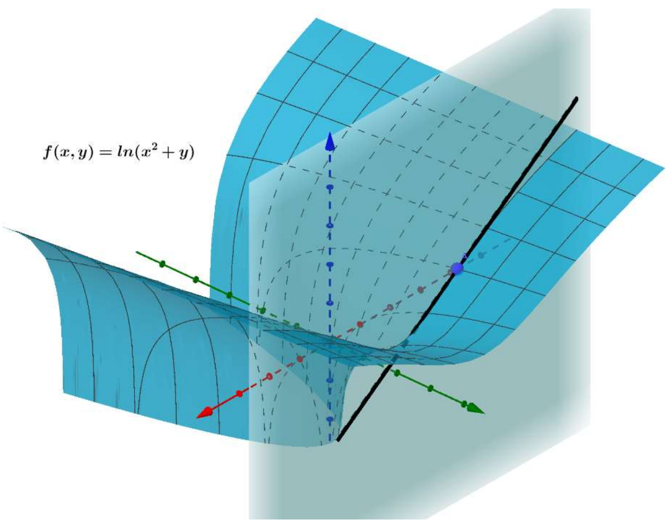
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Funciones de Varias Variables



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

26 de julio del 2021

Función de dos Variables

- Una función real de dos variables es una regla de correspondencia f que a cada par ordenado (x, y) de un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ le asigna uno y sólo un número real denotado por $f(x, y)$.
- El conjunto D se llama dominio de la función f, denotado por $Dom\ f$. El conjunto de todas las imágenes de los elementos de D se llama rango de f y se representa por $Rgo\ f$

$$Rgo\ f = \{f(x, y) : (x, y) \in D\}$$

- Cuando no se indica explícitamente cuál es el dominio de la función entonces entenderemos que es el conjunto de todos los pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x, y)$ esté definida.

Ejemplo 1: Considere la función $f(x,y) = \ln(x^2 - 2y)$. Halle las imágenes si es posible de $(1,0), (1,1/4)(4,5), (0,0), (2,4)$, indique como es el dominio de f.

- Evaluamos:

✓ $f(1,0) = \ln\left(1^2 - 2(0)\right) = \ln(1) = 0$

✓ $f(4,5) = \ln(4^2 - 2.5) = \ln(16 - 10) = \ln(6)$

✓ $f\left(1,\frac{1}{4}\right) = \ln\left(1^2 - 2(0.25)\right) = \ln(0.5) = -0.6931$

✓ $f(0,0) = \ln(0^2 - 2.0) = \ln 0$ no existe

✓ $f(2,4) = \ln(2^2 - 2.4) = \ln(-4)$ no existe

Podemos ver que la función no está definida para todo $\mathbb{R}^2$ porque vimos en la parte anterior que hay algunos pares (x, y) que no tienen imágenes. Como la función tiene un logaritmo se debe cuidar que su argumento sea positivo, por lo que podemos decir que $(x, y) \in Dom\ f$ si se cumple que

$$x^2 - 2y > 0$$

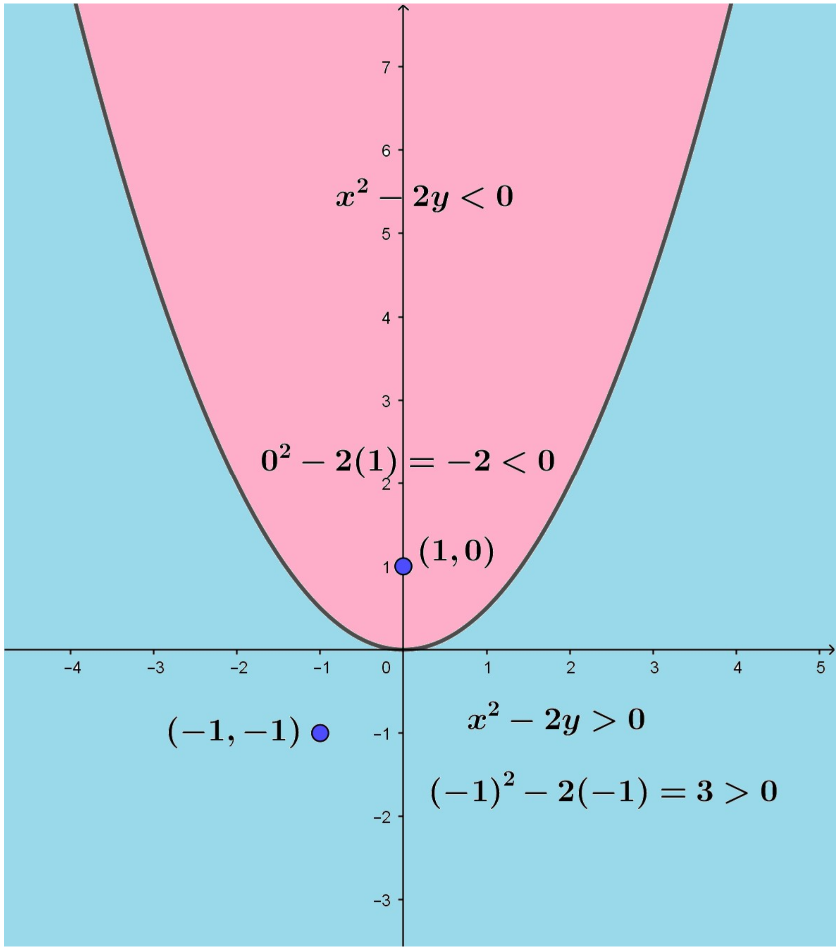
Una forma de visualizar como es el dominio es hacer una representación en el plano xy de los puntos (x, y) que cumplen la condición anterior. Pero observemos que si tomamos

$$x^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}$$

La gráfica de la igualdad anterior es una parábola que abre hacia arriba. Esa parábola divide al plano en dos regiones, los puntos que están dentro de la parábola y los que están fuera. Para saber cual región es la que corresponde al dominio lo que hacemos es tomar un punto en cada región y verificar en cual se cumple la condición $x^2 - 2y > 0$.

Vemos que la región azul es la que corresponde al dominio de la función, es decir, los puntos que están fuera de la parábola pero que no están sobre la parábola.
Para describirlo podemos usar la notación conjuntista:

$$Dom\ f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2y > 0\}$$



A continuación se van a presentar algunos ejemplos del libro de Cálculo de Varias Variables de James Stewart, sección 14.1

EJEMPLO 1 Para las funciones siguientes, evalúe $f(3, 2)$ y determine y grafique el dominio.

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

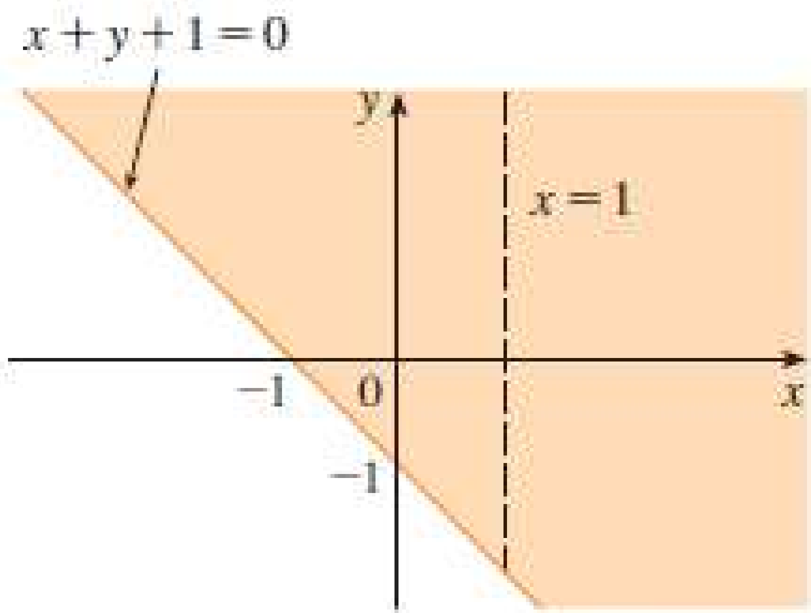
SOLUCIÓN

a)
$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

La expresión para f tiene sentido si el denominador no es cero y la cantidad dentro del signo de raíz cuadrada es no negativa. Entonces, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0,\ x \neq 1\}$$

La desigualdad $x + y + 1 \geqslant 0$, o $y \geqslant -x - 1$, describe los puntos que quedan en o por arriba de la recta $y = -x - 1$, mientras que $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ tienen que ser excluidos del dominio



$$\text{Dominio de } f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

La recta $x + y + 1 = 0$ divide al plano en dos regiones, vemos que si tomamos el punto $(0{,}0)$ y los sustituimos en la ecuación se cumple que

$$0 + 0 + 1 > 0$$

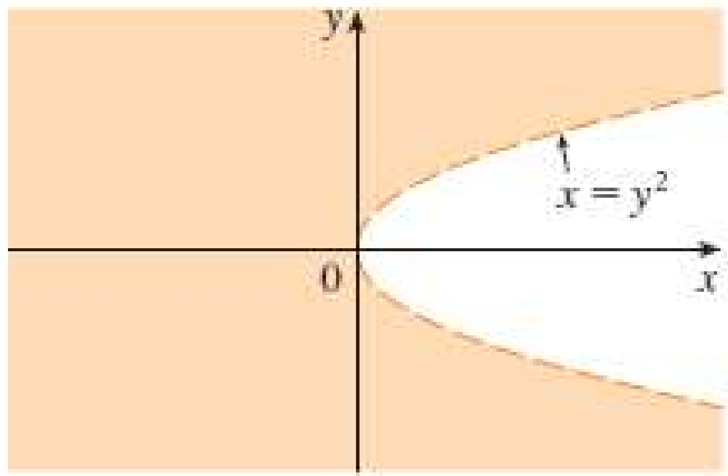
Eso nos dice que para los puntos (x, y) por encima de la recta se tiene que $x + y + 1 > 0$. Si los tomamos por debajo de la recta, ejemplo $(-1, -1)$ obtenemos

$$-1 - 1 + 1 = -1 < 0$$

La línea punteada $x = 1$ nos indica que no se pueden considerar esos puntos porque el denominador de f se hace cero.

b) $$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Puesto que $\ln(y^2 - x)$ se define sólo cuando $y^2 - x > 0$, es decir, $x < y^2$, el dominio de f es $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Éste es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$.



Dominio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

EJEMPLO 4 Determine el dominio y el rango de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN El dominio de g es

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

que es el disco con centro (0, 0) y radio 3 (véase figura 4). El rango de g es

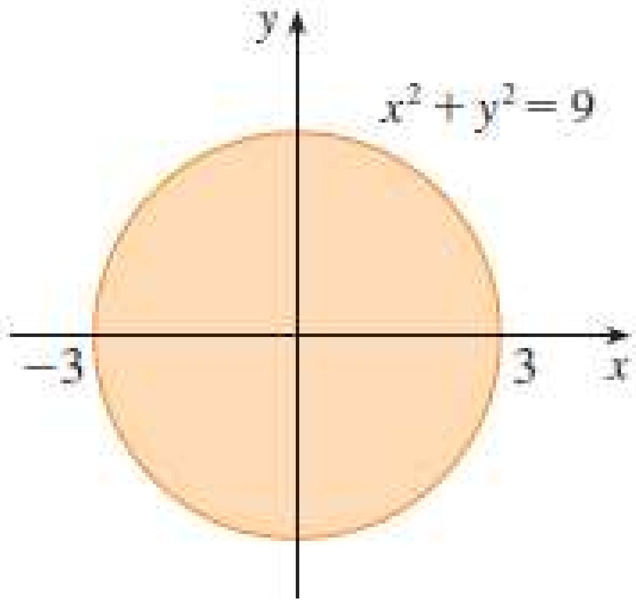
$$\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\}$$

Puesto que z es una raíz cuadrada positiva, $z \geqslant 0$. Asimismo, como $9 - x^2 - y^2 \leqslant 9$, tenemos

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

y el rango es

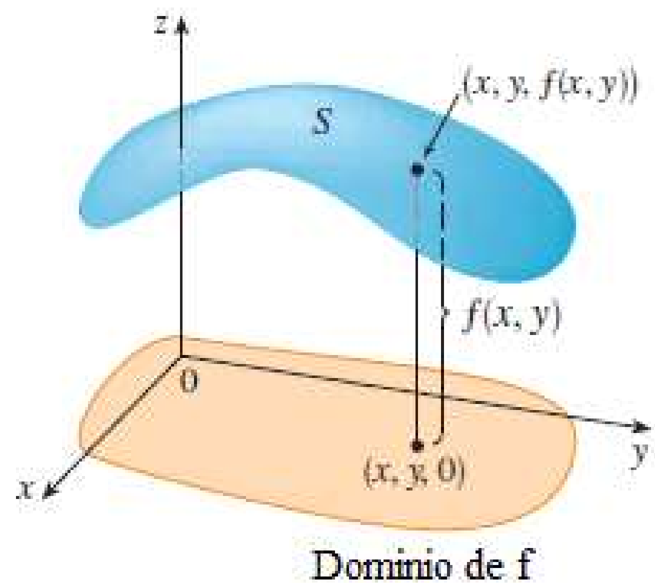
$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$



Dominio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Gráfica de una Función de dos Variables

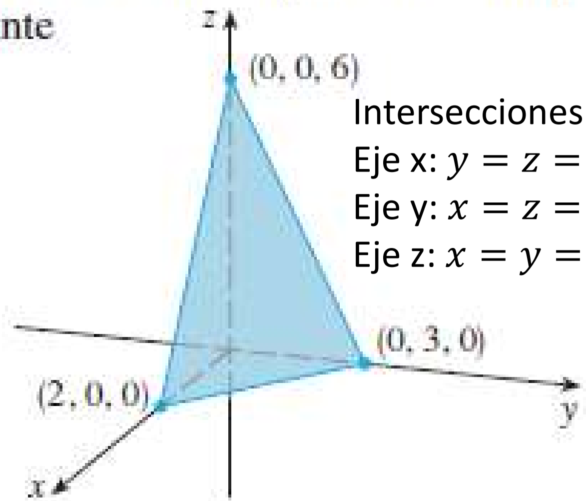
Si f es una función de dos variables entonces la gráfica de f es la superficie que representa a la ecuación $z = f(x, y)$ donde $(x, y) \in Dom\, f$, es decir, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ y $(x, y) \in Dom\, f$.



La gráfica de f está por encima del dominio de f en el plano xy

EJEMPLO 5 Grafique la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUCIÓN La gráfica de f tiene la ecuación $z = 6 - 3x - 2y$, o $3x + 2y + z = 6$, que representa un plano. Para graficar el plano, primero obtenemos las intersecciones con los ejes. Hacemos $y = z = 0$ en la ecuación y obtenemos $x = 2$ como la intersección con el eje x. Con el mismo procedimiento obtenemos la intersección con el eje y, que es 3, y la del eje z, que es 6. Ya con esto puede trazar la parte de la gráfica que está en el primer octante



Intersecciones con los Ejes Coordenados

Eje x: $y = z = 0 \Rightarrow 3x + 2(0) + 0 = 6 \Rightarrow x = 6/3 = 2$

Eje y: $x = z = 0 \Rightarrow 3(0) + 2y + 0 = 6 \Rightarrow y = 6/2 = 3$

Eje z: $x = y = 0 \Rightarrow 3x + 2(0) + z = 6 \Rightarrow z = 6$

La función del ejemplo 5 es un caso especial de la función

$$f(x, y) = ax + by + c$$

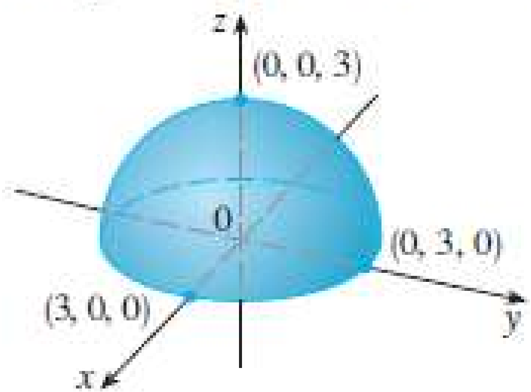
que se llama **función lineal**. La gráfica de dicha función tiene por ecuación

$$z = ax + by + c \qquad \text{o} \qquad ax + by - z + c = 0$$

por lo que es un plano. Así como las funciones lineales de una sola variable son importantes en el cálculo de una variable, veremos que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel fundamental en el cálculo de varias variables.

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN La ecuación de la gráfica es $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtiene $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, es decir $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que se reconoce como la ecuación de la esfera con centro en el origen y radio 3. Pero como $z \geqslant 0$, la gráfica de g es sólo la parte superior de esta esfera



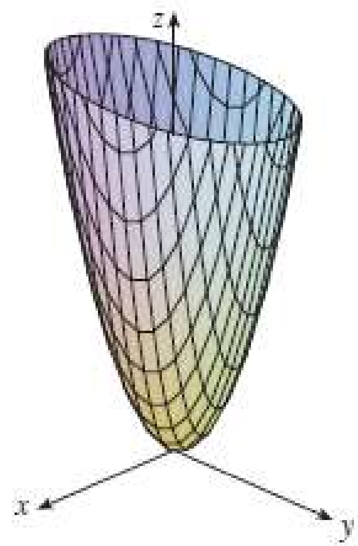
Gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Una esfera completa no puede estar representada por una función porque habrían dos puntos en el dominio con dos imágenes, es lo mismo que pasa con los círculos en el plano. Por lo que sólo se puede representar una semiesfera. Con la función del ejemplo anterior vimos que la semiesfera superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ se representa por $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, entonces la semiesfera inferior está representada por g $(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$

V EJEMPLO 8 Determine el dominio y el rango y grafique $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Observe que $h(x, y)$ está definida por todos los pares ordenados posibles de números reales (x, y), de modo que el dominio es $\mathbb{R}^2$, todo el plano xy. El rango de h es el conjunto $[0, \infty)$ de todos los números reales no negativos. [Observe que $x^2 \geqslant 0$ y $y^2 \geqslant 0$, de modo que $h(x, y) \geqslant 0$ para toda x y y.]

La gráfica de h tiene la ecuación $z = 4x^2 + y^2$, la cual es un paraboloide elíptico

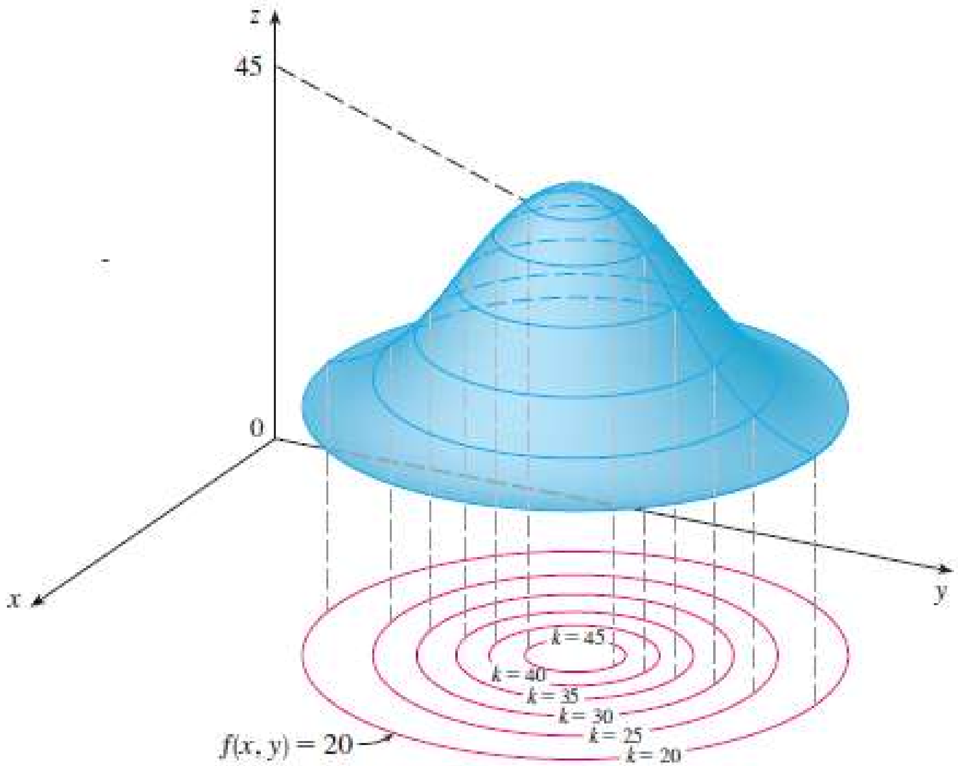


Curvas de Nivel

Definición Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k. En otras palabras, señala dónde tiene una altura k la gráfica de f.

Podemos ver en la figura 11 la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel $f(x, y) = k$ son justamente las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy. Entonces, si dibujamos las curvas de nivel de una función y las representamos como elevaciones de la superficie a la altura indicada, entonces podemos formar mentalmente una imagen de la gráfica.

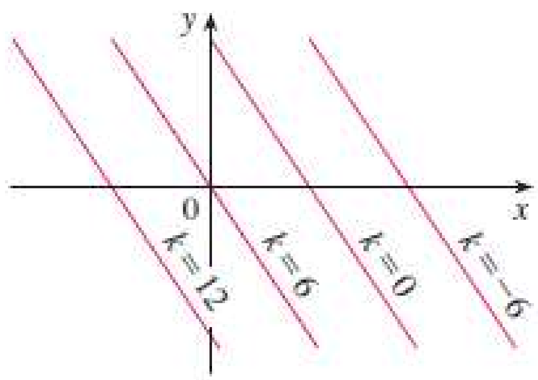


EJEMPLO 10 Grafique las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para los valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$6 - 3x - 2y = k \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Ésta es una familia de rectas cuya pendiente es $-\frac{3}{2}$. Las cuatro curvas de nivel particulares con $k = -6, 0, 6$ y 12 son $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$ y $3x + 2y + 6 = 0$.



Mapa de contorno

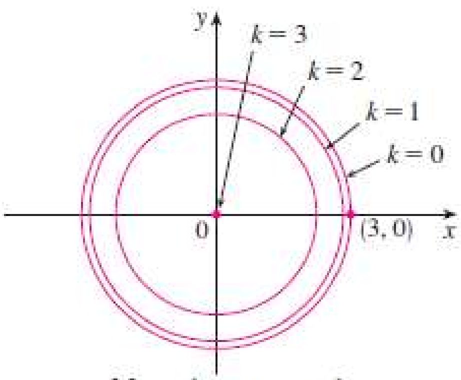
V EJEMPLO 11 Grafique las curvas de nivel de la función

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{o bien} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Ésta es una familia de circunferencias concéntricas con centro (0, 0) y radio $\sqrt{9 - k^2}$.
Los casos $k = 0, 1, 2, 3$



Mapa de contorno de
$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

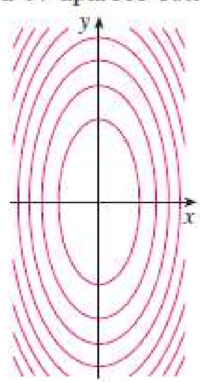
Cuando $k = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 - 0^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$ Circunferencia radio 3
Cuando $k = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 - 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 8$ Circunferencia radio $\sqrt{8}$
Cuando $k = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 - 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$ Circunferencia radio $\sqrt{5}$
Cuando $k = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 - 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$ $Punto$ $(0,0)$

EJEMPLO 12 Grafique algunas curvas de nivel de la función $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

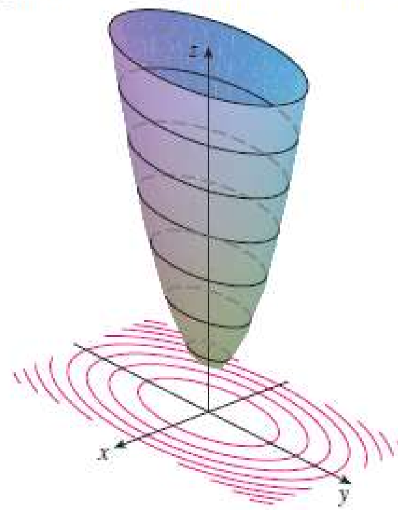
SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

la cual, para $k > 1$, describe una familia de elipses con semiejes $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ y $\sqrt{k-1}$. En la figura 17a) se ilustra un mapa de contorno de h dibujado mediante una computadora. La figura 17b) muestra estas curvas de nivel elevadas para obtener la gráfica de h (un paraboloide elíptico), donde se transforman en trazas horizontales. En la figura 17 aparece cómo se ve la gráfica de h a partir de las curvas de nivel.



a) Mapa de contorno



b) Trazas horizontales, son curvas de nivel elevadas

Funciones de tres o más variables

Una **función de tres variables,** f, es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un único número real denotado por $f(x, y, z)$. Por ejemplo, la temperatura T en un punto sobre la superficie de la Tierra depende de la longitud x, latitud y del punto y del tiempo t, de modo que puede escribir $T = f(x, y, t)$.

EJEMPLO 14 Encuentre el dominio de f si

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUCIÓN La expresión para $f(x, y, z)$ está definida siempre que $z - y > 0$, de modo que el dominio de f es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

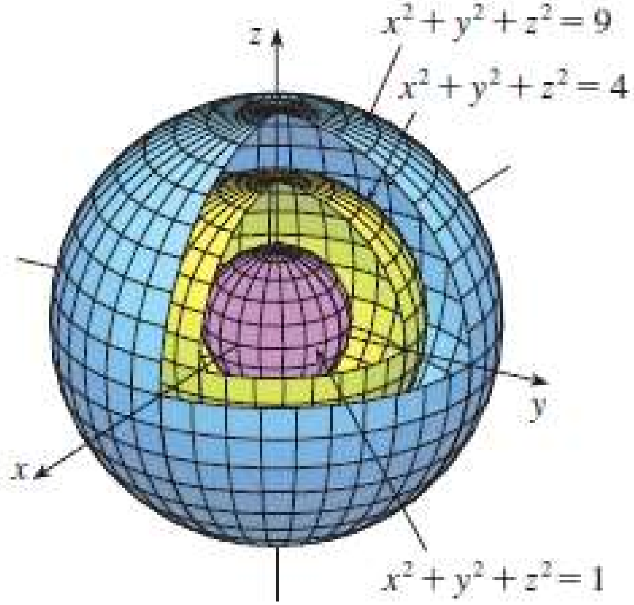
Es un **semiespacio** que consiste en todos los puntos que se ubican por arriba del plano $z = y$.

Es muy difícil imaginar una función f de tres variables mediante su gráfica, ya que se localizaría en un espacio de cuatro dimensiones. No obstante, es posible saber más de f examinando sus **superficies de nivel**, las cuales son las superficies cuyas ecuaciones son $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante. Si el punto (x, y, z) se desplaza por una superficie de nivel, el valor de $f(x, y, z)$ sigue estando fijo.

EJEMPLO 15 Determine las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUCIÓN Las superficies de nivel son $x^2 + y^2 + z^2 = k$, donde $k \geqslant 0$. Esto forma una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$ Así, cuando (x, y, z) varía sobre cualquier esfera con centro en O, el valor de $f(x, y, z)$ se conserva fijo.



Funciones de n variables

También se pueden considerar funciones de cualquier número de variables. Una **función de n variables** es una regla que asigna un número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a una n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales. Denotamos con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las n-adas. Por ejemplo, si una compañía utiliza n ingredientes distintos al elaborar un producto alimenticio, c_i es el costo por unidad del i-ésimo ingrediente, y si se usan x_i unidades del i-ésimo ingrediente, entonces el costo total C de los ingredientes es una función de n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{3}$$

La función f es una función de valores reales cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Algunas veces se usa una notación vectorial para escribir dichas funciones de una manera más compacta: si $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, con frecuencia se escribe $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mediante esta notación se vuelve a escribir la función definida en la ecuación 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota el producto punto de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$ en V_n.

Ejercicios Propuestos

8. Una compañía fabrica tres tipos de cajas de cartón: pequeñas, medianas y grandes. El costo para elaborar una caja pequeña es de \$2.50, para la mediana es de \$4.00 y \$4.50 para la caja grande. Los costos fijos son de \$8000.

a) Exprese el costo de elaborar x cajas pequeñas, y cajas medianas y z cajas grandes como una función de tres variables: $C = f(x, y, z)$.

b) Encuentre $f(3000, 5000, 4000)$ e interprételo.

c) ¿Cuál es el dominio de f?

9. Sea $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.

a) Evalúe $g(2, -1)$.

b) Encuentre el dominio de g.

c) Determine el rango de g.

10. Sea $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.

a) Evalúe $F(3, 1)$.

b) Determine y trace el dominio de F.

c) Determine el rango de F.

11. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.

a) Evalúe $f(1, 1, 1)$.

b) Determine y describa el dominio de f.

12. Sea $g(x, y, z) = x^3y^2z\sqrt{10 - x - y - z}$.

a) Evalúe $g(1, 2, 3)$.

b) Determine y describa el dominio de g.

13-22 Determine y grafique el dominio de la función.

13. $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

17. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

19. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

23-31 Trace la gráfica de la función.

23. $f(x, y) = 1 + y$

24. $f(x, y) = 2 - x$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = e^{-y}$

27. $f(x, y) = y^2 + 1$

28. $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2$

29. $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$

30. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

31. $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$

43-50 Dibuje un mapa de contorno de la función mostrando varias curvas de nivel.

43. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

45. $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

47. $f(x, y) = ye^x$

49. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

65-68 Describa las superficies de nivel de la función.

65. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

66. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

67. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

68. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

Nota: Para realizar las gráficas puedes apoyarte en GeoGebra para ello colocas en la línea de entrada la definición de la función, ejemplo: $f(x,y) = 1 + y$ y en vista 3D aparece la gráfica de la función. Además, definiéndola de esa forma puedes realizar operaciones con las imágenes, por ejemplo en la línea de entrada puedes colocar $f(1,2)$, $f(1,2) + 3$, etc., GeoGebra hace los cálculos correspondientes. Para representar las curvas de nivel utilizas vista gráfica.