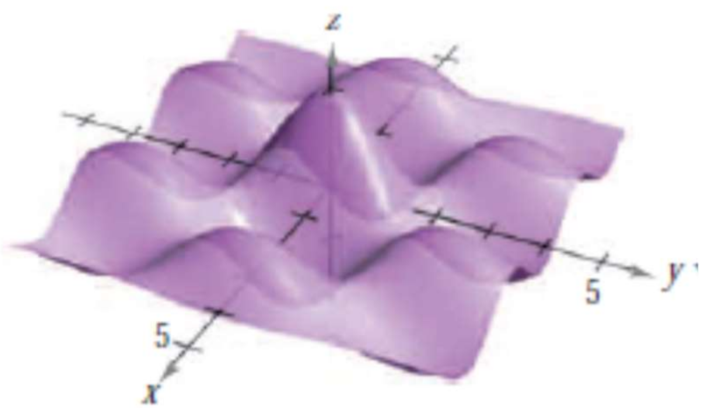
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Multiplicadores de Lagrange



Arelis Díaz

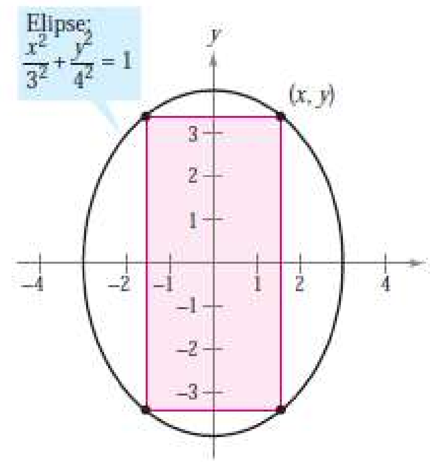
Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

29 de julio del 2021

Muchos problemas de optimización tienen **restricciones**, o **ligaduras**, para los valores que pueden usarse para dar la solución óptima. Tales restricciones tienden a complicar los problemas de optimización porque la solución óptima puede presentarse en un punto frontera del dominio. Para resolver esos problemas se puede usar el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para ver cómo funciona esta técnica, supóngase que se quiere hallar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$



Sea (x, y) el vértice del rectángulo que se encuentra en el primer cuadrante, como se muestra en la figura. Como el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y $2y$, su área está dada por

$$f(x, y) = 4xy. \qquad \text{Función objetivo.}$$

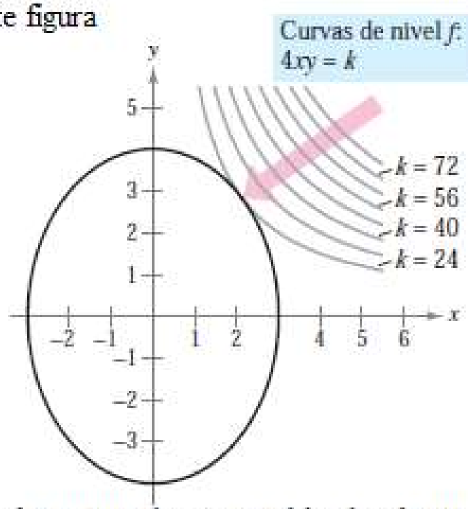
Se quieren hallar x y y tales que $f(x, y)$ es un máximo. La elección de (x, y) está restringida a puntos del primer cuadrante que están en la elipse

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1. \qquad \text{Restricción.}$$

Ahora, considérese la ecuación restrictiva o de ligadura como una curva de nivel fija de

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}.$$

Las curvas de nivel de f representan una familia de hipérbolas $f(x, y) = 4xy = k$. En esta familia, las curvas de nivel que satisfacen la restricción dada corresponden a hipérbolas que cortan a la elipse. Es más, para maximizar $f(x, y)$, se quiere hallar la hipérbola que justo satisfaga la restricción. La curva de nivel que hace esto es la que es *tangente* a la elipse, como se muestra en la siguiente figura



Para encontrar la hipérbola apropiada se usa el hecho de que dos curvas son tangentes en un punto si y sólo si sus vectores gradiente son paralelos. Esto significa que $\nabla f(x, y)$ debe ser un múltiplo escalar de $\nabla g(x, y)$ en el punto de tangencia. En el contexto de los problemas de optimización con restricciones, este escalar se denota con la letra griega λ (*lambda* minúscula del alfabeto griego).

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Al escalar λ se le conoce como un **multiplicador de Lagrange**.

TEOREMA **TEOREMA DE LAGRANGE**

Sean f y g funciones con primeras derivadas parciales continuas, y tales que f tiene un extremo en un punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de restricción $g(x, y) = c$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

El método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los valores extremos de una función f sujeta a una restricción.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sean f y g funciones que satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange, y sea f una función que tiene un mínimo o un máximo sujeto a la restricción $g(x, y) = c$. Para hallar el mínimo o el máximo de f, seguir los pasos descritos a continuación.

1. Resolver simultáneamente las ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = c$ resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) &= c \end{aligned}$$

2. Evaluar f en cada punto solución obtenido en el primer paso. El valor mayor da el máximo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$, y el valor menor da el mínimo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$.

EJEMPLO 1 Multiplicador de Lagrange con una restricción o ligadura

Hallar el valor máximo de $f(x, y) = 4xy$ donde $x > 0$ y $y > 0$, sujeto a la restricción $(x^2/3^2) + (y^2/4^2) = 1$.

Solución Para comenzar, sea

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Igualando $\nabla f(x, y) = 4y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$ y $\lambda \nabla g(x, y) = (2\lambda x/9)\mathbf{i} + (\lambda y/8)\mathbf{j}$, se puede obtener el sistema de ecuaciones siguiente.

$$4y = \frac{2}{9}\lambda x \qquad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y).$$

$$4x = \frac{1}{8}\lambda y \qquad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \qquad \text{Restricción.}$$

De la primera ecuación, se obtiene $\lambda = 18y/x$, que sustituido en la segunda ecuación da

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{16}y^2.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación x^2 por este valor se tiene

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right)+\frac{1}{16}y^2=1 \quad \Longrightarrow \quad y^2=8.$$

Así, $y=\pm 2\sqrt{2}$. Como se requiere que $y>0$, se elige el valor positivo y se halla que

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{9}{16}y^2 \\
&= \frac{9}{16}(8)=\frac{9}{2} \\
x &= \frac{3}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el valor máximo de f es

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right)=4xy=4\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(2\sqrt{2}\right)=24.$$

EJEMPLO 2 Una aplicación a la economía

La función de producción de Cobb-Douglas para un fabricante de software está dada por

$$f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4} \qquad \text{Función objetivo.}$$

donde x representa las unidades de trabajo (a \$150 por unidad) y y representa las unidades de capital (a \$250 por unidad). El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50 000. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante.

Solución De la función dada, se tiene

$$\nabla f(x, y) = 75x^{-1/4}y^{1/4}\,\mathbf{i} + 25x^{3/4}y^{-3/4}\,\mathbf{j}.$$

El límite para el costo de trabajo y capital se refleja en la restricción o ligadura

$$g(x, y) = 150x + 250y = 50\,000. \qquad \text{Restricción.}$$

Así, $\lambda\nabla g(x, y) = 150\lambda\,\mathbf{i} + 250\lambda\,\mathbf{j}$. Esto da lugar al sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned}
75x^{-1/4}y^{1/4} &= 150\lambda && f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y).\\
25x^{3/4}y^{-3/4} &= 250\lambda && f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).\\
150x + 250y &= 50\,000 && \text{Restricción.}
\end{aligned}$$

Resolviendo para λ en la primera ecuación

$$\lambda = \frac{75x^{-1/4}y^{1/4}}{150} = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}$$

y despejando λ de la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 25x^{3/4}y^{-3/4} &= 250\left(\frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}\right) \\ 25x &= 125y. \qquad \text{Multiplicar por } x^{1/4}y^{3/4}. \end{aligned}$$

Así, $x = 5y$. Sustituyendo en la tercera ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} 150(5y) + 250y &= 50\,000 \\ 1\,000y &= 50\,000 \\ y &= 50 \text{ unidades de capital} \\ x &= 250 \text{ unidades de trabajo.} \end{aligned}$$

Por tanto, el nivel máximo de producción es

$$\begin{aligned} f(250, 50) &= 100(250)^{3/4}(50)^{1/4} \\ &\approx 16\,719 \text{ unidades del producto.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Multiplicadores de Lagrange y tres variables

Hallar el valor mínimo de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 \qquad \text{Función objetivo.}$$

sujeto a la restricción o ligadura $2x - 3y - 4z = 49$.

Solución Sea $g(x, y, z) = 2x - 3y - 4z = 49$. Entonces, como

$$\nabla f(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \lambda\nabla g(x, y, z) = 2\lambda\mathbf{i} - 3\lambda\mathbf{j} - 4\lambda\mathbf{k}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 4x &= 2\lambda && f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z). \\ 2y &= -3\lambda && f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z). \\ 6z &= -4\lambda && f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z). \\ 2x - 3y - 4z &= 49 && \text{Restricción.} \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $x = 3$, $y = -9$ y $z = -4$. Por tanto, el valor óptimo de f es

$$\begin{aligned} f(3, -9, -4) &= 2(3)^2 + (-9)^2 + 3(-4)^2 \\ &= 147. \end{aligned}$$

De la función original y de la restricción, resulta claro que $f(x, y, z)$ no tiene máximo. Por tanto, el valor óptimo de f determinado arriba es un mínimo.

Como vimos en el ejemplo anterior el método para funciones de tres variables es similar al caso cuando se tienen dos variables, a continuación se expone

Método de los multiplicadores de Lagrange Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = k$$

b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso a). El más grande de estos valores es el valor máximo de f, el más pequeño es el valor mínimo de f.

EJEMPLO 4 Determine los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están más cercanos y más lejanos al punto $(3, 1, -1)$.

SOLUCIÓN La distancia desde un punto (x, y, z) al punto $(3, 1, -1)$ es

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

pero los pasos algebraicos son más sencillos si maximizamos y minimizamos el cuadrado de la distancia:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

La restricción es que el punto (x, y, z) está sobre la esfera, es decir,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acuerdo con el método de los multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$. Esto da

$$2(x - 3) = 2x\lambda \tag{12}$$

$$2(y - 1) = 2y\lambda \tag{13}$$

$$2(z + 1) = 2z\lambda \tag{14}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \tag{15}$$

La manera más sencilla de resolver estas ecuaciones es expresar x, y y z en términos de λ a partir de $\boxed{12}$, $\boxed{13}$ y $\boxed{14}$, y luego sustituir estos valores en $\boxed{15}$. Según $\boxed{12}$ se tiene

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{o bien} \qquad x(1-\lambda) = 3 \qquad \text{o bien} \qquad x = \frac{3}{1-\lambda}$$

[Observe que $1 - \lambda \neq 0$ porque $\lambda = 1$ es imposible según $\boxed{12}$.] De la misma manera, con $\boxed{13}$ y $\boxed{14}$ se obtiene

$$y = \frac{1}{1-\lambda} \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

Por lo tanto, a partir de $\boxed{15}$, tenemos

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

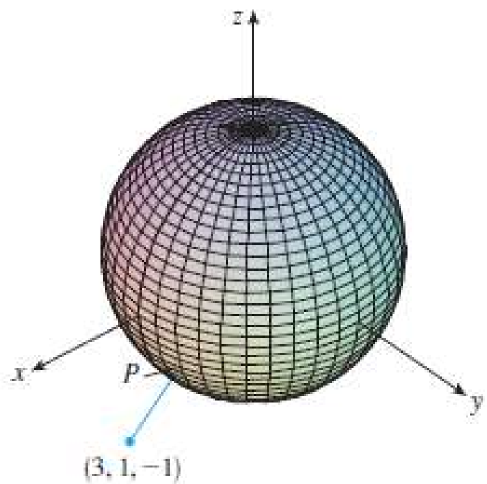
lo cual da $(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$, de modo que

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Estos valores de λ proporcionan los puntos correspondientes (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Es fácil ver que f tiene un valor más pequeño en el primero de estos puntos, de modo que el punto más cercano es $\left(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}\right)$ y el más lejano es $\left(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}\right)$.



El método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

En problemas de optimización que involucran *dos* funciones de restricción g y h, se puede introducir un segundo multiplicador de Lagrange, μ (letra minúscula *mu* del alfabeto griego), y resolver la ecuación

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

donde los vectores gradiente no son paralelos, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Optimización con dos restricciones

Sea $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. Hallar las temperaturas extremas en la curva formada por la intersección del plano $x + y + z = 3$ y la esfera.

Solución Las dos restricciones son

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 11 \qquad \text{y} \qquad h(x, y, z) = x + y + z = 3.$$

Usando

$$\nabla T(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\lambda \nabla g(x, y, z) = 2\lambda x\mathbf{i} + 2\lambda y\mathbf{j} + 2\lambda z\mathbf{k}$$

y

$$\mu \nabla h(x, y, z) = \mu\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$2 = 2\lambda x + \mu \qquad T_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z).$$
$$2 = 2\lambda y + \mu \qquad T_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z).$$
$$2z = 2\lambda z + \mu \qquad T_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z).$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 11 \qquad \text{Restricción 1.}$$
$$x + y + z = 3 \qquad \text{Restricción 2.}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, se obtiene el sistema siguiente.

$$\begin{aligned} \lambda(x-y) &= 0 \\ 2z(1-\lambda)-\mu &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 11 \\ x+y+z &= 3 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, se concluye que $\lambda = 0$ o $x = y$. Si $\lambda = 0$, se puede demostrar que los puntos críticos son $(3, -1, 1)$ y $(-1, 3, 1)$. (Tratar de hacer esto toma un poco de trabajo.) Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = y$ y se puede mostrar que los puntos críticos se presentan donde $x = y = \left(3 \pm 2\sqrt{3}\right)/3$ y $z = \left(3 \mp 4\sqrt{3}\right)/3$. Por último, para encontrar las soluciones óptimas, se deben comparar las temperaturas en los cuatro puntos críticos.

$$T(3, -1, 1) = T(-1, 3, 1) = 25$$

$$T\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$

$$T\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$

Así, $T = 25$ es la temperatura mínima y $T = \frac{91}{3}$ es la temperatura máxima en la curva.

Ejercicios Propuestos

3-14 Utilizando multiplicadores de Lagrange, encuentre los valores máximo y mínimo de la función sujeta a la restricción o las restricciones dadas.

3. $f(x, y) = x^2 + y^2; \quad xy = 1$

5. $f(x, y) = y^2 - x^2; \quad \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

7. $f(x, y, z) = 2x + 2y + z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$

9. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

15-18 Encuentre los valores extremos de f sujetos a ambas restricciones.

15. $f(x, y, z) = x + 2y; \quad x + y + z = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$

17. $f(x, y, z) = yz + xy; \quad xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$

19-21 Calcule los valores extremos de f en la región descrita por la desigualdad.

19. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$

21. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

23. Considere el problema de minimizar la función $f(x, y) = x$ sobre la curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (en forma de pera).

a) Intente usando multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.

b) Demuestre que el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ pero la condición de Lagrange $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ no es satisfecha por ningún valor de λ.

c) Explique por qué los multiplicadores de Lagrange no encuentran el valor mínimo en este caso.

27. Mediante los multiplicadores de Lagrange, demuestre que el rectángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es un cuadrado.

Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver los siguientes problemas planteados en la clase 7

39. Calcule la distancia más corta desde el punto $(2, 0, -3)$ al plano $x + y + z = 1$.

41. Encuentre los puntos sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

47. Calcule el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

49. Determine las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo tal que la suma del largo de sus 12 aristas es una constante c.