Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss con Pivote y Factorización LU

Gauss-Jordan

Wilhelm Jordan (1842-1899)
fue un geodesista alemán. Es recordado y conocido principalmente por el algoritmo del método “Eliminación de Gauss-Jordan” que creó para resolver el problema de mínimos cuadrados. Los mínimos cuadrados fueron muy importantes en el área de la topografía alemana, en la cual Jordan hizo muchos trabajos.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
fue un matemático, astrónomo y físico alemán. Es considerado por muchos como el más grande matemático que ha existido. Sus contribuciones y aportes más importantes fueron la teoría de números, análisis matemático, geometría diferencial, álgebra, estadística, óptica, magnetismo.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

$$Ax = b$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad & \ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots.$$

$$[a_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{n3}][x_n] = [b_n]$$

La matriz [A:b] es la matriz ampliada del sistema

CONCEPTOS IMPORTANTES:

Vector
Matriz
Matriz Diagonal
Matriz triangular Superior
Matriz triangular Inferior
Matriz Identidad
Matriz Permutación
Matriz Inversa
Matriz dominante
Matriz definida positiva

Vector fila

También llamado vector reglón, es un arreglo en renglón de números, por ejemplo:

$$a = [a1, a2, a3, a4]$$

Un vector renglón se considera como una matriz de 1 x N. Cuando se usa la palabra "vector" sin especificar si es "columna" o "renglón", usualmente quiere decir un vector columna.

Vector columna

Un vector columna es un arreglo de columna de números o variables, por ejemplo:

$$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix}$$

Matriz

A menudo, las matrices se escriben en forma simbólica como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Note que en las ecuaciones, el primer subíndice de una matriz cambia en la dirección vertical y el segundo en la dirección horizontal. Las ecuaciones se abrevian a menudo como

$A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ respectivamente.

Matriz Cuadrada

Cuando el arreglo es cuadrado, se llama matriz cuadrada. Las siguientes son matrices cuadradas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

Todos los elementos son iguales a cero excepto los elementos de la diagonal, que son iguales a uno. Una matriz identidad se denota por I, es decir,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

Una matriz triangular superior es una matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal son 0.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La segunda matriz del ejemplo tiene también los elementos de la diagonal igual a 0.

Matriz triangular inferior

Una matriz triangular inferior es una matriz cuyos elementos por encima de la diagonal son 0.

Ejemplos:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & -9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la segunda matriz del ejemplo es triangular inferior y triangular superior. Esto ocurre cuando la matriz es diagonal.

Gauss-Jordan con pivote

Método de Eliminación Gauss-Jordan:

Es un algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Consiste en obtener un sistema equivalente al sistema original dado. El sistema equivalente puede ser un sistema triangular inferior o superior.

El procedimiento de reducir la matriz en forma triangular, se le llama eliminación de Gauss-Jordan. Si se utiliza una estrategia de pivoteo para reducir la matriz, se le denomina eliminación Gauss con pivote. Si además se hace un proceso de sustitución para obtener los valores xi, se le agrega “sustitución hacia atrás”.

Tenemos 3 Tipos de operaciones básicas:

- La ecuación E_j puede ser multiplicada por cualquiera constante $\lambda \neq 0$ que transforme la ecuación λE_j en E_j. Esta operación se denota por:

$$\boldsymbol{\lambda E_j \rightarrow E_j}$$

- La ecuación Ei puede ser multiplicada por cualquier constante λ y sumada a la ecuación E_j para obtener la nueva ecuación E_j. Esta operación se denota por:

$$\boldsymbol{E_j + \lambda E_i \rightarrow E_j}$$

- La ecuación Ei de la ecuación E_j puede intercambiarse. Esta operación se denota por:

$$\boldsymbol{E_i \rightarrow E_j}$$

ELIMINACION DE GAUSS

Se establecen ciertas condiciones durante la solución de un problema, denominadas estrategias de pivoteo, entre las cuales se menciona la del ***Pivoteo Parcial***, también llamado, ***Pivoteo de Columna Máxima***, que consiste en:

Identificar el mayor elemento en valor absoluto entre los elementos de la columna donde se encuentra el pivote, incluyendo el primer encontrado.
Intercambiar filas para colocar el máximo valor en la diagonal, usando: $\boldsymbol{E_i \to E_j}$

Iniciar el proceso de reducción del sistema y repetir los dos pasos anteriores cada vez que sea necesario.

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$E_1: a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots a_{1,n}x_n = b_1$$

$$E_2: a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots a_{2,n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$E_n: a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \cdots a_{n,n}x_n = b_n$$

$E_j - \left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right) E_i \rightarrow E_j$, siendo i=1, 2, 3, 4…n

j=2, 3, 4, 5…n+1

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} & a_{3,n+1} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

SUSTITUCION HACIA ATRÁS

Si $a_{nn} \neq 0$, la variable x_n tiene como solución:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

Continuando el proceso tenemos

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j}{a_{ii}}$$, para cada i=n-1, n-2… 2, 1

Gauss-Jordan con pivote (Sustitucion hacia atrás)

Algoritmo de la solución:

Paso 1: Haga $i=1$

Paso 2: Sea p el primer entero $i \leq p \leq n$ con $|a_{pi}| = \text{máx}_{i \leq j \leq n} |a_{ji}|$

Paso 3: Si $|a_{pi}|=0$ el sistema de ecuaciones no tiene solución única y el Procedimiento se detiene. Si $|a_{pi}| \neq 0$, realice la operación $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$

Paso 4: Hacer $j=i+1, i+2, \ldots, n$. Sea $m_{ji}=a_{ji}/a_{ii}$ y efectúe las operaciones $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow E_j$

Paso 5: Hacer $i=i+1$

Paso 6: Si $i < n$ vaya al paso 2. Si $i = n$ vaya al paso 7

Paso 7: Si $a_{nn} = 0$, el sistema no tiene solución única y el procedimiento se detiene. Si $a_{nn} \neq 0$, vaya al paso 8

Paso 8: Realice la operación: $X_n = (a_{n,n+1})/a_{nn}$

Paso 9: Hacer $i = n-1, n-2, \ldots, 1$.

Paso 10: Termina el proceso

	1	3	5	7	1
A =	2	-1	3	5	2
	0	0	2	5	3
	-2	-6	-3	1	4

2	-1	3	5	2
1	3	5	7	1
0	0	2	5	3
-2	-6	-3	1	4

2.0000	-1.0000	3.0000	5.0000	2.0000
0	3.5000	3.5000	4.5000	0
0	0	2.0000	5.0000	3.0000
0	-7.0000	0	6.0000	6.0000

2.0000	-1.0000	3.0000	5.0000	2.0000
0	-7.0000	0	6.0000	6.0000
0	0	2.0000	5.0000	3.0000
0	0	3.5000	7.5000	3.0000

2.0000	-1.0000	3.0000	5.0000	2.0000
0	-7.0000	0	6.0000	6.0000
0	0	2.0000	5.0000	3.0000
0	3.5000	3.5000	4.5000	0

2.0000	-1.0000	3.0000	5.0000	2.0000
0	-7.0000	0	6.0000	6.0000
0	0	3.5000	7.5000	3.0000
0	0	2.0000	5.0000	3.0000

2.0000	-1.0000	3.0000	5.0000	2.0000
0	-7.0000	0	6.0000	6.0000
0	0	3.5000	7.5000	3.0000
0	0	0	0.7143	1.2857

2.0000	-1.0000	3.0000	5.0000	2.0000
0	-7.0000	0	6.0000	6.0000
0	0	3.5000	7.5000	3.0000
0	0	0	0.7143	1.2857

2.0000	-1.0000	3.0000	5.0000	2.0000
0	-7.0000	0	6.0000	6.0000
0	0	3.5000	7.5000	3.0000
0	0	0	0.7143	1.2857

Las soluciones son:

1.3429   0.6857   -3.0000   1.8000

Gauss con pivote *y Sustitución hacia atrás*

Algoritmo de solución en Matlab

```
fprintf('Ingresar los elementos del sistema como una matriz empleada:');
fprintf('\n Las columnas separadas por espacios, las filas por punto y coma (;) \ n');
matriz=input('','s'), fil=1; col=1; j=1; A=str2num(matriz); n=size(A); i=1;
while i<n(2)
if A(1,1)==0   fprintf('No existe solución única');  end
if A(i,i)==0   mayor=0;              for h=2:n(1)
if A(h,i)>mayor, indice=h; mayor=A(h,i);   end
end   if mayor=0
for h=1:n(2)-1    aux(h)=A(i,h);    end
for h=1:n(2)-1    A(i,h)=A(indice,h);    end
for h=1:n(2)-1    A(indice,h)=aux(h);    end     end       end
j=i+1;         while j<=n(1)
m=A(j,i)/A(i,i);           k=1;
while k<=n(2)          A(j,k)=A(j,k)-(m*A(i,k));     k=k+1,    end
j=j+1; end    i=i+1;  end          X(1)=A(1,n(2))/A(1,1);        i=n(2)-1;
while i>0    j=i+1;  sum=0;         while j<n(2)
sum=sum+A(i,j)*X(j);          j=j+1;             end
X(i)=1/A(i,i)*(A(i,n(2))-sum);        i=i-1;          end
fprintf('\n La solución del sistema de ecuaciones es: \n'); disp(X);
```

```
>> gaussconpiv
Ingresar los elementos del sistema como una matriz ampliada:
 Las columnas separadas por espacios, las filas por punto y coma (;)
1.19 2.11 -100 1 1.12;14.2 -0.122 12.2 -1 3.44;0 100 -99.9 1 2.15; 15.3 0.11 -13.1 -1 4.16

matriz =

    '1.19 2.11 -100 1 1.12;14.2 -0.122 12.2 -1 3.44;0 100 -99.9 1 2.15; 15.3 0.11 -13.1 -1 4.16'


 La solución del sistema de ecuaciones es:
    0.1768    0.0127   -0.0207   -1.1826


>> |
```

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN: MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN DE MATRICES LU: DOOLITTLE Y CROUT

El método de factorización LU transforma una matriz A en un producto de dos matrices: A=LU, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. La condición necesaria y suficiente para que una matriz no singular A pueda descomponerse, en la forma A=LU es que det(A) sea diferente de cero.

Suponga que una matriz A es del orden mxn, se puede escribir como el producto de dos matrices:

A = L•U

Donde:

L = matriz triangular inferior mxn.
U = matriz escalonada mxn

Entonces para resolver el sistema:

A•x = b

Escribimos:

A•x = (L•U)•x = L•(U•x)

Una posible estrategia de solución consiste en tomar ***y = U•x*** y resolver para ***L•y = b.***

Como la matriz ***L*** es triangular superior, este sistema puede resolverse mediante sustitución hacía bajo. Una vez con los valores encontrados de ***y***, las incógnitas al sistema inicial se resuelve despejando ***x*** de ***U•x = y.***

Algoritmo

- El siguiente algoritmo incorpora el procedimiento de factorización LU junto con el método de Gauss hacía atrás, para una solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Paso 1: Si se selecciona L_{ii} = 1 se trabajara con Doolittle
Si se selecciona U_{ii} = 1 se trabajara con Crout
Seleccione L_{11} y U_{11} que satisfaga L_{11} U_{11} = α_{11}

Paso 2: Genera las primeras entradas de la matriz L

$L_{j1} = \frac{\alpha_{j1}}{U_{11}}$ para cada j = 2,. . ., n

Paso 3: Genere las primeras entradas de la matriz U

$U_{1j} = \frac{\alpha_{1j}}{L_{11}}$ para cada j = 2,. . ., n

Paso 4: hacer i= 2

Paso 5: SeleccioneL_{ii} y U_{ii} que satisfaga:

$$L_{ii}U_{ii} - \alpha_{ii} \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{ki}$$

Paso 6: Si $i < n$ vaya al paso 7
Si $i > n$ vaya al paso 10

Paso 7: Para cada $j = i + 1, i + 2, \ldots., n$

$$L_{ji=} \frac{1}{U_{ii}} \{\alpha_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk}U_{ki}\}$$

Paso 8: Para cada $j = i + 1, i + 2, \ldots., n$

$$U_{ij=} \frac{1}{L_{ii}} \{\alpha_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{kj}\}$$

Paso 9: Hacer $i = i + 1$ y vaya al paso 5

Paso 10: Termina el proceso, todas las entradas de «L» y «U» han sido determinadas.

Paso 11: Resuelva el sistema triangular inferior utilizando el método de Eliminación de Gauss hacia adelante *Lz*= b

Hágase: $Z_i = \frac{a_{1,n+1}}{L_{11}}$ j =para cada $i = 2,. . ., n$

$$Z_{i=}\frac{1}{L_{ii}}\{a_{1,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,j}Z_j\}$$

Paso 12: Resuelva el sistema triangular superior utilizando el método de Eliminación de Gauss hacia atrás *Ux*= z

Hágase: $X_n = \frac{Z_n}{U_{nn}}$

Paso 13: para cada $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$

$$X_{i=}\frac{1}{U_{ii}}\{Z_i - \sum_{k=1}^{i-1} U_{i,j}X_j\}$$

Paso 14: Termina el proceso.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el algoritmo de factorización de matrices LU. Aplique Doolittle.

$$\begin{matrix} 1 & 7 & -4 \\ 4 & -4 & 9 \\ 12 & -1 & 3 \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} X1 + 7X2 - 4X3 = -51 \\ 4X1 - 4X2 + 9X3 = 62 \\ 12X1 - 1X2 + 3X3 = 8 \end{Bmatrix}$$

Paso 1: $L_{11}U_{11} = a_{11} \quad \longrightarrow U_{11} = 1$

Paso 2: Genera las primeras entradas de la matriz LL_{j1}= $\frac{\alpha_{j1}}{U_{11}}$ para cada j = 2,. . ., n

$$L_{21} = \frac{a_{21}}{U_{11}} = 4 \qquad L_{31} = \frac{a_{31}}{U_{11}} = 12$$

Paso 3: Genere las primeras entradas de la matriz U: $U_{1j} = \frac{\alpha_{1j}}{L_{11}}$ para cada j = 2,. . ., n

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = 7 \qquad U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = -4$$

Paso 4: $i = 2$

Paso 5: Seleccione L_{ii} y U_{ii} que satisfaga $L_{ii}U_{ii} - \alpha_{ii} \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{ki}$

$$U_{22} = a_{22} - (L_{21}U_{12}) \longrightarrow U_{22} = -32$$

Paso 6: $i < 3$; $2 < 3$ vaya al paso 7

Paso 7: Para cada $j = i + 1, i + 2, \ldots, n$ $L_{ji} = \frac{1}{U_{ii}}\{\alpha_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk}U_{ki}\}$

$$L_{32} = \frac{1}{U_{22}}\{a_{32} - (L_{31}U_{12})\} \longrightarrow L_{32} = \frac{85}{32}$$

Paso 8: Para cada $j = i + 1, i + 2, \ldots, n$ $\quad U_{ij=}\frac{1}{L_{ii}}\{\alpha_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{kj}\}$

$$U_{23} = \frac{1}{L_{22}}\{a_{23} - (L_{21}U_{13})\} \longrightarrow U_{23} = 25$$

Paso 9: $i = 3$ vaya al paso 5

*Paso 5:

$$U_{33} = a_{33} - (L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23}) \longrightarrow U_{33} = \frac{-493}{32}$$

Paso 6: $i = 3$; $3 = 3$ vaya al paso 10

Paso 10: Termina el proceso, todas las entradas de L y U han sido determinadas.

Paso 11: Resuelva el sistema triangular inferior utilizando el método de Eliminación de Gauss hacia adelante *Lz*= b

Hágase $Z_i = \frac{a_{1,n+1}}{L_{11}}\, j =$para cada $i = 2, \ldots, n$ $Z_{i=}\frac{1}{L_{ii}}\{a_{1,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,j} Z_j\}$

$$Z_1 = \frac{a_{1,3+1}}{L_{11}} \qquad \longrightarrow \qquad Z_1 = -51$$

$$Z_2 = \frac{1}{L_{22}}\{a_{2,3+1} - (L_{2,1}Z_1)\} \qquad \longrightarrow \qquad Z_2 = 266$$

$$Z_3 = \frac{1}{L_{33}}\{a_{3,3+1} - (L_{3,1}Z_1 + L_{3,2}Z_2)\} \qquad \longrightarrow \qquad Z_3 = \frac{-1385}{16}$$

Paso 12: Resuelva el sistema triangular superior utilizando el método de Eliminación de Gauss hacia atrás *Ux*= z

Paso 13: para cada $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ $X_{i=}\frac{1}{U_{ii}}\{Z_i - \sum_{k=1}^{i-1} U_{i,j}X_j\}$

Hagase

$$X_3 = \frac{Z_3}{U_{33}} \longrightarrow X_3 = \frac{2770}{493}$$

$$X_2 = \frac{1}{U_{22}}\{Z_2 - \left(U_{2,3}X_3\right)\} \longrightarrow X_2 = \frac{-1934}{493}$$

$$X_1 = \frac{1}{U_{11}}\{Z_1 - \left(U_{1,2}X_2 + U_{1,3}X_3\right)\} \longrightarrow X_1 = \frac{-525}{493}$$

Paso 14: Termina el proceso.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el algoritmo de factorización de matrices LU. Aplique Doolittle.

E1: $x1 + 7x2 - 4x3 = -51$
E2: $4x1 - 4x2 + 9x3 = 62$
E3: $12x1 - x2 + 3x3 = 8$

Matriz

$$\begin{matrix} 1 & 7 & -4 & = -51 \\ 4 & -4 & 9 & = 62 \\ 12 & -1 & 3 & = 8 \end{matrix}$$

Solución:

```
>> A=[1 7 -4; 4 -4 9;12 -1 3]

A =      1    7   -4
         4   -4    9
        12   -1    3
```

```
>>b=[-51; 62; 8]

b =    -51
        62
         8


>> [L,U,P]=lu(A)

L =    1.0000         0         0
         0.0833    1.0000         0
         0.3333   -0.5176    1.000

U =    12.0000   -1.0000    3.0000
             0     7.0833   -4.2500
             0          0    5.8000

P =    0    0    1
       1    0    0
       0    1    0
```

Una vez obtenida la factorización de la matriz A se produce a calcular:
```
>> Pb=P*b

Pb =     8
       -51
        62
```

Para obtener Z a partir de LZ=Pb:
```
>> Z= inv(L)*(Pb)

Z =       8.0000
        -51.6667
         32.5882
```

Para obtener X a partir de UX-Z:
```
>>X=inv(U)*Z

X =       -1.0649
          -3.9229
           5.6187
```

```
function [L,U] = doolittle (A)
% Reservar espacio para las matrices L y U
% Empezando con ceros hay sitios que ya no tendremos que tocar
L = zeros(size(A));
U = zeros(size(A));
[nRows, nColumns] = size(A);
% Recorremos en orden de columnas, es más rápido en MATLAB
for j=1:nColumns
  for i=1:nRows
    % Estamos por encima de la diagonal, hallamos elemento de U
    if i<=j
      U(i,j) = A(i,j);
      for k=1:i-1
        U(i,j) = U(i,j) - L(i,k)*U(k,j);
      end
    end
    % Estamos por debajo de la diagonal, hallamos elemento de L
    if j<=i
      L(i,j) = A(i,j);
      for k=1:j-1
        L(i,j) = L(i,j) - L(i,k)*U(k,j);
      end
      L(i,j) = L(i,j)/U(j,j);
    end
  end
end
```