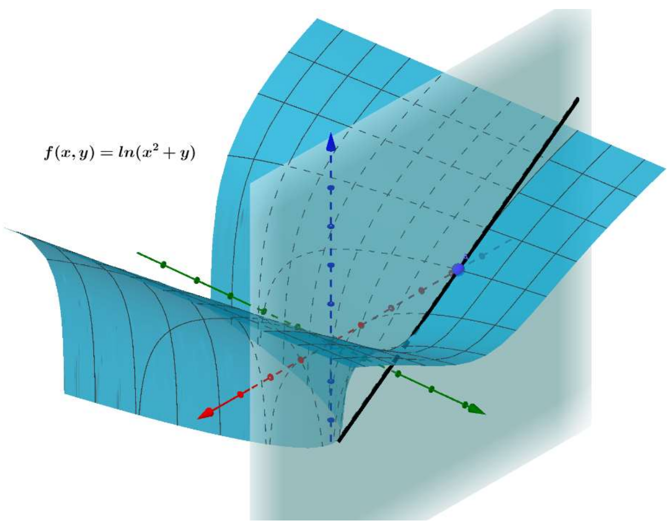
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Derivadas Direccionales y Gradiente



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

29 de julio del 2021

Derivadas direccionales

Supongamos que ahora queremos encontrar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Véase figura 2.) Para hacer esto consideremos la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$ (la gráfica de f), y sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ queda sobre S. El plano vertical que pasa por P en la dirección de $\mathbf{u}$ interseca a S en una curva C (véase figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de $\mathbf{u}$.

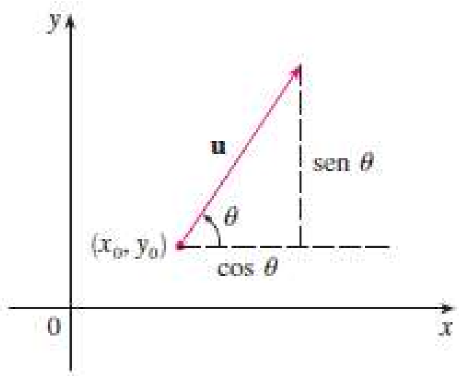


FIGURA 2
Un vector unitario
$\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \text{sen}\,\theta \rangle$

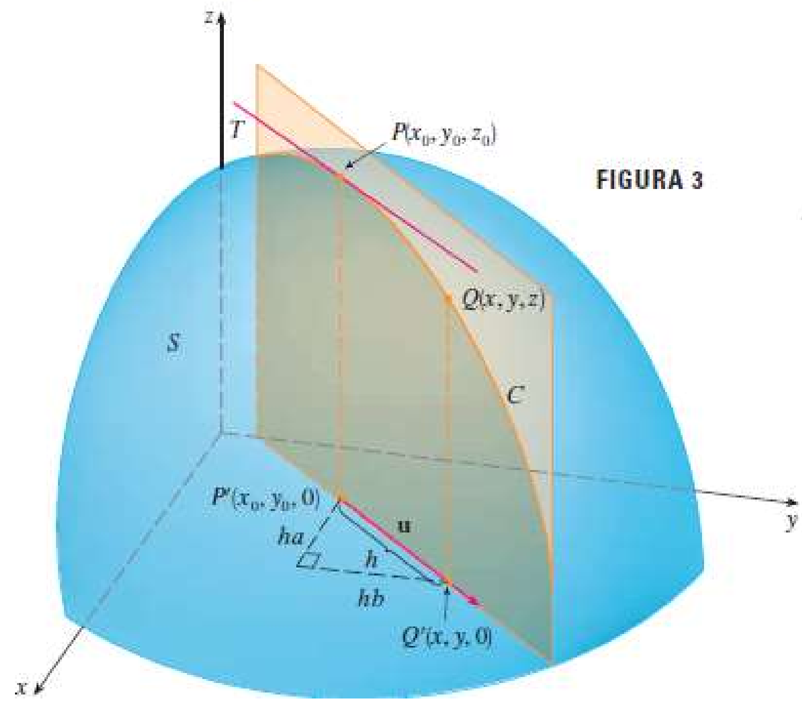


FIGURA 3

Si $Q(x, y, z)$ es otro punto sobre C y P', Q' son las proyecciones de P, Q sobre el plano xy, entonces el vector es paralelo a $\mathbf{u}$ y entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algún escalar h. Por tanto, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, por lo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos la razón de cambio de z con respecto a la distancia en la dirección de $\mathbf{u}$, la cual se denomina derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$.

Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Tenemos que si $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ y si $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. En otras palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son justamente casos especiales de la derivada direccional.

Cuando calculamos la derivada direccional de una función que está definida por medio de una fórmula, en general aplicamos el teorema siguiente.

Teorema Si f es una función derivable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b$$

EJEMPLO 1 Determine la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y $\mathbf{u}$ es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Qué es $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$?

SOLUCIÓN Usando el último teorema

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

Vector Gradiente

Definición Si f es una función de dos variables x y y, entonces el **gradiente** de f es la función vectorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

∇f se lee "nabla f".

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$, entonces

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

y

$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

Con esta notación para el vector gradiente, podemos escribir la derivada direccional como

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}}$$

Esta ecuación expresa la derivada direccional en la dirección de un vector unitario **u** como la proyección escalar del vector gradiente en **u**.

EJEMPLO 3 Determine la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto $(2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN Primero calculamos el vector gradiente en $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\,\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$$

Note que $\mathbf{v}$ no es un vector unitario, pero como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(2, -1) &= \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j} \right) \\ &= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

Funciones de tres variables

Para funciones de tres variables podemos definir las derivadas direccionales de una manera similar. Otra vez, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ puede interpretarse como la razón de cambio de la función en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$.

Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si este límite existe.

Si utilizamos la notación de vectores, entonces podemos escribir

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}}$$

donde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ si $n = 2$ y $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ si $n = 3$. Esto es razonable porque la ecuación vectorial de la recta que pasa por $\mathbf{x}_0$ en la dirección del vector $\mathbf{u}$ está dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ y de este modo $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa el valor de f en un punto sobre esta recta.

Si $f(x, y, z)$ es derivable y $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\, a + f_y(x, y, z)\, b + f_z(x, y, z)\, c$$

Por lo que toca a la función f de tres variables, el **vector gradiente**, denotado por ∇f o **grad** f, es

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

es decir,

$$\boxed{\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}}$$

Entonces, la derivada direccional se puede expresar como

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}}$$

EJEMPLO 4 Si $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, a) determine el gradiente de f y b) encuentre la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN

a) El gradiente de f es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle \end{aligned}$$

b) En $(1, 3, 0)$ tenemos $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$. El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}$$

Por lo tanto, la ecuación 14 da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k} \right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Suponga que tenemos una función f de dos o tres variables y consideramos todas las derivadas direccionales posibles de f en un punto dado. Éstas dan las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Cabe entonces, plantear las preguntas: ¿en cuál de estas direcciones f cambia más rápido y cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas las proporciona el teorema siguiente.

Teorema Supongamos que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y se presenta cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

DEMOSTRACIÓN tenemos

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

donde θ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$. El valor máximo de $\cos \theta$ es 1 y esto ocurre cuando $\theta = 0$. Por lo tanto, el valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ es $|\nabla f|$ y se presenta cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f.

EJEMPLO 5

a) Si $f(x, y) = xe^y$, determine la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.
b) ¿En qué dirección f tiene la máxima razón de cambio? ¿Cuál es esta máxima razón de cambio?

SOLUCIÓN

a) Primero calculamos el vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ} = \langle -1.5, 2 \rangle$ es $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$, de modo que la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1(-\tfrac{3}{5}) + 2(\tfrac{4}{5}) = 1$$

b) De acuerdo con el teorema 15, f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$

EJEMPLO 6 Supongamos que la temperatura en un punto (x, y, z) en el espacio está dado por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, donde T se mide en grados celsius y x, y, z en metros. ¿En qué dirección se incrementa más rápido la temperatura en el punto $(1, 1, -2)$? ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

SOLUCIÓN El gradiente de T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k})$$

En el punto $(1, 1, -2)$ el vector gradiente es

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

La temperatura se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ o bien, en forma equivalente, en la dirección de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ o del vector unitario $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. La máxima razón de incremento es la longitud del vector gradiente:

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Por lo tanto, la máxima razón de incremento de temperatura es $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4\ ^\circ\text{C/m}$.

El plano tangente a la superficie de nivel $F(x, y, z) = k$ **en** $P(x_0, y_0, z_0)$ es el plano que pasa por P y tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Si aplicamos la ecuación estándar de un plano, podemos escribir la ecuación de este plano tangente como

$$\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$$

La **recta normal** a S en P es la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente. La dirección de la recta normal está definida, por lo tanto, por el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y, de este modo, sus ecuaciones simétricas son

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}}$$

EJEMPLO 7 Determine las ecuaciones del plano tangente y recta normal en el punto $(-2, 1, -3)$ al elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUCIÓN El elipsoide es la superficie de nivel (con $k = 3$) de la función:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Por lo tanto,

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Entonces la ecuación del plano tangente en $(-2, 1, -3)$ es

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

lo cual se simplifica a $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Las ecuaciones de la recta normal son

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

Ejercicios Propuestos

4-6 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.

4. $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3$, $(1, 1)$, $\theta = \pi/6$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = e^x \cos y$, $(0, 0)$, $\theta = \pi/4$

7-10

a) Determine el gradiente de f.
b) Evalúe el gradiente en el punto P.
c) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $P(-6, 4)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$

9. $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $P(2, -1, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle$

11-17 Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

17. $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)$, $(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

19. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en $P(2, 8)$ en la dirección de $Q(5, 4)$.

21-26 Determine la máxima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en la cual se presenta.

21. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $(4, 1)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x, y)$, $(1, 0)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

29. Encuentre todos los puntos en los cuales la dirección del cambio más rápido de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

31. La temperatura T en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es $120°$.
    a) Determine la razón de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección hacia el punto $(2, 1, 3)$.
    b) Demuestre que en cualquier punto en la bola la dirección de incremento más grande de temperatura está dado por un vector que apunta hacia el origen.

35. Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

41-46 Determine las ecuaciones de a) el plano tangente y b) de la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

41. $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10, \quad (3, 3, 5)$

43. $xyz^2 = 6, \quad (3, 2, 1)$

45. $x + y + z = e^{xyz}, \quad (0, 0, 1)$

49. Si $f(x, y) = xy$, determine el vector gradiente $\nabla f(3, 2)$ y con éste determine la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 6$ en el punto $(3, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

57. Demuestre que todo plano que es tangente al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.

59. ¿Dónde la recta normal al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 2)$ interseca al paraboloide por segunda vez?