Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Cilindros y superficies cuádricas

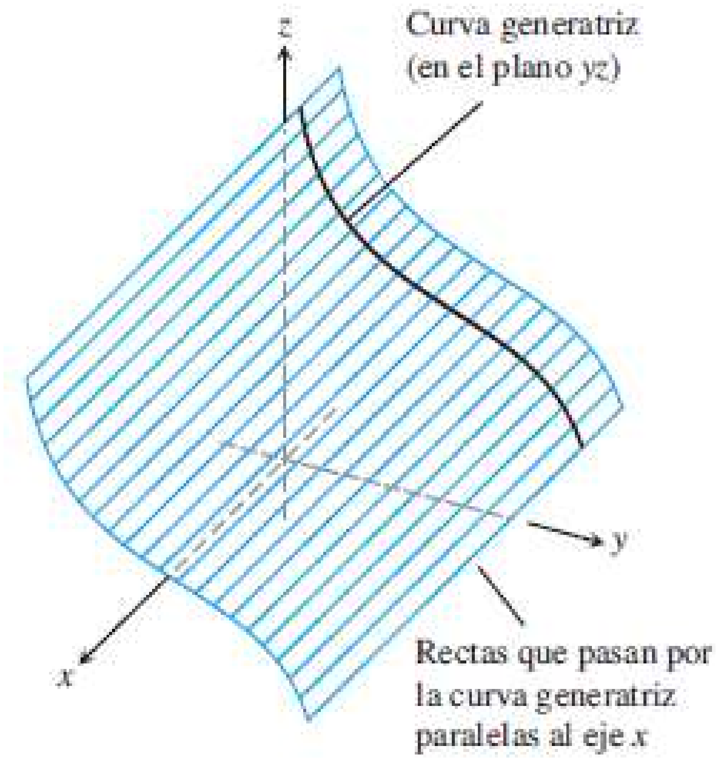
Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

18 de julio del 2021

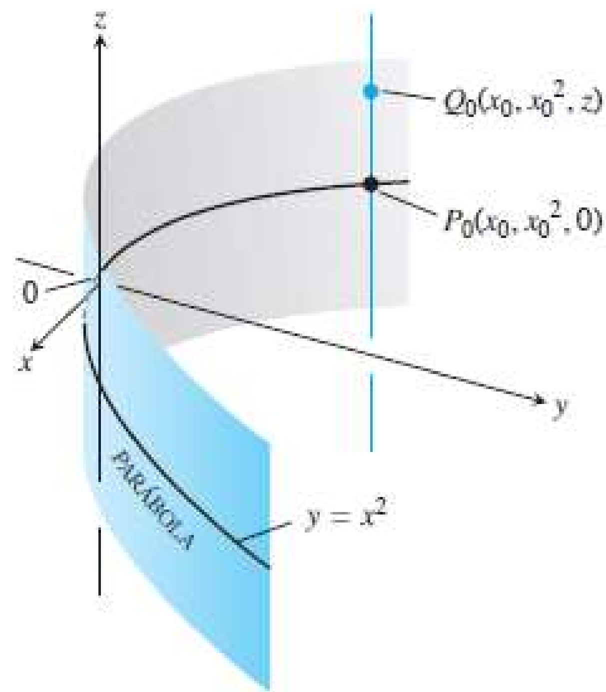
Cilindros

Un cilindro es una superficie generada por todas las rectas paralelas a una recta fija que pasan por una curva plana. La curva se llama generatriz del cilindro.



Ejemplo: Graficar en el espacio la ecuación $y = x^2$

En el espacio la gráfica de $y = x^2$ se refiere a todo el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $y = x^2$. Por ejemplo están en la gráfica $(2,4,0)$, $(2,4,3)$, $(2,4,-1)$, en general todos los puntos de la forma $(2,4,z)$ que son los puntos de una recta paralela al eje z que pasan por el punto $(2,4,0)$ en el plano xy. No hay restricción sobre la coordenada z. Si dibujamos la ecuación $y = x^2$ en el plano xy esta sería una parábola. Si por cada punto (x, y) de la parábola consideramos una recta paralela al eje z obtendríamos la gráfica de $y = x^2$ en el espacio. La gráfica de $y = x^2$ en el espacio es un cilindro cuya generatriz es $y = x^2$ generado por rectas paralelas al eje z.



En general, cuando se tiene en el espacio una ecuación de la forma:

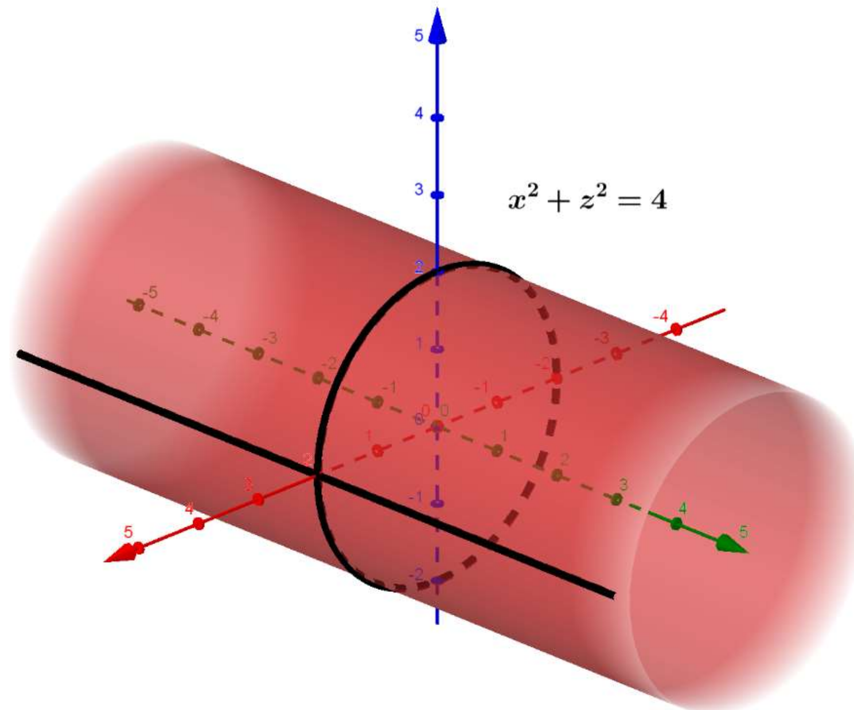
- $f(x, y) = c$ representa un cilindro cuya generatriz es la gráfica de $f(x, y) = c$ en el plano xy generado por rectas paralelas al eje z.

- $g(x, z) = c$ representa un cilindro cuya generatriz es la gráfica de $g(x, z) = c$ en el plano xz generado por rectas paralelas al eje y.

- $h(y, z) = c$ representa un cilindro cuya generatriz es la gráfica de $h(y, z) = c$ en el plano yz generado por rectas paralelas al eje x.

<u>Ejemplo:</u> Representar en el espacio las gráficas de las ecuaciones
$x^2 + z^2 = 4$ y $y = z^2 + 1$

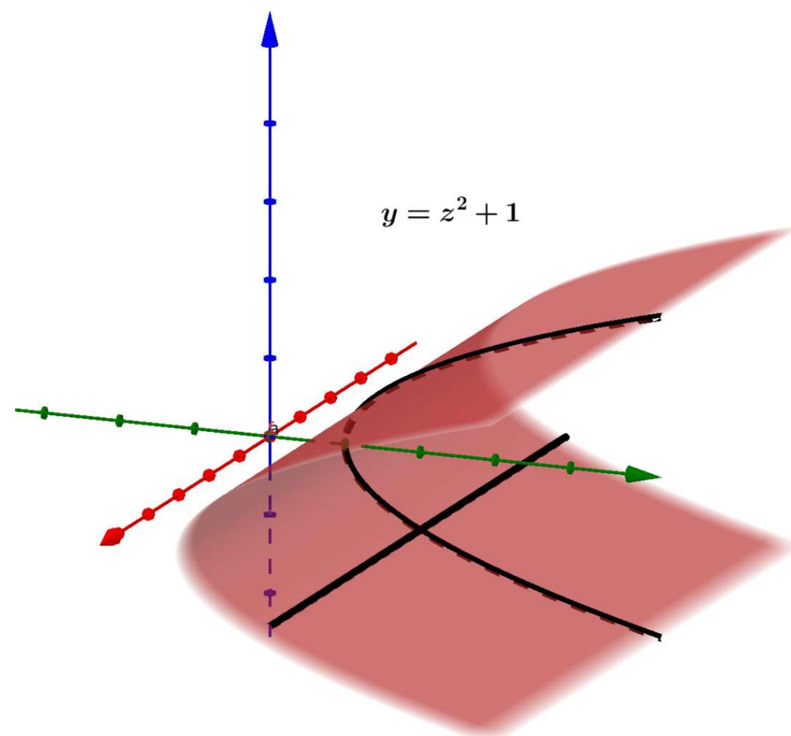
La gráfica de $x^2 + z^2 = 4$ en el espacio es el cilindro generado por rectas paralelas al eje y y la generatriz $x^2 + z^2 = 4$ en el plano xz.



Para identificar la gráfica de $x^2 + z^2 = 4$ en el plano xz consideramos su análoga en el plano xy tomando a y como z. Se trata de una circunferencia de radio 2 y centro $(0,0)$.

La gráfica de $y = z^2 + 1$ en el espacio es el cilindro generado por rectas paralelas al eje x y la generatriz $y = z^2 + 1$ en el plano yz.

La gráfica de $y = z^2 + 1$ en el plano es una parábola que abre hacia el eje y que en este caso es el eje horizontal en el plano yz y el eje z es el eje vertical.



Superficies Cuádricas

Una superficie cuádrica es la gráfica en el espacio de una ecuación de segundo grado en términos de x, y y z. La forma general de la ecuación es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Pero que por traslación y rotación se puede escribir como:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$$

Las gráficas de estas superficies son las contraparte de las cónicas en el plano.

- Las superficies cuádricas básicas son las elipsoides, los paraboloides, los conos elípticos y los hiperboloides. Primero se darán unos ejemplos para ilustrar como dibujar una superficie cuádrica y luego se presentará una tabla donde se resumen los tipos básicos.

- Es importante recordar la forma de las cónicas en el plano para una mayor comprensión del tema para lo cual se refiere dar un vistazo a la sección 10.5 del libro de Cálculo de Varias Variables de James Stewart.

EJEMPLO 3 Use trazas para bosquejar la superficie cuádrica con ecuación

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

SOLUCIÓN Al sustituir $z = 0$, se encuentra que la traza en el plano xy es $x^2 + y^2/9 = 1$, que se reconoce como ecuación de una elipse. En general, la traza horizontal en el plano $z = k$ es

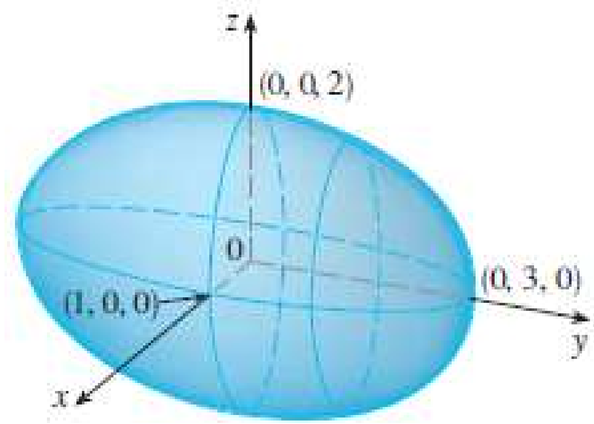
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

que es una elipse, siempre que $k^2 < 4$, es decir, $-2 < k < 2$.

De manera similar, las trazas verticales son también elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2 \qquad x = k \qquad (\text{si } -1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9} \qquad y = k \qquad (\text{si } -3 < k < 3)$$

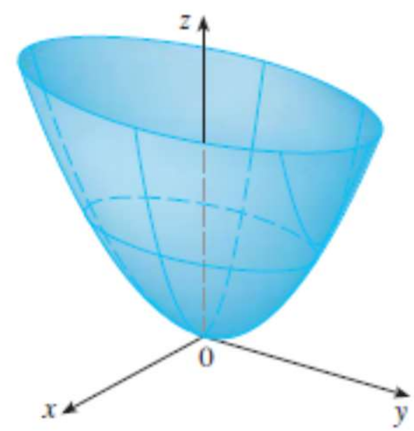


Se llama **elipsoide** porque todas sus trazas son elipses. Observe que es simétrica respecto a cada plano coordenado; ésta es una reflexión del hecho de que su ecuación tiene que ver sólo con potencias pares de x, y y z.

EJEMPLO 4 Use trazas para bosquejar la superficie $z = 4x^2 + y^2$.

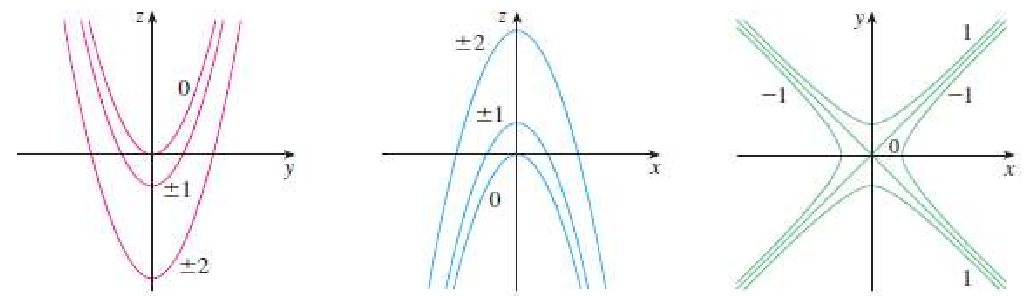
SOLUCIÓN Si se escribe $x = 0$, se obtiene $z = y^2$, de modo que el plano yz corta a la superficie en una parábola. Si se escribe $x = k$ (una constante), se obtiene $z = y^2 + 4k^2$. Esto significa que si se corta a la gráfica en secciones con cualquier plano paralelo al plano yz, se obtiene una parábola que abre hacia arriba. De manera similar, si $y = k$, la traza es $z = 4x^2 + k^2$, que es de nuevo una parábola que abre hacia arriba. Si se escribe $z = k$, se obtienen las trazas horizontales $4x^2 + y^2 = k$, que se reconocen como una familia de elipses. Al conocer las formas de las trazas, se puede bosquejar la gráfica de la figura 5. Como resultado de las trazas elípticas y parabólicas, la superficie cuádrica $z = 4x^2 + y^2$ se llama **paraboloide elíptico**.

La superficie $z = 4x^2 + y^2$ es un paraboloide elíptico. Las trazas horizontales son elipses, las trazas verticales son parábolas.

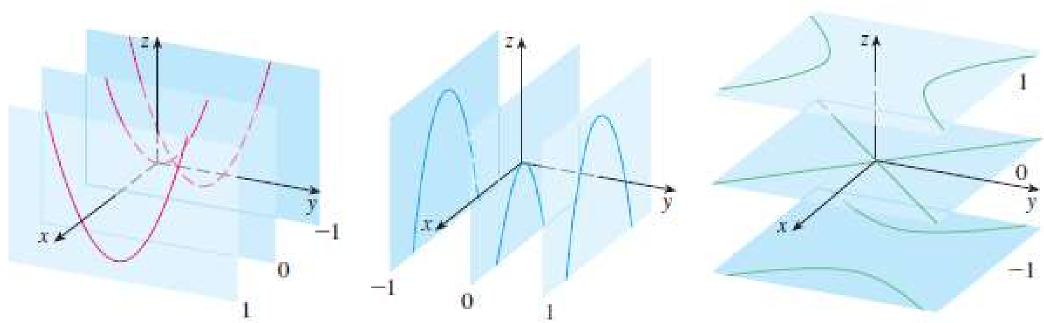


V EJEMPLO 5 Bosqueje la superficie $z = y^2 - x^2$.

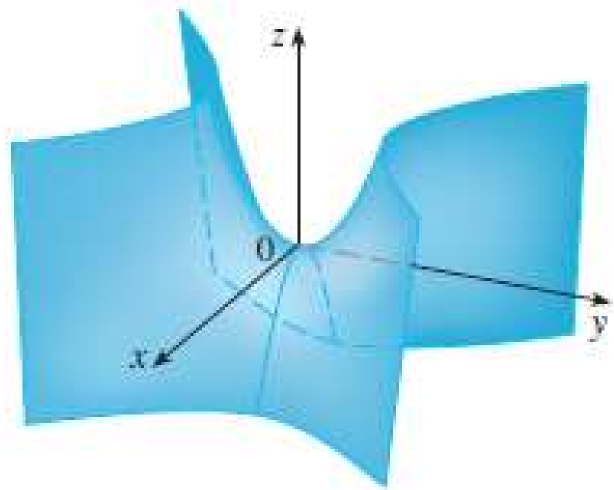
SOLUCIÓN Las trazas en los planos verticales $x = k$ son las parábolas $z = y^2 - k^2$, que abren hacia arriba. Las trazas en $y = k$ son las parábolas $z = -x^2 + k^2$, que abren hacia abajo. Las trazas horizontales son $y^2 - x^2 = k$, una familia de hipérbolas.



Trazas en $x = k$ son $z = y^2 - k^2$ Trazas en $y = k$ son $z = -x^2 + k^2$ Trazas en $z = k$ son $y^2 - x^2 = k$



Trazas en $x = k$ Trazas en $y = k$ Trazas en $z = k$



La superficie $z = y^2 - x^2$ es un paraboloide hiperbólico.

EJEMPLO 6 Bosqueje la superficie $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

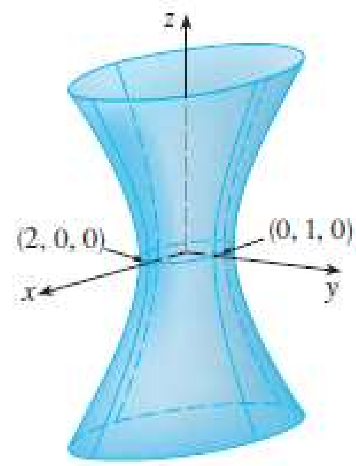
SOLUCIÓN La traza en cualquier plano horizontal $z = k$ es la elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

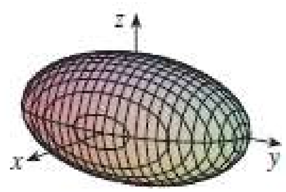
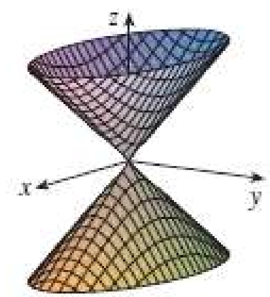
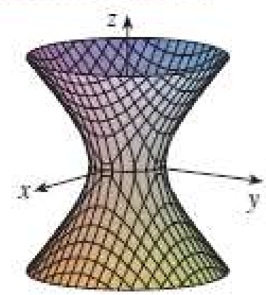
pero las trazas en los planos xz y yz son las hipérbolas

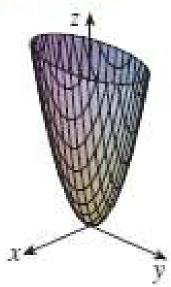
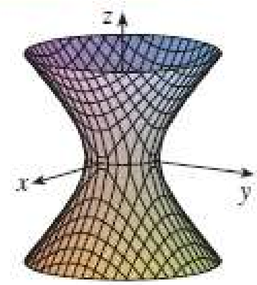
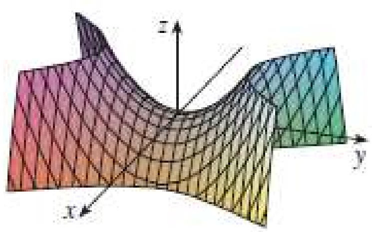
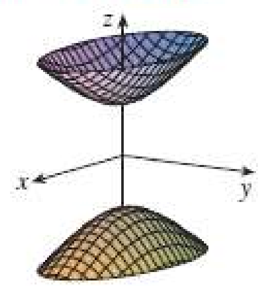
$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad x = 0$$

Esta superficie se llama **hiperboloide de una hoja**



A continuación se presenta una tabla con las principales superficies cuádricas en forma estándar, simétricas con respecto al eje z.

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Todas las trazas son elipses. Si $a = b = c$, la elipsoide es una esfera.	Cono 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x = k$ y $y = k$ son hipérbolas si $k \neq 0$ pero son pares de rectas si $k = 0$.
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.

Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas Se ilustra el caso donde $c < 0$.	Hiperboloide de dos hojas 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas horizontales en $z = k$ son elipses si $k > c$ o $k < -c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

La tabla anterior como se indicó se refiere a superficies cuádricas simétricas con respecto al eje z, si se consideran simétricas a los otros ejes la ecuación cambia.

V EJEMPLO 7 Identifique y bosqueje la superficie $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

SOLUCIÓN Dividiendo por -4, primero se escribe la ecuación en la forma estándar:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Al comparar esta ecuación con la tabla 1, se ve que representa un hiperboloide de dos hojas, la única diferencia es que en este caso el eje del hiperboloide es el eje y. Las trazas en los planos xy y yz son las hipérbolas

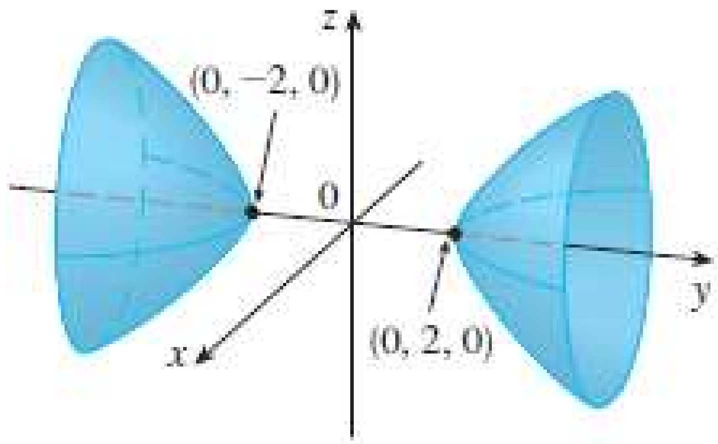
$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad z = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1 \qquad x = 0$$

La superficie no tiene traza en el plano xz, pero las trazas en los planos verticales $y = k$ para $|k| > 2$ son las elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1 \qquad y = k$$

que se pueden escribir como

$$\frac{x^2}{\dfrac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\dfrac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$



EJEMPLO 8 Clasifique la superficie cuádrica $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

Completación de cuadrados

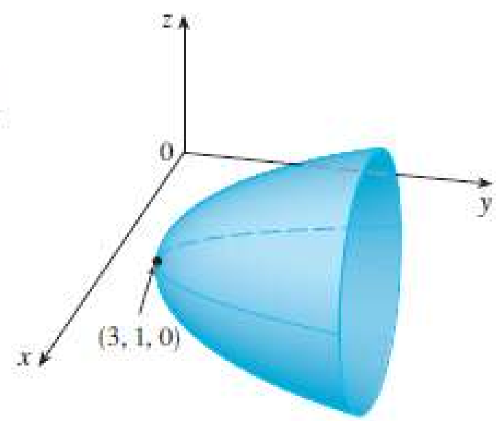
SOLUCIÓN Al completar el cuadrado se reescribe la ecuación como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Al comparar esta ecuación con la tabla 1, se ve que representa un paraboloide elíptico. Sin embargo, aquí el eje del paraboloide es paralelo al eje y, y ha sido desplazado de modo que su vértice es el punto $(3, 1, 0)$. Las trazas en el plano $y = k$ ($k > 1$) son las elipses

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

La traza en el plano xy es la parábola con ecuación $y = 1 + (x - 3)^2$, $z = 0$.



Ejercicios propuestos:

a. Describa y bosqueje la gráfica de las siguientes ecuaciones en un plano y en el espacio.
   - *a.* $y = e^x + 1$
   - *b.* $z = \sqrt{1 - x^2}$
   - *c.* $y^2 + z^2 + 2z = 8$

b. Use las trazas para identificar y graficar las superficies cuádricas de las siguientes ecuaciones
   - *a.* $x = y^2 + 4z^2$
   - *b.* $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$
   - *c.* $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$
   - *d.* $y = z^2 - x^2$
   - *e.* $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$
   - *f.* $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$

3. Reduzca la ecuación a su forma estándar, clasifique su superficie y bosquéjela
   a. $y^2 = x^2 + 4z^2 + 4$
   b. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$
   c. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$
4. Bosqueje la región acotada por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leq z \leq 2$
5. Bosqueje la región acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$