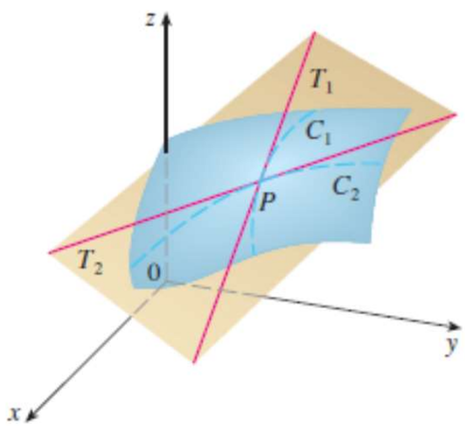
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

28 de julio del 2021

Plano tangente a una superficie

Suponga que una superficie S tiene como ecuación $z = f(x,y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre esa superficie. Sean C_1 y C_2 las curvas de intersección de los planos verticales $x = x_0$ y $y = y_0$ con la superficie S. El punto P se encuentra sobre ambas curvas. Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces el plano tangente a la superficie S en el punto P es el plano que contiene a las rectas tangentes T_1 y T_2.

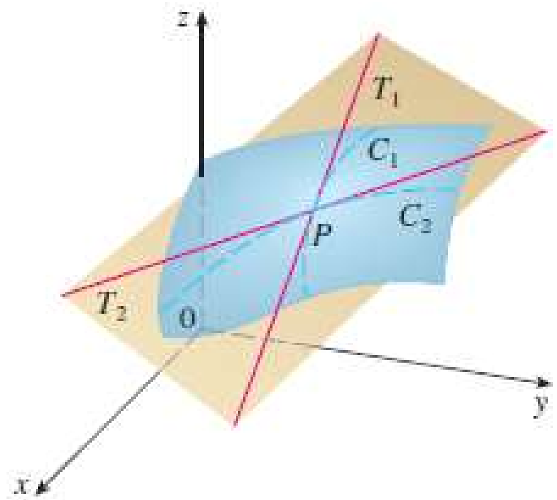


FIGURA 1
El plano tangente contiene las rectas tangentes T_1 y T_2.

El plano tangente es el que más se aproxima a la superficie S en el punto P. La ecuación del plano tangente es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

EJEMPLO 1 Calcule el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Entonces

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

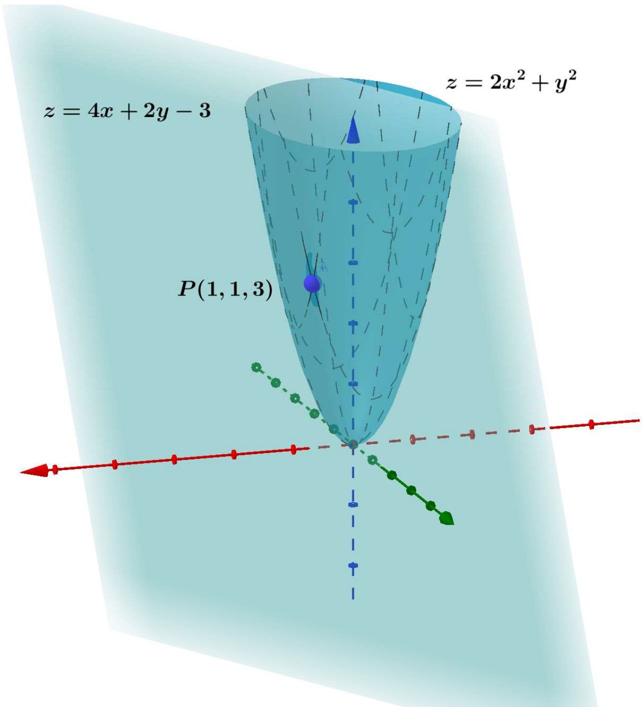
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

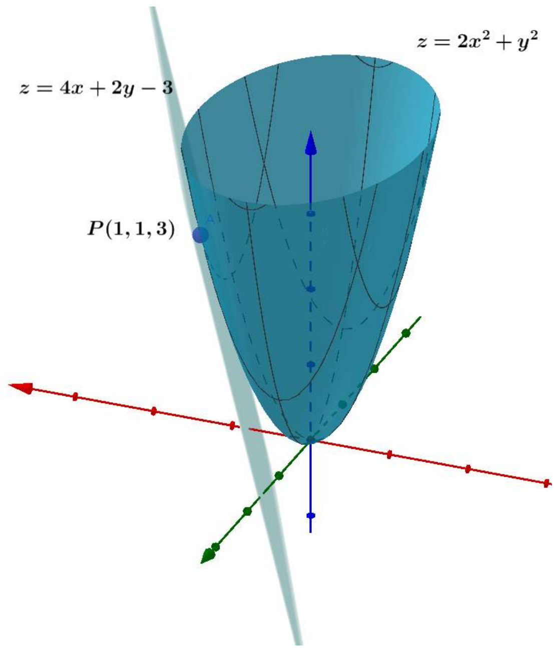
Entonces la ecuación del plano tangente en $(1, 1, 3)$

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

o bien,

$$z = 4x + 2y - 3$$





Las figuras muestran las gráficas del plano tangente y la superficie, en la gráfica de la derecha se puede observar como el plano tangente se parece bastante a la superficie en las cercanías del punto P

Aproximaciones Lineales

Sea f una función de dos variables y (a, b) en el dominio de f. De la parte anterior sabemos que una ecuación del plano a la gráfica de f en el punto $\big(a, b, f(a, b)\big)$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La aproximación lineal cuya gráfica es este plano tangente se define como:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La función L se llama **linealización de $\boldsymbol{f}$ en $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$** y

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Se llama **aproximación lineal** o **aproximación del plano tangente** de f en (a, b)

EJEMPLO 2 Linealización

Encuentre una linealización de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(4, 3)$.

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Utilizando los valores $f(4, 3) = 5$, $f_x(4, 3) = \frac{4}{5}$ y $f_y(4, 3) = \frac{3}{5}$, una linealización de f en $(4, 3)$ es

$$L(x, y) = 5 + \frac{4}{5}(x - 4) + \frac{3}{5}(y - 3).$$

La última ecuación es equivalente a $L(x, y) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$

Ya hemos definido planos tangentes para superficies $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas. ¿Qué sucede si f_x y f_y no son continuas? En la figura 4 se ilustra tal función; su ecuación es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Podemos comprobar que existen sus derivadas parciales en el origen y, de hecho, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$, pero f_x y f_y no son continuas. La aproximación lineal sería $(x, y) \approx 0$, pero $f(x, y) = \frac{1}{2}$ en todos los puntos sobre la recta $y = x$. De este modo una función de dos variables se puede comportar erráticamente aun cuando ambas derivadas parciales existan. Para evitar dicho comportamiento, se plantea la idea de una función diferenciable de dos variables.

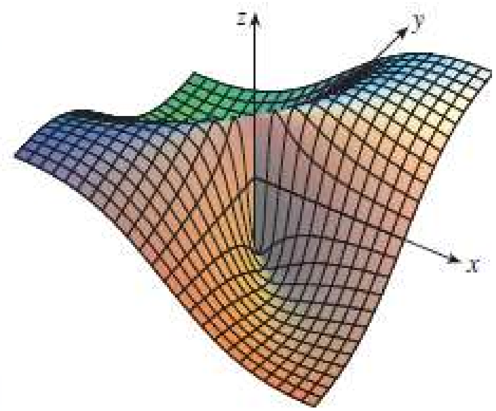


FIGURA 4

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$,
$f(0, 0) = 0$

Ahora consideremos una función de dos variables, $z = f(x, y)$, y supongamos que x cambia de a a $a + \Delta x$ y que y pasa de b a $b + \Delta y$. Entonces el **incremento** correspondiente de z es

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Por consiguiente, el incremento Δz representa el cambio del valor de f cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Se define la diferenciabilidad de una función de dos variables como sigue.

Definición Si $z = f(x, y)$, entonces f es **diferenciable** en (a, b) si Δz se puede expresar en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

EJEMPLO 3 Mostrar que una función es diferenciable

Mostrar que la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

es diferenciable en todo punto del plano.

Solución Haciendo $z = f(x, y)$, el incremento de z en un punto arbitrario (x, y) en el plano es

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad \text{Incremento de } z. \\
&= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) \\
&= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta y \\
&= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y) \\
&= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y
\end{aligned}$$

$$\boxed{f_x(x, y) = 2x}$$

$$\boxed{f_y(x, y) = 3}$$

donde $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = 0$. Como $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se sigue que f es diferenciable en todo punto en el plano.

La definición establece que una función diferenciable es una para la cual la aproximación lineal es una buena aproximación cuando (x, y) está cerca de (a, b). En otras palabras, el plano tangente se aproxima a la gráfica de f muy cerca al punto de tangencia.

Algunas veces es difícil aplicar directamente la definición para comprobar la diferenciabilidad de una función, pero el teorema siguiente proporciona una condición suficiente y práctica para la diferenciabilidad.

Teorema Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

EJEMPLO 4 Demuestre que $f(x, y) = xe^{xy}$ es diferenciable en $(1, 0)$ y determine su linealización ahí. Luego úsela para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$

$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Tanto f_x como f_y son funciones continuas, de modo que f es diferenciable según el teorema anterior. La linealización es

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y \end{aligned}$$

La aproximación lineal correspondiente es

$$xe^{xy} \approx x + y$$

de modo que $\quad f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$

Compare lo anterior con el valor real de $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$.

Diferenciales

La **diferencial** dz, también conocida como **diferencial total**, se define como

$$\boxed{dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy}$$

Algunas veces se usa la notación df en lugar de dz.

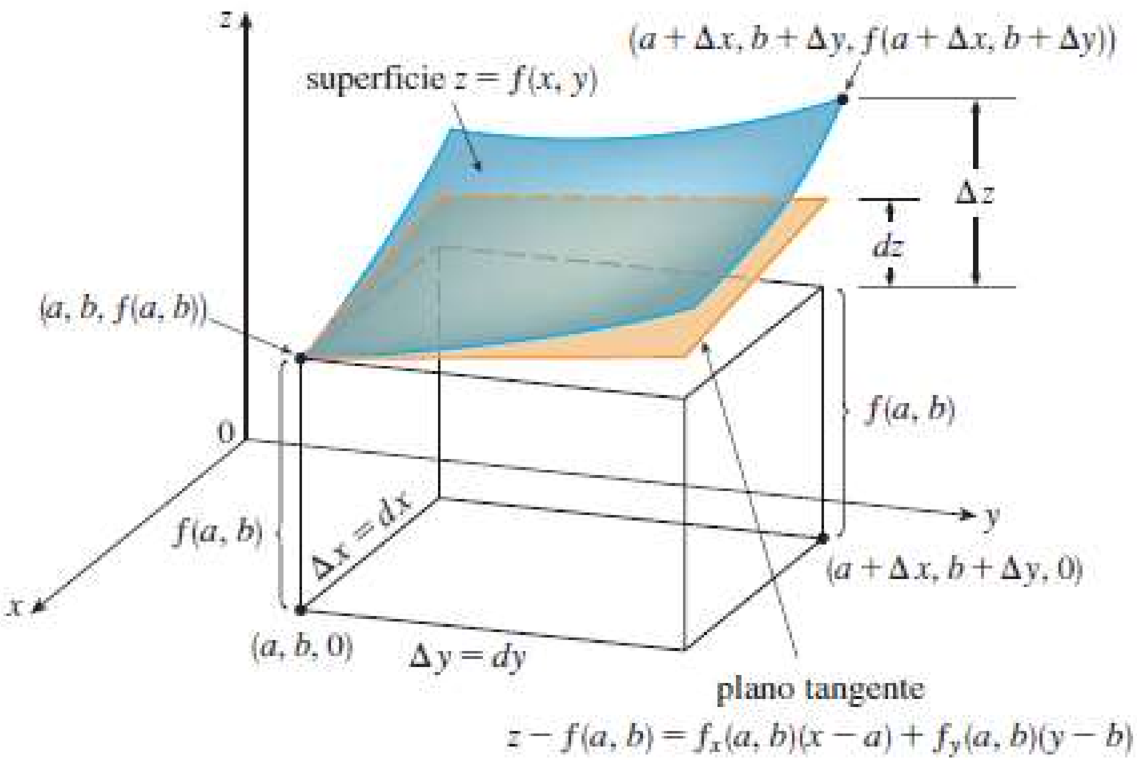
Si tomamos $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$ de la ecuación anterior, entonces la diferencial de z es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

De este modo, en la notación de diferenciales, la aproximación lineal se puede escribir como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

La figura muestra la interpretación geométrica de la diferencial dz y del incremento Δz: dz representa el cambio en altura del plano tangente, y Δz representa el cambio en la altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.



EJEMPLO 5

a) Si $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine la diferencial dz.

b) Si x cambia de 2 a 2.05 y y pasa de 3 a 2.96, compare los valores de Δz y dz.

SOLUCIÓN

a) Aplicando la definición de diferencial total

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

b) Si hacemos $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$ y $dy = \Delta y = -0.04$, obtenemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

El incremento de z es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3)\\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]\\ &= 0.6449\end{aligned}$$

Observemos que $\Delta z \approx dz$ pero dz es más fácil de calcular.

EJEMPLO 6 El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de 0.1 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el volumen calculado del cono.

SOLUCIÓN El volumen V de un cono de radio en la base r y altura h es $V = \pi r^2 h/3$. De modo que la diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi rh}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Puesto que cada error es de 0.1 cm como máximo, tenemos $|\Delta r| \leqslant 0.1$, $|\Delta h| \leqslant 0.1$. Para estimar el error más grande en el volumen, tomamos el error más grande en la medición de r y de h, entonces $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$ junto con $r = 10$, $h = 25$. Esto da

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Por lo tanto, el error máximo en el volumen calculado es de casi 20π cm$^3 \approx 63$ cm^3.

Funciones de tres o más variables

Una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ se dice que es **diferenciable** en (x, y, z) si

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

puede expresarse en la forma

$$\Delta w = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

donde ε_1, ε_2, y $\varepsilon_3 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$. Con esta definición de diferenciabilidad, también se cumple que: si f es una función de x, y y z, donde f, f_x, f_y y f_z son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.

La **aproximación lineal** para tales funciones es

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

y la linealización $L(x, y, z)$ es el segundo miembro de esta expresión. Si $w = f(x, y, z)$, entonces el **incremento** de w es

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

EJEMPLO 7 **Análisis de errores**

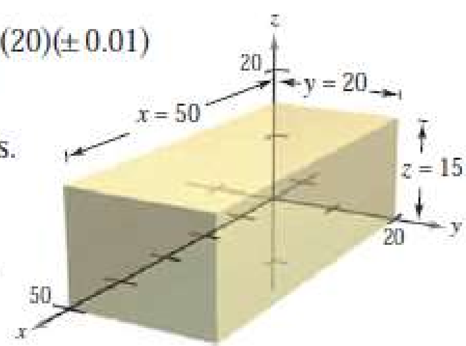
El error producido al medir cada una de las dimensiones de una caja rectangular es ± 0.1 milímetros. Las dimensiones de la caja son $x = 50$ centímetros, $y = 20$ centímetros y $z = 15$ centímetros, como se muestra en la figura. Utilizar dV para estimar el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.

Solución El volumen de la caja está dado por $V = xyz$, y por tanto

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \\ &= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz. \end{aligned}$$

Utilizando 0.1 milímetros = 0.01 centímetros, se tiene $dx = dy = dz = \pm 0.01$, y el error propagado es aproximadamente

$$\begin{aligned} dV &= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01) \\ &= 300(\pm 0.01) + 750(\pm 0.01) + 1\,000(\pm 0.01) \\ &= 2\,050(\pm 0.01) = \pm 20.5 \text{ centímetros cúbicos.} \end{aligned}$$



Volumen $= xyz$

Como el volumen medido es

$$V = (50)(20)(15) = 15\,000 \text{ centímetros cúbicos,}$$

el error relativo, $\Delta V/V$, es aproximadamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15\,000} \approx 0.14\%.$$

Como ocurre con una función de una sola variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto, también es continua en él.

TEOREMA DIFERENCIABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si una función de x y y es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en (x_0, y_0).

Hay que recordar que la existencia de f_x y f_y no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Una función que no es diferenciable

Mostrar que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$, donde f está definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-3xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

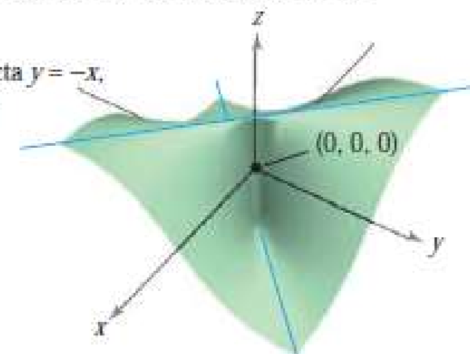
Solución Para mostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$ basta mostrar que no es continua en este punto. Para ver que f no es continua en $(0, 0)$, se observan los valores de $f(x, y)$ a lo largo de dos trayectorias diferentes que se aproximan a $(0, 0)$, como se muestra en la figura. A lo largo de la recta $y = x$, el límite es

$$\lim_{(x, x)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x)\to(0, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

mientras que a lo largo de $y = -x$ se tiene

$$\lim_{(x, -x)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, -x)\to(0, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

A lo largo de la recta $y = -x$, $f(x, y)$ se aproxima o tiende a 3/2.



A lo largo de la recta $y = x$, $f(x, y)$ se aproxima o tiende a $-3/2$.

Así, el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ no existe, y se puede concluir que f no es continua en $(0, 0)$. Por tanto, de acuerdo con el teorema anterior, f no es diferenciable en $(0, 0)$. Por otro lado, de acuerdo con la definición de las derivadas parciales f_x y f_y, se tiene

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

y

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Por tanto, las derivadas parciales en $(0, 0)$ existen.

Ejercicios Propuestos

1-6 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto específico.

1. $z = 3y^2 - 2x^2 + x, \quad (2, -1, -3)$

3. $z = \sqrt{xy}, \quad (1, 1, 1)$

5. $z = x \operatorname{sen}(x + y), \quad (-1, 1, 0)$

11-16 Explique por qué la función es diferenciable en el punto dado. Luego determine la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.

11. $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5), \quad (2, 3)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}, \quad (2, 1)$

15. $f(x, y) = e^{-xy} \cos y, \quad (\pi, 0)$

17-18 Verifique la aproximación lineal en $(0, 0)$.

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$ **18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Dado que f es una función diferenciable con $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$, y $f_y(2, 5) = -1$, utilice una aproximación lineal para estimar $f(2.2, 4.9)$.

21. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $(3, 2, 6)$ y con ella aproxime el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

31. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x, y) cambia de $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$, compare los valores de Δz y dz.

33. El largo y el ancho de un rectángulo miden 30 cm y 24 cm respectivamente, con un error máximo en la medición de 0.1 cm en cada una de las dimensiones. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo.

35. Use diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada de estaño cuyo diámetro es 8 cm y altura de 12 cm si el estaño tiene 0.04 cm de espesor.

39. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si la resistencia se mide en ohms como $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ y $R_3 = 50\ \Omega$ con un posible error de 0.5% en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

40. Cuatro números positivos, cada uno menor de 50, se redondean a la primera cifra decimal, y luego se multiplican todos. Mediante diferenciales, estime el error máximo posible en el producto calculado que podría resultar por el redondeo.

43-44 Demuestre que la función es diferenciable determinando los valores de ε_1 y ε_2 que satisfacen la definición de la lámina 9, ver ejemplo 3

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **44.** $f(x, y) = xy - 5y^2$

46. a) La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se grafica en la figura. Demuestre que existen tanto $f_x(0, 0)$ como $f_y(0, 0)$, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$.

b) Explique por qué f_x y f_y no son continuas en $(0, 0)$.

Sugerencia: ver ejemplo 8