Práctica 5

Introducción

Con la realización de esta práctica se espera que el estudiante adquiera las competencias necesarias para resolver sistemas de ecuaciones no lineales mediante la aplicación de los métodos de punto fijo y de Newton, de forma manual y con el apoyo de funciones (subrutinas o programas) propias o predefinidas utilizando los entornos de software MATLAB o Scilab.

La primera sección está planificada de modo que el estudiante diseñe sus propios programas a partir de los algoritmos vistos en clase o disponibles en la bibliografía. Más aún, se insta al estudiante a que trabaje de esta forma, pues ello le proporcionará una visión integral de los métodos. Es decir, al programarlos aprenderá a utilizar de manera eficiente las fórmulas vistas.

En la segunda sección se proponen algunos ejercicios tomados de la bibliografía recomendada. Esto tiene un doble propósito, en primer lugar que el estudiante aprenda a identificar los principales elementos del problema a resolver. En el caso del método de punto fijo, deberá ser capaz de plantear la ecuación $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, siempre que sea posible, a partir del conjunto de ecuaciones dado. Para el método de Newton, necesitará (i) identificar (o reformular las ecuaciones para obtener) la función vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, y (ii) construir la matriz jacobiana. En segundo lugar, la codificación de los programas que requiera, así como su ejecución, le servirá para reconocer e interiorizar cada parte del mismo, depurar cualquier error y tenerlo optimizado para el día del cuestionario en línea.

Finalmente, en las sección 3 se introduce la sintaxis de algunas funciones propias de MATLAB, como son: `jacobian, subs, findsym` y `fminsearch`. Algunas de estas funciones simplifican de manera considerable el diseño de los algoritmos propuestos mientras que otras resuelven ciertos problemas considerados en esta unidad. Finalmente, se recomienda revisar el material relacionado con las normas (ver Práctica 4), pues son necesarias para determinar los errores y establecer los criterios de parada para los métodos vistos en esta unidad.

1 Diseño de algoritmos

Dado el sistema de ecuaciones no lineales $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

a) **Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales**. Escriba un subprograma de nombre **newtonse.m** que resuelva el problema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ mediante el método de Newton. Dicho subprograma deberá tener como argumentos de entrada: (i) la función vectorial $\mathbf{F}$, (ii) la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, (iii) el número máximo de iteraciones $itmax$, y (iv) la tolerancia deseada tol. Los argumentos de salida serán: (i) la solución aproximada del sistema $\mathbf{r}$, (ii) y el número de iteraciones ejecutado. Itere hasta que: $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < tol$.

b) **Método del punto fijo para sistemas de ecuaciones no lineales**. Escribir un programa de nombre **puntofijose.m** para resolver problema de punto fijo $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Los argumentos de entrada de este subprograma deben ser (i) la función vectorial $G(x)$, (ii) la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, (iii) el número máximo de iteraciones $itmax$, y (iv) la tolerancia deseada tol. Como argumentos de salida deberá devolver: (i) la solución aproximada del sistema $\mathbf{r}$, y (ii) el número de iteraciones ejecutado. Itere hasta que: $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < tol$.

2 Solución de problemas

a) El sistema no lineal

$$\begin{aligned} 5x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ x_2 - 0.25(sin\ x_1 + cos\ x_2) &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución cercana a (0.25,0.25).
(i) Grafique las funciones. (ii) Encuentre una función $\mathbf{G}$ y un conjunto $D \in \mathbb{R}^2$ de modo que $\mathbf{G} : D \to \mathbb{R}^2$ tenga un punto fijo único en D. (iii) Aplique la iteración funcional de punto fijo $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ para aproximar la solución con una exactitud de 10^{-5} en la norma ℓ_∞.

b) El sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} 3x_1 - cos(x_2x_3) - \tfrac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \tfrac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución aproximada en (0.5,0,-0.52359877). (i) Aplique el método de Newton para obtener esta aproximación cuando $x^{(0)}$ =(0.1,0.1,-0.1). (ii) Repita el cálculo del inciso anterior, pero ahora utilizando el método de punto fijo con la función $\mathbf{G}$ definida en el ejemplo 2, capítulo 19, del texto de Burden (10a Ed., pág. 479).

c) item Dado el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 4 &= 0 \\ x_1x_2 - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(i) A partir de consideraciones geométricas determine una aproximación a la raíz del sistema de ecuaciones. (ii) Aproxime la solución del sistema utilizando el método de Newton. Itere hasta que $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < 10^{-6}$.

d) Utilice el método de Newton para aproximar el máximo de la función $f(x, y) = 2xy + 1.5y - 1.25x^2 - 2y^2$ con un error de 10^{-4}.

e) La presión requerida para enterrar un objeto grande y pesado en un suelo blando homogéneo, que se encuentra sobre una base de suelo duro, puede predecirse a partir de la presión necesaria para enterrar objetos más pequeños en el mismo terreno. En concreto, la presión p requerida para enterrar una placa circular de radio r una distancia d en suelo blando, donde la base dura se encuentra a una distancia $D > d$ debajo de la superficie, puede aproximarse mediante una ecuación de la forma:

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

donde k_1, k_2 y k_3 son constantes, con $k_2 > 0$ que depende de d y de la consistencia del terreno pero no del radio de la placa.
(i) Calcule los valores de k_1, k_2 y k_3 si suponemos que una placa cuyo radio es de 1 plg requiere una presión de 10 lb/plg^2 para enterrarse 1 pie en un campo fangoso, una placa cuyo radio es de 2 plg requiere una presión de 12 lb/plg^2 para enterrarse 1 pie y una placa de 3 plg de radio requiere una presión de 15 lb/plg^2 para enterrarse esta distancia (suponiendo que el lodo tiene una profundidad de más de un pie).
(ii) Use los cálculos de la parte (i) para predecir el tamaño mínimo de la placa circular que se necesitará para sostener una carga de 500 lbs en este campo, con un hundimiento menor a 1 pie.

3 Utilidades de MATLAB para resolver SENL

A continuación algunas funciones de MATLAB que podrían resultarle de gran utilidad al momento de aproximar la solución del SENL.

1. **Cálculo de la matriz jacobiana**. En MATLAB el jacobiano se calcula con el comando $\texttt{jacobian}(\mathbf{F}, \mathbf{v})$.

2. **Evaluar funciones vectoriales.** Para evaluar tanto la función vectorial $\mathbf{F}$ como el jacobiano (una vez que lo haya determinado) en un punto dado (por ejemplo, en la aproximación inicial $\mathbf{x}0$) utilice el comando $A = \texttt{subs}(J, \mathbf{v}, \mathbf{x}0)$ (o $\mathbf{F}\mathbf{x}0 = \texttt{subs}(\mathbf{F}, \mathbf{v}, \mathbf{x}0)$). Aquí $\mathbf{v}$ es un vector que contiene las variables que definen el dominio de $\mathbf{F}$ (equivalentemente, incógnitas del sistema) y puede ser determinado con el comando $\mathbf{v} = \texttt{findsym}(\mathbf{F})$

3. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales $[J_F(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, utilice el comando $\mathbf{y} = J_F(\mathbf{x}) \setminus \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$.