

1. 計算 $C(12,3)$ 的值

序號：

姓名

$$C(12,3) = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

$$C(12,1) = \frac{12}{1} = 12$$

$$C(12,0) = 1$$

2. 利用歸納法證明 $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

歸納基礎 $n=1$, 左式 $= 1 = 1^2$

假設 $n=k$ 成立, $\Rightarrow 1+3+\dots+(2k-1) = k^2$

歸納推論 $n=k+1 \Rightarrow 1+3+\dots+(2k-1)+(2k+1)$
 $= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

3. $S(n): 4n < (n^2 - 7)$ 。證明對所有 $n \geq 6$ 的整數， $S(n)$ 均成立。

歸納基礎 $n=6, \Rightarrow 4 \times 6 < 6^2 - 7 = 29$ 成立

假設 $n=k$ 成立, $\Rightarrow 4k < k^2 - 7 \Rightarrow k^2 - 4k - 7 > 0$

歸納推論 $n=k+1 \Rightarrow (k+1)^2 - 4(k+1) - 7$
 $= k^2 + 2k + 1 - 4k - 4 - 7 = (k^2 - 4k - 7) + 2k - 3 > 0$

4. 某資工系有 14 位專任老師，依專長劃分如下： 數學 2 人、資訊 10 人、通識 2 人。今需要 6 位 老師組成課程委員會。任意挑選，有幾種方法？ $C(14,2)$

5. 某資工系有 **14** 位專任老師，依專長劃分如下：
數學 **2** 人、資訊 **10** 人、通識 **2** 人。今需要 **5** 位
老師組成課程委員會。資訊領域最多挑選 **3** 位老
師，有幾種方法？

$$C(10,3) \times C(4,2) + C(10,2) \times C(4,3) + C(10,1) \times C(4,4)$$

6. $S(n): n^2 - 1$ 為 **8** 的倍數。證明對所有 $n \geq 1$ 的 **奇數**， $S(n)$
均成立。

歸納基礎 $n = 1, \Rightarrow 1^2 - 1 = 0$ 為 8 的倍數

假設 $n = k$ 成立, $\Rightarrow k^2 - 1 = 8x$

推納推論 $n = k + 2 \Rightarrow (k + 2)^2 - 1 = k^2 + 4k + 4 - 1$
 $= (k^2 - 1) + 4(k + 1) = 8a$

7. 利用歸納法證明 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

歸納基礎 $n = 1, \Rightarrow 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$ 成立

假設 $n = k$ 成立, $\Rightarrow 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

推納推論 $n = k + 1 \Rightarrow 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$
 $= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$