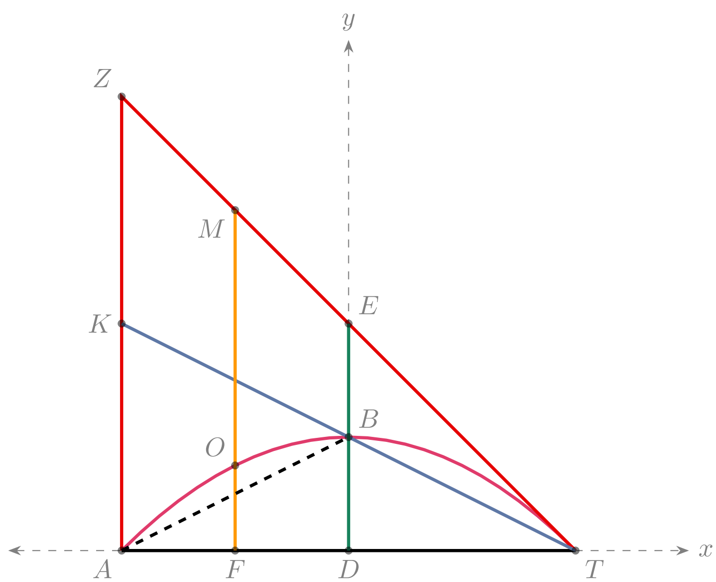
TAREA 3

Problema 1 La cuadratura de la parábola por medios mecánicos.

Sea ABT el segmento de la parábola limitado por la recta AT y la parábola ABT, D el punto medio de AT, B el vértice de la parábola, la recta DB es el eje de la parábola. TZ es tangente a la parábola en T y AZ es perpendicular a AT, Sea F un punto en AT, se traza FM perpendicular a AT. Demostrar que B es el punto medio de KT y de DE, y demostrar que $\frac{AT}{AF} = \frac{FM}{FO}$

Demostración: De manera análitica, podemos la parábola en el plano, tomando el eje x como la recta AT y el eje y como la recta DB, la parábola está descrita entonces por la función $y = -ax^2 + b$, con $a, b > 0$, por lo que $DB = b$. De está manera, el corte con el eje x se dan en $\left\{-\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right\}$.



Como TZ es tangente a la parábola en el punto $T = \sqrt{\frac{b}{a}}$, entonces, derivando y evaluando en el punto, obtenemos la pendiente de la recta TZ.

$$\frac{d}{dx}(-ax^2 + b)\Big|_{x=\sqrt{\frac{b}{a}}} = -2ax\Big|_{x=\sqrt{\frac{b}{a}}} = -2a\sqrt{\frac{b}{a}} = -2\sqrt{ab}$$

por lo que la ecuación de la recta TZ es

$$y = -2\sqrt{ab} \cdot x + 2b$$

Por lo qué, el punto E, se encuentra al remplazar 0 en la ecuación de la recta TZ. dando como resultado $E = (0, 2b)$, aquí queda evidente entonces que B es el punto medio de DE, pues $DB = b$ y $DE = 2b$.

Ahora, hallamos la recta KT que pasa por T y B, primero la pendiente

$$m = -\frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = -b\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{ab}$$

Entonces, la ecuación de la recta KT es

$$y = -\sqrt{ab} \cdot x + b$$

Fecha: Octubre 2022.

Por lo tanto, la coordenada y del punto K se encuentra al remplazar x en la ecuación de la recta KT, dando como resultado $K = (-\sqrt{\frac{b}{a}}, 2b)$.

Verifiquemos entonces que la distancia de K a B es igual a la distancia de B a T.

$$d(K,B) = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{b}{a}} - 0\right)^2 + (2b-b)^2} \qquad d(B,T) = \sqrt{\left(0 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + (b-0)^2}$$

$$d(K,B) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + b^2} \qquad d(B,T) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + b^2}$$

Por lo tanto, $d(K,B) = d(B,T)$, es decir, B es el punto medio de KT.

Ahora, veamos que si F tiene coordenadas $(x,0)$, entonces O tiene coordenadas $(x, -ax^2 + b)$ y M tiene coordenadas $(x, -2\sqrt{ab}x + 2b)$, entonces veamos la razón $\frac{FM}{FO}$

$$\frac{FM}{FO} = \frac{-2\sqrt{ab} + 2b}{-ax^2 + b}$$

Y veamos la razón $\frac{AT}{AF}$

$$\frac{AT}{AF} = \frac{2\sqrt{\frac{b}{a}}}{x + 2\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

Y sabemos que $\frac{FM}{FO} = \frac{AT}{AF}$ si y solo si $FM \cdot AF = FO \cdot AT$, verifiquemos entonces

$$FM \cdot AF = \left(-2\sqrt{ab}x + 2b\right)\left(x + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \qquad FO \cdot AT = \left(-ax^2 + b\right)\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$FM \cdot AF = -2\sqrt{ab}x^2 - \cancel{2bx} + \cancel{2bx} + 2b\sqrt{\frac{b}{a}} \qquad FO \cdot AT = -2\sqrt{ab}x^2 + 2b\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$FM \cdot AF = -2\sqrt{ab}x^2 + 2b\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Como podemos ver, efectivamente $FM \cdot AF = FO \cdot AT$, por lo que se tiene que $\frac{FM}{FO} = \frac{AT}{AF}$

Por último, veamos que los triángulos $\triangle ABT$ y $\triangle AZT$, comparten la misma base, la altura del triángulo $\triangle ABT$ es el segmento DB, por lo que su altura es b, y la altura del triángulo $\triangle AZT$ es el segmento AZ, por lo que su altura $4b$, de este modo, el área del triángulo $\triangle ABT$ es $\frac{1}{2} \cdot AT \cdot b$ y la medida del triángulo $\triangle AZT$ es $\frac{1}{2} \cdot AT \cdot 4b$, y por tanto, el triángulo $\triangle AZT$ es cuatro veces mayor en área (medida) que el triángulo $\triangle ABT$, es decir

$$\triangle AZT = 4\triangle ABT$$

$\square$ —