所以當視窗向右滑到底時，我們就找出了最佳解。範例程式如下，以可以用 P_2_11 的程式來解做為對照，不過要稍微修改一下。

```cpp
// P3-7, sum of subarray, positive
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 1000010
int a[N];

int main() {
    int n,k;
    long long total=0;
```

```
    scanf("%d%d",&n,&k);
    for (int i=0;i<n;i++) {
        scanf("%d", &a[i]);
        total+=a[i];
    }
    int left, right,ans=0, sum=0, num=0;
    // sum is for range [j,i]
    // move right one by one
    for (left=0,right=0;right<n;right++) {
        sum+=a[right];
        // move left until sum<=k
        while (sum>k) {
            sum-=a[left];
            left++;
        }
        // check answer
        if (sum>ans) {
            ans=sum;
            num=1;
        }
        else if (sum==ans) num++;
    }
    printf("%d\n%d\n",ans,num);
    fprintf(stderr,"total=%lld, k=%d; %d %d\n",total,k,ans,num);
    return 0;
}
```

上面一題的視窗大小是會變動的，其實比較像毛毛蟲，不像窗戶。下面一題我們來個固定長度的窗戶。

例題 P-3-8. 固定長度區間的最大區段差

對於序列的一個連續區段來說，區段差是指區段內的最大值減去區段內的最小值。有 N 個非負整數組成的序列 seq，請計算在所有長度為 L 的連續區段中，最大的區段差為何。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 N 與 L，第二行是序列內容，相鄰數字間以空白隔開。L≤N≤2e5，數字不超過 1e9。

輸出：輸出所求的最大區間差。

範例輸入：

```
9 4
1 4 3 6 9 8 5 7 1
```

範例結果：

7

說明：(8,5,7,1)的長度是 4，區段差是 7。

連續的 L 個格子是一個窗戶，長度 N 的序列有 N-L+1 個可能的窗戶位置，每一個位置，把窗戶內的最大值減去最小值，可以得到這個區段的區段差，所有 N-L+1 個區段差中要找到最大的。直接的天真做法當然不行，每個區段跑一遍找最大最小需要 O(L)，N-L+1 個區段就是 O(L(N-L+1))，L=N/2 時，就是 $O(N^2)$。

這個題目解法的主要想法是紀錄區段內的最大值與最小值，當區段往右移動時，更新最大與最小值。乍看之下，更新最大最小值很容易就可以做到，因為只移進來一個值，移出去一個值。可是仔細想想，如果移出去的是最大值，那最大值會變成多少呢？可能會變也可能不變，這麼想下去覺得問題沒有那麼簡單。

前一章學過的 multiset 是否有用呢？因為 set 可以簡單的找到最大與最小，移進移出也都可以操作，所以確實以 multiset 可以來幫忙，時間複雜度是 O(Nlog(N))。不過這裡要介紹的是 O(N)的解法，用的資料結構是 deque，也就是雙向佇列。

我們要不斷的找出窗戶內的最大值與最小值，我們先看最大值的找法，最小值的做法完全類似。其實這一題跟例題「P-3-4 最接近的高人」有點像，有個相同的單調性觀察：「當窗戶的右端推到 i 時，在 i 之前所有不大於 seq[i]的元素，對未來找最大值都是沒有用的。」因此，我們可以刪除那些沒用的資料，只要維護好窗戶內的一個遞減子序列，與 P-3-4 不同處在於，因為窗戶會往右移動，資料有可能從窗戶右端離開，因此我們不能用堆疊來做，要用 deque 來做，以下是範例程式。

找最小值的做法相同，只要改變大小關係就可以了，所以我們用兩個 deque：max_q 與 min_q。函數 put_max(i)處理將 seq[i]從窗戶右端放入 max_q 時的動作：先從 max_q 的後端移除所有不大於它的成員(它是個遞減序列)，然後把自己推進 max_q 內。在主程式中，跑一個迴圈讓窗戶的右端 i 逐步往右推，每次執行 put_max()與 put_min()，另外檢查兩個 deque 的前端元素是否已經離開窗戶左端。處理完畢後 max_q.front()就是窗戶內的最大值，min_q.front()就是最小值。留意因為比較短的區段差不會比較大，所以初始時我們窗戶右端從 0 開始跑，此時窗戶寬度小於 L 但並不影響答案。

```
// P3-8, O(N) using deque
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define MAXN 200010
```

```
int seq[MAXN];
deque<int> max_q, min_q; // index of max and min queue
// put seq[i] from back of max_q
void put_max(int i) {
    // remove useless
    while (!max_q.empty() && seq[max_q.back()]<=seq[i])
        max_q.pop_back();
    max_q.push_back(i);
}
// put seq[i] from back of min_q
void put_min(int i) {
    // remove useless
    while (!min_q.empty() && seq[min_q.back()]>=seq[i])
        min_q.pop_back();
    min_q.push_back(i);
}

int main() {
    int n, L, i,j, max_diff=0;
    scanf("%d%d\n", &n, &L);
    for (i=0; i<n; i++) {
        scanf("%d",&seq[i]);
    }
    put_max(0);
    put_min(0);
    for (i=1; i<n; i++) {
        // put the ith element into max_queue
        if (max_q.front()<=i-L)  // out-of-range
            max_q.pop_front(); // its index
        put_max(i);
        // put the ith element into min_queue
        if (min_q.front()<=i-L)  // out of range
            min_q.pop_front();
        put_min(i);
        // the diff of this subarray
        int diff=seq[max_q.front()]-seq[min_q.front()];
        max_diff=max(max_diff, diff);
    }
    printf("%d\n",max_diff);
    return 0;
}
```


前面的題目都是跟序列中數字的大小有關係，接下來看有數字但沒有大小的題目，一共有四個類似的題目，我們示範兩題，另外兩題當做習題。

例題 P-3-9. 最多色彩帶

有一條細長的彩帶，彩帶區分成 n 格，每一格的長度都是 1，每一格都有一個顏色，相鄰可能同色。給定長度限制 L，請找出此彩帶長度 L 的連續區段最多可能有多少種顏色。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是兩個正整數 n 和 L，滿足 $2 \le L \le n \le 2\times10^5$；第二行有 n 個以空白間隔的數字，依序代表彩帶從左到右每一格的顏色編號，顏色編號為小於 n 的非負整數。

輸出：長度 L 的彩帶區段最多有多少種顏色。

範例輸入：

```
10 5
4 6 1 4 0 6 8 0 5 6
```

範例結果：

```
5
```

說明：區間[3, 7]有 5 色。

這是一個簡單的題目，把一個固定長度 L 的視窗，從左到右逐步滑動過去，找出視窗內的顏色總數就行了。所以重點只有一個：如何找出是窗內的顏色數。因為顏色是從 0 開始連續編號，我們只要準備一個表格 cnt，以 cnt[i]紀錄顏色 i 的出現次數。每次進入一個顏色，就將該顏色計數器加一；移出一個顏色就將顏色計數器減一。那怎麼知道窗內的顏色數呢？不能每次都掃描表格，因為太浪費時間，我們可以只關注顏色數的變動。我們可以用一個變數記錄目前的顏色數，若 cnt[i]++之後變成 1，那就知道顏色數多了一種；相同的，如果 cnt[i]減 1 之後變成 0 就是少了一色，其他狀況的顏色數量沒變化。

```cpp
// P_3_9, sliding window, max color of fixed length
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 200010
int seq[N], cnt[N]={0}; // counter of color i

int main() {
    int n,L,i;
    scanf("%d%d",&n,&L);
    int n_color=0;
    for (i=0;i<n;i++)
        scanf("%d",&seq[i]);
    // initial window
    for (i=0;i<L;i++) {
        int color=seq[i];
        cnt[color]++;
        if (cnt[color]==1) n_color++;
    }
    int ans=n_color, left;
```

```
    // sliding window, seq[i] in, seq[left] out
    for (left=0,i=L; i<n; i++,left++) {
        int color=seq[i];
        cnt[color]++;
        if (cnt[color]==1) n_color++;
        color=seq[left];
        cnt[color]--;
        if (cnt[color]==0) n_color--;
        ans=max(ans,n_color);
    }
    printf("%d\n",ans);
    return 0;
}
```

下面一題很類似，但多了一些要處理的問題。

例題 P-3-10. 全彩彩帶 (需離散化或字典) (@@)

有一條細長的彩帶，彩帶區分成 n 格，每一格的長度都是 1，每一格都有一個顏色，相鄰可能同色。如果一段彩帶中的顏色包含整段彩帶的所有顏色，則稱為「全彩彩帶」。請計算出最短的全彩彩帶長度。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行為整數 n，第二行有 n 個以空白間隔的非負整數，依序代表彩帶從左到右每一格的顏色編號，$n \le 2e5$，顏色編號不超過 1e9。

輸出：最短的全彩彩帶長度。

範例輸入：

```
10
6 4 1 6 0 4 5 0 7 4
```

範例結果：

```
7
```

說明：彩帶共有{0,1,4,5,6,7}五色區，區間[3, 9]是最短的包含五色區段。

基本上我們打算維持住一個視窗，視窗裡面包含所有的色彩，每次當視窗往右堆一格的時候，檢查左端是否可以往右移以便縮減寬度，當視窗推到底之後，我們就已經檢查過所有可能的右端點，在過程中找到最窄的視窗寬度，就是答案。

何時左端可以縮減呢？答案很明顯，如果左端點顏色在是窗內出現超過一次，就可以丟棄，否則，不能右移。另外一個問題是顏色的編號範圍，在前一題 P-3-9 時，顏色的編號不大於 n，所以我們可以很容易的開一個表格當每個顏色的計數器，但是在這一題，顏色的編號可能達到 10 億，想要開一個 10 億的表格是會碰上麻煩的。雖然編號可能高達 10 億，但是資料最多就只有 20 萬個，顏色當然最多也只有 20 萬種，因此，如果我們可以將顏色的編號先修改為 0 開始的連續編號，就可以用上一題的表格方式來處理計數器了。在第二章的例題 P-2-2 與 P-2-2C 中我們示範了如何用 sort 或 map 做離散化，在這裡就可以派上用場了。下面的範例程式是以 sort 以及自己寫二分搜來做離散化的寫法，副程式 c_id()就是自己寫的二分搜來查詢 color 在 dic[]中的位置。在 35~36 行我們把所有的 seq[]都換成 rank 之後就完成了離散化的工作。接著進行滑動視窗來找答案。以兩個變數 left 與 right 來維持至目前的視窗範圍，right 每次加 1，left 則只要顏色還有重複就盡可能縮減。要注意的是，為了簡化程式碼，我們並不保證一開始的視窗是包含所有的色彩的，但是在第 49 行加了一個 if 來確保當全部的色彩都在時，才會記錄答案。如果一開始要先找到出於全彩視窗也可以，但可能要多寫幾行。這個範例的程式碼雖然有一點長(其實也不算太長)，但是方法的正確性不難理解，重點在於左端的顏色如果在是窗內僅出現一次，那就絕對不能右移。

```
00 // P_3_10 shortest all-color range, only basic instruction
01 #include<bits/stdc++.h>
02 using namespace std;
03 #define N 1000010
04 int seq[N], cnt[N]={0}; // counter of color
05 int dic[N]; // dictionary, map color to 0~m-1
06 // binary search to find id of color
07 int c_id(int color, int nc) {
08     if (color<=dic[0]) return 0;
09     int p=0;
10     for (int jump=nc/2; jump>0; jump>>=1) {
11         while (p+jump<nc && dic[p+jump]<color)
12             p+=jump;
13     }
14     return p+1;
15 }
16
17 int main() {
18     int n;
19     scanf("%d",&n);
20     for (int i=0;i<n;i++)
21         scanf("%d",&seq[i]);
22     // discretization
23     for (int i=0;i<n;i++)
24         dic[i]=seq[i];
25     sort(dic, dic+n);
26     // remove duplicate color
27     int n_color=1; // num of color
28     for (int i=1;i<n;i++) { // not checking dic[0]
```

```
29          if (dic[i]!=dic[i-1]) {
30              dic[n_color]=dic[i];
31              n_color++;
32          }
33      }
34      // replace color with its rank
35      for (int i=0;i<n;i++)
36          seq[i]=c_id(seq[i],n_color);
37      // end of discretization, start sliding window
38      // w_color = num of color in window [left, right-1]
39      int left=0, right=0, w_color=0, shortest=n;
40      while (right<n) {
41          cnt[seq[right]]++;
42          if (cnt[seq[right]]==1) w_color++;
43          right++;
44          // shrink left until left color appear only once
45          while (cnt[seq[left]]>1) {
46              cnt[seq[left]]--;
47              left++;
48          }
49          if (w_color==n_color)
50              shortest=min(shortest, right-left);
51      }
52      printf("%d\n",shortest);
53      return 0;
54  }
55
```

在第二章我們曾經揭露出以 STL 中的 map 來做離散化的寫法，底下是這一題用 map 的範例程式。這裡在強調一次，以 APCS 來說，應該不至於會考出非用特殊資料結構 (如 map) 才能解的題目，但是很多題目如果使用這些資料結構可以簡化我們的程式，在考試與比賽時，程式碼的長短對犯錯機率與 debug 影響很大，所以要不要學，要看個人狀況而定，程度已經夠了，就多學一點好用的工具，如果對基本的程式還很生疏，就練習熟練後再說。

```
// P_3_10 shortest all-color range, using map
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 1000010
int seq[N], cnt[N]={0}; // counter of color
map<int,int> dic; // dictionary

int main() {
    int n;
    scanf("%d",&n);
    // input and discretization
    for (int i=0;i<n;i++) {
        scanf("%d",&seq[i]);
        dic[seq[i]]=0; // insert if not existing
```

```
    }
    int n_color=0; // num of color
    for (auto &p:dic) p.second=n_color++;
    // find initial window of all color
    int left=0, right=0, w_color=0, shortest=n;
    // w_color = num of color in window [left, right-1]
    // sliding window
    while (right<n) {
        int color=dic[seq[right]];
        cnt[color]++;
        if (cnt[color]==1) w_color++;
        right++;
        // shrink left until left color appear only once
        while (1) {
            color=dic[seq[left]];
            if (cnt[color]==1) break;
            cnt[color]--;
            left++;
        }
        if (w_color==n_color)
            shortest=min(shortest, right-left);
    }
    printf("%d\n",shortest);
    return 0;
}
```

這一題因為顏色數字並沒有大小關係，所以其實順序不重要，離散化的過程可以用 unordered_map 取代 map，不過這份教材並沒有打算介紹那個資料結構，所以就不多說了，但範例程式中有附，有興趣的人可以自己參考。

上面的寫法，如果不計離散化，時間複雜度都只有 O(n)，這一題應該已經完美了，但以下還要提出一個比較慢的方法！慢且！學完快的為什麼還要學慢的呢？解題不是重點，技術才是重點，因為題目千變萬化，只有學到了技術才有用。下面這個方法饒富趣味，而且後面的章節我們也會碰到。

對於一個固定的輸入序列來說，令 f(L)是長度 L 的連續區段可以擁有的對多顏色數。那麼，P-3-9 就是對輸入的 L 計算 f(L)的值，而 P-3-10 則是要計算滿足 f(L)≥nc 的最小 L 值，其中 nc 是總共的顏色數。函數 f()明顯有單調性，因為長度更長的情況下，最多擁有的最多顏色數只會增加或不變，不會變少。因此，如果把 P-3-9 的程式寫成函數，然後不斷的呼叫 f()去計算 f(1)， f(2)， …，直到第一個回傳值不小於 nc 時，我們就找到了 P-3-10 的解。且慢，既然 f()具單調性，線性搜尋就太遜了，我們當然可以用二分搜。以下是這樣的想法寫出的程式，時間複雜度是多少？如果離散化不計，P-3-9 是 O(n)，長度範圍是 1~n，二分搜會呼叫 O(log(n))次，所以是 O(nlog(n))。

```cpp
// P_3_10 shortest all-color range, repeatedly call P-3-9
// using binary search to find shortest
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 1000010
int seq[N];
int dic[N]; // dictionary, map color to 0~m-1
// max num of color of window size w
int w_col(int w, int n) {
    vector<int> cnt(n, 0); // initial counter
    int i, j, nc=0;
    for (i=0;i<w;i++) {
        if (++cnt[seq[i]] ==1)
            nc++;
    }
    int maxc=nc;
    // insert i, delete j
    for (j=0, i=w;i<n;i++,j++) {
        if (++cnt[seq[i]] ==1)
            nc++;
        if (--cnt[seq[j]] ==0)
            nc--;
        maxc=max(maxc,nc);
    }
    return maxc;
}

int main() {
    int n;
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d",&seq[i]);
    // discretization
    for (int i=0;i<n;i++)
        dic[i]=seq[i];
    sort(dic, dic+n);
    // remove duplicate color
    int n_color=1; // num of color
    for (int i=1;i<n;i++) { // not checking dic[0]
        if (dic[i]!=dic[i-1]) {
            dic[n_color]=dic[i];
            n_color++;
        }
    }
    // replace color with its rank
    for (int i=0;i<n;i++)
        seq[i]=lower_bound(dic,dic+n_color,seq[i])-dic;
    // end of discretization
    if (n_color==1) {printf("1\n"); return 0;}
    // using binary search to find the longest invalid length
    int length=1;
    for (int jump=n/2; jump>0; jump>>=1) {
        while (w_col(length+jump,n)<n_color)
            length+=jump;
```

```
    }
    printf("%d\n",length+1);
    return 0;
}
```

接下來兩題與前兩題類似，我們當做習題。

習題 Q-3-11. 最長的相異色彩帶

有一條細長的彩帶，彩帶區分成 n 格，每一格的長度都是 1，每一格都有一個顏色，相鄰可能同色。如果一段彩帶其中的每一格顏色皆相異，則稱為「相異色彩帶」。請計算最長的相異色彩帶的長度。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行為整數 n，滿足 $n \le 2\times10^5$；第二行有 n 個以空白間隔的數字，依序代表彩帶從左到右每一格的顏色編號，顏色編號是不超過 n 的非負整數。

輸出：最長的相異色彩帶的長度。

範例輸入：

```
10
6 4 1 6 0 4 5 0 7 4
```

範例結果：

```
5
```

說明：區間[3, 7]的顏色(1,6,0,4,5)皆不相同。

習題 Q-3-12. 完美彩帶 (APCS201906)

有一條細長的彩帶，總共有 m 種不同的顏色，彩帶區分成 n 格，每一格的長度都是 1，每一格都有一個顏色，相鄰可能同色。長度為 m 的連續區段且各種顏色都各出現一次，則稱為「完美彩帶」。請找出總共有多少段可能的完美彩帶。請注意，兩段完美彩帶之間可能重疊。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行為整數 m 和 n，滿足 $2 \le m \le n \le 2\times10^5$；第二行有 n 個以空白間隔的數字，依序代表彩帶從左到右每一格的顏色編號，顏色編號是不超過 10^9 的非負整數，每一筆測試資料的顏色數量必定恰好為 m。

輸出：有多少段完美彩帶。

範例輸入：

```
4 10
1 4 1 7 6 4 4 6 1 7
```

範例結果：

```
3
```

說明：區間[2, 5]是一段完美彩帶，因為顏色 4、1、7、6 剛好各出現一次，此外，區間[3, 6]與[7, 10]也都是完美彩帶，所以總共有三段可能的完美彩帶。

下面的習題與 P-3-8 類似。

習題 Q-3-13. X 差值範圍內的最大 Y 差值

輸入平面上 N 個點的座標(x[i],y[i])以及一個正整數 L，計算並輸出

$$\max_{1\le i\le j\le N}\{|y[i]-y[j]| : |x[i]-x[j]| \le L\}$$。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 N 與 L，第二行各點的 X 座標，第三行依序是對應點的 Y 座標，相鄰數字間以空白隔開。N≤1e5，座標絕對值不超過 1e9。

輸出：輸出所求的最大差值。

範例輸入：

```
10 3
4 1 2 -10 3 5 6 9 7 8
6 1 4 10 3 9 8 1 5 7
```

範例結果：

```
7
```

說明：X 距離 3 以內的最大 Y 差值是(6,8)與(9,1)，Y 值差 7。

下面這個習題需要一點幾何知識，別擔心，國中就學過了。

例題 Q-3-14. 線性函數 (@@)

有 N 線性函數$f_i(x) = a_i x + b_i$，1≤i≤N。定義$F(x) = \max_i f_i(x)$ 。輸入 c[i], 1≤i≤m，請計算$\sum_{i=1}^{m} F(c[i])$。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 N 與 m。接下來有 N 行，依序每行兩個整數 a_i 與 b_i，最後一行有 m 個整數 c[1], c[2], …, c[m]。每一行的相鄰數字間以空白隔開。N≤1e5，m≤5e4，輸入整數絕對值不超過 1e7，答案不超過 1e15。

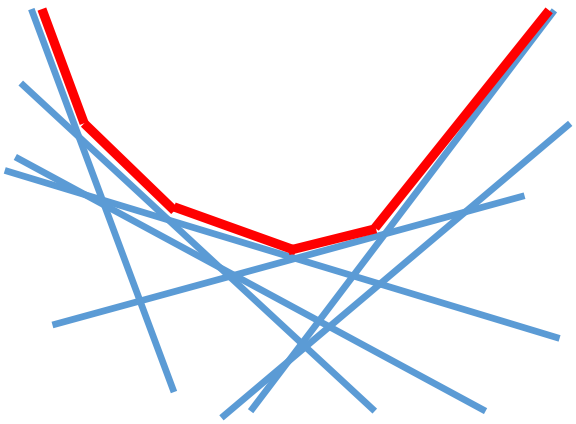
輸出：計算結果。

範例輸入：

```
4 5
-1 0
1 0
-2 -3
2 -3
4 -5 -1 0 2
```

範例結果：

```
15
```



提示：給 N 個線性函數(一次函數)，另外定義 F 是這些函數的最大值，現在給 m 個 x 值，要計算 F 在這些點的函數值總和，也就是對每一個 x 值，要計算這些線性函數的最大值。直接的做法全部計算取最大，總共需要 O(mn)，效率不佳。請看下圖。藍線是這些線性函數，紅線就是 F，他必定會形成一個(向下)凸的形狀，而且是一段一段的，每一段都是原來的某個藍線(函數)，如果我們可以找出這個紅線，計算這些函數值就沒問題了。我們需要一個觀察：若 f 與 g 是兩個線性函數，f 的斜率小於 g，那麼，在兩線的交點以前是 f 大，以後是 g 大。我們可以將這些直線根據斜率排序，然後逐一將直線加入 F。這一題另外也有分治的演算法可以做，在後續章節中會再出現。

4. 貪心演算法與掃瞄線演算法

「貪心通常比較簡單，但多半不能解決問題，在演算法與人生中都是這樣。」

孔子說：「及其老也，血氣既衰，戒之在得。」日常生活中最常看到貪的狀況就是政治人物，而想到政治人物就想到金庸的笑傲江湖。這一章的例題習題部分就以笑傲江湖中的人物來串場，不過不必擔心，沒看過故事不影響解題。

這一章介紹貪心演算法(Greedy algorithm)以及掃描線演算法(sweep-line algorithm)，這兩種演算法有點類似，所以放在同一章。這裡的貪心沒有負面的意思，單純指以當前最有利的方式做決定。貪心演算法通常很直覺，所以寫程式往往簡單，但不對所有問題都能夠找到最佳解。Greedy 通常需要證明，但上機考試與競賽的場合，不需要證明，所以很多人不知道怎麼做的時候就用 Greedy 寫下去猜猜看，考試本來就是該猜就要猜，不過貪心也要貪的正確。掃描線演算法的名字出自計算幾何，是指解題過程想像用一條掃描線沿著某個方向掃描過去，他是一個很好的思考模式，很多經典的分治演算法都有掃瞄線的版本。有一些數列的問題往往可以看成數線上的問題，所以也可以用掃描線的方式來思考。

貪心演算法與掃描線演算法通常需要搭配排序或優先佇列(priority_queue，常簡稱 PQ)，我們在第二章介紹過排序了，所以這裡不再重複。優先佇列是一種重要的資料結構，在大部分資料結構的課本中都有介紹自製的方法(heap)以及應用，它在 STL 中也有內建的，但它應該不能算"常用簡單"的資料結構，所以根 set/map 的狀況類似，在 APCS 考試中應該不會出現非用它不可的題目，我們會對它 PQ 做簡單的介紹。

4.1. 基本原理

所謂貪心演算法指的是：一個算法由一連串的決定組成，每次決定時都以當時最有利的方式挑選，而且一旦挑選後就不再更改。我們先以舉一個很簡單的例子來說明。

例題 P-4-1. 少林寺的代幣

令狐冲去少林寺觀光，少林寺有四種代幣，面額分別是[1, 5, 10, 50]，令狐冲拿了 n 元去換代幣，請問以這四種代幣湊成 n 元，最少要多少枚代幣？

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是一個正整數 m，代表有幾筆測資，以下有 m 行，每行是一筆測資，每筆測資是一個正整數 n，n<1000。

輸出：依序每一行輸出每一筆測資的最少的代幣數量。

範例輸入：

```
3
21
50
123
```

範例結果：

```
3
1
7
```

說明：21 = 10*2 + 1, 50 = 50*1, 123 = 50*2 + 10*2 + 1*3。

因為代幣的數量希望要最少，直覺貪心的想法就是要盡量使用面額大的硬幣，代幣由大面額的往小的考慮，能換盡量換，剩下不足的再考慮比較小的面額。

```cpp
#include <cstdio>

int main() {
    int coin[4]={1,5,10,50};
    int m,n;
    scanf("%d",&m);
    for (int i=0;i<m;i++) {
        scanf("%d", &n); // input money
        int num=0; // num of coins
        for (int j=3; j>=0 && n>0; j--) { // large to small
            num += n/coin[j]; // num of coin[j]
            n %= coin[j]; // remaining
        }
        printf("%d\n",num);
    }
    return 0;
}
```

程式寫起來很簡單，簡單到如果考試碰到這種題目，會懷疑是不是有陷阱。這個方法很直覺，但怎麼知道它是對的呢？有些人可能會說：就很直覺啊，路邊隨便找個少林寺掃地的也會這樣做。那麼請看看下面的狀況：假設代幣的面額是[1, 4, 5]三種，上面的貪心方法會找到正確答案嗎？假設 n=8，貪心的方法會先換一個 5 元，然後剩下 3 元

就換 3 個 1 元代幣，所以 8 元換了 4 個代幣。但是如果拿兩個 4 元代幣就可以湊 8 元了，所以正確答案應該是 2 而不是 4。請不要懷疑人生，P-4-1 的做法是對的，只是並不是能用在任何場合，我們必須證明。如何證明呢？

在代幣是[1, 5, 10, 50]的情形下，如果 1 元的代幣總額不小於 5，一定可以拿出 5 個換成一個 5 元，所以 1 元代幣的個數不會超過 4 個；同樣的你可以證明 5 元代幣不會超過 1 個，10 元代幣不會超過 4 個。也就是說，對任意第 j 種代幣 coin[j]，小於 coin[j]的代幣總額不會超過 coin[j]，所以 Greedy 是對的。在[1, 4, 5]的狀況，就沒有這個性質了。順便一提，不要小看少林寺的掃地僧，掃地僧往往是最厲害的。

這個例子中我們看到了貪心法的一些特質。

- 算法由一連串決定組成(由大到小逐一考慮各種代幣的數量)，每次考慮當前最好決定(能換盡量換)，選擇後就不再更改。
- 算法的正確性必須經過證明，內容就是要證明所下的決定是對的，也就是一定有一個最佳解包含了貪心法所做的決定，而證明的方法通常都是用換的：假設有一個最佳解跟貪心法做的決定不一樣，那麼，我們可以換成一個與貪心法一樣的決定，而解會更好，或至少不會變差。

在下一節中我們會看到更多的例子。貪心算法往往都是要不斷的找最大值或最小值，如果資料不會變動，可以在開始的時候做一次排序，如果資料是會變動的呢？就必須用一個動態的資料結構來處理，以下我們對優先佇列做一點介紹。

優先佇列(priority_queue)

第三章介紹過佇列，佇列跟現實生活中排隊的狀況一樣，是先進者先出，但更貼近現實生活中的狀況是有些事情後發生的卻必須先處理，因為緊急或是更重要。優先佇列就是具有優先權的排列，不管進入的順序，優先權高的會排在前面。STL 中有提供內建的 PQ，資料結構的課本中也都有教以 heap 來實作，heap 是一個完全二元樹(complete binary tree)，但實作在陣列中，也就是心中有樹但程式中沒有樹。heap 的實作並不算困難，但考試與比賽時間寶貴，通常能使用內建的就不要自己寫，因此本書中並不介紹 heap 的實作，有興趣的可以人可以自己查詢網路或書籍。優先佇列(PQ)常用的操作與時間複雜度如下，其中 n 表示成員的佇列的大小：

- 加入新元素(push)，O(log(n))。
- 查詢最大值(top)，O(1)。
- 刪除最大值(pop)，O(log(n))。

- 檢查是否為空(empty)，O(1)。

請注意刪除與查詢只能針對最大值。以下介紹 PQ 的用法，PQ 內定是最大值在 top，如果是基本型態(如 int)而且以內定大小的比較函數，使用起來簡單。它也跟排序一樣可以使用自定的結構與自定的比較方式，但比較複雜，因為涉及一些物件導向的寫法。我們只介紹一些簡單的用法。以下的範例程式介紹基本用法，包含以 pair 來做兩個欄位的資料的寫法，若要改變大小順序，最簡單的方法就是改變 key 的正負號。

```
// demo pq
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    int a[10]={1,4,1,3,8,5,4,9,8,7}, n=10;
    for (int i=0;i<n;i++) printf("%d ",a[i]);
    printf("\nIteratvely insert and report max\n");
    priority_queue<int> pq;
    for (int i=0;i<n;i++) {
        pq.push(a[i]);
        printf("%d ",pq.top());
    }
    printf("\n");
    int sum=0;
    while (!pq.empty()) {
        sum+=pq.top();
        pq.pop();
    }
    printf("Delete all and sum=%d\n",sum);
    printf("PQ of struct, top is smallest, insert backward\n");
    priority_queue<pair<int,int>> pq2; // (value, index)
    for (int i=n-1;i>=0;i--) {
        pq2.push({-a[i],i}); // push minus value
        printf("a[%d]=%d, ",pq2.top().second,-pq2.top().first);
    }
    printf("\n");
    return 0;
}
```

在第二章我們介紹過 set/map，set 也是動態的(可以支援加入與刪除)，而且也有大小順序，所以是不是可以來找最大值取代 PQ，set 的寫法比較簡單用途也比較廣，這樣可以偷懶少學一種。如果我們用 multiset(因為可能重複)，我們可以在 O(1)最大值，新增與刪除也都是 O(log(n))。所以基本上是可以，畢竟會使用 set 已經很不錯。下面的範例程式，我們展示以 set 來代替並且測試比較兩者的速度。我們把 set 的大小關係改成大於，這樣 begin()就是最大值。測試可以發現 set 的時間超過 PQ 的兩倍以上。所以如果是要參加競賽的人，最好還是多學一種比較好。

```cpp
// compare pq and multiset
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 1000000
multiset<int,greater<int>> S;
priority_queue<int> pq;

int main() {
    int a[N], n=N;
    for (int i=0;i<n;i++) a[i]=rand();

    clock_t t1, t2;
    long long sum=0;
    t1=clock();
    for (int i=0;i<n;i++) {
        S.insert(a[i]);
        sum+=*S.begin();
    }
    while (!S.empty()) {
        sum+=*S.begin();
        S.erase(S.begin());
    }
    printf("%lld\n",sum);
    t2=clock();
    printf("set takes %f sec\n", (float)(t2-t1)/CLOCKS_PER_SEC);
    sum=0;
    t1=clock();
    for (int i=0;i<n;i++) {
        pq.push(a[i]);
        sum+=pq.top();
    }
    while (!pq.empty()) {
        sum+=pq.top();
        pq.pop();
    }
    printf("%lld\n",sum);
    t2=clock();
    printf("PQ takes %f sec\n", (float)(t2-t1)/CLOCKS_PER_SEC);
    return 0;
}
```


4.2. 例題與習題

這一節我們來看貪心與掃瞄線演算法的題目，我們將題型區分為以下幾類，每一類挑選一些經典題來說明，另外在下一節有一些其他的補充習題：

- 單欄位資料排序
- 結構資料排序

- 以 PQ 處理動態資料
- 貪心搭配二分搜
- 掃描線演算法

很多貪心算法的重點在證明，但本書以程式實作為主，不以證明為重點，所以有些題目的證明只簡略說明重點，或者請讀者上網路查詢。

4.2.1. 單欄位資料排序

例題 P-4-2. 笑傲江湖之三戰

笑傲江湖的遊戲中，你扮演令狐沖的角色，因為「長恨此身非我有，何時忘卻盈盈」，所以你率領任我行等魔教高手前往少林寺搭救人盈盈，欲知故事原委可參見笑傲江湖第 27 回「三戰」。套句丸尾班長的口頭禪，總而言之，少林寺與五嶽劍派等正教派出 n 位高手，而你方也有 n 位高手，每個人都有一個戰力值。雙方要進行一對一的對戰，每個人不管輸或贏都只能比一場，假設兩人對戰時，戰力值高的獲勝。對於對方的每一位高手，你可以指定派哪一位與其對戰，為了解救盈盈，你希望贏越多場越好，平手則沒有幫助。請計算出最多能贏多少場。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是一個正整數 n，第二行有 n 個非負整數是對方的戰力，第三行有 n 個非負整數是我方的戰力，同行數字間以空白間格。n 與戰力值不超過 1e5。

輸出：輸出最多可能的勝場數。

範例輸入：

```
5
3 1 7 0 2
8 3 5 0 0
```

範例結果：

```
3
```

我們只要關心可以戰勝的那些場次需要誰去出戰，其他場次贏不了，就在剩下的人裡面隨便挑選去應戰。假設我方目前最弱的戰力是 a 而對方最弱的是 b，如果 a ≤ b，則 a

對誰都不會贏，是沒用的，可以忽略。否則 a > b，我們宣稱「一定有一個最佳解是派 a 去出戰 b」，證明如下：

> 假設在一個最佳解中，a 對戰 x 而 y 對戰 b，我們將其交換改成「a 對 b 而 y 對 x」。根據我們的假設 y ≥ a，交換後 a 可以贏 b 而 y 對 x 的戰績不會比 a 對 x 差，所以交換後勝場數不會變少。

既然如此，我們可以確定派 a 對戰 b 一定可以得到最佳解，並將 a 與 b 移除後，繼續依照上述原則挑選。範例程式如下，因為要不斷的挑選最小值，而戰力不會改變，所以是個靜態的資料。我們可以將雙方戰力先進行一次排序，然後依序由小往大考慮即可。這一題也可以由大到小考慮，基本原則是能贏的贏一點就好，當然可以用優先佇列 (PQ)，在範例程式中有以 PQ 寫的方式，做法簡單，我們就不在此說明，有興趣練習 PQ 的可以自行參考。

```
// P_4_2, one-on-one O(nlogn), sorting+greedy
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010
int main() {
    int n, enemy[N], ours[N];
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d",&enemy[i]);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d",&ours[i]);
    sort(enemy, enemy+n); // sort enemy power
    sort(ours, ours+n); // sort our power
    int win=0; // num of win
    for (int i=0,j=0;i<n && j<n;i++) { // for each of our power
        // j is currently weakest enemy
        if (ours[i]> enemy[j]) { // can win some enemy
            win++;
            j++; // next enemy
        }
        // otherwise, ours[i] is useless
    }
    printf("%d\n",win);
    return 0;
}
```

例題 P-4-3. 十年磨一劍 (最少完成時間)

人們常用說「十年磨一劍」來比喻下的功夫深，但是這句話對於華山磨劍坊就不適用了，因為要磨劍的客人非常的多，一把劍如果磨太久，客人等待的時間過長是會被客

訴的。華山磨劍坊目前有 n 筆訂單，每筆訂單要磨一把劍，每把劍所需的時間不盡相同。磨劍師傅每次只能磨一把劍，現在希望每一筆訂單的完成時間之總和能夠最小，希望能找出最好的磨劍順序。舉例來說，如果有四把劍，磨劍需要的時間分別是(3,1,3,4)，如果以(3,1,3,4)的順序來磨，第一把的完成時間是 3，第二把完成時間是 3+1=4，第三把是 3+1+3=7，第四把是 3+1+3+4=11，總和是 3+4+7+11=25。如果把順序改成(1,3,3,4)，那麼完成時間分別是(1,4,7,11)，總和是 23，這是這一題最好的解。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是一個正整數 n，第二行有 n 個正整數是每一把劍需要的時間，同行數字間以空白間格。n 與每把劍的時間都不超過 1e5。

輸出：輸出最小的完成時間總和。

範例輸入：

```
4
3 1 3 4
```

範例結果：

```
23
```

有 n 個工作要安排一個順序後依序完成，希望每個工作的完成時間總和最小，這是個經典的 minimum completion time 問題。直覺上短的工作要先做，放在越前面的工作，等它的人越多。如果把計算時間的方式仔細看一下，你會發現如果 job[i]是第 i 個工作所需的時間，那麼完成總時間是$\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\times \text{job}[i]$，
所以 shortest-job-first 是對的。另外一個證明方法是假設 job[i]的順序是最佳解而存在某個工作 job[i]>job[i+1]，那麼，我們交換這兩個相鄰工作，其他的工作時間不會改變，但這兩個工作的完成時間總和會減少，如此可知，最佳解中不可能大的排在小的前面。這種考慮相鄰交換的情形是個證明的技巧，因為其它的工作不會改變，可以得到很簡單的證明。

程式非常簡單，排序後計算就好了，但是不要把計算寫成 O(n²)的笨方法了，運用 prefix-sum 的手法就很容易在排序後以 O(n)完成計算，另外一個方法是用上面的公式。

```
// P_4_3, min waiting time, sorting+greedy
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
```

```c
#define N 100010
int main() {
    int n, job[N];
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d",&job[i]);
    sort(job, job+n); // sort from small to large
    long long int comp=0, total=0;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        comp += job[i]; // completion time of i
        total += comp; // total completion time
    }
    printf("%lld\n",total);
    return 0;
}
```

4.2.2. 結構資料排序

在上面兩個例題中，每個資料都只是一個數字，接下來我們要看需要使用 struct 來存資料的狀況。在第二章我們介紹過結構資料的排序，自訂結構排序時，必須寫一個比較函數，當然也可以利用 STL 中 pair 來偷懶，如果不熟悉的人，請再次參考第二章的方法。下面這一題是很有名的經典題(activity selection problem)。

例題 P-4-4. 幾場華山論劍(activity selection)

自從華山論劍聲名大噪之後，想參加的人絡繹不絕，因此華山派決定每年都舉辦非常多場的華山論劍，每一場都有自己的開始時間與結束時間，參加者必須全程在場，所以不能在同一時間參加兩場。令狐冲拿到了今年所有場次的資料，希望能參加越多場越好，以便盡速累積經驗值，請你幫忙計算最多可以參加幾場。請注意，所挑選活動必須完全不重疊，兩場活動只在端點重疊也是不可以同時參加的，也就是說前一場的結束時間必須小於下一場的開始時間。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是一個正整數 n，代表一共舉辦了 n 場華山論劍，接下來 n 行，每行兩個非負整數 s 與 t，代表這場活動的時間區間是[s,t]，兩數字間以空白間格。n 不超過 1e5，s < t < 1e9。

輸出：最多參加幾場活動。

範例輸入：

```
4
1 4
0 3
3 4
4 6
```

範例結果：

```
2
```

說明：可以挑選[0,3]與[4,6]兩場活動。

這個題目簡單說就是：數線上有若干線段，要挑選出最多的不重疊的線段。第一個想法可能是盡量挑短的，但是範例中有一個反例，挑短的不是正確答案。我們宣稱下面這個的性質：

「若[x,y]是所有現存線段中右端點最小的，那麼一定有個最佳解是挑選了[x,y]。」

證明：假設最佳解沒有挑[x,y]，令[a,b]是最佳解中右端點最小的。根據我們的假設，y ≤ b，因此將[x,y]取代[a,b]不會重疊到任何最佳解中的其他線段，我們可以得到另外一個最佳解包含[x,y]。

根據此性質，我們可以不斷地將最小右端的線段挑選進解答，然後略過任何與它重疊的線段。因為線段不會改變，一開始依照右端由小排到大，然後從頭到尾掃描一次就可以得到答案。以下是範例程式，在此程式中我們定義了一個 struct 包含兩個整數欄位，用來存放一個線段的左右端點。為了排序，定義了一個比較函數 cmp，用來比較線段的右端點，對結構排序不熟悉的請複習第二章。在排序後，以一個迴圈從頭到尾掃描一次，以變數 endtime 保持著前一個已挑選活動的結束時間(初值給-1 因為輸入的時間皆為非負)，迴圈內以 if 來判斷 ac[i]開始時間是否大於 endtime，若是，挑選起來，修改答案與 endtime；若否，可以直接丟棄它(不做任何事)。

```cpp
// P_4_4,activity selection, sorting+greedy
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010
struct ACT{
    int s,f; // start and finish time
};
// compare finish time
bool cmp(ACT p, ACT q) {
    return p.f<q.f;
}
int main() {
    int n;
```

```
    ACT ac[N];
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d%d",&ac[i].s, &ac[i].f);
    sort(ac, ac+n, cmp); // sort from small to large
    int endtime=-1, total=0;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        if (ac[i].s>endtime) { // compatible
            total++;
            endtime=ac[i].f;
        }
    }
    printf("%d\n",total);
    return 0;
}
```

我們當然可以利用 STL 的 pair 來逃避寫比較函數，以下是這樣的寫法，有興趣的參考。我們用 vector 來寫，你當然可以用陣列來寫，重點是把右端點放在第一個欄位，因為 pair 的大小關係是依欄位順序的字典順序。

```
// P_4_4b,activity selection, sorting+greedy
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010

int main() {
    int n;
    vector<pair<int,int>> act;
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0;i<n;i++) {
        int s,t;
        scanf("%d%d",&s, &t);
        act.push_back({t,s}); // key = finish time
    }
    sort(act.begin(), act.end()); // sort by finish
    int endtime=-1, total=0; // end of previous activity
    for (auto p: act) {
        if (p.second>endtime) { // compatible
            total++;
            endtime=p.first; // set end-time
        }
    }
    printf("%d\n",total);
    return 0;
}
```

在 P-4-3 十年磨一劍的例題中，每一件磨劍工作，無論需要時間的長短，重要性都是一樣的，我們要求的只是完成時間的總和最小化，下面是一個變化題，每一個工作延後的代價不同。

例題 P-4-5. 嵩山磨劍坊的問題(加權最小完成時間)

嵩山磨劍坊接了 n 筆磨劍工作，磨劍師傅每次只能磨一把劍。除了每把劍各有所需的時間之外，每件工作的重要性也不同。假設第 i 筆訂單需要的時間是 t[i]，而重要性是 w[i]。磨劍坊的計價方式是：每件工作都已經先收了一筆款項，假設第 i 筆訂單在時間 f 時完成，則需要扣款 f*w[i]，現在希望將 n 筆磨劍工作安排最好的順序，使得扣款總額越小越好。嵩山派掌門左冷禪是非常嚴厲的老闆，希望你能幫磨劍師傅找出最好的順序以免他遭到處罰。

舉例來說，如果有四把劍，磨劍需要的時間分別是 t=(1,4,5,6)，而重要性依序是 w=(1,3,4,7)。如果依訂單編號順序(1,2,3,4)來磨，也剛好是工作時間由短到長的順序，每件工作的完成時間依序是(1,5,10,16)，扣款總額是 1*1 + 5*3 + 10*4 + 16*7 = 168。如果依照訂單編號順序(4,1,3,2) 來磨,則 t 與 w 重新排列後分別是 t=(6,1,5,4)，w=(7,1,4,3)。完工時間是(6,7,12,16)，扣款總額是 6*7 + 7*1 + 12*4 + 16*3 = 145。這是這一題 24 種排列中最好的解。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入的第一行工作數 N，N<1e5。第二行有 N 個正整數，依序是各訂單所需時間 t[1]、t[2]、…、t[N]。第三行有 N 個非負整數，依序是各訂單的重要性 w[1]、w[2]、…、w[N]，時間與重要性皆不超過 1000，相鄰以空白間隔。

輸出：輸出最小的扣款總額。答案不超過 1e18。

範例輸入：

```
4
1 4 5 6
1 3 4 7
```

範例結果：

```
145
```

如果每個工作(訂單)的重要性(w)都是一樣的話，這一題跟 P-4-3 就是一樣的，答案就是依照工作時間以 Shortest-job first 的方式排列，但是在有權重的狀況下，題目範例中就告訴你時間短的不一定在前面。我們再想想看，只看時間的話，時間短的應該排前面；那麼如果只看權重的話呢？權重大的應該排前面，因為延遲的話罰得重。

但是兩個都要考慮的話就必須兩個因子都列入考慮。我們宣稱以下特性：最佳解中，排在前面的，t/w 值一定比較小。證明？跟 P-4-3 類似，考慮排在相鄰的兩個工作，假設 t[i]/w[i] > t[i+1]/w[i+1]。我們交換兩工作，其他的工作完成時間不會改變，而 i 延後了 t[i+1]的時間，i+1 則提早了 t[i]的時間，因此變化量為 w[i]*t[i+1] - w[i+1]*t[i] < 0，也就是解會變好。程式的寫法不難，但是需要兩顎欄位 struct 的排序，而大小的比較函數是以交叉相乘的方式。這裡要提醒，在類似的情形下要注意資料範圍與 overflow 的問題。以這一題的範圍，1~1000，相乘之後不會有問題，如果數字比較大，相乘之前可能需要轉 long long，另外分數的比較也要注意負號，如果有分母有可能是負整數，交叉相乘要小心。

```
// Q_4_5 greedy, using c++ sort+struct
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct Item {
    int t,w;
};
bool comp(Item p, Item q) {
    return p.t * q.w < p.w * q.t;
}

int main() {
    int n;
    scanf("%d", &n); assert(n<100000);
    Item Q[N];
    for (int i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", &Q[i].t);
    for (int i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", &Q[i].w);
    for (int i=0;i<n;i++)
        assert(Q[i].t>0 && Q[i].t<=1000 \
            && Q[i].w>=0 && Q[i].w<=1000);
    sort(Q, Q+n, comp);
    long long ans=0, comp_t=0; // completion time
    for (int i=0; i<n; i++) {
        comp_t += Q[i].t;
        ans += comp_t * Q[i].w;
    }
    printf("%lld\n", ans);
    return 0;
}
```

或許有人想知道，既然是依照 t/w 排序，何不直接相除當做 key？是可以，但必須考慮兩個問題，第一是精準度夠不夠，是否會發生捨位誤差造成順序錯誤。以這一題來說是不會。第二個問題，分母是否有可能是 0？這一題是會。所以需要特殊處理一下，下面的範例程式是以這個方式寫的，另外用了 STL 的 tuple，因為有三個欄位。這個寫法其實沒有比較簡單，其實並不推薦，有興趣的參考就好。

```cpp
// Q_4_5b greedy, using c++ sort+tuple
//  key of type double t/w, oo for weight 0,
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010
#define oo 10000.0
int main() {
    int n;
    scanf("%d", &n);
    vector<tuple<double,int,int>> Q;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        int t;
        scanf("%d", &t);
        Q.push_back({0,t,0});
    }
    long long total_w=0; // total weight
    for (int i=0; i<n; i++) {
        int w;
        scanf("%d", &w);
        total_w+=w;
        get<2>(Q[i])=w;
        get<0>(Q[i])=(w==0)? oo: (double)get<1>(Q[i])/w;
    }
    sort(Q.begin(), Q.end());
    long long ans=0; // another way to compute
    for (int i=0; i<n; i++) {
        ans += total_w * get<1>(Q[i]);
        total_w -= get<2>(Q[i]);
    }
    printf("%lld\n", ans);
    return 0;
}
```

下面一題很類似，因此留做習題，不多解釋。

習題 Q-4-6. 少林寺的自動寄物櫃(APCS201710)

少林寺的自動寄物櫃系統存放物品時，是將 N 個物品堆在一個垂直的貨架上，每個物品各佔一層。系統運作的方式如下：每次只會取用一個物品，取用時必須先將在其上方的物品貨架升高，取用後必須將該物品放回，然後將剛才升起的貨架降回原始位置，之後才會進行下一個物品的取用。

每一次升高貨架所需要消耗的能量是以這些物品的總重來計算。現在有 N 個物品，第 i 個物品的重量是 w(i)而需要取用的次數為 f(i)，我們需要決定如何擺放這些物品的順序來讓消耗的能量越小越好。

舉例來說，有兩個物品 w(1)=1、w(2)=2、f(1)=3、f(2)=4，也就是說物品 1 的重量是 1 需取用 3 次，物品 2 的重量是 2 需取用 4 次。我們有兩個可能的擺放順序(由上而下)：

- (1,2)，也就是物品 1 放在上方，2 在下方。那麼，取用 1 的時候不需要能量，而每次取用 2 的能量消耗是 w(1)=1，因為 2 需取用 f(2)=4 次，所以消耗能量數為 w(1)*f(2)=4。
- (2,1)。取用 2 的時候不需要能量，而每次取用 1 的能量消耗是 w(2)=2，因為 1 需取用 f(1)=3 次，所以消耗能量數=w(2)*f(1)=6。

在所有可能的兩種擺放順序中，最少的能量是 4，所以答案是 4。再舉一例，若有三物品而 w(1)=3、w(2)=4、w(3)=5、f(1)=1、f(2)=2、f(3)=3。假設由上而下以(3,2,1)的順序，此時能量計算方式如下：取用物品 3 不需要能量，取用物品 2 消耗 w(3)*f(2)=10，取用物品 1 消耗(w(3)+w(2))*f(1)=9，總計能量為 19。如果以(1,2,3)的順序，則消耗能量為 3*2+(3+4)*3=27。事實上，我們一共有 3!=6 種可能的擺放順序，其中順序(3,2,1)可以得到最小消耗能量 19。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入的第一行是物品件數 N，N<1e5。第二行有 N 個正整數，依序是各物品的重量 w(1)、w(2)、…、w(N)。第三行有 N 個正整數，依序是各物品的取用次數 f(1)、f(2)、…、f(N)，重量與次數皆不超過 1000，相鄰以空白間隔。

輸出：輸出最小能量消耗值。答案不超過 1e18。

範例輸入：

```
3
3 4 5
1 2 3
```

範例結果：

```
19
```


4.2.3. 以 PQ 處理動態資料(*)

這一小節中我們提出需使用優先佇列(priority queue, PQ)的題目。由於 APCS 的範圍應該不包含 PQ，所以照理說不太會出現在 APCS 考試中。

例題 P-4-7. 岳不群的併派問題(Two-way merge) (*)

江湖上門派林立，華山派掌門岳不群認為要消除門派的衝突就是要合併各門派，但不能操之過急，必須每次挑兩個門派合併，如此逐步合併，最後將所有門派合併成一派。合併門派需要一些成本，每個門派都有他的成員數，第 i 個門派的成員數是 m(i)，合併兩派的成本就是雙方成員數之和，而兩派合併後，雙方成員就會歸到新合併的門派。岳不群不希望耗費太多成本，輸入各派人數，請幫他計算最少的合併總成本。

舉例來說，一開始如果有三派，m=(3, 5, 1)，若 3 人與 5 人的兩派先合併，成本是 3+5=8，合併後剩下兩派，人數是(8,1)，再合併這兩派，成本是 8+1=9，此時已經只剩下一派，也就是完成所有合併統一江湖了，總成本是 8+9=17。如果我們更換合併的順序,先合併 3 人與 1 人的兩派(成本 4),再合併剩下的 5 人(成本 4+5=9)，則總成本只有 4+9=13。這是這個例子的最低成本。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是一個正整數 n，代表初始的門派數量，第二行有 n 個正整數是每派的成員數，同行數字間以空白間格。n 不超過 2e5，每個門派初始人數都不超過 1e5。

輸出：第一行輸出總人數，第二行輸出最小的合併總成本。

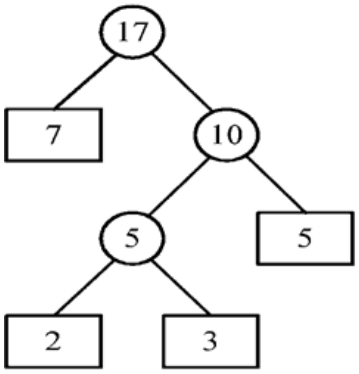
範例輸入：

```
3
3 5 1
```

範例結果：

```
13
```

這一題事實上是 Two-way merge tree 的問題，與一個有名的 Huffman code 是等價的。正確的合併順序的計算方法是：每次挑選人數最少的兩派合併，重複此步驟直到剩下一派為止。任何一種合併的過程可以用一個二元樹表示，右圖是一個例子，圖中每個方塊表示一個初始的門派，圓圈表示一個合併。初始人數 m(i)是(7,2,3,5)，先合併(2,3)變成 5，再合併(5,5)變成 10，最後合併(7,10)變成 17。合併的成本圓圈中的數字相加，這個例子 5+10+17=32 就是是最低成本。這一題的證明稍嫌麻煩，我們在此不給完整的證明，只做一些說明。總成本也可用另外一個方式計算，每一個方塊往上走到頂會經過幾次圓圈(成為深度)，就代表他經過幾次合



併，所以每個 m(i)乘上他的深度加總後就是總成本，所以直覺上看得出來，數字越大的要放在深度小的地方，也就是說數字越小的要越早合併，完整的證明留給讀者上網搜尋 Huffman code 或 two-way merge tree。

雖然證明有點麻煩，但是程式非常好寫，我們只要每次找出最小的兩個數，將他們刪除，再將他們的和放入。重複這個步驟直到剩下一個數字。但是要有效率的做到必須借助資料結構，如果使用排序，每次刪除最小值或許不是大問題(記住有效位置，每次後移兩格就好)，但是插入兩數相加的和就會很浪費時間了。以下是用陣列的方法寫的範例程式，時間複雜度是 O(n^2)。雖然他效率不夠好，但是我們也使用了一些技巧來減少資料搬移的動作，所以也算個好的練習。

```
// P_4_7 greedy, slow method using array
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;
#define N 400010
int main() {
    int n;
    LL m[N];
    scanf("%d", &n);
    for (int i=0; i<n; i++) {
        scanf("%lld", &m[i]);
    }
    sort(m,m+n);
    LL left=0, right=n-1, cost=0; // [left, right]=current data
    // merge, n reduced by 1 each time
    for ( ; n>1; n--) {
        // merge the smallest two sets
        LL x=m[left]+m[left+1];
        cost += x;
        // delete 0 and 1, insert x
        int j=right;
        left += 2; // delete two smallest
        while (j>=left && m[j]>x) { // find position
            m[j+1]=m[j];
            j--;
        }
        m[j+1]=x; // insert x
        right++;
    }
    printf("%lld\n%lld\n", m[left], cost);
    return 0;
}
```

要能夠有效率的做到增刪資料，我們必須借助資料結構，優先佇列每次可以找到最大值(或最小)，是這一題最適合的資料結構，只要每次 pop 出兩個資料，相加後 push 回

去就可以了。注意數值的大小以及我們放在 PQ 中的要變號，以便每次找到最小值。檔案中還有一支程式是以 multiset 取代 PQ，留給有興趣的人參考，這裡就不多說明了。

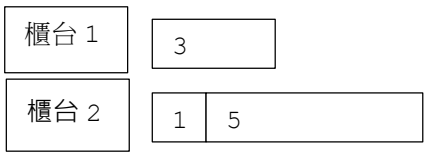
```
// P_4_7 greedy, using PQ
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;

int main() {
    int n;
    scanf("%d", &n);
    priority_queue<LL> PQ;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        int m;
        scanf("%d", &m);
        PQ.push(-(LL)m); // change sign (to find minimum)
    }
    LL cost=0; // total cost
    for (int i=0; i<n-1; i++) { // merge n-1 times
        // merge the smallest two sets
        LL m=PQ.top();
        PQ.pop();
        m += PQ.top();
        PQ.pop();
        PQ.push(m);
        cost += m;
    }
    printf("%lld\n%lld\n", -PQ.top(), -cost);
    return 0;
}
```

下面一個題目是在工作排程時的問題，做法簡單，但證明需要想一下，留做習題，如果資料量不大，可以用陣列做，但資料量大時，必須使用資料結構。

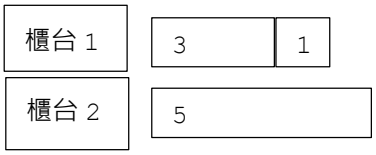
習題 Q-4-8. 先到先服務 (*)

有 n 個客人要分配到 m 個櫃台來服務，客人依編號順序到達，第 i 個客人需要 t(i) 的時間來完成(無論分配到哪一個櫃台)，而且每個客人的需求必須在同一個櫃台完成。因為公平的因素，先到客人不可以比晚到客人更晚開始服務。現在希望安排每個客人的服務櫃檯，以便可以在最短的時間內完成所有客人的需求。

舉例來說，如果有三位客人與兩個櫃台，需求的時間依序是(3,1,5)，我們可以如下圖分配，最後的完成時間是 6。



請注意，我們不可以如下分配，雖然這樣的完成時間會減少到 5，但是第 3 個客人比第 2 個客人早開始服務違反了先到先服務的原則。



Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入兩行，第一行是正整數 n 與 m，第二行是 n 個正整數 t(1), t(2),…,t(n)，同行數字間以空白間格。n 與 m 不超過 2e5，t(i)不超過 1e4。

輸出：最早可能服務完所有客人的時間。

範例輸入：

```
3 2
3 1 5
```

範例結果：

```
6
```

4.2.4. 外掛二分搜

貪心演算法經常可以搭配二分搜，以下舉兩個例子。

例題 P-4-9. 基地台 (APCS201703)

直線上有 N 個要服務的點，每架設一座基地台可以涵蓋直徑 R 範圍以內的服務點。輸入服務點的座標位置以及一個正整數 K，請問：在架設 K 座基地台以及每個基地台的直徑皆相同的條件下，基地台最小直徑 R 為多少？

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入有兩行。第一行是兩個正整數 N 與 K，以一個空白間格。第二行 N 個非負整數 P[0]，P[1]，….，P[N-1]表示服務點的點座標，相鄰數字以空白間隔。座標範圍不超過 1e9，1≤ K < N ≤ 5e4。

輸出：最小的基地台直徑。

範例輸入：

```
6 2
5 2 1 7 5 8
```

範例結果：

```
3
```

服務點可以看成數線上的點，基地台可以看成數線上的線段，要計算以 K 根長度相同的線段蓋住所有的點，最小的線段長度。這一題是給數量 K 要求長度 R。要解決這個問題，先看以下問題：輸入給數線上 N 個點以及 R，請問最少要用幾根長度 R 的線段才能蓋住所有輸入點。

我們以貪心法則來思考。考慮座標值最小的點 P，如果有一個解的最左端點小於 P，我們可以將此線段右移到左端點對齊 P，這樣的移動不會影響解的合法性，因此，可以得到以下結論：「一定有一個最佳解(最少的 K)是將一根線段的左端放在最小座標點上。」因此，我們可以放上一個線段在[P,P+R]，然略過所有以被蓋住的點，對剩下的點繼續此步驟。重複執行到所有的點被蓋住，就可以找到最小的 K 值。

回到我們的原來問題。假設 f(R)是給定長度 R 的最少線段數，那麼上述的演算法可以求得 f(R)。很直覺地，當 R 增加時，f(R)必然只會相同會減少，因為用更長的線段去蓋相同的點，不會需要更多線段。所以我們可以二分搜來找出最小的 R，滿足 f(R)≤ K。

以下是範例程式。先寫一個函數 enough(x)計算長度 x 的線段是否足夠，我們不需要算出最少的線段數量，只要知道 K 根是否足夠即可。主程式中將點座標排序後，就以二分搜來找出最長的"不足夠"長度，最後加一就是最短的足夠長度。這裡的二分搜採取第二章介紹的一路往前跳的方式，範例程式中也有傳統維護左右範圍的二分搜寫法，這裡就不多做說明。

```
// P_4_9 min length R to cover points by k segment of same length
// O(nlogL), L is distance
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 50010
int p[N], n, k;
```

```
// check if k segment of length r is enough
bool enough(int r) {
    int nseg=k, endline = -1; // current covered range
    for (int i=0; i<n; i++) {
        if (p[i] <= endline) continue;
        if (nseg == 0) return false;
        // use a segment to cover
        nseg--; // remaining segments
        endline = p[i] + r;
    }
    return true;
}

int main() {
    scanf("%d%d", &n, &k);
    for (int i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", p+i);
    sort(p, p+n);
    // binary search, jump to max not-enough length
    int len = 0, L = p[n-1] - p[0];
    for (int jump=L/2; jump>0; jump>>=1) {
        while (len+jump<L && !enough(len+jump))
            len += jump;
    }
    printf("%d\n", len+1);
    return 0;
}
```

下一題是類似的習題。

習題 Q-4-10. 恢復能量的白雲熊膽丸

令狐沖闖黑木崖要依序通過 n 個關卡，第 i 個關卡要消耗 p[i]的能量，如過能量不足就會闖關失敗。不管當時的能量剩下多少，吃下一顆恆山派的「白雲熊膽丸」就會讓令狐沖的能量值恢復到滿額的 F。假設在開始時能量是 F，闖關過程中最多只能服用 m 次，輸入 p[]與 m，請問令狐沖的能量額 F 至少必須是多少才能闖關成功。請注意，連吃兩顆是沒用的，能量還是 F。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是正整數 n 與非負整數 m，第二行，有 n 個正整數 p[1], p[2],…,p[n]。p[i]不超過 1e5，0 ≤ m < n ≤ 1e5。

輸出：輸出 F 的最小值。

範例輸入：

```
7 2
3 4 1 7 4 1 2
```

範例結果：

```
8
```

說明:闖過三關(3,4,1)，吃藥，闖過(7)，再吃藥，闖過最後 3 關(4,1,2)。F=7 的話至少要吃三次藥才能通過。

4.2.5. 掃描線演算法 sweep-line

掃描線演算法的名字來自在解某些幾何問題時，想像用一條掃描線沿著某個方向掃描，過程中記錄某些資料或維護某些結構。因此與貪心演算法類似，往往第一步就是排序。常見的題目有數線上的點或線段，以及平面上的點或直線。限於難度，這裡僅提出一些經典而不太複雜的題目。

例題 P-4-11. 線段聯集 (APCS201603)

輸入數線上的 N 個線段，計算線段聯集的總長度。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是一個正整數 N，接著的 N 行每一行兩個非負整數，代表一根線段的左端點與右端點，左端點座標值小於等於結束端點座標值，兩者之間以一個空格區隔。N 不超過 1e5，座標絕對值皆不超過 1e8

輸出：線段聯集總長度。

範例輸入：

```
5
10 20
20 20
30 75
5 15
40 80
```

範例結果：

```
65
```

這一題有個比較簡單的常見版本是座標範圍很小而且線段數量也不多，例如 N 是 1000 而座標範圍在 0~1000。在此情形下把[0,1000]這個區間看成 1000 個長度為 1 的區段，以一個陣列 seg[]來記錄每一個區段是否有被線段覆蓋。具體來說：

seg[i] = 1 if 區間[i,i+1]有被覆蓋，否則 seg[i] = 0。

初始時，所有 seg[i] = 0，表示沒有線段。對於每一個輸入的線段[left, right]，我們將陣列 seg[left] ~ seg[right-1]的區段都設為 1，模擬將線覆蓋在區間上。等到所有線段都處理完畢後，數一數有多少區段被設為 1 就知道覆蓋的總長度了。

```
// P-4-11, subtask, table method
#include <stdio.h>

int main() {
    int i,left,right,n;
    int seg[1001]={0},total=0;
    scanf("%d",&n);
    for (i=0; i<n; i++) {
        scanf("%d%d",&left,&right);
        for (j=left; j<right; j++)
            seg[j] = 1;
    }
    for (i=0;i<1000;i++)
        total += seg[i];
    printf("%d\n", total);
    return 0;
}
```

這個方法的複雜度是線段長度的總和，在大座標範圍時的效率很差。若要與座標範圍無關，基本想法是將線段逐一加入，維護好目前的聯集 S，S 顯然是一群不相連的線段。每次加入一根線段時，如果他與 S 中的線段沒有交集，那太好了，把他放進去就行了；如果有交集呢？就必須將有交集的部分找出來做成聯集。這樣做不是不行，但是非常的麻煩。我們試試看掃描線的想法。

想像有根掃描線，從左往右掃，過程中我們一樣保持住目前已經看到的線段的聯集 S。掃描過程可能碰某個線段的左端或是右端，其他的位置對線段聯集的變化並無影響可以忽略。碰到某線段左端時，代表有一個線段要加入 S。從左往右掃的好處是，當一個線段[x,y]加入時，最多只會跟 S 中的一根線段(最後一根)有交集！因為他的左端 x 不會在 S 中任何一根線段的左方(記得吧，我們從左往右)。什麼時候沒交集呢？如果 x 大於 S 中的最大右端。而且，如果這個線段與 S 沒交集，後面的線段也都不會再跟 S 有交集，因為後面的線段的左端都大於等於 x。這麼一來，程式就很好寫了，我們只要依照線段左端從小到大的順序逐一將線段加入 S，維護好 S 中的最後一根線段就好了。以下是範例程式，我們定義了一個 struct 結構來放線段，並且定義一個比較函數 cmp()比便依照線段左端排序，時間複雜度 O(nlog(n))，因為排序。

```
//P4-11 union of segments, using struct
```

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010
struct Seg {
    int left, right;
};
bool cmp(Seg p, Seg q) {
    return p.left < q.left;
}
int main() {
    int n, total=0; // total length
    Seg s[N];
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0; i<n; i++)
        scanf("%d%d", &s[i].left, &s[i].right);
    sort(s, s+n, cmp); // sort by left
    Seg last = s[0]; // last segment in the union
    for (int i=1; i<n; i++) { // insert each segment
        if (s[i].left > last.right) { // disjoint
            total += last.right - last.left;
            last = s[i];
            continue;
        }
        // else part, merge last and s[i]
        last.right = max(last.right, s[i].right);
    }
    total += last.right - last.left; // don't forget
    printf("%d\n",total);
    return 0;
}
```

偷懶的方法就是利用 pair 來放線段，把排序的依據放在 first，可以省卻寫比較函數。其實 C++的 struct 與比較函數都很好寫(比起 C)，也不一定要學偷懶的方法。下面還是列出這個寫法給有興趣的人參考。

```
//P4-11 union of segments, using pair
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define Left first
#define Right second

int main() {
    int i,n,total;
    vector<pair<int,int>> s;
    scanf("%d",&n);
    for (i=0; i<n; i++) {
        int p, q;
        scanf("%d%d", &p, &q);
        s.push_back({p,q});
    }
```

```
    sort(s.begin(), s.end());
    total = 0;
    pair<int,int> last = s[0];
    for (auto seg: s) {
        if (seg.Left > last.Right) { // disjoint
            total += last.Right - last.Left;
            last = seg;
            continue;
        }
        // else part, merge last and s[i]
        last.Right = max(last.Right, seg.Right);
    }
    total += last.Right - last.Left;
    printf("%d\n",total);
    return 0;
}
```

下面一個例題非常簡單又直覺，但是很有趣的是，我們稍後會看到他的另外一種形式，當他以另外一個形式出現時，卻似乎比較難理解。

例題 P-4-12. 一次買賣

某商品在某個時期每一天的價格是 p(1), p(2),…,p(n)。假設只能先買後賣，請計算買賣一次的最大獲利價差，允許當天買賣，也就是一次都不買(獲利 0)。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是正整數 n，第二行有 n 個正整數 p[1], p[2],…,p[n]。n 不超過 1e5，價格皆不超過 1e9。

輸出：買賣一次的最大價差。

範例輸入：

```
5
3 5 1 4 0
```

範例結果：

```
3
```

範例中暗示你，挑選最大值與最小值並非正確的答案。我們只需要考慮在第 i 天賣出的最大獲利，然後對各個 i 取最大值就是答案了。第 i 天賣出的最大獲利當然就是買在 i 以前出現的最小值，也就是 i-1 的 prefix-minimum。所以我們可以一路掃描過去，維護好 prefix-min，再取較大的價差就好了，以下是範例程式。

```cpp
//P4-12 max price difference, O(n)
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define oo 1000001

int main() {
    int n, max_diff=0; // allow zero
    int p_min=oo; // prefix minimum
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0; i<n; i++) {
        int p;
        scanf("%d", &p);
        max_diff=max(max_diff, p - p_min);
        p_min = min(p_min, p);
    }
    printf("%d\n",max_diff);
    return 0;
}
```

下面這一題是教學的經典名題，有人把他在貪心算法，也有人可能歸類到動態規劃。網路上找得到很多解法的介紹。

例題 P-4-13. 最大連續子陣列

輸入一個整數陣列 A[1:n]，請計算 A 的連續子陣列的最大可能總和，空陣列的和以 0 計算。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是正整數 n，第二行有 n 整數 A[1], A[2], …, A[n]。n 不超過 1e5，陣列內容絕對值不超過 1e9。

輸出：最大可能總和。

範例一輸入： 8 4 12 -17 5 8 -2 7 -3	範例一輸出： 18
範例二輸入： 3 -1 -1 -1	範例二輸出： 0

P-4-13 與 P-4-12 有何關係呢？P-4-12 的輸入是每日價格，如果把每日價格與前一日的價差放在 A[]中，A[i]=p(i)-p(i-1)，那麼就變成 P-4-13 了，因為連續一段時間的累積價差就等於最後一日與最前一日的價差

A[i]+A[i+1]+…A[j]=(p(i)-p(i-1))+(p(i+1)-p(i))+…+(p(j)-p(j-1))

=p(j)-p(i-1)

P-4-12 的 O(n)解法非常直覺明顯，而 P-4-13 的 O(n)解法則似乎比較不容易。當然你可以把輸入轉換成前一題的輸入，但我們也可以直接看這個題目。最簡單的解法是窮舉 $O(n^2)$ 個所有區間(子陣列)，每一個區間再用一個迴圈求和，這樣導致了一個 $O(n^3)$ 的解。改善複雜度降到 $O(n^2)$ 有兩個方法，一種是對所有左端 i，用一個迴圈求出所有[i,j]區間的最大和，這個很容易做到因為

sum(A[i:j+1]) = sum(A[i:j])+A[j+1]。

另外一種方法是利用前綴和(prefix sum)。先算好前綴和之後，每一個區間和可以用一個減法完成。

但是這兩種都不夠好，從前一題就知道這題可以在 O(n)求解。令 f(i)是以 i 為右端(各種可能的左端)的最大區間和。觀察 f(i+1)與 f(i)的關係，f(i+1)所選的左端如果在 i 之前，那麼一定與 f(i)的左端一樣。所以 f(i+1)只有以下兩種可能：

- f(i+1)=f(i)+A[i+1]，左端與 f(i)相同；
- 或者 f(i+1)=A[i+1]，左端在 i+1。

兩者挑大的就好了，事實上，這就像一代一代累積財產，若 f(i)>0，爸媽留給你的是正資產，則繼承過來；否則就拋棄繼承。這樣一比喻，這題的解其實也是非常直覺自然的。以下是範例程式。

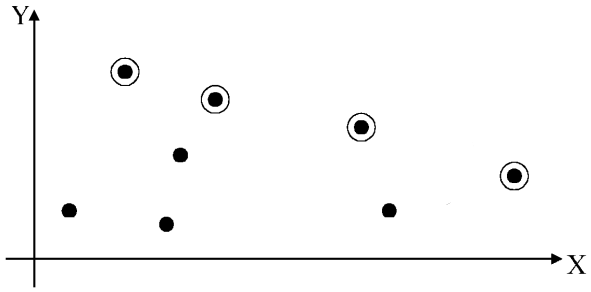
```
//P4-13 max subarray, O(n)
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;
int main() {
    LL n, max_sum=0; // allow zero
    LL p_max=0; // prefix minimum
    scanf("%lld",&n);
    for (int i=0; i<n; i++) {
        LL p;
        scanf("%lld", &p);
        p_max=(p_max>0)? p_max+p : p;
        max_sum = max(max_sum, p_max);
    }
    printf("%lld\n",max_sum);
    return 0;
```

```
}
```

下兩題是平面幾何的題目，兩題都常被拿來當作分治演算法(下一章的主題)的教材，但事實上都有掃描線的解法。

例題 P-4-14. 控制點(2D-max)

平面上有 N 個點，第 i 點的座標為(x[i], y[i])。若 x[i] ≤ x[j] 且 y[i] ≤ y[j]，則我們說第 j 點可以控制第 i 點。我們希望能在輸入的點中，選取最少的點做為控制點，使得每一個輸入的點都至少被一個控制點所控制。輸入 N 個點的座標，請計算出最少要選取多少個控制點。以下圖為例，輸入 8 個點中，右上方圈起的四個點即是最少選取的控制點。



Time limit: 1 秒

輸入格式：每筆測試資料的第一行為一個正整數 N，N ≤ 1e5。第二行有 N 個非負整數，依序是這些點的 X 座標，第三行有 N 個非負整數，依序是這些點的 Y 座標，座標值不超過 1e9。

輸出：輸出最少的控制點數量。

範例一：輸入	範例一：正確輸出
4 1 2 3 3 1 2 3 3	1
範例二：輸入	範例二：正確輸出
8 3 1 5 3 4 7 8 9 8 2 5 1 2 4 2 3	4

這個題目稱為 2D Maximal point，2D 平面上的 maximal point 是指沒有人的 XY 皆大於等於此點，是否會有相同座標點輸入則看題目定義，本題是允許，但本題中如果有兩個相同座標的極大點，只需要選一個。直接的做法可以兩兩比對，複雜度 O(n^2)，無疑是不夠好。假設我們從左到右掃描這些點，維護好目前找到的解 (maximal points)，假設做到第 i-1 點時的解是 S(i-1)，考慮當第 i 點(x[i],y[i])進入時的狀況。S(i-1)中 Y 值不大於 y[i]的點都應該從解中移除，因為前面點的 X 值都不大於 x[i]；而(x[i],y[i])必然是 S(i)中的點，因為他具有目前最大的 X 值。要如何刪除 S(i-1)中 Y 值不大於 y[i]的點呢？乍看之下以為要使用什麼特別的資料結構，確實，使用 set/map 一定可以做，但其實並不需要。因為 maximal 的點是以 X 值遞增的方式加入，他們的 Y 值一定是遞減，只要從後往前刪除就可以了。從後往前刪除，然後自己加入到最後面，所以 Stack 是好的選擇，如果有印象的話，這個方法在前一章找前方的高人那個題目中使用過。請看以下範例程式，為了依照 x 排序，所以程式中定義了一個結構與一個比較函數。因為每個點最多只進入堆疊一次，除了排序外的時間複雜度是 O(n)。

```
//P-4-14 2d maximal points (forward sweep + stack) O(nlogn)
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010
#define oo 1000000001
struct Point {
    int x, y;
};
bool less_x(Point a, Point b) {
    return a.x < b.x;
}
int main() {
    int i,j,n,x;
    scanf("%d",&n);
    Point p[N];
    for (int i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", &p[i].x);
    for (int i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", &p[i].y);
    sort(p, p+n, less_x); // sort from left to right
    stack<int> S;// keep y-value of current maximal
    S.push(oo); // a dummy maximal (-oo, oo)
    for (i=0; i<n; ++i) { // x from small to large
        while (p[i].y >= S.top())
            S.pop(); // delete smaller y
        S.push(p[i].y);
    }
    printf("%d\n",(int)S.size()-1);
    return 0;
}
```

事實上這個題目有更簡單的寫法。當我們從左往右掃描時，前面找到的 maximal point 有可能需要刪除，如果從右往左掃描呢？因為看到的點的 X 值是遞減，先找到的 maximal point 就一定是解！我們只要記住目前右方的最大 Y 值就可以決定下一點是否需要加入解中了(如果他有更大的 Y 值)。以下是範例程式，我們用 STL 的 vector 與 pair 來寫，為了讓 X 從大到小，我們存的時候存-x。除了排序外，時間複雜度顯然是 O(n)，與前面那支一樣。

```
//P-4-14 2d maximal points backward sweep O(nlogn)
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n, total=0; // num of maximal points
    scanf("%d",&n);
    vector<pair<int,int>> V;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        V.push_back({-x,0}); // change sign for large to small
    }
    for (int i=0; i<n; i++) {
        scanf("%d", &V[i].second);
    }
    sort(V.begin(), V.end());
    int max_y = -1; // max y value so far
    for (auto p: V) {
        int y = p.second;
        if (y > max_y) { // maximal point
            total++;
            max_y = y;
        }
    }
    printf("%d\n",total);
    return 0;
}
```

下一題也是平面上的點的問題，稍難，需要一點幾何特性。

例題 P-4-15. 最靠近的一對(closest pair) (@@)

平面兩點的 L_1 距離為兩點的 X 差值與 Y 差值的和，也就說，如果兩點座標是(a,b)與(c,d)，則 L_1 距離是|a-c|+|b-d|。輸入 n 個點的座標，請計算出 L_1 距離最近兩點的 L_1 距離。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行為一個正整數 n，接下來 n 行，每行兩個整數 x 與 y 代表一點的座標。n 不超過 1e5，座標值絕對值不超過 1e8。

輸出：最近兩點的 L_1 距離。

範例輸入：

```
4
-1 5
4 0
3 1
-2 -3
```

範例結果：

```
2
```

這個題目也是演算法的經典題，我們在下一章分治演算法也會再談到它，網路上可以找到很多相關資料與教學，大部分是直線距離的版本，也就是兩點之間的距離以直線距離計算，在線性代數中，直線距離稱為 L_2，與這一題的 L_1 距離雖然不一樣，但是類似，L_1 距離也有很多重要的應用，例如在 IC 設計上，網路上有很多說明資料。這一題用 L_1 只是為了計算更簡單而且不需要浮點數，演算法其實是一樣的。

想像一根垂直掃描線由右往左掃過去，計算出目前的解，也就是目前已經納入點的最小距離，每次碰到一個新的點，就找出新點與前面點的最近距離，並更新最小距離。如果有多點 X 值若相同，以任意順序並無影響。假設每個新進點都要跟前面的點計算距離，那這個方法跟窮舉沒兩樣，所以我們要想辦法減少計算的點數。

假設目前碰到的點是 p[i]=(x[i]，y[i])而目前的以求出來的最小距離是 d，令 S 是 p[0]~p[i-1]這些點的集合(如果沒有相同 x 可以簡單說 p[i]左方的點)，也就是說 S 中任兩點的距離至少是 d。首先，S 只有中 Y 座標值在[y[i]-d, y[i]+d]範圍內的點才需要計算，因為其他的點到 p[i]的距離必然大於 d；此外，根據相同的理由，S 中 X 座標值小於 x[i]-d 的點都不需要計算，而且不止這回合，以後碰到新點時，這些太左邊的點也都不需要計算了，因為越後面的點 X 座標越大。根據這兩個觀察，我們可以來寫程式了，為了有效地找到 Y 座標在[y[i]-d, y[i]+d]範圍內的點，我們需要一個動態資料結構，因為需要增加與刪除資料。以下是範例程式，為了排序在第 6 行我們定義了一個 struct Point 以及比較函數 less_x()。第 19 行將點依照 X 座標由小到大排序，第 20 行宣告一個 map，用來存放已經掃過的點，map 中以 Y 座標當作 key，所以會將 Y 座標放在第一欄位。第 23 行開始的迴圈是進行逐點掃描的動作，每次碰到一個點，第 25 行以 lower_bound()找到 Y 值在[y[i]-d, y[i]+d]範圍內的第一點，然後 while 迴圈會跑範圍內的所有點，其中如果碰到 X 座標太小的點，就把它移除。第 31 行就更新可能的最小距離。

```cpp
// P_4_15 closest pair, sweep line, L1 distance
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;
#define N 100010
#define oo 200000001
struct Point {
    int x,y;
};
bool less_x(Point &s, Point &t) {
    return s.x < t.x;
}

int main() {
    int n;
    scanf("%d",&n);
    Point p[N];
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d%d",&p[i].x,&p[i].y);
    sort(p, p+n, less_x); // sort by x
    multimap<int,int> mm; // (y,x), sort by y
    int min_d = oo; //min distance
    // for each point from left to right
    for (int i=0;i<n; i++) {
        // check [p.y-d, p.y+d]
        auto it=mm.lower_bound(p[i].y - min_d);
        while (it!=mm.end() && it->first <= p[i].y+min_d) {
            if (it->second < p[i].x - min_d) {
                it=mm.erase(it); // x too small, out of date
                continue;
            }
            min_d = min(min_d, \
                    abs(p[i].x-it->second)+abs(p[i].y-it->first));
            it++;
        }
        mm.insert({p[i].y,p[i].x});
    }
    printf("%d\n",min_d);
    return 0;
}

```

這個程式因為用了動態資料結構 map，所以有點超過 APCS 的範圍，如果用分治演算法就可以避免 map，我們在下一章會介紹。

且慢，這個題目是不是還沒說明完畢？複雜度呢？複雜度其實是 O(nlog(n))，雖然不容易從程式碼中看出來，原因是 while 迴圈中，如果不計因為 X 座標太小被刪除的點，每個點計算距離的不會超過 8 個點！而那些因為 X 值被刪掉的反正全部的過程中只會被刪一次。為什麼是 8 點呢？直覺上來看，因為左邊的點之間距離都不小於 d，而我們會納入計算的點都落在寬度為 d 高度 2d 的矩形內，這樣的點數不可能太多，如果是直

線距離，最多 6 點，如果是 L_1 距離，最多是 8 點，這並不特別困難，我們留給讀者自己想一想，網路上也可以找到說明。

4.3. 其他習題

習題 Q-4-16. 賺錢與罰款

泰山派的磨劍坊接了 n 筆訂單，每一筆訂單有需要的工時 t[i]以及完工要求時間 d[i]，如果在時間 x 的時後交貨就可以賺 d[i]-x 的錢，也就是說越早完成賺越多，超過時間完成的話，越晚賠越多。磨劍坊每次只能做一件工作，所以要把這 n 筆訂單做一個排程，希望利潤最大，也就是賺最多錢，如果不可能賺錢就要賠最少。泰山派掌門天門道長聽到之後，深怕會賠太多的錢而破產，請你幫忙找出最好的排程。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入的第一行是工作數 N。第二行有 N 個正整數，依序是各訂單所需時間 t[1]、t[2]、…、t[N]。第三行有 N 個非負整數，依序是各訂單的完工要求 d[1]、d[2]、…、d[N]，相鄰以空白間隔。N<1e5，時間不超過 1000，完工要求不超過 1e8。

輸出：最大利益。

範例輸入：

```
5
4 1 5 2 2
2 5 5 3 1
```

範例結果：

```
-16
```

習題 Q-4-17. 死線高手

華山派每個地子都有很多作業，每個作業都有死線(dead-line)，必須在死線之前完成否則會受到處罰。令狐沖現在有 n 個作業，每個作業需要花的時間是 t[i]而死線是 d[i]，此外，每次只能進行一個作業，不可能一次做兩個作業。如果有任何一個作業超過死線，就會被罰到華山之巔面壁一年，請問他是否可能安排作業的順序，讓每個作業的完成時間都不會超過死線，否則小師妹就可能會移情別戀了。

Time limit: 2 秒

輸入格式：輸入包括多筆測資，第一行是測資筆數 T，T<20，以下是 T 筆測資的資料。每筆測資的第一行是作業數 n。第二行有 n 個正整數，依序是各作業所需時間 t[1]、t[2]、…、t[N]。第三行有 n 個正整數，依序是各作業的死線 d[1]、d[2]、…、d[N]，相鄰以空白間隔。n<1e5，時間不超過 1000，死線不超過 1e8。

輸出：依序輸出每筆測資是否所有作業都可以在死線前完成，是則輸出 yes，否則輸出 no。

範例輸入：

```
2
5
2 1 3 1 2
6 6 3 8 9
4
2 1 2 1
3 5 2 6
```

範例結果：

```
yes
no
```

下一題跟 Q-4-8 有關係，是他的變化題。

習題 Q-4-18. 少林寺的櫃姐 (@@)(*)

少林寺是觀光勝地，每天要接待很多客人，根據數據分析，方丈決定即使在尖峰時期也必須在時間 D 內完成 n 個客人的服務，現在的問題是不知道要開設多少個服務櫃台。假設客人依編號順序到達，第 i 個客人需要 t(i)的時間來完成他的需求(無論分配到哪一個櫃台)，而且每個客人的需求必須在同一個櫃台完成。因為公平的因素，先到客人的服務開始時間不可以大於晚到客人的服務開始時間。因為每開設一個櫃台就要請一位櫃姐，為了節省人事成本，請計算出最少要開設多少櫃台才能讓這 n 個客人的服務都在時間 D 內完成。

Time limit: 1 秒

輸入格式：輸入兩行，第一行是正整數 n 與 D，第二行是 n 個正整數 t(1), t(2),…,t(n)，同行數字間以空白間格。n 不超過 1e5，t(i)不超過 1e4，D 不超過 1e9 也不小於 1e4，所以一定有解。

輸出：最少的櫃檯數。

範例輸入：

```
5 9
3 2 5 7 3
```

範例結果：

```
3
```

習題 Q-4-19. 五嶽盟主的會議場所

武林中一共有 n 個門派，每個門派都要上嵩山去見五嶽劍派盟主左冷禪，每個門派的人數以及到達與停留的時間不盡相同，第 i 個門派有 m(i)個人要去嵩山，到達時間是 s(i)，而到達後會一直停留到時間 t(i)，也就是在嵩山的時間是閉區間[s(i),t(i)]。左冷禪需要知道最多會有多少人同時在嵩山，以便準備夠大的會議場所，請計算最多在嵩山的人數。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是一個正整數 n，接著的 n 行每一行有三個整數，依序是 m(i)、s(i)與 t(i)，代表一個門派的人數以及到達與最後停留時間，兩者之間以一個空格區隔。n 不超過 1e5，各派人數不超過 1e4，0 ≤ s(i) < t(i) ≤ 1e9

輸出：依序輸出最多同時在嵩山的人數。

範例輸入：

```
3
5 1 5
2 5 7
4 8 9
```

範例結果：

```
7
```

習題 Q-4-20. 監看華山練功場

華山派有 n 個弟子，每個弟子的練功時間都不盡相同，第 i 個弟子到練功場所練功的時間是區間[s(i),t(i)]。最近華山頗不平靜，掌門岳不群要求令狐沖找一些弟子練功時順便監看練功場，對於想要監看的時間區間[x,y]，請問他最少只要找幾位弟子，這些弟子的練功時間就可以涵蓋整個[x,y]。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是個正整數 n，第二行是兩個整數 x 與 y，接著的 n 行每一行有兩個整數 s(i)與 t(i)，同行相鄰兩數之間空白區隔。n 不超過 1e5，0 ≤ x < y ≤ 1e9， 且對所有 i，0 ≤ s(i) < t(i) ≤ 1e9。

輸出：練功時間可以涵蓋[x,y] 的最少的弟子數。如果無解輸出-1。

範例一：輸入	範例一：正確輸出
5 1 10 0 3 1 5 5 7 8 9 6 10	3
範例二：輸入	範例二：正確輸出
5 1 10 0 3 1 5 5 7 8 9 8 10	-1

5. 分治演算法

分治：「一刀均分左右，兩邊各自遞迴，返回合併之日，解答浮現之時。」

「架勢起得好，螳螂鬥勝老母雞。在分治的架構下，簡單的資料結構與算法往往也有好的複雜度。」

這一章介紹分治演算法(Divide-and-Conquer algorithm, DaC)，又稱分而治之演算法，也有人稱為各個擊破法。分治是一種非常重要的演算法思維模式與策略，有很多重要的演算法都是根據分治的思維模式，例如快速埋序法、合併排序法、快速傅立葉轉換(FFT)、矩陣乘法、整數乘法以及在一些在計算幾何的知名演算法都是分治的策略。相較於它的重要性，分治出現在題目中的比例卻不是那麼高，主要原因有二：第一，很多分治算法的問題都有別的解法的版本；第二，一些重要的分治算法已經被納入在庫存函數中，例如排序，還有一些則因為太難而不適合出題。即使如此，分治還是很重要必須學習的思維模式，當我們碰到一個不曾見過的問題，分治往往是第一個思考的重點，因為分治的架構讓我們很容易找到比暴力或天真做法要好的方法。

5.1. 基本原理

從名稱 divide-and-conquer 就可以看出來，分治算法的精神就是將問題切割後再克服，事實上，分治的算法都可以分成三個主要步驟：

1. 切割。將問題切割成若干個子問題，通常是均勻地切成兩個。
2. 分別對子問題求解。
3. 合併。將子問題的解合併成原問題的解。

這裡所謂的子問題切割，並不是將問題分成不同的問題，而是「相同問題比較小的輸入資料」，也因為如此，第二步驟對子問題分別求解其實是透過遞迴呼叫來解子問題，也就是說，除了終端條件外，第二步驟什麼都不必做。這裡就看出分治算法的迷人之處，在思考一個問題的解的時候，你不需要去想解的步驟，只要去想「如何將子問題的解合併成整個問題的解」就可以了。如果我們要計算的問題是一個函數 f，而輸入資料是 S。以下是一個典型的分治算法：

```
演算法 f(S)：

    如果 S 已經很小，達到遞迴終端條件，則直接計算後回傳 f(S)，結束；
```

將 S 切割成 S_1 與 S_2；

遞迴呼叫計算 f(S_1) 與 f(S_2)；

將 f(S_1) 與 f(S_2) 合併成 f(S) 後回傳；

結束；

我們用簡單的例子來做具體的說明。

例題 P-5-1. 最大值與最小值

在一個長度為 n 的整數序列中找出最大值與最小值。

(本題只為了說明，太簡單所以沒附測資)

這一題太簡單了，我們只是要用他來說明分治算法的精神。直接的做法：從頭到尾掃描一遍，記住目前看到的最大值，每走一步就嘗試更新最大值，這樣可以找出最大值；相同的方法再做一次找最小值。時間複雜度 O(n)，也不可能更好了，因為每個資料一定要被檢查過才可能確保答案的正確性。

我們來試試看分治的想法。假設我們要計算陣列在區間[left,right-1]中的最大與最小值，我們從中點把區間分成左右兩個區間[left,m-1]與[m,right-1]，對兩邊分別遞迴求解；左邊的最小與右邊的最小取比較小的就是全部的最小；相同的，左邊的最大與右邊的最大取比較大的就是全部的最大。遞迴的中傑條件呢？如果區間裡面只剩一個數字，最小最大都是它。以下是這樣的想法實作出來的程式，為了讓大家多習慣結構，我們故意在這題用了 struct。副程式 f()是一個遞迴函式，其作用在找出 A 陣列在[s,t)區間的最大與最小值，請注意我們用了 C++習慣的左閉右開的區間，程式中先檢查遞迴終端條件，這裡設的是區間剩下一個元素，接著計算中點 m，然後對左右兩邊分別遞迴呼叫求解，最後合併解回傳。

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct P {
    int pmin, pmax;
};
// range [s, t)
P f(int A[], int s, int t) {
    if (s+1==t) return {A[s],A[s]};
    int m=(s+t)/2;
    P le=f(A,s,m), ri=f(A,m,t);
    return {min(le.pmin, ri.pmin), max(le.pmax, ri.pmax)};
```

```
}

int main() {
    int a[10]={3, 0, 7, -3, -10, 5, 1, 7, 6, -2};
    P x=f(a,0,10);
    printf("%d\n%d\n",x.pmin, x.pmax);
    return 0;
}
```

再次強調分治的重點只在如何合併解答，其它步驟都是非常簡單的，也因為只需要思考合併，分治的正確性往往是比較容易證明的。還有一個好處是複雜度往往很容易計算(當然是指一般情形下)，在進行下個例子前，我們先來說明分治演算法的複雜度如何計算。

分治的複雜度

分治是一個遞迴的演算法，不像迴圈的複雜度可以用加總的方法或是乘法計算，遞迴的複雜度是由遞迴關係式(recurrence relation)所表達。計算複雜度必須解遞迴關係式。遞迴關係又稱為差分方程式(difference equation)，解遞迴關係是個複雜的事情，超過本教材要講的範圍(也超過中學生的國際資訊奧林匹亞競賽的範圍)，所以在這裡我們只說明一些常見的狀況。

分治演算法的常見形式是將一個大小為 n 的問題切成 a 個大小為 b 的子問題(相同問題較小的輸入資料)，此外必須做一些分割與合併的工作。假設大小為 n 的問題的複雜度是 T(n)，而分割合併需要的時間是 f(n)，我們可以得到以下遞迴關係：

T(n) = a × T(n/b) + f(n)，這裡我們省略不整除的處理，因為只計算 big-O，通常不會造成影響。這個遞迴式子幾乎是絕大部分分治時間複雜度的共同形式，所以也有人稱為 divide-and-conquer recurrences，對於絕大部分會碰到的狀況(a, b, f(n))，這個遞迴式都有公式解，有興趣的請上網查詢 Master theorem。以下我們只說明最常見的幾個狀況的結果，這些遞迴關係的終端條件都是 T(c)=O(1)，對某常數 c，意思是當問題的輸入小到某個程度時可以常數時間求解。

遞迴式	時間複雜度	說明
T(n) = T(n/b)+O(1)	O(log(n))	切兩塊其中一塊不需要，如二分搜
T(n) = T(n/b)+O(n)	O(n)	每次資料減少一定比例
T(n) = 2T(n/2)+O(1)	O(n)	例如找最大值
T(n) = 2T(n/2)+O(n)	O(nlog(n))	如 merge sort
T(n) = 2T(n/2)+O(nlog(n))	$O(n\log^2(n))$	分割合併花了 O(nlog(n)

$T(n) = 2T(n/2)+O(n^2)$	$O(n^2)$	$f(n)$ 大於 n 的一次方以上，結果皆為 $f(n)$

上面描述的狀況都是子問題的大小減少一定比例，它的複雜度通常都是不錯的結果，某些分治的子問題的只減少常數的大小，這時候的複雜度通常都是差的。例如 $T(n)= T(n-1) + O(n)$，結果是 $T(n)=O(n^2)$，例如插入排序法。

架勢起得好，螳螂鬥勝老母雞

我們再來看一個例子，分治或許不會讓我們一下子找到效率最好的解，但是如果使用分治，即使合併的方法很天真，往往也很容易找到突破天真算法複雜度的解法。

例題 P-5-2. 最大連續子陣列(分治)(同 P-4-13)

有一個整數陣列 A[0:n-1]，請計算 A 的連續子陣列的最大可能總和，空陣列的和以 0 計算。

(檔案中的測資與 P-4-13 相同)

這一題我們在第四章的例題 P-4-13 看過了，當時我們先說明了天真的 $O(n^2)$ 算法以及超天真的 $O(n^3)$ 算法，最後給了一個 $O(n)$ 的算法，而且這個問題跟 P-4-12(一次買賣)是等價的問題。現在假設我們不知道 $O(n)$ 解法，重新以分治的思維來尋找突破 $O(n^2)$ 的方法。

如果我們要計算陣列在[L,R-1]區間的最大連續和，首先將區間平均切成兩段[L, M-1]與[M,R-1]，其中 M=(L+R)/2。要找的解(子陣列)可能在左邊、右邊、或者跨過兩邊，所以只要三者取最大就是最後的答案。左右可以分別遞迴求解，唯一要做的是就是找出跨過兩邊的最大和，對於左邊，我們就笨笨的從中點往左一直累加，計算每一個可能左端的區間和(也就是左邊的 suffix-sum)，然後取最大；同樣的，對於右邊計算所有 prefix-sum 的最大，然後兩者相加就是跨過中點的最大區間和。以下是範例程式，除了分治的概念外，非常的直覺。

```
//P-5-2 max subarray, DaC, O(nlogn)
#include <bits/stdc++.h>
#define N 200020
using namespace std;
typedef long long LL;

// max subarray in [le, ri)
LL subarr(LL a[], int le, int ri) {
    if (le >= ri) return 0;
```

```
    if (le+1 == ri) return max(a[le],(LL)0);
    int mid=(le+ri)/2;
    // recursively solve left and right parts
    LL largest=max(subarr(a, le, mid), subarr(a, mid, ri));
    // find largest sum cross middle
    LL lmax=0, rmax=0;
    // max suffix sum of the left
    for (LL sum=0, i=mid-1; i>=le; i--) {
        sum += a[i];
        lmax=max(lmax, sum);
    }
    // max prefix sum of the right
    for (LL sum=0, i=mid; i<ri; i++) {
        sum += a[i];
        rmax=max(rmax, sum);
    }
    return max(largest, lmax+rmax);
}

int main() {
    LL n, a[N];
    scanf("%lld",&n);
    for (int i=0; i<n; i++)
        scanf("%lld", &a[i]);
    printf("%lld\n", subarr(a, 0, n));
    return 0;
}
```

事實上除了分治的概念外，找前綴和與後綴和的做法跟原來的 $O(n^2)$ 做法類似，只是原來的做法外面套了一個迴圈(嘗試所有左端)，這裡則是外面套了一個分治的遞迴，這麼直覺的做法看起來複雜度要糟糕了，讓我們來算一下複雜度。若 $T(n)$ 是此算法在資料量為 n 時的複雜度，因為分割與合併的處理時間是 $O(n)$，所以 $T(n)=2T(n/2)+O(n)$，答案是 $O(n\log(n))$！俗話說：架勢起得好，螳螂鬥勝老母雞。分治用的好，天真的合併做法也可以得到不錯的解。如果你去仔細思考其中的原因，你會發現，雖然每一次合併都是笨笨的做，但是任一個資料參與合併的次數只有 $\log(n)$ 次，所以所有資料參與到的總次數只有 $n\log(n)$。分治很迷人，雖然這一題有更好的算法。

在結束這一題之前，或許有人想問：這一題用分治是否也可以做到 $O(n)$ 呢？事實上不難，提高算法效率的原則，就是去檢查看看算法中有那些重複的計算，我們留給有興趣的人自己去思考，所附檔案中有一支 $O(n)$ 的範例程式。

5.2. 例題與習題

口渴的烏鴉

看下一個例題前先講一個笑話：有一隻口渴的烏鴉，找到了一個裝有一半水的水瓶，但是瓶口太小喝不到水，於是他飛呀飛的，去到潺潺流水的河邊，找到一些小石頭叼回來放進瓶子裡，烏鴉飛了幾遍，隨著小石頭放入瓶中，瓶中的水位終於慢慢升起，烏鴉很開心的喝水，他欣賞自己聰明的頭腦可以解決這麼複雜的問題。忽然間，他想到他剛才不是去了河邊好幾次嗎？

看下一個例題。

例題 P-5-3. 合併排列法

有一個整數陣列 A[0:n-1]，請將 A 中的數字從小到大排列。

(本題為示範方法，無測資)

合併排序法是一個利用分治的經典排序法，放這個例題不是要解題，只是讓大家了解他是如何運作，下面是範例程式。函數 merge_sort()負責將陣列的[le,ri-1]區間從小排到大，第一步先檢查遞迴終端條件：剩下不到兩個就不必排了。否則計算中間點 m，遞迴呼叫兩邊；然後重頭戲就是將兩邊已經各自排好序的序列合併成一個，我們啟用一個臨時的空間 temp[]放置合併後的序列，用 j 指著右邊已經處理到的位置，用 k 指著要放入 temp[]的位置。對於每個左邊的元素 a[i]：先把右邊比 a[i]小的 a[j]複製到 temp[]，然後再把 a[i]複製到 temp[]。i 迴圈跑完後，右邊可能有剩下的，但是它們都已經在正確的位置上了，所以不需要處理。最後我們將 temp[]中的內容拷貝回陣列原來位置。

```
// p-5-3 merge_sort
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

// [le, ri)
void merge_sort(int a[], int le, int ri) {
    if (le+1 >= ri) return; // terminal case
    int m = (le+ri)/2;
    merge_sort(a, le, m); // recursively sort left part
    merge_sort(a, m, ri); // recursively sort right part
    // merge the two sorted lists
    int temp[ri-le], j=m, k=0;
    for (int i=le; i<m; i++) {
        while (j<ri && a[j]<a[i])
            temp[k++] = a[j++];
        temp[k++] = a[i];
    }
    // the remaining of right part are already on position
    // copy back to a
    for (k=le; k<j; k++)
        a[k] = temp[k-le];
```

```
    return;
}

int main() {
    int a[10]={3, 0, 7, -3, -10, 5, 1, 7, 6, -2};
    merge_sort(a, 0, 10);
    for (int i=0; i<10; i++)
        printf("%d ",a[i]);
    printf("\n");
    return 0;
}
```

合併排序法的時間複雜度是 O(nlog(n))，因為合併的部分需要的是 O(n)，所以複雜度遞迴式為：T(n) = 2T(n/2) + O(n)。

下一題是分治的經典題。

例題 P-5-4. 反序數量 (APCS201806)

考慮一個數列 A[1:n]。如果 A 中兩個數字 A[i]和 A[j]滿足 i<j 且 A[i]>A[j]，也就是在前面的比較大，則我們說(a[i],a[j])是一個反序對(inversion)。定義 W(A)為數列 A 中反序對數量。例如，在數列 A=(3,1,9,8,9,2)中，一共有(3,1)、(3,2)、(9,8)、(9,2)、(8,2)、(9,2)一共 6 個反序對，所以 W(A)=6。請注意到序列中有兩個 9 都在 2 之前，因此有兩個(9,2)反序對，也就是說，不同位置的反序對都要計算，不管兩對的內容是否一樣。請撰寫一個程式，計算一個數列 A 的反序數量 W(A)。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是一個正整數 n，代表數列長度，第二行有 n 個非負整數，是依序數列內容，數字間以空白隔開。n 不超過 1e5 數列內容不超過 1e6。

輸出：輸出反序對數量。

範例輸入：

```
6
3 1 9 8 9 2
```

範例結果：

```
6
```

給定一個數列A,計算W(A)最簡單的方法是對所有1≤i<j≤n,檢查數對(A[i],A[j]),但是時間複雜度O(n^2)顯然不夠好。以分治思維來考慮。要計算一個區間的反序數量,將區間平分為兩段,一個反序對的兩個數可能都在左邊或都在右邊,否則就是跨在左右兩邊。都在同一邊的可以遞迴解,我們只要會計算跨左右兩邊的就行了,也就是對每一個左邊的元素x,要算出右邊比x小的有幾個。假設對左邊的每一個,去檢查右邊的每一個,那會花O(n^2),不行,我們聚焦的目標是在不到O(n^2)的時間內完成跨左右的反序數量計算。記得第二章學過的排序應用,假設我們將右邊排序,花O(nlog(n)),然後,每個左邊的x可以用二分搜就可算出右邊有多少個小於x,這樣只要花O(nlog(n))的時間就可以完成合併,那麼,根據分治複雜度T(n) = 2T(n/2)+O(nlog(n)),T(n)的結果是O($nlog^2(n)$),成功了!

以下是這樣寫出來的程式,其中第4~13行是自己寫二分搜計算一個陣列中比某數小的元素個數,如果喜歡使用STL的可以用第26行的函數呼叫就可以了。計算反序數的遞迴函數在第16~29行,第18行檢查終端條件(剩下不超過一個元素的反序數自然是0),第20行遞迴呼叫左右之後,在第21行將右邊排序,然後用一個迴圈對每一個左邊的元素計算右邊有幾個比他小。

```
00 // p_5_4_a nlog^2(n) method
01 #include <bits/stdc++.h>
02 using namespace std;
03 typedef long long LL;
04 // binary search the num <x from a[0] to a[len-1]
05 int bsearch(int a[], int len, int x) {
06     if (a[0]>=x) return 0;
07     int pos=0;
08     for (int jump=len/2; jump>0; jump>>=1) {
09         while (pos+jump<len && a[pos+jump]<x)
10             pos += jump;
11     }
12     return pos+1;
13 }
14
15 // interval= [le,ri), return #inversion
16 LL inv(int ar[], int le, int ri) {
17     int i,j,mid = (ri+le)/2; // middle point
18     if (le+1 >= ri) return 0; // terminal case
19     // recursively solve left and right parts
20     LL w = inv(ar, le, mid) + inv(ar, mid, ri), cross=0;
21     sort(ar+mid, ar+ri); // sort the right part
22     // for each in left, binary search to find #inversion
23     for (i=le; i<mid; i++) {
24         cross += bsearch(ar+mid, ri-mid, ar[i]);
25         // following is using STL binary search
26         // cross += lower_bound(ar+mid, ar+ri, ar[i]) - (ar+mid);
27     }
28     return w + cross;
29 }
30 int main() {
```

```
31      int i, n, ar[100010];
32      scanf("%d", &n);
33      for (i=0; i<n; i++) scanf("%d", ar+i);
34      printf("%lld\n", inv(ar, 0, n));
35      return 0;
36  }
37
```

程式並不難，複雜度也算不錯了，但可不可以精益求精做到 O(nlog(n))呢？剛才是單邊排序，所以很多次的二分搜花了 O(nlog(n))。假設兩邊遞迴呼叫時，回傳都是排好序的，我們就可以不必寫二分搜了，因為連續二分搜不如一路爬過去。所以副程式可以改成下面這樣。

```
// return the inversion in [le, ri) ans sort them
LL inv(int a[], int le, int ri) {
    if (le+1 >= ri) return 0; // terminal case
    int m = (le+ri)/2;
    // recursively solve the left and the right parts
    LL w=inv(a, le, m) + inv(a, m, ri), cross=0;
    // count a[j]<a[i] for i<m<=j
    int j=m;
    for (int i=le; i<m; i++) {
        while (j<ri && a[j]<a[i]) // until >=a[i]
            j++;
        cross += j - m; // num <a[i]
    }
    sort(a+le, a+ri); // sort before return
    return w + cross;
}
```

雖然避掉了二分搜，但是要排序，所以合併階段還是花了 O(nlog(n))，整個程式的複雜度還是 $O(nlog^2(n))$ 並沒有降下來。

再看看這個程式是不是有點熟悉呢？計算右邊有幾個比 a[i]小的部分不就幾乎是在合併左右兩個排好序的陣列嗎！確實，這支程式跟 P-5-3 的合併排序法少有 87%以上相同，有沒有突然想起前面講的那隻口渴的烏鴉？是的，我們剛才在一個很像合併排序法的程式裡面呼叫 sort()！就像是烏鴉只想著要找石頭而忘了最終目的是喝水。所以，其實呼叫排序根本是不必要的，我們在合併兩個排好序的序列時，本來就幾乎已經算了反序數了。以下是這樣的寫法，我們只要把合併排序法稍加修改就可以了，時間複雜度也跟 merge sort 一樣是 O(nlog(n))。

```
// p-5-4 inversion number DaC O(nlogn)
```

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;

// return the inversion in [le, ri) and sort the array
LL inv(int a[], int le, int ri) {
    if (le+1 >= ri) return 0; // terminal case
    int m = (le+ri)/2;
    // recursively solve the left and the right parts
    LL w=inv(a, le, m) + inv(a, m, ri), cross=0;
    // merge the two sorted lists
    int temp[ri-le], j=m, k=0;
    for (int i=le; i<m; i++) {
        while (j<ri && a[j]<a[i])
            temp[k++] = a[j++];
        temp[k++] = a[i];
        cross += j - m; // num <a[i]
    }
    // the remaining of right part are already on position
    // copy back to a
    for (k=le; k<j; k++)
        a[k] = temp[k-le];
    return w + cross;
}

int main() {
    int i, n, ar[100010];
    scanf("%d", &n);
    for (i=0; i<n; i++) scanf("%d", ar+i);
    printf("%lld\n", inv(ar, 0, n));
    return 0;
}
```

下一題與第四章的例題 P-4-5 是一樣的，放在這裡當作習題是希望有興趣的人可以練習分治的寫法，後面會給予提示。

習題 Q-5-5. Closest pair(同 P-4-15, 分治版) (@@)

平面兩點的 L_1 距離為兩點的 X 差值與 Y 差值的和，也就說，如果兩點座標是(a,b)與(c,d)，則 L_1 距離是|a-c|+|b-d|。輸入 n 個點的座標，請計算出 L_1 距離最近兩點的 L_1 距離。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行為一個正整數 n，接下來 n 行，每行兩個整數 x 與 y 代表一點的座標。n 不超過 1e5，座標值絕對值不超過 1e8。

輸出：最近兩點的 L_1 距離。

範例輸入：

```
4
-1 5
4 0
3 1
-2 -3
```

範例結果：

```
2
```

Q-5-5 提示：將點依照 X 座標排序後，將所有點均分為左右兩部分，以遞迴分別求出左右的最近距離在取最小值，在合併階段的工作是找出來左右各一點的最小距離。假設目前已找到的最小距離是 d， X 為中值的點座標是(p,q)，那麼兩邊的點只有 X 座標在[p-d,p+d]區間的點需要計算。如果兩邊的點已經依照 Y 座標排序，對左邊的任一點(x,y)，右邊的點中只有 Y 座標落在[y-d,y+d]區間的點需要計算與(x,y)的距離。在 P-4-15 掃瞄線算法時，我們必須使用一個動態的資料結構在點逐步加入時來維持 Y 座標排序，但是使用分治時，利用 merge sort 類似的方法，只需要用簡單的陣列就可以做到了，時間複雜度一樣是 O(nlog(n))。

下一題也是見過的，之前出現在第三章的習題，這裡當作例題說明分治的寫法。

例題 P-5-6. 線性函數(同 Q-3-14，分治版)

有 N 線性函數$f_i(x) = a_i x + b_i$，1≤i≤N。定義$F(x) = \max_i f_i(x)$ 。輸入 c[i], 1≤i≤m，請計算$\sum_{i=1}^{m} F(c[i])$。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行是 N 與 m。接下來有 N 行，依序每行兩個整數 a_i 與 b_i，最後一行有 m 個整數 c[1], c[2], …, c[m]。每一行的相鄰數字間以空白隔開。N≤1e5，m≤5e4，輸入整數絕對值不超過 1e7，答案不超過 1e15。

輸出：計算結果。

範例輸入：

```
4 5
-1 0
1 0
-2 -3
2 -3
4 -5 -1 0 2
```

範例結果：

15

每一個線性函數對應到平面上一條直線，這一題需要一點幾何特性，簡單的說，越往右邊，斜率大的函數值(Y 值)會越大。因此，假設我們先將直線函數依照斜率由小到大排序，對於某一點 x = c 時，先找出在此點的最大函數值是某個 f_i。那麼，在 x > c 時，我們不需要計算斜率比 f_i 小的函數值：同時，在 x < c，不需要斜率比 f_i 大的函數值。為了分治的效率，我們每次抓 x 的中值，計算出哪一條直線在此的函數值最大(笨笨的算就可以)，然後遞迴左右，以下是範例程式。

為了排序，我們定義了一個結構來存每一條直線，也定義了一個比較函數：先比斜率，斜率相同比截距，當然也可以用 STL 的 pair 來寫而略過比較函數。程式重頭戲就是遞迴函數 dc(l1, r1, l2, r2)，這個遞迴函數計算點 point[l2]~point[r2-1]在直線 line[l1]~line[r1-1]的最大值總和，做法依照上一段的說明，其實很簡單。

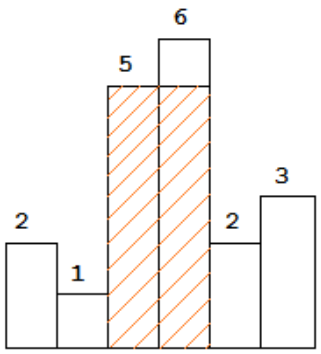
```
// P-5-6. Let F be the maximum of a set of linear function.
// Find F(c[1]) + F(c[2])+...F(c[m]), divide and conquer
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define N 100010
using namespace std;
typedef long long LL;
struct Line {
    int a, b; // y=ax+b
} line[N];
// compare by slope first
bool cmp(Line p, Line q) {
    if (p.a == q.a)
        return p.b < q.b;
    return p.a < q.a;
}
int point[N];

// for line [l1,r1), point [l2,r2)
LL dc(int l1,int r1,int l2,int r2) {
    if (l2 >= r2) return 0; // no points
    int mid = (l2+r2)>>1;
    // find max y of the middle point
    LL max_y = LLONG_MIN, who;
    for (int i=l1; i<r1; i++) {
        LL y=(LL)point[mid]*line[i].a+(LL)line[i].b;
        if (max_y < y) {
            max_y = y;
            who = i;
        }
    }
    // left side need only smaller slope, right side larger slope
    return max_y + dc(l1,who+1,l2,mid) + dc(who,r1,mid+1,r2);
}
```

```
int main() {
    int i,m,n;
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for (i=0;i<n;i++) {
        scanf("%d%d",&line[i].a,&line[i].b);
    }
    for (i=0;i<m;i++) scanf("%d",point+i);
    sort(line, line+n, cmp);
    sort(point, point+m);
    printf("%lld\n",dc(0,n,0,m));
    return 0;
}
```

下一題是有很多解法的例題。

例題 P-5-7. 大樓外牆廣告 (分治版)

有一條長街林立著許多大樓，每棟樓高高低低不一定，但寬度都是相同。現在想在牆面上找一塊面積最大的矩形來作外牆廣告，此矩形的一對邊必須平行地面，假設每一棟樓的寬度都是 1 單位。以右圖為例，有六棟樓，高度依序為(2,1,5,6,2,3)，最大矩形如圖中標示的部分，面積為 10。



Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行 n，代表有 n 棟樓，第二行有 n 個非負整數，依序代表從左到右每棟樓的高度。n 不超過 1e5，樓高不超過 1e8。

輸出：最大矩形的面積。

範例輸入：

```
6
2 1 5 6 2 3
```

範例結果：

```
10
```

天真的解法是嘗試所有左右端區間[i,j]，對於每個區間最大可能的高度是在此區間的最小樓高，如果對每一個區間都跑一個迴圈找最小高度，需要花 O(n³)，那也天真的太過分了。類似 maximum subarray，我們可以對任一個固定左端 i，一個迴圈跑完所

有可能的右端，過程中不斷的更新 prefix-minimum，O(n²)就行了。這個解法太簡單了，所以也不需要放上版面來。我們來想想看分治的思維。

分治的想法當然是每次要算某個區間的解，問題是如何分割以及如何合併。假設第 i 棟大樓的高度 h[i]是全部高度中最低的，那麼，能跨 i 左右的最大矩形，他的水平位置是整個區間，高度就是 h[i]。既然其他的矩形都不可能跨過 i 的左右，我們就可以將區間切割成左右兩塊，分別遞迴求解，在所有找到的解中最大的就是最後的解。以下這樣想法之下的範例程式。

```
// p_5_7 divide and conquer at smallest, O(n^2)
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;
#define N 100010
LL h[N];
// largest rectangle in range [s, t)
LL rect(int s, int t) {
    if (s>=t) return 0;
    if (s+1==t) return h[s];
    // find min height
    int m=min_element(h+s, h+t) - h;
    LL max_rect=(t-s)*h[m];
    // recursively solve the left and right
    max_rect=max(max_rect, rect(s,m));
    max_rect=max(max_rect, rect(m+1,t));
    return max_rect;
}

int main() {
    int n;
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%lld", &h[i]);
    printf("%lld\n",rect(0,n));
    return 0;
}
```

上面這個分治的時間複雜度是多少？必須看切割的狀況，複雜度遞迴式是：

T(n) = T(i) + T(n-i-1) + O(n)，

如果運氣很好，每次切割左右都不小於一定比例，總時間複雜度會是 O(nlog(n))，但很不幸的，如果每次的最低點都在邊緣，例如說原輸入高度是遞增或遞減的，時間複雜度會高到 O(n²)。能改善嗎？如果每次找最小值都可以很快的查詢出來，那時間複雜度是可以改善的，但必須動用到比較複雜的資料結構來做區間最小值查詢(RMQ, range minimum query)。

假使我們從一定要降低複雜度的需求來思考。前面見過：架勢起的好，螳螂鬥勝老母雞。分治要有好的效率，分割時最好是平均分割，切成兩塊一樣大的，如此一來，只要合併花的時間小於 O(n²)，整體的複雜度就會降下來了。均勻切割成兩塊不是問題，中點一切就行，問題在合併，也就是找出跨中點的最大矩形，我們來試試看。

假設目前要處理的區間範圍是[s, t-1]，中點是 m，那麼跨過中點矩形的高度顯然不能超過 h[m]。在高度不小於 h[m]的條件下盡量延伸左右範圍直到不能延伸為止，也就是會找到一個區間[i+1, j-1]，h[i]<h[m]或者已達左邊界，而且 h[j]<h[m]或者已達右邊界。這樣我們可以求得以高度為 h[m]的最大矩形。每一次我們嘗試逐步下降高度，然後再往外擴增範圍，因為要逐步下降，所以下一次的高度基本上是 max(h[i], h[j])，除非其中之一以超越邊界，那就取另一端。重複以上的步驟，我們會嘗試過區間內所有可能的最高高度，找到最大的矩形。程式碼其實不難，但要小心邊界。

在擴增範圍的過程中，i 只會由中點往左邊跑，而 j 只會從中點往右邊跑，所以合併的步驟只會花線性時間，因此整體的複雜度是 O(nlog(n))。因此，利用分治的架構，我們寫了一個不複雜的合併步驟，就達到不錯的時間複雜度。

```
// p_5_7 divide and conquer at middle, O(nlogn)
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long LL;
#define N 100010
LL h[N];
// largest rectangle in range [s, t)
LL rect(int s, int t) {
    if (s>=t) return 0;
    if (s+1==t) return h[s];
    int m=(s+t)/2;
    // recursively solve the left and right
    LL max_rect=max(rect(s,m),rect(m+1,t));
    // merge step, find rectangle cross middle
    LL i=m, j=m, height=h[m], largest=0;
    // each time, find maximal [i+1,j-1] of given height
    while (i>=s || j<t) {
        // choosing smaller as the next height
        if (i<s) height=h[j];
        else if (j>=t) height=h[i];
        else height=max(h[i],h[j]);
        // extend the boundary
        while (i>=s && h[i]>=height) // left boundary
            i--;
        while (j<t && h[j]>=height) // right boundary
            j++;
        largest =max(largest, (j-i-1)*height);
    }
    return max(max_rect, largest);
}
```

```
int main() {
    int n;
    scanf("%d",&n);
    for (int i=0;i<n;i++)
        scanf("%lld", &h[i]);
    printf("%lld\n",rect(0,n));
    return 0;
}
```

P-5-7 存在更好的解法。分治程式的合併階段考慮的是左右邊各一個區段，如果你把他想成左邊的一個區段與右邊的一點如何合併解答，就會是掃描線演算法，範例程式中有這樣的解法，但我們這裡只要是說明分治，所以就留給有興趣的人自己去思考一下。

下一個習題是在第三章 Q-3-12 出現過的完美彩帶，當時使用的技巧是滑動視窗，這一題也可以使用分治法，合併階段要找跨過中點的解，只要能在 O(n)完成合併階段，整體複雜度就可以做到 O(nlog(n))。

習題 Q-5-8. 完美彩帶(同 Q-3-12，分治版)(APCS201906)

有一條細長的彩帶，總共有 m 種不同的顏色，彩帶區分成 n 格，每一格的長度都是 1，每一格都有一個顏色，相鄰可能同色。長度為 m 的連續區段且各種顏色都各出現一次，則稱為「完美彩帶」。請找出總共有多少段可能的完美彩帶。請注意，兩段完美彩帶之間可能重疊。

Time limit: 1 秒

輸入格式：第一行為整數 m 和 n，滿足 $2 \le m \le n \le 2\times10^5$；第二行有 n 個以空白間隔的數字，依序代表彩帶從左到右每一格的顏色編號，顏色編號是不超過 10^9 的非負整數，每一筆測試資料的顏色數量必定恰好為 m。

輸出：有多少段完美彩帶。

範例輸入：

```
4 10
1 4 1 7 6 4 4 6 1 7
```

範例結果：

```
3
```

說明：區間[2, 5]是一段完美彩帶，因為顏色 4、1、7、6 剛好各出現一次，此外，區間[3, 6]與[7, 10]也都是完美彩帶，所以總共有三段可能的完美彩帶。

5.3. 補充說明

正如我們在本章開頭所說的，很多分治演算法所解的問題都有其他版本的解法，本章提出的例題與與習題其實都存在別的解法，甚至別的解法的複雜度還更好。其實，從基本的道理上看，很多分治的做法可以轉換成掃描線演算法並不意外。分治法的重點在合併，也就是跨過左邊與右邊的解；而掃描線演算法是一點一點的逐步加入右邊的資料。

如果仔細去看合併排序法與插入排序法，我們可以這麼說：其實合併排序法就是一次處理一整批的插入排序法。但分治的好處也在這裡，因為是整批的合併，所以每個成員參與合併的次數不會太多(典型是 log(n)次)，所以合併時即使不也什麼高超的技巧或是複雜的資料結構，最後還是可以得到不錯的整體複雜度。反觀掃描線演算法，因為一次加入一個資料，所以前面處理的某些結構或部分結果不可以丟棄，因此通常需要有個資料結構來幫忙維護，尤有甚者，這個資料結構往往必須是動態的，因為結構會不斷的變動。也就是說，對於一些題目，如果用分治法，搭配簡單的陣列可能就可以做，但是如果用掃描線演算法就必須配備 STL 中的資料結構，甚至是 STL 中沒有的資料結構。

具體舉例來說，對於 Q-5-5(closest pair)，如果以掃描線算法來作，必須保持已經掃過的點以 Y 值排序，我們必須使用一個動態資料結構(如 STL 中的 multimap)，但是分治法就不需要了。以考試或比賽範圍來說，multimap 可能不在考試範圍，但是使用分治法並不需要，所以還是可以考。另外一個例子更"有趣"，那是 P-5-4 的反序數量，我們在這一章中已經看到了，將分治法的合併演算法稍加修改就可以解，如果用掃描線演算法，每次碰到 a[i]，必須找到前面有幾個數字大於 a[i]，很不幸的，STL 中並沒有一個資料結構可以很簡單做到這事情，所以很多程式競賽的選手幾乎都是用線段樹(segment tree)來做這件事。也就是說，如果用分治計算反序數只需要簡單的程式與陣列，但是用掃描線算法則必須裝備一個"頗為複雜"的資料結構(線段樹)。結論是：分治是一個很重要的演算法概念與思維模式。

最後藉著線段樹這個話題，附帶提一下課本上念資料結構與程式競賽的資料結構不一樣的地方。STL 中的 set 基本上是個平衡的 BST(binary search tree)，如果這棵 BST 是自己種的，想要在 BST 上查詢比某個數字小的有多少，那只要簡單的修改一下 BST 的結構就可以簡單的做到，但是 STL 雖然有 BST(set)，但是沒辦法做這件事，所以練競賽的選手需要學線段樹，當然線段樹的用途很廣同。其實線段樹也就是一種可以偷懶的 BST，因為在競賽的場合，不太可能有時間去自己寫 BST，所以可以用 STL 中的就用，不能用的就會找出替代手法(或是說偷懶手法)，這樣的狀況在競賽程式中屢見不鮮，另外一個很有名的手法就是在優先佇列中降 key 的處理(decreasing key in a priority queue)，不過這些都超過本教材的範圍，僅此做一些額外的說明給有興趣的人參考。