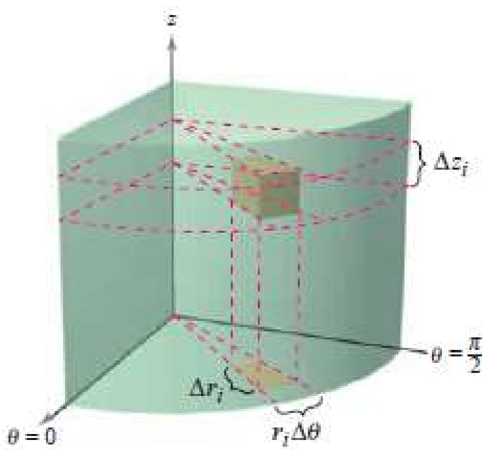
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Integrales triples en coordenadas cilíndricas.



Volumen del bloque cilíndrico:
$\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i \Delta z_i$

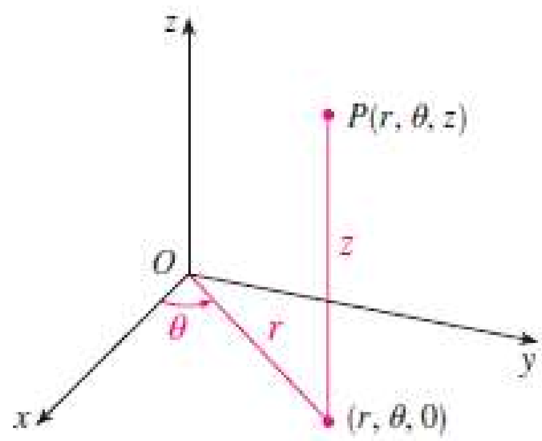
Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

15 de agosto del 2021

Coordenadas Cilíndricas

Es un sistema de coordenadas basado en el sistema de coordenadas polares en el plano. Dado un punto P en coordenadas rectangulares (x, y, z) la proyección de P en el plano XY (x, y) se representa en coordenadas polares y se deja la tercera componente z, es decir, se escribe (x, y) en coordenadas polares supongamos (r, θ) y las coordenadas cilíndricas de P son entonces (r, θ, z).



Para convertir de coordenadas cilíndricas a rectangulares, usamos las ecuaciones

1

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z}$$

mientras que para convertir de rectangulares a cilíndricas, usamos

2

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z}$$

EJEMPLO 1

a) Grafique el punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ y encuentre sus coordenadas rectangulares.
b) Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto con coordenadas rectangulares $(3, -3, -7)$.

SOLUCIÓN

a) El punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ se muestra en la figura 3. De las ecuaciones 1, sus coordenadas rectangulares son

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

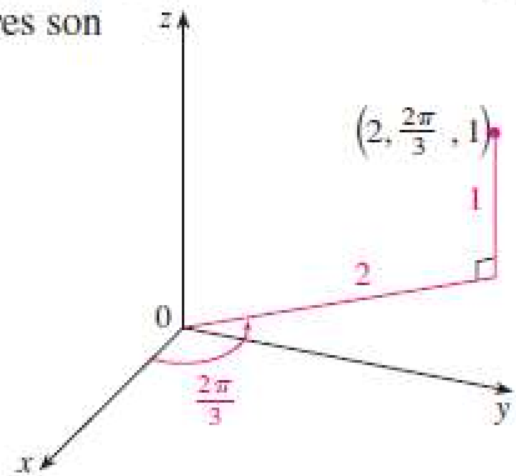


FIGURA 3

Así, el punto es $\left(-1, \sqrt{3}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares.

b) De las ecuaciones 2, tenemos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{por ende} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Por tanto, un conjunto de coordenadas cilíndricas es $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Otro es $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Como con las coordenadas polares, hay un infinito de elecciones.

Las coordenadas cilíndricas son útiles en problemas que involucran simetría respecto a un eje, y el eje z se elige de manera que coincida con el eje de simetría. Por ejemplo, el eje del cilindro circular con coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = c^2$ es el eje z. En coordenadas cilíndricas este cilindro tiene una ecuación muy simple, $r = c$. (Véase la figura 4). Esta es la razón del nombre coordenadas "cilíndricas".

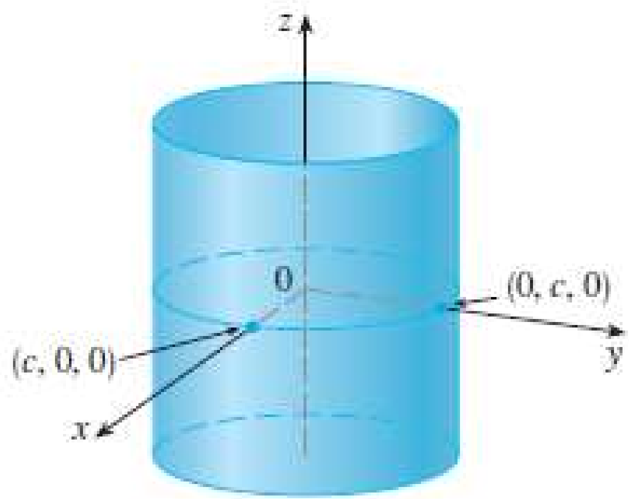


FIGURA 4
$r = c$, un cilindro

V EJEMPLO 2 Describa la superficie cuya ecuación es coordenadas cilíndricas es $z = r$.

SOLUCIÓN La ecuación indica que el valor z, o altura, de cada punto sobre la superficie es r, la distancia del punto al eje z. Dado que θ no aparece, puede variar. Así que cualquier traza horizontal en el plano $z = k$ ($k > 0$) es una circunferencia de radio k. Estas trazas sugieren que la superficie es un cono. Esta predicción puede confirmarse convirtiendo la ecuación en coordenadas rectangulares. De la primera ecuación en $\boxed{2}$ tenemos

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

A la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ se le reconoce como un cono circular cuyo eje es z.

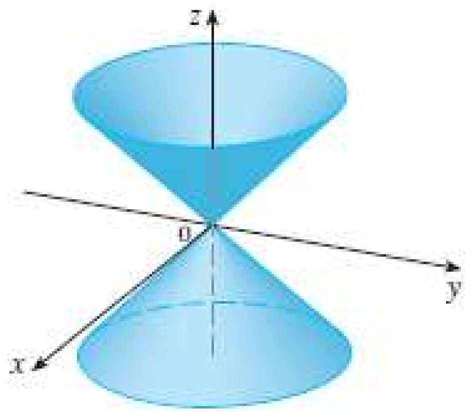


FIGURA 5
$z = r$, un cono

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

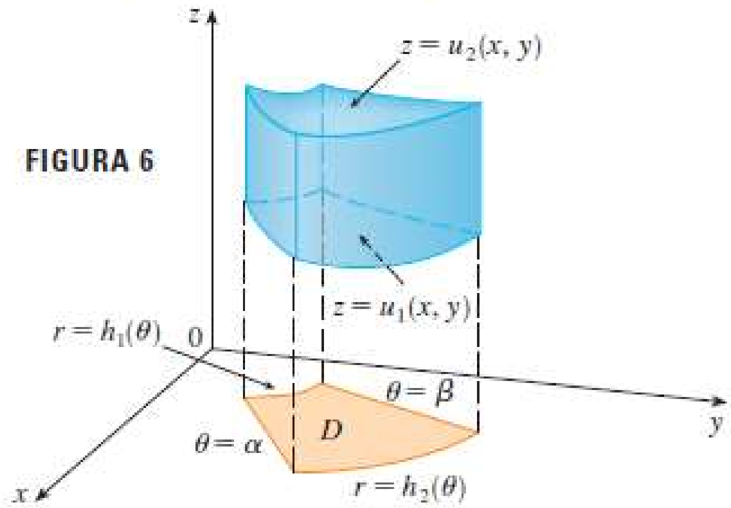
Suponga que E es una región de tipo 1 cuya proyección D sobre el plano xy es convenientemente descrita en coordenadas polares (véase la figura 6). En particular, supongamos que f es continua y

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D está dada en coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

FIGURA 6



sabemos que

$$\boxed{3} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Pero también sabemos cómo evaluar integrales dobles en coordenadas polares. obtenemos

$$\boxed{4} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

La expresión en 4 es la **fórmula para la triple integración en coordenadas cilíndricas.** Indica que convertimos una integral triple de coordenadas rectangulares a cilíndricas escribiendo $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, dejando a z como está, usando los límites de integración apropiados para z, r y θ, y remplazando dV por $r\, dz\, dr\, d\theta$.

Vale la pena utilizar esta fórmula cuando E es una región sólida fácilmente descrita en coordenadas cilíndricas y especialmente cuando la función $f(x, y, z)$ involucra la expresión $x^2 + y^2$.

V EJEMPLO 3 Un sólido E se encuentra dentro de un cilindro $x^2 + y^2 = 1$, por debajo del plano $z = 4$, y por encima del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Véase la figura 8). La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del eje del cilindro. Encuentre la masa de E.

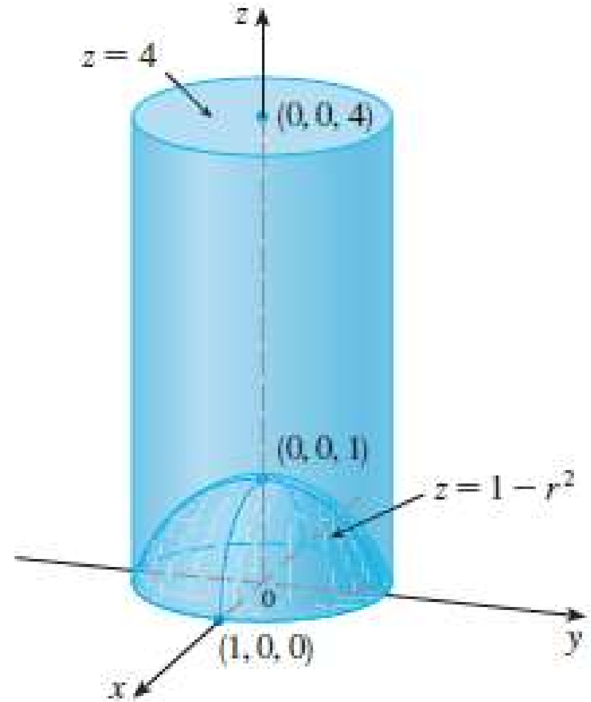


FIGURA 8

SOLUCIÓN En coordenadas cilíndricas, el cilindro $r = 1$ y el paraboloide es $z = 1 - r^2$, así que podemos escribir

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1,\ 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Dado que la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia del eje z, la función densidad es

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Por tanto, de la fórmula 15.7.13, la masa de E es

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr$$

$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral iterada es una integral triple sobre la región sólida

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

y la proyección de E sobre el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$. La superficie inferior de E es el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y la superficie superior es el plano $z = 2$. (Véase la figura 9.) Esta región tiene una descripción mucho más simple en coordenadas cilíndricas:

$$E = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ r \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

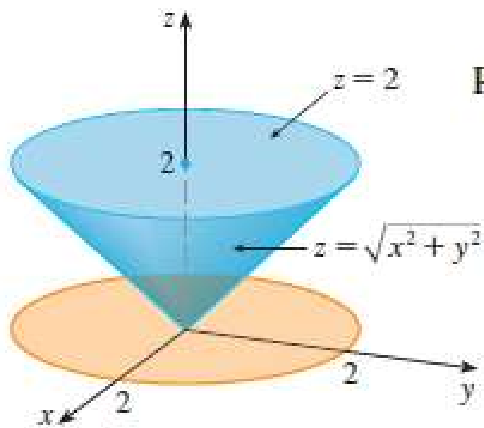


FIGURA 9

Por tanto, tenemos

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2+y^2)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r)\,dr$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$

Ejercicios Propuestos: (Stewart, sec: 15.8)

5-6 Describa en palabras la superficie cuya ecuación está dada.

5. $\theta = \pi/4$

6. $r = 5$

7-8 Identifique la superficie cuya ecuación está dada.

7. $z = 4 - r^2$

8. $2r^2 + z^2 = 1$

9-10 Exprese la ecuación en coordenadas cilíndricas.

9. a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ b) $z = x^2 - y^2$

10. a) $3x + 2y + z = 6$ b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

17-28 Use coordenadas cilíndricas.

17. Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, donde E es la región que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y entre los planos $z = -5$ y $z = 4$.

19. Evalúe $\iiint_E (x + y + z)\, dV$, donde E es el sólido en el primer octante que está bajo el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

21. Evalúe $\iiint_E x^2\, dV$, donde E es el sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, por encima del plano $z = 0$ y por debajo del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

23. Encuentre el volumen del sólido que está encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

25. a) Encuentre el volumen de la región E acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

b) Encuentre el centroide de E (el centro de masa en el caso donde la densidad es constante).

27. Encuentre la masa y el centro de masa del sólido S acotado por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = a (a > 0)$ si S tiene densidad constante K.

29-30 Evalúe la integral cambiando a coordenadas cilíndricas.

29. $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\, dz\, dx\, dy$