Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Funciones Vectoriales

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

20 de julio del 2021

Función Vectorial

- Una función Vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y la imagen es un conjunto de vectores.
- Por lo general se usa la notación de $\vec{r}$ para denotar una función vectorial.
- Para cada t en el dominio existe un vector único denotado por $\vec{r}(t)$.
- Si $f(t), g(t)$ y $h(t)$ son las componentes del vector $\vec{r}(t)$ entonces escribimos

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

O

$$\vec{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

- Las funciones f, g y h se llaman funciones componentes de $\vec{r}$

Ejemplo: Halle el dominio de la función $\vec{r}(t) = \ln(t)\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{1-t}\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}$

Vemos que las funciones componentes de la función vectorial son

- $f(t) = \ln(t)$
- $g(t) = \frac{1}{1-t}$
- $h(t) = e^{-t}$

Son imágenes de la función por ejemplo

$$\vec{r}(2) = \ln 2\boldsymbol{i} + \frac{1}{1-2}\boldsymbol{j} + e^{-2}\boldsymbol{k} = \ln 2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + e^{-2}\boldsymbol{k}$$

$$\vec{r}(3) = \ln 3\boldsymbol{i} + \frac{1}{1-3}\boldsymbol{j} + e^{-3}\boldsymbol{k} = \ln 3\,\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + e^{-3}\boldsymbol{k}$$

Pero $\vec{r}(0) = \ln 0\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{1-0}\boldsymbol{j} + e^{-0}\boldsymbol{k}$ no se puede definir.

El dominio de $\vec{r}$ son todos los valores que t puede tomar para que las tres funciones componentes estén definidas, entonces podemos decir que

$$Dom\ \vec{r} = Dom\ f \cap Dom\ g \cap Dom\ h$$

- $Dom\ f = (0, +\infty)$
- $Dom\ g = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- $Dom\ h = \mathbb{R}$

Luego

$$Dom\ \vec{r} = (0,1) \cup (1, +\infty)$$

EJEMPLO 1 Si

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$$

entonces las funciones componentes son

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

De acuerdo con la convención usual, el dominio de $\mathbf{r}$ consiste de todos los valores de t para los cuales la expresión para $\mathbf{r}(t)$ está definida. Las expresiones t^3, $\ln(3 - t)$, y $\sqrt{t}$ están definidas para cuando $3 - t > 0$ y $t \geqslant 0$. Por tanto, el dominio de $\mathbf{r}$ es el intervalo $[0, 3)$.

Límite de una Función Vectorial

El **límite** de una función vectorial **r** se define obteniendo los límites de sus funciones componentes como se señala a continuación.

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, entonces

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

siempre que existan los límites de las funciones componentes.

EJEMPLO 2 Determine $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$, donde $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Según la definición 1, el límite de $\mathbf{r}$ es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de $\mathbf{r}$:

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \to 0} (1 + t^3)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}}_{\text{Límite elemental}}\right]\mathbf{k}$$

$$= (1 + 0^3)\boldsymbol{i} + 0e^{-0}\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

Ejemplo: Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}, \frac{3}{1+t} \right\rangle$, hallar $\lim_{t\to 0} \vec{r}(t)$

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}, \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}, \lim_{t\to 0} \frac{3}{1+t} \right\rangle$$

Aplicando la regla de L'Hopital para hallar los límites de la primera y segunda componente tenemos que

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{1}, \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1}, \frac{3}{1+0} \right\rangle$$

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = \left\langle e^0, \frac{1}{2\sqrt{1+0}}, 3 \right\rangle$$

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = \left\langle 1, \frac{1}{2}, 3 \right\rangle$$

Continuidad en funciones vectoriales

Una función vectorial **r** es **continua en *a*** si

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Según la definición 1, **r** es continua en a si y sólo si sus funciones componentes f, g y h son continuas en a.

Ejemplo la función vectorial $\vec{r}(t) = (t^2 + 1)\boldsymbol{i} + \cos t \ \boldsymbol{j} + \sqrt[3]{t}\ \boldsymbol{k}$ es continua para todo los números reales porque sus funciones componentes lo son, pero $\vec{r}(t) = ti + \ln t\, j + \frac{1}{t-2}\ k$ es continua para todos los números positivos diferentes a 2, por la segunda y tercer componente.

Gráfica de una función vectorial

Hay una estrecha relación entre funciones vectoriales continuas y curvas en el espacio. Supongamos que f, g y h son funciones continuas de valores reales sobre un intervalo I. Entonces el conjunto C de todos los puntos (x, y, z) en el espacio, donde

$$\boxed{2} \qquad x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

y t varía en todo el intervalo I, se llama **curva en el espacio.** Las ecuaciones en $\boxed{2}$ reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas de** C, y t se llama **parámetro**. Podemos pensar que C está trazada por una partícula en movimiento cuya posición en el tiempo t es $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$. Si ahora consideramos la función $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, entonces $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición del punto $P(f(t), g(t), h(t))$ *sobre* C. Por tanto, cualquier función vectorial continua $\mathbf{r}$ define una curva C en el espacio trazada por la punta del vector $\mathbf{r}(t)$ que se desplaza, como se ilustra en la figura 1.

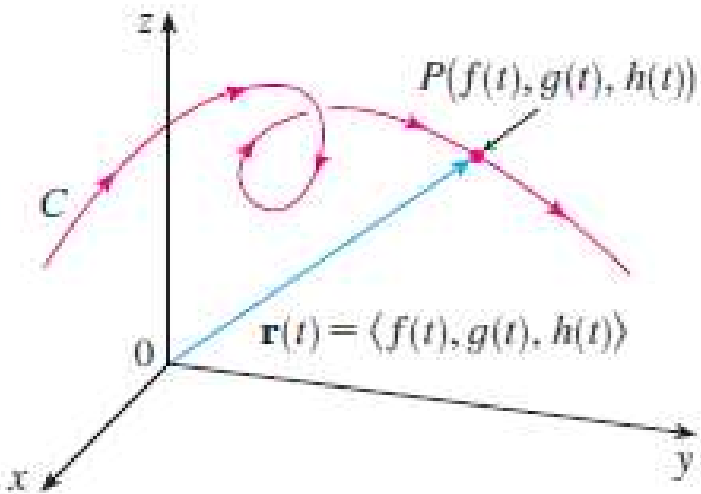


FIGURA 1

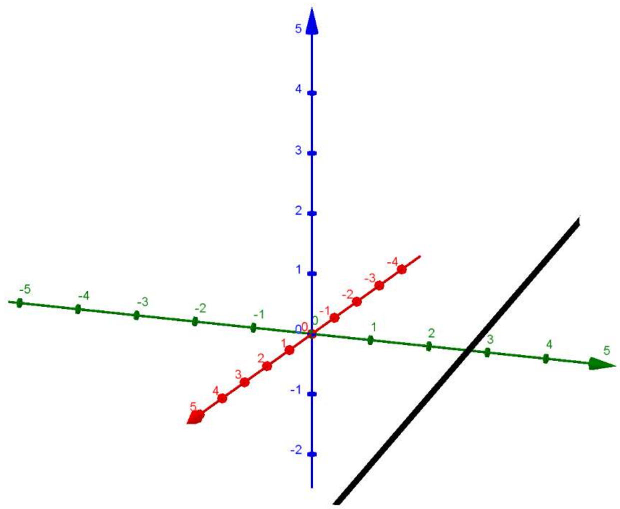
C está trazada por la punta de un vector de posición $\mathbf{r}(t)$.

V **EJEMPLO 3** Describa la curva que define la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

SOLUCIÓN Las ec son

$-1 + 6t$



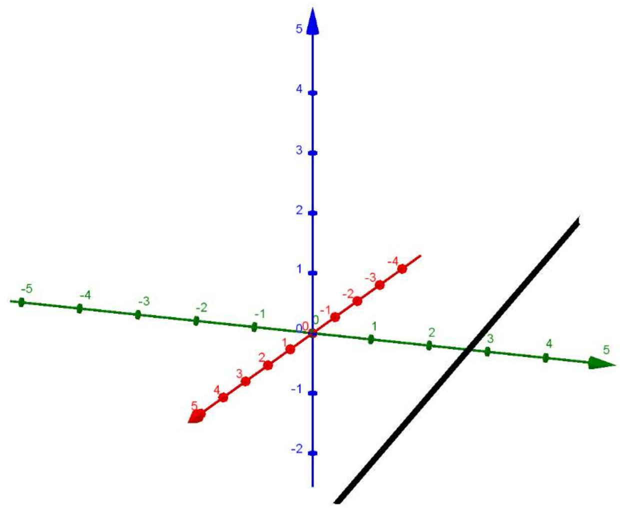
Por lo que vimos s representan una
recta que pasa pc $\vec{v} = \langle 1,5,6 \rangle$

Para representar en GeoGebra una curva usando sus ecuaciones paramétricas se emplea el siguiente comando

Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)

Para representar la recta usamos

Curva(1+t,2+5t,-1+6t,t,-5,5)



V EJEMPLO 4 Trace la curva cuya ecuación vectorial es

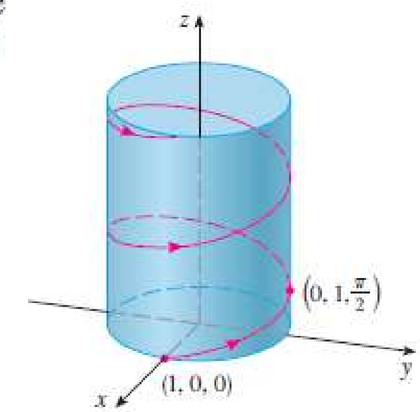
$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas para esta curva son

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

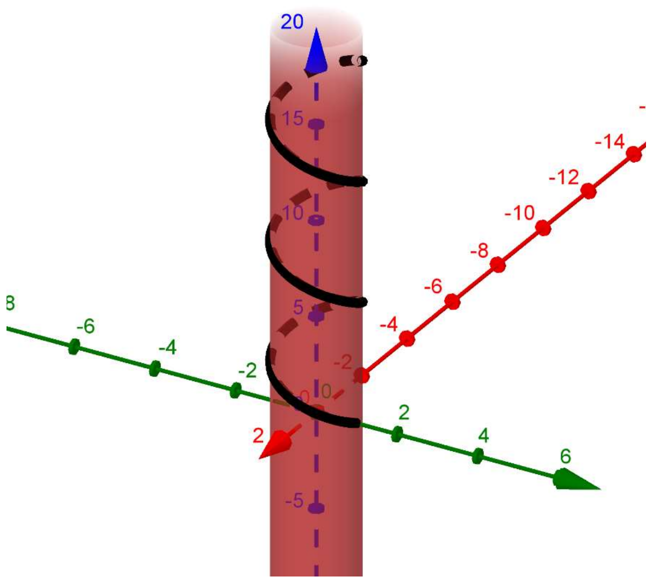
Puesto que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, la curva debe estar en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. El punto (x, y, z) se ubica directamente arriba del punto $(x, y, 0)$, el cual se desplaza en el sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. (La proyección de la curva sobre el plano xy tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 0 \rangle$. Como $z = t$, la curva se dirige en espiral hacia arriba siguiendo la forma del cilindro a medida que t se incrementa.

La curva se llama **hélice**



En GeoGebra

Curva(sen(t), cos(t), t, t, 0, 6π)



EJEMPLO 5 Determine una ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas del segmento rectilíneo que une el punto $P(1, 3, -2)$ con el punto $Q(2, -1, 3)$.

SOLUCIÓN

Consideramos

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\,\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

En este caso se toma $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3 \rangle$ para obtener una ecuación vectorial del segmento rectilíneo que va de P a Q:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\,\langle 1, 3, -2 \rangle + t\langle 2, -1, 3 \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

o bien $$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$x = 1 + t \qquad y = 3 - 4t \qquad z = -2 + 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

V **EJEMPLO 6** Determine una función vectorial que represente la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$.

SOLUCIÓN En la figura 5 se ilustra cómo se intersecan el plano y el cilindro, y la figura 6 representa la curva C de intersección, que es una elipse.

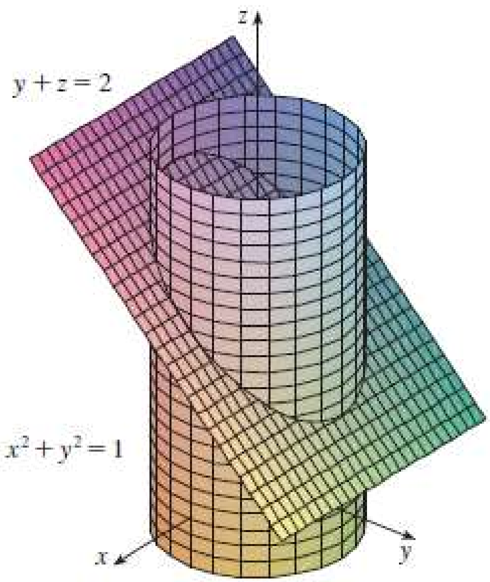


FIGURA 5

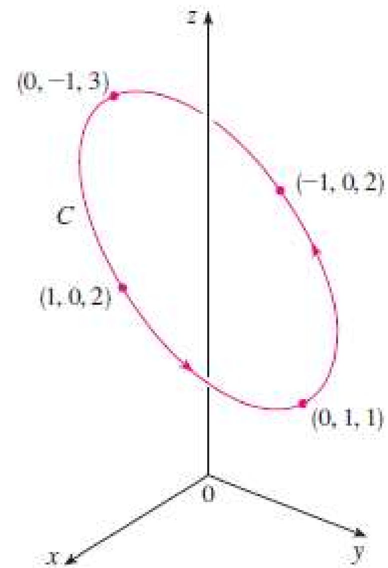


FIGURA 6

La proyección de C sobre el plano xy es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Entonces, ya sabemos por el ejemplo 2 de la sección 10.1 que podemos escribir

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

A partir de la ecuación del plano tenemos

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

De modo que podemos escribir ecuaciones paramétricas para C como

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = 2 - \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

La ecuación vectorial correspondiente es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (2 - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Esta ecuación se llama *parametrización* de la curva C. Las flechas de la figura 6 indican la dirección en la cual C es trazada conforme el parámetro t se incrementa.

Ejemplo: encuentre una función vectorial que represente la curva de intersección de las superficies:

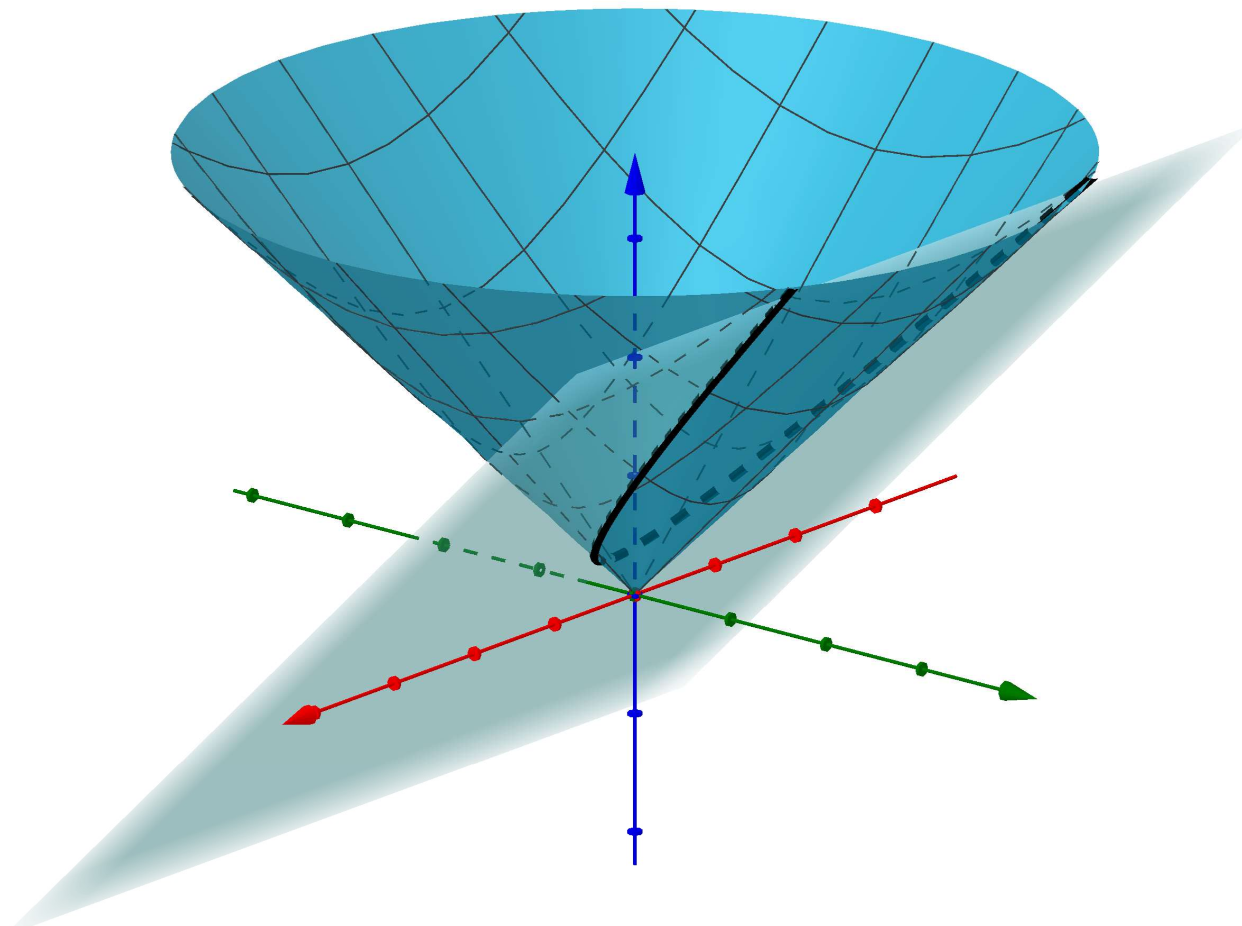
El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1 + y$

Vemos que si (x, y, z) es un punto que está en la intersección de las dos superficies entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + y$$
$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (1 + y)^2$$
$$x^2 + y^2 = 1 + 2y + y^2$$
$$x^2 = 1 + 2y$$
$$y = \frac{x^2 - 1}{2}$$

Si consideramos $x = t$ entonces $y = \frac{t^2-1}{2}$ y $z = 1 + \frac{t^2-1}{2} = \frac{t^2+1}{2}$. Luego la función vectorial que representa a la curva intersección es:

$$\vec{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{t^2 - 1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{t^2 + 1}{2}\boldsymbol{k}$$



Ejercicios Propuestos:

1-2 Determine el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{4 - t^2}, e^{-3t}, \ln(t + 1) \rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t - 2}{t + 2}\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9 - t^2)\,\mathbf{k}$

3-6 Determine el límite

3. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \left(e^{-3t}\mathbf{i} + \frac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k} \right)$

4. $\displaystyle \lim_{t \to 1} \left(\frac{t^2 - t}{t - 1}\mathbf{i} + \sqrt{t + 8}\,\mathbf{j} + \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\ln t}\mathbf{k} \right)$

5. $\displaystyle \lim_{t \to \infty} \left\langle \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \tan^{-1} t, \frac{1 - e^{-2t}}{t} \right\rangle$

6. $\displaystyle \lim_{t \to \infty} \left\langle te^{-t}, \frac{t^3 + t}{2t^3 - 1}, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right\rangle$

7-14 Grafique la curva con la ecuación vectorial dada. Indique con una flecha la dirección en la cual t se incrementa.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t \rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2 - t, 2t \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, t, \cos \pi t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle 1, \cos t, 2 \operatorname{sen} t \rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\, \mathbf{i} + t\, \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\, \mathbf{i} + t^4\, \mathbf{j} + t^6\, \mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} - \cos t\, \mathbf{j} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{k}$

27. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$, y a partir de este hecho grafique la curva.

28. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ es la curva de intersección de las superficies $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 1$. A partir de este hecho grafique la curva.

29. ¿En qué puntos corta la curva $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$ al paraboloide $z = x^2 + y^2$?

30. ¿En que puntos corta la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?