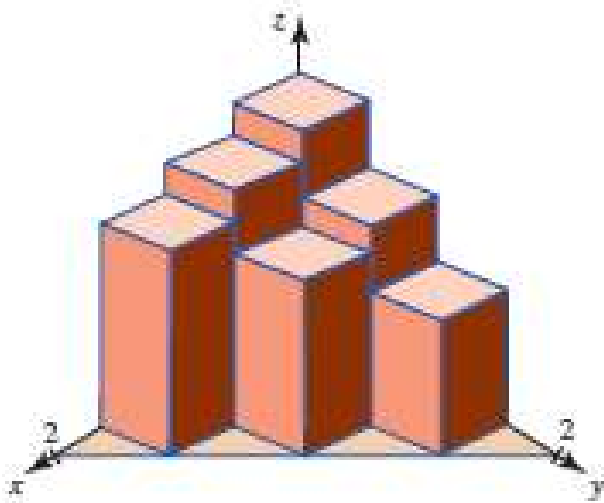




Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

La Integral Doble



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

08 de agosto del 2021

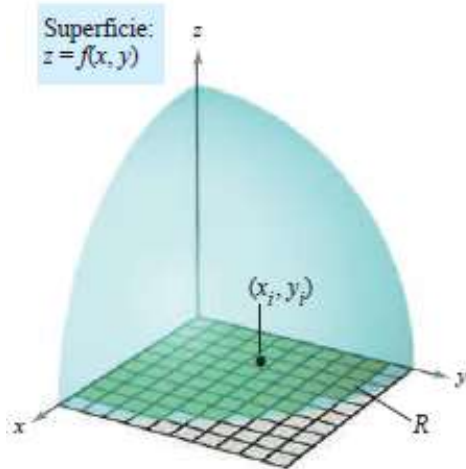
Definición de Integral Doble

Considérese una función continua f tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R del plano xy . El objetivo es hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por

$$z = f(x, y)$$

Superficie sobre el plano xy .

y el plano xy , como se muestra en la figura 14.8. Para empezar se sobrepone una red o cuadrícula rectangular sobre la región, como se muestra en la figura 14.9. Los rectángulos que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición interior** Δ , cuya **norma** $\|\Delta\|$ está definida como la longitud de la diagonal más larga de los n rectángulos.



Los rectángulos que se encuentran dentro de R forman una partición interior de R
Figura 14.9

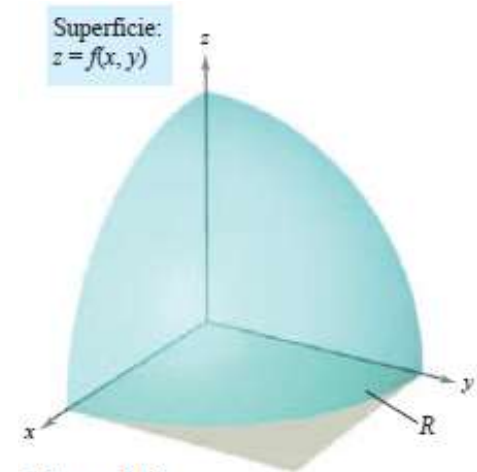


Figura 14.8

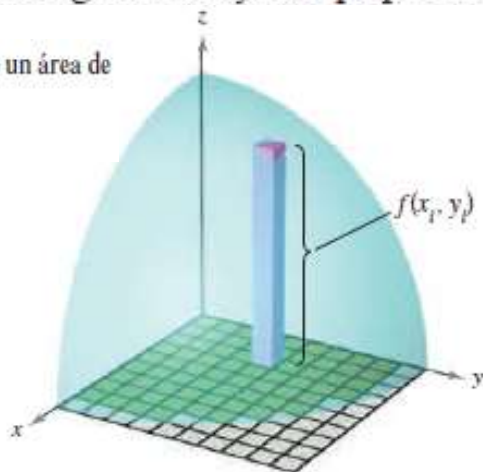
Después, se elige un punto (x_i, y_i) en cada rectángulo y se forma el prisma rectangular cuya altura es $f(x_i, y_i)$, como se muestra en la figura 14.10. Como el área del i -ésimo rectángulo es ΔA_i Área del rectángulo i -ésimo.

se sigue que el volumen del prisma i -ésimo es $f(x_i, y_i) \Delta A_i$ Volumen del prisma i -ésimo.
y el volumen de la región sólida se puede aproximar por la suma de Riemann de los volúmenes de todos los n prismas,

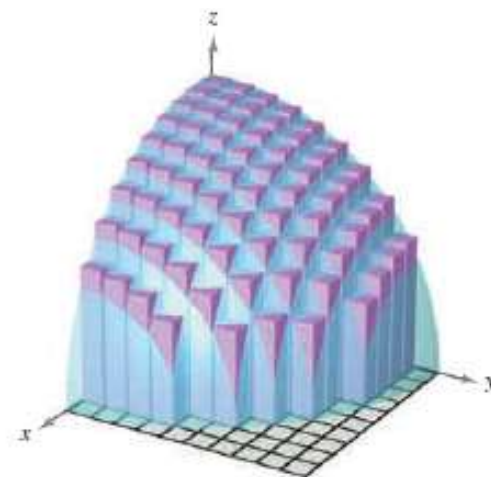
$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{Suma de Riemann.}$$

como se muestra en la figura 14.11. Esta aproximación se puede mejorar tomando redes o cuadrículas con rectángulos más y más pequeños

Prisma rectangular cuya base tiene un área de ΔA_i y cuya altura es $f(x_i, y_i)$
Figura 14.10



Volumen aproximado por prismas rectangulares
Figura 14.11



EJEMPLO 1 Aproximar el volumen de un sólido

Aproximar el volumen del sólido comprendido entre el paraboloide

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

y la región cuadrada R dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Utilizar una partición formada por los cuadrados cuyos lados tengan una longitud de $\frac{1}{4}$.

Solución Para empezar se forma la partición especificada de R . En esta partición, es conveniente elegir los centros de las subregiones como los puntos en los que se evalúa $f(x, y)$.

(xi, yi)			
1 $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	2 $(\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$	3 $(\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$	4 $(\frac{1}{8}, \frac{7}{8})$
5 $(\frac{3}{8}, \frac{1}{8})$	6 $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$	7 $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$	8 $(\frac{3}{8}, \frac{7}{8})$
9 $(\frac{5}{8}, \frac{1}{8})$	10 $(\frac{5}{8}, \frac{3}{8})$	11 $(\frac{5}{8}, \frac{5}{8})$	12 $(\frac{5}{8}, \frac{7}{8})$
13 $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$	14 $(\frac{7}{8}, \frac{3}{8})$	15 $(\frac{7}{8}, \frac{5}{8})$	16 $(\frac{7}{8}, \frac{7}{8})$

1	1	2	3	4
3/4	5	6	7	8
2/4	9	10	11	12
1/4	13	14	15	16
0	1/4	2/4	3/4	1

Como el área de cada cuadrado es $\Delta A_i = \frac{1}{16}$, el volumen se puede aproximar por la suma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{16} f(x_i, y_i) \Delta A_i &= \sum_{i=1}^{16} \left(1 - \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}y_i^2 \right) \left(\frac{1}{16} \right) \\ &\approx 0.672. \end{aligned}$$

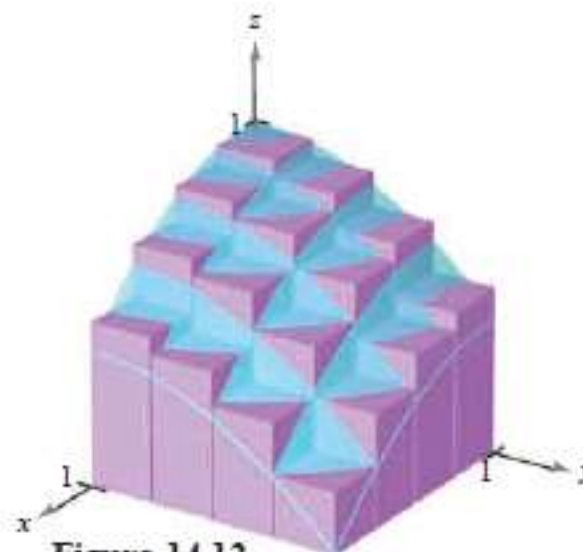


Figura 14.12

Superficie:
 $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

En el ejemplo 1, hay que observar que, usando particiones más finas, se obtienen mejores aproximaciones al volumen. Esta observación sugiere que se podría obtener el volumen exacto tomando un límite. Es decir,

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

El significado exacto de este límite es que el límite es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \right| < \varepsilon$$

para toda partición Δ de la región plana R (que satisfaga $\|\Delta\| < \delta$) y para toda elección posible de x_i y y_i en la región i -ésima.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DOBLE

Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy , entonces la **integral doble de f sobre R** está dada por

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es **integrable** sobre R .

VOLUMEN DE UNA REGIÓN SÓLIDA

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R , entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA.$$

TEOREMA 14.1 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante.

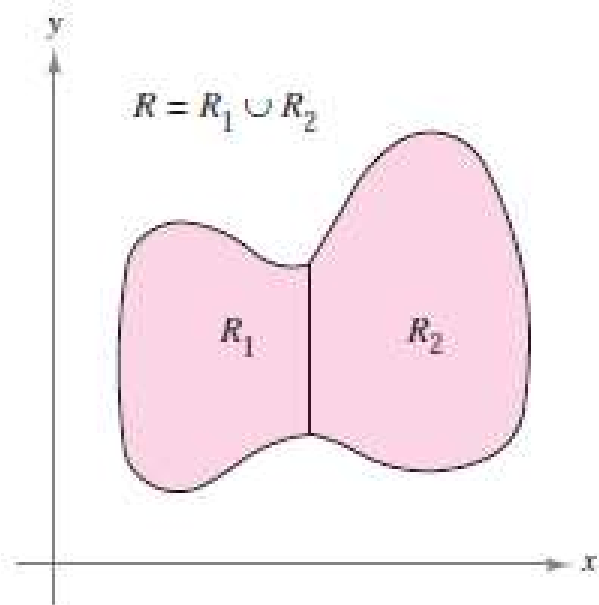
$$1. \int_R \int cf(x, y) dA = c \int_R \int f(x, y) dA$$

$$2. \int_R \int [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \int_R \int f(x, y) dA \pm \int_R \int g(x, y) dA$$

$$3. \int_R \int f(x, y) dA \geq 0, \quad \text{si } f(x, y) \geq 0$$

$$4. \int_R \int f(x, y) dA \geq \int_R \int g(x, y) dA, \quad \text{si } f(x, y) \geq g(x, y)$$

$$5. \int_R \int f(x, y) dA = \int_{R_1} \int f(x, y) dA + \int_{R_2} \int f(x, y) dA, \text{ donde } R \text{ es la unión de dos subregiones } R_1 \text{ y } R_2 \text{ que no se sobreponen.}$$



Dos regiones no se sobreponen si su intersección es un conjunto de área 0. En esta figura, el área del segmento de la recta común a R_1 y R_2 es 0

El teorema siguiente lo demostró el matemático italiano Guido Fubini (1879-1943). El teorema establece que si R es vertical u horizontalmente simple y f es continua en R , la integral doble de f en R es igual a una integral iterada.

TEOREMA 14.2 TEOREMA DE FUBINI

Sea f continua en una región plana R .

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_R \int f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

$$\int_R \int f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

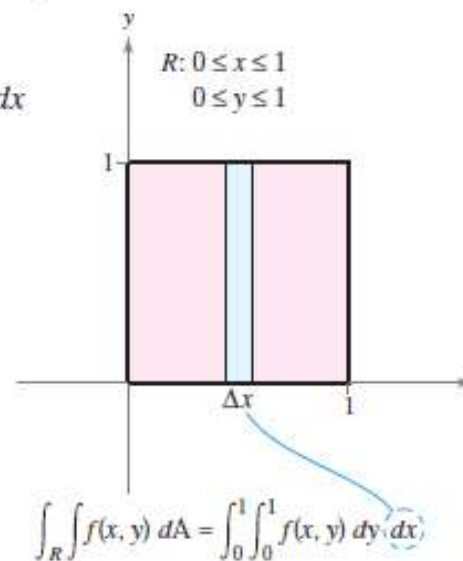
EJEMPLO 2 Evaluación de una integral doble como integral iterada

Evaluar $\iint_R \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA$

donde R es la región dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Solución Como la región R es un cuadrado, es vertical y horizontalmente simple y se puede emplear cualquier orden de integración. Se elige $dy \, dx$ colocando un rectángulo representativo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.18. Con esto se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}\iint_R \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dy \, dx \\&= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y - \frac{y^3}{6} \right]_0^1 dx \\&= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\&= \left[\frac{5}{6}x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\&= \frac{2}{3}\end{aligned}$$



El volumen de la región sólida es $\frac{2}{3}$.

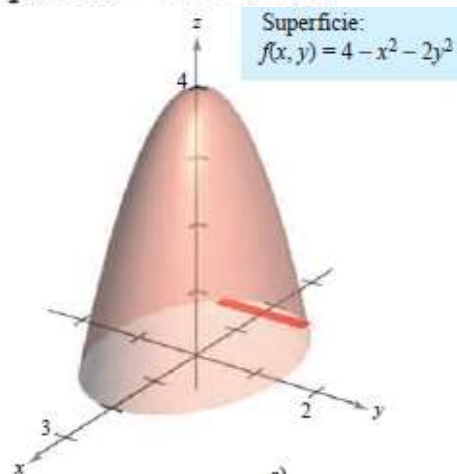
EJEMPLO 3 Hallar el volumen por medio de una integral doble

Hallar el volumen de la región sólida acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy .

Solución Haciendo $z = 0$, se ve que la base de la región, en el plano xy , es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, como se muestra en la figura 14.19a. Esta región plana es vertical y horizontalmente simple, por tanto el orden $dy \, dx$ es apropiado.

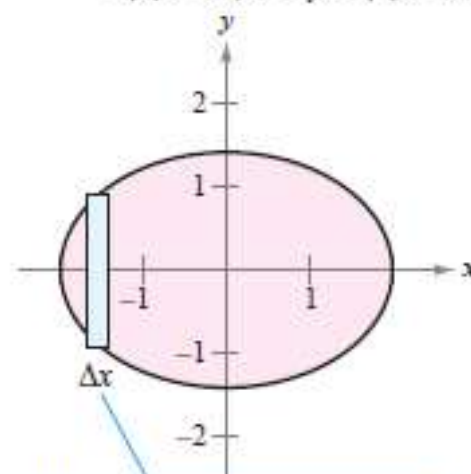
Límites o cotas variables para y : $-\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}$

Límites o cotas constantes para x : $-2 \leq x \leq 2$



a)
Figura 14.19

Base: $-2 \leq x \leq 2$
 $-\sqrt{(4-x^2)/2} \leq y \leq \sqrt{(4-x^2)/2}$



Volumen:
 $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2) \, dy \, dx$

El volumen está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[(4 - x^2)y - \frac{2y^3}{3} \right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx \quad \text{Se resuelve por sustitución} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16 \cos^4 \theta d\theta \quad \text{trigonométrica } x = 2 \text{ sen } \theta. \\ &= \frac{64}{3\sqrt{2}} (2) \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta \quad \text{Fórmula de Wallis.} \\ &= \frac{128}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3\pi}{16} \right) \\ &= 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

LAS FÓRMULAS DE WALLIS

1. Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right).$$

2. Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Estas fórmulas también son válidas si el $\cos^n x$ se reemplaza por el $\sin^n x$.

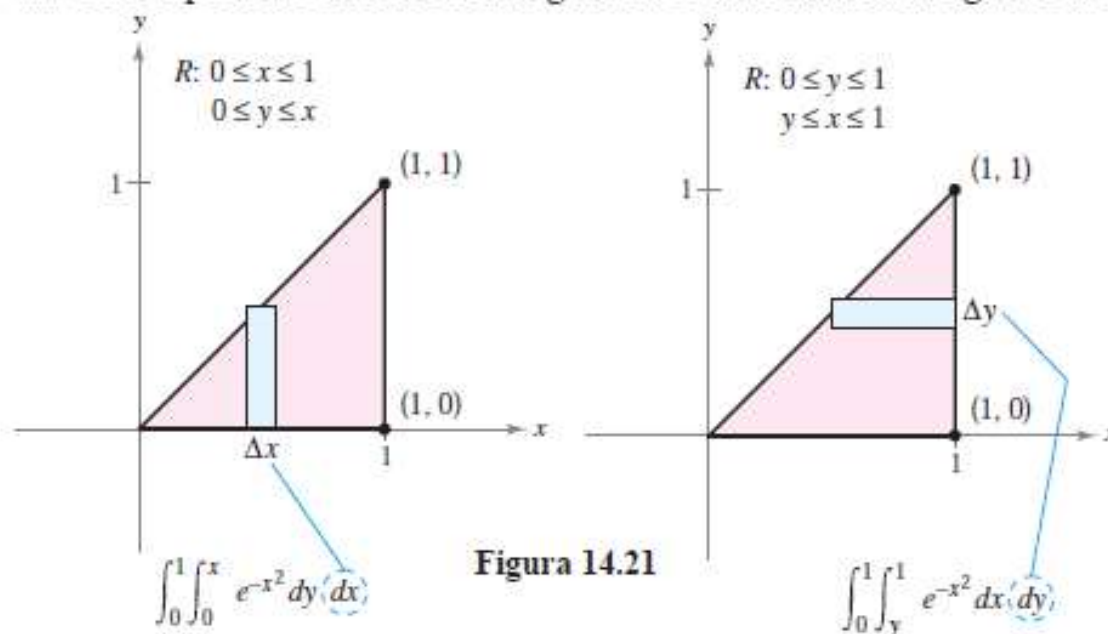
EJEMPLO 4 Comparación de diferentes órdenes de integración

Hallar el volumen de la región sólida R acotada por la superficie

$$f(x, y) = e^{-x^2} \quad \text{Superficie.}$$

y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 14.20.

Solución La base de R en el plano xy está acotada por las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $y = x$. Los dos posibles órdenes de integración se muestran en la figura 14.21.



Estableciendo las integrales iteradas correspondientes, se ve que el orden $dx \, dy$ requiere la primitiva (o antiderivada) $\int e^{-x^2} dx$, la cual no es una función elemental. Por otro lado con el orden $dy \, dx$ se obtiene la integral

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy \, dx &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \\ &= \frac{e-1}{2e} \\ &\approx 0.316.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Volumen de una región acotada por dos superficies

Hallar el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$, como se muestra en la figura 14.22.

Solución Igualando los valores z , se determina que la intersección de las dos superficies se produce en el cilindro circular recto dado por

$$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - y^2.$$

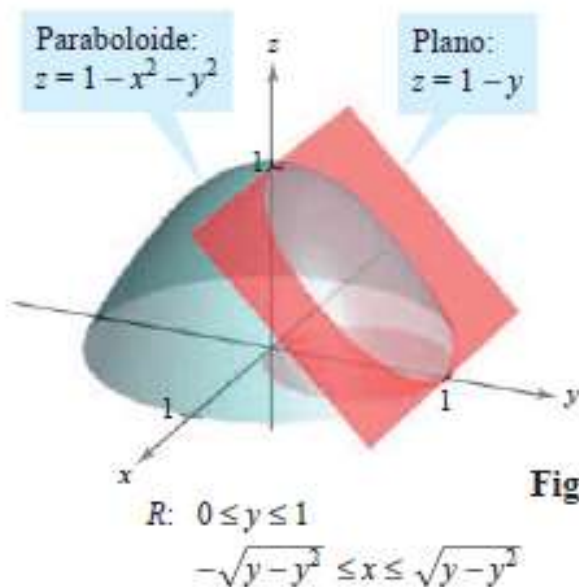
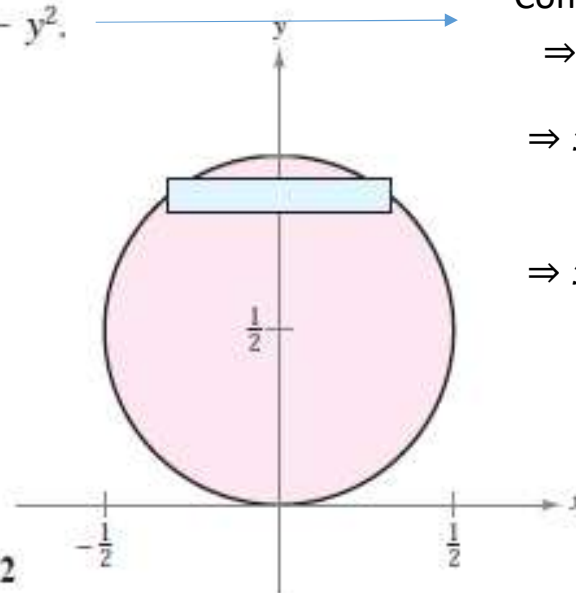


Figura 14.22



Completando cuadrados

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Como el volumen de R es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloide y el volumen bajo el plano, se tiene

$$\text{Volumen} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2) dx dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dy$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 (y - y^2)^{3/2} dy$$

$$= \left(\frac{4}{3} \right) \left(\frac{1}{8} \right) \int_0^1 [1 - (2y - 1)^2]^{3/2} dy$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4 d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{3\pi}{16} \right) = \frac{\pi}{32}$$

$$2y - 1 = \sin \theta$$

Fórmula de Wallis.

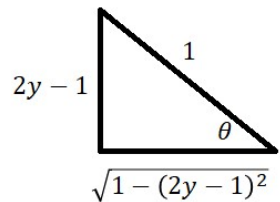
$$= \left[-\frac{1}{4} (4y^2 - 4y) \right]^{3/2}$$

$$= \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} (4y^2 - 4y + 1) \right]^{3/2}$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right)^{3/2} [1 - (2y - 1)^2]^{3/2}$$

$$= \frac{1}{8} [1 - (2y - 1)^2]^{3/2}$$

Sustitución trigonométrica



$$\sin \theta = 2y - 1 \Rightarrow 2dy = \cos \theta$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - (2y - 1)^2}$$

Dada una función de f en dos variables, se puede encontrar el valor de f sobre la región R como se muestra en la siguiente definición.

DEFINICIÓN DEL VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN SOBRE UNA REGIÓN

Si f es integrable sobre la región plana R , entonces el valor promedio de f sobre R es

$$\frac{1}{A} \iint_R f(x, y) \, dA$$

donde A es el área de R .

EJEMPLO 6 Encontrar el valor promedio de una función

Encontrar el valor promedio de $f(x, y) = \frac{1}{2}xy$ sobre la región R , donde R es un rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 3)$ y $(0, 3)$.

Solución El área de la región rectangular R es $A = 12$ (ver la figura 14.23). El valor promedio está dado por

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} \iint_R f(x, y) \, dA &= \frac{1}{12} \int_0^4 \int_0^3 \frac{1}{2}xy \, dy \, dx \\&= \frac{1}{12} \int_0^4 \left[\frac{1}{4}xy^2 \right]_0^3 \, dx \\&= \left(\frac{1}{12} \right) \left(\frac{9}{4} \right) \int_0^4 x \, dx \\&= \frac{3}{16} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \\&= \left(\frac{3}{16} \right) (8) \\&= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

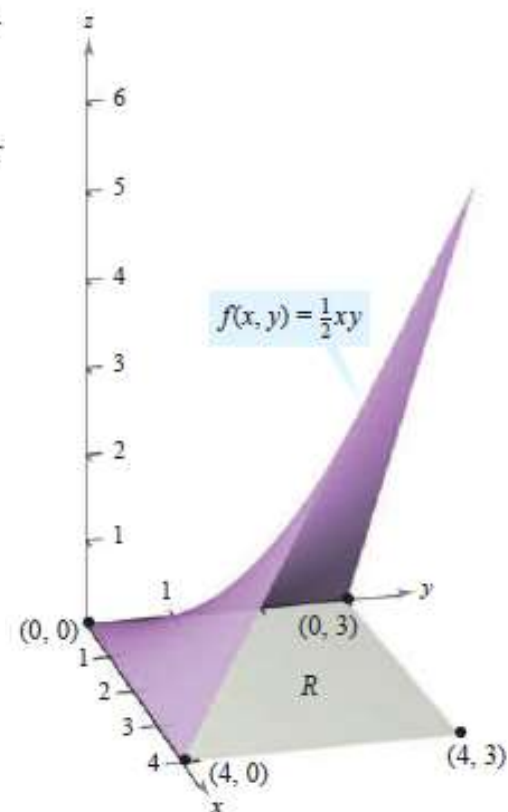


Figura 14.23

Ejercicios Propuestos

Aproximación En los ejercicios 1 a 4, aproximar la integral $\int_R \int f(x, y) dA$ dividiendo el rectángulo R con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ y $(0, 2)$ en ocho cuadrados iguales y hallando la suma $\sum_{i=1}^8 f(x_i, y_i) \Delta A_i$ donde (x_i, y_i) es el centro del cuadrado i -ésimo. Evaluar la integral iterada y compararla con la aproximación.

1. $\int_0^4 \int_0^2 (x + y) dy dx$

3. $\int_0^4 \int_0^2 (x^2 + y^2) dy dx$

En los ejercicios 7 a 12, dibujar la región R y evaluar la integral iterada $\int_R \int f(x, y) dA$.

7. $\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y) dy dx$

9. $\int_0^6 \int_{y/2}^3 (x + y) dx dy$

11. $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y) dy dx$

12. $\int_0^1 \int_{y-1}^0 e^{x+y} dx dy + \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x+y} dx dy$

En los ejercicios 13 a 20, dar una integral para cada orden de integración y utilizar el orden más conveniente para evaluar la integral en la región R .

13. $\int_R \int xy \, dA$

R : rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(3, 5)$, $(3, 0)$

15. $\int_R \int \frac{y}{x^2 + y^2} \, dA$

R : triángulo acotado por $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$

17. $\int_R \int -2y \, dA$

R : región acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 4 - x$

19. $\int_R \int x \, dA$

R : el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x - 4y = 0$, $y = 0$

En los ejercicios 33 a 40, dar una integral doble para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.

33. $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$, primer octante

35. $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$

37. $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$, primer octante

39. $z = x + y$, $x^2 + y^2 = 4$, primer octante

En los ejercicios 53 a 58, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada y, si es necesario, cambiar el orden de integración.

$$53. \int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2} dx dy$$

$$55. \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy dx$$

$$57. \int_0^1 \int_0^{\arccos y} \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx dy$$

Valor promedio En los ejercicios 59 a 64, encontrar el valor promedio de $f(x, y)$ sobre la región R .

59. $f(x, y) = x$
 R : rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$, $(0, 2)$

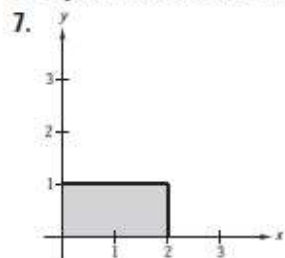
61. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 R : cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$

63. $f(x, y) = e^{x+y}$
 R : triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$

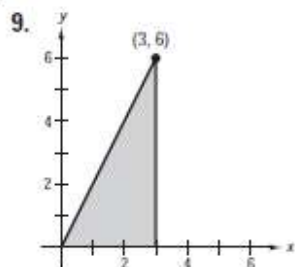
Respuestas

1. 24 (la aproximación es exacta)

3. Aproximación: 52; Exacto: $\frac{160}{3}$

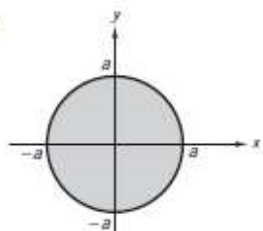


8



36

11.



0

13.
$$\int_0^3 \int_0^5 xy \, dy \, dx = \frac{225}{4}$$
$$\int_0^5 \int_0^3 xy \, dx \, dy = \frac{225}{4}$$

15.
$$\int_1^2 \int_x^{2x} \frac{y}{x^2 + y^2} \, dy \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$
$$\int_1^2 \int_1^y \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy + \int_2^4 \int_{y/2}^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$

17.
$$\int_0^1 \int_{4-x}^{4-x^2} -2y \, dy \, dx = -\frac{6}{5}$$
$$\int_3^4 \int_{4-y}^{\sqrt{4-y}} -2y \, dx \, dy = -\frac{6}{5}$$

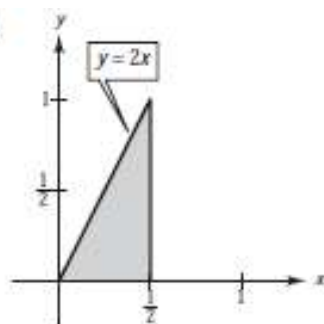
19.
$$\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} x \, dx \, dy = 25$$
$$\int_0^4 \int_0^{3x/4} x \, dy \, dx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x \, dy \, dx = 25$$

33.
$$\int_0^1 \int_0^x xy \, dy \, dx = \frac{1}{8}$$
 35.
$$\int_0^2 \int_0^4 x^2 \, dy \, dx = \frac{32}{3}$$

37.
$$2 \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} \, dy \, dx = \frac{2}{3}$$

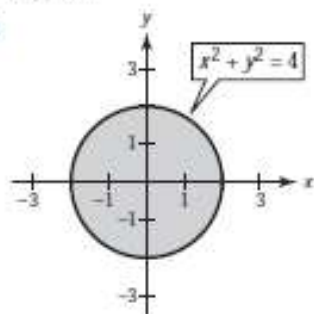
39.
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y) \, dy \, dx = \frac{16}{3}$$

53.



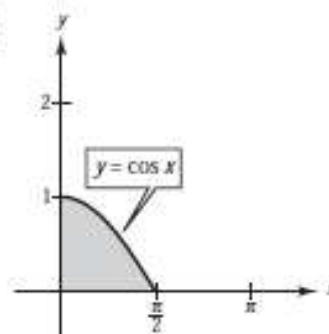
$$\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2} dx dy = 1 - e^{-1/4} \approx 0.221$$

55.



$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy dx = \frac{64}{3}$$

57.



$$\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx dy = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

59. 2 61. $\frac{8}{3}$ 63. $(e - 1)^2$