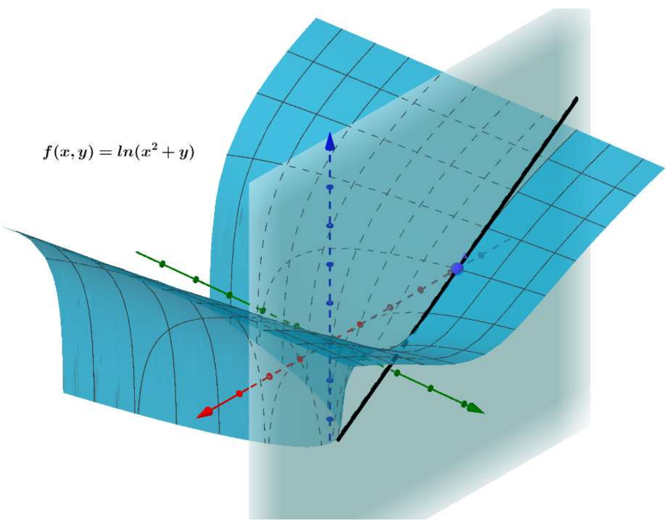
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Regla de la Cadena



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

26 de julio del 2021

Regla de la Cadena Caso 1

Para funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión se relaciona con el caso donde $z = f(x, y)$ y cada variable x y y es a su vez una función de la variable t. Esto significa que z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$, y la regla de la cadena da una fórmula para derivar z como una función de t. Supongamos que f es derivable, recuerde que éste es el caso cuando f_x y f_y son continuas

Regla de la cadena (caso 1) Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de t. Entonces z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Como se escribe a menudo $\partial z/\partial x$ en lugar de $\partial f/\partial x$, podemos volver a escribir la regla de la cadena en la forma

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

EJEMPLO 1 Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \operatorname{sen} 2t$ y $y = \cos t$, determine dz/dt cuando $t = 0$.

SOLUCIÓN La regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t)\end{aligned}$$

No es necesario escribir las expresiones para x y y en términos de t. Simplemente observe que cuando $t = 0$ tenemos $x = \operatorname{sen} 0 = 0$ y $y = \cos 0 = 1$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos 0) + (0 + 0)(-\operatorname{sen} 0) = 6$$

La derivada del ejemplo 1 se puede interpretar como la razón de cambio de z con respecto a t cuando el punto (x, y) se desplaza por la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$ (véase figura 1). En particular, cuando $t = 0$, el punto (x, y) es $(0, 1)$ y $dz/dt = 6$ es la razón del incremento cuando uno se desplaza por la curva C que pasa por el punto $(0, 1)$. Si, por ejemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representa la temperatura en el punto (x, y), entonces la función compuesta $z = T(\text{sen } 2t, \cos t)$ representa la temperatura en los puntos sobre C y la derivada dz/dt representa la razón a la cual la temperatura cambia a lo largo de C.

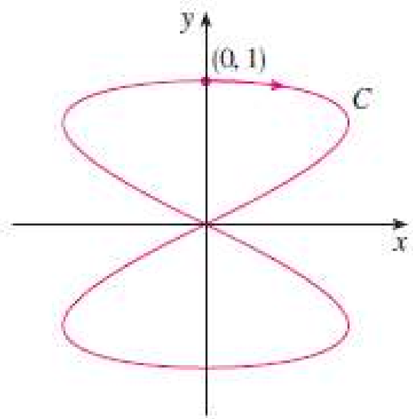


FIGURA 1
La curva $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$

EJEMPLO 2 La presión P, en kilopascales, el volumen V (en litros) y la temperatura T (en kelvin), de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8.31T$. Determine la razón a la cual la presión cambia cuando la temperatura es de 300 K y se incrementa a razón de 0.1 K/s y el volumen es de 100 L y se incrementa a razón de 0.2 L/s.

SOLUCIÓN Si t representa el tiempo que transcurre en segundos, entonces en el instante dado $T = 300$, $dT/dt = 0.1$, $V = 100$, $dV/dt = 0.2$. Puesto que

$$P = 8.31\frac{T}{V}$$

con la regla de la cadena

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{8.31}{100}(0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2}(0.2) = -0.04155$$

La presión disminuye a razón de casi 0.042 kPa/s.

Ahora consideremos la situación en donde $z = f(x, y)$ pero cada x y y es una función de dos variables s y t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces z es indirectamente una función de s y de t y deseamos hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. Recuerde que al calcular $\partial z/\partial t$ mantenemos fija a s y calculamos la derivada ordinaria de z con respecto a t. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema caso 1 para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Un razonamiento similar se efectúa para $\partial z/\partial s$ y así se demuestra la versión siguiente de la regla de la cadena.

Regla de la cadena (caso 2) Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EJEMPLO 3 Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

SOLUCIÓN Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2t)$$

Para recordar la regla de la cadena, es útil dibujar el **diagrama de árbol** de la figura 2. Dibujamos ramas desde la variable dependiente z a las variables intermedias x y y para indicar que z es una función de x y y. Luego dibujamos ramas desde x y y a las variables independientes s y t. En cada rama escribimos la derivada parcial correspondiente. Para determinar $\partial z/\partial s$ calculamos el producto de las derivadas parciales en cada trayectoria desde z hasta s y luego sumamos los productos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

De la misma manera determinamos $\partial z/\partial t$ mediante las trayectorias de z a t.

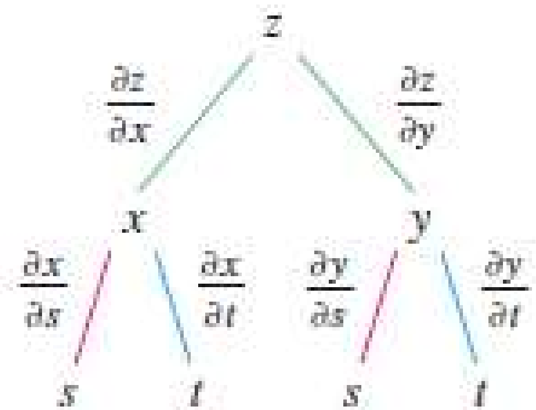


FIGURA 2

Ahora consideramos la situación general en la cual una variable dependiente u es una función de n variables intermedias $x_1, \ldots, x_n$, cada una de las cuales, a su vez, es una función de m variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que hay n términos, uno para cada variable intermedia.

Regla de la cadena (versión general) Supongamos que u es una función derivable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

EJEMPLO 4 Exprese la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.

SOLUCIÓN Utilice el teorema con $n = 4$ y $m = 2$. La figura 3 muestra el diagrama de árbol. Aunque no ha escrito las derivadas en las ramas, se sobreentiende que si una rama va desde y a u, entonces la derivada parcial para esa rama es $\partial y/\partial u$. Con la ayuda del diagrama de árbol, podemos escribir las expresiones necesarias:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

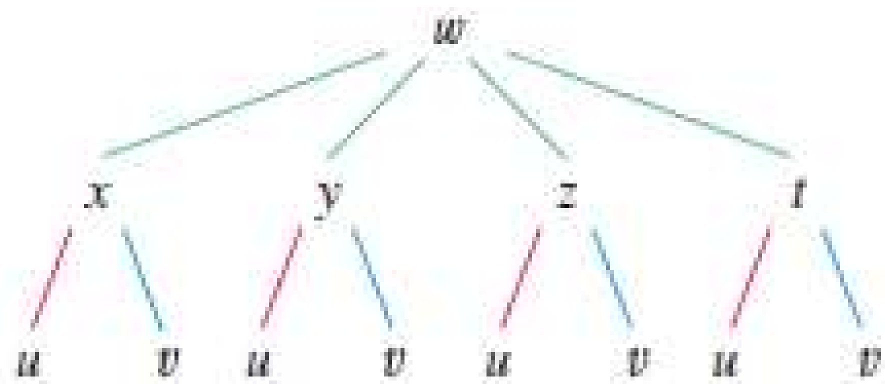


FIGURA 3

EJEMPLO 5 Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, y $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine el valor de $\partial u/\partial s$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

SOLUCIÓN Con la ayuda del diagrama de árbol de la figura 4, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$, y $t = 0$, tenemos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

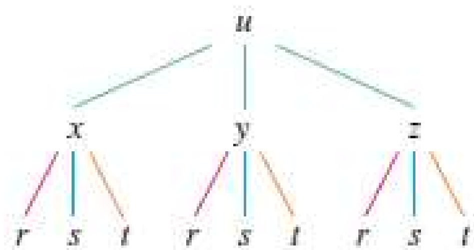


FIGURA 4

EJEMPLO 6 Si $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ y f es derivable, demuestre que g satisface la ecuación

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUCIÓN Sea $x = s^2 - t^2$ y $y = t^2 - s^2$. Entonces, $g(s, t) = f(x, y)$ y la regla de la cadena dan

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Por lo tanto,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

EJEMPLO 7 Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, calcule a) $\partial z/\partial r$ y b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUCIÓN

a) La regla de la cadena da

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

b) Al aplicar la regla del producto a la expresión en el inciso a) obtenemos

5

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Pero al aplicar la regla de la cadena una vez más (véase figura 5), llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 5 y usar la igualdad de las derivadas de segundo orden combinadas, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

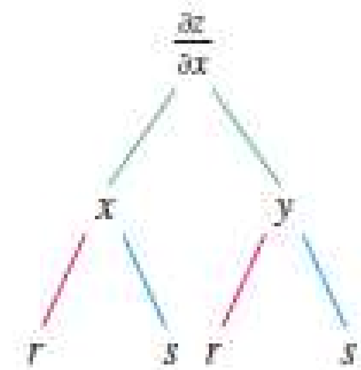


FIGURA 5

Derivación Implícita

Suponemos que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función derivable de x, es decir, $y = f(x)$, donde $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f. Si F es derivable, aplicamos el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $dx/dx = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx y obtener

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

EJEMPLO 8 Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUCIÓN La ecuación dada se puede escribir como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

de modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Ahora se supone que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en el dominio f. Si F y f son derivables, entonces usamos la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

así que esta ecuación se transforma en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ y obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

EJEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUCIÓN Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Entonces, de acuerdo con lo anterior tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Ejercicios Propuestos:

1-6 Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt o dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = e^t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

7-12 Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3, \quad x = s \cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$

9. $z = \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$

11. $z = e^r \cos \theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

13. Si $z = f(x, y)$, donde f es derivable,

$$\begin{array}{ll} x = g(t) & y = h(t) \\ g(3) = 2 & h(3) = 7 \\ g'(3) = 5 & h'(3) = -4 \\ f_x(2, 7) = 6 & f_y(2, 7) = -8 \end{array}$$

determine dz/dt cuando $t = 3$.

21-26 Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se indican.

21. $z = x^4 + x^2y, \quad x = s + 2t - u, \quad y = stu^2;$

$\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$ donde $s = 4, t = 2, u = 1$

23. $w = xy + yz + zx, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = r\theta;$

$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ donde $r = 2, \theta = \pi/2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}, \quad p = u + vw, \quad q = v + uw, \quad r = w + uv;$

$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ donde $u = 2, v = 3, w = 4$

27-30 Aplique la ecuación de la lámina 15 para encontrar dy/dx.

27. $y\cos x = x^2 + y^2$

29. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

31-34 Con las ecuaciones de la lámina 17 halle $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x\ln y = z^2$

35. La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados celsius. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y se miden en centímetros. La función temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 3 segundos?

39. La longitud ℓ, ancho w y altura h de una caja cambia con el tiempo. En un cierto instante, las dimensiones son $\ell = 1$ m y $w = h = 2$ m, y ℓ y w se incrementan a razón de 2 m/s, en tanto que h disminuye a razón de 3 m/s. Encuentre en ese instante las razones a las cuales las siguientes magnitudes cambian.

a) El volumen
b) El área superficial
c) La longitud de la diagonal

45-48 Suponga que todas las funciones dadas son derivables.

45. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, a) determine $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial\theta$ y b) demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

47. Si $z = f(x - y)$, demuestre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Si $z = f(x, y)$, donde $x = s + t$ y $y = s - t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

53. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$