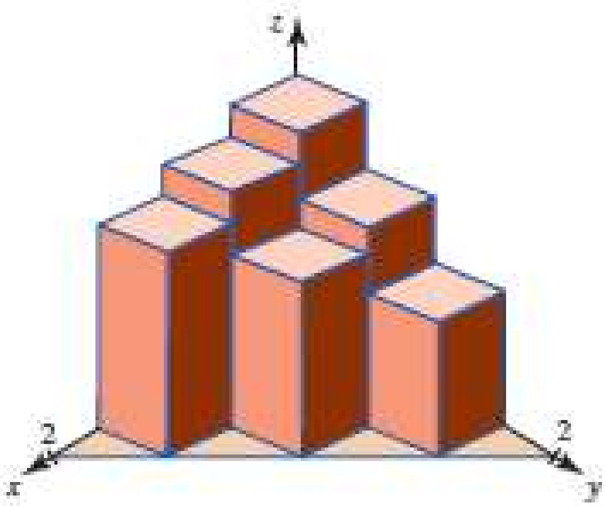
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Integrales Doble en Coordenadas Polares



Arelis Díaz

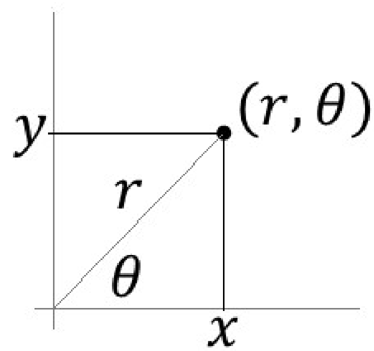
Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

09 de agosto del 2021

Coordenadas polares

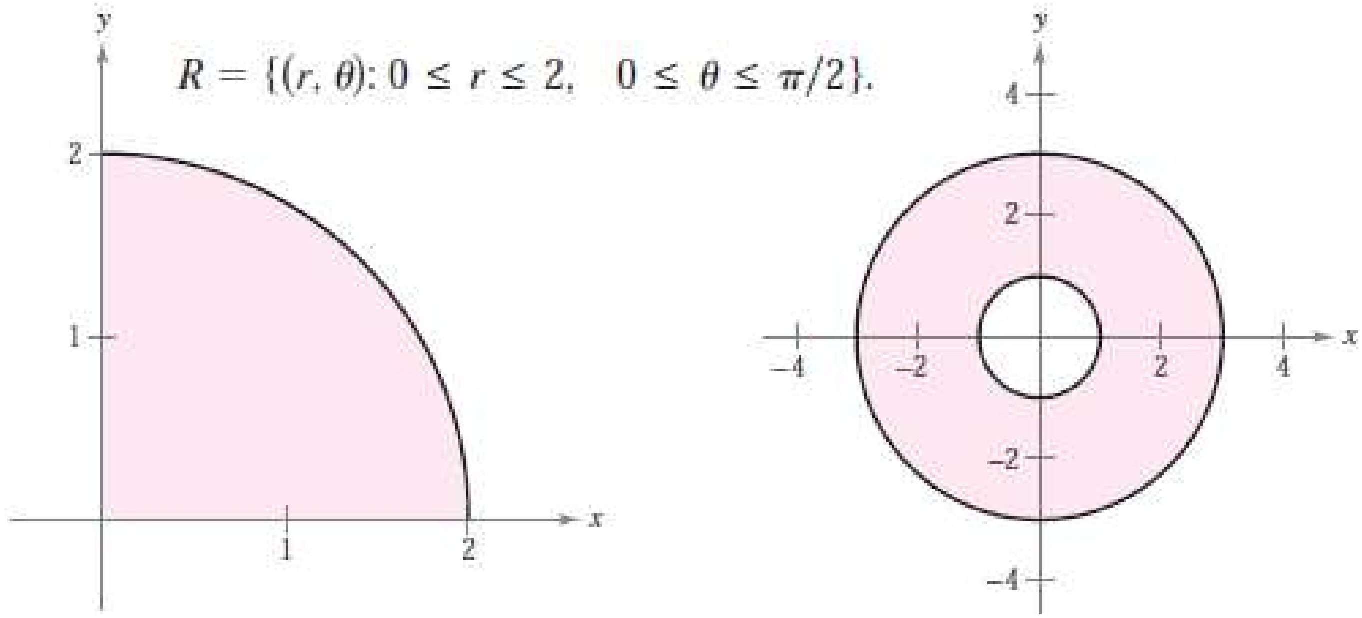
- Existe la siguiente relación entre las coordenadas polares (r, θ) de un punto P sus coordenadas rectangulares (x, y):

  - ✓ $x = r\cos\theta$
  - ✓ $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$
  - ✓ $x^2 + y^2 = r^2$
  - ✓ $\tan\theta = \frac{y}{x}$



EJEMPLO 1 Utilizar coordenadas polares para describir una región

Utilizar coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura 14.24.



$R = \{(r, \theta): 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2\}.$

a)

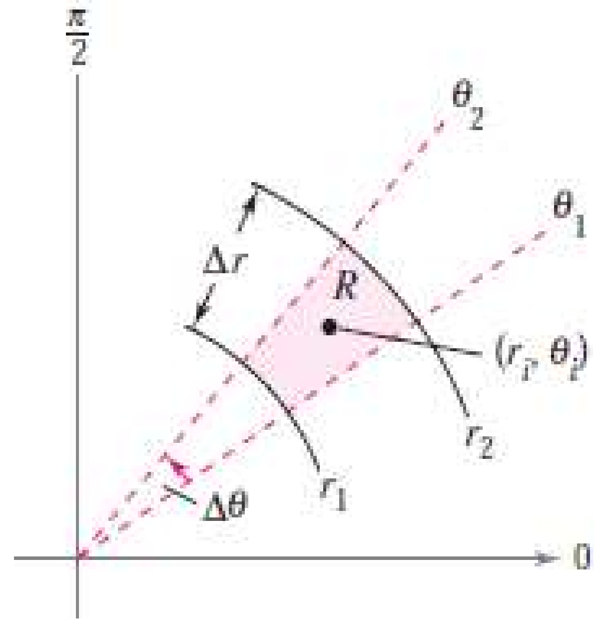
Figura 14.24

b) $R = \{(r, \theta): 1 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}.$

Las regiones del ejemplo 1 son casos especiales de sectores polares

$$R = \{(r, \theta): r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$ Sector polar

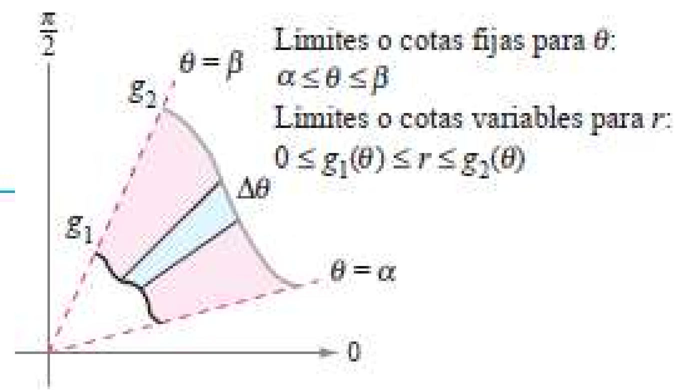
como el mostrado en la figura 14.25.



TEOREMA 14.3 CAMBIO DE VARIABLES A LA FORMA POLAR

Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq (\beta - \alpha) \leq 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dr\, d\theta.$$



Región r-simple

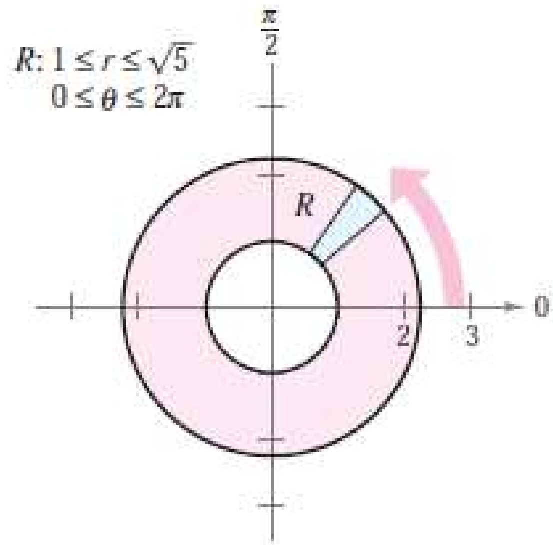
NOTA Si $z = f(x, y)$ es no negativa en R, entonces la integral del teorema 14.3 puede interpretarse como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R. Cuando se usa la integral en el teorema 14.3, asegurarse de no omitir el factor extra de r en el integrando.

EJEMPLO 2 Evaluar una integral usando coordenadas polares doble

Sea R la región anular comprendida entre los dos círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$. Evaluar la integral $\int_R\int (x^2 + y)\, dA$.

Solución Los límites o cotas polares son $1 \le r \le \sqrt{5}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, como se muestra en la figura 14.30. Además, $x^2 = (r\cos\theta)^2$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_R\int (x^2 + y)\, dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^2\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^3\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}\,\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\Bigg]_1^{\sqrt{5}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3\cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta \\
&= \left(3\theta + \frac{3\,\mathrm{sen}\,2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\cos\theta\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\
&= 6\pi.
\end{aligned}$$



Región r-simple
Figura 14.30

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

Utilizar las coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$ Hemisferio que forma la superficie superior.

e inferiormente por la región circular R dada por

$$x^2 + y^2 \leq 4$$ Región circular que forma la superficie inferior.

como se muestra en la figura 14.31.

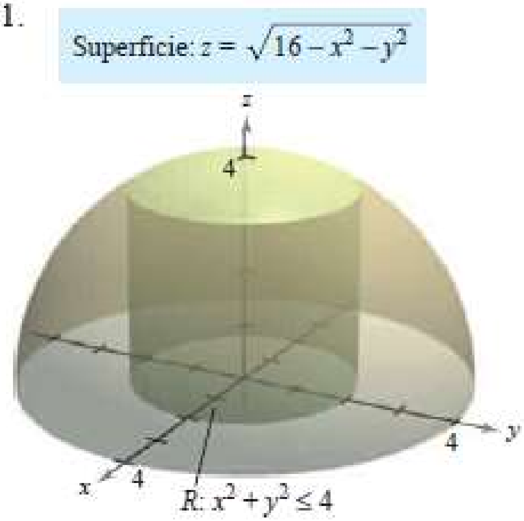


Figura 14.31

Solución En la figura 14.31 se puede ver que R tiene como límites o cotas

$$-\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, \quad -2 \leq y \leq 2$$

y que $0 \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2}$. En coordenadas polares, las cotas son

$$0 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con altura $z = \sqrt{16-x^2-y^2} = \sqrt{16-r^2}$. Por consiguiente, el volumen V está dado por

$$\begin{aligned}
V = \int_R\int f(x, y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16-r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (16-r^2)^{3/2}\Big]_0^2\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(24\sqrt{3}-64\right)d\theta \\
&= -\frac{8}{3}\left(3\sqrt{3}-8\right)\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{16\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right) \approx 46.979.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Hallar áreas de regiones polares

Utilizar una integral doble para hallar el área encerrada por la gráfica de $r = 3\cos 3\theta$.

Solución Sea R un pétalo de la curva mostrada en la figura 14.32. Esta región es r-simple y los límites son los siguientes.

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \qquad \text{Límites o cotas fijas para } \theta.$$

$$0 \leq r \leq 3\cos 3\theta \qquad \text{Límites o cotas variables para } r.$$

Por tanto, el área de un pétalo es

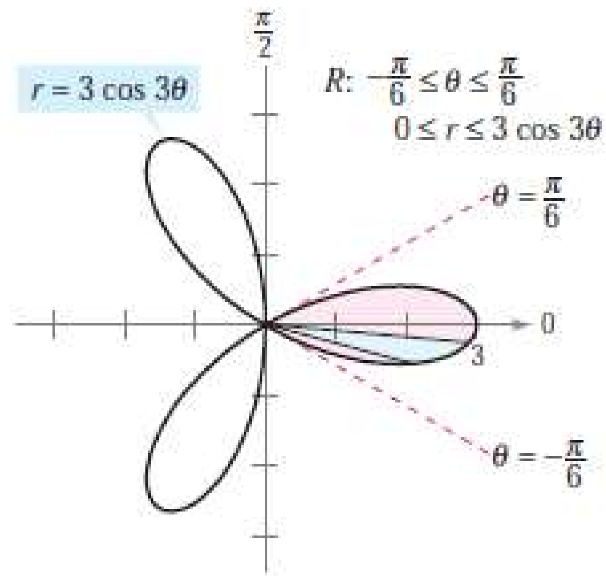
$$\frac{1}{3}A = \iint_R dA = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{3\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{3\cos 3\theta} d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta\,d\theta \qquad \boxed{\cos^2 3\theta = \frac{1+\cos 6\theta}{2}}$$

$$= \frac{9}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta)\,d\theta = \frac{9}{4}\left[\theta + \frac{1}{6}\,\text{sen}\,6\theta\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{3\pi}{4}.$$

Así, el área total es $A = 9\pi/4$.



Como se ilustra en el ejemplo 4, el área de una región en el plano puede representarse mediante

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta.$$

Si $g_1(\theta) = 0$, se obtiene

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2}{2} \Big]_{0}^{g_2(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (g_2(\theta))^2 \, d\theta$$

lo cual concuerda con el teorema 10.13.

EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración

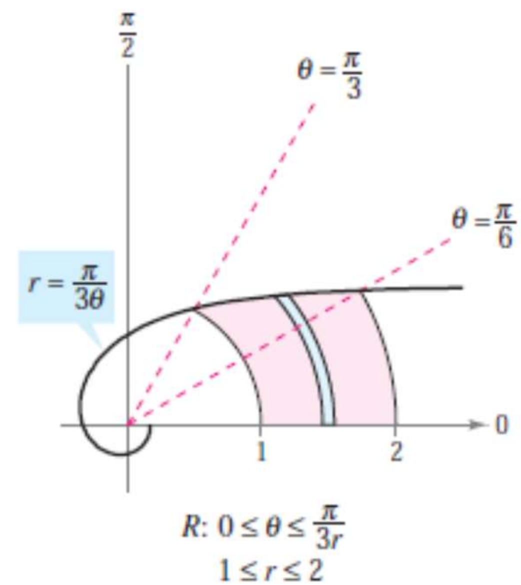
Hallar el área de la región acotada superiormente por la espiral $r = \pi/(3\theta)$ e inferiormente por el eje polar, entre $r = 1$ y $r = 2$.

Solución La región se muestra en la figura 14.33. Las cotas o límites polares de la región son

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3r}.$$

Por tanto, el área de la región puede evaluarse como sigue.

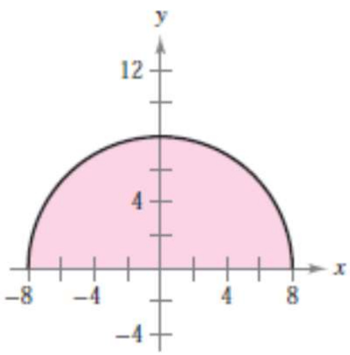
$$A = \int_1^2 \int_0^{\pi/(3r)} r\,d\theta\,dr = \int_1^2 r\theta\Big]_0^{\pi/(3r)} dr = \int_1^2 \frac{\pi}{3}\,dr = \frac{\pi r}{3}\Big]_1^2 = \frac{\pi}{3}$$



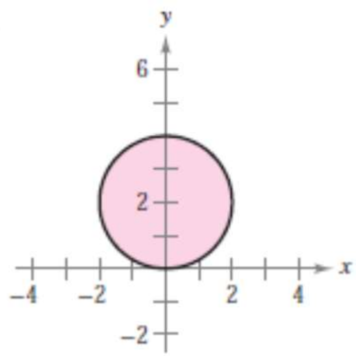
Región θ-simple
Figura 14.33

En los ejercicios 5 a 8, utilizar las coordenadas polares para describir la región mostrada.

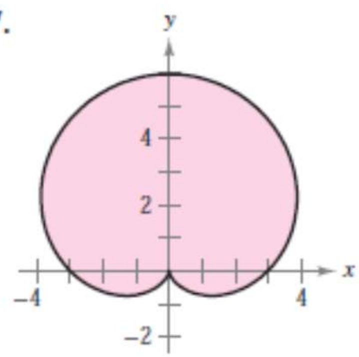
5.



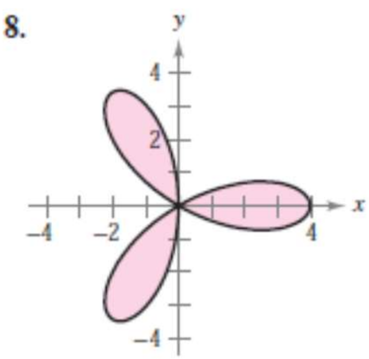
6.



7.



8.



En los ejercicios 9 a 16, evaluar la integral doble $\int_R\int f(r, \theta)\, dA$, y dibujar la región R.

9. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{6} 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^{3} \sqrt{9-r^2}\, r\, dr\, d\theta$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} \theta r\, dr\, d\theta$

En los ejercicios 17 a 26, evaluar la integral iterada pasando a coordenadas polares.

17. $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y \, dx \, dy$

19. $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$

21. $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dy \, dx$

23. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, dy \, dx$

25. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2) \, dy \, dx$

Volumen **En los ejercicios 33 a 38, utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

33. $z = xy, x^2 + y^2 = 1$, primer octante

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 25$

37. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 - 4x = 0$

39. ***Volumen*** Hallar a tal que el volumen en el interior del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y en el exterior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen del hemisferio.

41. ***Volumen*** Determinar el diámetro de un orificio cavado verticalmente a través del centro del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = 25e^{-(x^2+y^2)/4}$, $z = 0$, y $x^2 + y^2 = 16$ si se elimina la décima parte del volumen del sólido.

Área **En los ejercicios 49 a 54, trazar una gráfica de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones. Después, usar una integral doble para encontrar el área de la región.**

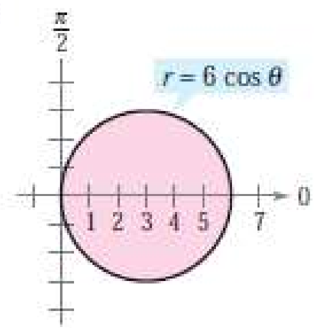
49. Dentro del círculo $r = 2\cos\theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

51. Dentro del círculo $r = 3\cos\theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

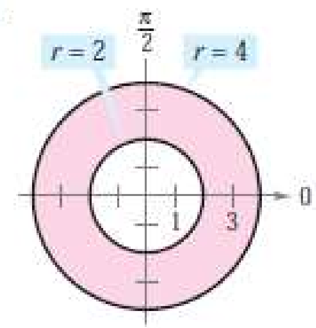
53. Dentro de la curva rosa $r = 4\,\mathrm{sen}\,3\theta$ y fuera del círculo $r = 2$.

Área **En los ejercicios 43 a 48, utilizar una integral doble para calcular el área de la región sombreada.**

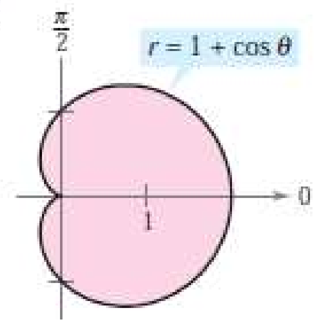
43.



44.



45.



46.