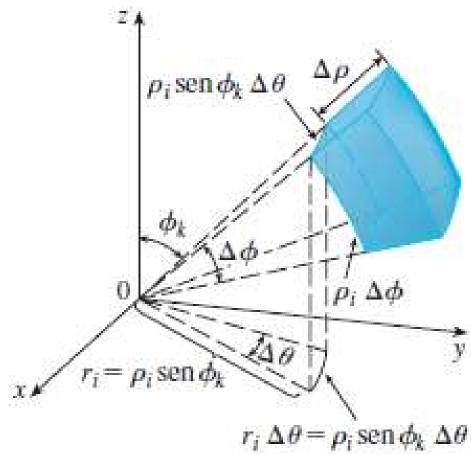
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Integrales triples en coordenadas esféricas.



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

15 de agosto del 2021

Coordenadas esféricas

Las **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de un punto P en el espacio se ilustran en la figura 1, donde $\rho = |OP|$ es la distancia del origen a P, θ es el mismo ángulo en coordenadas cilíndricas, y ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta OP. Nótese que

$$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

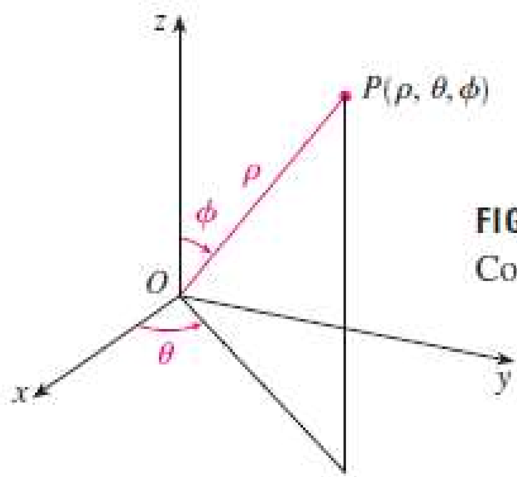


FIGURA 1
Coordenadas esféricas de un punto

El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en problemas donde hay simetría respecto a un punto, y el origen se coloca en este punto. Por ejemplo, la esfera con centro en el origen y radio c tiene la muy sencilla ecuación $\rho = c$ (véase la figura 2); ésta es la razón del nombre de coordenadas "esféricas". La gráfica de la ecuación $\theta = c$ es un plano vertical (véase la figura 3), y la ecuación $\phi = c$ representa un semicono con el eje z en su eje (véase la figura 4).

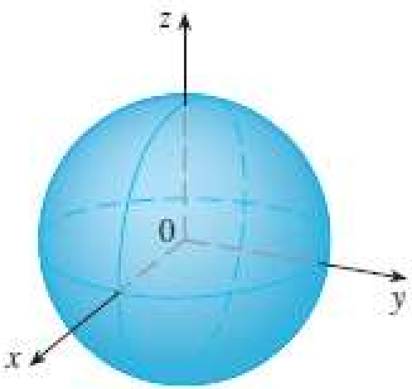


FIGURA 2 $\rho = c$, una esfera

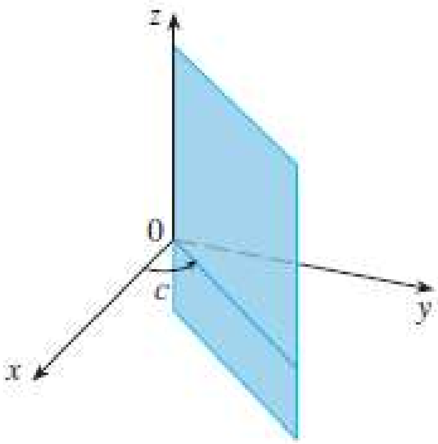


FIGURA 3 $\theta = c$, un semiplano

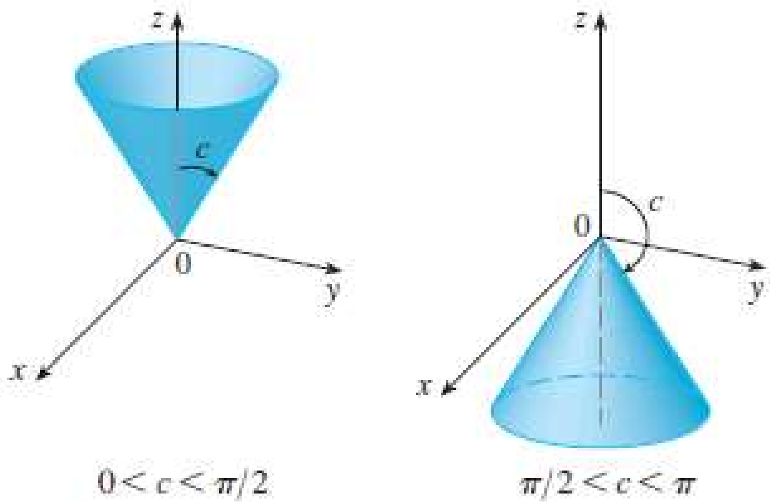


FIGURA 4 $\phi = c$, un semicono

La relación entre coordenadas rectangulares y esféricas se puede ver de la figura 5. De los triángulos OPQ y OPP' tenemos

$$z = \rho \cos \phi, \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Pero $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, de modo que para convertir de coordenadas esféricas a rectangulares, usamos las ecuaciones

1 $$\boxed{x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi}$$

También, la fórmula de distancia muestra que

2 $$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

Use esta ecuación para convertir coordenadas de rectangulares a esféricas.

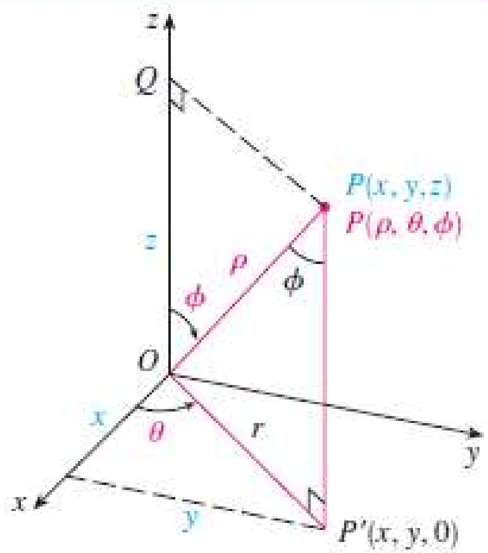


FIGURA 5

V EJEMPLO 1 El punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ está dado en coordenadas esféricas. Localice el punto y encuentre sus coordenadas rectangulares.

SOLUCIÓN Localizamos el punto en la figura 6. De las ecuaciones 1 tenemos

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Entonces el punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ es $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares.

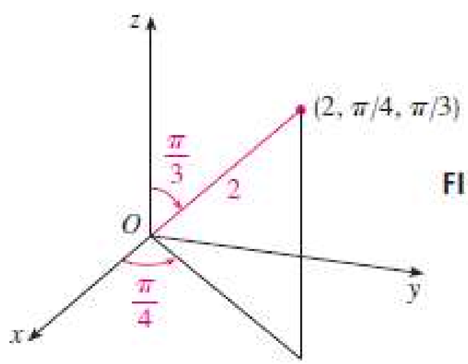


FIGURA 6

V **EJEMPLO 2** El punto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ está dado en coordenadas rectangulares. Encuentre coordenadas esféricas para este punto.

SOLUCIÓN De la ecuación 2 tenemos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

y entonces las ecuaciones 1 dan

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen}\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Observe que $\theta \neq 3\pi/2$ porque $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Por tanto, las coordenadas esféricas del punto dado son $(4, \pi/2, 2\pi/3)$.

En el sistema de coordenadas esféricas, la contraparte de una caja rectangular es una **cuña esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

donde $a \geqslant 0$ y $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$ y $d - c \leqslant \pi$.

fórmula para la triple integración en coordenadas esféricas.

3 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

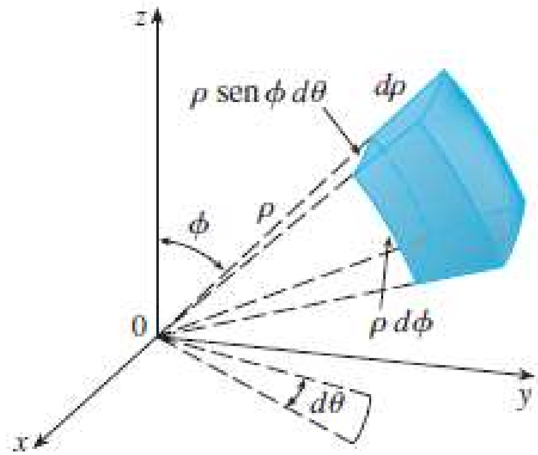
donde E es una cuña esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

La fórmula 3 indica que se convierte una integral triple de coordenadas rectangulares a esféricas al escribir

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

con los límites de integración apropiados y el reemplazo de dV por $\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$. Esto se ilustra en la figura 8.



Esta fórmula se puede ampliar para incluir regiones esféricas más generales como

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d,\ g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\right\}$$

En este caso la fórmula es la misma que en $\boxed{3}$, excepto que los límites de integración para ρ son $g_1(\theta, \phi)$ y $g_2(\theta, \phi)$.

V EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$, donde B es la bola unitaria.

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

SOLUCIÓN Puesto que el límite de B es una esfera, se usan coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\}$$

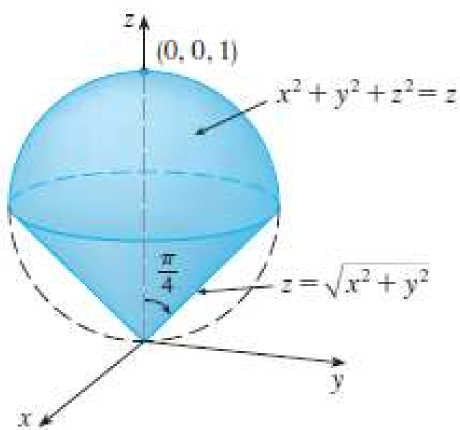
Además, las coordenadas esféricas son apropiadas porque

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Así, $\boxed{3}$ da

$$\begin{aligned}\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} e^{(\rho^2)^{3/2}}\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} \rho^2 e^{\rho^3}\,d\rho \\ &= \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi}(2\pi)\left[\tfrac{1}{3}e^{\rho^3}\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi(e-1)\end{aligned}$$

V **EJEMPLO 4** Use coordenadas esféricas para hallar el volumen del sólido que yace arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Véase la figura 9.)



SOLUCIÓN Observe que la esfera pasa por el origen y tiene centro $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Se escribe la ecuación de la esfera en coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \qquad \text{o} \qquad \rho = \cos \phi$$

La ecuación del cono se puede escribir como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

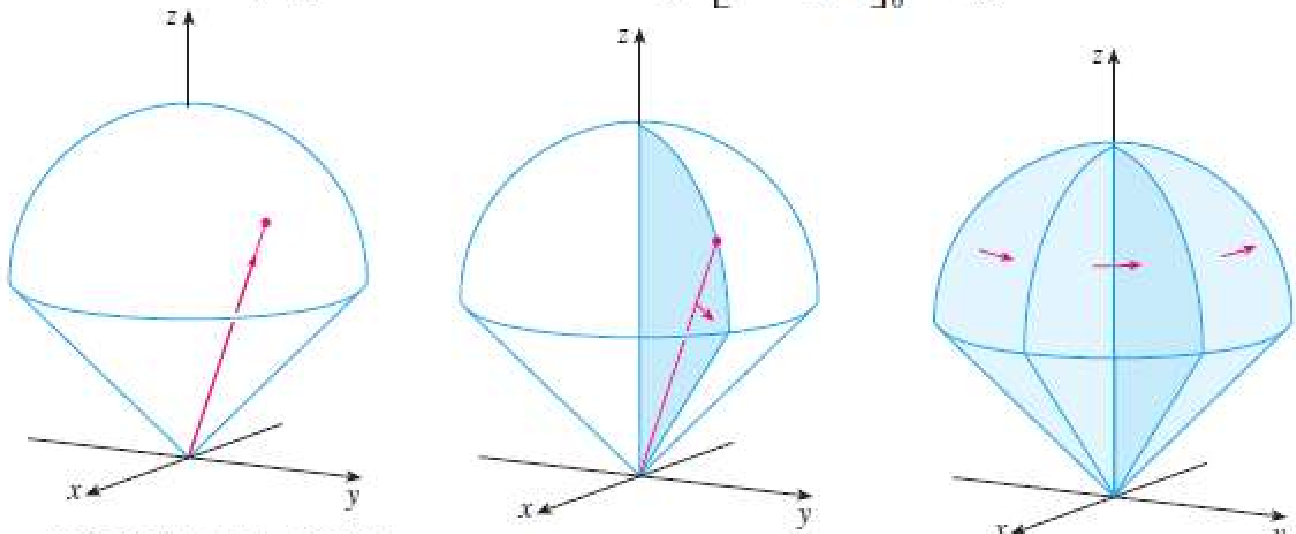
Esto da $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$, o $\phi = \pi/4$. Por tanto, la descripción del sólido E en coordenadas esféricas es

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi\right\}$$

En la figura 11 se muestra cómo E es barrida si se integra primero respecto a ρ, luego ϕ y después θ. El volumen de E es

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$



ρ varía de 0 a $\cos\phi$, mientras que ϕ y θ son constantes.

ϕ varía de 0 a $\pi/4$, mientras que θ es constante.

θ varía de 0 a 2π.

FIGURA 11

Ejercicios Propuestos (Stewart, sec: 15.9)

5-6 Describa verbalmente la superficie cuya ecuación se da.

5. $\phi = \pi/3$ **6.** $\rho = 3$

7-8 Identifique la superficie cuya ecuación se da.

7. $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ **8.** $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi = 9$

9-10 Escriba la ecuación en coordenadas esféricas.

9. a) $z^2 = x^2 + y^2$ b) $x^2 + z^2 = 9$

10. a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ b) $x + 2y + 3z = 1$

17-18 Bosqueje el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúela.

17. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

21-34 Use coordenadas esféricas.

21. Evalúe $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2\, dV$, donde B es la bola con centro en el origen y radio 5.

23. Evalúe $\iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, donde E está entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

25. Evalúe $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\, dV$, donde E es la porción de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ que está en el primer octante.

27. Encuentre el volumen de la parte de la esfera $\rho \leqslant a$ que está entre los conos $\phi = \pi/6$ y $\phi = \pi/3$.

29. a) Calcule el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $\phi = \pi/3$ y debajo de la esfera $\rho = 4\cos\phi$.

b) Encuentre el centroide del sólido del inciso a).

30. Halle el volumen del sólido que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, por encima del plano xy y por abajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

31. a) Encuentre el centroide del sólido del ejemplo 4.

b) Determine el momento de inercia respecto al eje z para este sólido.

33. a) Encuentre el centroide de un hemisferio sólido homogéneo sólido de radio a.

b) Determine el momento de inercia del sólido del inciso a) respecto a un diámetro de su base.

35-38 Use coordenadas cilíndricas o esféricas, lo que parezca más apropiado.

35. Encuentre el volumen y el centroide del sólido E que está arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

39-41 Evalúe la integral cambiando a coordenadas esféricas.

39. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\, dz\, dy\, dx$

41. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$