Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Longitud de arco y curvatura

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

22 de julio del 2021

Longitud de arco

Sea $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ una función vectorial en el espacio continua en el intervalo $[a, b]$ y tal que su gráfica se dibuja una sola vez cuando t va desde a hasta b. Entonces la longitud de arco de la gráfica de $\vec{r}$ es

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \end{aligned}}$$

Lo anterior se puede escribir como $\boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt}$

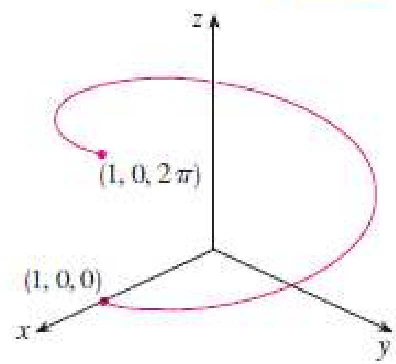
V EJEMPLO 1 Calcule la longitud del arco de la hélice circular de la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$ desde el punto (1, 0, 0,) hasta el punto $(1, 0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN Puesto que $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + \mathbf{k}$, tenemos

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

El arco desde (1, 0, 0) hasta $(1, 0, 2\pi)$ se describe mediante el intervalo del parámetro $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y así, con la fórmula 3, tenemos

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi$$



EJEMPLO 2 Reparametrizar la hélice $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ respecto a la longitud de arco medida desde $(1, 0, 0)$ en la dirección en que se incrementa t.

SOLUCIÓN El punto inicial $(1, 0, 0)$ corresponde al valor del parámetro $t = 0$. Según el ejemplo 1

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

y de este modo
$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_0^t \sqrt{2}\,du = \sqrt{2}\,t$$

Por tanto, $t = s/\sqrt{2}$ y la reparametrización requerida se obtiene al sustituir el valor de t:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos\left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{j} + \left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{k}$$

Curvatura

Una parametrización $\mathbf{r}(t)$ es llamada **suave** sobre un intervalo I si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ sobre I. Una curva se llama **suave** si tiene una parametrización suave. Una curva suave no tiene puntos agudos o cúspides; cuando gira el vector tangente, lo hace en forma continua.

Si C es una curva suave definida por la función vectorial $\mathbf{r}$, recuerde que el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ está dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

La curvatura de C en un punto dado es una medida de qué tan rápido cambia la curva de dirección en ese punto. Específicamente, se define como la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario respecto a la longitud de arco. (Se usa la longitud de arco de tal manera que la curvatura sea independiente de la parametrización.)

Definición La **curvatura** de una curva es

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

donde $\mathbf{T}$ es un vector tangente unitario.

Para hallar la curvatura es más fácil hacerlo en términos de t para eso se tiene la siguiente fórmula que se deriva de la anterior:

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}}$$

V **EJEMPLO 3** Demuestre que la curvatura de una circunferencia de radio a es $1/a$.

SOLUCIÓN Se puede hacer que la circunferencia tenga como centro el origen y entonces una parametrización es

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

Por tanto, $$\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a \cos t\,\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$$

de modo que $$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

y entonces $$\mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

Esto da como resultado $|\mathbf{T}'(t)| = 1$, por lo que al usar la ecuación 9

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$

con frecuencia es más conveniente aplicar la fórmula dada por el siguiente teorema.

Teorema La curvatura de la curva dada por la función vectorial $\mathbf{r}$ es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

EJEMPLO 4 Calcule la curvatura de la cúbica torcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ en un punto general y en $(0, 0, 0)$.

SOLUCIÓN Primero se calculan los elementos requeridos:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

entonces

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

En el origen, donde $t = 0$, la curvatura es $\kappa(0)= 2$.

En el caso especial de una curva plana cuya ecuación es $y = f(x)$, podemos elegir a x como parámetro y escribir $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$. Entonces $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}$. Puesto que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, se tiene que $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}$. Asimismo, $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y entonces, de acuerdo con el teorema 10,

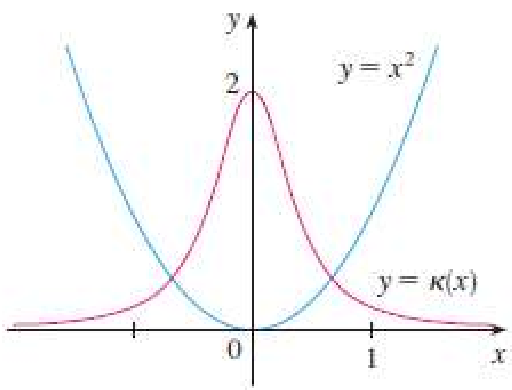
$$\boxed{\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}}$$

EJEMPLO 5 Determine la curvatura de la parábola $y = x^2$ en los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 4)$

SOLUCIÓN Puesto que $y' = 2x$ y $y'' = 2$, mediante la fórmula 11 se obtiene

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

La curvatura en $(0, 0)$ es $\kappa(0) = 2$. En $(1, 1)$ es $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0.18$. En $(2, 4)$ es $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0.03$. Observe que de acuerdo con la expresión para $\kappa(x)$ o por la gráfica de κ en la figura 5, que $\kappa(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto corresponde al hechc de que la parábola parece hacerse más plana cuando $x \to \pm\infty$.



Vectores Normales y Binormales

Dada una función vectorial $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ donde la curvatura $k(t) \neq 0$ podemos definir el **vector normal unitario principal en $\boldsymbol{t}$** o sencillamente **vector normal** como

$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

El **vector binormal en $\boldsymbol{t}$** es el vector

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

EJEMPLO 6 Determine los vectores unitario normal y binormal para la hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Primero calcule los elementos necesarios para el vector normal unitario:

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

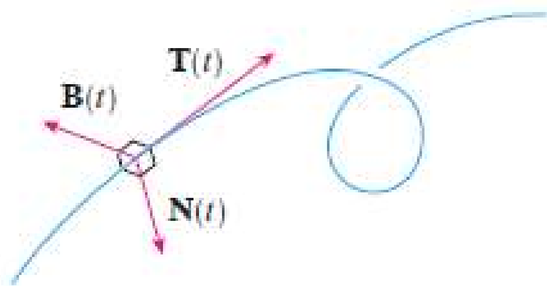
$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle$$

Esto demuestra que el vector normal en cualquier punto de la hélice es horizontal y señala hacia el eje z. El vector binormal es

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle$$

- El vector normal $\vec{N}(t)$ es ortogonal a $\vec{T}(t)$
- El vector $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$ es unitario y ortogonal tanto a $\vec{T}$(t) como a $\vec{N}(t)$



- **Plano Normal**: Es el plano definido por el vector normal y binormal en un punto $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ sobre la curva de $\vec{r}$. Es perpendicular al vector tangente unitario
- **Plano Osculador**: Es el plano definido por los vectores normal y tangente unitario en un punto $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ sobre la curva de $\vec{r}$.

V EJEMPLO 7 Determine las ecuaciones del plano normal y del plano osculador de la hélice en el ejemplo 6 en el punto $P(0, 1, \pi/2)$.

SOLUCIÓN El plano normal en P tiene como vector normal a $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1 \rangle$, de modo que una ecuación es

$$-1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad z = x + \frac{\pi}{2}$$

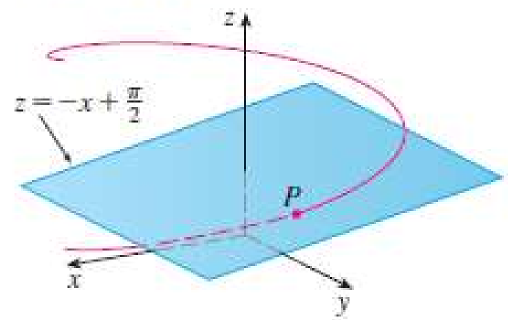
El plano osculador en P contiene los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, de modo que su vector normal es $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$. Según el ejemplo 6, tenemos

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1 \rangle \qquad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Un vector normal más simple es $\langle 1, 0, 1 \rangle$, de modo que una ecuación del plano osculador es

$$1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad z = -x + \frac{\pi}{2}$$

En la figura se ilustran la hélice y el plano osculador del ejemplo 7.

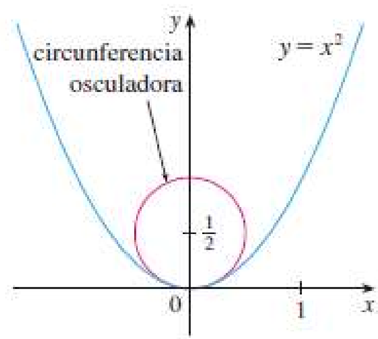


La circunferencia que se localiza en el plano osculador de C en P tiene la misma tangente que C en P, se sitúa en el lado cóncavo de C (hacia el cual apunta $\mathbf{N}$), y su radio $\rho = 1/\kappa$ (el recíproco de la curvatura), se llama **circunferencia osculadora** de C en P (o **circunferencia de curvatura** de C en P). Es la circunferencia que mejor describe cómo se comporta C cerca de P; comparte la misma tangente, normal y curvatura en P.

EJEMPLO 8 Encuentre y grafique la circunferencia osculadora de la parábola $y = x^2$ en el origen.

SOLUCIÓN De acuerdo con el ejemplo 5, la curvatura de la parábola en el origen es $\kappa(0) = 2$. Entonces, el radio de la circunferencia osculadora en el origen es $1/\kappa = \frac{1}{2}$ y su centro es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Por tanto, su ecuación es

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$



Ejercicios Propuestos:

1-6 Determine la longitud de la curva.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t \rangle, \quad -5 \leqslant t \leqslant 5$

2. $\mathbf{r}(t) = \left\langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \right\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\, t\,\mathbf{j} + \ln\cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

13-14 Reparametrice la curva respecto a la longitud de arco medida desde el punto $t = 0$ en la dirección en que se incrementa t.

13. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\,\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + e^{2t}\,\mathrm{sen}\, 2t\,\mathbf{k}$

15. Suponga que empieza en el punto $(0, 0, 3)$ y se mueve 5 unidades a lo largo de la curva $x = 3 \operatorname{sen} t$, $y = 4t$, $z = 3 \cos t$ en la dirección positiva. ¿En dónde está ahora?

24. Calcule la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t \ln t \rangle$ en el punto $(1, 0, 0)$.

25. Calcule la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ en el punto $(1, 1, 1)$.

47-48 Calcule los vectores **T**, **N** y **B** en el punto dado.

47. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \right\rangle$, $\left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$

48. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, \ln \cos t \rangle$, $(1, 0, 0)$

49-50 Determine las ecuaciones del plano normal y del plano osculador de la curva en el punto dado.

49. $x = 2 \operatorname{sen} 3t,\ y = t,\ z = 2 \cos 3t;\quad (0, \pi, -2)$

50. $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3;\quad (1, 1, 1)$

51. Determine las ecuaciones de las circunferencias osculadoras de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ en los puntos $(2, 0)$ y $(0, 3)$. Mediante una calculadora para bosquejar gráficas o una computadora, grafique la elipse y ambas circunferencias osculadoras en la misma pantalla.