Universidad Nacional Experimental del Táchira
Departamento de Matemática y Física
Matemática I(0826101) 2013-1
(Material en Revisión)

Unidad V
Ejercicios de Aplicación de Derivadas

I. Teorema de Rolle: Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) y además $f(a) = f(b)$, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Determine si las siguientes funciones cumplen con las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo dado. En caso afirmativo, calcule el valor de c:

1. $f(x) = 2x^3 - 4x + 6$ en $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ R: $c = \pm\sqrt{2/3}$
2. $f(x) = 1 - x^{2/3}$ en $[-1, 1]$ R: No es derivable en $(-1, 1)$.
3. $g(x) = x\cos(x - \pi/4)$ en $[-\pi/4, \pi/2]$ R:No cumple con la condiciones del teorema.
4. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[1, 3]$ R: $c = 2$
5. $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ en $[0, \pi]$ R: $c = \pi/4; c = 3\pi/4$
6. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 14$ en $[-3, -1]$ R: $c = -\sqrt{5}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $[-4, 4]$ R: $c = 0$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $[-1, 1]$ R: No es continua en $[-1, 1]$
9. $f(x) = \tan^2 x$ en $[-\pi/4, \pi/4]$ R: $c = 0$
10. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$ en $[-2, 2]$ R: $c = 0$

II. Teorema del Valor Medio(Teorema de Lagrange): Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Determine si las siguientes funciones cumplen con las condiciones del Teorema del valor medio en el intervalo dado. En caso afirmativo, calcule el valor de c:

11. $f(x) = 234x^2 + 1500\pi x + \sqrt{4 + \pi^3}$, en $[1, 4]$ R: $c = \dfrac{5}{2}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ R: $c = 1$
13. $f(x) = cos(x)$, en $[0, \pi]$ R: $c = \arcsin\left(\dfrac{2}{\pi}\right) \approx 0{,}69010$

14. $f(x) = sin(x)$, en $[0, \pi]$ R: $c = \dfrac{\pi}{2}$

15. $f(x) = ln(x)$, en $[1, e^2]$ R: $c = \dfrac{e^2 - 1}{2} \approx 3{,}19452$

16. $f(x) = ln(x^2 + 1)$, en $[0, 1]$ R: $c = \dfrac{1 - \sqrt{1 - ln^2(2)}}{ln(2)}$

17. $f(x) = \arctan(x)$, en $[-1, 1]$ R: $c = \pm\sqrt{\dfrac{4 - \pi}{\pi}}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, en $[0, 2]$ R: La función no es continua en el intervalo considerado.

19. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$, en $[0, 2]$ R: $c = -1 + \sqrt{3}$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, en $[-1, 2]$ R: $c = \pm\sqrt{\dfrac{-8 + \sqrt{85}}{3}}$

21. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, en $[-1, 2]$ R: La función no es derivable en el intervalo considerado.

Determine si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

22. Si una función satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en un intervalo $[a, b]$, entonces satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[a, b]$ R: Falso

23. Si una función satisface las hipótesis del teorema de Rolle en un intervalo $[a, b]$, entonces satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en $[a, b]$ R: Verdadero

24. Si una función no satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en un intervalo $[a, b]$, entonces no existe punto alguno $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ R: Falso

25. Sea $f(x)$ una función polinomial cuya gráfica pasa por el origen de las coordenadas. Demuestre que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = f(1)$

III. Rectas tangentes y normales a la gráfica de una función

26. Determine la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 2x^2 + 4x - 2$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$ R: $y = 2x - \dfrac{5}{2}$

27. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = ln(x)$ que sea perpendicular a la recta $2x + y - 3 = 0$ R: $y = \dfrac{1}{2}x + ln(2) - 1$

28. Determine la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = e^{-2x}$ que sea paralela a la recta $y = 3x - 5$ R: $y = 3x - 3ln(\sqrt{6}) + 1/6$

29. Determine la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x$ que sea perpendicular a la recta $y = -x + 7$ R: $y = x \pm \dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

30. Encontrar las rectas tangentes a la parábola cúbica $y = x^3$ que sean paralelas a la recta $y = x$

R: $y = x \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

31. Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = arctan(x)$ que sean perpendiculares a la recta $y = -2x$.

R: $x - 2y + \dfrac{\pi - 2}{2} = 0, x - 2y + \dfrac{2 - \pi}{2} = 0$

32. Encontrar las puntos de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + 5$ en los que su recta tangente es paralela al eje x R: $(1, 25/3)$; $(7, -83/3)$

33. Encontrar la ecuación de la rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = x^x$ en el punto (1,1) R: Recta tangente: $y = x$, Recta normal: $y = -x + 2$

34. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = -x^2$ que pasan por el punto (0,1) R: $y = -2x + 1$, $y = 2x + 1$

35. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ que pasan por el punto (2,0) R: $y = 0$, $y = 27x - 54$

IV. Regla de L'Hôpital

Resuelva los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital:

36. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}{2x^3 - 3x^2 - 12x + 20}$ R: $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

37. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}}{10^x}$ R: $[0]$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}\right)$ R: $\left[\dfrac{-1}{2}\right]$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} [ln(1 + x)]^x$ R: $[1]$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{ln(x + 1)} - \frac{1}{x}\right]$ R: $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{2x}\right]$ R: $\left[\dfrac{5}{12}\right]$

42. $\displaystyle\lim_{x\to a} \left[\frac{x - a}{x^n - a^n}\right]$ R: $\left[\dfrac{1}{na^{n-1}}\right]$

43. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x}{x^2}\right]$ R: $[\infty]$

44. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-x}$ R:$[0]$

45. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left[x \cdot e^{-1/x}\right]$ R: $[-\infty]$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{2x+2}\right) \cdot ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ R: [0]

47. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tan(x)}$ R: [1]

48. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2e^{3x} + ln(x)}{e^{3x} + x^2}$ R:[2]

49. $\lim\limits_{x \to \infty} [\ln(x) - \ln(1+x)]$ R:[0]

50. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ R: $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

51. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + e^{-x}\right)^x$ R: [1]

52. $\lim\limits_{x \to 0^+} [tan(x)]^{tan(2x)}$ R: [1]

53. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}\right)$ R: [2]

54. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2arctan(x^2) - \pi}$ R: $\left[\dfrac{-1}{2}\right]$

55. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - e^x}{\sin(x) - x}$ R: [1]

56. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}.arccos(x)$ R: [2]

57. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - cos(x))\sin(4x)}{x^3.cosx}$ R: [2]

58. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1 + \sin(x)]^{\frac{1}{3}} - 1}{ln(1+x)}$ R: $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

59. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos^3 x}{\sin^2(x)}$ R: $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

60. $\lim\limits_{x \to \infty} xtan(\dfrac{1}{x})$ R:[1]

61. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ctg(x) - 2}{csc(x) + 1}$ R: [1]

62. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ln[\sin(x)]}{ln[\sin(2x)]}$ R: [1]

63. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin(x) - \sin^3(x)}{x^5}$ R: $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

64. $\lim_{x\to\infty} \left[arctan\left(e^x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$ R:$[\pi/2]$

65. $\lim_{x\to 0} \frac{x - arcsin(x)}{\sin^3(x)}$ R: $\left[\frac{-1}{6}\right]$

66. $\lim_{x\to 0} \frac{tan(nx) - ntan(x)}{n\sin(x) - \sin(nx)}$ R: [2]

67. $\lim_{x\to\sqrt{2}/2} \left(\frac{\arcsin(x) - (\pi/4)}{2x^2 - 1}\right)$ R: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

V. La derivada como Razón de cambio

68. Una piedra cae desde un edificio de 256 pies de altura, teniendo como ecuación de su posición $s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$, determinar:

    a) Velocidad instantánea de la piedra en $t = 1seg$ y en $t = 2seg$. R:$-32pie/seg; -64pie/seg$

    b) El tiempo que tomará la piedra en llegar al piso. R: $4seg$

    c) ¿Cuál es la rapidez de la piedra cuando llega al piso? R:$-128pie/seg$

69. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$; con $t \geq 0$. Determinar el valor de t para el cual la velocidad es:

    a) $v(t) = 0m/seg.$ R:$0seg$

    b) $v(t) = 1m/seg.$ R:$1/2seg$

    c) $v(t) = 2m/seg.$ R: Para ningún valor de t.

70. Dos partículas se mueven a lo largo de la línea coordenada, al final de t segundos sus distancias dirigidas desde el origen están dadas por $d_1(t) = 4t - 3t^2$ y $d_2(t) = t^2 - 2t$ respectivamente:

    a) ¿Cuándo tienen la misma velocidad? R: $t = 3/4seg$

    b) ¿Cuándo tienen la misma posición? R: $t = 0seg$ y $t = 3/2seg$

71. Se arroja una piedra en un estanque tranquilo, formándose ondas circulares concéntricas que se dispersan. Si el radio de la región afectada crece a una rapidez de $16cm/seg$. ¿A que rapidez crece el área de la región afectada cuando su radio es $4cm$? R: $128 \cdot \pi cm^2/seg$

72. Un buque navegaba hacia el sur a una velocidad de 6 millas por hora; otro navegaba hacia el este a una velocidad de 8 millas por hora. A las cuatro de la tarde el segundo cruzó la ruta del primero en el punto por el que éste había pasado dos horas antes, usando esta información, conteste las siguientes preguntas:

    a) ¿Como variaba la distancia entre los buques a las tres de la tarde?
    R: Disminuía a razón de $2,8mi/h$

    b) ¿Como variaba la distancia entre los buques a las cinco de la tarde?
    R: Aumentaba a razón de $8,73mi/h$

    c) ¿A que hora no variaba la distancia entre ellos?
    R: A las tres horas y 16 minutos con 48 segundos de la tarde.

73. Un avión que vuela horizontalmente a una altura de 3 millas y a una velocidad de $480mi/h$ pasa directamente sobre un observador en el piso. ¿Que tan rápido aumenta la distancia del observador al avión 30 segundos después? R:$384mi/h$

74. La altura de un cono decrece a razón de $3cm/seg$, mientras su radio aumenta a razón de $2cm/seg$, cuando el radio mide $4cm$ y la altura $6cm$ que podemos decir acerca del volumen del cono, ¿está aumentando o disminuyendo? ¿con que razón? R:Aumentando en $16\pi\frac{cm^3}{seg}$

75. Un tren que sale a las 11 horas de la mañana se dirige hacia el este a una velocidad de $45km/h$, mientras que otro, que sale al medio día desde la misma estación, se dirige hacia el sur a una velocidad de $60km/h$. Hallar la velocidad con que se separan ambos trenes a las 3 de la tarde. R:$\frac{105\sqrt{2}}{2}km/h$

76. Un controlador aéreo sitúa dos aviones en la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto en ángulo recto. Uno de ellos está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas por hora. El otro está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas por hora.

    a) ¿A que ritmo decrece la distancia entre los dos aviones? R:$-750mi/h$

    b) ¿De cuanto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes? R:$20min$

77. Una escalera de $8m$ de largo esta apoyada contra un muro vertical. Si su base es empujada horizontalmente lejos de la pared a una rapidez de $2m/seg$ ¿Con que rapidez resbalara la parte superior de la escalera cuando su base está a $5m$ del muro? R:$-1,6m/seg$

78. Se vierte agua en un tanque cónico a razón de $2pie^3/min$. El tanque tiene su vértice hacia abajo y tiene una altura de 10 pies y un radio en la base de 5 pies. ¿Con que rapidez se esta elevando el nivel de agua cuando su altura es de 6 pies? R: $0,071pie/seg$

79. Las dimensiones de un depósito en forma de paralelepípedo son $8m$ de largo, $2m$ de ancho y $4m$ de profundidad; se está llenando de agua a razón de $2m^3$ por minuto. Hallar la variación de la altura del nivel del agua respecto al tiempo, en el instante en que la profundidad del líquido es de $1m$. R:$\frac{1}{8}m/min$.

80. Desde un conducto está cayendo arena a razón de $3m^3/min$ y va formando en el piso una pila de forma cónica, cuyo diámetro es 3 veces mayor que su altura, en todo momento. ¿Con qué rapidez asciende el tope de la pila cuando el mismo está a $4m$ del nivel del piso?

    R: $(1/12\pi)m/min$.

81. Una bola de nieve esférica se forma de tal manera que su volumen aumenta a razón de $8m^3/min$ ¿Encontrar la razón a la cual aumenta el radio, cuando la bola de nieve tiene $4m$ de diámetro? R: $\frac{1}{2\pi}m/min$.

82. La arista de un cubo crece a razón de $4cm/min$. ¿Con qué rapidez está creciendo el volumen cuando la arista es $10cm$? R: $1200cm^3/min$.

83. Un depósito cónico de vértice hacia abajo con radio igual a $1m$ y altura $2m$, recibe agua a razón de 4 litros por minuto. ¿Con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando su altura es de $0,6m$? R:$\frac{4}{90\pi}m/min$.

84. ¿Con qué velocidad aumenta el área de un círculo en el instante en que su radio vale $10cm$, sabiendo que dicho radio crece uniformemente con velocidad de $2cm/seg$? R: $40\pi cm^2/seg$.

85. El campo interior de un terreno de béisbol es un cuadrado de $30m$ de lado. Un jugador corre de segunda a tercera a razón de $6m/seg$. ¿A qué ritmo cambia su distancia al home cuando se encuentra a $10m$ de la tercera base? R: $-1,89m/seg$

86. Un globo asciende a razón de $5m/seg$ desde un punto que dista 30m de un observador. Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación cuando el globo está a una altura de $10\sqrt{3}m$. R: $0,125rad/seg$.

87. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 5cm. y su hipotenusa está aumentando a razón de 4cm/min. Calcule la rapidez a la que está aumentando el otro cateto del triángulo en el momento en que la hipotenusa mide $\sqrt{74}cm$. R:$\frac{4\sqrt{74}}{7}cm/min$.

VI. Números críticos de una función, Criterio de la primera derivada, Intervalos de monotonía

Utilizando el criterio de la primera derivada, encuentre los extremos absolutos de la función.

88. $f(x) = -3x^2(x^2 - 2)$ en $[-3, 0]$
R:mínimo absoluto en $x = -3$, Máximo absoluto en $x = -1$.

89. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en $[-2, 1]$
R:mínimo absoluto en $x = -2$; $x = 1$, Máximo absoluto en $x = -1$.

90. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 2}$ en $[-3, 0]$
R:mínimo absoluto en $x = -\sqrt{2}$, Máximo absoluto en $x = 0$.

91. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ en $[-1, 0]$
R:mínimo absoluto en $x = -1$, Máximo absoluto en $x = 0$.

92. $f(x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2}$ en $[-3, 3]$
R:mínimo absoluto en $x = 0$, Máximo absoluto en $x = \pm 3$.

93. $f(x) = 3xe^{-x}$ en $[-2, 5]$
R:mínimo absoluto en $x = -2$, Máximo absoluto en $x = 1$.

94. $f(x) = 2\ln(1 + x^2) + 2$ en $[-4, 2]$
R:mínimo absoluto en $x = 0$, Máximo absoluto en $x = -4$.

95. $f(x) = 3 - 2\arctan(x)$ en $[-1, 2]$
R:mínimo absoluto en $x = 2$, Máximo absoluto en $x = -1$.

96. $f(x) = 2x + 2 + 2\arctan(x)$ en $[-1, 1]$
R:mínimo absoluto en $x = -1$, Máximo absoluto en $x = 1$.

97. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ en $[-2, 3]$
R:mínimo absoluto en $x = -\sqrt{2}$, Máximo absoluto en $x = \sqrt{2}$.

En los siguientes ejercicios, determine los intervalos de monotonía de la función dada.

98. $f(x) = 3 - e^{-3x}$ R: La función crece en $\mathbb{R}$

99. $f(x) = e^{x} + 4$ R: La función crece en $\mathbb{R}$

100. $f(x) = 2arctan(x) - 1$ R: La función crece en $\mathbb{R}$

101. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ R: La función crece en $(1, \infty)$, la función decrece en $(-\infty, -1)$

102. $f(x) = e^{x^2-2x}$
R: Punto crítico en $x = 1$, la función crece en $(1, \infty)$, la función decrece en $(-\infty, 1)$

103. $f(x) = 1 + |x-2|$
R: Punto crítico en $x = 2$, la función crece en $(2, \infty)$, la función decrece en $(-\infty, 2)$

104. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
R: Punto crítico en $x = 2 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, la función crece en $(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}, 2) \cup (2, 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3})$, la función decrece en $(-\infty, 1) \cup (1, 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}) \cup (2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}, 3) \cup (3, \infty)$

105. $f(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x} + 3e^{2x} + 9x + 1$ R: La función crece en $\mathbb{R}$

106. $f(x) = \dfrac{x(x+2)}{x+1} - ln(x+1)$ R: La función crece en $(-1, \infty)$

107. $f(x) = 3arctan(x+1) - ln(x^2 + 2x + 2) + x$ R: La función crece en $\mathbb{R}$

VII. Extremos relativos, Criterio de la primera derivada, Criterio de la segunda derivada para extremos relativos.
Utilice el criterio de la primera derivada para determinar los extremos locales:

108. $f(x) = 2x^2(x+3)$
R: Puntos críticos en $x = -2, 0$, Máximo local en $x = -2$, Mínimo local en $x = 0$

109. $f(x) = 2x(x^2 + 3x - 9)$
R: Puntos críticos en $x = -3, 1$, Máximo local en $x = -3$, Mínimo local en $x = 1$

110. $f(x) = (x+3)^3(3x+11)$
R: Puntos críticos en $x = -3, 7/2$, Mínimo local en $x = 7/2$

111. $f(x) = 3(x+2)^3(2x^2 - 7x + 8)$
R: Puntos críticos en $x = -2, 1$

112. $f(x) = 2(x+2)^4(2x-11)$
R: Puntos críticos en $x = -2, 4$, Máximo local en $x = -2$, Mínimo local en $x = 4$

113. $f(x) = ln(x^2 + x + 3)$
R: Puntos críticos en $x = \dfrac{-1}{2}$, Mínimo local en $x = \dfrac{-1}{2}$

114. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 9}$
R: Puntos críticos en $x = -3, 3$, Máximo local en $x = 3$, Máximo local en $x = -3$,

115. $f(x) = \dfrac{-1}{4}x + arctan(x)$
R: Puntos críticos en $x = \pm\sqrt{3}$, Máximo local en $x = \sqrt{3}$, Máximo local en $x = -\sqrt{3}$,

116. $f(x) = \dfrac{1}{16}e^{2x}(4x^3 - 26x^2 + 54x - 39)$
R: Puntos críticos en $x = 1, 3$, Máximo local en $x = 3$,

117. $f(x) = x + ln(x + 2)$
R: No tiene extremos locales.

En los siguientes ejercicios utilice el criterio de la segunda derivada para clasificar los extremos relativos:

118. $g(x) = 2x(2x^2 - 9x + 12) + 4$ R:La función tiene: un mínimo relativo en $x = 2$ y un máximo relativo en $x = 1$.

119. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 5}$ R:La función tiene: un mínimo relativo en $x = 0$.

120. $s(x) = x^2e^x$ R: La función tiene: un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = -2$.

121. $h(x) = x\ln^2 x - 3x\ln x + 3x$ R: La función tiene: un máximo relativo en$x = 1$y un mínimo relativo en $x = e$

122. $t(x) = (x^2 + x)e^{-x}$ R:La función tiene: un mínimo relativo en $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y un máximo relativo en $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

123. $f(x) = \ln(x^2 + 3)$ R:La función tiene: un mínimo relativo en$x = 0$.

124. $m(x) = (x^2 - 3)\ln(x) - x^2 + 3\ln(x)$ R:La función tiene: un mínimo relativo en $x = \sqrt{e}$.

125. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$ R:La función tiene: un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

126. $j(x) = x(x^3 - 4x^2 + 2x - 12)$ R:La función tiene: un mínimo relativo en $x = 3$

VIII. Optimización

127. Hallar dos números cuya diferencia sea 20 y su producto mínimo. R: 10 y -10

128. Entre todos los rectángulos de perímetro dado P, encontrar el de área máxima. R:$A = \frac{P^2}{16}$

129. Hallar un número que exceda a su cubo en la mayor cantidad. R: $\sqrt{3}/3$

130. Hallar las dimensiones del cono recto circular mínimo que se puede circunscribir a una esfera de 8 centímetros de radio. R: $h = 32cm$ y $r = 8\sqrt{2}cm$

131. Se tiene un alambre de longitud L y se desea dividirlo en dos trozos para formar con cada uno de ellos un triángulo equilátero. Hallar la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima. R:$l_1 = l_2 = L/2$; $A = \frac{\sqrt{3}}{72}L^2$

132. Cual es la altura del cilindro de volumen máximo, que puede inscribirse en una esfera cuyo radio mide 3 cm. R: $h = 2\sqrt{3}cm$

133. Calcular el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 12 centímetros de altura y 4 centímetros de radio en la base, de manera que los ejes del cilindro y del cono coincidan. R: $89,4cm^3$

134. Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada, ¿Cuál será el volumen de la mayor caja que se pueda construir con $1200cm^2$ de material? R: $4000cm^3$

135. Hallar el área máxima de un cuadrilátero, inscrito en una semicircunferencia de 6cm de radio. R: $A = 36cm^2$

136. Se dispone de una lámina de cartón cuadrada de 12 cm de lado. Cortando cuadrados iguales en las esquinas se construye una caja abierta doblando los laterales; hallar las dimensiones de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo. R: $l = 2cm$

137. Encuentre las dimensiones del triángulo isósceles mas grande que se pueda inscribir en un círculo de radio r. R: $h = \frac{3r}{2}$; base $= r\sqrt{3}$

138. Hallar los catetos del triángulo rectángulo de área máxima, entre todos aquellos que tienen hipotenusa igual a 20cm. R:$c_1 = \sqrt{200}$; $c_2 = \sqrt{200}$

139. Cuales son las dimensiones y el área del rectángulo de mayor área que puede inscribirse entre el eje X, y el espacio limitado por las rectas

$$\begin{cases} y = x + 8 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

R: $b = 3,5ul$; $h = 5,25ul$; $A = 18,375ua$

140. Un hombre que navega en una barca de remos a dos (2) millas del punto más cercano de una costa recta, desea llegar a su casa, la cual está en esta costa a seis (6) millas de dicho punto. El hombre puede remar a razón de tres (3) millas por hora y caminar a razón de cinco (5) millas por hora; hallar el menor tiempo posible que emplea el hombre para llegar a su casa. R: $t = 1h44min$

141. En un instante determinado, un barco B se encuentra a 65 km al este de otro barco A. El barco B empieza a navegar hacia el oeste con una velocidad de $10km/h$, mientras que el A lo hace hacia el sur con una velocidad de $15km/h$. Sabiendo que las rutas no se modifican, calcular el tiempo que transcurrirá hasta que la distancia que los separe sea mínima y hallar dicha distancia. R: $t = 2h$ y $d = 15\sqrt{13}km$

142. Dos torres de 150m y 100m de altura cada una, están separadas una distancia de 200m. Si las puntas superiores deben conectarse a un mismo punto de tierra situado entre las bases de ambas torres. ¿Cuál debe ser la distancia de dicho punto a cada torre para que la cantidad de alambre empleado en esta operación sea mínima? R: 120m y 80m

IX. Concavidad; Puntos de inflexión.
En los siguientes ejercicios, determine los intervalos de concavidad de la gráfica de la función dada y sus puntos de inflexión:

143. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$
R: Convexa en $(-\infty, 1)$; cóncava en $(1, \infty)$; punto de inflexión con abscisa en: $x = 1$.

144. $f(x) = x^2(x - 3) + x + 1$
R: Convexa en $(-\infty, 1)$; cóncava en $(1, \infty)$; punto de inflexión con abscisa en: $x = 1$.

145. $h(x) = \arctan x + x \ln \sqrt{1 + x^2} - x$
R: Convexa en $(-\infty, 0)$; cóncava en $(0, \infty)$; punto de inflexión con abscisa en: $x = 0$.

146. $k(x) = (7 - x)e^x$
R: Cóncava en $(-\infty, 5)$; convexa en $(5, \infty)$; punto de inflexión con abscisa en: $x = 5$.

147. $s(x) = xe^{-x}$
R: Convexa en $(-\infty, 2)$; cóncava en $(2, \infty)$; punto de inflexión con abscisa en: $x = 2$.

148. $t(x) = \dfrac{1}{x + 5}$
R: Convexa en $(-\infty, -5)$; cóncava en $(-5, \infty)$; punto de inflexión con abscisa en: $x = -5$.

149. $r(x) = \dfrac{3}{x + 1} + x + 2$
R: Convexa en $(-\infty, -1)$; cóncava en $(-1, \infty)$; punto de inflexión con abscisa en: $x = -1$.

150. $j(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
R: Convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; cóncava en $(1, 0) \cup (1, \infty)$; punto de inflexión con abscisa en: $x = 0$.

151. $m(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$
R: Convexa en $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, \infty)$; cóncava en $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$; puntos de inflexión con abscisas en: $x = \pm 2\sqrt{3}/3$.

X. Trazado de gráficas de funciones
Haga un análisis general de las siguientes funciones y trace su gráfica:

152. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$
R:$Dom(f) = \mathbb{R}$. Intersecciones con el eje x: $(4, 0)$ y el origen $(0, 0)$. Creciente en (1,∞), decreciente en ($-\infty$,1). Cóncava en $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$, convexa en (2,4). Mínimo absoluto en $x = 1$ y vale -27. Puntos de inflexión (2,-16) y (4,0).

153. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$
R:$Dom(f) = \mathbb{R}$.Intersecciones: con el eje y: $(0, 1)$; con el eje x no hay. Sin asíntotas. Mínimo absoluto en $x = 0$ y vale 1. Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{2}, \frac{23}{16}\right)$,$(1, 2)$. Decreciente en ($-\infty$,0). Creciente en (0,$\infty$). Cóncava en $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$, convexa en $(\frac{1}{2}, 1)$.

154. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$
R:$Dom(f) = \mathbb{R}$. Intersecciones: con el eje y: $(0, 2)$; con el eje x no hay. Mínimo absoluto en $x = 0$ y vale 2. No tiene puntos de inflexión. Creciente en $(0, \infty)$, decreciente en $(-\infty, 0)$. Cóncava en todo su dominio.

155. $f(x) = (x+1)^3(x^2-4x+4)$
R:$Dom(f) = \mathbb{R}$.Intersecciones: con el eje x:$(-1,0); (2,0)$; con el eje y: $(0,4)$ Máximo local en $x = \frac{4}{5}$ y vale $\frac{26244}{3125}$. Mínimo local en $x = 2$ y vale 0. Puntos de inflexión con abscisas: $x = -1, x = \frac{1}{10}(8 \pm 3\sqrt{6})$. Crece en $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right) \cup (2, \infty)$, decrece en $\left(\frac{4}{5}, 2\right)$. Convexa en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{10}(8-3\sqrt{6}), \frac{1}{10}(8+3\sqrt{6})\right)$, cóncava en $\left(-1, \frac{1}{10}(8-3\sqrt{6})\right) \cup \left(\frac{1}{10}(8+3\sqrt{6}), \infty\right)$.

156. $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$
R: $Dom(f) = \mathbb{R}$.Intersecciones: con el eje x: $(-1,0); (2,0)$; con el eje y: $(0, -\sqrt[3]{2})$ Máximo local en $x = -1$ y vale 0. Mínimo local en $x = 1$ y vale $-\sqrt[3]{4}$. Punto de inflexión en $x = 2$. Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decrece en $(-1, 1)$. convexa en $(2, \infty)$. cóncava en $x < 2$. Asíntota oblicua en $y = x$.

157. $f(x) = xe^{-x}$
R: $Dom(f) = \mathbb{R}$.Intersecciones con los ejes: $(0,0)$. Creciente en $(-\infty, 1)$. Decreciente en $(1, \infty)$. Máximo local en $x = 1$ y vale $\frac{1}{e}$. Convexa en $(-\infty, 2)$. cóncava en $(2, \infty)$. Punto de inflexión con abscisa $x = 2$. Asíntota horizontal en $y = 0$.

158. $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$
R:$Dom(f) = \mathbb{R}$. Intersecciones con los ejes: con el eje x:$(-1,0); (1,0)$; con el eje y: $(0,-1)$. Creciente en $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, decreciente en $(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \infty)$.Mínimo absoluto en $x = 1-\sqrt{2}$ y vale $f(1-\sqrt{2}) \approx -1,254$, máximo local en $x = 1+\sqrt{2}$ y vale $f(1+\sqrt{2}) \approx 0,432$. Convexa en $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$, cóncava en $(-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, \infty)$. Punto de inflexión con abscisas $x = 2-\sqrt{3}$ y en $x = 2+\sqrt{3}$. Asíntota horizontal en $y = 0$.

159. $f(x) = x^{2/3}e^{-x}$
R: $Dom(f) = \mathbb{R}$.Intersecciones con los ejes: $(0,0)$. Decreciente en $(-\frac{2}{3}, 0)$, creciente en $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$. Mínimo absoluto en $x = 0$ y vale 0, Máximo local en $x = -\frac{2}{3}$ y vale $f(\frac{2}{3}) \approx 0,392$. Convexa en $(\frac{2-\sqrt{6}}{3}, 0) \cup (0, \frac{2+\sqrt{6}}{3})$, cóncava en $(-\infty, \frac{2-\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{2+\sqrt{6}}{3}, \infty)$. Punto de inflexión con abscisas $x = \frac{2\pm\sqrt{6}}{3}$. Asíntota horizontal en $y = 0$.

160. $f(x) = xln(x)$
R:$Dom(f) = (0, \infty)$. Intesección con el eje x: $(1,0)$. Creciente en $(\frac{1}{e}, \infty)$, decreciente en $(0, \frac{1}{e})$. Mínimo local en $x = \frac{1}{e}$ y vale $-\frac{1}{e}$. Cóncava en todo su dominio. Sin asíntotas.

161. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
R: $Dom(f) = (0, \infty)$. Intesección con el eje x: $(1,0)$. Creciente en $(0, e)$, decreciente en (e, ∞). Máximo absoluto en $x = e$ y vale $1/e$. Convexa en $(0, e^{3/2})$, cóncava en $(e^{3/2}, \infty)$. Punto de inflexión con abscisa $x = e^{3/2}$. Asíntota vertical en $x = 0$

162. $f(x) = x^3ln(x)$
R: $Dom(f) = (0, \infty)$. Intesección con el eje x: $(1,0)$.Creciente en $(e^{-1/3}, \infty)$, decreciente en $(0, e^{-1/3})$. Mínimo local en $x = e^{-1/3}$ y vale $-\frac{1}{3e}$. Convexa en $(0, e^{-5/6})$, cóncava en $(e^{-5/6}, \infty)$. Punto de inflexión con abscisa en $x = e^{-5/6}$. No tiene asíntotas.

163. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
R: $Dom(f) = \mathbb{R}$. No tiene intersecciones con los ejes. Creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$. Máximo absoluto en $x = 0$ y vale $\pi/2$. Convexa en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

164. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$
R: $Dom(f) = \mathbb{R}$. Intersecciones con los ejes: $(0,-2); (2,0)$, Decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$, creciente en $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Mínimo local en $x = -\frac{1}{2}$ y vale $f(-\frac{1}{2}) \approx -2,24$. Puntos de inflexión con abscisas en $x = \frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}$. Asíntotas horizontales en $y = -1$ para $x \to -\infty$ y en $y = 1$ para $x \to \infty$.

165. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
R: $Dom(f) = (-1, 1]$. Decreciente en $(-1, 1)$. Mínimo absoluto en $x = 1$ y vale 0. Cóncava en $(-1, 1/2)$, convexa en $(1/2, 1)$. Punto de inflexión con abscisa $x = 1/2$. Asíntota vertical en $x = -1$

166. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$
R: $Dom(f) = \mathbb{R}$. Intersección en $(0, 0)$. Asíntota horizontal en $y = 1$. Mínimo absoluto en $x = 0$ y vale 0. Puntos de inflexión en $(-1, 1/4)$ y $(1, 1/4)$. Creciente en $(0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 0)$. Convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, cóncava en $(-1, 1)$.

167. $f(x) = \dfrac{7-3x}{x-2}$
R: $Dom(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Cortes en $(0, -7/2)$ y $(7/3, 0)$. Asíntota vertical en $x = 2$, asíntota horizontal en $y = -3$. Decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. convexa en $(-\infty, 2)$, cóncava en $(2, \infty)$.

168. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$
R: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Simétrica con el origen. Intersección con los ejes en $(0, 0)$. Asíntota vertical en $x = -1$ y en $x = 1$, asíntota horizontal en $y = 0$. Punto de inflexión en $(0, 0)$. Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, cóncava en $(1, 0) \cup (1, \infty)$.

169. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$
R: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Simétrica respecto al origen. Asíntota vertical en $x = 0$, asíntota oblicua la recta $y = x$. Máximo local se alcanza en $x = -1$ y vale -2, mínimo local se alcanza en $x = 1$ y vale 2. Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Cóncava en $(0, \infty)$, convexa en $(-\infty, 0)$.

170. $f(x) = \dfrac{12-6x+x^2}{x-4}$
R:$Dom(f) = \mathbb{R} - \{4\}$. Intersección con y en $(0, -3)$. Asíntota vertical en $x = 4$, asíntota oblicua la recta $y = x-2$. Máximo local se alcanza en $x = 2$ y vale-2, mínimo local se alcanza en $x = 6$ y vale 6. Creciente en $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$, decreciente en $(2, 4) \cup (4, 6)$. Cóncava en $(4, \infty)$, convexa en $(-\infty, 4)$.

171. $f(x) = \dfrac{8-x^3}{2x^2}$
R: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Intersección con x: $(2, 0)$. Asíntota vertical en $x = 0$, asíntota oblicua la recta $y = -x/2$. Mínimo local se alcanza en $x = -\sqrt[3]{16}$ y vale $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$. Creciente en $(-\sqrt[3]{16}, 0)$, decreciente en $(-\infty, -\sqrt[3]{16}) \cup (0, \infty)$. Cóncava en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

172. $f(x) = x\sqrt{4-x}$
R: $Dom(f) = (-\infty, 4]$. Intersección con los ejes en $(0,0)$. Máximo absoluto se alacanza en $x = 8/3$ y vale $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$. Creciente en $(-\infty, 8/3)$, decreciente en $(8/3, 4)$. Convexa en $(-\infty, 4)$.

173. $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$
R: $Dom(f) = [-3, 3]$. Intersección con los ejes en $(0,0); (-3,0); (3,0)$. Simétrica respecto al origen. Máximo absoluto se alcanza en $\sqrt{9/2}$ y vale $9/2$, mínimo absoluto se alcanza en $-\sqrt{9/2}$ y vale $-9/2$. Punto de inflexión en $(0,0)$. Creciente en $(-\sqrt{9/2}, \sqrt{9/2})$, decreciente en $(-3, -\sqrt{9/2}) \cup (\sqrt{9/2}, 3)$. Cóncava en $(-3, 0)$, convexa en $(0, 3)$.

174. $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x$
R: $Dom(f) = \mathbb{R}$. Intersecciones con los ejes en $(0,0)$ y $((3/2)^3), 0)$. Máximo local se alcanza en $x = 1$ y vale 1. Creciente en $(0,1)$, decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Convexa en todo su dominio.

BIBLIOGRAFIA

(1) Demidovich, B. *5000 Problemas de Análisis Matemático*, Paraninfo, S.A, Madrid.

(2) Granville, W. *Cálculo Diferencial e Integral*, Limusa-México.

(3) Leithold, L. *El Cálculo*, 7^{ma} Edición, Oxford University Press.

(4) Pita Ruiz, C. *Cálculo de una variable*, Prentice Hall Hispanoamérica, S.A.

(5) Purcell, E., Varberg D., Rigdon S. *Cálculo*, 9^{na} Edición, Pearson-Educación.

(6) Saenz, J. *Cálculo Diferencial con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencia e Ingeniería*, 2^{da} Edición, Hipotenusa, Barquisimeto-Lara-Venezuela.

(7) Stewart, J. *Calculus*, Sexta Edición, Thompson Brooks/Cole.