Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Sistema de coordenadas rectangulares tridimensional, distancia entre dos puntos, punto medio y ecuación de la esfera

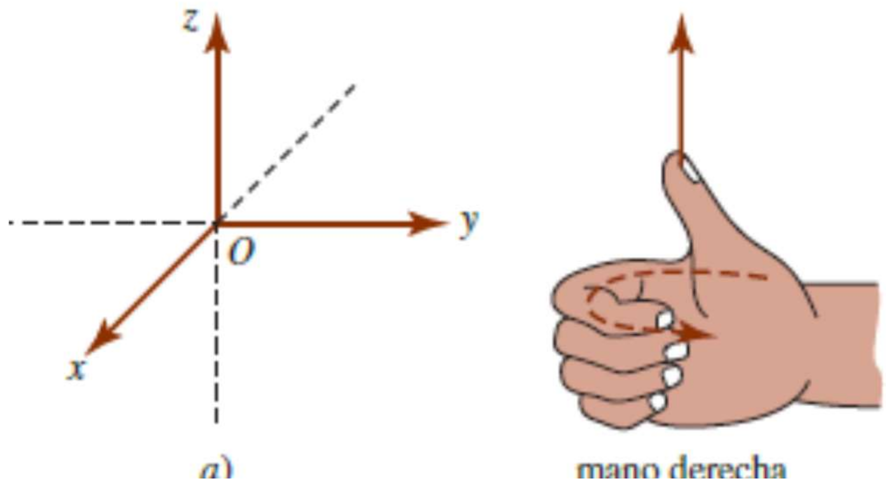
Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

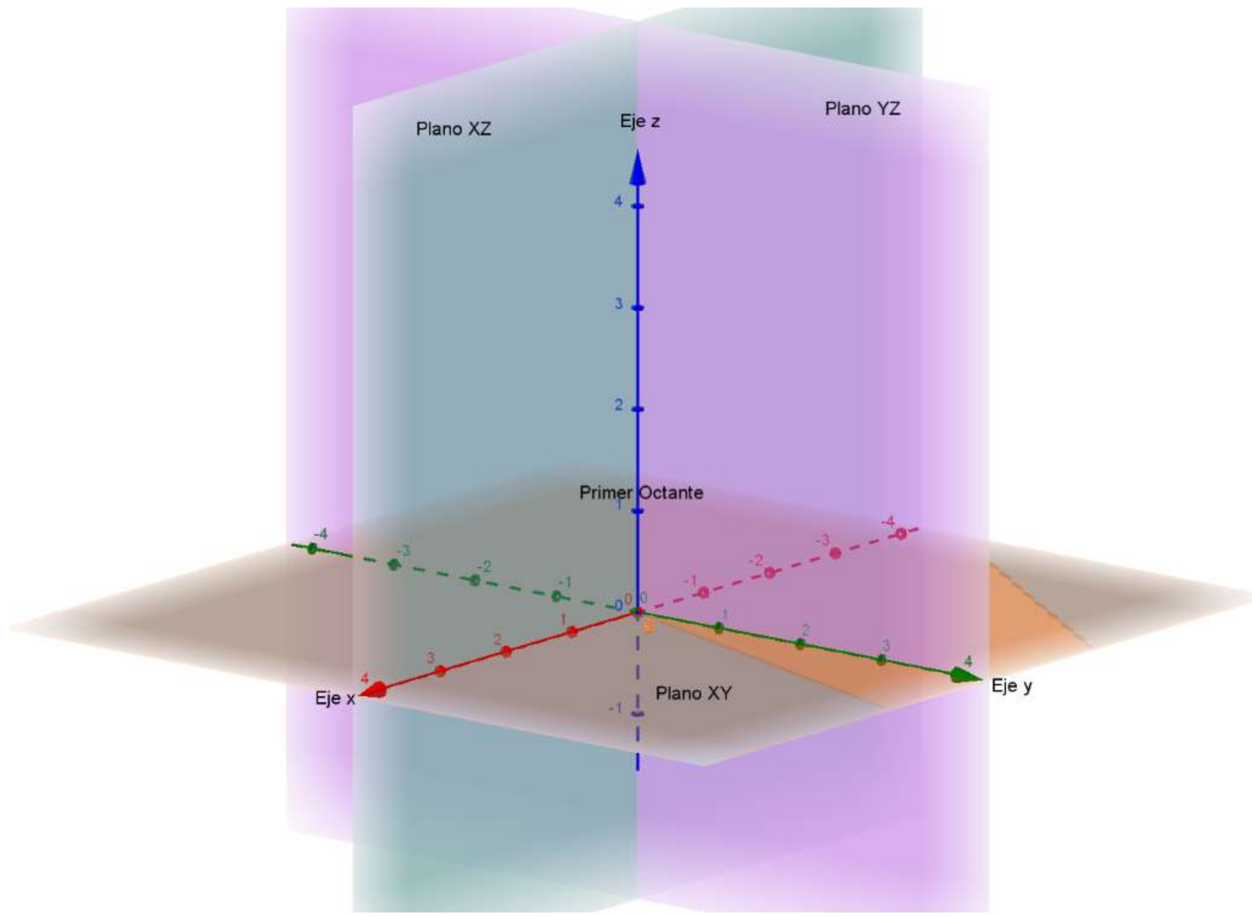
12 de julio del 2021

Sistema de Coordenadas Tridimensional

Para representar puntos en el espacio vamos a usar un sistema de coordenadas consistente de tres rectas reales perpendiculares entre sí que se intersectan en el origen. Cada recta real se denomina eje de coordenadas. Estos ejes se marcan usando la **regla de la mano derecha**, si el dedo índice de la mano derecha apunta en dirección del semieje x positivo y el dedo del medio apunta en dirección del semieje eje y positivo, entonces el dedo pulgar apuntará en dirección hacia el semieje z positivo.



Los tres ejes coordenados determinan tres planos coordenados: xy, yz, xz. Estos planos dividen al espacio en ocho partes que se llaman octantes. El **primer octante** es el octante donde los tres semiejes coordenados son positivos. A los otros octantes no los vamos a enumerar.



Definición de Espacio Numérico Tridimensional: Es el conjunto de todas las ternas (x, y, z) tales que $x, y, z \in \mathbb{R}$ y se denota por $\mathbb{R}^3$.

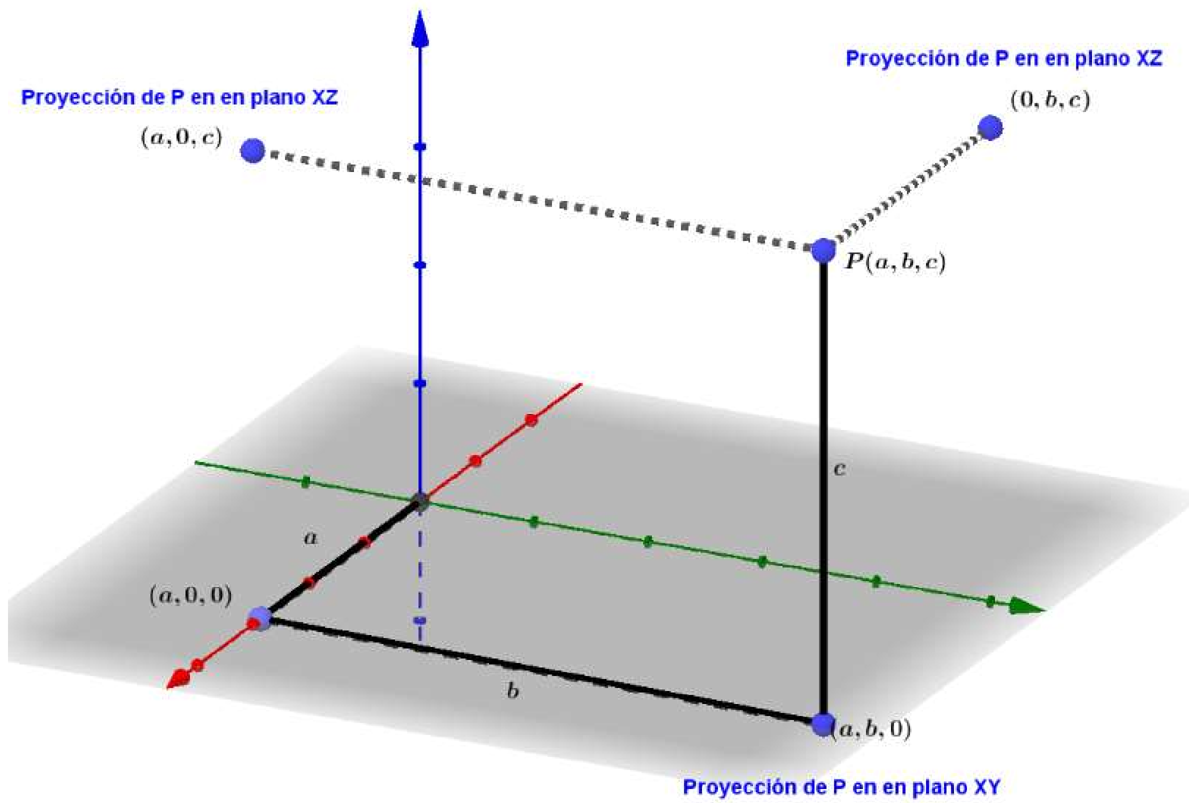
A Cada terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se le asocia un punto P del espacio geométrico tridimensional mediante la siguiente relación:

La distancia dirigida de P al

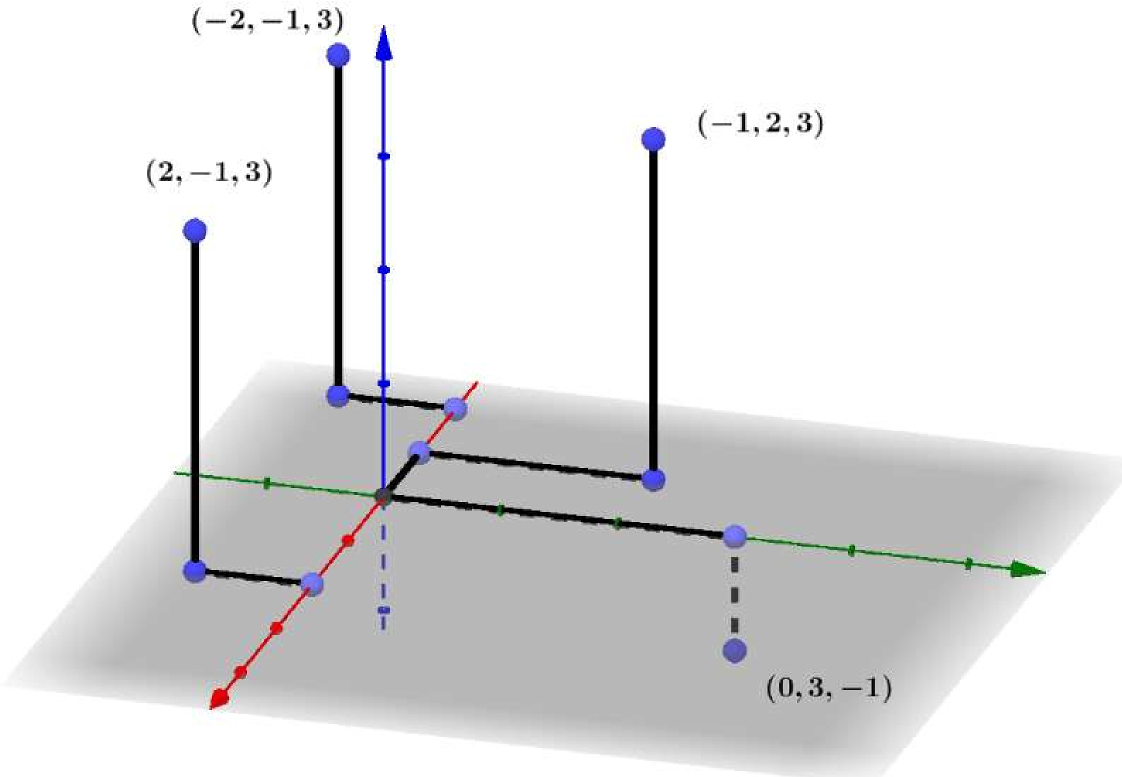
- Plano YZ es la coordenada x
- Plano XZ es la coordenada y
- Plano XY es la coordenada z

Estas tres coordenadas se denominan **coordenadas cartesianas rectangulares** de P, entonces existe una correspondencia uno a uno entre las ternas ordenadas de números reales y los puntos del espacio geométrico tridimensional.

Dada una terna (a, b, c) de números reales podemos ubicar su punto geométrico localizando primero la coordenada a sobre el eje x, después trazamos una recta real paralela al eje y desde $x = a$ y ubicamos el punto $(a, b, 0)$ y finalmente a partir de ese punto trazamos una recta real paralela al eje z y ubicamos el punto (a, b, c)

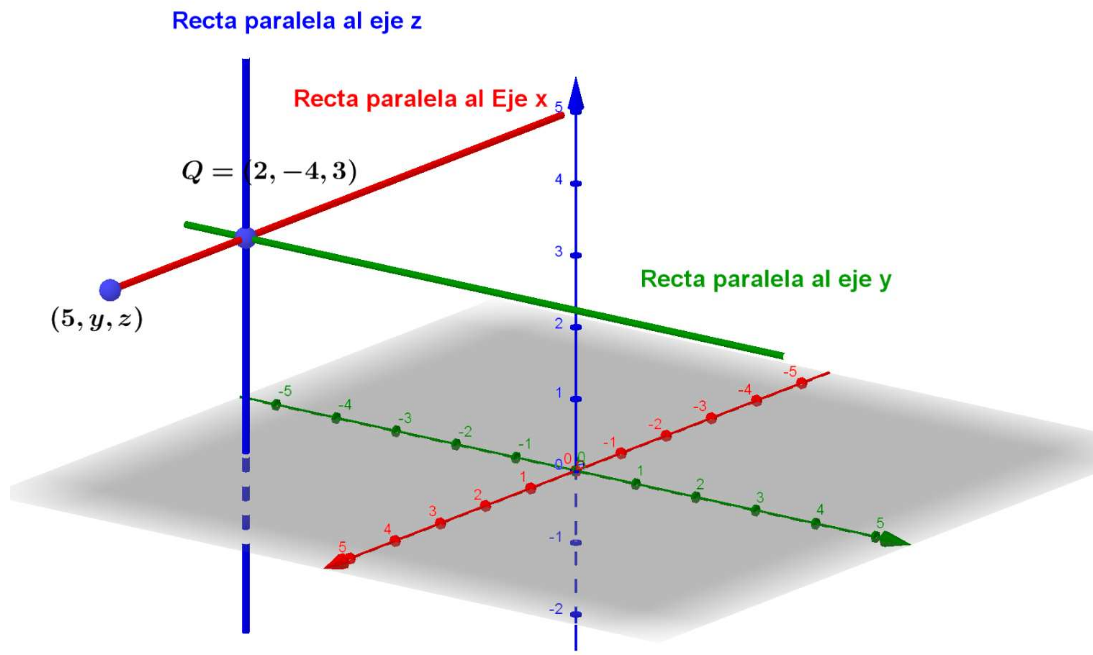


Ejemplo: Representar en el sistema de coordenadas rectangulares los siguientes puntos $(-1,2,3),(0,3,-1),(2,-1,3)\ (-2,-1,3)$



Ejercicio: El punto $(2, y, z)$ está en una línea recta que pasa por el punto $Q(5, -4, 3)$ y es paralela a uno de los ejes coordenados. Determinar el eje que es paralelo a la línea y los valores x y z del punto.

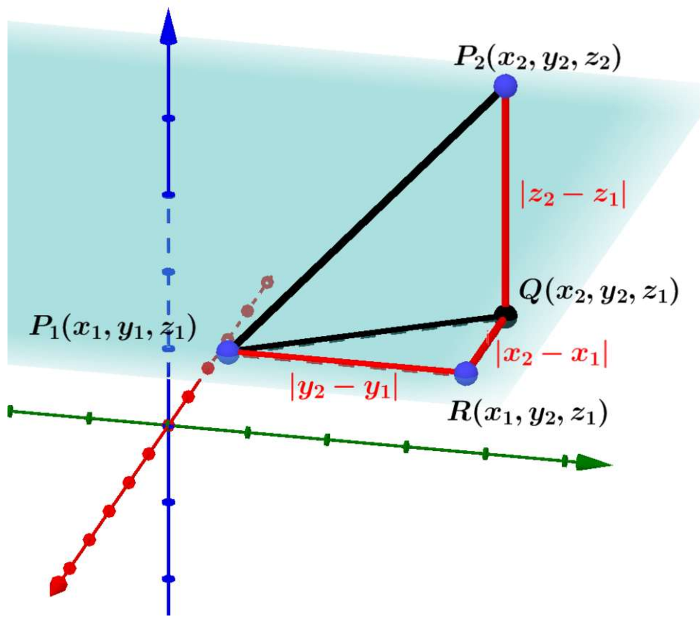
Es importante observar que si una recta es paralela a uno de los ejes coordenados las otras coordenadas distintas al eje de los puntos sobre la recta son iguales. Por ejemplo las coordenadas y y z de los puntos sobre una recta paralela al eje x son iguales. En este caso como la coordenada x del primer punto es igual a 2 y en el otro punto es 5, son distintas, entonces la recta que los contiene debe ser paralela al eje x, las otras dos coordenadas y y z deben ser $y = -4$ y $z = 3$. Entonces el punto buscado es $(2, y, z) = (2, -4, 3)$.



Distancia entre dos puntos: La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Demostración: Si consideramos los puntos P_1, P_2, Q y R como aparecen en la gráfica podemos ver que los triángulos P_1P_2Q y P_1QR son rectángulos y por Pitágoras



$$d^2\,(P_1, P_2) = d^2\,(P_1, Q) + |z_2 - z_1|^2$$

$$d^2\,(P_1, Q) = |y_2 - y_1|^2 + |x_2 - x_1|^2$$

Finalmente obtenemos

$$d^2\,(P_1, P_2) = |y_2 - y_1|^2 + |x_2 - x_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

Ejercicio: Determinar si los tres puntos $A(1,0,1)$, $B(2,-2,3)$ y $C(7,-2,4)$ forman un triángulo rectángulo usando la fórmula de la distancia entre puntos

Vamos a calcular las distancias entre los tres puntos:

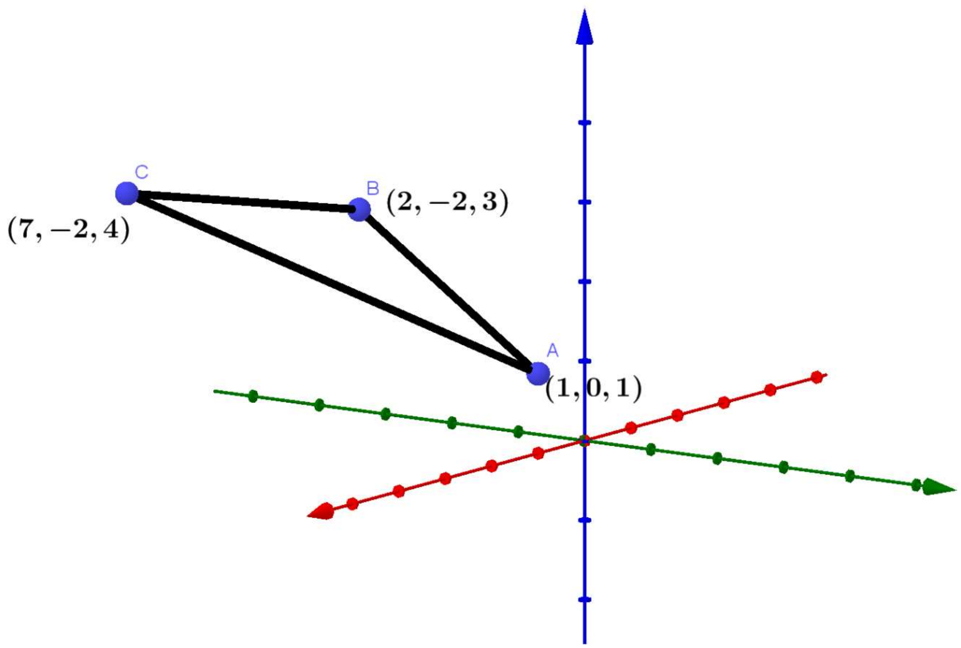
$$d(A,B) = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2 + (3-1)^2} = 3$$
$$d(A,C) = \sqrt{(7-1)^2 + (-2-0)^2 + (4-1)^2} = 7$$
$$d(B,C) = \sqrt{(7-2)^2 + (-2+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}$$

Revisamos si se cumple la relación pitagórica, es decir, si el cuadrado del lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados:

$$(7)^2 \stackrel{?}{=} 3^2 + \left(\sqrt{26}\right)^2$$
$$49 \stackrel{?}{=} 35$$

Como no es igual entonces los tres puntos no forman un triángulo rectángulo.

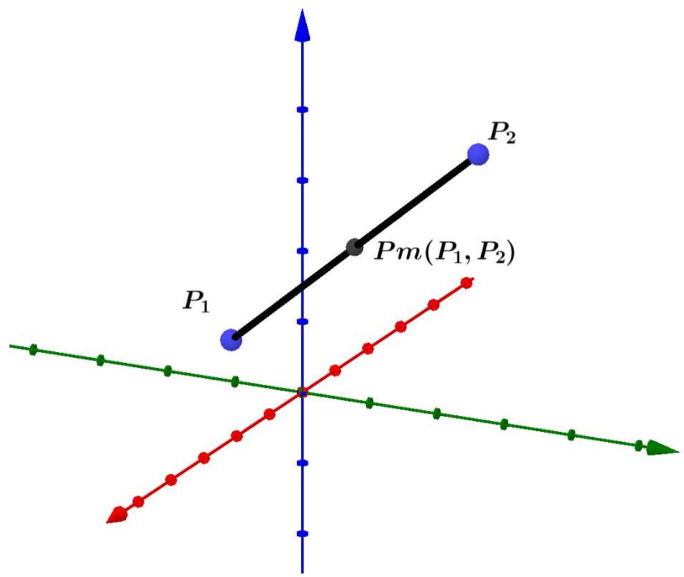
Gráfica del ejercicio anterior



Fórmula del Punto Medio

Las coordenadas del punto medio de un segmento de recta cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son

$$Pm(P_1, P_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



Ejercicio: Se tiene que un segmento de recta es paralelo al eje y y tiene como punto medio (1,2,3), calcular las coordenadas de los puntos de los extremos del segmento sabiendo que uno de ellos tiene como coordenada $y = 5$.

Tenemos que como el segmento es paralelo al eje y y el punto medio está sobre el segmento entonces las coordenadas de los extremos son:

$$P_1 = (1, y_1, 3) \text{ y } P_2 = (1, y_2, 3)$$

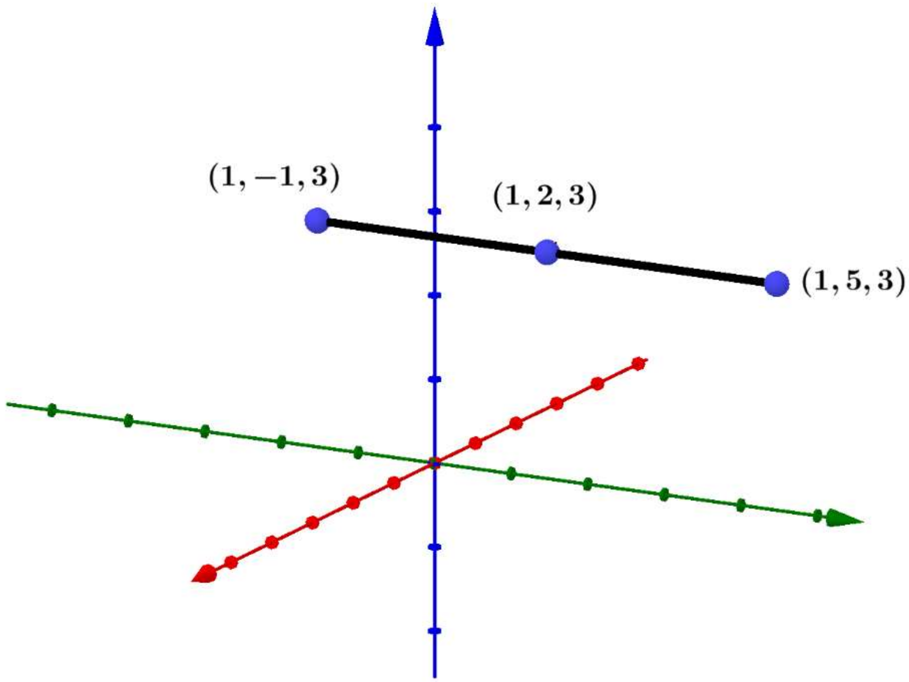
Podemos suponer que $y_1 = 5$. Usando la fórmula del punto medio tenemos:

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{5+y_2}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (1,2,3)$$

Luego

$$\frac{5+y_2}{2} = 2 \Rightarrow y_2 = 4 - 5 = -1$$

Así las coordenadas de los puntos extremos son: $(1,5,3), (1,-1,3)$

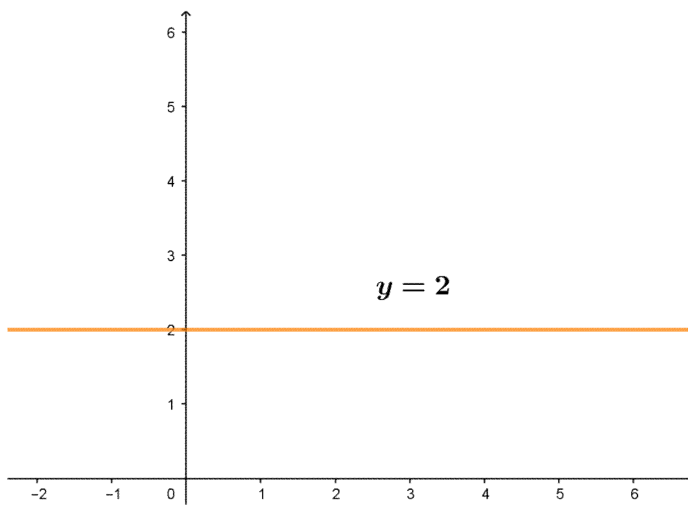


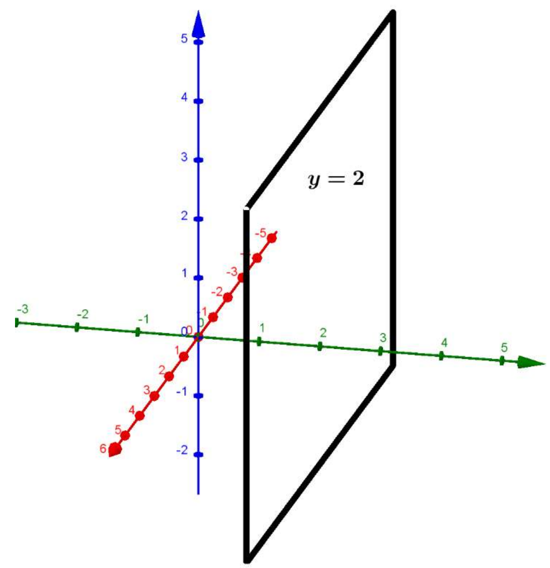
$(1,-1,3)$
$(1,2,3)$
$(1,5,3)$

Gráfica de una ecuación en $\mathbb{R}^3$

En el espacio geométrico tridimensional la gráfica de una ecuación es el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen a la ecuación.

Una ecuación en términos de x, y, z en el espacio tridimensional está representada por superficies, así como en el plano las ecuaciones de dos variables representan curvas. Por ejemplo una ecuación como $y = 2$ representa un plano en el espacio mientras que en plano representa una recta horizontal.





Ecuación de una Esfera

Un ejemplo de superficie es una esfera que consiste de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que equidistan de un punto fijo llamado centro $\mathrm{C} = (h, k, l)$ y la distancia r constante se llama radio. La ecuación radio – centro de la esfera es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-k)^2=r^2$$

La ecuación general es:

$$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+J=0$$

Donde el centro $\mathrm{C} = \left(-\frac{1}{2}G, -\frac{1}{2}H, -\frac{1}{2}I\right)$ y el radio es $r = \frac{1}{2}\sqrt{G^2+H^2+I^2-4J}$

También se tiene que toda ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Representa:

- Al punto $\left(-\frac{1}{2}G, -\frac{1}{2}H, -\frac{1}{2}I\right)$ cuando $G^2 + H^2 + I^2 - 4J = 0$
- Una esfera cuando $G^2 + H^2 + I^2 - 4J > 0$
- El conjunto $\emptyset$ cuando $G^2 + H^2 + I^2 - 4J < 0$

Ejemplo: Determine la gráfica de las siguientes ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 8z + 25 = 0$$

- En $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$ consideramos $G = 0$, $H = -2$, $I = 8$ y $J = -9$. Entonces

$$G^2 + H^2 + I^2 - 4J = 0 + 4 + 64 + 36 = 104 > 0$$

La ecuación representa una esfera de radio $r = \frac{\sqrt{104}}{2} = \sqrt{26}$ y centro

$$C = \left(-\frac{1}{2}(0), -\frac{1}{2}(-2), -\frac{1}{2}(8)\right) = (0,1,-4)$$

- En $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 8z + 25 = 0$ si tomamos $G = 1, H = -2, I = 8$ y $J = 25$, entonces

$$G^2 + H^2 + I^2 - 4J = 1 + 4 + 64 - 100 = -31 < 0$$

Que representa al conjunto $\emptyset$

Otra forma es completando cuadrados y reescribiendo la ecuación de la forma centro – radio

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$$

$$x^2 + (y^2 - 2y) + (z^2 + 8z) - 9 = 0$$

$$x^2 + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 8z + 16) - 9 - 1 - 16 = 0$$

$$x^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 26$$

De esta última ecuación podemos concluir que la ecuación representa una esfera de centro $C = (0,2,-4)$ y radio $r = \sqrt{26}$

Ejercicio: Un punto P se desplaza en $\mathbb{R}^3$ de tal modo que su distancia al punto $A(1,2,-3)$ es el doble de la distancia al punto $B(1,2,3)$. Demostrar que P pertenece a una esfera. Determinar el centro y el radio de la esfera.

Sea $P(x, y, z)$ las coordenadas del punto. Entonces

$$d(P, A) = d(P, B)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 + 4(z-3)^2$$

Trasponiendo todo a un miembro y agrupando

$$3(x-1)^2 + 3(y-2)^2 + 4(z-3)^2 - (z+3)^2 = 0$$

$$3(x-1)^2 + 3(y-2)^2 + 4z^2 - 24z + 36 - z^2 - 6z - 9 = 0$$

Simplificando obtenemos

$$3(x-1)^2+3(y-2)^2+3z^2-30z+27=0$$

$$3(x-1)^2+3(y-2)^2+3(z^2-10z)+27=0$$

$$3(x-1)^2+3(y-2)^2+3(z^2-10z+25)+27-75=0$$

$$3(x-1)^2+3(y-2)^2+3(z-5)^2=48$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=16$$

Lo que representa una esfera de centro $(1,2,5)$ y radio $r=4$

Ejercicios propuestos:

1. Los puntos $A = (-1,1,2)$ y $B = (2,3,5)$ son vértices opuestos de un paralelepípedo que tiene sus caras paralelas a los planos coordenados del espacio $\mathbb{R}^3$. Determinar las coordenadas de los otros seis vértices. Calcular la longitud de la diagonal AB.
2. Demostrar que los puntos tres puntos $A(-3,2,4), B(6,1,2)$ y $C(-12,3,6)$ son coloniales.
3. Determinar si los puntos $A(1,-1,3), B(2,1,7)$ y $C = (4,2,6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Calcular el perímetro y el área del triángulo.
4. Se dibuja una recta que pasa por el punto $(6,4,2)$ y que es perpendicular al plano YZ. Obtenga las coordenadas de todos los puntos de la recta que están a una distancia de 10 unidades del punto $(0,4,0)$.

5. Determinar la gráfica de las siguientes ecuaciones
   a. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$
   b. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 3z + 2 = 0$
   c. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 0$
6. Obtenga una ecuación de la esfera que satisfaga las condiciones dadas:
   a. Que tiene como extremos del diámetro los puntos $(6,2,-5)$ y $(-4,0,7)$
   b. Que contiene los puntos $(0,0,4)$, $(2,1,3)$ y $(0,2,6)$ y su centro se encuentra en el plano yz
   c. Que contiene los puntos $(8,2,2), (-4,3,-3), (-1,2,5)$ y $(4,3,-7)$.