Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Derivadas e Integrales de Funciones Vectoriales

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

21 de julio del 2021

Derivadas de Funciones Vectoriales

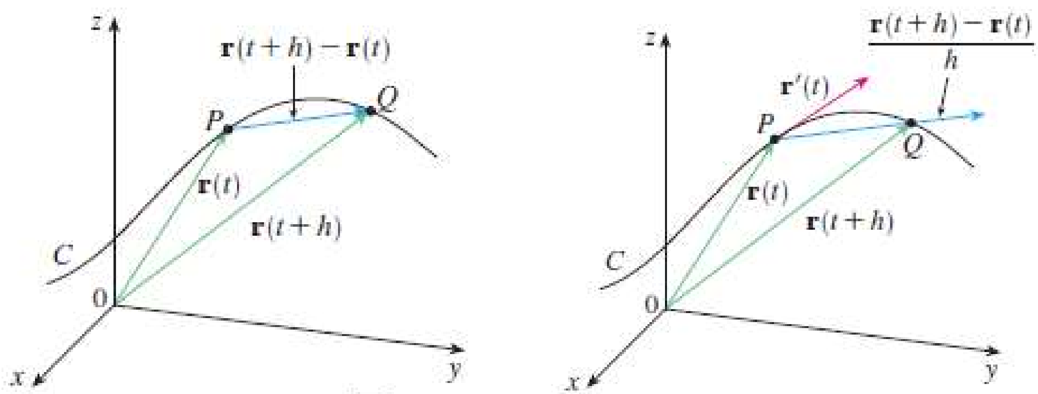
Sea $\vec{r}(t)$ una función vectorial se define la derivada de la función $\vec{r}$ en el punto t como sigue

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \overrightarrow{r'}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

si este límite existe.

Interpretación Geométrica

Si P es el extremo del vector en posición de $\vec{r}(t)$ y Q es el extremo del vector en posición de $\vec{r}(t+h)$, entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$ representa al vector $\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)$ y para $h>0$ el vector $\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}$ es un vector paralelo y en la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$ como se ve en la figura inferior. Cuando h se aproxima a cero entonces $\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}$ se aproxima al vector que definimos como $\overrightarrow{r'}(t)$, que es un vector tangente a la gráfica de $\vec{r}$.



a) Vector secante $\overrightarrow{PQ}$ b) Vector tangente $\mathbf{r}'(t)$

Por esta razón, el vector $\mathbf{r}'(t)$ se denomina **vector tangente** a la curva que está definida por $\mathbf{r}$ en el punto P, siempre que $\mathbf{r}'(t)$ exista y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. La **recta tangente** a C en P se define como la recta que pasa por P y es paralela al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$.

Podemos usar el siguiente teorema para hallar la derivada de una función vectorial.

Teorema Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$, donde f, g y h son funciones derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$

V **EJEMPLO 1**

a) Calcule la derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$.

b) Determine el vector tangente unitario en el punto donde $t = 0$.

SOLUCIÓN

a) Según el teorema, se deriva cada componente de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

b) Como $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ y $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, el vector tangente unitario en el punto $(1, 0, 0)$ es

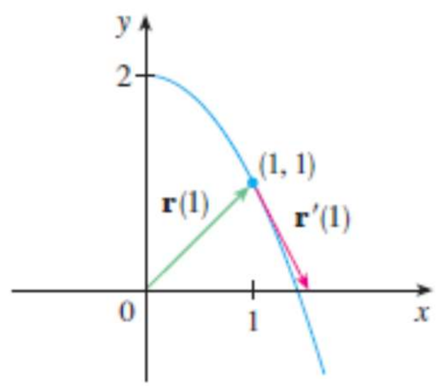
$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}$$

EJEMPLO 2 En el caso de la curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (2 - t)\,\mathbf{j}$, determine $\mathbf{r}'(t)$ y grafique el vector de posición $\mathbf{r}(1)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(1)$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

La curva es una curva plana y al eliminar el parámetro de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$, $y = 2 - t$ se obtiene $y = 2 - x^2$, $x \geqslant 0$. En la figura 2, dibuje el vector de posición $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ con inicio en el origen y el vector tangente $\mathbf{r}'(1)$ cuyo inicio es el punto correspondiente $(1, 1)$.



V **EJEMPLO 3** Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice de ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

en el punto $(0, 1, \pi/2)$.

SOLUCIÓN La ecuación vectorial de la hélice es $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \operatorname{sen} t, t\rangle$, de modo que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2\operatorname{sen} t, \cos t, 1\rangle$$

El valor del parámetro que corresponde al punto $(0, 1, \pi/2)$ es $t = \pi/2$, de modo que el vector tangente es $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1\rangle$. La recta tangente es la recta que pasa por $(0, 1, \pi/2)$ paralela al vector $\langle -2, 0, 1\rangle$, de modo que de acuerdo con las ecuaciones 12.5.2 sus ecuaciones paramétricas son

$$x = -2t \qquad y = 1 \qquad z = \frac{\pi}{2} + t$$

Teorema Suponga que **u** y **v** son funciones vectoriales derivables, c es un escalar y f es una función de valores reales. Entonces,

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

3. $\dfrac{d}{dt}[f(t)\,\mathbf{u}(t)] = f'(t)\,\mathbf{u}(t) + f(t)\,\mathbf{u}'(t)$

4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$ (Regla de la cadena)

V EJEMPLO 4 Demuestre que si $|\mathbf{r}(t)| = c$ (una constante), entonces $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para toda t.

SOLUCIÓN Como

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

y c^2 es una constante, la fórmula 4 del teorema da

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Por tanto, $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$, la cual establece que $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

Integrales de Funciones Vectoriales

Si $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ es una función vectorial definimos

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}}$$

Es posible generalizar el teorema fundamental del cálculo para funciones vectoriales continuas como se señala a continuación:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

donde $\mathbf{R}$ es una antiderivada de $\mathbf{r}$, es decir, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Utilizamos la notación $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para integrales indefinidas (antiderivadas).

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}\\ &= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector constante de integración, por lo que

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}\right]_0^{\pi/2} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\,\mathbf{k}$$

Ejercicios Propuestos:

17-20 Encuentre el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ en el punto con el valor dado del parámetro t.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{-t}, 2\arctan t, 2e^{t} \rangle, \quad t = 0$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4 \rangle, \quad t = 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

21. Si $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, determine $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ y $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

22. Si $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ y $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

27. Encuentre una ecuación vectorial para la recta tangente a la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 25$ y $y^2 + z^2 = 20$ en el punto $(3, 4, 2)$.

28. Encuentre el punto sobre la curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, e^{t} \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, donde la recta tangente es paralela al plano $\sqrt{3}x + y = 1$.

35-40 Evalúe la integral.

35. $\int_0^2 (t\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j} + 3t^5\,\mathbf{k})\,dt$

38. $\int_1^2 \left(t^2\,\mathbf{i} + t\sqrt{t-1}\,\mathbf{j} + t \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}\right)dt$

39. $\int (\sec^2 t\,\mathbf{i} + t(t^2+1)^3\,\mathbf{j} + t^2 \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

40. $\int \left(te^{2t}\,\mathbf{i} + \frac{t}{1-t}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathbf{k}\right)dt$