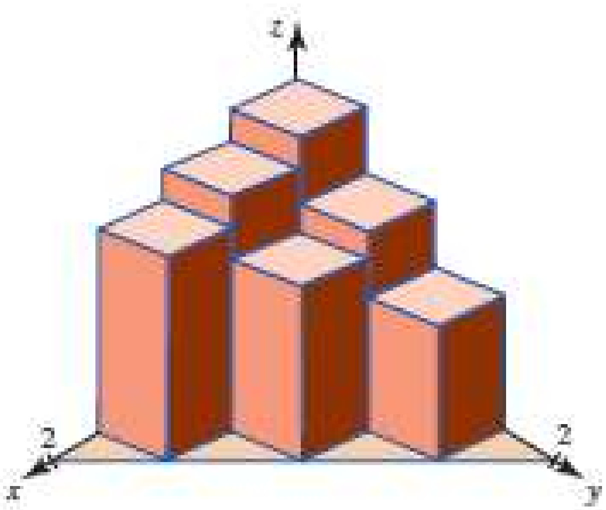
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Centro de Masas y Momentos de Inercia



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

11 de agosto del 2021

Masa de una lámina de densidad variable

Las integrales dobles se pueden usar para calcular la masa de una lámina plana que está definida por una región R y donde cada punto de $(x, y) \in R$ tiene una densidad variable $\rho(x, y)$.

DEFINICIÓN DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Si ρ es una función de densidad continua sobre la lámina que corresponde a una región plana R, entonces la masa m de la lámina está dada por

$$m = \int_R\int \rho(x, y)\, dA. \qquad \text{Densidad variable.}$$

La densidad se expresa como masa por unidad de área de superficie.

EJEMPLO 1 Hallar la masa de una lámina plana

Hallar la masa de la lámina triangular con vértices (0, 0), (0, 3) y (2, 3), dado que la densidad en (x, y) es $\rho(x, y) = 2x + y$.

Solución Como se muestra en la figura 14.35, la región R tiene como fronteras $x = 0$, $y = 3$ y $y = 3x/2$ (o $x = 2y/3$). Por consiguiente, la masa de la lámina es

$$
\begin{aligned}
m = \int_R\int (2x + y)\, dA &= \int_0^3 \int_0^{2y/3} (2x + y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 \Big[x^2 + xy\Big]_0^{2y/3} dy \\
&= \frac{10}{9}\int_0^3 y^2\, dy \\
&= \frac{10}{9}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 \\
&= 10.
\end{aligned}
$$

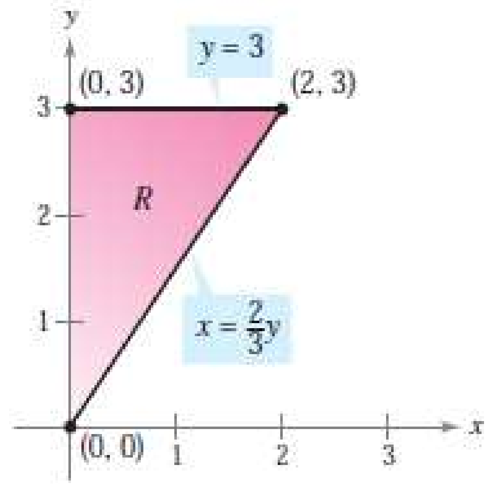


Lámina de densidad variable
$\rho(x, y) = 2x + y$

EJEMPLO 2 Hallar la masa empleando coordenadas polares

Hallar la masa de la lámina correspondiente a la porción en el primer cuadrante del círculo

$$x^2 + y^2 = 4$$

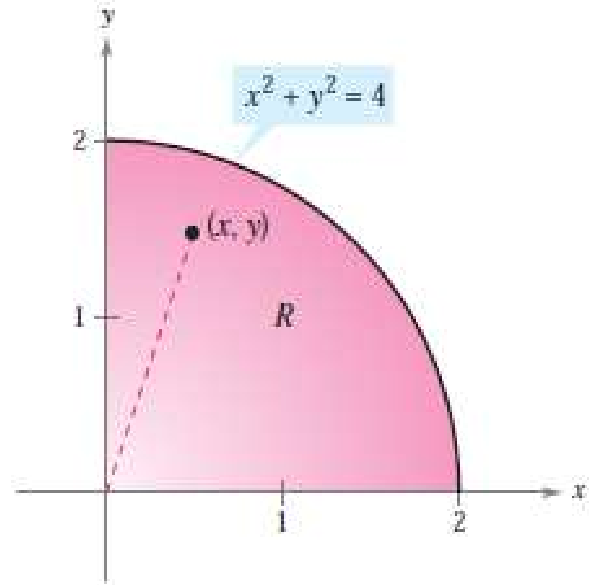
donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre el punto y el origen, como se muestra en la figura 14.36.

Solución En todo punto (x, y), la densidad de la lámina es

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= k\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\\ &= k\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Como $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$, la masa está dada por

$$\begin{aligned}m &= \int_R\!\!\int k\sqrt{x^2 + y^2}\, dA\\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx.\end{aligned}$$



Densidad en (x, y): $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

Para simplificar la integración, se puede convertir a coordenadas polares, utilizando los límites o cotas $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq r \leq 2$. Por tanto, la masa es

$$
\begin{aligned}
m = \int_R\int k\sqrt{x^2 + y^2}\, dA &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 k\sqrt{r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 kr^2\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{kr^3}{3}\Big]_0^2\, d\theta \\
&= \frac{8k}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{8k}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{4\pi k}{3}.
\end{aligned}
$$

Momentos y centro de masa de una lámina plana

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Sea ρ una función de densidad continua sobre la lámina plana R. Los **momentos de masa** con respecto a los ejes x y y son

$$M_x = \int_R\int y\rho(x, y)\, dA \quad \text{y} \quad M_y = \int_R\int x\rho(x, y)\, dA.$$

Si m es la masa de la lámina, entonces el **centro de masa** es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right).$$

Si R representa una región plana simple en lugar de una lámina, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama el **centroide** de la región.

En algunas láminas planas con densidad constante ρ, se puede determinar el centro de masa (o una de sus coordenadas) utilizando la simetría en lugar de usar integración. Por ejemplo, considerar las láminas de densidad constante mostradas en la figura 14.38. Utilizando la simetría, se puede ver que $\bar{y} = 0$ en la primera lámina y $\bar{x} = 0$ en la segunda lámina.

$R: 0 \leq x \leq 1$

$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

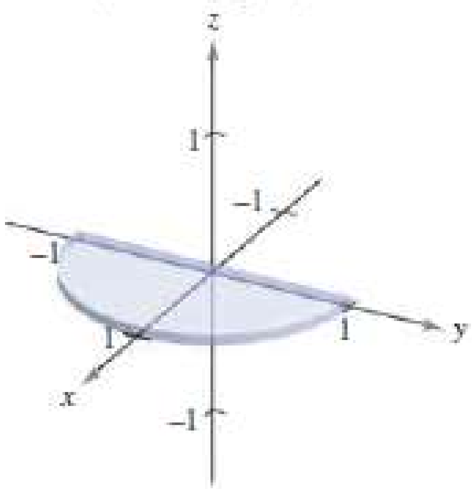


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje x

Figura 14.38

$R: -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

$0 \leq y \leq 1$

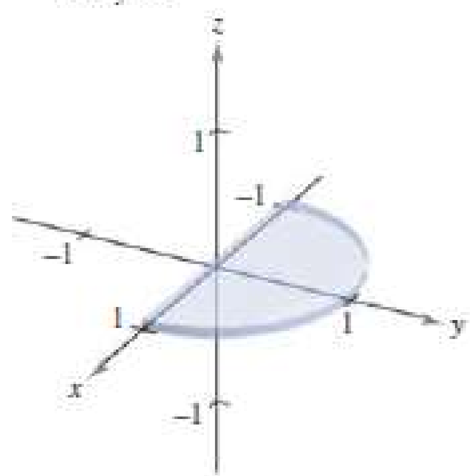


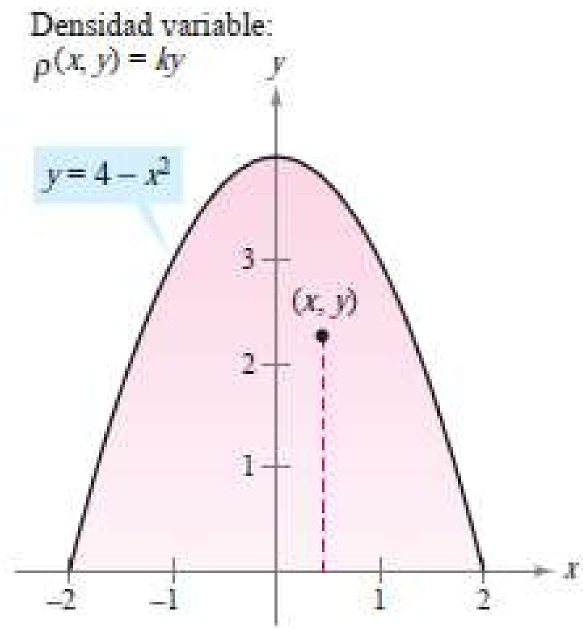
Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje y

EJEMPLO 3 Hallar el centro de masa

Hallar el centro de masa de la lámina que corresponde a la región parabólica

$$0 \leq y \leq 4 - x^2 \qquad \text{Región parabólica.}$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre (x, y) y el eje x, como se muestra en la figura 14.39.



Región parabólica de densidad variable
Figura 14.39

Solución Como la lámina es simétrica con respecto al eje y y

$$\rho(x, y) = ky$$

el centro de masa está en el eje y. Así, $\overline{x} = 0$. Para hallar $\overline{y}$, primero calcular la masa de la lámina.

$$\begin{aligned}
\text{Masa} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} ky\,dy\,dx &= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2} y^2\Big]_{0}^{4-x^2} dx \\
&= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\,dx \\
&= \frac{k}{2}\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} \\
&= k\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{256k}{15}
\end{aligned}$$

Después se halla el momento con respecto al eje x.

$$M_x = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} (y)(ky)\,dy\,dx = \frac{k}{3}\int_{-2}^{2} y^3\Big]_0^{4-x^2}\,dx$$

$$= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2} (64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6)\,dx$$

$$= \frac{k}{3}\left[64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{4\,096k}{105}$$

Así,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4\,096k/105}{256k/15} = \frac{16}{7}$$

y el centro de masa es $\left(0, \frac{16}{7}\right)$.

Ahora se introducirá otro tipo de momento, el **segundo momento** o **momento de inercia** de una lámina respecto de una recta. Del mismo modo que la masa es una medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento rectilíneo, el momento de inercia respecto de una recta es una *medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento de rotación*. Por ejemplo, si una partícula de masa m está a una distancia d de una recta fija, su momento de inercia respecto de la recta se define como

$$I = md^2 = (\text{masa})(\text{distancia})^2.$$

Igual que ocurre con los momentos de masa, se puede generalizar este concepto para obtener los momentos de inercia de una lámina de densidad variable respecto de los ejes x y y. Estos segundos momentos se denotan por I_x e I_y, y en cada caso el momento es el producto de una masa por el cuadrado de una distancia.

$$I_x = \int_R\int \underbrace{(y^2)}_{\substack{\text{Cuadrado de}\\ \text{la distancia}\\ \text{al eje } x}} \underbrace{\rho(x, y)\, dA}_{\text{Masa}} \qquad I_y = \int_R\int \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{Cuadrado de}\\ \text{la distancia}\\ \text{al eje } y}} \underbrace{\rho(x, y)\, dA}_{\text{Masa}}$$

A la suma de los momentos I_x e I_y se le llama el **momento polar de inercia** y se denota por I_0.

EJEMPLO 4 Hallar el momento de inercia

Hallar el momento de inercia respecto del eje x de la lámina del ejemplo 3.

Solución De acuerdo con la definición de momento de inercia, se tiene

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} y^2(ky)\,dy\,dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} y^4\Big]_0^{4-x^2}\,dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} (256 - 256x^2 + 96x^4 - 16x^6 + x^8)\,dx \\
&= \frac{k}{4}\left[256x - \frac{256x^3}{3} + \frac{96x^5}{5} - \frac{16x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{32\,768k}{315}.
\end{aligned}
$$

El momento de inercia I de una lámina en rotación puede utilizarse para medir su energía cinética. Por ejemplo, consideremos una lámina plana que gira en torno a una recta con una **velocidad angular** de ω radianes por segundo, como se muestra en la figura 14.41. La energía cinética E de la lámina en rotación es

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2.$$ Energía cinética del movimiento giratorio.

Por otro lado, la energía cinética E de una masa m que se mueve en línea recta a una velocidad v es

$$E = \frac{1}{2} mv^2.$$ Energía cinética del movimiento rectilíneo.

Por lo tanto, la energía cinética de una masa que se mueve en línea recta es proporcional a su masa, pero la energía cinética de una masa que gira en torno a un eje es proporcional a su momento de inercia.

El **radio de giro** $\bar{\bar{r}}$ de una masa en rotación m con momento de inercia I se define como

$$\bar{\bar{r}} = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Radio de giro.

Si toda la masa se localizara a una distancia $\bar{\bar{r}}$ de su eje de giro o eje de rotación, tendría el mismo momento de inercia y, por consiguiente, la misma energía cinética. Por ejemplo, el radio de giro de la lámina del ejemplo 4 respecto al eje x está dado por

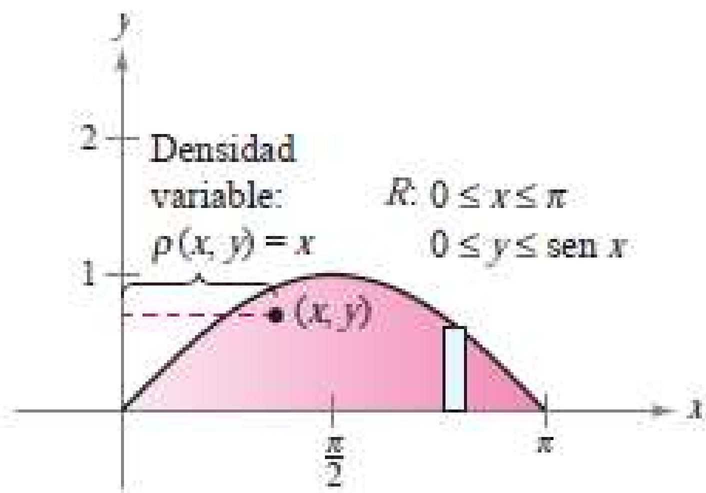
$$\bar{\bar{y}} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{32\,768k/315}{256k/15}} = \sqrt{\frac{128}{21}} \approx 2.469.$$

EJEMPLO 5 Cálculo del radio de giro

Hallar el radio de giro con respecto al eje y de la lámina que corresponde a la región R: $0 \leq y \leq \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, donde la densidad en (x, y) está dada por $\rho(x, y) = x$.

Solución La región R se muestra en la figura 14.42. Integrando $\rho(x, y) = x$ sobre la región R, se puede determinar que la masa de la región es π. El momento de inercia con respecto al eje y es

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} x^3 \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\pi} x^3 y \Big]_0^{\operatorname{sen} x} dx \\ &= \int_0^{\pi} x^3 \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \Big[(3x^2 - 6)(\operatorname{sen} x) - (x^3 - 6x)(\cos x) \Big]_0^{\pi} \\ &= \pi^3 - 6\pi. \end{aligned}$$



Por tanto, el radio de giro con respecto al eje y es

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{I_y}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3 - 6\pi}{\pi}} \\ &= \sqrt{\pi^2 - 6} \approx 1.967.\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

En los ejercicios 5 a 8, hallar la masa y el centro de masa de la lámina con cada densidad.

5. R: cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$, (a, a)

   a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$ *c)* $\rho = kx$

7. R: triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, a)$, (a, a)

   a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$ *c)* $\rho = kx$

9. ***Traslaciones en el plano*** Trasladar la lámina del ejercicio 5 cinco unidades a la derecha y determinar el centro de masa resultante.

En los ejercicios 11 a 22, hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades que se especifican. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

11. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1,\ \rho = ky$

13. $y = 4/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4,\ \rho = kx^2$

15. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$

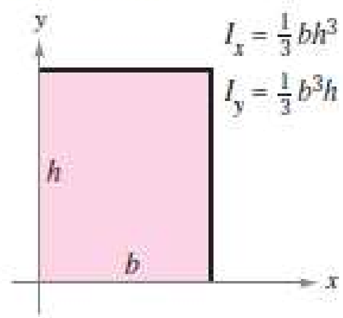
17. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ \rho = ky$

19. $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{L},\ y = 0,\ x = 0,\ x = L,\ \rho = k$

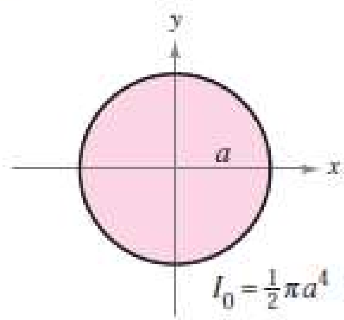
21. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ 0 \le y \le x,\ \rho = k$

En los ejercicios 27 a 32, verificar los momentos de inercia dados y hallar $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$. Suponer que la densidad de cada lámina es $\rho = 1$ gramos por centímetro cuadrado. (Estas regiones son formas de uso común empleadas en diseño.)

27. Rectángulo



29. Círculo



31. Cuarto del círculo