TAREA 2 - TOPOLOGÍA GENERAL

JUAN PABLO LOPEZ, SEBASTIAN RAMIREZ, KEVIN VELEZ

Problema 1 Ejercicio 2.b)
Sea $X = \mathbb{Z}^+$. Sea $A \subseteq X$, se define la densidad de A como el número

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}$$

donde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $|S|$ denota la cardinalidad de S.
Sea

$$\tau = \{A \subseteq X | 1 \notin A \vee \rho(A) = 1\}$$

Caracterice los cerrados en la topología τ.

Demostración: Los cerrados de X con la topología τ son

$$\begin{aligned} \mathscr{C} &= \{B \subseteq X \,|\, X - B \in \tau\} \\ \mathscr{C} &= \{B \subseteq X \,|\, 1 \notin X - B \vee \rho(X - B) = 1\} \\ \mathscr{C} &= \{B \subseteq X \,|\, 1 \notin X \vee 1 \in B \vee \rho(X - B) = 1\} \end{aligned}$$

Pero, $1 \in X$, entonces

$$\mathscr{C} = \{B \subseteq X \,|\, 1 \in B \vee \rho(X - B) = 1\}$$

Ahora, veamos que conjuntos satisfacen la propiedad de $\rho(X - B) = 1$

$$\begin{aligned} \rho(X - B) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|(X - B) \cap [n]|}{n} \\ \rho(X - B) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|(X \cap [n]) - B|}{n} \\ \rho(X - B) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|[n] - B|}{n} \end{aligned}$$

Ahora, como se tiene que dar que $\rho(X - B) = 1$, $[n]$ tiene infinitos elementos, ya que $n \to \infty$ y sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - c}{n} = 1\,, \quad \forall c \in \mathbb{Z}$$

Entonces B tiene que ser un conjunto finito. Por lo tanto, los cerrados de X con la topología τ son los conjuntos finitos o los conjuntos que contienen al elemento 1, es decir

$$\mathscr{C} = \{B \subseteq X \,|\, B \text{ es finito } \vee 1 \in B\}$$

□

Fecha: Noviembre 2022.