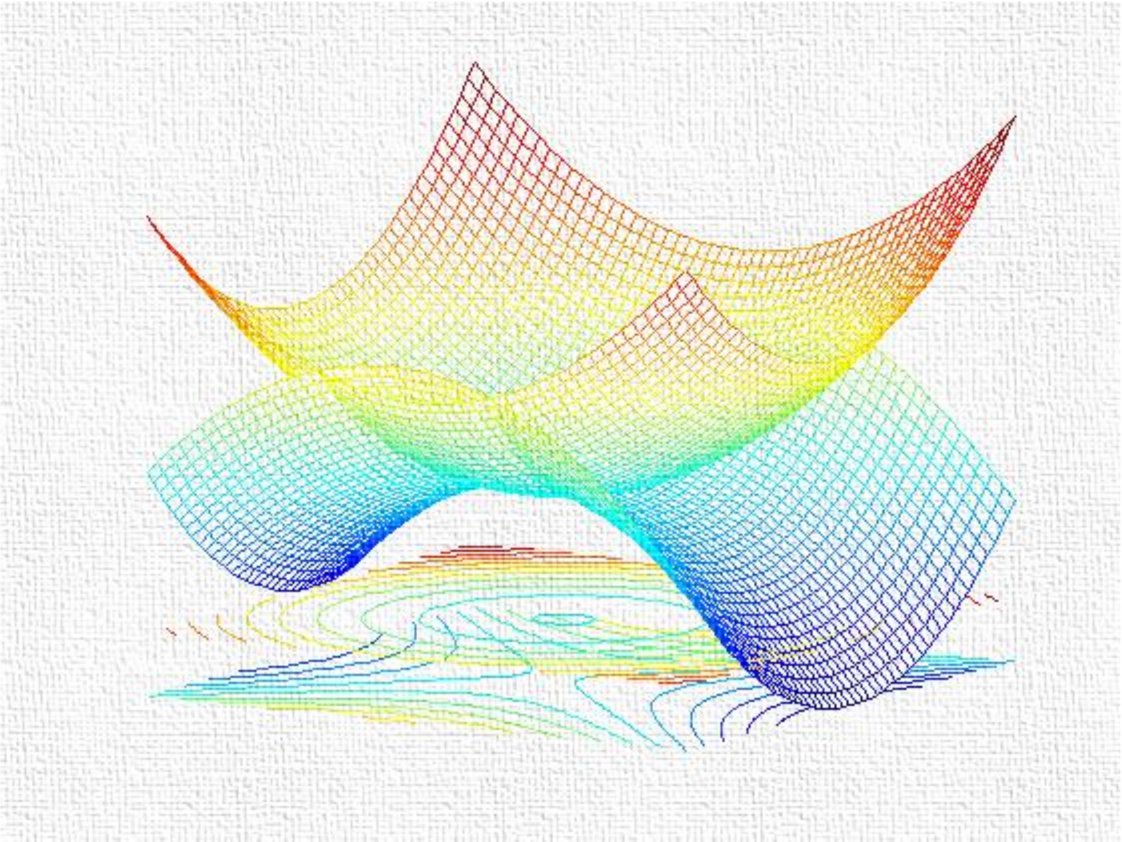
Curso de métodos numéricos



Unidad 7: Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

Profa. Blanca Guillén

Temas a tratar

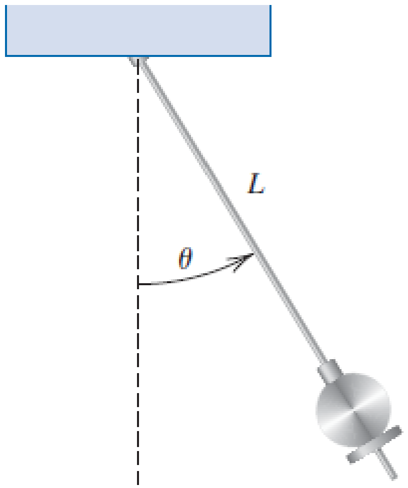
1. Introducción
2. Teoría elemental de los problemas de valor inicial
3. Método de Euler
4. Método de Euler modificado
5. Método del punto medio
6. Métodos de Runge-Kutta
7. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
8. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Unidad 7. Problemas de valor inicial para EDO

Introducción (Burden 10ª Ed., pág. 193)

El movimiento de un péndulo balanceándose de acuerdo con ciertas suposiciones de simplificación se describe por medio de la ecuación diferencial de segundo orden.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0,$$



donde L es la longitud del péndulo, $g \approx 32.17$ pies/s^2 es la constante gravitacional de la Tierra, y θ es el ángulo del péndulo con la vertical. Si, además, especificamos la posición del péndulo cuando el movimiento empieza, $\theta(t_0) = \theta_0$, y su velocidad en ese punto, $\theta'(t_0) = \theta_0'$, tenemos lo que recibe el nombre de *problema de valor inicial*.

Para los valores pequeños de θ, la aproximación $\theta \approx \operatorname{sen}\theta$ se puede utilizar para simplificar el problema de valor inicial lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta_0'.$$

Este problema se puede resolver con una técnica de ecuación diferencial estándar. Para los valores más grandes de θ, la suposición de que $\theta = \operatorname{sen}\theta$ no es razonable, por lo que deben usarse los métodos de aproximación. Un problema de este tipo se considera en el ejercicio 7 de la sección 5.9.

Cualquier libro de texto sobre ecuaciones diferenciales detalla diferentes métodos para encontrar soluciones a los problemas de valor inicial de primer orden de manera explícita. Sin embargo, en la práctica, pocos problemas que se originan a partir del estudio de fenómenos físicos se pueden resolver con exactitud.

Unidad 7. Problemas a tratar

1. **Problema de valor inicial (PVI)**:

   aproximar la solución $y(t)$ de un problema de la forma:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

sujeto a la condición inicial

$$y(a) = \alpha$$

Unidad 7. Problemas a tratar

1. **Problema de valor inicial (PVI):**

   aproximar la solución $y(t)$ de un problema de la forma:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

sujeto a la condición inicial

$$y(a) = \alpha$$

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 199).

La ecuación:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

define un PVI, donde

$$f\big(t, y(t)\big) = y - t^2 + 1, \quad y \quad \alpha = 0.5$$

Unidad 7. Problemas a tratar

1. **Problema de valor inicial (PVI):**

aproximar la solución $y(t)$ de un problema de la forma:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad a \leq t \leq b$$

sujeto a la condición inicial

$$y(a) = \alpha$$

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 199).

La ecuación:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

define un PVI, donde

$$f(t, y(t)) = y - t^2 + 1, \quad y \quad \alpha = 0.5$$

Unidad 7. Problemas a tratar

1. **Problema de valor inicial (PVI):**

aproximar la solución $y(t)$ de un problema de la forma:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \le t \le b$$

sujeto a la condición inicial

$$y(a) = \alpha$$

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 199).

La ecuación:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \le t \le 2$$

$$y(0) = 0.5$$

define un PVI, donde

$$f\big(t, y(t)\big) = y - t^2 + 1, \quad y \quad \alpha = 0.5$$

Unidad 7. Problemas a tratar

1. **Problema de valor inicial (PVI):**

   aproximar la solución $y(t)$ de un problema de la forma:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

sujeto a la condición inicial

$$y(a) = \alpha$$

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 199).

La solución del PVI:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

es la función

$$y(t) = (t+1)^2 - 0.5\, e^t, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

Unidad 7. Problemas a tratar

1. **Problema de valor inicial (PVI):**

aproximar la solución $y(t)$ de un problema de la forma:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \le t \le b$$

sujeto a la condición inicial

$$y(a) = \alpha$$

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 199).

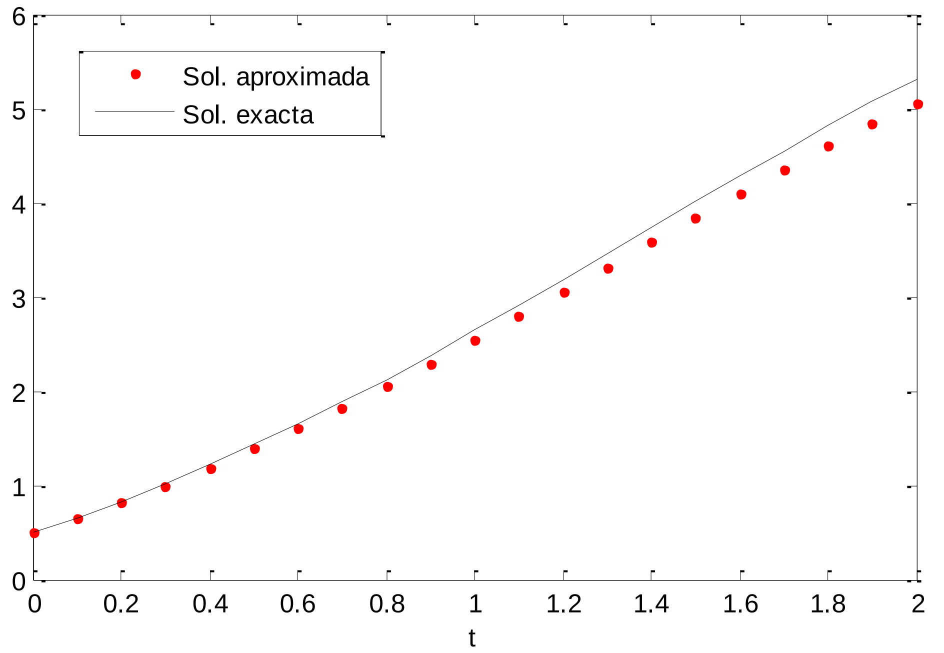
La solución del PVI:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \le t \le 2$$

$$y(0) = 0.5$$

es la función

$$y(t) = (t+1)^2 - 0.5\, e^t, \qquad 0 \le t \le 2$$



Unidad 7. Problemas a tratar

2. Sistemas de EDO de primer orden:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

para $a \leq t \leq b$, sujeto a las condiciones iniciales:

$$y_1(a) = \alpha_1,\ y_2\,(a) = \alpha_2,\ \dots,\ y_n(a) = \alpha_n$$

Unidad 7. Problemas a tratar

2. Sistemas de EDO de primer orden:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

para $a \le t \le b$, sujeto a las condiciones iniciales:

$$y_1(a) = \alpha_1,\ y_2\,(a) = \alpha_2,\ \dots,\ y_n(a) = \alpha_n$$

Ejemplo 2. Las ecuaciones:

$$y_1'(t) = 3y_1 + 2y_2 - (2t^2 + 1)e^{2t}$$

$$y_2'(t) = 4y_1 + y_2 - (t^2 + 2t - 4)e^{2t}$$

para $0 \le t \le 1$, con condiciones iniciales:

$$y_1(0) = 1 \quad y \quad y_2(0) = 1$$

Forman un SEDO 2x2.

Unidad 7. Problemas a tratar

3. **EDO de orden superior**: aproximar la solución $y(t)$ de un problema de la forma:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

para $a \leq t \leq b$ sujeto a las condiciones iniciales:

$$y(a) = \alpha_1,\ y'(a) = \alpha_2, \dots,\ y^{(n-1)}(a) = \alpha_n$$

Unidad 7. Problemas a tratar

3. **EDO de orden superior**: aproximar la solución $y(t)$ de un problema de la forma:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

para $a \leq t \leq b$, sujeto a las condiciones iniciales:

$$y(a) = \alpha_1,\ y'(a) = \alpha_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(a) = \alpha_n$$

Ejemplo 3. (Burden, 10ª Ed., pág. 253).

La ecuación:

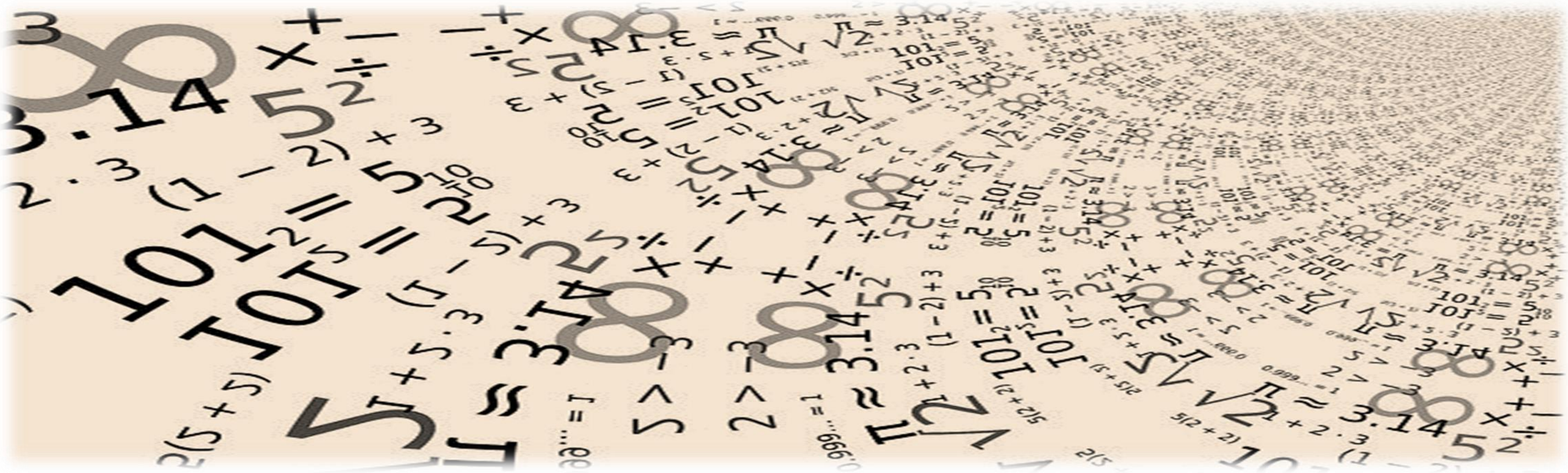
$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t} sen(t)$$

para $0 \leq t \leq 1$, con condiciones iniciales:

$$y(0) = -0.41$$

$$y'(0) = -0.6$$

describe una ecuación diferencial de 2do orden (n=2).



Teoría elemental de los PVI

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI

Definición 1. (Burden 10ª Ed., pág. 195)

Se dice que una función $f(t,y)$ satisface una **condición de Lipschitz** en la variable y en un conjunto $D \in \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$, tal que

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

siempre que $(t,y_1),(t,y_2) \in D$. A la constante L **se le llama constante de Lipschitz** para f.

Definición 1. (Burden 10ª Ed., pág. 195)

Se dice que una función $f(t, y)$ satisface una **condición de Lipschitz** en la variable y en un conjunto $D \in \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$, tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$$

siempre que $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. A la constante L **se le llama constante de Lipschitz** para f.

Ejemplo 4 (Burden 10ª Ed., pág. 195)

Muestre que $f(t, y) = t|y|$ satisface la condición de Lipschitz en el intervalo $D = \{(t, y) \mid 1 \leq t \leq 2 \text{ y } -3 \leq y \leq 4\}$.

Solución Para cada par de puntos (t, y_1) y (t, y_2) en D, tenemos

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t|y_1| - t|y_2|| = |t|\,||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|.$$

Por lo tanto, f satisface la condición de Lipschitz en D en la variable y con la constante 2 de Lipschitz. El valor más pequeño posible para la constante de Lipschitz para este problema es $L = 2$ porque, por ejemplo,

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0|. \qquad \blacksquare$$

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI

Definición 2. (Burden 10ª Ed., pág. 195)

Se dice que un conjunto $D \in \mathbb{R}^2$ es convexo, si siempre que (t_1, y_1) y (t_2, y_2) pertenecen a D, el punto:

$$((1-\lambda)t_1 + \lambda \mathrm{t}_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda\, y_2)$$

también pertenece a D para cada λ en $[0,1]$.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI

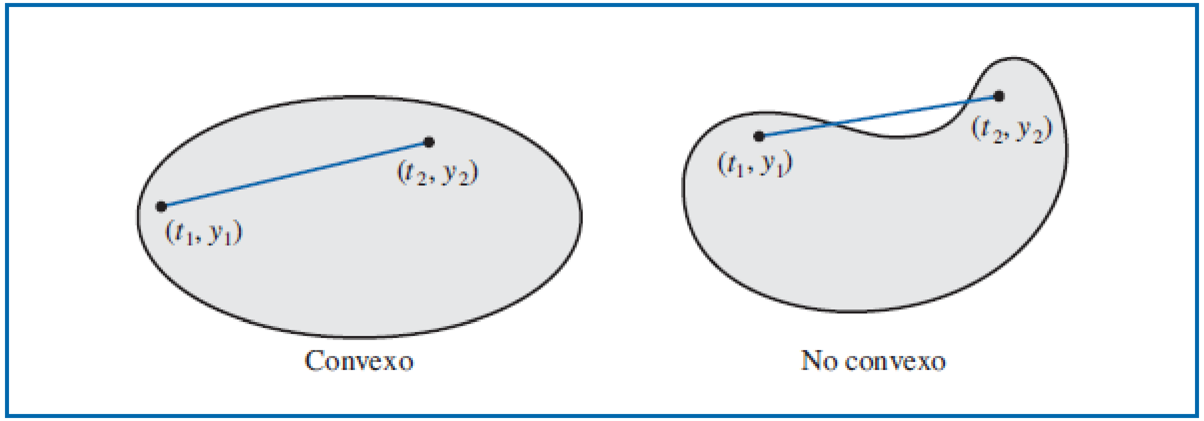
Definición 2. (Burden 10^a Ed., pág. 195)

Se dice que un conjunto $D \in \mathbb{R}^2$ es convexo, si siempre que (t_1, y_1) y (t_2, y_2) pertenecen a D, el punto:

$$((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda\, y_2)$$

también pertenece a D para cada λ en $[0,1]$.

En términos geométricos, la definición 2 establece que un conjunto D es convexo si dados dos puntos en el conjunto, el segmento de recta que los une pertenece al conjunto.



Burden, 10^a Ed., pág. 195

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI

Teorema 1. (Burden 10ª Ed., pág. 196)

Supongamos que $f(t, y)$ está definida en un conjunto convexo $D \in \mathbb{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$, tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \leq L, \qquad \forall\,(t, y) \in D$$

entonces f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y con constante de Lipschitz L.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI

Teorema 1. (Burden 10ª Ed., pág. 196)

Supongamos que $f(t,y)$ está definida en un conjunto convexo $D \in \mathbb{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$, tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leq L, \qquad \forall\,(t,y) \in D$$

entonces f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y con constante de Lipschitz L.

Ejemplo 5. Sea

$$D = \{(t,y)\,|\,0 \leq t \leq 2, -\infty < y < \infty\}$$

y considere la función:

$$f(t,y) = y - t^2 + 1$$

Entonces, de acuerdo con el teorema 1, f es Lipschitziana, con constante de Lipschitz $L = 1$, pues

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = \left|\frac{\partial(y-t^2+1)}{\partial y}\right| = |1| \leq 1$$

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI

Teorema 1. (Burden 10ª Ed., pág. 196)

Supongamos que $f(t, y)$ está definida en un conjunto convexo $D \in \mathbb{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$, tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \leq L, \qquad \forall\,(t, y) \in D$$

entonces f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y con constante de Lipschitz L.

Ejemplo 5. Sea

$$D = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 2, -\infty < y < \infty\}$$

y considere la función:

$$f(t, y) = y - t^2 + 1$$

Entonces, de acuerdo con el teorema 1, f es Lipschitziana, con constante de Lipschitz $L = 1$, pues

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| = \left|\frac{\partial(y - t^2 + 1)}{\partial y}\right| = |1| \leq 1$$

Ejercicio 1. Demuestre que f es Lispchitz con constante $L = 1$ utilizando la definición 1.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI – unicidad de la solución

Teorema 2. (Burden 7ª Ed., pág. 252)

Supongamos que

$$D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

y que $f(t, y)$ es continua en D. Si f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y, entonces el problema de valor inicial:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

tiene una **solución única** $y(t)$ para $a \leq t \leq b$.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI – unicidad de la solución

Teorema 2. (Burden 7ª Ed., pág. 252)

Supongamos que

$$D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$$

y que $f(t, y)$ es continua en D. Si f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y, entonces el problema de valor inicial:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \le t \le b$$

$$y(a) = \alpha$$

tiene una **solución única** $y(t)$ para $a \le t \le b$.

Ejemplo 6. (Burden 7ª Ed., pág. 253)

Considere el PVI:

$$y' = y - t^2 + 1, \qquad 0 \le t \le 2$$

$$y(0) = 0.5$$

Como $f(t, y) = y - t^2 + 1$ es continua en

$$D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 2, -\infty < y < \infty\}$$

y satisface una condición de Lipschitz en D, entonces el problema tiene una única solución. Es fácil comprobar que

$$y(t) = (t + 1)^2 - 0.5\, e^t$$

es la solución del PVI.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI – problema perturbado

PVI perturbado.

En el planteamiento numérico de los PVI, por lo general, se introducen errores en la declaración de la función $f(t, y)$ o en el valor inicial $y(a) = \alpha$.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI – problema perturbado

PVI perturbado.

En el planteamiento numérico de los PVI, por lo general, se introducen errores en la declaración de la función $f(t, y)$ o en el valor inicial $y(a) = \alpha$.

El PVI:

$$z'(t) = f\big(t, z(t)\big) + \delta(t), \qquad a \leq t \leq b$$

$$z(a) = \alpha + \varepsilon_0$$

se denomina **problema perturbado** asociado al problema original.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI – problema perturbado

PVI perturbado.

En el planteamiento numérico de los PVI, por lo general, se introducen errores en la declaración de la función $f(t, y)$ o en el valor inicial $y(a) = \alpha$.

El PVI:

$$z'(t) = f\big(t, z(t)\big) + \delta(t), \qquad a \leq t \leq b$$

$$z(a) = \alpha + \varepsilon_0$$

se denomina **problema perturbado** asociado al problema original.

Los métodos numéricos siempre se ocuparán de resolver un problema perturbado, porque cualquier error de redondeo introducido en f o α altera el problema original.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI – problema perturbado

PVI perturbado.

En el planteamiento numérico de los PVI, por lo general, se introducen errores en la declaración de la función $f(t,y)$ o en el valor inicial $y(a)=\alpha$.

El PVI:

$$z'(t) = f\big(t, z(t)\big) + \delta(t), \qquad a \le t \le b$$

$$z(a) = \alpha + \varepsilon_0$$

se denomina **problema perturbado** asociado al problema original.

Los métodos numéricos siempre se ocuparán de resolver un problema perturbado, porque cualquier error de redondeo introducido en f o α altera el problema original.

¿Cómo saber si un PVI tiene la propiedad de que pequeños cambios o perturbaciones del planteamiento del problema ocasionen cambios igualmente pequeños en la solución?

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI

Teorema 3. (Burden 10ª Ed., pág. 197)

Suponga que

$$D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

Si f es continua y satisface una condición de Lipschitz en la variable y en el conjunto D, entonces el PVI:

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

estará bien planteado.

Unidad 7. Teoría elemental de los PVI

Teorema 3. (Burden 10ª Ed., pág. 197)

Suponga que

$$D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

Si f es continua y satisface una condición de Lipschitz en la variable y en el conjunto D, entonces el PVI:

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

estará bien planteado.

Esto significa que (Burden 10ª Ed., pág. 197):

1. El **PVI** tiene una única solución $y(t)$
2. El **PVI perturbado** tiene una única solución $z(t)$ tal que,

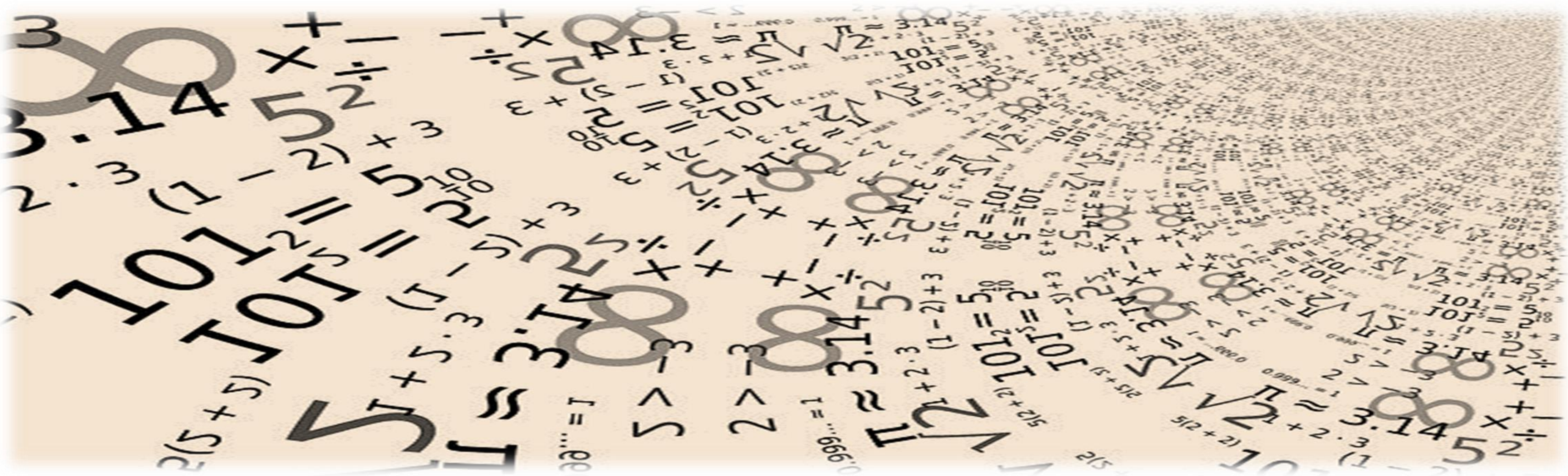
$$|z(t) - y(t)| < k(\varepsilon)\varepsilon$$

siempre que

$$|\varepsilon_0| < \varepsilon,$$

$$|\delta(t)| < \varepsilon, \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

para cualquier $\varepsilon > 0$. Aquí se requiere que $\delta(t)$ sea continua en $[a, b]$.



Método de Euler

Unidad 7. Método de Euler

Problema a resolver: aproximar la solución del PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

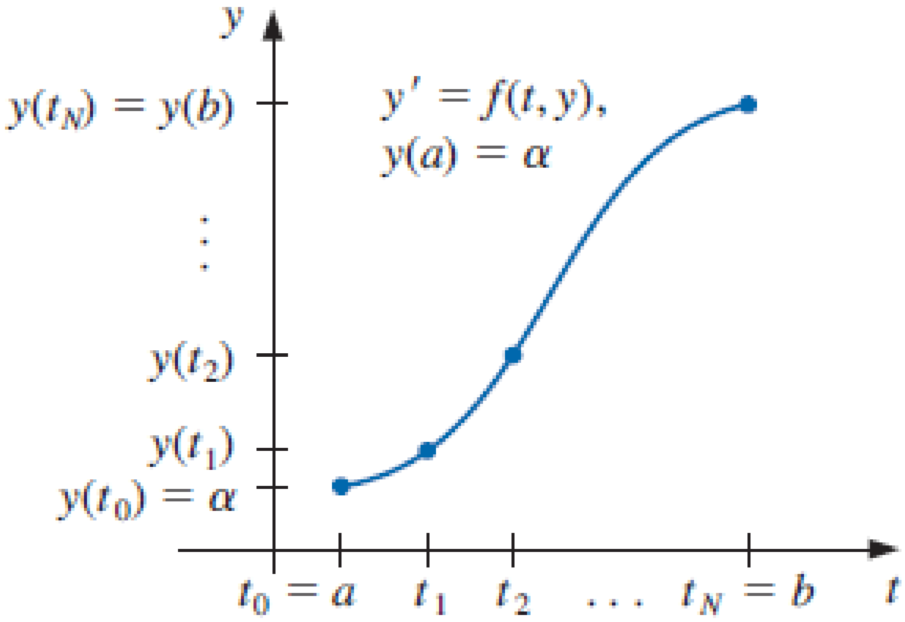
Unidad 7. Método de Euler

Problema a resolver: aproximar la solución del PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \le t \le b$$

$$y(a) = \alpha$$

El método de Euler permite obtener una aproximación a la solución de este problema en un conjunto de puntos en el intervalo $[a, b]$, denominados puntos de red.



Burden 10ª Ed., pág. 200

Unidad 7. Método de Euler

El intervalo $[a, b]$ se particiona en N subintervalos de longitud h, donde

$$h = \frac{b-a}{N}$$

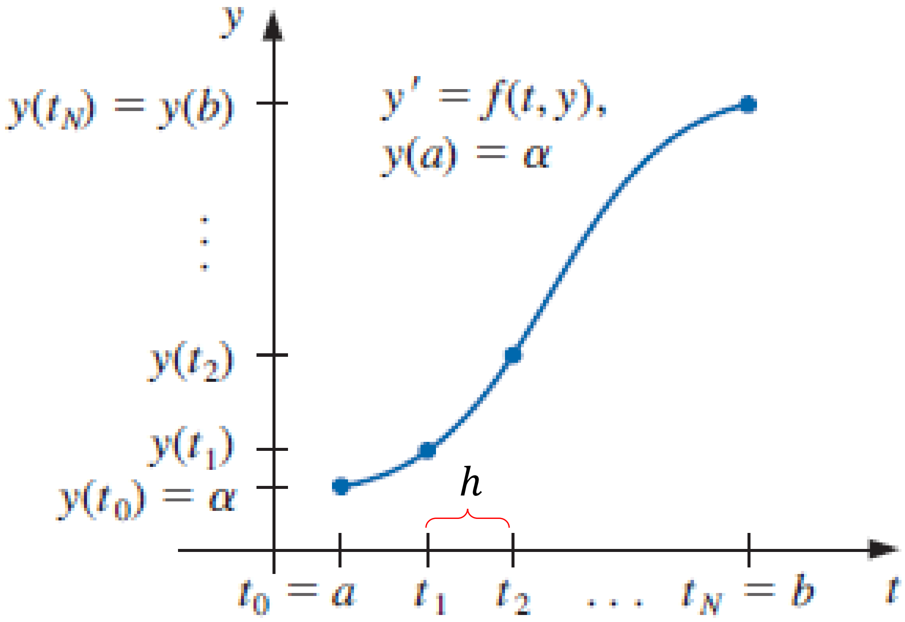
se denomina tamaño del paso. Por tanto, los puntos de red se definen de manera recursiva mediante:

$$t_0 = a,$$

$$t_i = t_{i-1} + h = a + ih, i = 1, \dots, N-1$$

$$t_N = b$$

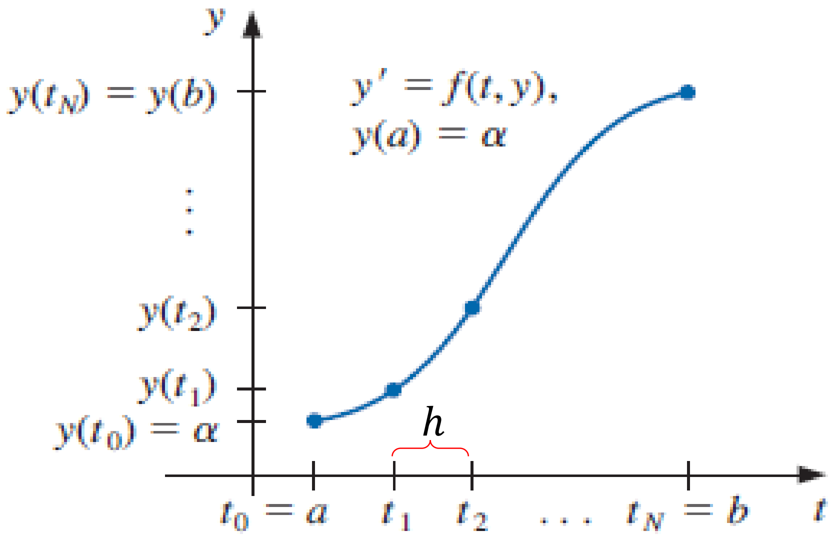
El método de Euler permite obtener una aproximación a la solución de este problema en un conjunto de puntos en el intervalo $[a, b]$, denominados puntos de red.



Unidad 7. Formulación del método de Euler

El método de Euler se puede derivar a partir del teorema de Taylor mediante la expansión de la solución $y(t)$ en el punto t_{i+1} alrededor del punto t_i, suponiendo que $y(t)$ tiene dos derivadas continuas en $[a, b]$. Esto es:

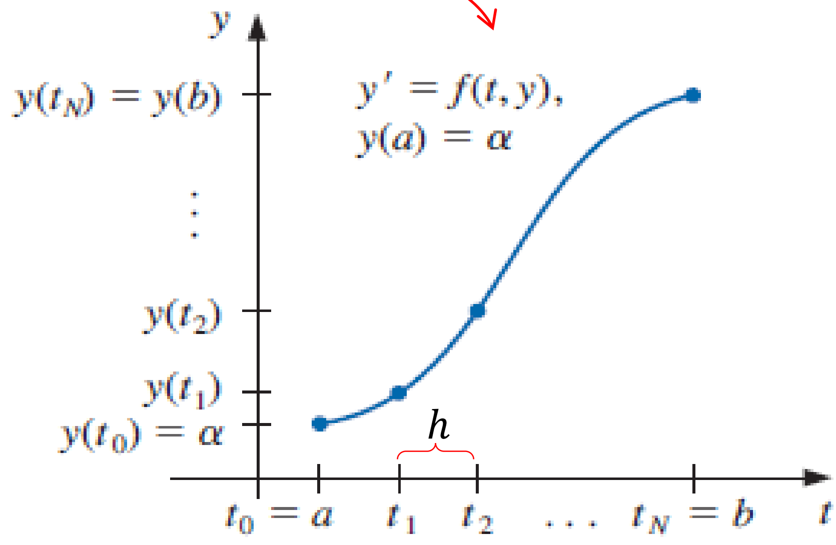
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(\xi_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2, \qquad i = 0,1, \dots, N-1$$



Unidad 7. Formulación del método de Euler

El método de Euler se puede derivar a partir del teorema de Taylor mediante la expansión de la solución $y(t)$ en el punto t_{i+1} alrededor del punto t_i, suponiendo que $y(t)$ tiene dos derivadas continuas en $[a, b]$. Esto es:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)\underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{h} + \frac{y''(\xi_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1$$

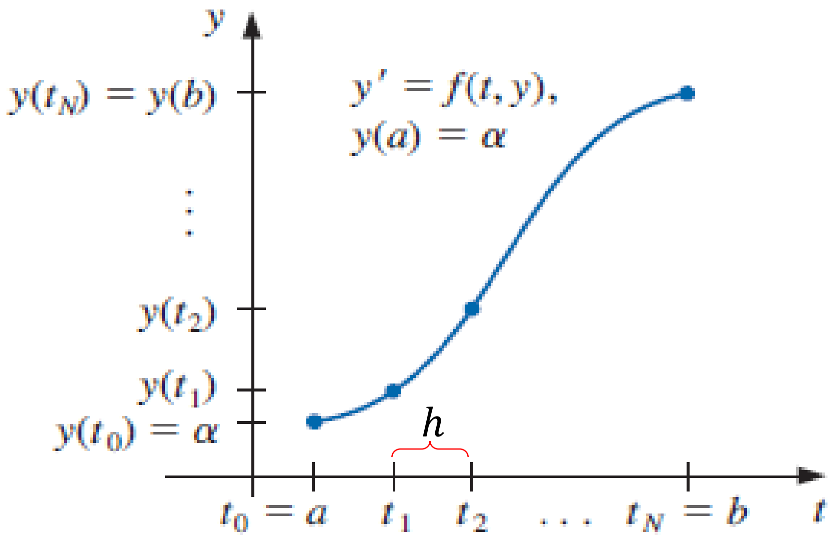


Unidad 7. Formulación del método de Euler

El método de Euler se puede derivar a partir del teorema de Taylor mediante la expansión de la solución $y(t)$ en el punto t_{i+1} alrededor del punto t_i, suponiendo que $y(t)$ tiene dos derivadas continuas en $[a, b]$. Esto es:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)\underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{h} + \frac{y''(\xi_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2, \qquad i = 0,1,\dots,N-1$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i), \quad i = 0,1,\dots,N-1$$



Unidad 7. Formulación del método de Euler

El método de Euler se puede derivar a partir del teorema de Taylor mediante la expansión de la solución $y(t)$ en el punto t_{i+1} alrededor del punto t_i, suponiendo que $y(t)$ tiene dos derivadas continuas en $[a, b]$. Esto es:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)\underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{h} + \frac{y''(\xi_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2, \qquad i = 0,1, \dots, N-1$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf\big(t_i, y(t_i)\big) + \underbrace{\frac{h^2}{2}y''(\xi_i),}_{\substack{\text{resto} \\ \text{(error)}}} \qquad i = 0,1, \dots, N-1, \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

Unidad 7. Formulación del método de Euler

El método de Euler se puede derivar a partir del teorema de Taylor mediante la expansión de la solución $y(t)$ en el punto t_{i+1} alrededor del punto t_i, suponiendo que $y(t)$ tiene dos derivadas continuas en $[a, b]$. Esto es:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)\underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{h} + \frac{y''(\xi_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2, \qquad i = 0,1,\dots,N-1$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf\big(t_i, y(t_i)\big) \underbrace{+ \frac{h^2}{2} y''(\xi_i),}_{\substack{\text{resto} \\ \text{(error)}}} \qquad i = 0,1,\dots,N-1, \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

Para valores de h pequeños el término del error se hace muy pequeño y podemos prescindir de el (truncarlo).

Unidad 7. Formulación del método de Euler

El método de Euler se puede derivar a partir del teorema de Taylor mediante la expansión de la solución $y(t)$ en el punto t_{i+1} alrededor del punto t_i, suponiendo que $y(t)$ tiene dos derivadas continuas en $[a,b]$. Esto es:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)\underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{h} + \frac{y''(\xi_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2, \qquad i = 0,1,\dots,N-1$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf\big(t_i, y(t_i)\big) + \cancel{\frac{h^2}{2}y''(\xi_i)}, \qquad i = 0,1,\dots,N-1, \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

Al eliminar el término del resto y sustituir $y(t_i)$ por w_i (es decir, $w_i = y(t_i)$), resulta la **ecuación de diferencia asociada al método de Euler**:

$$w_0 = y(t_0) = y(a) = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \qquad i = 0,1,\dots N-1$$

Unidad 7. Método de Euler

Dado el PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

El **método de Euler** para aproximar la solución $y(t)$, viene dado por la ecuación de diferencias:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

Para cada $i = 0, 1, \ldots N - 1$.

Unidad 7. Método de Euler

Dado el PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

El **método de Euler** para aproximar la solución $y(t)$, viene dado por la ecuación de diferencias:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i\,)$$

Para cada $i = 0,1, \dots N - 1.$

Ejemplo 7. Aproxime la solución de la ecuación diferencial:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \;\; 0 \leq t \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

en $t = 2$, mediante el método de Euler con $h = 0.5.$

Unidad 7. Método de Euler

Ejemplo 7. Aproxime la solución de la ecuación diferencial:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

en $t = 2$, mediante el método de Euler con $h = 0.5$.

Solución.

Unidad 7. Interpretación geométrica del método de Euler

El método de Euler aproxima a la solución en el punto t_{i+1} con la recta tangente a la gráfica de y en el punto de red $(t_i, y(t_i))$.

En efecto, si

$$r(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)$$

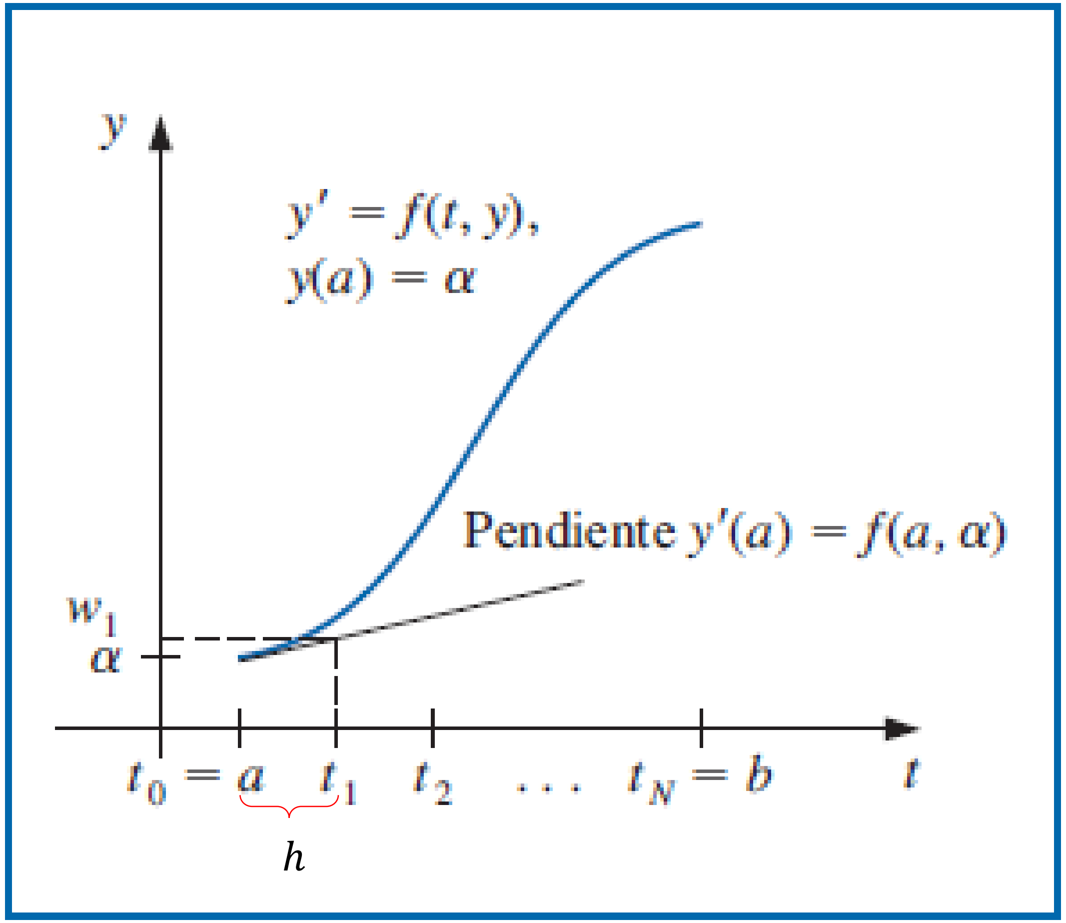
es la recta tangente a $y(t)$ en el punto $(t_0, y(t_0))$, entonces

$$r(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)\overbrace{(t_1 - t_0)}^{h}$$

$$r(t_1) = y(t_0) + hy'(t_0) \approx y(t_1)$$

Método de Euler

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hy'(t_i)$$



Euler 10ª Ed., pág. 200

Unidad 7. Interpretación geométrica del método de Euler

El método de Euler aproxima a la solución en el punto t_{i+1} con la recta tangente a la gráfica de y en el punto de red $(t_i, y(t_i))$.

En efecto, si

$$r(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)$$

es la recta tangente a $y(t)$ en el punto $(t_0, y(t_0))$, entonces

$$r(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)\overbrace{(t_1 - t_0)}^{h}$$

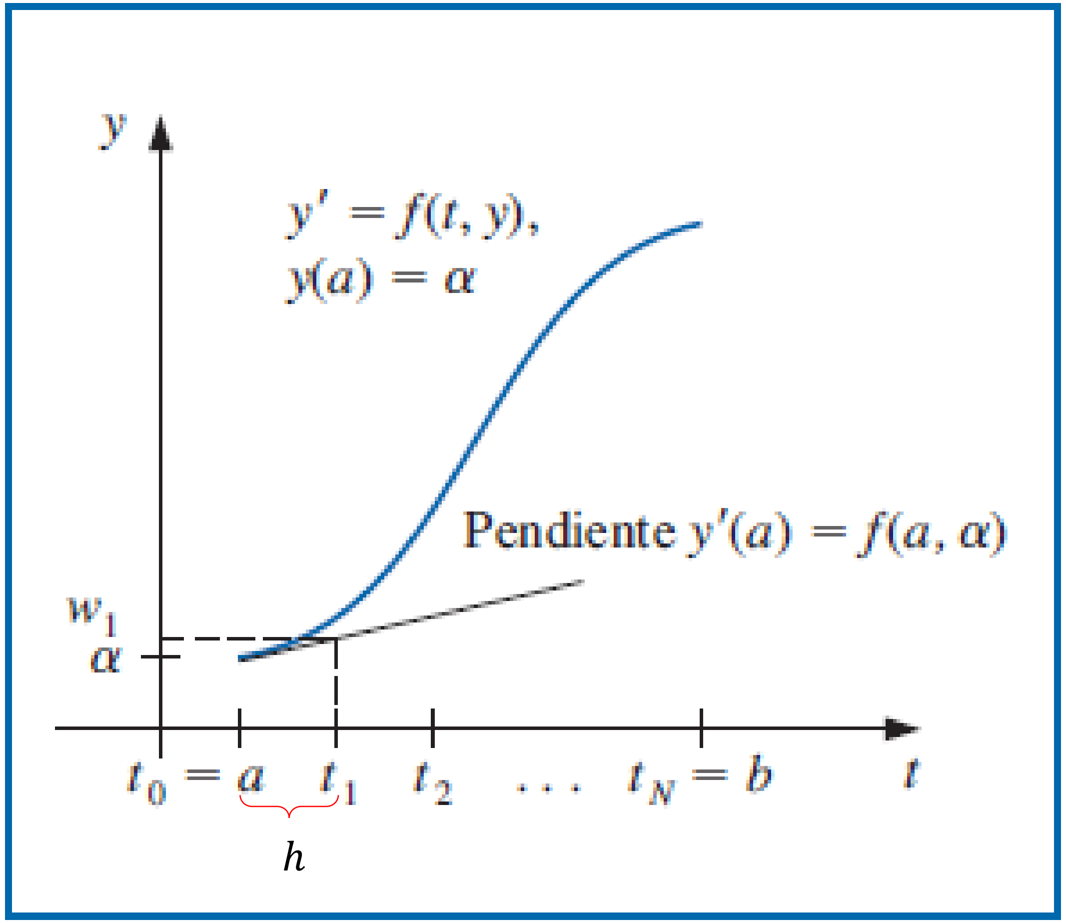
$$r(t_1) = y(t_0) + hy'(t_0) \approx y(t_1)$$

En general,

$$r(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) \approx y(t_{i+1})$$

Método de Euler

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hy'(t_i)$$



Euler 10ª Ed., pág. 200

Unidad 7. Convergencia del método de Euler

Teorema 4. (Burden 10ª Ed., pág. 202)

Suponga que f es continua y que satisface la condición de Lipschitz con constante L en $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$, y que existe una constante M con la propiedad de que,

$$|y''(t)| \leq M, \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

donde $y(t)$ denota la solución exacta del problema de valor inicial:

$$y' = f(t, y), \qquad a \leq t \leq b$$
$$y(a) = \alpha$$

Sean $w_0, w_1, \dots, w_N$ las aproximaciones generadas por el método de Euler para cualquier entero positivo N. Entonces, para cada $i = 0, 1, \dots, N$

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right]$$

Unidad 7. Método de Euler

Ejemplo 8. (Burden 10ª Ed., pág. 203)

La solución para el problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5,$$

se aproximó en el ejemplo 1 con el método de Euler con $h = 0.2$. Utilice la desigualdad en el teorema 5.9 para encontrar una cota para los errores de aproximación y compárelos con los errores reales.

Solución Puesto que $f(t, y) = y - t^2 + 1$, tenemos $\partial f(t, y)/\partial y = 1$ para todas las y, por lo que $L = 1$. Para este problema, la solución exacta es $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$, por lo que $y''(t) = 2 - 0.5e^t$ y

$$|y''(t)| \le 0.5e^2 - 2, \quad \text{para todas las } t \in [0, 2].$$

Por medio de desigualdad en la cota de error para el método de Euler con $h = 0.2$, $L = 1$, y $M = 0.5e^2 - 2$ da

$$|y_i - w_i| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1).$$

Por lo tanto

$$|y(0.2) - w_1| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{0.2} - 1) = 0.03752,$$

$$|y(0.4) - w_2| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{0.4} - 1) = 0.08334,$$

y así sucesivamente. La tabla 5.2 enumera el error real encontrado en el ejemplo 1, junto con la cota de error. Observe que aunque se usó la cota verdadera para la segunda derivada de la solución, la cota de error es considerablemente superior que el error real, en especial para los valores mayores de t. ■

Cota del error para el método de Euler:

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right]$$

Unidad 7. Método de Euler

Ejemplo 8. (Burden 10ª Ed., pág. 203)

La solución para el problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5,$$

se aproximó en el ejemplo 1 con el método de Euler con $h = 0.2$. Utilice la desigualdad en el teorema 5.9 para encontrar una cota para los errores de aproximación y compárelos con los errores reales.

Solución Puesto que $f(t, y) = y - t^2 + 1$, tenemos $\partial f(t, y)/\partial y = 1$ para todas las y, por lo que $L = 1$. Para este problema, la solución exacta es $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$, por lo que $y''(t) = 2 - 0.5e^t$ y

$$|y''(t)| \le 0.5e^2 - 2, \quad \text{para todas las } t \in [0, 2].$$

Por medio de desigualdad en la cota de error para el método de Euler con $h = 0.2$, $L = 1$, y $M = 0.5e^2 - 2$ da

$$|y_i - w_i| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1).$$

Por lo tanto

$$|y(0.2) - w_1| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{0.2} - 1) = 0.03752,$$

$$|y(0.4) - w_2| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{0.4} - 1) = 0.08334,$$

y así sucesivamente. La tabla 5.2 enumera el error real encontrado en el ejemplo 1, junto con la cota de error. Observe que aunque se usó la cota verdadera para la segunda derivada de la solución, la cota de error es considerablemente superior que el error real, en especial para los valores mayores de t. ■

Cota del error para el método de Euler:

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right]$$

t_i	w_i	$y_i = y(t_i)$	$\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

Observe que el error crece ligeramente conforme el valor de t aumenta. Este crecimiento de error controlado es una consecuencia de la estabilidad del método de Euler, lo cual implica que se espera que el error no crezca de una manera mejor a la forma lineal.

Unidad 7. Método de Euler

Ejercicio 2. (Burden 10ª Ed., pág. 200).

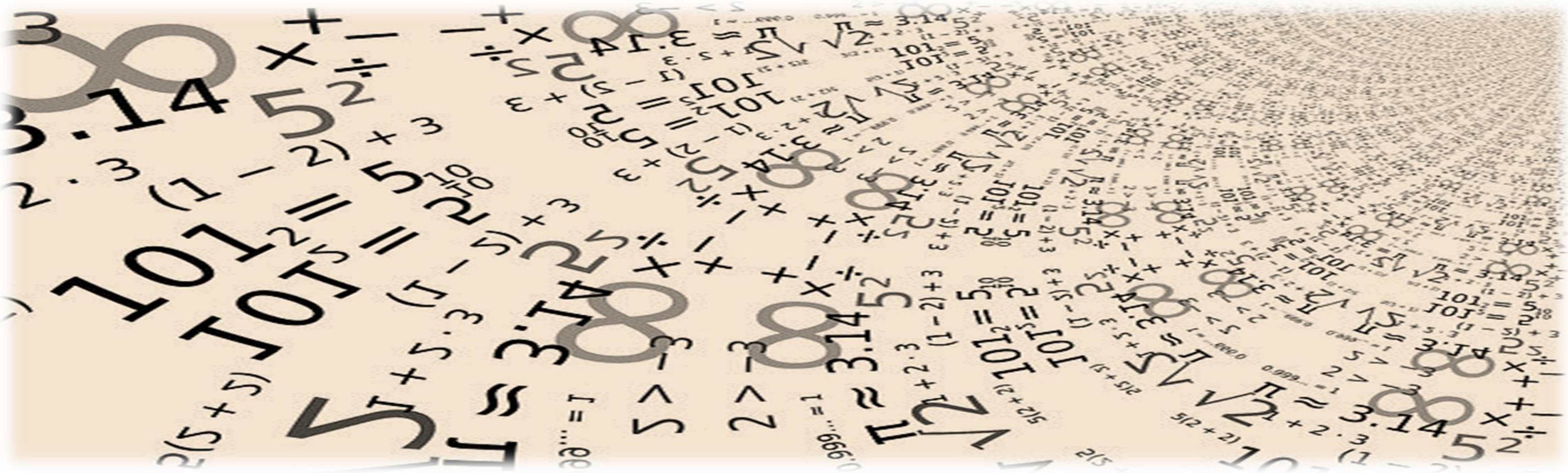
Aproxime la solución del PVI:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

en los puntos de red $t_i = t_0 + ih, i = 0, \ldots, N,$

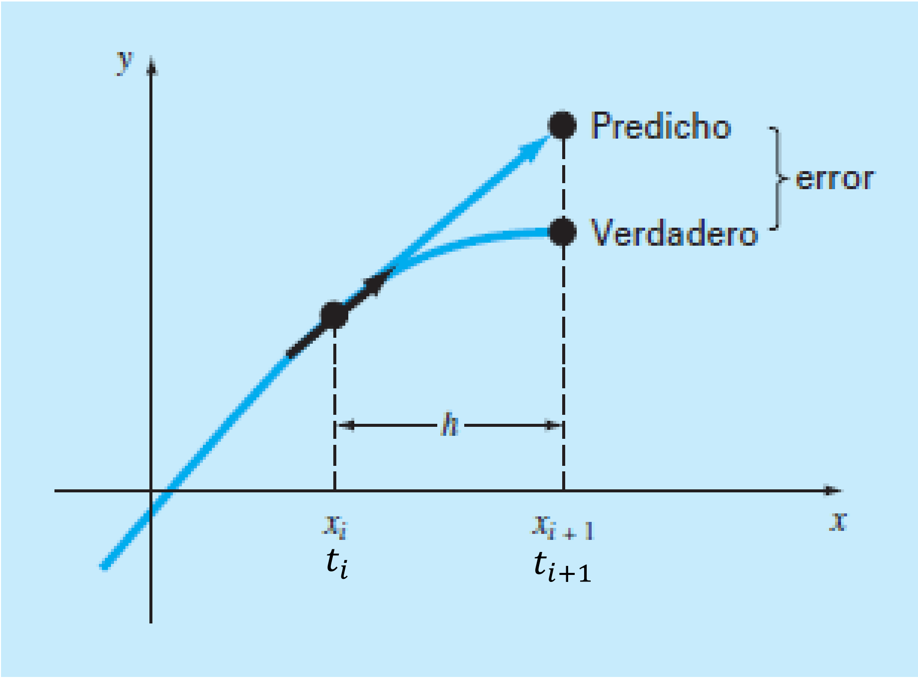
mediante el método de Euler con $h = 0.1.$



Método de Euler modificado

Unidad 7. Mejoras del método de Euler

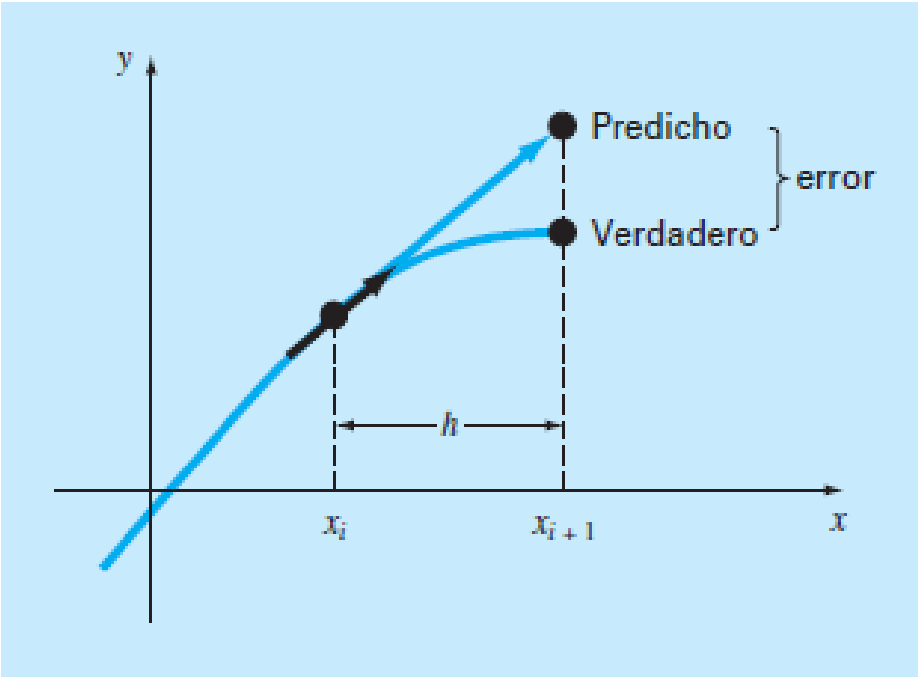
Desventaja del método de Euler: suponer que la derivada en el inicio del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es la misma durante todo el intervalo.



Chapra 5ª Ed., pág. 720

Unidad 7. Mejoras del método de Euler

Desventaja del método de Euler: suponer que la derivada en el inicio del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es la misma durante todo el intervalo.



Chapra 5ª Ed., pág. 720

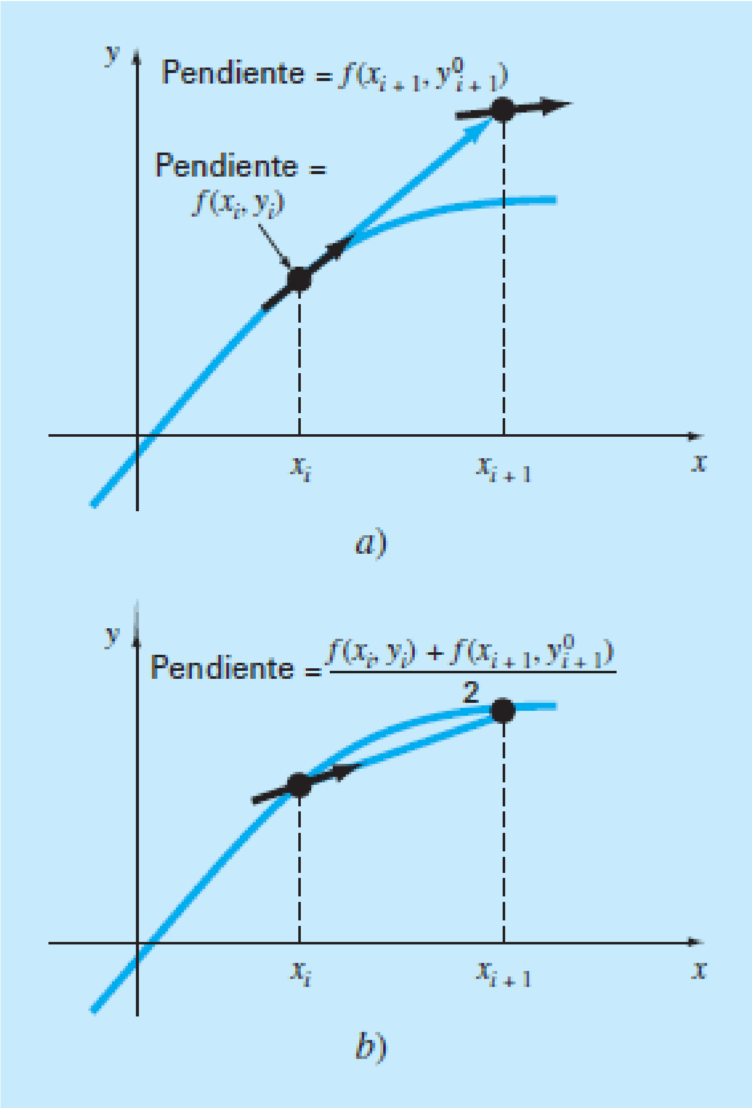
¿Cómo mejorar Euler?

Unidad 7. Mejoras del método de Euler

La mejora consiste en estimar las pendientes en los extremos del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y utilizar el promedio de estas derivadas para aproximar el valor de $y'(t_i)$. Es decir,

$$y'(t) \approx \frac{y'(t_i)+y'(t_{i+1})}{2}, \forall\, t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Promediando las pendientes…



Chapra 5ª Ed., pág. 733

Unidad 7. Mejoras del método de Euler

Así, al sustituir la expresión,

$$y'(t) \approx \frac{1}{2}[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))]$$

en el método de Euler

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hy'(t_i)$$

resulta:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + \frac{h}{2}[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))]$$

Denotando con $w_i \approx y(t_i)$ se obtiene el **método de Euler modificado**:

$$w_0 = y(t_0) = y(a) = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})],$$

Para cada $i = 0, \dots, N-1$.

Unidad 7. Método de Euler modificado

Dado el PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

El **método de Euler modificado** para aproximar la solución $y(t)$, viene dado por la ecuación de diferencias:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

Para cada $i = 0,1, \dots N-1$.

Unidad 6. Método de Euler modificado

Dado el PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

El **método de Euler modificado** para aproximar la solución $y(t)$, viene dado por la ecuación de diferencias:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

Para cada $i = 0,1, \dots N-1$.

Observaciones:

1. El método es implícito. Es decir, para calcular w_{i+1} se requiere determinar el valor de $f(t_{i+1}, w_{i+1})$.

Unidad 6. Método de Euler modificado

Dado el PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \le t \le b$$

$$y(a) = \alpha$$

El **método de Euler modificado** para aproximar la solución $y(t)$, viene dado por la ecuación de diferencias:

$$w_0 = y(t_0) = y(a) = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

Para cada $i = 0,1, \ldots N-1$.

Observaciones:

1. El método es implícito. Es decir, para calcular w_{i+1} se requiere determinar el valor de $f(t_{i+1}, w_{i+1})$.
2. Se resuelve en dos pasos

   Paso 1. Usar Euler para estimar w_{i+1}

   $$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

   Paso 2. Corregir con Euler modificado

   $$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

Unidad 6. Método de Euler modificado - resumen

Dado el PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

El **método de Euler modificado** para aproximar la solución $y(t)$, viene dado por la ecuación de diferencias:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

Para cada $i = 0,1, \ldots N-1$.

Euler modificado es un procedimiento predictor-corrector:

Predictor. Usar Euler para estimar w_{i+1}

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

Corrector. Euler modificado

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

Unidad 7. Método de Euler modificado

Ejemplo 9. Aplique el método de Euler modificado para aproximar la solución del PVI:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \le t \le 2$$

$$y(0) = 0.5$$

Use $h = 0.5$.

Solución.

- ✓ Para $h = 0.5$, $N = 4$,
- ✓ Puntos de red:

$$t_0 = 0,\ t_1 = 0.5,\ t_2 = 1.0,\ t_3 = 1.5,\ t_4 = 2$$

- ✓ $f(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 + 1$

Método de Euler modificado

$$w_0 = 0.5$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

Cuando $\boldsymbol{i = 0}$

Paso 1. Predictor (Euler)

$$w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0)$$

$$w_1 = 0.5 + 0.5(0.5 + 1) = 1.25$$

Paso 2. Corrector (Euler modificado)

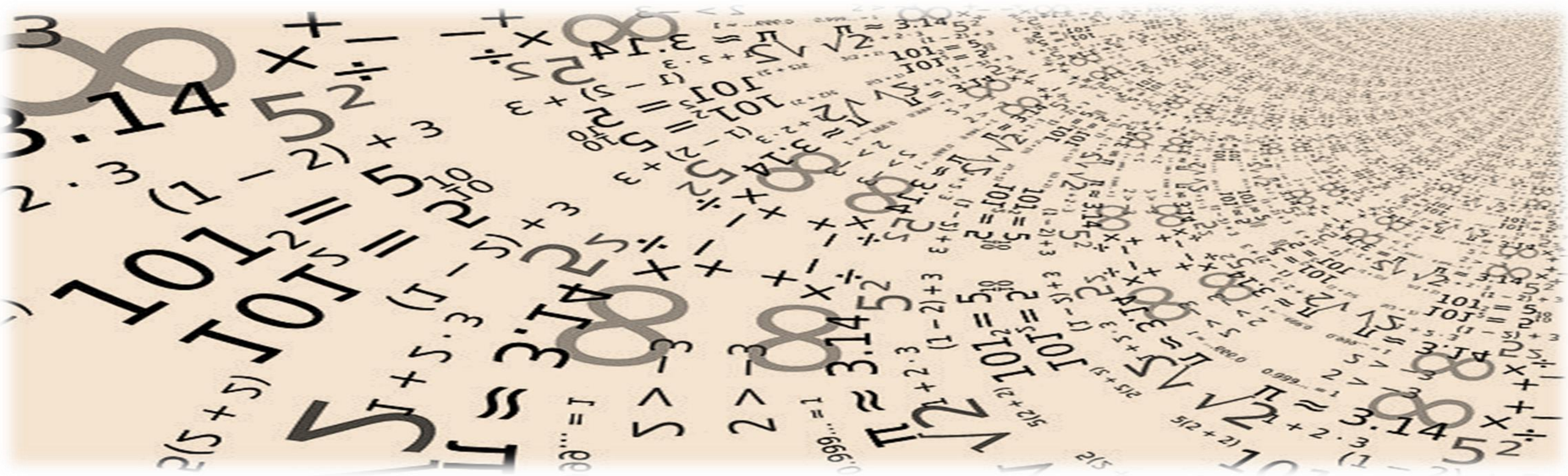
$$w_1 = w_0 + \frac{h}{2}[f(t_0, w_0) + f(t_1, w_1)]$$

$$w_1 = 0.5 + 0.25[1.5 + f(0.5, 1.25)]$$

$$w_1 = 0.5 + 0.25[1.5 + 2] = 1.375$$

pues,

$$f(0.5, 1.25) = 1.25 - 0.5^2 + 1 = 2$$



Método del punto medio

Unidad 7. Método del punto medio

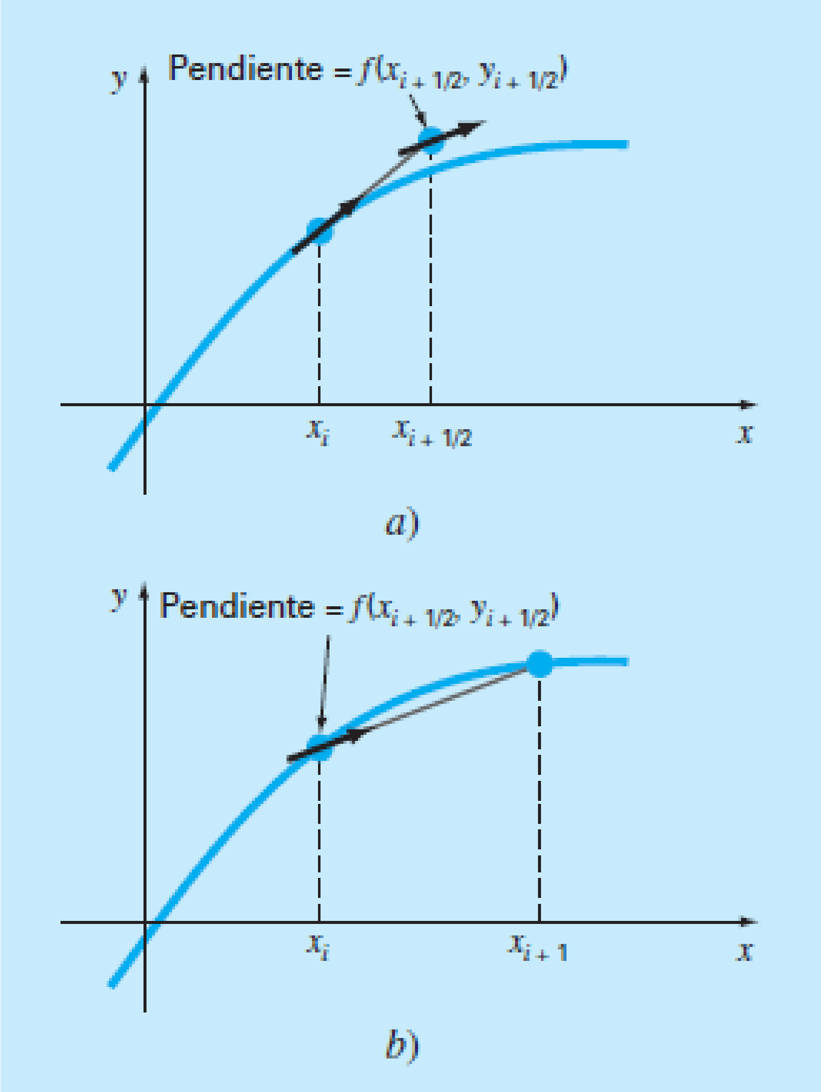
Otra mejora que puede hacerse al método de Euler es aproximar la pendiente en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ por la pendiente en el punto medio del intervalo, esto es,

$$y'(t_i) \approx y'\left(t_i + \frac{h}{2}\right) = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Unidad 7. Método del punto medio

Otra mejora que puede hacerse al método de Euler es aproximar la pendiente en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ por la pendiente en el punto medio del intervalo, esto es,

$$y'(t_i) \approx y'\left(t_i + \frac{h}{2}\right) = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$



Chapra 5ª Ed., pág. 738

Unidad 7. Método del punto medio

Otra mejora que puede hacerse al método de Euler es aproximar la pendiente en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ por la pendiente en el punto medio del intervalo, esto es,

$$y'(t_i) \approx y'\left(t_i + \frac{h}{2}\right) = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Con esta aproximación el método de Euler

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hy'(t_i)$$

Se transforma en,

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Unidad 7. Método del punto medio

Otra mejora que puede hacerse al método de Euler es aproximar la pendiente en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ por la pendiente en el punto medio del intervalo, esto es,

$$y'(t_i) \approx y'\left(t_i + \frac{h}{2}\right) = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

En este caso, la aproximación:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hy'(t_i)$$

Se transforma en,

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Por lo que se requiere determinar el valor de

$$y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)$$

Unidad 7. Método del punto medio

Este valor se puede aproximar usando el método de Euler:

$$y\left(t_i + \frac{h}{2}\right) \approx y(t_i) + \frac{h}{2} y'(t_i)$$

Equivalentemente,

$$y\left(t_i + \frac{h}{2}\right) \approx y(t_i) + \frac{h}{2} f(t_i, y(t_i))$$

Unidad 7. Método del punto medio

Este valor se puede aproximar usando el método de Euler:

$$y\left(t_i+\frac{h}{2}\right) \approx y(t_i)+\frac{h}{2}y'(t_i)$$

Equivalentemente,

$$y\left(t_i+\frac{h}{2}\right) \approx y(t_i)+\frac{h}{2}f(t_i,y(t_i))$$

Al sustituir esta aproximación en

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i)+hf\left(t_i+\frac{h}{2},y\left(t_i+\frac{h}{2}\right)\right)$$

resulta el **método del punto medio**:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i)+hf\left(t_i+\frac{h}{2},y(t_i)+\frac{h}{2}f(t_i,y(t_i))\right)$$

Unidad 7. Método del punto medio

Dado el PVI:

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

El **método del punto medio** para aproximar la solución $y(t)$, viene dado por la ecuación de diferencias:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$$

Para cada $i = 0,1, \dots N - 1$.

Unidad 7. Método del punto medio

Ejemplo 10. Aplique el método del punto medio para aproximar la solución del PVI:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \le t \le 2$$

$$y(0) = 0.5$$

Utilice $h = 0.5$.

Solución.

Método del punto medio

$$w_0 = 0.5$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$$

para cada $i = 0, \dots, 4$.

Para $i = 0$

$$w_1 = w_0 + 0.5f(t_0 + 0.25, w_0 + 0.25f(t_0, w_0))$$

Unidad 7. Método del punto medio

Ejemplo 10. Aplique el método del punto medio para aproximar la solución del PVI:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \le t \le 2$$

$$y(0) = 0.5$$

Utilice $h = 0.5$.

Solución.

Método del punto medio

$$w_0 = 0.5$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right)$$

para cada $i = 0, \ldots, 4$.

Para $i = 0$

$$w_1 = w_0 + 0.5f(t_0 + 0.25, w_0 + 0.25f(t_0, w_0))$$

¡Completar el ejemplo!

Unidad 7. Mejoras del método de Euler

Ejercicio 3. (Burden 10ª Ed., pág. 214).
Use los métodos de punto medio y Euler modificado con $N = 10$, $h = 0.2$, $t_i = 0.2i$, y $w_0 = 0.5$, para aproximar la solución de nuestro ejemplo habitual:

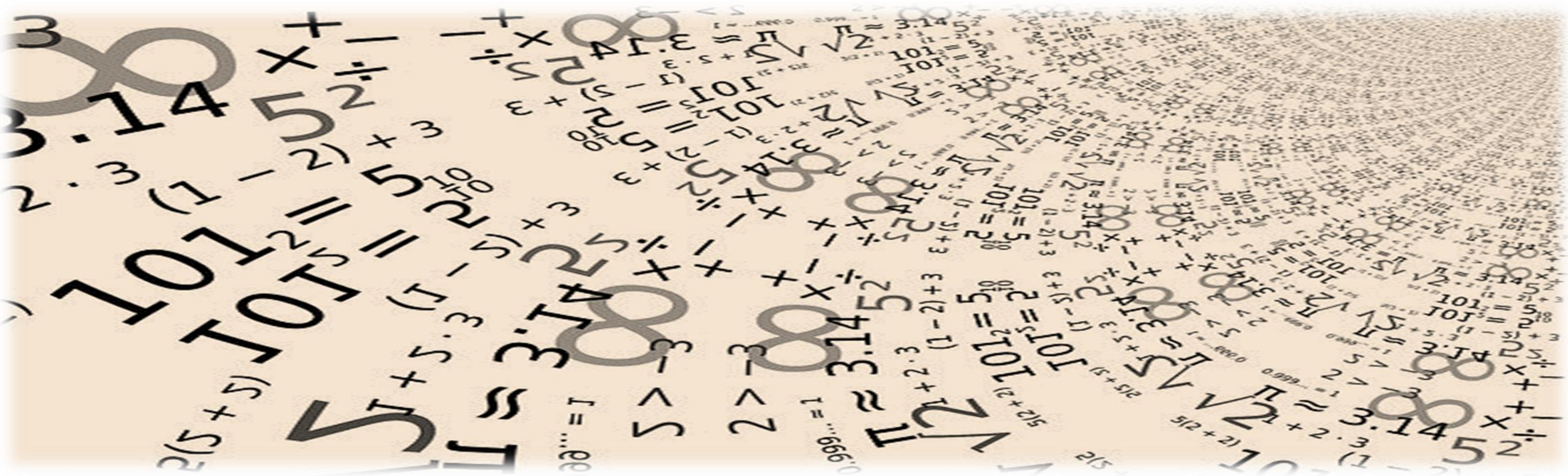
$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

Compare sus resultados con los de la tabla.

Resultados obtenidos al aplicar los métodos de punto medio y Euler modificado al ejemplo del ejercicio 1 (Burden 10ª Ed., pág. 214).

t_i	$y(t_i)$	Método de punto medio	Error	Método modificado de Euler	Error
0.0	0.5000000	0.5000000	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8280000	0.0012986	0.8260000	0.0032986
0.4	1.2140877	1.2113600	0.0027277	1.2069200	0.0071677
0.6	1.6489406	1.6446592	0.0042814	1.6372424	0.0116982
0.8	2.1272295	2.1212842	0.0059453	2.1102357	0.0169938
1.0	2.6408591	2.6331668	0.0076923	2.6176876	0.0231715
1.2	3.1799415	3.1704634	0.0094781	3.1495789	0.0303627
1.4	3.7324000	3.7211654	0.0112346	3.6936862	0.0387138
1.6	4.2834838	4.2706218	0.0128620	4.2350972	0.0483866
1.8	4.8151763	4.8009586	0.0142177	4.7556185	0.0595577
2.0	5.3054720	5.2903695	0.0151025	5.2330546	0.0724173



Métodos de Runge-Kutta

Unidad 7. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Euler modificado y del punto medio forman parte de una familia de métodos que buscan reducir el error local de truncamiento, denominados **métodos de Runge-Kutta**, y cuyas ecuaciones de diferencias son de la forma:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i; h),$$

para $i = 0, \dots, N-1$. La función $\boldsymbol{\phi(t_i, w_i; h)}$ se conoce como función incremento y **puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo $[\boldsymbol{t_i}, \boldsymbol{t_{i+1}}]$.**

Unidad 7. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Euler modificado y del punto medio forman parte de una familia de métodos que buscan reducir el error local de truncamiento, denominados **métodos de Runge-Kutta**, y cuyas ecuaciones de diferencias son de la forma:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i; h),$$

para $i = 0, \dots, N-1$. La función $\boldsymbol{\phi(t_i, w_i; h)}$ **se conoce como función incremento y puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo** $[\boldsymbol{t_i, t_{i+1}}]$.

✓ La función incremento se escribe en forma general como la suma ponderada:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_m k_m$$

donde las ponderaciones $a_1, a_2, \dots, a_m$ son constantes que satisfacen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$$

y cada k_j es la función f evaluada en un punto (t, y), con $t_i \le t \le t_{i+1}$.

Unidad 7. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Euler modificado y del punto medio forman parte de una familia de métodos que buscan reducir el error local de truncamiento, denominados **métodos de Runge-Kutta**, y cuyas ecuaciones de diferencias son de la forma:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i; h),$$

para $i = 0, \ldots, N-1$. La función $\boldsymbol{\phi(t_i, w_i; h)}$ **se conoce como función incremento y puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo** $[\boldsymbol{t_i}, \boldsymbol{t_{i+1}}]$.

✓ La función incremento se escribe en forma general como la suma ponderada:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_mk_m$$

donde las ponderaciones $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son constantes que satisfacen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$$

y cada k_j es la función f evaluada en un punto (t, y), con $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

✓ El orden del método es el número de términos que se utilizan en el promedio ponderado, esto es, m.

Unidad 7. Métodos de Runge-Kutta - Ejemplos

El método de Euler modificado:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

con predictor

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

es un método de Runge-Kutta de 2do orden.

En efecto, el método se puede escribir como:

$$w_{i+1} = w_i + h\underbrace{(a_1 k_1 + a_2 k_2)}_{\phi(t_i, w_i; h)},$$

donde,

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$$

$$k_1 = f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = f(t_i + h, w_i + hk_1)$$

Como $m = 2$, el método es de orden 2.

Unidad 7. Métodos de Runge-Kutta - Ejemplos

El método del punto medio:

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$$

es un método de Runge-Kutta de 2do orden.

En efecto, el método se puede escribir como:

$$w_{i+1} = w_i + h\underbrace{(a_1 k_1 + a_2 k_2)}_{\phi(t_i, w_i; h)},$$

donde,

$$a_1 = 0, a_2 = 1$$

$$k_1 = f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

Como $m = 2$, el método es de orden 2.

Unidad 7. Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

Observaciones. En general:

- ✓ Es posible derivar varias versiones de métodos R-K de orden 2 (cuadro 2.5, Chapra 5ª Ed., pág. 742).
- ✓ Los métodos de Runge-Kutta de 3er orden no se usan.
- ✓ El método Runge-Kutta que se usa de manera más común es el de cuarto orden.

Cuadro 25.1 Deducción de los métodos de Runge-Kutta de segundo orden

La versión de segundo orden de la ecuación (25.28) es:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h \tag{B25.1.1}$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{B25.1.2}$$

y

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \tag{B25.1.3}$$

Para usar la ecuación (B25.1.1) debemos determinar los valores de las constantes a_1, a_2, p_1 y q_{11}. Para ello, recordamos que la serie de Taylor de segundo orden para y_{i+1}, en términos de y_i y $f(x_i, y_i)$, se escribe como [ecuación (25.11)]:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 \tag{B25.1.4}$$

donde $f(x_i, y_i)$ debe determinarse por derivación usando la regla de la cadena (sección 25.1.3):

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{B25.1.5}$$

Si sustituimos la ecuación (B25.1.5) en la ecuación (B25.1.4) se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{h^2}{2!} \tag{B25.1.6}$$

La estrategia básica de los métodos de Runge-Kutta es el uso de manipulaciones algebraicas para obtener los valores de a_1, a_2, p_1 y q_{11}, que hacen equivalentes a las ecuaciones (B25.1.1) y (B25.1.6).

Para ello, primero usamos una serie de Taylor para expandir la ecuación (B25.1.3). La serie de Taylor para una función de dos variables se define como [recuerde la ecuación (4.26)]:

$$g(x + r, y + s) = g(x, y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \cdots$$

Si se aplica este método para expandir la ecuación (B25.1.3) se llega a:

$$f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) = f(x_i, y_i) + p_1h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1h\frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)$$

Este resultado se sustituye junto con la ecuación (B25.1.2) en la ecuación (B25.1.1) para obtener:

$$y_{i+1} = y_i + a_1hf(x_i, y_i) + a_2hf(x_i, y_i) + a_2p_1h^2\frac{\partial f}{\partial x} + a_2q_{11}h^2f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3)$$

o, agrupando términos,

$$y_{i+1} = y_i + [a_1f(x_i, y_i) + a_2f(x_i, y_i)]h + \left[a_2p_1\frac{\partial f}{\partial x} + a_2q_{11}f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y}\right]h^2 + O(h^3) \tag{B25.1.7}$$

Ahora, si comparamos términos comunes en las ecuaciones (B25.1.6) y (B25.1.7), determinamos que para que las dos ecuaciones sean equivalentes, se debe satisfacer lo siguiente:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2q_{11} = \frac{1}{2}$$

Las tres ecuaciones simultáneas anteriores contienen las cuatro constantes desconocidas. Como hay una incógnita más que el número de ecuaciones, no existe un conjunto único de constantes que satisfaga las ecuaciones. Sin embargo, considerando un valor para una de las constantes, es posible determinar el valor de las otras tres. En consecuencia, existe una familia de métodos de segundo orden y no una sola versión.

Unidad 7. Método de Runge-Kutta de orden 4

Método de Runge-Kutta de orden 4:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

para $i = 0,1,\dots,N-1$, *donde*

$$k_1 = f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, w_i + hk_3)$$

Chapra 5ª Ed., pág. 747

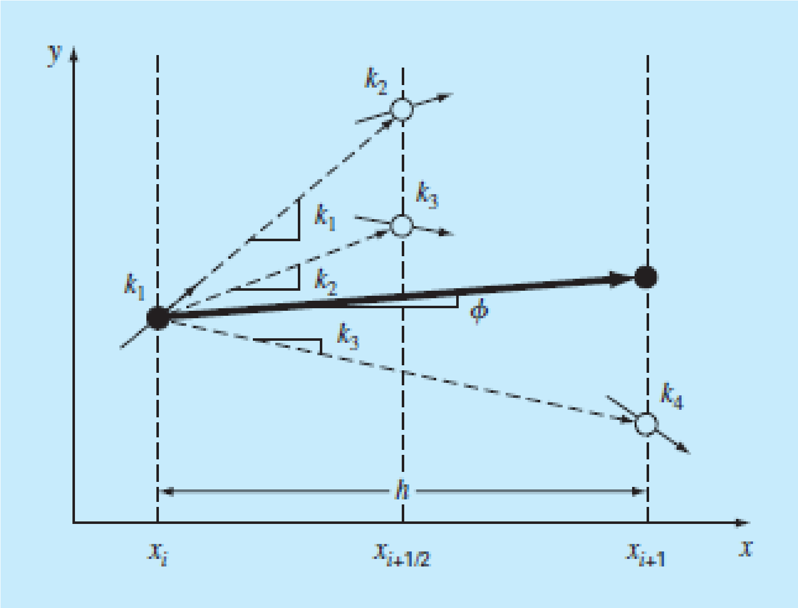


FIGURA 25.15
Representación gráfica de las pendientes estimadas empleadas en el método RK de cuarto orden.

Unidad 7. Método de Runge-Kutta de orden 4

Ejemplo 11. (Burden 10ª Ed., pág. 216)

Utilice el método Runge-Kutta de orden 4 con $h = 0.2$, $N = 10$, y $t_i = 0.2i$ para obtener aproximaciones para la solución del problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5.$$

Solución La aproximación para $y(0.2)$ se obtiene mediante

$$w_0 = 0.5$$

$$k_1 = 0.2f(0, 0.5) = 0.2(1.5) = 0.3$$

$$k_2 = 0.2f(0.1, 0.65) = 0.328$$

$$k_3 = 0.2f(0.1, 0.664) = 0.3308$$

$$k_4 = 0.2f(0.2, 0.8308) = 0.35816$$

$$w_1 = 0.5 + \frac{1}{6}(0.3 + 2(0.328) + 2(0.3308) + 0.35816) = 0.8292933.$$

Los resultados restantes y sus errores se muestran en la tabla 5.8. ■

Tabla 5.8

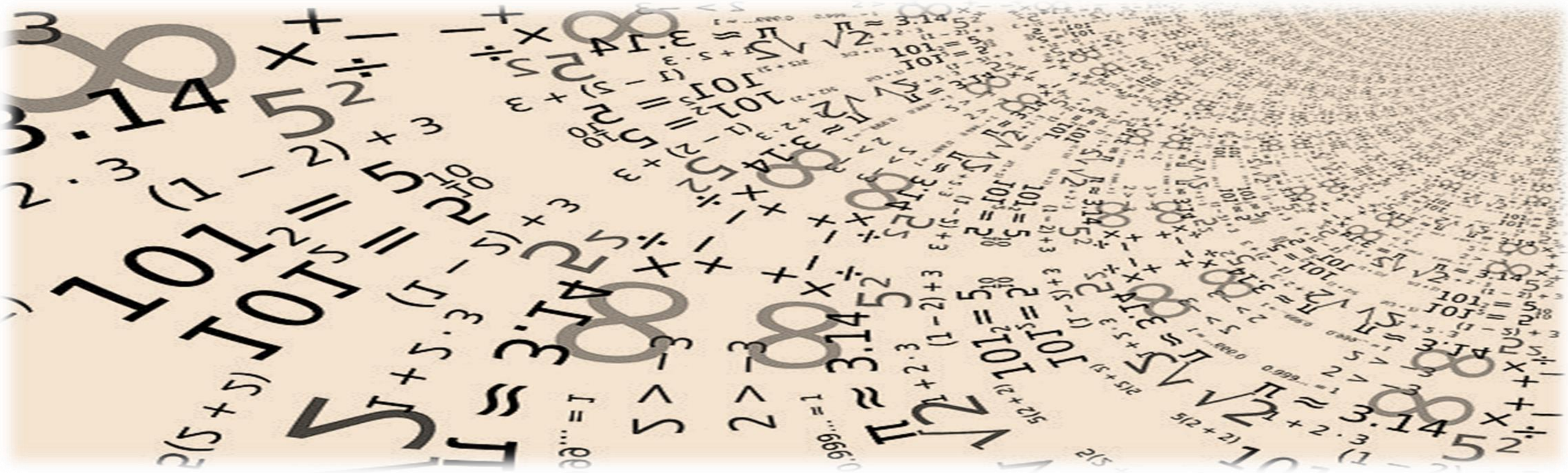
t_i	Exacto $y_i = y(t_i)$	Runge-Kutta orden 4 w_i	Error $\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8292933	0.0000053
0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
0.8	2.1272295	2.1272027	0.0000269
1.0	2.6408591	2.6408227	0.0000364
1.2	3.1799415	3.1798942	0.0000474
1.4	3.7324000	3.7323401	0.0000599
1.6	4.2834838	4.2834095	0.0000743
1.8	4.8151763	4.8150857	0.0000906
2.0	5.3054720	5.3053630	0.0001089

Observe que el error máximo se obtiene en la aproximación de $y(2)$, y el tamaño del error es aproximadamente 1.1×10^{-4}

Ejercicio 2. Utilice la función ode45 de MATLAB para aproximar la solución del PVI:

$$y'(t) = y - t^2 + 1, \qquad 0 \le t \le 2$$

$$y(0) = 0.5$$



Sistemas de ecuaciones diferenciales

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Un sistema de m–ésimo orden de problemas de valor inicial de primer orden tiene la forma:

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \qquad (1)$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

para $a \le t \le b$, con valores iniciales:

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m \quad (2)$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Un sistema de m–ésimo orden de problemas de valor inicial de primer orden tiene la forma:

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \qquad (1)$$

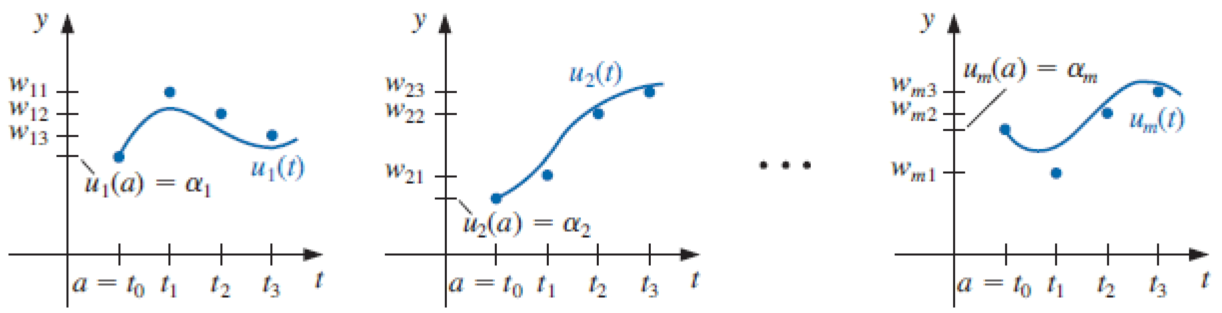
$$\vdots$$

$$\frac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

para $a \leq t \leq b$, con valores iniciales:

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m \quad (2)$$

Objetivo: encontrar m funciones $u_1, u_2, \dots, u_m$ que satisfacen cada una de las ecuaciones diferenciales junto con las condiciones iniciales.



Burden, 10ª Ed., pág. 249

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales (SEDO)

Un sistema de m–ésimo orden de problemas de valor inicial de primer orden tiene la forma:

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \qquad (1)$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

para $a \leq t \leq b$, con valores iniciales:

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m \quad (2)$$

Ejemplo 11. Las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y$$

para $0 \leq t \leq 2$, con

$$x(0) = 6, \qquad y(0) = 4$$

conforman un SEDO de 1er orden, con

$$f_1(t, x, y) = x + 2y$$

$$f_2(t, x, y) = 3x + 2y$$

$$\alpha_1 = 6, \ \alpha_2 = 4$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición 5. (Burden 10ª Ed., pág. 248)

Se dice que la función $f(t, y_1, \ldots, y_m)$, definida en el conjunto

$$D = \{(t, u_1, \ldots, u_m) \mid a \leq t \leq b \text{ y } -\infty < u_i < \infty, \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, m\},$$

satisface la **condición de Lipschitz** en D en las variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$ si existe una constante $L > 0$ con

$$|f(t, u_1, \ldots, u_m) - f(t, z_1, \ldots, z_m)| \leq L \sum_{j=1}^{m} |u_j - z_j|, \tag{5.47}$$

para todas las $(t, u_1, \ldots, u_m)$ y $(t, z_1, \ldots, z_m)$ en D. ■

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición 5. (Burden 10ª Ed., pág. 248)

Se dice que la función $f(t, y_1, \ldots, y_m)$, definida en el conjunto

$$D = \{(t, u_1, \ldots, u_m) \mid a \le t \le b \text{ y } -\infty < u_i < \infty, \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, m\},$$

satisface la **condición de Lipschitz** en D en las variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$ si existe una constante $L > 0$ con

$$|f(t, u_1, \ldots, u_m) - f(t, z_1, \ldots, z_m)| \le L \sum_{j=1}^{m} |u_j - z_j|, \tag{5.47}$$

para todas las $(t, u_1, \ldots, u_m)$ y $(t, z_1, \ldots, z_m)$ en D. ■

Observación. (Burden 10ª Ed., pág. 248)

Al usar el teorema de valor medio se puede mostrar que si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en D y si

$$\left| \frac{\partial f(t, u_1, \ldots, u_m)}{\partial u_i} \right| \le L,$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ y todas las $(t, u_1, \ldots, u_m)$ en D, entonces f satisface la condición de Lipschitz en D con constante de Lipschitz L (consulte [BiR], p. 141). A continuación se muestra un teorema de existencia y unicidad básico, su demostración se puede encontrar en [BiR], p. 152-154.

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Teorema 4. (Burden 10ª Ed., pág. 248).

Supongamos que $D = \{(t, u_1, \ldots, u_m) | a \leq t \leq b, -\infty < u_i < \infty, i = 1,2, \ldots, m\}$ y que las funciones $f_i(t, u_1, \ldots, u_m)$ son continuas y satisfacen una condición de Lipstchitz en D para cada $i = 1,2, \ldots, m,$. Entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales de 1er orden,

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

con valores iniciales: $u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \ldots, u_m(a) = \alpha_m$, tiene una solución única:

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

✓ Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias son generalizaciones de los métodos de ecuaciones de 1er orden.

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

- ✓ Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias son generalizaciones de los métodos de ecuaciones de 1er orden.

- ✓ Consideremos el SEDO

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2)$$

con condiciones iniciales,

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

- ✓ Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias son generalizaciones de los métodos de ecuaciones de 1er orden.

- ✓ Consideremos el SEDO

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2)$$

con condiciones iniciales,

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2$$

Si denotamos con:

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

El sistema se puede escribir en la forma,

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, u_1, u_2) \\ f_2(t, u_1, u_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u}(a) = \begin{bmatrix} u_1(a) \\ u_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

- ✓ Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias son generalizaciones de los métodos de ecuaciones de 1er orden.

- ✓ Consideremos el SEDO

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2)$$

con condiciones iniciales,

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2$$

Si denotamos con:

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

El sistema se puede escribir en la forma,

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, u_1, u_2) \\ f_2(t, u_1, u_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u}(a) = \begin{bmatrix} u_1(a) \\ u_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$$

Por lo que **resulta un PVI** 'vectorial',

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{F}\big(t, \boldsymbol{u}(t)\big)$$

$$\boldsymbol{u}(a) = \boldsymbol{\alpha}$$

que se puede resolver utilizando Euler, Euler mejorado, punto medio o RK.

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

El método de Euler para el sistema de ecuaciones diferenciales valor inicial

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2)$$

con condiciones iniciales,

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2$$

Viene dado por,

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,i+1} \\ w_{2,i+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{i+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_i} + \underbrace{h}_{h} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t_i, w_{1,i}, w_{2,i}) \\ f_2(t_i, w_{1,i}, w_{2,i}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}(t_i, \mathbf{w}_i)}$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

El método de Euler para el sistema de ecuaciones diferenciales valor inicial

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2)$$

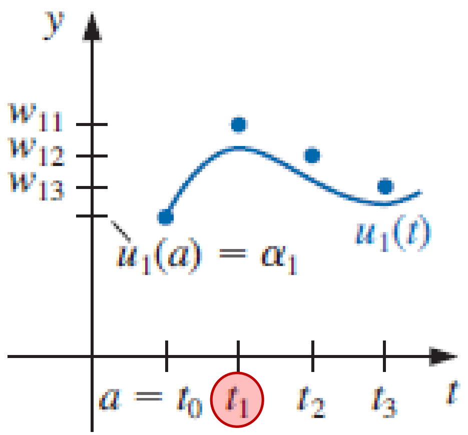
con condiciones iniciales,

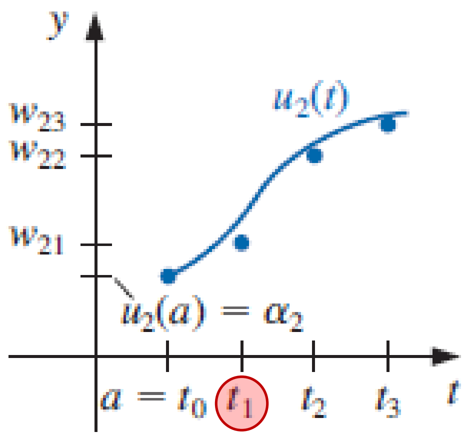
$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2$$

Viene dado por,

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,i+1} \\ w_{2,i+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{i+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_i} + h \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t_i, w_{1,i}, w_{2,i}) \\ f_2(t_i, w_{1,i}, w_{2,i}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}(t_i, \mathbf{w}_i)}$$





$i = 0$: $\mathbf{w}_1 \approx \boldsymbol{u}(t_1)$

$$\begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) \\ f_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) \end{bmatrix}$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

El método de Euler *para el sistema de ecuaciones diferenciales valor inicial*

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2)$$

con condiciones iniciales,

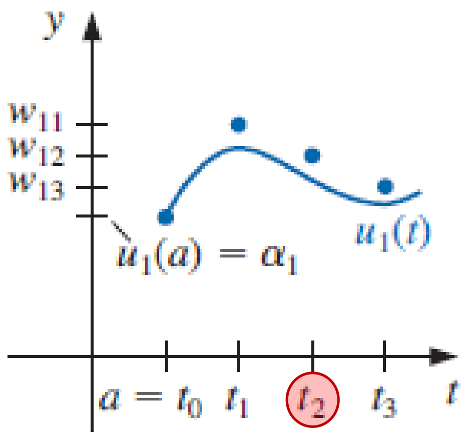
$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2$$

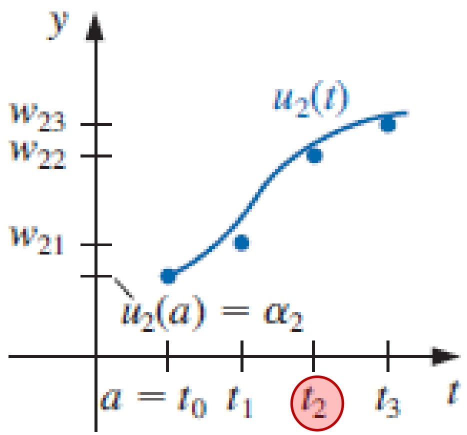
Viene dado por,

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,i+1} \\ w_{2,i+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{i+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_i} + h \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t_i, w_{1,i}, w_{2,i}) \\ f_2(t_i, w_{1,i}, w_{2,i}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}(t_i, \mathbf{w}_i)}$$

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + h \, \boldsymbol{F}(t_i, \mathbf{w}_i)$$





$i = 0$: $\mathbf{w}_1 \approx \boldsymbol{u}(t_1)$

$$\begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) \\ f_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) \end{bmatrix}$$

$i = 1$: $\mathbf{w}_2 \approx \boldsymbol{u}(t_2)$

$$\begin{bmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_1(t_1, w_{1,1}, w_{2,1}) \\ f_2(t_1, w_{1,1}, w_{2,1}) \end{bmatrix}$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

El método de Euler *para el sistema de ecuaciones diferenciales valor inicial*

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2)$$

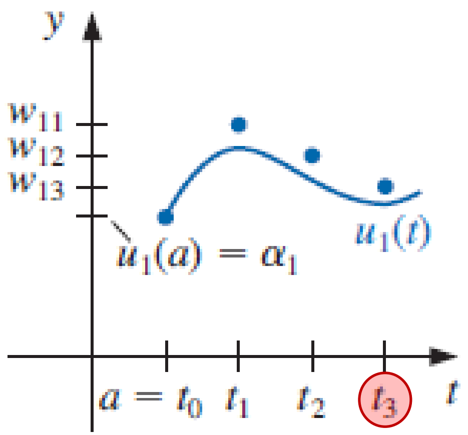
con condiciones iniciales,

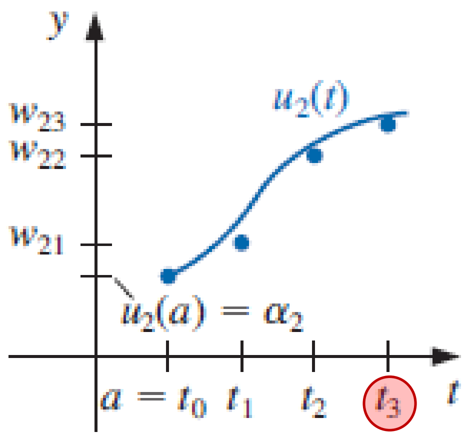
$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2$$

Viene dado por,

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,i+1} \\ w_{2,i+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{i+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_i} + \underset{h}{h} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t_i, w_{1,i}, w_{2,i}) \\ f_2(t_i, w_{1,i}, w_{2,i}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}(t_i, \mathbf{w}_i)}$$





$i = 0$: $\mathbf{w}_1 \approx \boldsymbol{u}(t_1)$

$$\begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) \\ f_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) \end{bmatrix}$$

$i = 1$: $\mathbf{w}_2 \approx \boldsymbol{u}(t_2)$

$$\begin{bmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_1(t_1, w_{1,1}, w_{2,1}) \\ f_2(t_1, w_{1,1}, w_{2,1}) \end{bmatrix}$$

$i = 2$: $\mathbf{w}_3 \approx \boldsymbol{u}(t_3)$

$$\begin{bmatrix} w_{1,3} \\ w_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_1(t_2, w_{1,2}, w_{2,2}) \\ f_2(t_2, w_{1,2}, w_{2,2}) \end{bmatrix}$$

Unidad 7. Sistemas de ecuaciones diferenciales

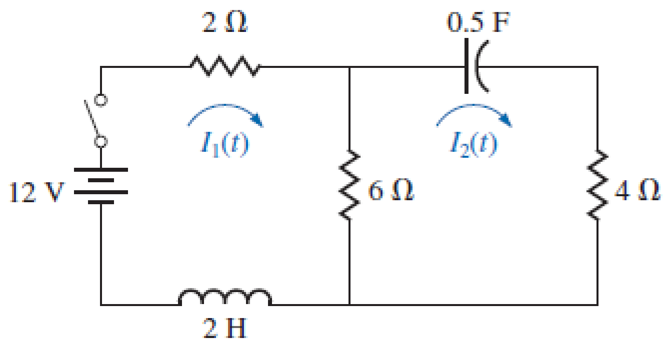
Ejercicio 4: (Burden 10ª Ed., pág. 250)

La ley de Kirchhoff establece que la suma de todos los cambios de voltaje alrededor de un circuito cerrado es cero. Esta ley implica que la corriente $I(t)$ en un circuito cerrado que contiene una resistencia de R ohms, una capacitancia de C faradios, una inductancia de L henrios y una fuente voltaje de $E(t)$ volts satisface la ecuación

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = E(t).$$

Las corrientes $I_1(t)$ y $I_2(t)$ en los ciclos izquierdo y derecho, respectivamente, del circuito mostrado en la figura 5.7 son las soluciones para el sistema de ecuaciones

$$2I_1(t) + 6[I_1(t) - I_2(t)] + 2I_1'(t) = 12,$$
$$\frac{1}{0.5}\int I_2(t)\,dt + 4I_2(t) + 6[I_2(t) - I_1(t)] = 0.$$



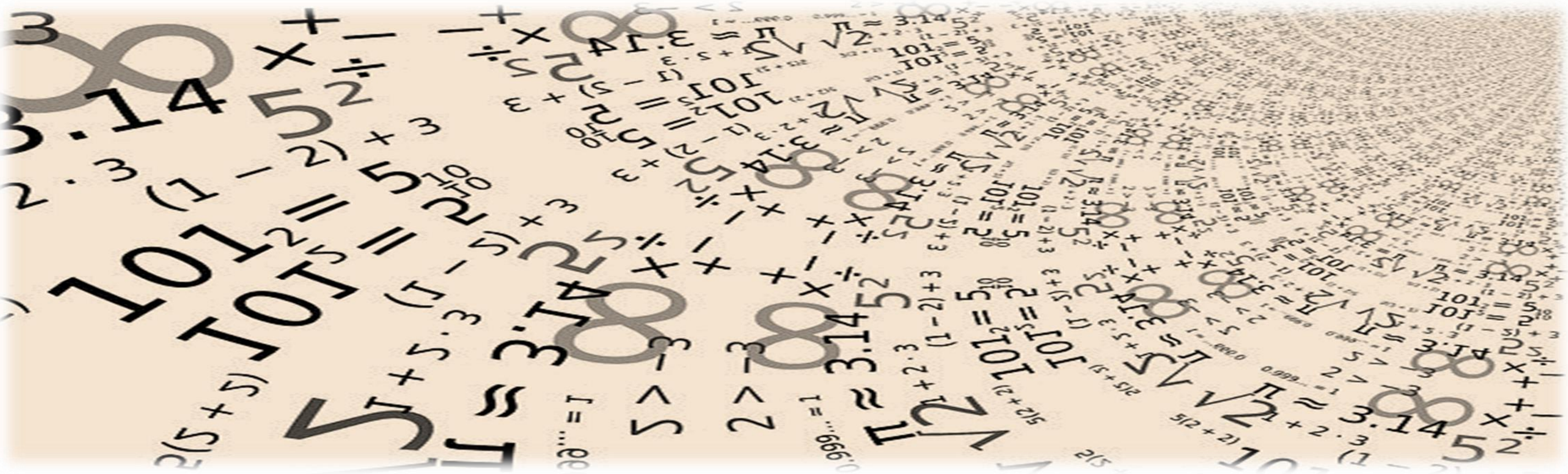
Si el interruptor en el circuito está cerrado en el tiempo $t = 0$, tenemos las condiciones iniciales $I_1(0) = 0$ y $I_2(0) = 0$. Resuelva para $I_1'(t)$ en la primera ecuación, al derivar la segunda ecuación y sustituyendo para $I_1'(t)$ se obtiene

$$I_1' = f_1(t, I_1, I_2) = -4I_1 + 3I_2 + 6, \quad I_1(0) = 0,$$
$$I_2' = f_2(t, I_1, I_2) = 0.6I_1' - 0.2I_2 = -2.4I_1 + 1.6I_2 + 3.6, \quad I_2(0) = 0.$$

La solución exacta para este sistema es

$$I_1(t) = -3.375e^{-2t} + 1.875e^{-0.4t} + 1.5,$$
$$I_2(t) = -2.25e^{-2t} + 2.25e^{-0.4t}.$$

Hallar la solución del sistema utilizando el método de Euler con $h = 0.1$



Ecuaciones diferenciales de orden superior

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Ecuaciones diferenciales de orden superior.

Un problema de m-ésimo orden tiene la forma general:

$$y^{(m)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}\right), a \leq t \leq b$$

con condiciones iniciales,

$$y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \dots, y^{m-1}(a) = \alpha_m$$

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Ecuaciones diferenciales de orden superior.

Un problema de m-ésimo orden tiene la forma general:

$$y^{(m)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}\right), a \leq t \leq b$$

con condiciones iniciales,

$$y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \ldots, y^{m-1}(a) = \alpha_m$$

Ejemplo 12. El problema del péndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0, \qquad 0 \leq t \leq 10$$

$$\theta(0) = \theta'(0) = 0$$

define una ecuación diferencial de 2do orden, con

$$f(t, \theta, \theta') = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Observaciones. Las ecuaciones diferenciales de orden superior:

- ✓ Surgen en muchos problemas físicos, como circuitos eléctricos y sistemas masa-resorte.
- ✓ No se requieren técnicas nuevas para resolverlas.

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Observaciones. Las ecuaciones diferenciales de orden superior:

- ✓ Surgen en muchos problemas físicos, como circuitos eléctricos y sistemas masa-resorte.
- ✓ No se requieren técnicas nuevas para resolverlas.
- ✓ Se pueden reducir a un sistema de m-ecuaciones diferenciales realizando cambio de variables.
- ✓ ¿Cómo realizar el cambio de variables para obtener el sistema de ecuaciones?

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Considere el PVI

$$y^{(m)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}\right), a \le t \le b$$

con condiciones iniciales,

$$y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \dots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

Para **reducir la ecuación diferencial a un sistema de m ecuaciones** diferenciales se recurre al cambio de variables

$$u_1(t) = y(t)$$

$$u_2(t) = y'(t)$$

$$\vdots$$

$$u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$$

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Considere el PVI

$$y^{(m)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}\right), a \leq t \leq b$$

con condiciones iniciales,

$$y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \ldots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

Para **reducir la ecuación diferencial a un sistema de m ecuaciones** diferenciales se recurre al cambio de variables

$$u_1(t) = y(t)$$

$$u_2(t) = y'(t)$$

$$\vdots$$

$$u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$$

$$y^{(m)} = f\left(t, \overset{u_1}{y}, \overset{u_2}{y'}, \ldots, \overset{u_m}{y^{(m-1)}}\right), a \leq t \leq b$$

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Considere el PVI

$$y^{(m)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}\right), a \le t \le b$$

con condiciones iniciales,

$$y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \dots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

Para **reducir la ecuación diferencial a un sistema de m ecuaciones** diferenciales se recurre al cambio de variables

$$u_1(t) = y(t)$$

$$u_2(t) = y'(t)$$

$$\vdots$$

$$u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$$

Al derivar y hacer las igualaciones respectivas se obtiene el sistema de ecuaciones,

$$\frac{du_1}{dt} = u_1'(t) = y'(t) = u_2(t)$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_2'(t) = y''(t) = u_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_m}{dt} = u_m'(t) = y^{(m)}(t) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

con condiciones iniciales,

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m$$

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Ejemplo 13. (Burden 10ª Ed., pág. 252)

Transforme el PVI de 2do orden

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t} sen(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

con condiciones iniciales,

$$y(0) = -0.4, \quad y'(0) = -0.6$$

en un sistema de PVI de primer orden y use el método de RK con $h = 0.1$ para aproximar la solución.

Ejemplo 13. (Burden 10ª Ed., pág. 252)

Transforme el PVI de 2do orden

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}sen(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

con condiciones iniciales,

$$y(0) = -0.4, \quad y'(0) = -0.6$$

en un sistema de PVI de primer orden y use el método de RK con $h = 0.1$ para aproximar la solución.

Solución.

1. Llevar el problema a la forma general:

$$y'' = 2y' - 2y + e^{2t}sen(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$y(0) = -0.4, \qquad y'(0) = -0.6$$

Unidad 7. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Ejemplo 13. (Burden 10ª Ed., pág. 252)

Transforme el PVI de 2do orden

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}sen(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

con condiciones iniciales,

$$y(0) = -0.4, \quad y'(0) = -0.6$$

en un sistema de PVI de primer orden y use el método de RK con $h = 0.1$ para aproximar la solución.

Solución.

1. Llevar el problema a la forma general:

$$y'' = 2y' - 2y + e^{2t}sen(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$y(0) = -0.4, \qquad y'(0) = -0.6$$

2. El cambio de variables

$$u_1(t) = y(t), \; u_2(t) = y'(t)$$

conduce al sistema de ecuaciones,

$$u_1{}' = y' = u_2$$

$$u_2' = y'' = f(t, u_1, u_2)$$

con condiciones iniciales,

$$u_1(a) = y(0) = \alpha_1 = -0.4$$

$$u_2(a) = y'(0) = \alpha_2 = -0.6$$

y

$$f(t, u_1, u_2) = 2u_2 - 2u_1 + e^{2t}sen(t)$$

Ejercicio 5. Escriba las ecuaciones de diferencias del método de Euler para el sistema de ecuaciones del ejemplo anterior.