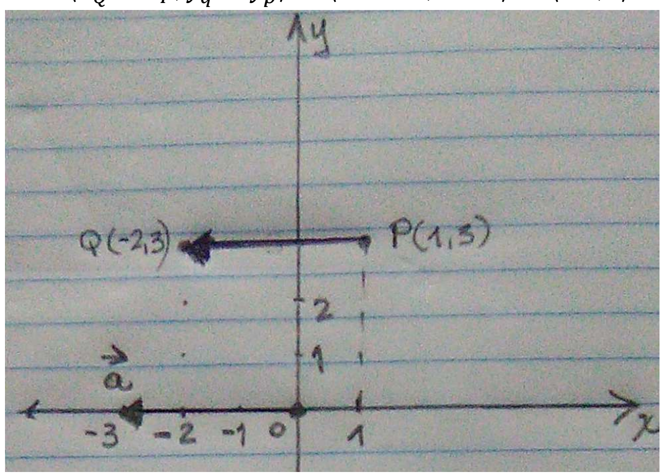
Ejercicios Resueltos y Propuestos Clase 2GE

Ejercicios Resueltos:

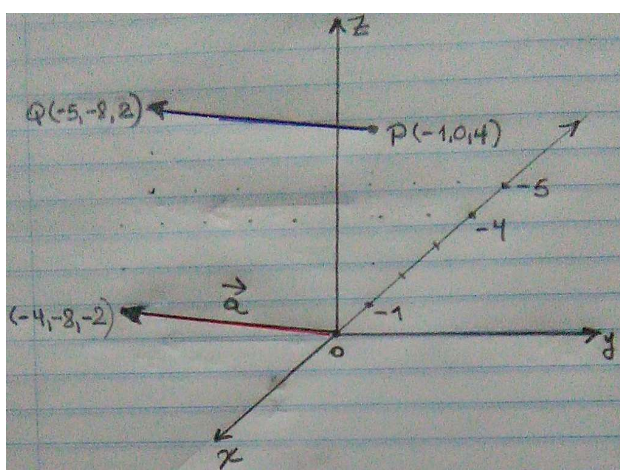
1. **Obtenga el vector $\vec{a}$ que tiene al segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ como una representación. Dibujar $\overrightarrow{PQ}$ y la representación de posición de $\vec{a}$.**
   a. $\boldsymbol{P = (1,3)}$ **y** $\boldsymbol{Q = (-2,3)}$
   b. $\boldsymbol{P = (-1,0,4)}$ **y** $\boldsymbol{Q = (-5,-8,2)}$

   Solución:

   a. $P = (1,3)$ y $Q = (-2,3)$
   El vector
   $$\vec{a} = \langle x_Q - x_P, y_q - y_p \rangle = \langle -2 - 1, 3 - 3 \rangle = \langle -3, 0 \rangle$$



   b. $P = (-1,0,4)$ y $Q = (-5,-8,2)$
   Tenemos que
   $$\vec{a} = \langle x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P \rangle = \langle -5 + 1, -8 - 0, 2 - 4 \rangle = \langle -4, -8, -2 \rangle$$



2. **Determine el punto S de manera que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ sean representaciones del mismo vector donde $P = (2, 5, 0)$, $Q = (-1, 8, 6)$ y $R = (2, -1, 2)$**

<u>**Solución:**</u> Vamos a buscar $S = (x, y, z)$ tal que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$$

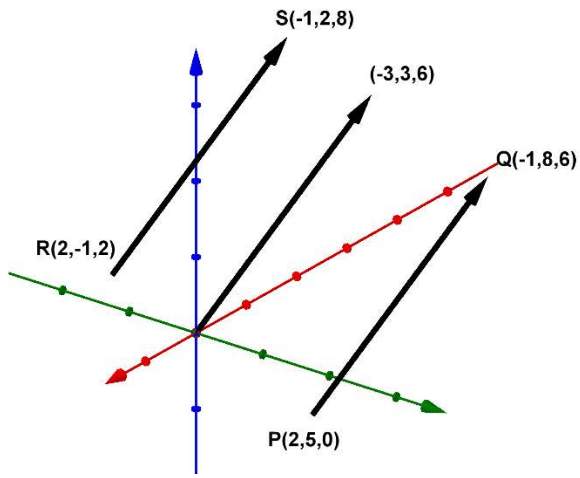
$$\langle -1-2, 8-5, 6-0 \rangle = \langle x-2, y+1, z-2 \rangle$$

$$\langle -3,3,6 \rangle = \langle x-2, y+1, z-2 \rangle$$

Por igualdad de vectores

$$x - 2 = -3 \Rightarrow x = -3 + 2 = -1$$
$$y + 1 = 3 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$$
$$z - 2 = 6 \Rightarrow z = 6 + 2 = 8$$

Así el punto $S = (-1,2,8)$



3. **Sea $\vec{a} = 8\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ y $\vec{b} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, determine un vector unitario en la misma dirección que $\vec{a} + \vec{b}$. Determine la dirección del vector $\vec{a} + \vec{b}$.**

<u>**Solución:**</u> Hallamos primero $\vec{a} + \vec{b} = 8\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} = 11\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$

El vector unitario en la misma dirección de $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ es igual a

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

Tenemos que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{11^2 + 4^2} = \sqrt{137}$$

Entonces:

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{137}}\langle 11,4 \rangle = \langle \frac{11}{\sqrt{137}}, \frac{4}{\sqrt{137}} \rangle$$

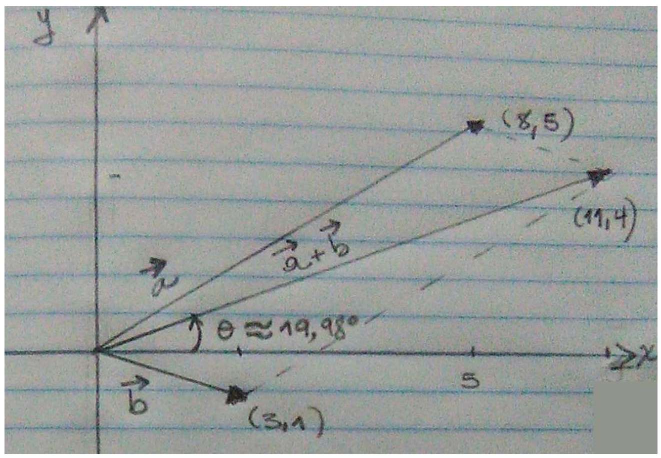
Como el vector está en el plano entonces la dirección es el ángulo θ formado entre el eje x positivo y el vector. Pero sabemos que

$$\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{137}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{\sqrt{137}}$$

Como ambas funciones trigonométricas son positivas el ángulo se encuentra en el primer cuadrante entonces:

$$\theta = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{137}}\right) \overset{o}{=} \operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{\sqrt{137}}\right) = 19{,}98°$$



4. **Determine los cosenos directores del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ y verifique que la suma de sus cuadrados es igual a 1. Para $P_1(3,-1,-4)$ y $P_2(7,2,4)$.**

<u>Solución:</u> Primero hallamos las componentes del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 7-3, 2+1, 4+4\rangle = \langle 4,3,8\rangle$$

Hallamos la longitud del vector

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{4^2+3^2+8^2} = \sqrt{89}$$

Los cosenos directores son:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{89}}\ ,\ \cos\beta = \left(\frac{3}{\sqrt{89}}\right), \cos\gamma = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

Verificamos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{89}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{89}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{89}}\right)^2 = 1$$

$$\frac{16}{89} + \frac{9}{89} + \frac{64}{89} = 1$$

$$\frac{89}{89} = 1$$

5. **Considere los vectores $\vec{A} = \langle 1,2,3 \rangle$, $\vec{B} = \langle 4,-3,-1 \rangle$, $\vec{C} = \langle -5,-3,5 \rangle$ y $\vec{D} = \langle -2,1,6 \rangle$. Hallar :**
a) $\vec{A} + 5\vec{B}$, b) $7\vec{C} - 5\vec{D}$, c) $\|7\vec{C}\| - \|5\vec{D}\|$, d) $\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|(\vec{C} - \vec{D})$ e) $\|\vec{A}\|\vec{C} - \|\vec{B}\|\vec{D}$ f) a y b tales que $a(\vec{A} + \vec{B}) + b(\vec{C} + \vec{D}) = \vec{0}$

<u>**Solución:**</u> Tenemos

a. $\vec{A} + 5\vec{B} = \langle 1,2,3 \rangle + 5\langle 4,-3,-1 \rangle = \langle 1,2,3 \rangle + \langle 20,-15,-5 \rangle = \langle 21,-13,-2 \rangle$

b. $7\vec{C} - 5\vec{D} = 7\langle -5,-3,5 \rangle - 5\langle -2,1,6 \rangle = \langle -35,-21,35 \rangle - \langle -10,5,30 \rangle = \langle -25,-26,5 \rangle$

c. $\|7\vec{C}\| - \|5\vec{D}\| = \|\langle -35,-21,35 \rangle\| - \|\langle -10,5,30 \rangle\| = \sqrt{(-35)^2 + (-21)^2 + (35)^2} - \sqrt{(-10)^2 + (5)^2 + (30)^2}$

$$= 7\sqrt{59} - 5\sqrt{41} \approx 21.75$$

d. Tenemos que $\|\vec{A}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ y $\|\vec{B}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ luego

$$\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{14}\sqrt{26}(\langle -5,-3,5 \rangle - \langle -2,1,6 \rangle) = 2\sqrt{91}\langle -3,-4,-1 \rangle$$

e. Usando lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \|\vec{A}\|\vec{C} - \|\vec{B}\|\vec{D} &= \sqrt{14}\langle -5,-3,5 \rangle - \sqrt{91}\langle -2,1,6 \rangle \\ &= \langle -5\sqrt{14} + 2\sqrt{91}, -3\sqrt{14} - \sqrt{91}, 5\sqrt{14} - 6\sqrt{91} \rangle \\ &\approx \langle -18.7, -20.76, -38.52 \rangle \end{aligned}$$

f. Consideramos la ecuación dada y sustituimos los vectores dados

$$a(\vec{A} + \vec{B}) + b(\vec{C} + \vec{D}) = \vec{0}$$

$$a(\langle 1,2,3 \rangle + \langle 4,-3,-1 \rangle) + b(\langle -5,-3,5 \rangle + \langle -2,1,6 \rangle) = \langle 0,0,0 \rangle$$

$$a\langle 5,-1,2 \rangle + b\langle -7,-2,11 \rangle = \langle 0,0,0 \rangle$$

$$\langle 5a - 7b, -a - 2b, 2a + 11b \rangle = \langle 0,0,0 \rangle$$

Por igualdad de vectores

$$\begin{gathered} 5a - 7b = 0 \Rightarrow a = 7b/5 \\ -a - 2b = 0 \Rightarrow a = -2b \\ 2a + 11b = 0 \Rightarrow a = -11b/2 \end{gathered}$$

Si igualamos las dos primeras ecuaciones:

$$\frac{7b}{5} = -2b \Rightarrow \frac{7b}{5} + 2b = 0 \Rightarrow \frac{17}{5}b = 0 \Rightarrow b = 0$$

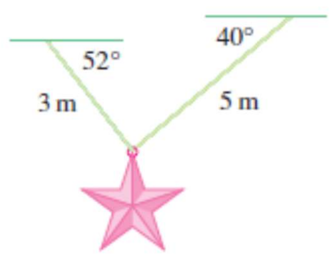
Sustituyendo en $a = -2b = -2(0) = 0$. Así $a = 0$ y $b = 0$, vemos que también satisface a la tercera ecuación:

$$2(0) + 11(0) = 0$$

Problema Propuestos:

1. Considere los puntos $P(-1,0,2), Q(3,2,-5), R(5,5,1), S(2,-4,0)$. Defina los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{PR}, \vec{b} = \overrightarrow{QR}, \vec{c} = \overrightarrow{QS}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{PQ}$. Hallar:
   a. $3\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{d}$
   b. El vector unitario en la dirección de $2\vec{c} - \vec{b}$
   c. Un punto D tal que los vectores $\overrightarrow{PR}\ y\ \overrightarrow{DS}$ tengan el mismo vector de posición.
   d. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha\vec{a} + \gamma\vec{b} + \beta\vec{c} = \vec{d}$
2. Sean los puntos $P_1(1,3,5)$ y $P_2(2,-1,4)$. Obtenga los cosenos directores del vector $\overrightarrow{P_2P_1}$ y obtenga el punto R tal que $\overrightarrow{P_1R} = 2\overrightarrow{P_2R}$
3. Sea $\vec{u} = 2\sqrt{2}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$ y $\vec{v} = \sqrt{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j}$, hallar un vector paralelo pero contrario al vector $3\vec{u} - 4\vec{v}$ y que tenga modulo o longitud $\sqrt{\pi}$.
4. Leer el ejemplo 7, de la pagina 797 del libro de James Stewart, Cálculo de varias variables septima edición. Resuelva los siguientes problemas:

36. Cuerdas de 3 m y 5 m de longitud están atadas a una estrella decorativa suspendida sobre una plaza principal. La decoración tiene una masa de 5 kg. Las cuerdas, sujetadas a distintas alturas, forman ángulos de 52° y 40° con la horizontal. Encuentre la tensión en cada cuerda y la magnitud de cada tensión



37. Un tendedero está atado entre dos postes separados 8 m. La cuerda está bastante tensa y tiene una curvatura insignificante. Cuando se cuelga una camisa húmeda con una masa de 0.8 kg a la mitad de la cuerda, el punto medio baja 8 cm. Determine la tensión en cada mitad del tendedero.