TAREA 2 - TOPOLOGÍA GENERAL

JUAN PABLO LOPEZ, SEBASTIAN RAMIREZ, KEVIN VELEZ

Problema 1 Ejercicio 2.b)

Sea $X = \mathbb{Z}^+$. Sea $A \subseteq X$, se define la densidad de A como el número

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}$$

donde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $|S|$ denota la cardinalidad de S.
Sea

$$\tau = \{A \subseteq X | 1 \notin A \vee \rho(A) = 1\}$$

Caracterice los cerrados en la topología τ.

Demostración: Los cerrados de X con la topología τ son

$$\begin{aligned}
\mathscr{C} &= \{B \subseteq X \,|\, X - B \in \tau\} \\
\mathscr{C} &= \{B \subseteq X \,|\, 1 \notin X - B \vee \rho(X - B) = 1\} \\
\mathscr{C} &= \{B \subseteq X \,|\, 1 \notin X \vee 1 \in B \vee \rho(X - B) = 1\}
\end{aligned}$$

Pero, $1 \in X$, entonces

$$\mathscr{C} = \{B \subseteq X \,|\, 1 \in B \vee \rho(X - B) = 1\}$$

Ahora, veamos que conjuntos satisfacen la propiedad de $\rho(X - B) = 1$

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|[n] - B|}{n} \\
1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|[n] - (B \cap [n])|}{n}
\end{aligned}$$

Como $B \cap [n] \subseteq [n]$, entonces

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|[n]| - |B \cap [n]|}{n} \\
1 &= \cancelto{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|[n]|}{n}} - \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [n]|}{n} \\
\cancel{1} &= \cancel{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [n]|}{n} \\
0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [n]|}{n} \\
0 &= \rho(B)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los cerrados de X con la topología τ son

$$\mathscr{C} = \{B \subseteq X \,|\, 1 \in B \vee \rho(B) = 0\}$$

□

Fecha: Noviembre 2022.