TAREA 2 - TOPOLOGÍA GENERAL

JUAN PABLO LOPEZ, SEBASTIAN RAMIREZ, KEVIN VELEZ

Problema 1 Ejercicio 2.b)
Sea $X = \mathbb{Z}^+$. Sea $A \subseteq X$, se define la densidad de A como el número

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}$$

donde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $|S|$ denota la cardinalidad de S.
Sea

$$\tau = \{A \subseteq X | 1 \notin A \vee \rho(A) = 1\}$$

Caracterice los cerrados en la topología τ.

Demostración: Los cerrados de X con la topología τ son

$$\begin{aligned}
\mathscr{C} &= \{B \subseteq X \mid X - B \in \tau\} \\
\mathscr{C} &= \{B \subseteq X \mid 1 \notin X - B \vee \rho(X - B) = 1\} \\
\mathscr{C} &= \{B \subseteq X \mid 1 \notin X \vee 1 \in B \vee \rho(X - B) = 1\}
\end{aligned}$$

Pero, $1 \in X$, entonces

$$\mathscr{C} = \{B \subseteq X \mid 1 \in B \vee \rho(X - B) = 1\}$$

Ahora, veamos que conjuntos satisfacen la propiedad de $\rho(X - B) = 1$

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|[n] - B|}{n} \\
1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|[n] - (B \cap [n])|}{n}
\end{aligned}$$

Como $B \cap [n] \subseteq [n]$, entonces

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|[n]| - |B \cap [n]|}{n} \\
1 &= \cancelto{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|[n]|}{n}} - \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [n]|}{n} \\
\cancel{1} &= \cancel{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [n]|}{n} \\
0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [n]|}{n} \\
0 &= \rho(B)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los cerrados de X con la topología τ son

$$\mathscr{C} = \{B \subseteq X \mid 1 \in B \vee \rho(B) = 0\}$$

$\square$

Fecha: Noviembre 2022.

Problema 2 Ejercicio 4.b)
Sean $m \in \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$. Sean

$$L_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = mx + b \text{ para algun } b \in B\}$$

y

$$\tau \{L_B \,|\, B \subseteq \mathbb{R}\}$$

Demuestre que $B = L_{\{b\}}$ con $b \in \mathbb{R}$ es un base para τ.

Demostración: Teniendo en cuenta que τ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$, entonces veamos que se cumple la primera condición

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, \exists \, L_{\{b\}} \in B \,|\, (x, y) \in L_{\{b\}} \subseteq \mathbb{R}^2$$

sea $m \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego esta condición se cumple para $b = y - mx$
Asi $(x, y) \in L_{\{y-mx\}} \in B \subseteq \mathbb{R}^2$, ya que se cumple la definición de $L_{\{b\}}$

$$L_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = mx + b \text{ para algun } b \in B\}$$

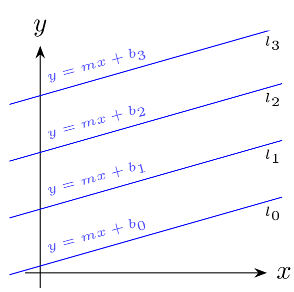
Como $m, y, x \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es cerrado para la suma (resta) y multiplicación, entonces $b = y - mx$ pertenece a $\mathbb{R}$ y por ende, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe un básico que lo contiene.

Ahora veamos que para todo abierto de la topología τ existe una colección de básicos el cual se puede expresar como la union de estos.

Sea $L_B \in \tau$ con $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces veamos que

$$L_B = \bigcup_{b \in B} L_b$$

Sea $m \in \mathbb{R}$, tomando m como una pendiente fija, los elementos de L_B son de la forma $(x, y) = (x, mx + b)$ para algún $b \in B$, es decir, rectas paralelas con diferentes intersecciones con el eje y como se ilustra en la siguiente figura



Ahora si tomamos $l_\alpha \in L_B$

$$l_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = mx + \alpha\}$$

luego, existe $\alpha \in B$ tal que $(x, y) \in L_{\{\alpha\}} \subseteq \bigcup\limits_{b \in B} L_{\{b\}}$

Asi $L_B \subseteq \bigcup\limits_{b \in B} l_{\{b\}}$

Ahora observemos la otra inclusion. Sea $(x, y) \in \bigcup\limits_{b \in B} L_{\{b\}}$ entonces existe $j \in B$ tal que $(x, y) \in L_{\{j\}}$ y se cumple $y = mx + j$ con $j \in B \subseteq \mathbb{R}$. Pero esta es precisamente la definición de L_B ya que $L_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = mx + b \text{ para algún } b \in B \}$

Asi

$$\bigcup_{b \in B} L_{\{b\}} \subseteq L_B$$

y por lo tanto $L_B = \bigcup\limits_{b \in B} L_{\{b\}}$

Asi queda demostrado que todo abierto en la topología τ se puede generar mediante la unión de una colección de básicos $L_{\{b\}} \in B$

Por ultimo se demuestra la condición si $(x,y) \in L_{\{b_1\}}$ y $(x,y) \in L_{\{b_2\}}$ entonces existe un básico $L_{\{b_3\}}$ tal que $(x,y) \in L_{\{b_3\}} \subseteq L_{\{b_1\}} \cap L_{\{b_2\}}$

Pero esto solo sucede si

$$L_{\{b_1\}} = L_{\{b_2\}} \iff b_1 = b_2$$

ya que son rectas paralelas, de otro modo, su intersección sería vacío, el cual también es un abierto de la topología τ.

$\square$

Problema 3 Ejercicio 11.b)

Siendo $X = [0,1] \times [0,1]$, con la topologia del orden lexicografico hallar la clausura de $B = \{(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Demostración: Como X tiene elemento maximo $(1,1)$ y minimo $(0,0)$, una base para la topologia son los intervalos cerrados a ambos lados. Por el teorema 17.6 en Munkres se tiene $\overline{B} = B \cup B'$, donde B' son los puntos de acumulación de B. Vamos a probar que $B' = \emptyset$, para ello tomemos un elemento (a,b) con $0 < a \leq 1$ y veamos que no puede ser un punto de acumulación de B. Supongamos que $a \neq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, por propiedad Arquimediana existe un natural n tal que $\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}$ (es posible ya que $a > 0$) y con ello vemos que el intervalo $[(a-\delta, b), (a+\delta, b)]$ con $\delta = \frac{1}{2}\min\{|a - \frac{1}{n+1}|, |a - \frac{1}{n}|\}$ es abierto y contiene a (a,b) pero no intercepta a $B - \{(a,b)\} = B$ debido a su misma construcción, es decir, (a,b) no es un punto de acumulación. Por otro lado, si $a = \frac{1}{n}$ para algún natural n, ahora tomamos el intervalo $[(a,0),(a,1)]$ si $b = \frac{1}{2}$ ya que solo contiene elementos de la forma $(\frac{1}{n}, x)$ con $x \in [0,1]$ con un n fijo y por lo tanto no intercepta a $B - \{(a,b)\}$. Si $b \neq \frac{1}{2}$ podemos asumir sin perdida de generalidad que $b < \frac{1}{2}$ y hacer $\delta = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - b)$, tendría que el intervalo $[(a,b),(a,b+\delta)]$ contiene a (a,b) pero no contiene a ningún elemento de B ya que los elementos de B tienen segunda coordenada igual a $\frac{1}{2}$.

Ahora veamos que pasa con $a = 0$, vemos que el intervalo $[(0,0),(0,1)]$ contiene a (a,b) pero no tienen a ningún elemento de B ya que son mayores a $(0,x)$ con $x \in [0,1]$.

Finalmente, se concluye que B no tiene puntos limite y por lo tanto $\overline{B} = B \cup B' = B$, es decir , B es cerrado.

$\square$