

TALLER 1 - LÓGICA MATEMÁTICA

KEVIN VELEZ ESCARRIA

Axiomas

1. $AX_1 : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $AX_2 : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. $AX_3 : (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
4. $MP : \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha}$

Problema 1

Mostrar que si de $\Gamma \vdash \alpha$ y de $\alpha \vdash \neg\beta$ entonces $\Gamma \vdash \beta$

Demostración:

1. Γ P
2. α Primer resultado
3. $\neg\beta$ Segundo resultado
4. no se cumple Por hipótesis

□

Problema 2

Demostrar que:

- a) $\vdash (\neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$
- b) $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
- c) $(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$
- d) $\vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- e) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Demostración:

- a) $\vdash (\neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$
 1. $(\neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \vdash \alpha \rightarrow \neg\beta$ TD
 2. $(\neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha), \alpha \vdash \neg\beta$ TD
 3. $(\neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$ AX_3
 4. $(\neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ P
 5. $\alpha \rightarrow \neg\beta$ $MP(5, 4)$
 6. α P
 7. $\neg\beta$ $MP(7, 6)$
- b) $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
 1. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ AX_2
 2. $\beta \rightarrow \gamma$ P
 3. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ Teorema en clase a 2.
 4. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ $MP(3, 1)$
 5. $\alpha \rightarrow \beta$ P
 6. $\alpha \rightarrow \gamma$ $MP(5, 4)$

c) $(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$

- | | | |
|----|---|------------|
| 1. | $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ | Prop 7.4 |
| 2. | $\alpha \rightarrow \beta$ | P |
| 3. | $\beta \rightarrow \neg\neg\beta$ | Prop 7.4 |
| 4. | $\neg\neg\alpha \rightarrow \beta$ | b) (1,2,3) |
| 5. | $\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta$ | b) (4,3,5) |
| 6. | $(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ | AX_3 |

7. $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ $MP(5, 6)$

d) $\vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

- | | | |
|----|---|-----------------------|
| 1. | $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))) \rightarrow$
$((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$ | AX_2 |
| 2. | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | AX_2 |
| 3. | $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$ | Teorema en clase a 2. |
| 4. | $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$ | $MP(4, 1)$ |
| 5. | $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ | AX_1 |
| 6. | $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | $MP(5, 4)$ |

d) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

□

Problema 3

Demuestre sin utilizar TD , ni RA , los ejercicios d) y e) del item anterior.

Demostración:

d)

- $\vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

□

Problema 4

Si se escoge a $\{\neg, \vee\}$ como conjunto completo de conectivos; y como sistema deductivo:

$AX_1 : \neg(\alpha \vee \alpha) \vee \alpha$

$AX_2 : \neg\alpha \vee \alpha \vee \beta$

$AX_3 : \neg(\alpha \vee \beta) \vee \beta \vee \alpha$

$AX_4 : \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg(\gamma \vee \alpha) \vee \gamma \vee \beta$ 3 Demostrar el teorema $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$.

$\neg\alpha \vee \beta$

$MP : \frac{\alpha}{\beta}$