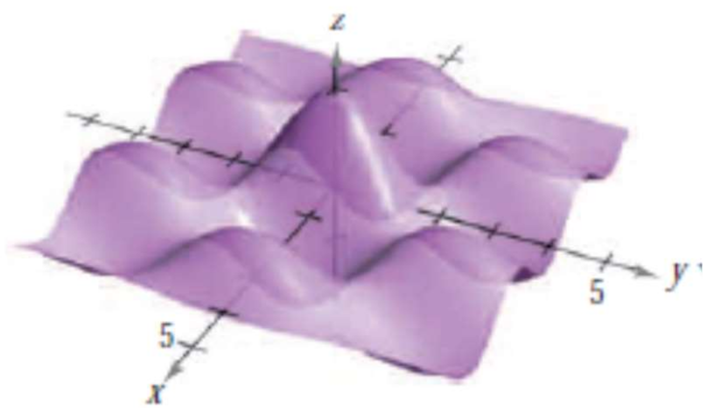
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Valores Máximos y Mínimos



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

29 de julio del 2021

Extremos absolutos de una función

Sean f una función de dos variables y (a, b) un punto en el dominio de f decimos que:

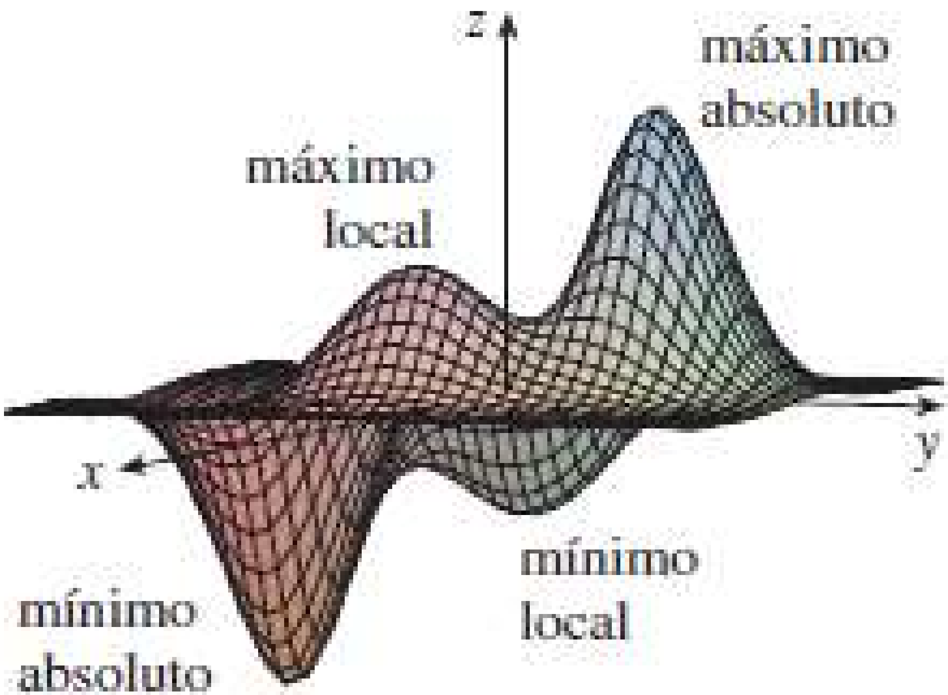
- f tiene un **máximo absoluto** en (a, b) si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in Dom\ f$.
- f tiene un **mínimo absoluto** en (a, b) si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in Dom\ f$.

Extremos locales de una función

Se dice que f tiene un

- **Máximo local o relativo** en (a, b) si existe un disco abierto D centrado en (a, b) tal que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$.
- **Mínimo local o relativo** en (a, b) si existe un disco abierto D centrado en (a, b) tal que $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$.

- Nota: Un disco abierto D centrado en (a, b) es un conjunto donde existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r\}$, es decir, es el conjunto de todos los puntos que están dentro de un circulo centrado en (a, b) pero que no contiene los puntos del círculo.



z
máximo absoluto
máximo local
x
y
mínimo local
mínimo absoluto

Teorema Si f tiene un máximo local o un mínimo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f existen ahí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Si hacemos $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación de un plano tangente obtenemos $z = z_0$. Por lo tanto, la interpretación geométrica del teorema es que si la gráfica de f tiene un plano tangente en un máximo local o en un mínimo local, enton ces el plano tangente debe ser horizontal.

Un punto (a, b) se llama **punto crítico** (o *punto estacionario*) de f si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de estas derivadas parciales no existe. El teorema dice que si f tiene un máximo local o un mínimo local en (a, b), entonces (a, b) es un punto crítico de f. Sin embargo, como en el cálculo de una variable, no todos los puntos críticos generan un máximo o un mínimo. En un punto crítico, una función podría tener un máximo local o un mínimo local o ninguno de los dos.

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Entonces,

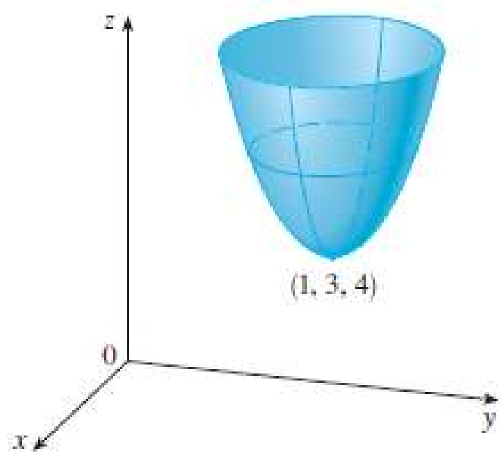
$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Estas derivadas parciales son iguales a 0 cuando $x = 1$ y $y = 3$, de modo que el único punto crítico es $(1, 3)$. Al completar el cuadrado, se encuentra que

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Puesto que $(x - 1)^2 \geqslant 0$ y $(y - 3)^2 \geqslant 0$, tenemos que $f(x, y) \geqslant 4$ para todos los valores de x y y. Por lo tanto, $f(1, 3) = 4$ es un mínimo local y, de hecho, es el mínimo absoluto de f.

Esto se puede confirmar en forma geométrica a partir de la gráfica de f la cual es el paraboloide elíptico con vértice $(1, 3, 4)$ como se muestra en la figura 2.



EJEMPLO 2 Calcule los valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

SOLUCIÓN Puesto que, $f_x = -2x$ y $f_y = 2y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Observe que para los puntos en el eje x, $y = 0$, de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$). No obstante, para puntos en el eje y, $x = 0$, de modo que $f(x, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). Por lo tanto, todo disco con centro en $(0, 0)$ contiene puntos donde f toma valores positivos, así como puntos donde f toma valores negativos. Por lo tanto, $f(0, 0) = 0$ no puede ser un valor extremo de f, de modo que f no tiene valor extremo.

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que una función no necesariamente tiene valor máximo o mínimo en un punto crítico. En la figura 3 se ilustra la manera como esto es posible. La gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, por la que pasa un plano tangente horizontal ($z = 0$) en el origen. Podemos ver que $f(0, 0) = 0$ es un máximo en la dirección del eje x pero un mínimo es la dirección del eje y. Cerca del origen, la gráfica tiene la forma de una silla de montar y por eso $(0, 0)$ se llama *punto silla* de f.

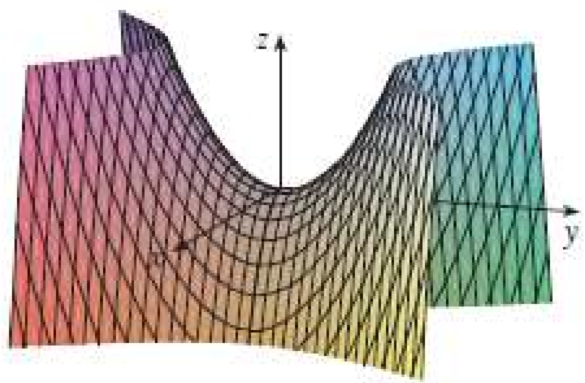


FIGURA 3
$z = y^2 - x^2$

Es necesario ser capaz de determinar si la función tiene o no un valor extremo en un punto crítico. La prueba siguiente, es análoga a la prueba de la segunda derivada para funciones de una variable.

Prueba de la segunda derivada Supongamos que las segundas derivadas parciales de f son continuas sobre un disco de centro (a, b), y supongamos que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.

c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo local ni un mínimo local.

NOTA 1 En caso de c) el punto (a, b) se llama **punto silla** de f y la gráfica de f cruza el plano tangente en (a, b).

NOTA 2 Si $D = 0$, la prueba no proporciona información: f podría tener un máximo local o un mínimo local en (a, b), o bien, en (a, b) podría haber un punto silla de f.

NOTA 3 Para recordar la fórmula de D es útil escribirla como un determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

EJEMPLO 3 Determine los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUCIÓN Primero localizamos los puntos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^3 - x = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituimos $y = x^3$ de la primera ecuación en la segunda, y obtenemos

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

de modo que hay tres raíces reales: $x = 0, 1, -1$. Los tres puntos críticos son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Luego calculamos la segunda derivada parcial y $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Puesto que $D(0, 0) = -16 < 0$, se infiere del caso c) de la prueba de la segunda derivada que el origen es un punto silla; es decir, f no tiene máximo ni mínimo local en $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, se ve que según el caso a) de la prueba que $f(1, 1) = -1$ es un mínimo local. De igual manera, $D(-1, -1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, de modo que $f(-1, -1) = -1$ es también un mínimo local.

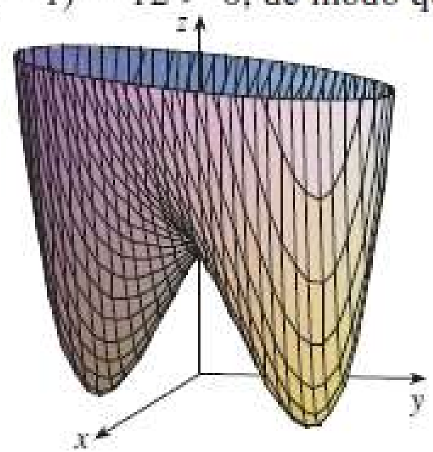


FIGURA 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de las segundas derivadas parciales

Identificar los extremos relativos de $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución Para comenzar, se identifican los puntos críticos de f. Como

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

existen para todo x y y, los únicos puntos críticos son aquellos en los que ambas derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, se igualan a 0 $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y se obtiene $-3x^2 + 4y = 0$ y $4x - 4y = 0$. De la segunda ecuación se sabe que $x = y$, y por sustitución en la primera ecuación, se obtienen dos soluciones: $y = x = 0$ y $y = x = \frac{4}{3}$. Como

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

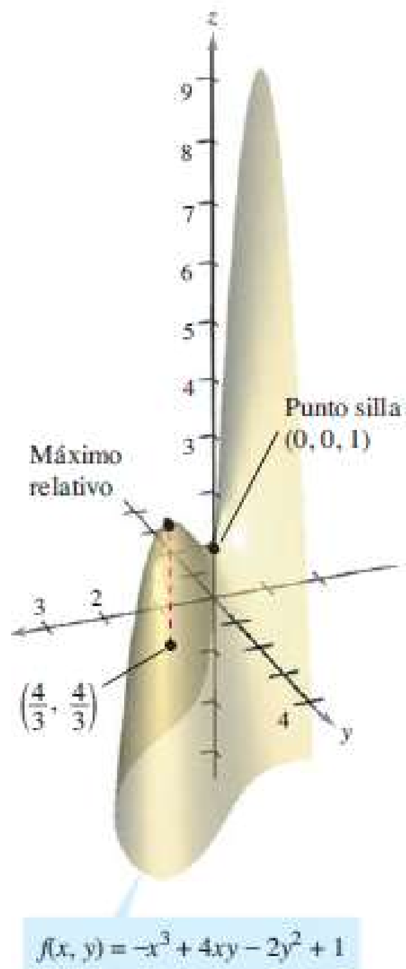
se sigue que, para el punto crítico $(0, 0)$,

$$d = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = 0 - 16 < 0$$

y, por el criterio de las segundas derivadas parciales, se puede concluir que $(0, 0, 1)$ es un punto silla. Para el punto crítico $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) f_{yy}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) - \left[f_{xy}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right)\right]^2 \\ &= -8(-4) - 16 \\ &= 16 \\ &> 0 \end{aligned}$$

y como $f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$ se concluye que f tiene un máximo relativo en $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$


z
9
8
7
6
5
4
3
Máximo relativo
Punto silla
(0, 0, 1)
3
2
$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$
4
y
$f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

EJEMPLO 5 **Cuando el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente**

Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2y^2$.

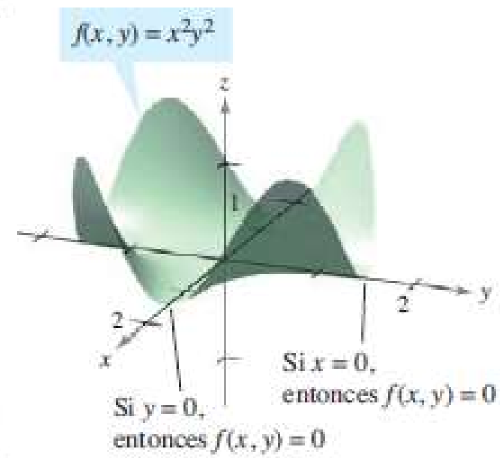
Solución Como $f_x(x, y) = 2xy^2$ y $f_y(x, y) = 2x^2y$, se sabe que ambas derivadas parciales son igual a 0 si $x = 0$ o $y = 0$. Es decir, todo punto del eje x o del eje y es un punto crítico. Como

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2, \qquad f_{yy}(x, y) = 2x^2 \qquad \text{y} \qquad f_{xy}(x, y) = 4xy$$

se sabe que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \\ &= 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, no funciona. Sin embargo, como $f(x, y) = 0$ para todo punto en los ejes x o y y $f(x, y) = x^2y^2 > 0$ en todos los otros puntos, se puede concluir que cada uno de estos puntos críticos son un mínimo absoluto, como se muestra en la figura



EJEMPLO 6 Calcule la distancia más corta desde el punto $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

SOLUCIÓN La distancia desde cualquier punto (x, y, z) al punto $(1, 0, -2)$ es

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2}$$

pero si (x, y, z) se encuentra en el plano $x + 2y + z = 4$, entonces $z = 4 - x - 2y$ y se tiene $d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$. Podemos minimizar d minimizando la expresión más sencilla

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Al resolver las ecuaciones

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

encontramos que el único punto crítico es $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Puesto que $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$ y $f_{yy} = 10$, tenemos $D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ y $f_{xx} > 0$, de este modo, de acuerdo con la prueba de la segunda derivada f tiene un mínimo local en $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Intuitivamente, se desprende que este mínimo local es en realidad un mínimo absoluto porque debe haber un punto en el plano dado que está más cerca a $(1, 0, -2)$. Si $x = \frac{11}{6}$ y $y = \frac{5}{3}$, entonces

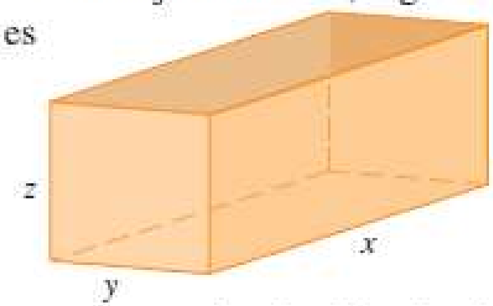
$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

La distancia más corta desde $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$ es $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

EJEMPLO 7 Una caja rectangular sin tapa se fabrica con 12 m^2 de cartón. Calcule el volumen máximo de la caja.

SOLUCIÓN Sean x, y y z la longitud, el ancho y la altura de la caja en metros, según se muestra en la figura. Entonces, el volumen de la caja es

$$V = xyz$$



Expresamos V como una función de sólo dos variables x y y recurriendo al hecho de que el área de los cuatro lados y el fondo de la caja es

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Al resolver la ecuación para z, obtenemos $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, de modo que la expresión para V se transforma en

$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Si V es un máximo, entonces $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, pero $x = 0$ o $y = 0$ da $V = 0$, de modo que debemos resolver las ecuaciones

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Esto implica que $x^2 = y^2$ y $x = y$. (Note que x y y ambas deben ser positivas en este problema.) Si hacemos $x = y$ en cualquier ecuación obtenemos $12 - 3x^2 = 0$, lo cual da $x = 2$, $y = 2$ y $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

Podríamos utilizar la prueba de la segunda derivada para demostrar que esto da un máximo local de V, o bien, podríamos argumentar simplemente que por la naturaleza física de este problema debe haber un volumen máximo absoluto, lo cual tiene que ocurrir en un punto crítico de V, de modo que se debe presentar cuando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Entonces $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, de modo que el volumen máximo de la caja es 4 m^3.

Extremos Absolutos

- Un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto que contiene todos sus puntos fronteras.
- Por ejemplo el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es un conjunto cerrado porque contiene a todos sus puntos límites que son los que están sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$

a) Conjuntos cerrados b) Conjuntos que no son cerrados

Un **conjunto acotado** en $\mathbb{R}^2$ es uno que está contenido dentro de algún disco. En otras palabras, su extensión es finita. Entonces, en términos de conjuntos cerrados y acotados, podemos establecer la siguiente equivalencia del teorema del valor extremo en dos dimensiones.

> **Teorema del valor extremo para funciones de dos variables** Si f es continua sobre un conjunto D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.

Para encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua f sobre un conjunto cerrado y acotado D:

1. Se calculan los valores de f en los puntos críticos de f en D.
2. Se determinan los valores extremos de f sobre la frontera de D.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 8 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ sobre el rectángulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

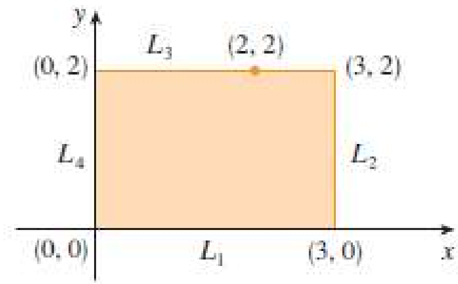


FIGURA 12

SOLUCIÓN Puesto que f es una polinomial, es continua sobre el rectángulo cerrado y acotado D, hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto, primero calculamos los puntos críticos. Estos puntos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

de modo que el único punto crítico es $(1, 1)$, y el valor de f ahí es $f(1, 1) = 1$.

En el paso 2 observamos los valores de f en la frontera de D, que consisten en los cuatro segmentos rectilíneos L_1, L_2, L_3 y L_4 mostrados en la figura 12. Sobre L_1 tenemos $y = 0$ y

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Ésta es una función creciente de x, de modo que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(3, 0) = 9$. Sobre L_2 tenemos $x = 3$ y

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Ésta es una función creciente de y, de modo que su valor máximo es $f(3, 0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3, 2) = 1$. Sobre L_3 tenemos $y = 2$, y

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Mediante estos métodos vistos en matematica I o bien, simplemente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, vemos que el valor mínimo de esta función es $f(2, 2) = 0$ y que el valor máximo es $f(0, 2) = 4$. Para finalizar, sobre L_4 tenemos $x = 0$ y

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

con valor máximo $f(0, 2) = 4$ y valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Por lo tanto, sobre la frontera, el valor mínimo de f es 0 y el máximo es 9.

En el paso 3, comparamos estos valores con el valor $f(1, 1) = 1$ en el punto crítico y concluimos que el valor máximo absoluto de f en D es $f(3, 0) = 9$ y el valor mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. En la figura 13 se ilustra la gráfica de f.

Ejercicios Propuestos

5-18 Calcule los valores máximo y mínimo locales, y punto o puntos sillas de la función. Si dispone de programas para graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y desde otra perspectiva que revele todos los aspectos importantes de la función.

5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$

7. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

9. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

29-36 Determine los valores máximos y mínimos absolutos de f sobre el conjunto D.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, D es la región triangular cerrada con vértices $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

41. Encuentre los puntos sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

43. Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo

45. Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en una esfera de radio r.

51. Una caja de cartón sin tapa debe tener 32 000 cm^3. Calcule las dimensiones que minimicen la cantidad de cartón utilizado.

53. Si la longitud de la diagonal de una caja rectangular debe ser L, ¿cuál es el volumen más grande posible?

56. Determine una ecuación del plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y corta el volumen más pequeño en el primer octante.