

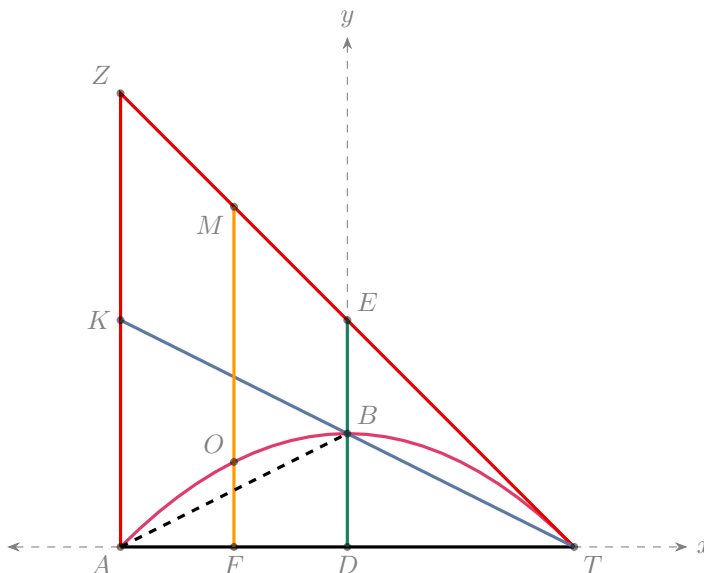
TAREA 3

KEVIN RINCON, DIEGO TARAPUEZ, KEVIN VELEZ

Problema 1 La cuadratura de la parábola por medios mecánicos.

Sea ABT el segmento de la parábola limitado por la recta AT y la parábola ABT , D el punto medio de AT , B el vértice de la parábola, la recta DB es el eje de la parábola. TZ es tangente a la parábola en T y AZ es perpendicular a AT . Sea F un punto en AT , se traza FM perpendicular a AT . Demostrar que B es el punto medio de KT y de DE , y demostrar que $\frac{AT}{AF} = \frac{FM}{FO}$.

Demostración: De manera analítica, podemos la parábola en el plano, tomando el eje x como la recta AT y el eje y como la recta DB , la parábola está descrita entonces por la función $y = -ax^2 + b$, con $a, b > 0$, por lo que $DB = b$. De esta manera, el corte con el eje x se dan en $\left\{-\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right\}$.



Como TZ es tangente a la parábola en el punto $T = \sqrt{\frac{b}{a}}$, entonces, derivando y evaluando en el punto, obtenemos la pendiente de la recta TZ .

$$\left. \frac{d}{dx}(-ax^2 + b) \right|_{x=\sqrt{\frac{b}{a}}} = -2ax \Big|_{x=\sqrt{\frac{b}{a}}} = -2a\sqrt{\frac{b}{a}} = -2\sqrt{ab}$$

por lo que la ecuación de la recta TZ es

$$y = -2\sqrt{ab} \cdot x + 2b$$

Por lo que, el punto E , se encuentra al remplazar 0 en la ecuación de la recta TZ . dando como resultado $E = (0, 2b)$, aquí queda evidente entonces que B es el punto medio de DE , pues $DB = b$ y $DE = 2b$.

Ahora, hallamos la recta KT que pasa por T y B , primero la pendiente

$$m = -\frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = -b\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{ab}$$

Entonces, la ecuación de la recta KT es

$$y = -\sqrt{ab} \cdot x + b$$

Por lo tanto, la coordenada y del punto K se encuentra al remplazar x en la ecuación de la recta KT , dando como resultado $K = (-\sqrt{\frac{b}{a}}, 2b)$.

Verifiquemos entonces que la distancia de K a B es igual a la distancia de B a T .

$$\begin{aligned} d(K, B) &= \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{b}{a}} - 0\right)^2 + (2b - b)^2} & d(B, T) &= \sqrt{\left(0 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + (b - 0)^2} \\ d(K, B) &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + b^2} & d(B, T) &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + b^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(K, B) = d(B, T)$, es decir, B es el punto medio de KT .

Ahora, veamos que si F tiene coordenadas $(x, 0)$, entonces O tiene coordenadas $(x, -ax^2 + b)$ y M tiene coordenadas $(x, -2\sqrt{ab}x + 2b)$, entonces veamos la razón $\frac{FM}{FO}$

$$\frac{FM}{FO} = \frac{-2\sqrt{ab} + 2b}{-ax^2 + b}$$

Y veamos la razón $\frac{AT}{AF}$

$$\frac{AT}{AF} = \frac{2\sqrt{\frac{b}{a}}}{x + 2\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

Y sabemos que $\frac{FM}{FO} = \frac{AT}{AF}$ si y solo si $FM \cdot AF = FO \cdot AT$, verifiquemos entonces

$$\begin{aligned} FM \cdot AF &= (-2\sqrt{ab}x + 2b) \left(x + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) & FO \cdot AT &= (-ax^2 + b) \left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \\ FM \cdot AF &= -2\sqrt{ab}x^2 - \cancel{2bx} + \cancel{2bx} + 2b\sqrt{\frac{b}{a}} & FO \cdot AT &= -2\sqrt{ab}x^2 + 2b\sqrt{\frac{b}{a}} \\ FM \cdot AF &= -2\sqrt{ab}x^2 + 2b\sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

Como podemos ver, efectivamente $FM \cdot AF = FO \cdot AT$, por lo que se tiene que $\frac{FM}{FO} = \frac{AT}{AF}$

Por último, veamos que los triángulos $\triangle ABT$ y $\triangle AZT$, comparten la misma base, la altura del triángulo $\triangle ABT$ es el segmento DB , por lo que su altura es b , y la altura del triángulo $\triangle AZT$ es el segmento AZ , por lo que su altura $4b$, de este modo, el área del triángulo $\triangle ABT$ es $\frac{1}{2} \cdot AT \cdot b$ y la medida del triángulo $\triangle AZT$ es $\frac{1}{2} \cdot AT \cdot 4b$, y por tanto, el triángulo $\triangle AZT$ es cuatro veces mayor en área (medida) que el triángulo $\triangle ABT$, es decir

$$\triangle AZT = 4\triangle ABT$$

□