# TALLER 1 - LÓGICA MATEMÁTICA

KEVIN VELEZ ESCARRIA

**Problema 1**

Mostrar que si de $\Gamma \vdash \alpha$ y de $\alpha \vdash \neg\beta$ entonces $\Gamma \vdash \beta$

***Demostración:***

□

**Problema 2**

Demostrar que:

a) $\vdash (\neg\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\beta)$
b) $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$
c) $(\alpha \to \beta) \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$
d) $\vdash (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
e) $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
f) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
g) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \to \beta$

***Demostración:***

a) $\vdash (\neg\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\beta)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\neg\neg\beta \to \neg\alpha) \vdash \alpha \to \neg\beta$ | $TD$ |
| 2. | $(\neg\neg\beta \to \neg\alpha), \alpha \vdash \neg\beta$ | $TD$ |
| 3. | $(\neg\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\beta)$ | $AX_3$ |
| 4. | $(\neg\neg\beta \to \neg\alpha)$ | $P$ |
| 5. | $\alpha \to \neg\beta$ | $MP(5,4)$ |
| 6. | $\alpha$ | $P$ |
| 7. | $\neg\beta$ | $MP(7,6)$ |

b) $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ | $AX_2$ |
| 2. | $\beta \to \gamma$ | $P$ |
| 3. | $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ | Prop 7.1 |
| 4. | $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ | $MP(3,1)$ |
| 5. | $\alpha \to \beta$ | $P$ |
| 6. | $\alpha \to \gamma$ | $MP(5,4)$ |

c) $(\alpha \to \beta) \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\neg\alpha \to \alpha$ | Prop 7.4 |
| 2. | $\alpha \to \beta$ | $P$ |
| 3. | $\beta \to \neg\neg\beta$ | Prop 7.4 |
| 4. | $\neg\neg\alpha \to \beta$ | b) (1,2,3) |
| 5. | $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$ | b) (4,3,5) |
| 6. | $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ | $AX_3$ |
| 7. | $\neg\beta \to \neg\alpha$ | $MP(5,6)$ |

*Fecha:* Octubre, 2022.

d) $\vdash (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))) \to$ $(((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))))$ | $AX_2$ |
| 2. | $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ | $AX_2$ |
| 3. | $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$ | Prop 7.1. |
| 4. | $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$ | $MP(4,1)$ |
| 5. | $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ | $AX_1$ |
| 6. | $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ | $MP(5,4)$ |

e) $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))) \to$ $(((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))$ | $AX_2$ |
| 2. | $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ | (d) |
| 3. | $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ | $MP(1,2)$ |
| 4. | $(\alpha \to \beta) \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))$ | Prop 7.1 |
| 5. | $(4) \to (((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta))) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))))$ | $AX_2$ |
| 6. | $((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta))) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))$ | $MP(5,4)$ |
| 7. | $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta))$ | $AX_1$ |
| 8. | $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ | $MP(7,6)$ |

f) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\alpha, \beta \vdash \alpha$ | $TD$ |
| 2. | $\alpha$ | $P$ |

g) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\beta$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\alpha, \beta \vdash \alpha$ | $TD$ |
| 2. | $\beta$ | $P$ |

□

**Problema 3**

Demuestrar sin utilizar $TD$, ni $RA$, los ejercicios d) y e) del item anterior.

***Demostración:*** Se hizo en el problema 2.

□

**Problema 4**

Si se escoge a $\{\neg, \vee\}$ como conjunto completo de conectivos; y como sistema deductivo:

$$\begin{array}{ll} AX_1: & \neg(\alpha \vee \alpha) \vee \alpha \\ AX_2: & \neg\alpha \vee \alpha \vee \beta \\ AX_3: & \neg(\alpha \vee \beta) \vee \beta \vee \alpha \\ AX_4: & \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg(\gamma \vee \alpha) \vee \gamma \vee \beta \\ & \neg\alpha \vee \beta \\ MP: & \alpha \\ \hline & \beta \end{array}$$

Demostrar el teorema $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$.

***Demostración:***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg(\neg(\alpha \vee \alpha) \vee \alpha) \vee \neg(\neg\alpha \vee \alpha \vee \alpha) \vee \neg\alpha \vee \alpha$ | $AX_4$ |
| 2. | $\neg(\alpha \vee \alpha) \vee \alpha$ | $AX_1$ |
| 3 | $\neg(\neg\alpha \vee \alpha \vee \alpha) \vee \neg\alpha \vee \alpha$ | $MP(2,1)$ |
| 4. | $\neg\alpha \vee \alpha \vee \alpha$ | $AX_2$ |
| 5. | $\neg\alpha \vee \alpha$ | $MP(4,3)$ |

□

**Problema 5**

Utilizando la siguiente igualdad $p \vee q = \neg p \to q$, muestre que el sistema deductivo anterior se presenta por:

$$
\begin{array}{ll}
AX_1: & (\alpha \vee \alpha) \to \alpha \\
AX_2: & (\alpha \to \alpha) \vee \beta \\
AX_3: & (\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha) \\
AX_4: & (\alpha \vee \beta) \to ((\gamma \vee \alpha) \to (\gamma \vee \alpha)) \\
MP: & \dfrac{\begin{array}{c}\alpha \\ \alpha \to \beta\end{array}}{\beta}
\end{array}
$$

***Demostración:***

□

**Problema 6**

Use el sistema deductivo del ejercicio anterior para demostrar el teorma

a) $\vdash \alpha \to \alpha$
b) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

***Demostración:***

a) $\vdash \alpha \to \alpha$

1.

□

**Problema 7**

Si se escoge $\{\neg, \to\}$ como conjunto completo de conectivos; y como sistema deductivo:

$$
\begin{array}{ll}
AX_1: & (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \\
AX_2: & \alpha \to (\neg\alpha \to \beta) \\
AX_3: & (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha \\
MP: & \dfrac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \alpha\end{array}}{\beta}
\end{array}
$$

Demostrar el teorema $\vdash \alpha \to \alpha$

***Demostración:***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\alpha \to (\neg\alpha \to \alpha)) \to (((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))$ | $AX_1$ |
| 2. | $\alpha \to (\neg\alpha \to \alpha)$ | $AX_2$ |
| 3. | $((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ | $MP(1,2)$ |
| 4. | $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ | $AX_3$ |
| 5. | $\alpha \to \alpha$ | $MP(4,3)$ |

□