Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Vectores en el espacio

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

14 de julio del 2021

Vectores

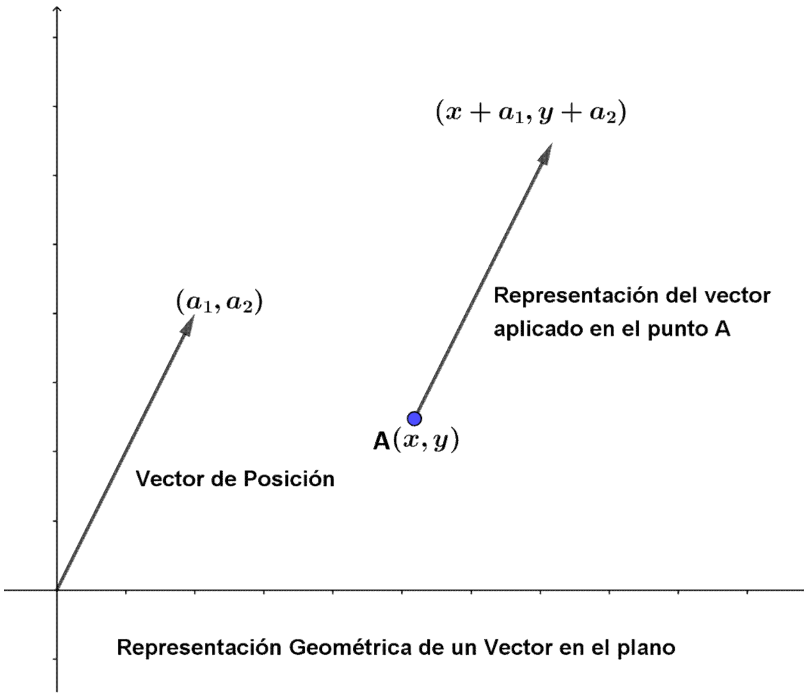
Un vector en el plano es un par ordenado $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ de números reales. Un vector en el espacio es una terna $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Los números reales a_1, a_2, a_3 se llaman componentes del vector $\vec{a}$.

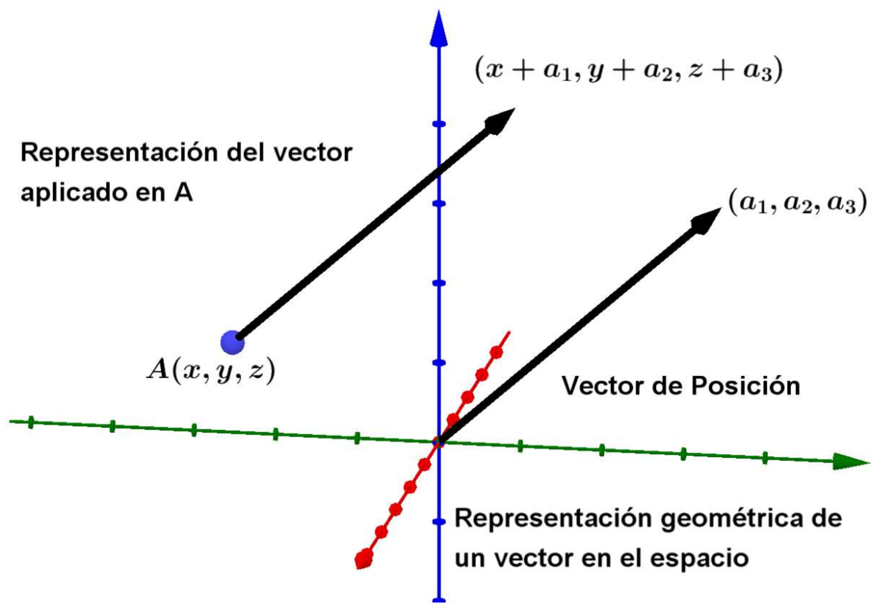
El conjunto de todos los pares ordenados $\langle a_1, a_2 \rangle$ se denota por V_2 y el conjunto de todas las ternas $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ se denota por V_3.

Los vectores se representan por medio de segmentos de rectas dirigidos.

El vector $\langle 0,0,0 \rangle$ se llama el vector cero y se denota por $\vec{0}$

El segmento de recta dirigido que tiene su punto inicial en el origen y su punto final en (a_1, a_2) en el plano o en $(a_1, a_2 a_3)$ es la **representación en posición** del vector $\vec{a}$.





Dos vectores son iguales si su representación de posición es igual, en otras palabras dos vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son iguales si sus componentes son respectivamente iguales.

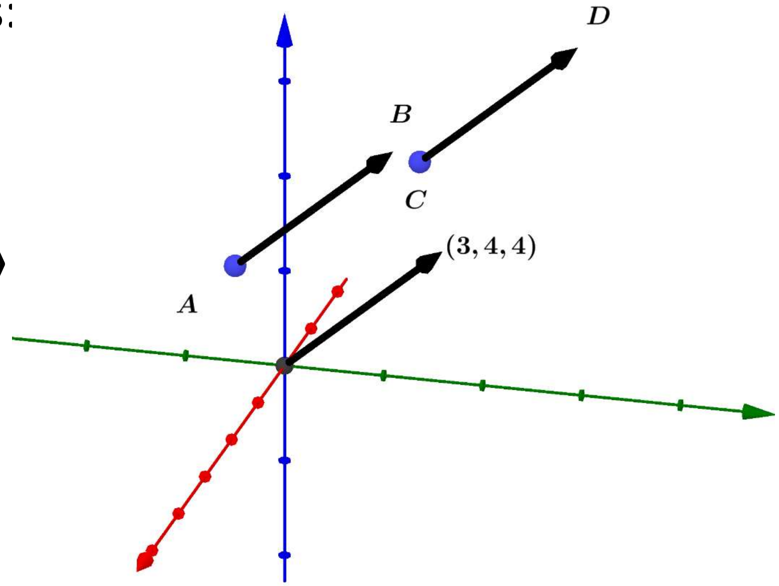
El vector $\vec{a}$ con representación $\overrightarrow{AB}$, punto inicial en $A(x_A, y_A, z_A)$ y punto terminal en $B(x_B, y_B, z_B)$, es

$$\vec{a} = \langle x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A \rangle$$

Ejemplo: Considere los puntos $\mathrm{A}(1,3,5)$, $B(4,7,9)$, $C(0,-1,2)$ y $D(3,3,6)$. Halle las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, verifique que son iguales.

Hallamos las componentes de los vectores:

- $\overrightarrow{AB} = \langle 4-1, 7-3, 9-5 \rangle = \langle 3,4,4 \rangle$
- $\overrightarrow{CD} = \langle 3-0, 3-(-1), 6-2 \rangle = \langle 3,4,4 \rangle$



Vemos que son iguales porque tienen las mismas componentes.

Magnitud o Longitud de un Vector

La longitud de un vector en el plano $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es igual a

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La longitud de un vector en el espacio $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es igual a

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Ejemplo: Hallar la longitud de los vectores $\vec{a} = \langle -2,4 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 1,-3,2 \rangle$

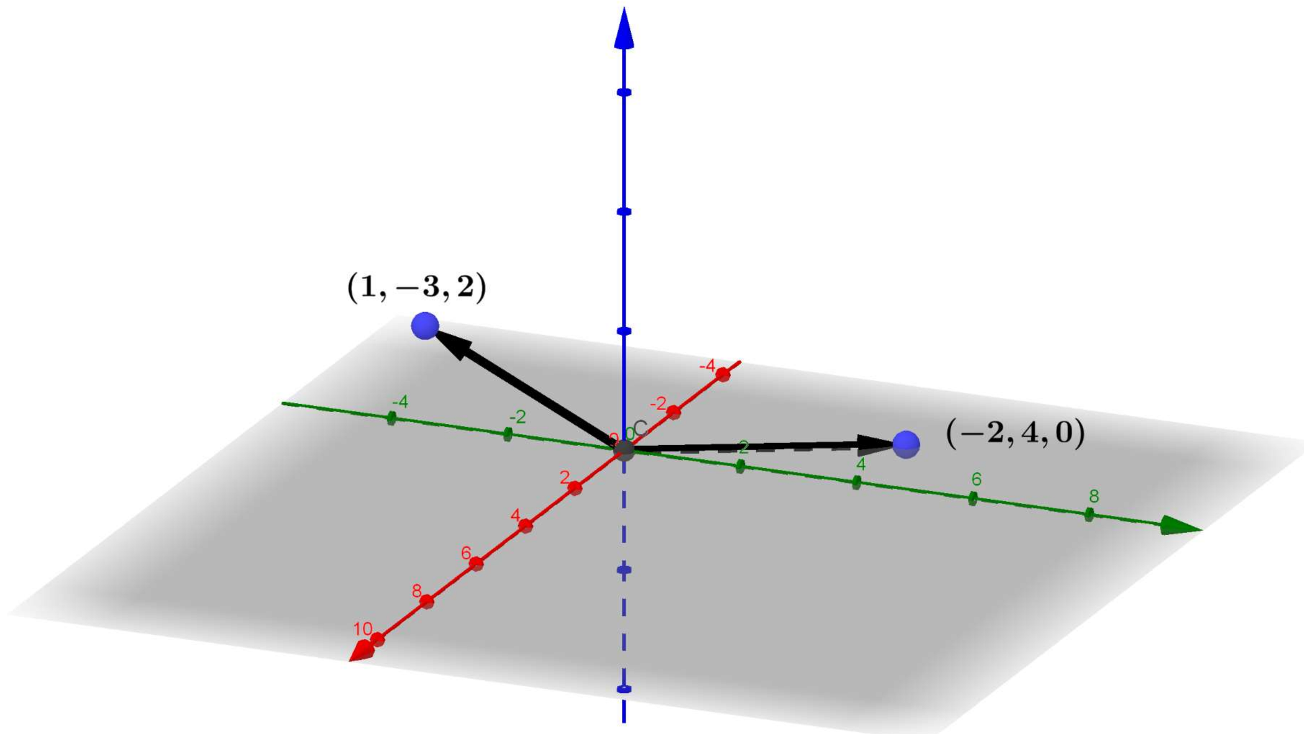
Por definición tenemos

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

El vector en el plano puede ser considerado en el espacio como

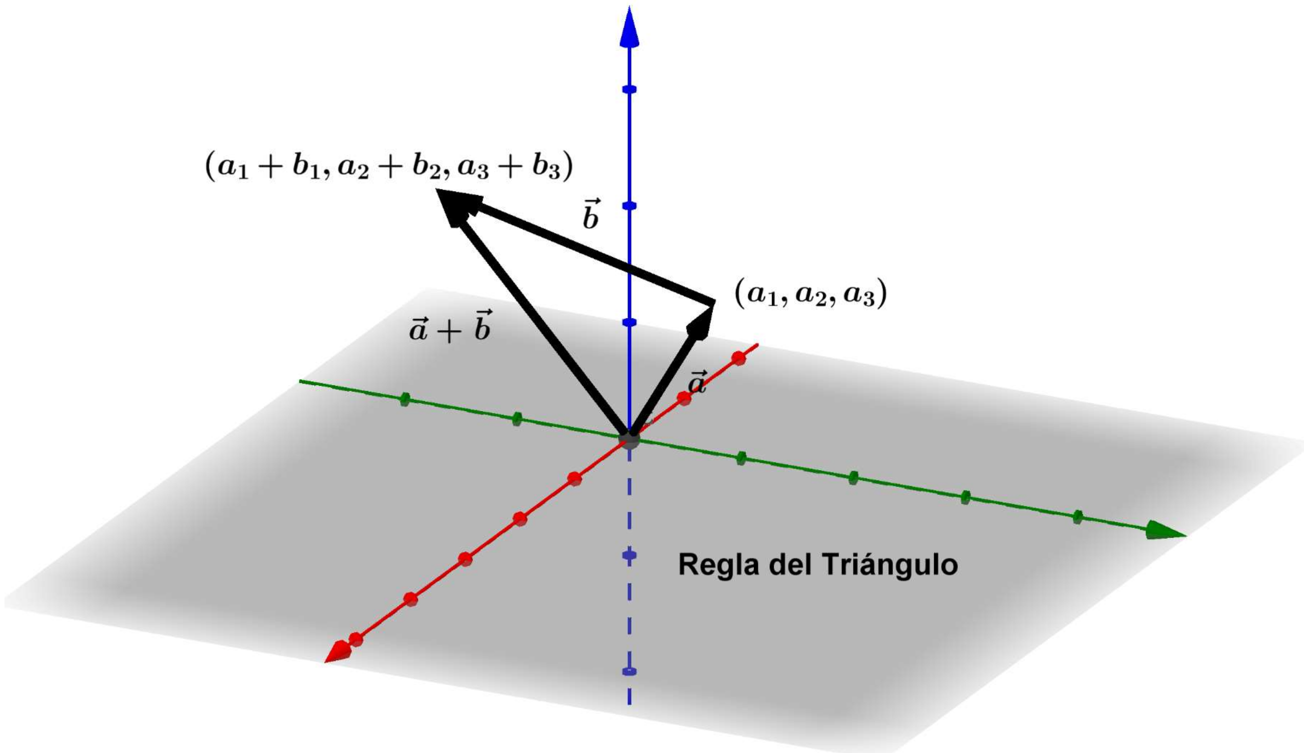
$$\vec{a} = \langle -2,4,0 \rangle$$



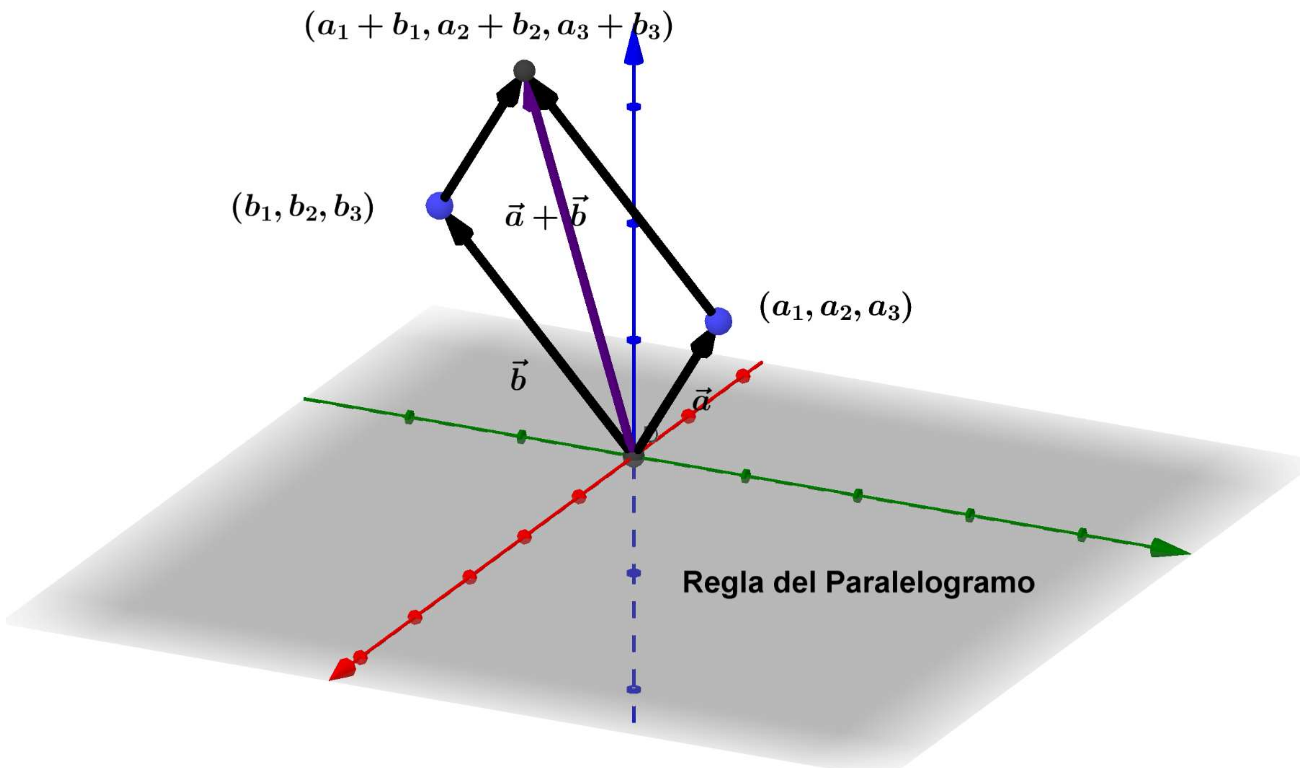
En general, los vectores en el plano pueden ser representados en el espacio tomando la tercera componente igual a cero. Por lo que de aquí en adelante, salvo algunas excepciones, definiremos todo para vectores en el espacio.

Suma de Vectores

Si $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ entonces $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$



Otra forma de representar geométricamente la suma de vectores es usar la regla del paralelogramo.



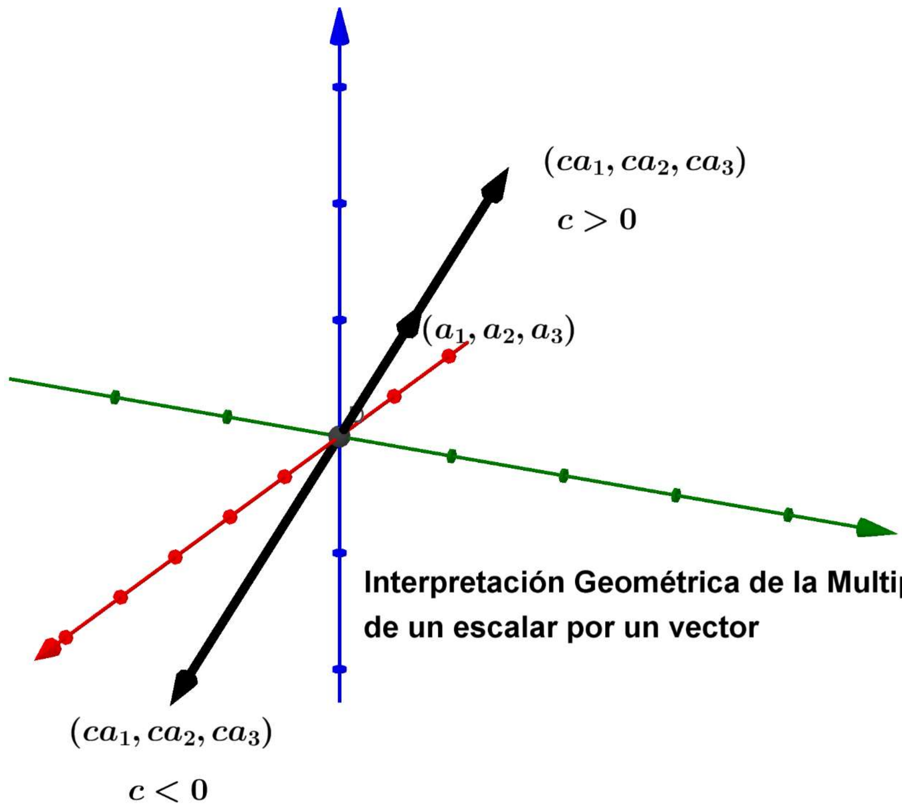
Multiplicación de un escalar por un vector

Si $c \in \mathbb{R}$ y $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$
entonces definimos

$$c\vec{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

Podemos ver que

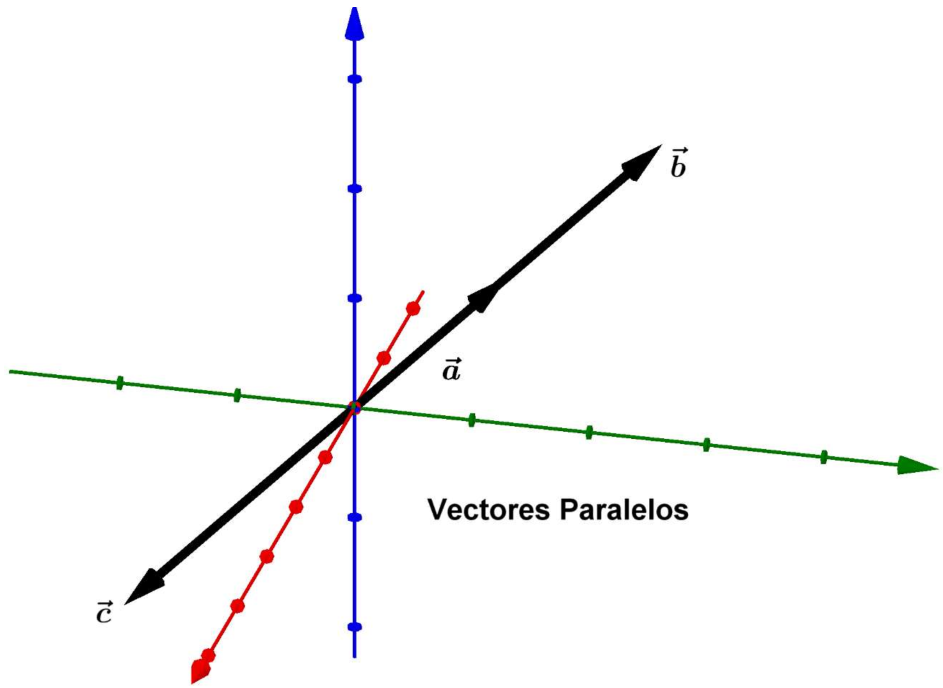
$$\|c\vec{a}\| = |c|\|\vec{a}\|$$



Interpretación Geométrica de la Multiplicación de un escalar por un vector

Vectores paralelos

Decimos que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{a} = c\vec{b}$

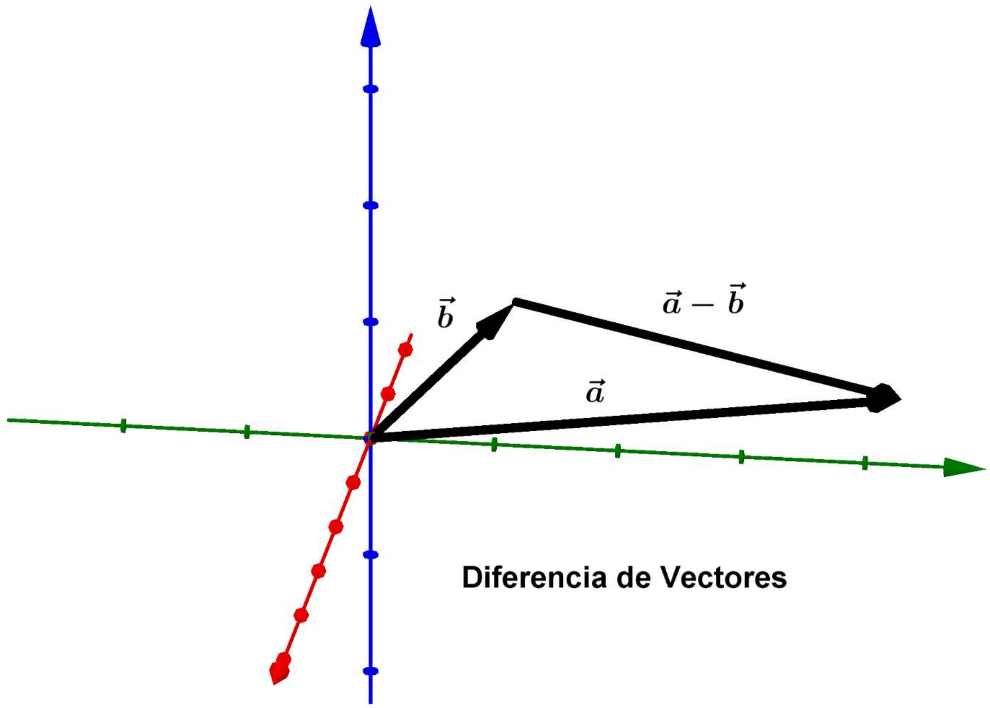


Diferencia de vectores

La diferencia de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define como

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$



Propiedades de Vectores

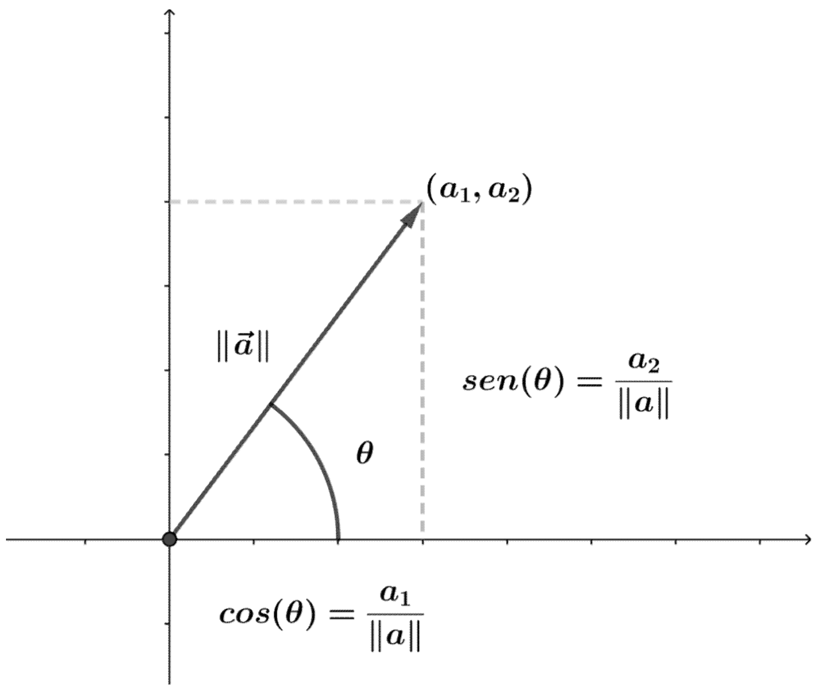
Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores en V_3 y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\overrightarrow{(a + \vec{b})} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5. $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
7. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$
8. $1\vec{a} = \vec{a}$

Vector Unitario

- Decimos que un vector $\vec{a}$ es unitario si su longitud es igual a 1, es decir, $\|\vec{a}\| = 1$
- El vector unitario en dirección de un vector dado $\vec{a}$ lo denotaremos por $\vec{u}_{\vec{a}}$ y lo definimos por $\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$
- En el caso de un vector en el plano $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, si θ es el ángulo entre el eje x positivo y el vector $\vec{a}$, entonces

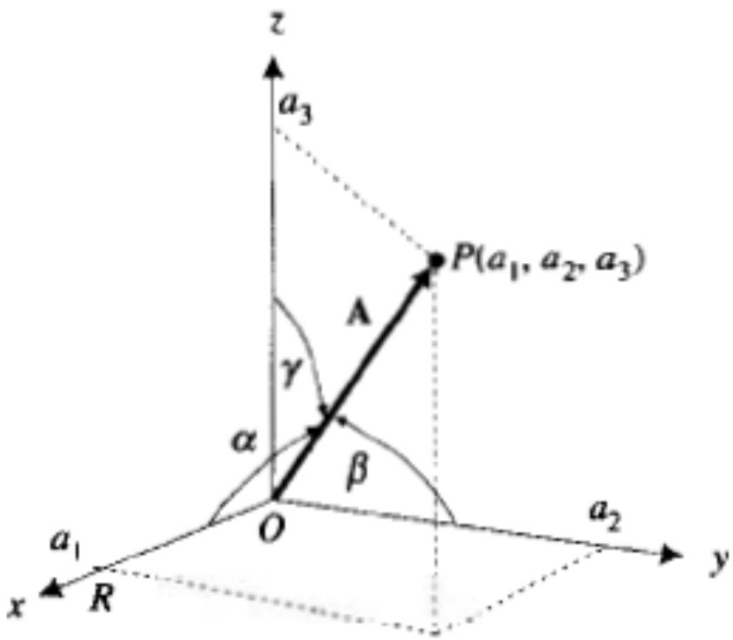
$$\vec{u}_{\vec{a}} = \left\langle \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \right\rangle = \langle \cos\theta \, , sen\theta \rangle$$



Si conocemos la dirección de un vector en el plano y su magnitud $\|\vec{a}\|$, entonces podemos decir que las componentes del vector $\vec{a}$ son

$$\vec{a} = \|\vec{a}\| \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$$

En el espacio, la dirección de un vector está determinada por tres ángulos que llamamos ángulos directores. Los **ángulos directores** de un vector diferente del vector cero son los tres ángulos que tienen la menor medida en radianes no negativa α, β y γ medidos desde los ejes coordenados x, y, z, respectivamente, hasta la representación en posición del vector



Se tiene que:

- $\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$
- $cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Los tres números $\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$ se llaman cosenos directores del vector $\vec{a}$. El vector cero no tiene ángulos ni cosenos directores.

Representación de Vectores por medio de los vectores canónicos unitarios

En el plano, los vectores $\boldsymbol{i} = \langle 1{,}0 \rangle$ y $\boldsymbol{j} = \langle 0{,}1 \rangle$ se llaman vectores canónicos unitarios y forman una base para V_2, es decir todo vector $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ se puede escribir como una combinación lineal de estos vectores de la siguiente forma:

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \langle 1{,}0 \rangle + a_2 \langle 0{,}1 \rangle = a_1 \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j}$$

En el espacio, los vectores canónicos unitarios $\boldsymbol{i} = \langle 1{,}0{,}0 \rangle$, $\boldsymbol{j} = \langle 0{,}1{,}0 \rangle$ y $\boldsymbol{k} = \langle 0{,}0{,}1 \rangle$ forman una base para V_3 y para todo vector $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ se tiene que

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1 \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j} + a_3 \boldsymbol{k}$$