Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Producto Punto

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

15 de julio del 2021

Definición:

Sean $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ dos vectores en el espacio, definimos el producto punto o escalar como sigue:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

Ejemplo si tenemos los vectores $\vec{a} = \langle -1,4,3 \rangle$ y $\vec{b} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$ entonces $\vec{b} = \langle 3,0,2 \rangle$ y por la definición del producto obtenemos que

$$\vec{a}.\vec{b} = \langle -1,4,3 \rangle.\langle 3,0,2 \rangle = (-1)(3) + 4(0) + 3(2) = -3 + 0 + 6 = 3$$

Notemos que el resultado del producto escalar de dos vectores es un número y no un vector.

Propiedades del Producto Escalar

Sean $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores, α y β dos números reales, entonces se cumple que:

1. $\vec{a}.\vec{a} = \|a\|^2$
2. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
3. $\overrightarrow{a.}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
4. $(\alpha\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.\left(\alpha\vec{b}\right) = \alpha(\vec{a}.\vec{b})$

Demostración de las propiedades 1 y 4:

Consideremos $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces

- $\vec{a}.\vec{a} = a_1.a_1 + a_2.a_2 + a_3.a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = \|\vec{a}\|^2$

- $(\alpha\vec{a}).\vec{b} = \langle \alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3 \rangle . \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \alpha a_3 b_3 = a_1(\alpha b_1) + a_2(\alpha b_2) + a_3(\alpha b_3) = \vec{a}\left(\alpha\vec{b}\right)$

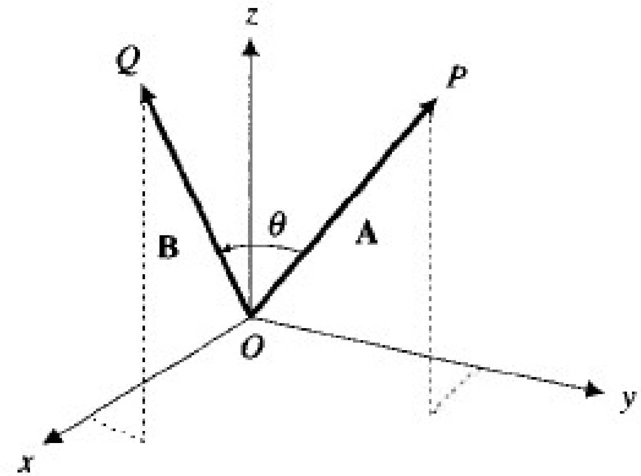
- $(\alpha\vec{a}).\vec{b} = \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \alpha a_3 b_3 = \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \alpha(\vec{a}.\vec{b})$

Ángulos entre dos vectores

Sean **A** y **B** dos vectores diferentes del vector cero.

(i) Si **A** no es un múltiplo escalar de **B** y si $\overrightarrow{OP}$ es la representación de posición de **A** y $\overrightarrow{OQ}$ es la representación de posición de **B**, entonces el **ángulo entre los vectores** **A** y **B** es el ángulo de medida positiva entre $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ e interior al triángulo determinado por O, P y Q.

(ii) Si $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$, donde c es un escalar, entonces si $c > 0$, el ángulo entre los vectores mide 0 radianes; y si $c < 0$, entonces el ángulo entre los vectores mide π radianes.



Interpretación Geométrica del Producto Punto

Si θ es el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\| \cos\theta$$

Se tiene entonces que si $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$ entonces

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}$$

Ejemplo: Determine el ángulo entre los vectores $\vec{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\vec{b} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

Tenemos que $\vec{a} = \langle 3, -4, 1\rangle$ y $\vec{b} = \langle -1, 2, 0\rangle$ hallamos:

- $\vec{a}.\vec{b} = 3(-1) + (-4)2 + 1(0) = -3 - 8 + 0 = -11$
- $\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
- $\|\vec{b}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

Finalmente:

$$\cos\theta = \frac{-11}{\sqrt{26}\sqrt{5}} = -\frac{11}{\sqrt{130}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right) \approx 2{,}87\, rad \quad (164{,}74°)$$

Vectores Ortogonales

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales o perpendiculares si el ángulo entre ellos es $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por lo que vimos anteriormente, se tiene que

$$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \Leftrightarrow 0 = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

Por lo que podemos decir que :

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $\vec{a}.\vec{b} = 0$

Ejemplo: Demostrar que los vectores $\vec{a} = \langle -1,1,1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 5,2,3 \rangle$ son ortogonales. Hallar el valor de p para que el vector $\vec{v} = \langle p, 2,1 \rangle$ sea ortogonal al vector $\vec{a}$.

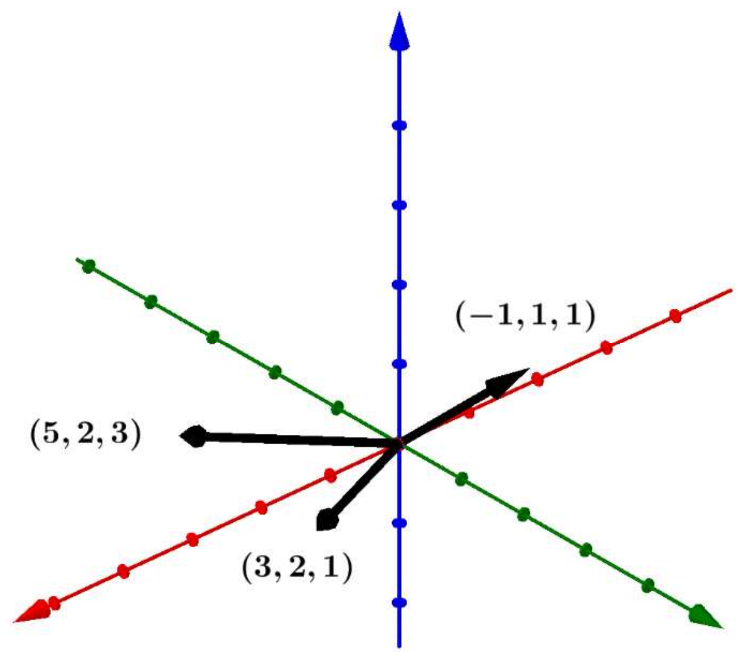
Calculamos

$$\vec{a}.\vec{b} = (-1).(5) + 1(2) + 1(3) = 0$$

Por lo visto anteriormente concluimos que los vectores son ortogonales. Ahora vamos a calcular p para que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ sean ortogonales. Se debe cumplir que

$$\vec{a}.\vec{v} = 0 \Rightarrow \langle -1,1,1 \rangle.\langle p, 2,1 \rangle = 0 \Rightarrow -p + 2 + 1 = 0 \Rightarrow p = 3$$

De allí que $p = 3$ para que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ sean ortogonales.


(−1, 1, 1)
(5, 2, 3)
(3, 2, 1)

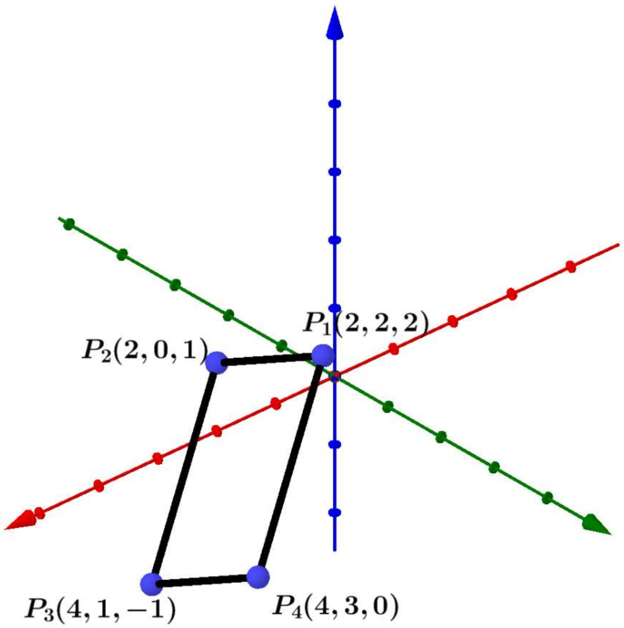
Ejemplo: Sean los puntos $P_1(2,2,2), P_2(2,0,1), P_3(4,1,-1)$ y $P_4(4,3,0)$. Determinar usando vectores que los puntos son los vértices de un rectángulo

Consideremos los vectores:

- $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \langle 2-2, 0-2, 1-2\rangle = \langle 0,-2,-1\rangle$
- $\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_4} = \langle 4-2, 3-2, 0-2\rangle = \langle 2,1,-2\rangle$
- $\vec{c} = \overrightarrow{P_2P_3} = \langle 4-2, 1-0, -1-1\rangle = \langle 2,1,-2\rangle$
- $\vec{d} = \overrightarrow{P_3P_4} = \langle 4-4, 3-1, 0+1\rangle = \langle 0,2,1\rangle$

Entonces

$$\vec{a}.\vec{b} = 0.2 - 2.1 + 1.2 = 0$$
$$\vec{a}.\vec{c} = 0.2 - 2.1 + 1.2 = 0$$
$$\vec{c}.\vec{d} = 2.0 + 1.2 - 2.1 = 0$$
$$\vec{c}.\vec{d} = 2.0 + 1.2 - 2.1 = 0$$

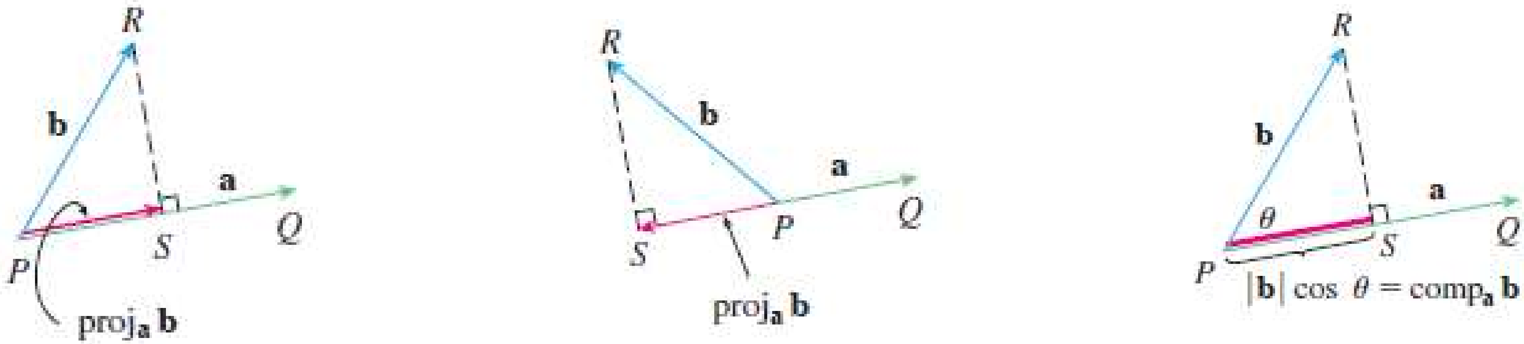


Vemos que los vectores son ortogonales y por lo tanto los puntos dados forman un rectángulo.

Proyecciones

Proyección escalar de **b** sobre **a**: $\quad \operatorname{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$

Proyección vectorial de **b** sobre **a**: $\quad \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right) \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\, \mathbf{a}$



Observe que la proyección vectorial es la proyección escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección de **a**.

V EJEMPLO 6 Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 2 \rangle$ sobre $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1 \rangle$.

SOLUCIÓN Puesto que $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, la proyección escalar de **b** sobre **a** es

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

La proyección vectorial es esta proyección escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección de **a**:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}} \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{14}\mathbf{a} = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14} \right\rangle$$

<u>Ejemplo:</u> Si $\vec{a} = \langle 3,0,-1\rangle$ encuentre un vector $\vec{b}$ tal que $comp_{\vec{a}}\vec{b} = 2$

$\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ tal que:

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|a\|} = 2 \Rightarrow \frac{3b_1+0-b_3}{\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{3b_1-b_3}{\sqrt{10}} = 2 \rightarrow 3b_1-b_3 = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{2\sqrt{10}+b_3}{3}$$

Si tomamos $\vec{b} = \langle \frac{2\sqrt{10}}{3}, 0, 0\rangle$ tenemos:

$$comp_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|} = \frac{2\sqrt{10}+0+0}{\sqrt{10}} = \boxed{2}$$

Existen infinitos de tales vectores. aquellos de la forma $\langle \frac{2\sqrt{10}+s}{3}, t, s\rangle$

Ejercicios propuestos: Tomados del libro de Cálculo de Varias variables de James Stewart

12.3 Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son significativas? ¿Cuáles carecen de sentido? Explique.

a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$

f) $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

2-10 Encuentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

7. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

8. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

9. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 5$, el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $2\pi/3$

10. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$, el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $45°$

25. Use vectores para decidir si el triángulo con vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ y $R(6, -2, -5)$ es rectángulo.

26. Encuentre los valores de x tales que el ángulo entre los vectores $\langle 2, 1, -1 \rangle$ y $\langle 1, x, 0 \rangle$ es de $45°$.

27. Encuentre un vector unitario que es ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

28. Encuentre dos vectores unitarios que forman un ángulo de $60°$ con $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

39-44 Encuentre las proyecciones escalar y vectorial de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$.

42. $\mathbf{a} = \langle -2, 3, -6 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 5, -1, 4 \rangle$

43. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

44. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$