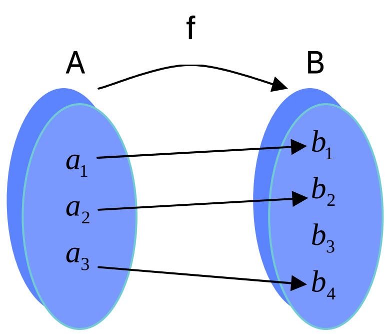
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
VICERRECTORADO ACADÉMICO
DECANATO DE DOCENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
ASIGNATURA MATEMÁTICA I. (Código 0826101)
LAPSO ACADÉMICO 2012-2

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL



Elaborada por:
Profa. Gladys Colmenares.
Profa. Arelis Díaz.
Prof. Leonardo Pérez.
Material didáctico en revisión

San Cristóbal, noviembre 2012

1. FUNCIONES

El Cálculo diferencial e integral surgió en el siglo XVII, el concepto de función vino a conocerse un siglo después, y el límite, entendido de una manera formal y rigurosa, solo a finales del siglo XIX, lo cual difiere de la forma como se presenta actualmente el cálculo, en donde primero se enseñan funciones, luego límites y finalmente derivadas e integrales. El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes (1596-1650) para designar una potencia x^n de la variable.

En 1694 el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. El uso más generalizado ha sido el definido en 1829 por el matemático alemán, J.P.G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859), quien escribió: "Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ello.

El Cálculo estudia los problemas en los cuales x puede adoptar distintos valores. Así se introduce la noción de variable: x es la **variable independiente** y cualquier magnitud que cambia cuando x cambia se llama **variable dependiente** (su valor está en función del valor de x). El conjunto de los pares ordenados $\left(x, f(x)\right)$ se denomina ***relación,*** y cuando a cada valor x le corresponde un único valor $f(x)$ se designa como **función**.

Será objeto de estudio en esta unidad las funciones reales de una variable real, es decir, las relaciones que asignan a cada número real x de un conjunto un único número real $f(x)$. Muchas veces la variable independiente es el tiempo y se representa con el símbolo t. Sin embargo, la del Cálculo es una aproximación puramente formal: x puede ser el tiempo y $f(x)$ el espacio recorrido (problema de movimiento); x puede ser la temperatura y $f(x)$ la densidad de una sustancia a una presión dada (problema de variación de propiedades físicas); x puede ser el tiempo y $f(x)$ la concentración de cierto componente de una mezcla reactiva (problema de Cinética Química) , x puede ser el precio y $f(x)$ la cantidad de producto (problemas de economía) .

Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, (aún cuando no nos demos cuenta), problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con el costo para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función x como el precio y la cantidad de producto como $f(x)$. Los geólogos hacen uso de las funciones logarítmicas para medir la intensidad de los sismos. Los astrónomos para determinar la magnitud estelas de una estrella o planeta. Los ambientalistas miden constantemente el PH del agua de lluvia debido al efecto dañino de la lluvia acida que se origina por las emisiones de dióxido de azufre de las fabricas aquí son de utilidad las funciones exponenciales.

1.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL.

Una función de un conjunto A en otro conjunto B es una correspondencia que asigna a **cada elemento** de A **exactamente un único elemento** de B. La relación de la figura 1 representa una función.

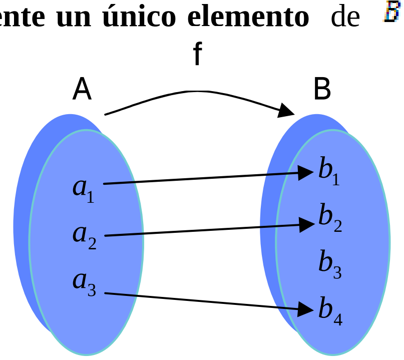


Figura 1

El conjunto A se denomina **dominio de la función f** y se denota por $domf$. El conjunto B se llama **codominio de la función f**. El subconjunto de B de los números asignados a los valores de A es el **recorrido o rango de f** y se denota por $rgof$. Por ejemplo, en la función f representada en la figura 1, el $domf = A$ y $rgof = \{b_1, b_2, b_4\}$. En nuestro caso A y B serán subconjuntos de los números reales.

El dominio y rango de una función real con variable real suelen expresarse en la notación de intervalos.

Las funciones también se pueden denotar como un conjunto de pares ordenados (x, y), donde x se denomina abscisa y y ordenada. Por ejemplo, la función definida por la ecuación $y = x^2$ consta de todos los pares ordenados (x, x^2) tales que x es un número real. A continuación se establecerá formalmente la definición de función como un conjunto de pares ordenados.

Definición 1.1: Una función es un conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) en los que no existen dos pares diferentes con la misma abscisa. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de rango de la función.

Los símbolos x y y denotan variables. Debido a que el valor de y depende de la elección de x, x denota a la variable independiente mientras que y representa la variable dependiente.

Para denotar funciones se utilizan como símbolos: f, g y h

Si f es la función tal que los elementos de su dominio se representan por x y los elementos de su rango se denotan por y, entonces el símbolo $f(x)$ (léase "f de x") denota el valor particular de y que corresponde al valor de x. La notación $f(x)$, denominada valor de la función, se debe al matemático físico suizo Leonhard Euler (1707-1783).

El concepto de función como un conjunto de pares ordenados permite enunciar la siguiente definición de grafica de una función.

Definición 1.2: Si f es una función, entonces la grafica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de f .

De esta definición, se deduce que la gráfica de una función f es la misma que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

Recuerde que en una función existe un sólo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente del dominio de la función. Para determinar si una gráfica de una ecuación representa una función se utiliza el siguiente criterio.

1.2 CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL

Gráficamente, f es una función si al trazar rectas verticales la gráfica de f se intersecta a lo sumo en un punto con dichas rectas.

A continuación se enuncia el criterio para determinar el dominio y rango de una función a partir de su gráfica.

1.3 DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto formado por todos los números reales x para los cuales la función está definida. Gráficamente el dominio de una función representa la proyección de la grafica de f sobre el eje de las abscisas.

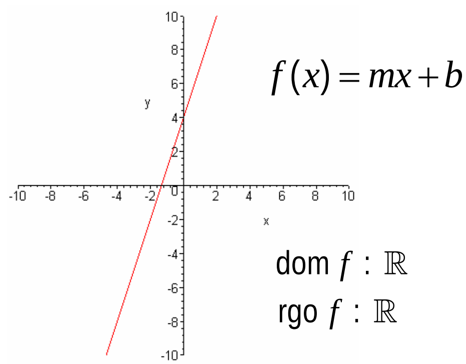
1.4 RANGO DE UNA FUNCIÓN

El rango o recorrido de una función f se define como el subconjunto del codominio formado por todas las imágenes de los números x del dominio. Gráficamente el rango de f representa la proyección de la grafica de f sobre el eje de las ordenadas.

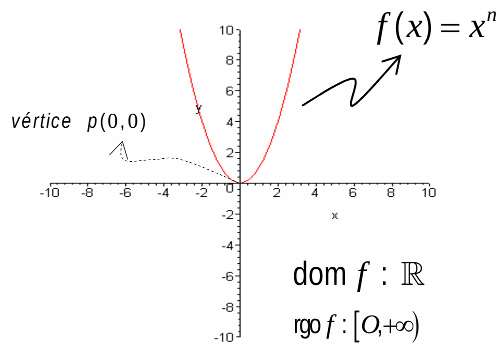
Resolver los ejercicios de la Actividad 1.3

1.5. GRAFICAS DE FUNCIONES BÁSICAS

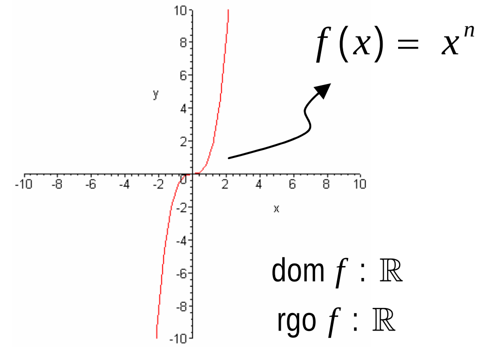
Lineal



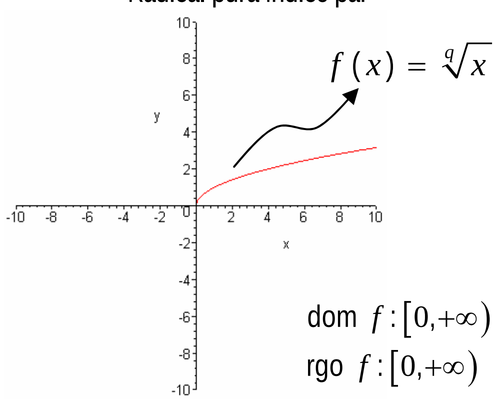
Potencia pura exponente par



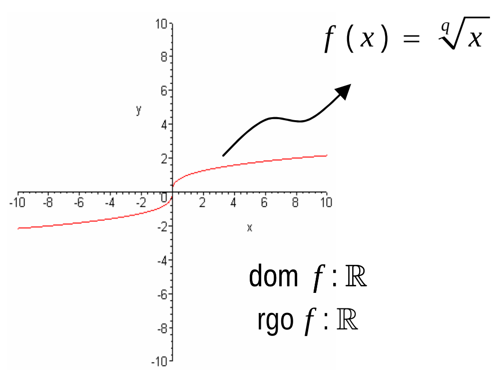
Potencia pura exponente impar



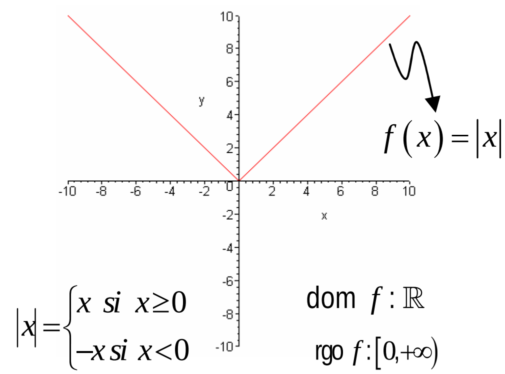
Radical pura índice par



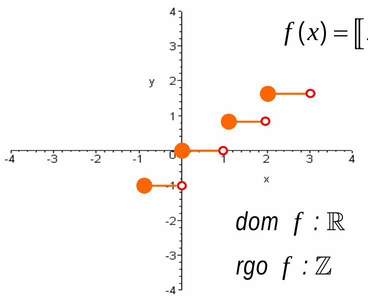
Radical pura índice impar



Valor absoluto



Parte entera



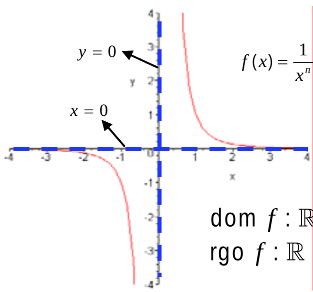
$f(x)=[\![x]\!]$

$dom\ \ f:\mathbb{R}$

$rgo\ \ f:\mathbb{Z}$

$[\![x]\!]=n \quad si \quad n\le x<n+1 \quad con \quad n\in\mathbb{Z}$

Racional pura con exponente Impar



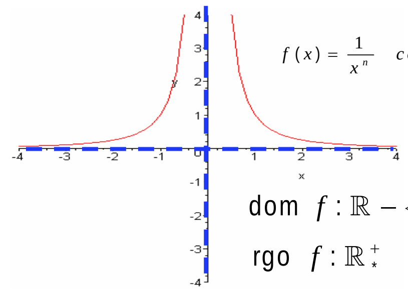
$f(x)=\dfrac{1}{x^n} \quad con\ \ n\ \ impar$

$\text{dom}\ f:\mathbb{R}-\{0\}$

$\text{rgo}\ f:\mathbb{R}-\{0\}$

asintotas las recta $x=0$ y $y=0$

Racional pura con exponente par



$f(x)=\dfrac{1}{x^n} \quad con\ \ n\ \ par$

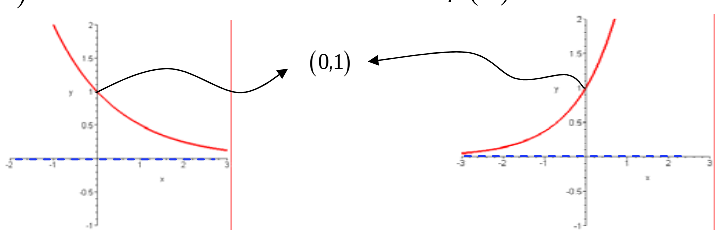
$\text{dom}\ \ f:\mathbb{R}-\{0\}$

$\text{rgo}\ \ f:\mathbb{R}^+_*$

asintotas las recta $x=0$ y $y=0$

Exponencial

$f(x)=a^x\ \ con\ \ 0<a<1$ $\qquad$ $f(x)=a^x\ \ con\ \ a>1$



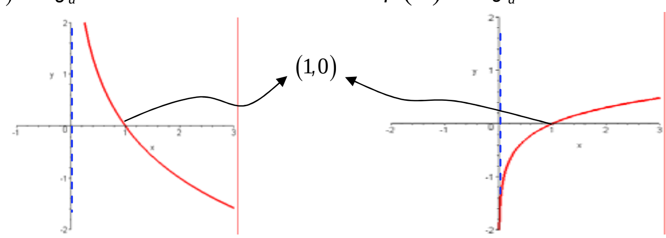
$dom\ \ f:\mathbb{R} \qquad rgo\ \ f:\mathbb{R}^+$

asintota horizontal la recta $y=0$

y- intersección en $(0,1)$

Logarítmica

$f(x)=log_a x\ \ con\ \ 0<a<1$ $\qquad$ $f(x)=log_a x\ \ con\ \ a>1$



$dom\ \ f:\mathbb{R}^+ \qquad rgo\ \ f:\mathbb{R}$

asintota vertical la recta $x=0$

x- intersección en $(1,0)$

1.6. PRICIPIOS DE GRAFICACIÓN

Sea $y = f(x)$ la función básica , a y c un número real positivo

Principio de graficación	Efecto sobre la grafica básica
1.- **Ampliación o alargamiento vertical:** cuando la función básica $y = f(x)$ se multiplica por un número c mayor que uno, es decir, $y = cf(x)$ para $c > 1$	Mantiene la forma de la grafica básica de $y = f(x)$, **alejándola del eje** X c unidades
2.- **Compresión o reducción vertical:** cuando la función básica $y = f(x)$ se multiplica por un número c mayor que cero y menor que uno, es decir, $y = cf(x)$ para $0 < c < 1$	Mantiene la misma forma de la grafica básica de $y = f(x)$, **acercándola al eje** X c unidades
3.- **Ampliación o alargamiento horizontal:** cuando la variable x se multiplica por un número c mayor que cero y menor que uno, es decir, $y = f(cx)$ para $0 < c < 1$	Mantiene la misma forma de la grafica básica de $y = f(x)$, **ampliándola horizontalmente** $\frac{1}{c}$ unidades
4.- **Compresión o reducción horizontal:** cuando la variable x se multiplica por un número c mayor que uno, es decir, $y = f(cx)$ para $c > 1$	Mantiene la misma forma de la grafica básica de $y = f(x)$, **reduciéndola horizontalmente** $\frac{1}{c}$ unidades
5.- **Desplazamiento vertical hacia arriba:** cuando a la función básica $y = f(x)$ se le suma un número c positivo, es decir, $y = f(x) + c$	La grafica básica de $y = f(x)$ se **traslada exactamente** c **unidades hacia arriba**
6.- **Desplazamiento vertical hacia abajo:** cuando a la función básica $y = f(x)$ se le resta un número c positivo, es decir, $y = f(x) - c$	La grafica básica de $y = f(x)$ se **traslada exactamente** c **unidades hacia abajo**
7.- **Desplazamiento horizontal hacia la derecha:** cuando a la variable x se le multiplica por un número a y a su vez se le resta un número c, es decir, $y = f(ax - c)$	La grafica básica de $y = f(x)$ se **traslada exactamente** $\frac{c}{a}$ **unidades hacia la derecha**
8.- **Desplazamiento horizontal hacia la izquierda:** cuando a la variable x se le multiplica por un número a y a su vez se le suma un número c, es decir, $y = f(ax + c)$	La grafica básica de $y = f(x)$ se **traslada exactamente** $\frac{c}{a}$ **unidades hacia la izquierda**
9.- **Reflexión con respecto al eje** X: cuando la función básica $y = f(x)$ se multiplica por -1, es decir, $y = -f(x)$	La grafica básica de $y = f(x)$ se **reflexiona con respecto al eje** X
10.- **Reflexión con respecto al eje** Y: cuando la variable x se multiplica por -1, es decir, $y = f(-x)$	La grafica básica de $y = f(x)$ se **reflexiona con respecto al eje** Y

Resolver los ejercicios de la Actividad 1.4

1.7 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Sean $x, y \in \mathbf{R}$ y $a, b \in \mathbf{R}^+$

$a^{x+y} = a^x a^y$ $(ab)^x - a^x b^x$ $a^{xy} = (a^x)^y$	$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$

Sean $a, c \in \mathbf{R}^+$, $b > 0$, $b \neq 1$ y $n \in \mathbf{R}$

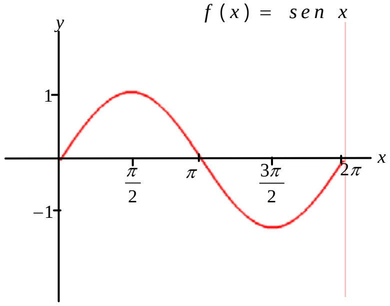
$log_b(a.c) = log_b a + log_b c$ $log_b\left(\dfrac{a}{c}\right) = log_b a - log_b c$	$log_b a^n = n\, log_b a$ $log_b 1 = 0$ $log_b b = 1$	$b^{log_b x} = x$ $log_b(b^x) = x$ $log_b a = \dfrac{log\, a}{log\, b}$ $(cambio\ de\ base)$

Resolver los ejercicios de la Actividad 1.5

1.8. GRAFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA UN CICLO O PERÍODO

El Seno y su reciproca la cosecante

$f(x) = sen\ x$



$dom\ f = \mathbb{R}$, $rgo\ f = [-1,1]$

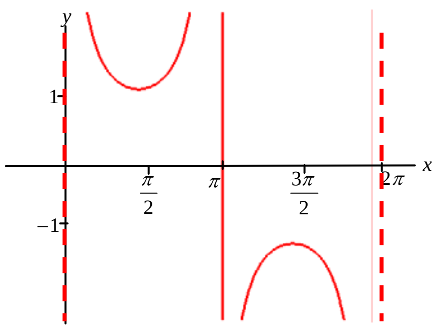
periódo 2π ,

intercepciones en x : $n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

desplazamiento de fase :

empieza $x = 0$, termina $x = 2\pi$

$f(x) = csc\ x$



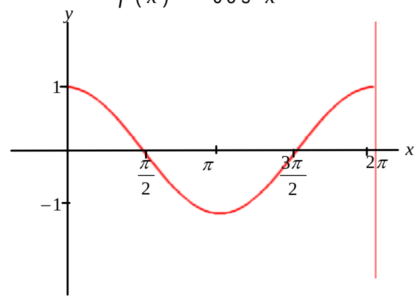
$dom\ f = \mathbb{R} - \{n\pi\}$, $rgo\ f = \mathbb{R} - (-1,1)$

periódo 2π ,

asíntotas verticales las rectas $x = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

El coseno y su reciproca la secante

$f(x) = cos\ x$



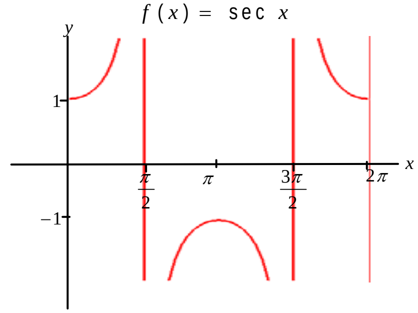
$dom\, f(x) = \mathbb{R}$, $rgo\ f(x) = [-1,1]$

periódo 2π , intercepciones en $x : n\pi + \frac{\pi}{2}$

desplazamiento de fase :

empieza : $x = 0$, termina : $x = 2\pi$

$f(x) = sec\ x$



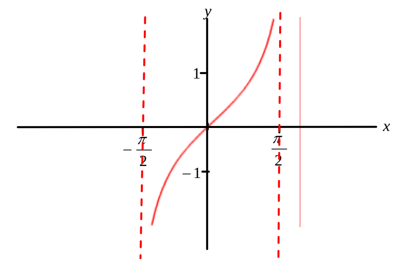
$dom\, f(x) = \mathbb{R} - \left\{n\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$,

$rgo\ f(x) = \mathbb{R} - (-1,1)$,periódo 2π

asíntotas verticales las recta $x = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{N}$

La Tangente y su reciproca la cotangente

$f(x) = tan\ x$



$dom\ f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$, $rgo\ f = \mathbb{R}$

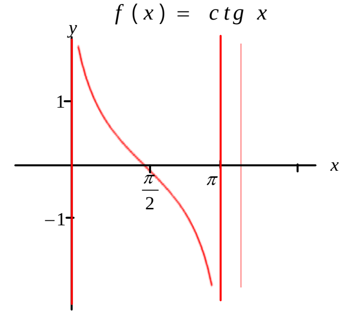
período π , intercepciones en x : $n\pi$

asíntotas verticales rectas : $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

desplazamiento de fase:

empieza: $x = -\frac{\pi}{2}$ termina : $x = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = ctg\ x$



$dom\ f = \mathbb{R} - \{n\pi\}$, $rgo\ f = \mathbb{R}$

período π , intercepciones en x : $\frac{\pi}{2} + n\pi$

asíntotas verticales rectas : $x = n\pi$

Desplazamiento de fase:

empieza $x = 0$ termina $x = \pi$

Resolver los ejercicios de la Actividad 1.6

1.9 FUNCIÓN DEFINIDA POR TRAMOS O INTERVALOS

La función definida por tramos o intervalos está representada de la forma:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & si\ \ x\in D_1 \\ f_2(x), & si\ \ x\in D_2 \\ f_3(x), & si\ \ x\in D_3 \\ f_4(x), & si\ \ x\in D_4 \\ \bullet & \\ \bullet & \\ f_n(x), & si\ \ x\in D_n \end{cases}$$

Donde $dom\ f = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$

Resolver los ejercicios de la Actividad 1.7

1.10 CALCULO ANALÍTICO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Resolver los ejercicios de la Actividad 1.8

1.11 ALGEBRA DE FUNCIONES

A partir de funciones dadas se pueden obtener nuevas funciones usando operaciones aritméticas. Sean f y g dos funciones reales de variable real:

1.11.1. Suma de funciones: Denotada por $f+g$, **e**s la función definida por $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, es decir, la imagen de la suma de dos funciones es igual a la suma de las imágenes de cada una de las funciones. Su dominio es la intersección del dominio de f con el dominio de g, simbólicamente $dom(f+g) = dom\, f \cap dom\, g$

1.11.2. Diferencia de funciones: Denotada por $f-g$, **e**s la función definida por $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, es decir, la imagen de la resta de dos funciones es igual a la resta de las imágenes de cada una de las funciones. Su dominio es la intersección del dominio de f con el dominio de g, simbólicamente $dom(f-g) = dom\, f \cap dom\, g$

1.11.3. Producto de funciones: Denotada por $f.g$, **e**s la función definida por $(f.g)(x)=f(x).g(x)$, es decir, la imagen del producto de dos funciones es igual al producto de las imágenes de cada una de las funciones. Su dominio es la intersección del dominio de f con el dominio de g, simbólicamente, $dom(f.g) = dom f \cap dom g$

1.11.4. Cociente de funciones: Denotada por $\frac{f}{g}$, **e**s la función definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $g(x)\neq 0$, es decir, la imagen del cociente de dos funciones es igual al cociente de las imágenes de cada una de las funciones. Su dominio es la intersección del dominio de f con los valores de x del dominio de g tales que $g(x)\neq 0$, simbólicamente,

$$dom\left(\frac{f}{g}\right) = dom\, f \cap \{x \in dom\, g : g(x) \neq 0\}$$

1.12 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

La función compuesta de f y g, escrita por $g \circ f$, es la función definida por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ siempre que el rango de f este contenido en el dominio de g es decir $Rgo\ f \subseteq Dom\ g$. El dominio de $g \circ f$ es el subconjunto del dominio de f para los cuales $f(x) \in dom\, g$ esta definido. La compuesta de g y f, es la función definida por $(f \circ f)(x) = f[g(x)]$

Resolver los ejercicios de la Actividad 1.9

1.13 FUNCIÓN INYECTIVA O BIUNÍVOCA

Una función es inyectiva si a cada valor de su rango le corresponde exactamente un elemento de su dominio. $f : A \rightarrow B$ es inyectiva, si $\underset{\downarrow}{\forall}\ a_1, a_2 \in A\ con\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

(se lee para todo)

Gráficamente f es inyectiva si al trazar rectas horizontales la grafica de f se intersecta a lo sumo en un punto con dicha recta.

1.14 FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función inyectiva. La función f^{-1} es la inversa de la función f si

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \quad \text{con } x \in dom\ f$$

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x \quad \text{con } x \in dom\ f^{-1}$$

De la definición de función inversa se obtiene:

- Si f^{-1} es la inversa de f entonces f es la inversa de f^{-1}
- El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f
- Una función puede no tener inversa, pero si la admite la inversa es única
- La grafica de f contiene al punto (a,b) si y sólo si la grafica de f^{-1} contiene al punto (b,a)(propiedad reflexiva de la función inversa).
- La grafica de f^{-1} se obtiene al reflexionar la grafica de f con respecto a la recta $y = x$

Pasos para determinar f^{-1}

1. Comprobar que f admite inversa, es decir, que f es inyectiva. De ser necesario restringir el dominio.
2. Despejar x en términos de y, para obtener la ecuación $x = f^{-1}(y)$.
3. Cambiar la variable x *por* y y *a* y *por* x, para obtener la ecuación $y = f^{-1}(x)$.
4. Comprobar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f) = x$

Resolver los ejercicios de la Actividad 1.10

BIBLIOGRAFÍA

Barnett R. , Ziegler M. y Byleen K. Trigonometría Analítica. International Thomson Editores. Séptima edición (2001). México.

Fleming Walter y Dale Varberg. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Prentice-Hall. México.1991

Larsón, Roland y Hostetler, Robert. Cálculo y Geometría Analítica. McGraw-Hill. Bogota (1992)

Munem M. y Yizze J. Precalculus. Introducción Funcional. Editorial Reverte. España. (1985)

Purcell, Edwin y Varberg, Dale. Cálculo con Geometría Analítica. Prentice Hall. México.

Swokowski Earl y Cole Jeffery. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Grupo editorial Iberoamerica.(1992).

Torres, Ángela. Principios básicos de graficación. Fondo Editorial UNET. Venezuela.(2002)