Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Movimiento en el espacio

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

23 de julio del 2021

Velocidad y Aceleración

Suponga que una partícula se desplaza por el espacio de modo que su vector de posición en el tiempo t es $\mathbf{r}(t)$. Según la figura 1, note que, en el caso de valores pequeños de h, el vector

$$\boxed{1} \qquad \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

es una aproximación de la dirección de la partícula que se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t)$. Su magnitud mide el tamaño del vector de desplazamiento por unidad de tiempo. El vector $\boxed{1}$ da la velocidad promedio sobre un intervalo de longitud h y su límite es el **vector velocidad** $\mathbf{v}(t)$ en el tiempo t:

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\mathbf{v}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)}$$

Así el vector velocidad es también el vector tangente y apunta en la dirección de la recta tangente.

La **rapidez** de la partícula en el tiempo t es la magnitud del vector velocidad, es decir, $|\mathbf{v}(t)|$.

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{razón de cambio de la distancia respecto al tiempo}$$

Como en el caso del movimiento unidimensional, la **aceleración** de la partícula se define como la derivada de la velocidad:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

EJEMPLO 2 Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1 + t)e^t \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2 + t)e^t \rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1 + t)^2 e^{2t}}$$

V **EJEMPLO 3** Una partícula parte de su posición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$ con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Su aceleración es $\mathbf{a}(t) = 4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule su velocidad y su posición en el tiempo t.

SOLUCIÓN Puesto que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt \\ &= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

Para determinar el valor del vector constante $\mathbf{C}$, debemos apoyarnos en el hecho de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. La ecuación anterior da $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$, de modo que $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= (2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

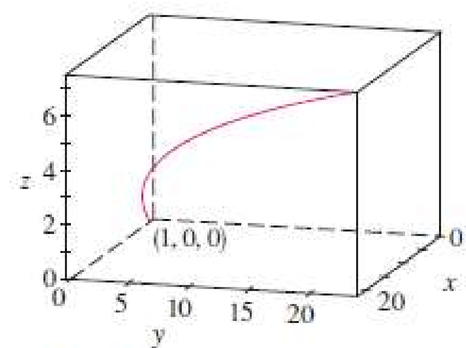

FIGURA 4

V **EJEMPLO 5** Un proyectil se dispara con un ángulo de elevación α y velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. (Véase la figura 6.) Si se supone que la resistencia del aire es insignificante y que la única fuerza externa se debe a la gravedad, determine la función posición $\mathbf{r}(t)$ del proyectil. ¿Qué valor de α maximiza el alcance (la distancia horizontal recorrida)?

SOLUCIÓN Dibuje unos ejes de tal modo que el proyectil inicie en el origen. Puesto que la fuerza de la gravedad actúa hacia abajo, tenemos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{j}$$

donde $g = |\mathbf{a}| \approx 9.8 \text{ m/s}^2$. Por consiguiente, $\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$

Como $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$, tenemos $\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{C}$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Por tanto, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$

Si integramos de nuevo obtenemos $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$

Pero $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, de modo que el vector de posición del proyectil está dado por

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0$$

La distancia horizontal d es el valor de x cuando $y = 0$. Si $y = 0$, entonces obtenemos $t = 0$, o bien, $t = (2v_0 \operatorname{sen} \alpha)/g$. El segundo valor de t da entonces

$$d = x = (v_0 \cos \alpha)\frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{v_0^2(2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Evidentemente, d muestra un valor máximo cuando sen $\alpha = 1$, es decir, $\alpha = \pi/4$.

V **EJEMPLO 6** Se lanza un proyectil con velocidad inicial de 150 m/s y ángulo de elevación de 45° desde un lugar a 10 m sobre el nivel del suelo. ¿Dónde tocará suelo el proyectil y con qué rapidez?

SOLUCIÓN Si hacemos que el origen sea el nivel del suelo, entonces la posición inicial del proyectil es (0, 10) y entonces necesitamos ajustar la ecuación 4 sumando 10 a su expresión para y. Con $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45°$, y $g = 9.8$ m/s^2, tenemos

$$x = 150\cos(\pi/4)t = 75\sqrt{2}\,t$$

$$y = 10 + 150\,\mathrm{sen}(\pi/4)t - \tfrac{1}{2}(9.8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}\,t - 4.9t^2$$

El impacto ocurre cuando $y = 0$, es decir, $4.9t^2 - 75\sqrt{2}\,t - 10 = 0$. Al resolver esta ecuación cuadrática, y usar sólo el valor positivo de t, obtenemos

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11250 + 196}}{9.8} \approx 21.74$$

Entonces $x \approx 75\sqrt{2}\,(21.74) \approx 2306$, de modo que el proyectil toca el suelo a 2306 m del punto de partida.

La velocidad del proyectil es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(75\sqrt{2} - 9.8t\right)\mathbf{j}$$

De modo que la rapidez de impacto es

$$|\mathbf{v}(21.74)| = \sqrt{\left(75\sqrt{2}\right)^2 + \left(75\sqrt{2} - 9.8 \cdot 21.74\right)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$

Ejercicios Propuestos:

17-18

a) Encuentre el vector de posición de una partícula que tiene la aceleración dada y la velocidad y posición iniciales especificadas.

b) Mediante una computadora, grafique la trayectoria de la partícula.

17. $\mathbf{a}(t) = 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$, $\quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. La función de posición de una partícula está definida por $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$. ¿Cuándo la rapidez es mínima?

20. ¿Cuánta fuerza se requiere para que la partícula de masa m tenga la función de posición $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$?

21. Una fuerza de magnitud de 20 N actúa en forma directa hacia arriba del plano xy sobre un objeto con masa de 4 kg. El objeto parte del origen con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Determine la función de posición y su rapidez en el tiempo t.

23. Se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 200 m/s y ángulo de elevación 60°. Encuentre a) el alcance del proyectil, b) la altura máxima alcanzada y c) la rapidez en el impacto.

25. Se arroja una pelota con un ángulo de 45° respecto al suelo. Si la pelota aterriza a 90 m de distancia, ¿cuál es la rapidez inicial de la pelota?

26. Se dispara una pistola con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuál es la velocidad inicial del arma si la altura máxima del proyectil es de 500 m?

27. Un arma tiene una velocidad inicial de 150 m/s. Determine dos ángulos de elevación que se puedan aplicar para alcanzar un blanco a 800 m de distancia.