Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Producto Vectorial o Producto Cruz

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

16 de julio del 2021

Definición:

Sean $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ dos vectores en el espacio entonces el producto vectorial se define por

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

Una regla nemotécnica para recordar el producto es verlo como un determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

Donde $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Notas:

- Del producto vectorial resulta otro vector.
- Este producto no es conmutativo, pero se puede ver que $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Ejemplo: Si $\vec{a} = \langle 1,3,4 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 2,7,-5 \rangle$, determine $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

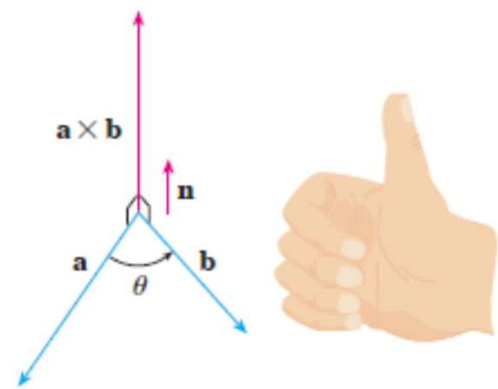
$$\vec{a} \times \vec{b} = [3(-5) - 4(7)]\boldsymbol{i} - [1(-5) - 4(2)]\boldsymbol{j} + [1(7) - 3(2)]\boldsymbol{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -43\boldsymbol{i} + 13\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

Propiedades Geométricas del producto vectorial

- El vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector que es ortogonal tanto al vector $\vec{a}$ como a $\vec{b}$.

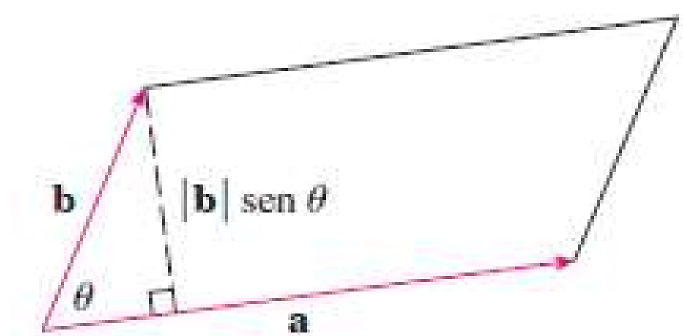
Si **a** y **b** se representan mediante segmentos de recta dirigidos con el mismo punto inicial (como en la figura 1), entonces el teorema 8 dice que el producto cruz **a** $\times$ **b** apunta en una dirección perpendicular al plano de **a** y **b**. Resulta que la dirección de **a** $\times$ **b** está dada por la *regla de la mano derecha*: si los dedos de su mano derecha se curvan en la dirección (por un ángulo menor de 180°) de **a** a **b**, entonces su dedo pulgar apunta en la dirección de **a** $\times$ **b**.



- Si θ es el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\,\mathrm{sen}\,\theta$

De esta propiedad se puede deducir:

- Dos vectores son paralelos si y sólo si $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$
- $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ es el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$



EJEMPLO 3 Encuentre un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, por tanto, es perpendicular al plano a través de P, Q y R. Se sabe de (12.2.1) que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\,\mathbf{i} + (5 - 4)\,\mathbf{j} + (-1 - 6)\,\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\,\mathbf{i} + (-1 - 4)\,\mathbf{j} + (1 - 6)\,\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se calcula el producto cruz de estos vectores:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-5 - 35)\,\mathbf{i} - (15 - 0)\,\mathbf{j} + (15 - 0)\,\mathbf{k} = -40\,\mathbf{i} - 15\,\mathbf{j} + 15\,\mathbf{k}$$

Así que el vector $\langle -40, -15, 15 \rangle$ es perpendicular al plano dado. Cualquier múltiplo escalar no cero de este vector, tal como $\langle -8, -3, 3 \rangle$, también es perpendicular al plano.

EJEMPLO 4 Encuentre el área del triángulo con vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 se calculó que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$. El área del paralelogramo con lados adyacentes PQ y PR es la longitud de este producto cruz:

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

El área A del triángulo PQR es la mitad del área de este paralelogramo, es decir, $\frac{5}{2}\sqrt{82}$.

Propiedades del Producto Vectorial

Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y α es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Triple Producto Escalar

El producto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que se presenta en la propiedad 5 se denomina **triple producto escalar** de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Observe que se puede escribir el triple producto escalar como un determinante:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El significado geométrico del triple producto escalar se puede ver considerando el paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c** (véase la figura 3). El área de la base del paralelogramo es $A = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$. Si θ es el ángulo entre a y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, entonces la altura h del paralelepípedo es $h = |\mathbf{a}||\cos\theta|$. (Se debe usar $|\cos\theta|$ en lugar de $\cos\theta$ en caso de que $\theta > \pi/2$). Por tanto, el volumen del paralelepípedo es

$$V = Ah = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{a}||\cos\theta| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

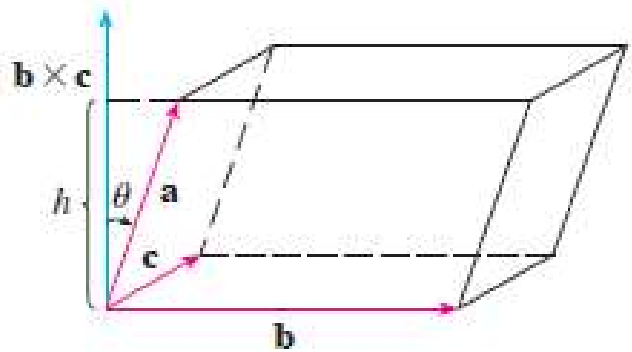


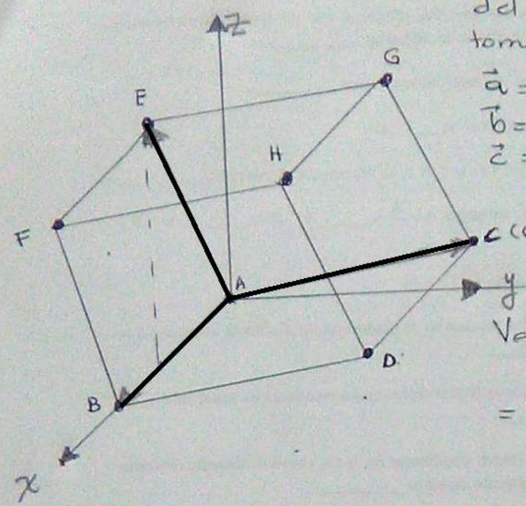
FIGURA 3

Ejemplo: Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los puntos

$$(0,0,0), (3,0,0), (0,5,1), (3,5,1), (2,0,5), (5,0,5), (2,5,6), (5,5,6)$$

A $(0,0,0)$ B $(3,0,0)$ C $(0,5,1)$ D $(3,5,1)$ E $(2,0,5)$

F $(5,0,5)$ G $(2,5,6)$ H $(5,5,6)$



Para hallar el volumen del paralelepípedo podemos tomar los vectores:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \langle 3,0,0 \rangle$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \langle 0,5,1 \rangle$

$\vec{c} = \overrightarrow{AE} = \langle 2,0,5 \rangle$

$$\text{Volumen} = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right|$$

$$= \left| \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \left| (25-0)3 - \cancel{(0-2)0} + \cancel{(0-10)\cdot 0} \right|$$

$$= |25.3|$$

$$= \underline{75}$$

Si se descubre que el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0, entonces los vectores deben estar en el mismo plano; es decir, son **coplanares**.

V EJEMPLO 5 Use el triple producto escalar para demostrar que los vectores $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18\rangle$ son coplanares.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} \\ &= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0\end{aligned}$$

Por tanto, el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0. Esto significa que **a**, **b** y **c** son coplanares.

Ejercicios Propuestos: Tomados del libro de Calculo de Varias Variables de James Stewart.

1-7 Encuentre el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y compruebe que es ortogonal a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \langle 6, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 8, 0 \rangle$

2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 4, 6 \rangle$

3. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

6. $\mathbf{a} = t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{a} = \langle t, 1, 1/t \rangle$, $\mathbf{b} = \langle t^2, t^2, 1 \rangle$

8. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Trace $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vectores que se inician en el origen.

9-12 Encuentre el vector, no con determinantes, sino usando propiedades de productos cruz.

9. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$

10. $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$

11. $(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{k} - \mathbf{i})$

12. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j})$

13. Diga si cada expresión tiene sentido. Si no, explique por qué. En caso afirmativo, diga si es un vector o un escalar.

a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$

f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

28. Encuentre el área del paralelogramo con vértices $K(1, 2, 3)$, $L(1, 3, 6)$, $M(3, 8, 6)$ y $N(3, 7, 3)$.

29-32 a) Encuentre un vector no cero ortogonal al plano que pasa por los puntos P, Q y R, y b) determine el área del triángulo PQR.

29. $P(1, 0, 1)$, $Q(-2, 1, 3)$, $R(4, 2, 5)$

35-36 Halle el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes PQ, PR y PS.

35. $P(-2, 1, 0)$, $Q(2, 3, 2)$, $R(1, 4, -1)$, $S(3, 6, 1)$

38. Use el triple producto escalar para determinar si los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(3, -1, 6)$, $C(5, 2, 0)$ y $D(3, 6, -4)$ están en el mismo plano.