Práctica 8

Introducción

Con la realización de esta práctica se espera que el estudiante adquiera las competencias necesarias para resolver ecuaciones diferenciales parciales, tanto de forma manual como con el apoyo de funciones propias o predefinidas utilizando los entornos de software MATLAB o Scilab. Esto implica, alcanzar el dominio de las diferentes técnicas, elegir el mejor método para cualquier problema particular, así como la capacidad de evaluar la confiabilidad de las respuestas.

1 Diseño de algoritmos

1. Diseñar un subprograma de nombre **EDPEliptica.m** para aproximar la ecuación de Poisson:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad a < x < b, \;\; c < y < d \tag{1}$$
sujeta a las condiciones de frontera:
$$\begin{aligned} u(a,y) &= f_1(y), \quad c \le y \le d \\ u(b,y) &= f_2(y), \quad c \le y \le d \\ u(x,c) &= f_3(x), \quad a \le x \le b \\ u(x,d) &= f_4(x), \quad a \le x \le b \end{aligned}$$
mediante el método de diferencias finitas centradas visto en clase. El subprograma deberá tener como argumentos de entrada: (i) la función f, (ii) los extremos de los intervalos $[a,b]$, $[c,d]$, (iii) el número de particiones n y m de estos intervalos, y (iv) las funciones f_1, f_2, f_3 y f_4 que describen las condiciones de frontera. El subprograma deberá devolver los puntos de red x_i, $i = 0,1,...,n$, y_j, $j = 0,1,...,m$ y las aproximaciones de la solución $w(i,j)$. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ (que resulta al aplicar el método de diferencias finitas en cada nodo de la red) utilice el método de Gauss-Seidel. De acuerdo con esto, la sintaxis de la función deberá ser `[x,y,w]= EDPEliptica(f,a,b,c,d,n,m,f1,f2,f3,f4)`.

2. Escribir un subprograma de nombre **EDPParabolica** para aproximar la solución de la ecuación de difusión del calor:
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t < T \tag{2}$$
sujeta a las condiciones de frontera:
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \;\; 0 < t < T$$
y a las condiciones iniciales:
$$u(x,0) = f(x), \;\; 0 \le x \le l$$
mediante el método de diferencias finitas regresivas visto en clase. El subprograma deberá tener como argumentos de entrada: (i) la función de condición inicial f, (ii) la longitud de la barra l, (iii) el tiempo final T, (iv) el parámetro α, y (v) el número de particiones n y m de los intervalos $[0,l]$ y $[0,T]$. Los argumentos de salida deberán ser: los puntos de red x_i, $i = 0,1,...,n$, y_j, $j = 0,1,...,m$ y las aproximaciones de la solución $w(i,j)$.

3. Escribir un subprograma de nombre **EDPHiperbolica.m** para resolver la ecuación de onda:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0 \tag{3}$$
sujeta a las condiciones de frontera:
$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(l,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \;\; 0 \le x \le l, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x), \;\; 0 \le x \le l, \end{aligned}$$
mediante el método de diferencias finitas visto en clase. El subprograma deberá tener como argumentos de entrada: (i) las funciones f y g que definen, respectivamente, la posición y velocidad inicial de la cuerda, (ii) la longitud de la cuerda l, (iii) el tiempo final T, (iv) el parámetro α, y (v) el número de particiones de n y m de los intervalos $[0,l]$ y $[0,T]$, respectivamente. Los argumentos de salida deben ser: los puntos de red $x_i,\ i = 0,1,...,n,\ y_j,\ j = 0,1,...,m$ y las aproximaciones de la solución $w(i,j)$.

2 Ejercicios propuestos

1. Utilice la función `EDPEliptica` para aproximar la solución de los problemas siguientes:

   a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 1,$
   con las condiciones de frontera:
   $u(0,y) = 0$, $u(2,y) = 2e^y$, $0 \le y \le 1$
   $u(x,0) = x$, $u(x,1) = ex$, $0 \le x \le 2$
   Compare sus resultados con la solución exacta: $u(x,y) = xe^y$.

   b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2,$
   con las condiciones de frontera:
   $u(0,y) = y^2$, $u(1,y) = (y-1)^2$, $0 \le y \le 2$
   $u(x,0) = x^2$, $u(x,2) = (x-2)^2$, $0 \le x \le 1$
   Compare sus resultados con la solución exacta: $u(x,y) = (x-y)^2$.

2. Utilice la función `EDPparabolica` para aproximar la solución de los problemas siguientes:

   a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < 2,\ t > 0,$

   $u(0,t) = u(2,t) = 0,\ 0 < t; \quad u(x,0) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right), \quad 0 \le x \le 2$
   Use $m = 4$, $T = 0.1$ y $n = 2$, y compare sus resultados con la solución exacta: $u(x,t) = e^{-(\pi^2/4)t}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

   b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$

   $u(0,t) = u(1,t) = 0, 0 < t; \quad u(x,0) = 2\sin(2\pi x), \quad 0 \le x \le 1$

Use $m = 3$, $T = 0.1$ y $n = 2$, y compare sus resultados con la solución exacta: $u(x,t) = 2e^{-(\pi^2/4)t}\sin(2\pi x)$.

3. Utilice la función `EDPHiperbolica` para aproximar la solución de los problemas siguientes:

   a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$

   $u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0;\ u(x,0) = \sin(\pi x),\quad 0 \le x \le 1;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\quad 0 \le x \le 1$
   Use $m = n = 4$, $T = 1$, y compare sus resultados con la solución exacta: $u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x)$.

   b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{1}{16\pi^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < 0.5,\ t > 0,$

   $u(0,t) = u(0.5,t) = 0,\ t > 0;\ u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 0.5;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(4\pi x),\ 0 \le x \le 0.5$
   Use $m = n = 4$, $T = 0.5$, y compare sus resultados con la solución exacta: $u(x,t) = \sin(t)\sin(4\pi x)$.

4. Una placa rectangular de plata de 6×5 cm tiene calor que se genera uniformemente en todos los puntos con una rapidez $q = 1.5$ cal/cm^3·s. Representemos con x la distancia a lo largo del borde de la placa con longitud 6 cm, y con y la distancia a lo largo del borde de la placa con longitud 5 cm. Suponga que la temperatura u a lo largo de los bordes se mantiene en las siguientes temperaturas:

   $$u(x,0) = x(6-x), \qquad u(x,5) = 0, \qquad 0 \le x \le 6$$

   $$u(0,y) = y(5-y), \qquad u(6,y) = 0, \qquad 0 \le y \le 5$$

   donde el origen se supone en la esquina de la placa con coordenadas $(0,0)$ y los bordes se hallan a lo largo de los ejes positivos x y y. La temperatura de estado estable $u = u(x,y)$ satisface la ecuación de Poisson:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{q}{K}, \quad 0 < x < 6, \ 0 < y < 5$$

   donde K, la conductividad térmica es 1.04 cal/cm·deg·s. Aproxime la temperatura $u(x,y)$ utilizando $h = 0.4$ y $k = 1/3$.