TOPOLOGÍA

KEVIN VELEZ

Problema 1 Problema en clase

Demostrar que d es una métrica en $\mathbb{Z}^+$, donde d está dada por:

$$d(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

Demostración: Debemos mostrar que d satisface las cuatro propiedades para ser una métrica. Sean $n, m, k \in \mathbb{Z}^+$.

i)

$$d(n,n) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right| = |0| = 0$$

ii) $d(n,m) \geq 0$ por definición, ya que el valor absoluto es no negativo.

iii)

$$d(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|(-1)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = d(m,n)$$

iv)

$$d(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right| + \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right| = d(n,k) + d(k,m)$$

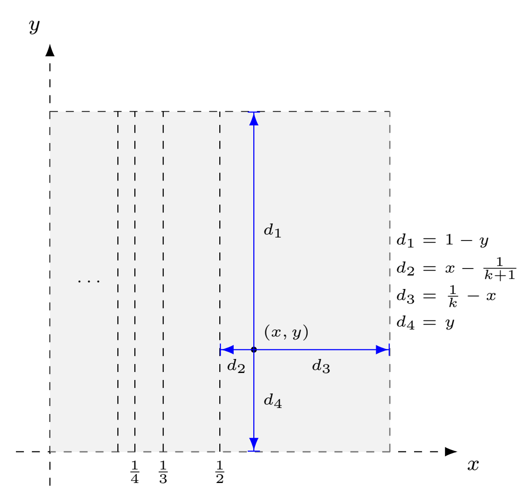
Por tanto, d es una métrica.

□

Problema 2 Ejercicio 5(c). *Elementos de topología - Garcia y Dal Lago*

Demostrar que $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea.

Demostración:



Fecha: 16 de octubre de 2022.

Sea $(x, y) \in A$, vamos a mostrar que existe $r > 0$ tal que $B((x, y), r) \subseteq A$. Tenemos entonces que $0 < x < 1$, por lo que $\frac{1}{x} > 1$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < \frac{1}{x} < k+1$, luego $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$, además, $0 < y < 1$. Consideramos entonces el radio $r = \text{mín}\left\{1 - y, x - \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} - x, y\right\} > 0$, y la bola abierta $B((x, y), r)$.

Sea $(u, v) \in B((x, y), r)$, entonces, como la métrica es la euclídea, se tiene que

$$\begin{aligned} d((x,y),(u,v)) &< r \\ \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} &< r \\ (x-u)^2 + (y-v)^2 &< r^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Como $(y - u)^2 > 0$, entonces $(x - u)^2 < r^2$, así

$$\begin{aligned} (x-u)^2 &< r^2 \\ |x-u| &< |r| \\ |x-u| &< r \\ -r < x - u &< r \\ -r < u - x &< r \end{aligned}$$

por definición, $r \leq \frac{1}{k} - x$, y $r \leq x - \frac{1}{k+1}$, por lo que $-r \geq \frac{1}{k+1} - x$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} - x \leq -r < u - x < r \leq \frac{1}{k} - x \\ \frac{1}{k+1} - \cancel{x} < u - \cancel{x} < \frac{1}{k} - \cancel{x} \\ \frac{1}{k+1} < u < \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Análogamente, en (1), como $(x - u)^2 > 0$, entonces $(y - v)^2 < r^2$, así

$$\begin{aligned} (y-v)^2 &< r^2 \\ |y-v| &< |r| \\ |y-v| &< r \\ -r < y - v &< r \\ -r < v - y &< r \end{aligned}$$

por definición, $r \leq 1 - y$, y $r \leq y$, por lo que $-r \geq -y$, entonces

$$\begin{aligned} -y \leq -r < v - y < r \leq 1 - y \\ -\cancel{y} < v - \cancel{y} < 1 - \cancel{y} \\ 0 < v < 1 \end{aligned}$$

Así, tenemos que $0 < v < 1$ y $\frac{1}{k+1} < u < \frac{1}{k}$, por lo que $(u, v) \in A$, y por tanto $B((x, y), r) \subseteq A$. Luego, A es un abierto de $\mathbb{R}^2$

$\square$

Problema 3 Ejercicio 8. *Elementos de topología - Garcia y Dal Lago*
Sea E un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se define la distancia de x a A por

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}$$

a) Demostrar que si definimos $\delta : E \to \mathbb{R}$ por $\delta(x) = d(x, A)$, δ es continua.
b) Probar que si $r > 0$, $\{x : d(x, A) \leq r\}$ es cerrado

Demostración:

a) Sea $x, x_0 \in E$, y $a \in A$, entonces $d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a)$, como $d(x, A) \leq d(x, a)$ por ser el ínfimo, entonces $d(x, A) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a)$, así, se tiene que

$$\delta(x) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a)$$

Esto se cumple para todo para todo $a \in A$, en particular, para el ínfimo. Como $\inf \{d(x, x_0) + d(x_0, a) : a \in A\} = d(x, x_0) + \inf \{d(x_0, a) : a \in A\} = d(x, x_0) + \delta(x_0)$. Por lo que

$$\delta(x) \leq d(x, x_0) + \delta(x_0)$$
$$\delta(x) - \delta(x_0) \leq d(x, x_0)$$

De manera análoga, partiendo de $d(x_0, a) \leq d(x_0, x) + d(x, a)$, se llega a que $\delta(x) - \delta(x_0) \geq -d(x_0, x)$, por lo que

$$|\delta(x) - \delta(x_0)| \leq d(x, x_0)$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$, podemos tomar x_0 ε-cercano a x, de tal manera que $d(x, x_0) = \varepsilon$, en otras palabras, tomamos $r = \varepsilon$ y tenemos que $d(x, x_o) \leq r = \varepsilon$ implica que $|\delta(x) - \delta(x_0)| \leq d(x, x_0) \leq r = \varepsilon$. Lo cual quiere decir, que la función δ es continua para todo punto $x \in E$

b) Sea $r > 0$, vamos a probar que $B = \{x : d(x, A) \leq r\}$ es cerrado. Notemos que $B = \delta^{-1}([0, 1])$. Como δ es continua, entonces preimagen de cerrados es cerrado, y como $[0, 1]$ es cerrado, entonces B es cerrado.

□

Problema 4 Ejercico 6. *Topología - Munkres*
Pruebe que las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ no son comparables.

Demostración: Sean τ_ℓ y τ_K las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ respectivamente. Consideremos el elemento básico $[0, 1)$ para τ_ℓ. No hay ningún básico para τ_K que contenga al 0, y este contenido en $[0, 1)$, así que $\tau_\ell \not\subset \tau_K$.

Ahora, consideremos consideremos el básico $(-1, 1) \setminus K$ para τ_K, No existe ningún básico para τ_ℓ que contenga al 0, y este contenido en $(-1, 1) \setminus K$, así que $\tau_K \not\subset \tau_\ell$.

Por lo tanto, τ_ℓ y τ_K no son comparables.

□