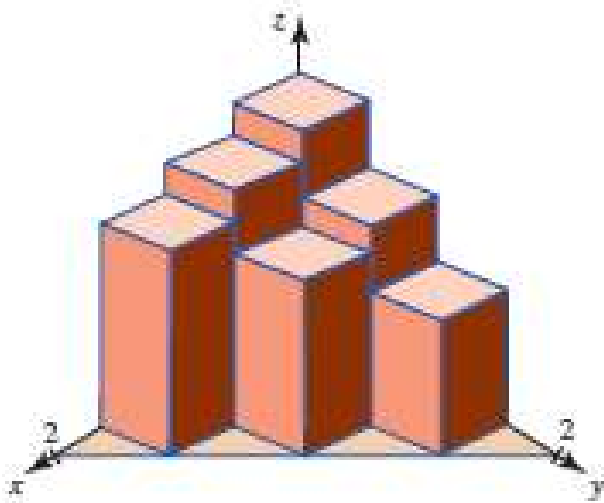




Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

La Integral Doble



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

07 de agosto del 2021

Integrales Iteradas

Anteriormente se vio cómo derivar funciones de varias variables con respecto a una variable manteniendo constantes las demás variables. Empleando un procedimiento similar se pueden *integrar* funciones de varias variables. Por ejemplo, dada la derivada parcial

$$f_x(x, y) = 2xy$$


entonces, considerando y constante, se puede integrar con respecto a x para obtener

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int f_x(x, y) \, dx && \text{Integrar con respecto a } x. \\ &= \int 2xy \, dx && \text{Mantener } y \text{ constante.} \\ &= y \int 2x \, dx && \text{Sacar } y \text{ como factor constante.} \\ &= y(x^2) + C(y) && \text{Una primitiva (o antiderivada) de } 2x \text{ es } x^2. \\ &= x^2y + C(y). && C(y) \text{ es una función de } y. \end{aligned}$$


La “constante” de integración, $C(y)$, es una función de y . En otras palabras, al integrar con respecto a x , se puede recobrar $f(x, y)$ sólo parcialmente.

Por ahora, lo que interesa es extender las integrales definidas a funciones de varias variables. Por ejemplo, al considerar y constante, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar


$$\int_1^{2y} 2xy \, dx = x^2 y \Big|_1^{2y} = (2y)^2 y - (1)^2 y = 4y^3 - y.$$



x es la variable
de integración
y y es fija.



Sustituir x por
los límites
de integración.



El resultado
es una función
de y .

De manera similar se puede integrar con respecto a y , manteniendo x fija. Ambos procedimientos se resumen como sigue.

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y) \, dx = f(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \quad \text{Con respecto a } x.$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y) \, dy = f(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \quad \text{Con respecto a } y.$$

Nótese que la variable de integración no puede aparecer en ninguno de los límites de integración. Por ejemplo, no tiene ningún sentido escribir

$$\int_0^x y \, dx.$$

EJEMPLO 1 Integrar con respecto a y

Evaluar $\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy$.

Solución Se considera x constante y se integra con respecto a y , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy &= \frac{2x^2y^{-2+1}}{-2+1} + \frac{2y^{1+1}}{2} && \text{Integrar con respecto a } y. \\ &= \left[\frac{-2x^2}{y} + y^2 \right]_1^x \\ &= \left(\frac{-2x^2}{x} + x^2 \right) - \left(\frac{-2x^2}{1} + 1 \right) \\ &= 3x^2 - 2x - 1.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 La integral de una integral

Evaluar $\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy \right] dx$.

Solución Utilizando el resultado del ejemplo 1, se tiene

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy \right] dx &= \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1) dx \\ &= \frac{3x^{2+1}}{2+1} - \frac{2x^{1+1}}{1+1} - x \Big|_1^2 \quad \text{Integrar con respecto a } x. \\ &= \left[x^3 - x^2 - x \right]_1^2 = (2^3 - 2^2 - 2) - (1^3 - 1^2 - 1) \\ &= 2 - (-1) \\ &= 3. \end{aligned}$$

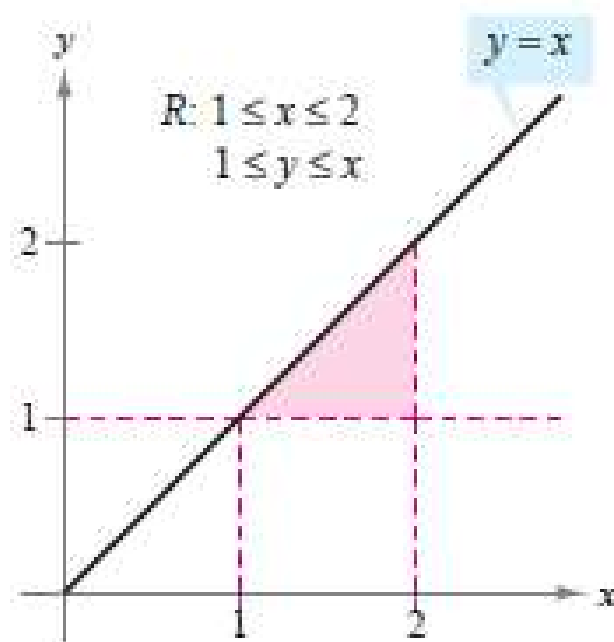
La integral del ejemplo 2 es una **integral iterada**. Los corchetes usados en el ejemplo 2 normalmente no se escriben. Las integrales iteradas se escriben normalmente como

Limites exteriores de integración

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Limites interiores de integración

Los **limites interiores de integración** pueden ser variables con respecto a la variable exterior de integración. Sin embargo, los **limites exteriores de integración** *deben ser* constantes con respecto a ambas variables de integración. Después de realizar la integración interior, se obtiene una integral definida “ordinaria” y la segunda integración produce un número real. Los límites de integración de una integral iterada definen dos intervalos para las variables. Así, en el ejemplo 2, los límites exteriores indican que x está en el intervalo $1 \leq x \leq 2$ y los límites interiores indican que y está en el intervalo $1 \leq y \leq x$. Juntos, estos dos intervalos determinan la **región de integración** R de la integral iterada, como se muestra en la figura 14.1.



La región de integración para

$$\int_1^2 \int_1^x f(x, y) \, dy \, dx$$

Figura 14.1

Área de una región plana

En el resto de esta sección se verá desde una perspectiva nueva un viejo problema, el de hallar el área de una región plana. Considérese la región plana R acotada por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, como se muestra en la figura 14.2. El área de R está dada por la integral definida

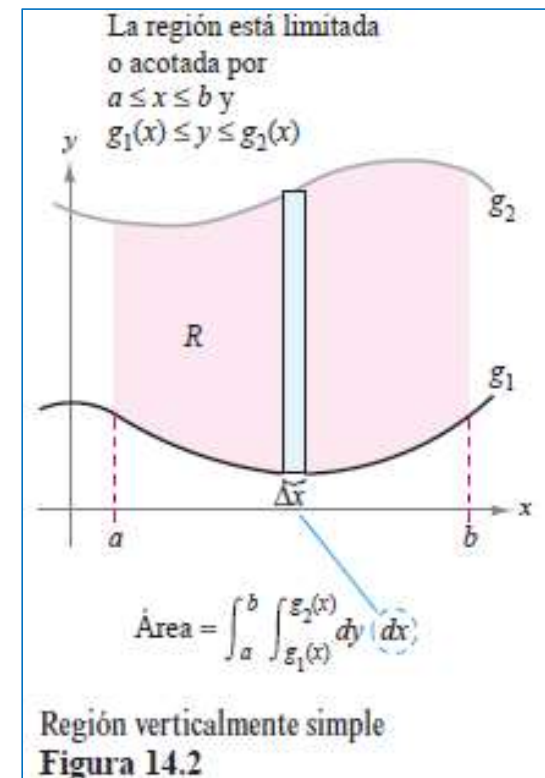
$$\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx. \quad \text{Área de } R.$$

Usando el teorema fundamental del cálculo, se puede reescribir el integrando $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. Concretamente, si se considera x fija y se deja que y varíe desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, se puede escribir

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = g_2(x) - g_1(x).$$

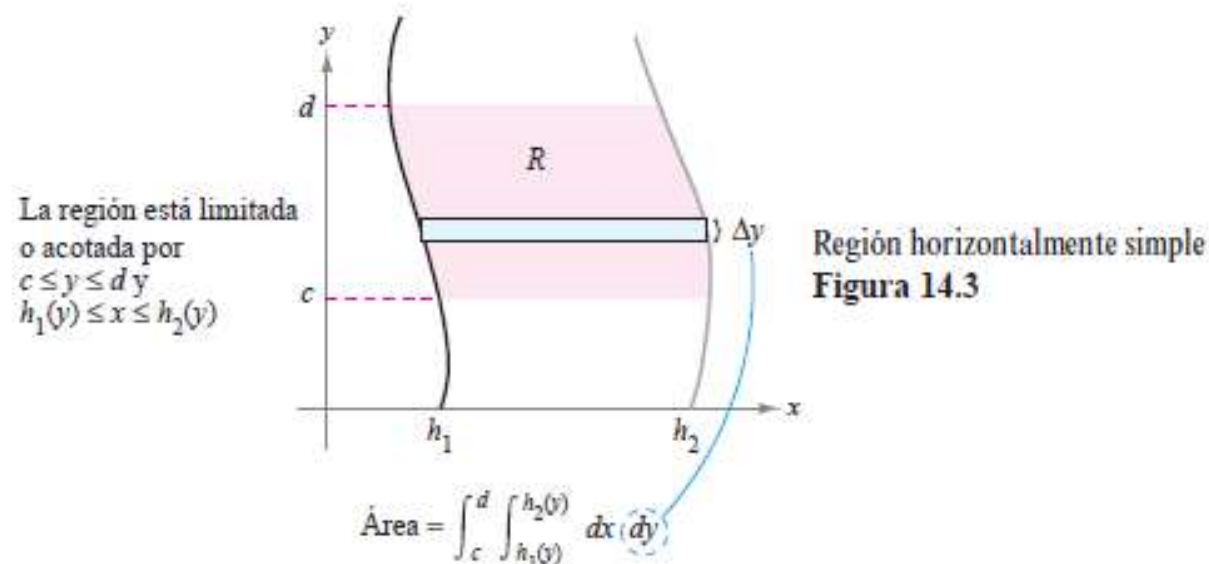
Combinando estas dos integrales, se puede expresar el área de la región R mediante una integral iterada

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx &= \int_a^b y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx. \end{aligned} \quad \text{Área de } R.$$



Colocar un rectángulo representativo en la región R ayuda a determinar el orden y los límites de integración. Un rectángulo vertical implica el orden $dy\,dx$, donde los límites interiores corresponden a los límites o cotas superior e inferior del rectángulo, como se muestra en la figura 14.2. Este tipo de región se llama **verticalmente simple**, porque los límites exteriores de integración representan las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

De manera similar, un rectángulo horizontal implica el orden $dx\,dy$, donde los límites interiores están determinados por los límites o cotas izquierda y derecha del rectángulo, como se muestra en la figura 14.3. Este tipo de región se llama **horizontalmente simple**, porque los límites exteriores representan las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$.



ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, R está dada por

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \, dx.$$

Figura 14.2 (verticalmente simple).

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces el área de R está dada por

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \, dy.$$

Figura 14.3 (horizontalmente simple).

NOTA Hay que observar que en estas dos integrales el orden de integración es diferente; el orden $dy \, dx$ corresponde a una región verticalmente simple, y el orden $dx \, dy$ corresponde a una región horizontalmente simple.

EJEMPLO 3 Área de una región rectangular

Utilizar una integral iterada para representar el área del rectángulo que se muestra en la figura 14.4.

Solución La región de la figura 14.4 es verticalmente simple y horizontalmente simple, por tanto se puede emplear cualquier orden de integración. Eligiendo el orden $dy \, dx$, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d dy \, dx &= \int_a^b y \Big|_c^d dx \\ &= \int_a^b (d - c) dx \\ &= \left[(d - c)x \right]_a^b \\ &= (d - c)(b - a)\end{aligned}$$

Integrar con respecto a y .

Integrar con respecto a x .

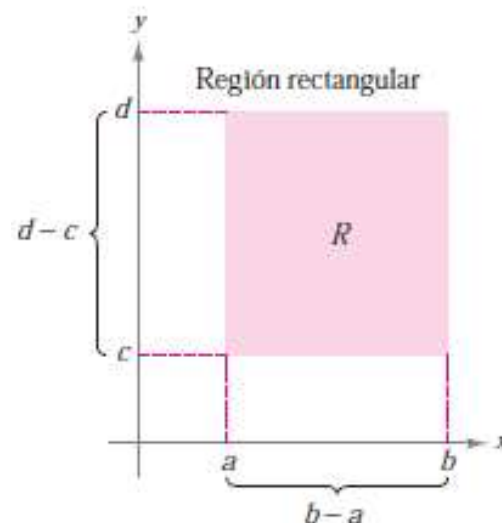


Figura 14.4

EJEMPLO 3 Hallar el área por medio de una integral iterada

Utilizar una integral iterada para hallar el área de la región limitada o acotada por las gráficas de

$$f(x) = \text{sen } x$$

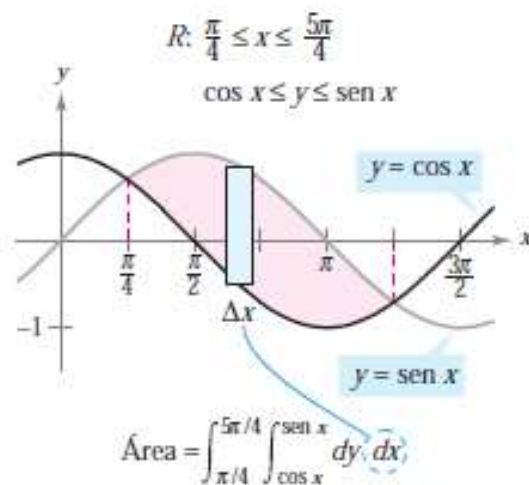
$$g(x) = \cos x$$

entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

La curva seno constituye el límite o cota superior.

La curva coseno constituye el límite o cota inferior.

Solución



$$\begin{aligned} \text{Área de } R &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\text{sen } x} dy \, dx \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y \Big|_{\cos x}^{\text{sen } x} dx \quad \text{Integrar con respecto a } y. \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\text{sen } x - \cos x) \, dx \\ &= \left[-\cos x - \text{sen } x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \quad \text{Integrar con respecto a } x. \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

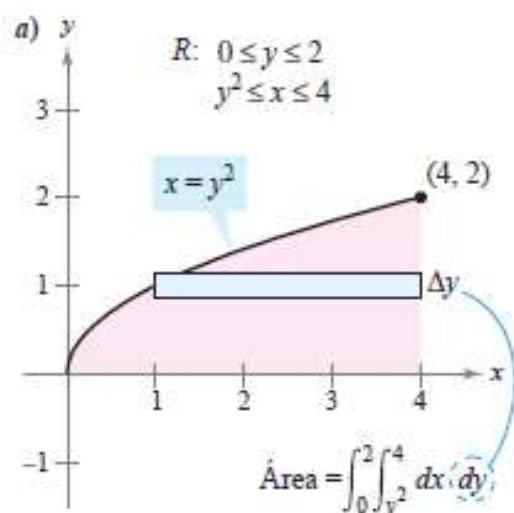
Con frecuencia, uno de los órdenes de integración hace que un problema de integración resulte más sencillo de como resulta con el otro orden de integración. Por ejemplo, hacer de nuevo el ejemplo 4 con el orden $dx\,dy$; sorprenderá ver que la tarea es formidable. Sin embargo, si se llega al resultado, se verá que la respuesta es la misma. En otras palabras, el orden de integración afecta la complejidad de la integración, pero no el valor de la integral.

EJEMPLO 4 Comparación de diferentes órdenes de integración

Dibujar la región cuya área está representada por la integral $\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx \, dy$.

Después hallar otra integral iterada que utilice el orden $dy \, dx$ para representar la misma área y mostrar que ambas integrales dan el mismo valor.

Solución De acuerdo con los límites de integración dados, se sabe que



$$y^2 \leq x \leq 4 \quad \text{Límites interiores de integración.}$$

$$0 \leq y \leq 2 \quad \text{Límites exteriores de integración.}$$

El valor de esta integral es

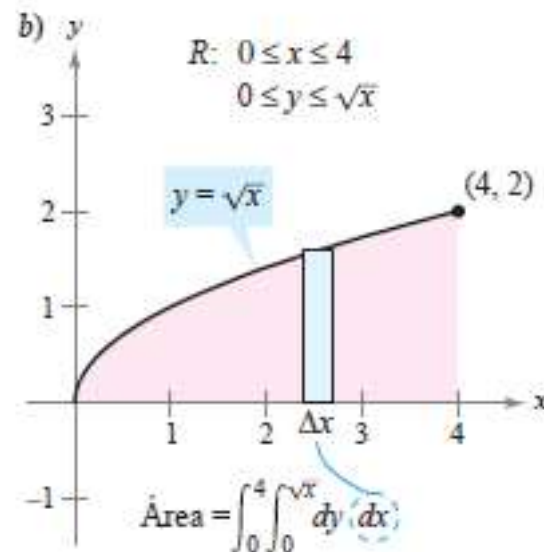
$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{y^2}^4 dx \, dy &= \int_0^2 x \Big|_{y^2}^4 dy \\ &= \int_0^2 (4 - y^2) dy \\ &= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Para cambiar el orden de integración a $dy\,dx$, se coloca un rectángulo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.6b. Con esto se puede ver que los límites o cotas constantes $0 \leq x \leq 4$ sirven como límites exteriores de integración. Despejando y de la ecuación $x = y^2$, se concluye que los límites interiores son $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. Por tanto, el área de la región también se puede representar por

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx.$$

Evaluando esta integral, se ve que tiene el mismo valor que la integral original.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx &= \int_0^4 y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$



Algunas veces no es posible calcular el área de una región con una sola integral iterada. En estos casos se divide la región en subregiones de manera que el área de cada subregión pueda calcularse por medio de una integral iterada. El área total es entonces la suma de las integrales iteradas.

EJEMPLO 6 Un área representada por dos integrales iteradas

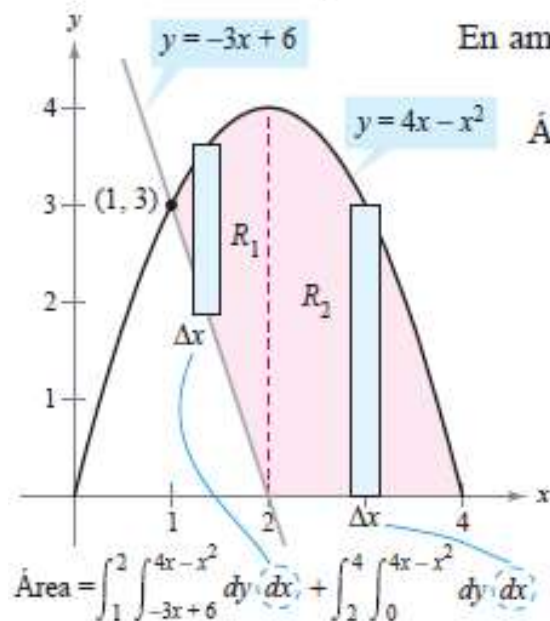
Hallar el área de la región R que se encuentra bajo la parábola

$$y = 4x - x^2 \quad \text{La parábola forma el límite o cota superior.}$$

sobre el eje x , y sobre la recta

$$y = -3x + 6. \quad \text{La recta y el eje } x \text{ forman el límite o cota inferior.}$$

Solución Para empezar se divide R en dos subregiones R_1 y R_2 como se muestra en la figura



En ambas regiones es conveniente usar rectángulos verticales

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy \, dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy \, dx \\ &= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6) \, dx + \int_2^4 (4x - x^2) \, dx \\ &= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x \right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 \\ &= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6 \right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos:

Respuestas: 11. 3 13. $\frac{8}{3}$ 15. $\frac{1}{2}$ 17. 2 19. $\frac{1}{3}$
21. 1 23. $\frac{2}{3}$ 25. 4 27. $\pi/2$ 29. $\pi^2/32 + \frac{1}{8}$

En los ejercicios 11 a 30, evaluar la integral iterada.

$$11. \int_0^1 \int_0^2 (x + y) \, dy \, dx$$

$$13. \int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2) \, dx \, dy$$

$$15. \int_0^{\pi/2} \int_0^1 y \cos x \, dy \, dx$$

$$17. \int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} (1 + \cos x) \, dy \, dx$$

$$18. \int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x} \, dy \, dx$$

$$19. \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} \, dy \, dx$$

$$21. \int_{-1}^5 \int_0^{3y} \left(3 + x^2 + \frac{1}{4}y^2 \right) \, dx \, dy$$

$$22. \int_0^2 \int_y^{2y} (10 + 2x^2 + 2y^2) \, dx \, dy$$

$$23. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x + y) \, dx \, dy$$

$$25. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} \, dx \, dy$$

$$27. \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r \, dr \, d\theta$$

$$29. \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} \theta r \, dr \, d\theta$$

En los ejercicios 39 a 46, utilizar una integral iterada para calcular el área de la región limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones.

Respuestas: 39. $\frac{8}{3}$ 41. 5 43. πab 45. $\frac{9}{2}$

39. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \quad x = 0, \quad y = 0$

41. $2x - 3y = 0, \quad x + y = 5, \quad y = 0$

43. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

45. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$

En los ejercicios 55 a 64, dibujar la región R cuya área está dada por la integral iterada. Después cambiar el orden de integración y mostrar que ambos órdenes dan la misma área.

55. $\int_0^1 \int_0^2 dy \, dx$

57. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \, dy$

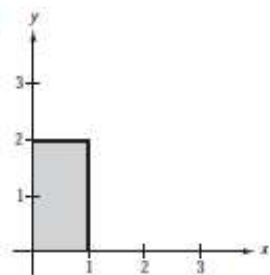
59. $\int_0^2 \int_0^x dy \, dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy \, dx$

61. $\int_0^2 \int_{x/2}^1 dy \, dx$

63. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx \, dy$

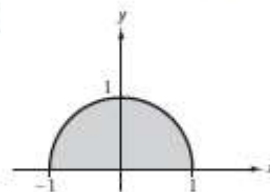
Respuestas:

55.



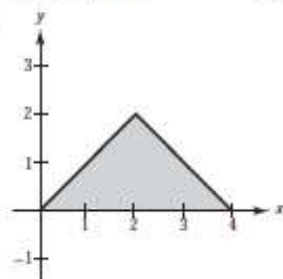
$$\int_0^1 \int_0^2 dy \, dx = \int_0^2 \int_0^1 dx \, dy = 2$$

57.



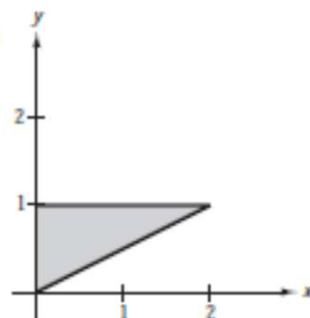
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx = \frac{\pi}{2}$$

59.



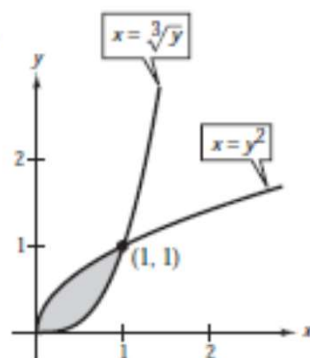
$$\int_0^2 \int_0^x dy \, dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy \, dx = \int_0^2 \int_y^{4-y} dx \, dy = 4$$

61.



$$\int_0^2 \int_{x/2}^1 dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{2y} dx \, dy = 1$$

63.



$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx \, dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy \, dx = \frac{5}{12}$$

En los ejercicios 67 a 72, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada. (Observar que es necesario cambiar el orden de integración.)

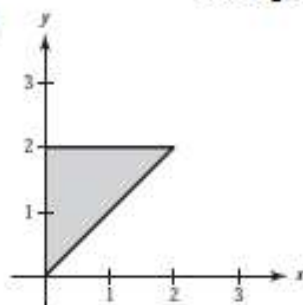
$$67. \int_0^2 \int_x^2 x \sqrt{1+y^3} \, dy \, dx$$

$$69. \int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2} \, dy \, dx$$

$$71. \int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 \, dx \, dy$$

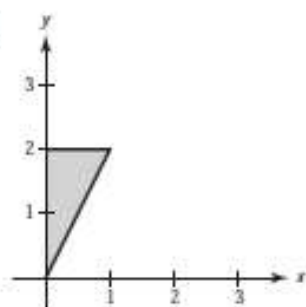
Respuestas:

67.



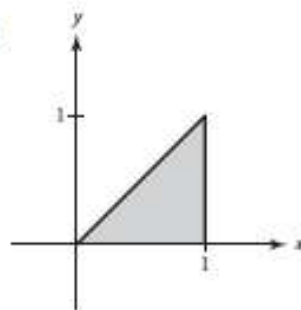
$$\int_0^2 \int_x^2 x \sqrt{1+y^3} \, dy \, dx = \frac{26}{9}$$

69.



$$\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2} \, dy \, dx = e^4 - 1 \approx 53.598$$

71.



$$\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2}(1 - \cos 1) \approx 0.230$$