Departamento de matemática y física
Estadística I – 0834405T

GUÍA RESUMEN 3

PROBABILIDAD

Profa. Mayle Leal

El determinismo causal sostiene que todos los eventos son el resultado de leyes naturales y de condiciones precedentes. Un fenómeno determinista es aquel donde bajo las mismas condiciones iniciales se obtendrá el mismo resultado final, por ejemplo, en la ley de Ohm, si tenemos un valor de intensidad de la corriente de y un valor de resistencia obtendremos siempre un valor de voltaje de V=I.R. Ahora en un simple experimento de lanzar una moneda, aun cuando sabemos cuáles son los posibles resultados a obtener no lo podemos afirmar con total seguridad. Estos experimentos se denominan estocásticos o aleatorios y para explicarlos estudiamos la **Teoría de Probabilidad.**

Conceptos Básicos de Probabilidad

Experimento aleatorio. Experimento cuyo resultado es producto de la suerte o del azar. Por ejemplo, el experimento de arrojar un dado.

Espacio muestral. Es el conjunto de todos los posibles resultados que tiene un experimento. Se denota por S o por Ω. En el experimento de lanzar un dado el espacio muestral sería:

S: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento. Es un subconjunto del espacio muestral. Se denota por las letras mayúsculas del alfabeto.

Ejemplo P: la cara superior del dado es par, esto sería: P: $\{2, 4, 6\}$

Axiomas de Probabilidad

Axiomas de probabilidad en lenguaje matemático significa que son proposiciones que por su carácter evidente no requieren demostración. Constituyen, por decirlo de alguna manera, “las reglas del juego”, sin importar si estamos trabajando una probabilidad subjetiva o empírica, o si seguimos los postulados de la probabilidad clásica.

Estos axiomas, que constituyen el cimiento de la teoría moderna de probabilidades, fueron propuestos por el matemático ruso Kolmogorov y se expresan de manera formal en los siguientes términos.

1) Para todo evento A, $P(A) \geq 0$

2) Si Ω representa el evento universo, entonces $P(\Omega) = 1$

3) Dados dos eventos, A y B mutuamente excluyentes, ocurre que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Claramente, el primer axioma nos indica que no hay probabilidades negativas; el segundo, que ningún evento tiene una probabilidad mayor a uno.

A partir de ellos, se tienen otros resultados importantes, tales como:

a) $P(\phi) = 0$, donde ϕ representa el conjunto vacío.

b) $P(A') = 1 - P(A)$ donde A' es el complemento de A (todo lo que está en el espacio muestral y no pertenece a A)

c) Dados dos eventos A y B cualesquiera, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

En la siguiente tabla se muestran cuatro operaciones que serán muy útiles para manejar eventos aleatorios y su equivalencia con operaciones lógicas.

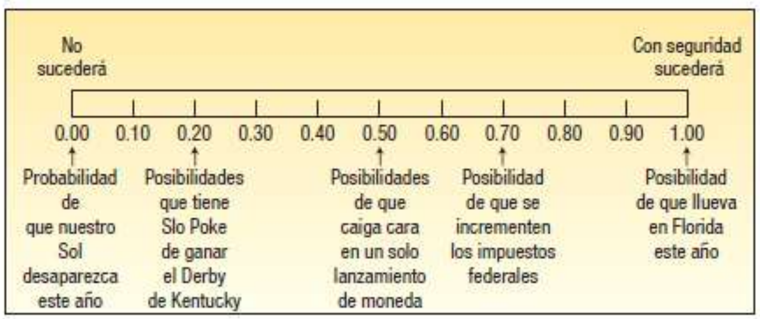
Operación Lógica	Operación en conjuntos
o	Unión (U)
y	Intersección (∩)
no	Complemento(‘) Diferencia (-)

RESUMEN CAPITULO 5 DEL LIBRO ESTADÍSTICA APLICADA A LOS NEGOCIOS Y LA ECONOMÍA

PROBABILIDAD Valor entre cero y uno, inclusive, que describe la posibilidad relativa (oportunidad o casualidad) de que ocurra un evento.

Es común que una probabilidad sea expresada en forma decimal, como 0.70, 0.27 o 0.50. No obstante, también se da en forma de fracción, como 7/10, 27/100 o 1/2. Se puede suponer cualquier número de 0 a 1, inclusive. Si una compañía sólo tiene cinco regiones de ventas, y el nombre o número de cada región se escribe en un trozo de papel, que se coloca en un sombrero, la probabilidad de seleccionar una de las cinco regiones es de 1. La probabilidad de sacar del sombrero un trozo de papel rotulado con "Pittsburgh Steelers" es 0. Por consiguiente, la probabilidad de 1 representa algo que seguramente sucederá, y la probabilidad de 0 representa algo que no sucederá.

Cuanto más próxima se encuentre una probabilidad a 0, más improbable es que el evento suceda. Cuanto más próxima se encuentre la probabilidad a 1, más seguro es que suceda. El siguiente diagrama muestra la relación e incluye algunas conjeturas personales. Sin embargo, usted podría seleccionar una probabilidad distinta de que Slo Poke gane el Derby de Kentucky o de que se incrementen los impuestos federales.



En el estudio de la probabilidad se utilizan tres palabras clave: **experimento**, **resultado** y **evento**. Dichos términos son empleados en el lenguaje de la vida cotidiana, pero en estadística adquieren significados específicos.

EXPERIMENTO Proceso que induce a que ocurra una y sólo una de varias posibles observaciones.

RESULTADO Resultado particular de un experimento.

Por ejemplo, lanzar una moneda al aire constituye un experimento. Usted puede observar el lanzamiento de una moneda, pero no está seguro si caerá *cara* o *cruz*. De manera similar, preguntar a 500 estudiantes universitarios si comprarían un nuevo sistema de cómputo Dell a cierto precio constituye un experimento. Si se lanza una moneda, un resultado particular es *cara*. El otro posible resultado es *cruz*. En el experimento de la compra de la computadora, un posible resultado es que 273 estudiantes indiquen que les gustaría comprar la computadora. Otro es que 317 estudiantes la compren. Todavía hay otro resultado, que 423 estudiantes indiquen que la comprarían. Cuando se observan uno o más resultados en los experimentos, constituyen un evento.

EVENTO Conjunto de uno o más resultados de un experimento.

5.3 Enfoques para asignar probabilidades

Conviene analizar dos perspectivas para asignar probabilidades: los enfoques *objetivo* y *subjetivo*. La **probabilidad objetiva** se subdivide en *a) probabilidad clásica* y *b) probabilidad empírica*.

Probabilidad clásica

La **probabilidad clásica** parte del supuesto de que los resultados de un experimento son *igualmente posibles*. De acuerdo con el punto de vista clásico, la probabilidad de un evento que se está llevando a cabo se calcula dividiendo el número de resultados favorables entre el número de posibles resultados:

PROBABILIDAD CLÁSICA $$\text{Probabilidad de un evento} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de posibles resultados}} \qquad \textbf{(5-1)}$$

Considere el experimento de lanzar un dado. ¿Cuál es la probabilidad del evento "cae un número par de puntos"?

Los posibles resultados son:

Hay tres resultados *favorables* (un dos, un cuatro y un seis) en el conjunto de seis resultados igualmente posibles. Por consiguiente,

$$\text{Probabilidad de un número par} = \frac{3}{6} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \boxed{\frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de posibles resultados}}}$$

$$= .5$$

MUTUAMENTE EXCLUYENTE El hecho de que un evento se presente significa que ninguno de los demás eventos puede ocurrir al mismo tiempo.

La variable *género* da origen a resultados mutuamente excluyentes: hombre y mujer. Un empleado seleccionado al azar es hombre o mujer, pero no puede tener ambos géneros. Una pieza fabricada es aceptable o no lo es. La pieza no puede ser aceptable e inaceptable al mismo tiempo. En una muestra de piezas fabricadas, el evento de seleccionar una pieza no aceptable y el evento de seleccionar una pieza aceptable son mutuamente excluyentes.

Si un experimento incluye un conjunto de eventos con todo tipo de resultados posibles, como los eventos "un número par" y "un número impar" en el experimento del lanzamiento del dado, entonces el conjunto de eventos es **colectivamente exhaustivo**. En el experimento del lanzamiento del dado, cada resultado será par o impar. Por consiguiente, el conjunto es colectivamente exhaustivo.

COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVO Por lo menos uno de los eventos debe ocurrir cuando se lleva a cabo un experimento.

Probabilidad empírica

La **probabilidad empírica** o **frecuencia relativa**, el segundo tipo de probabilidad, se basa en el número de veces que ocurre el evento como proporción del número de intentos conocidos.

PROBABILIDAD EMPÍRICA La probabilidad de que un evento ocurra representa una fracción de los eventos similares que sucedieron en el pasado.

En términos de una fórmula:

$$\text{Probabilidad empírica} = \frac{\text{Número de veces que el evento ocurre}}{\text{Número total de observaciones}}$$

El enfoque empírico de la probabilidad se basa en la llamada *ley de los grandes números*. La clave para determinar probabilidades de forma empírica consiste en que una mayor cantidad de observaciones proporcionarán un cálculo más preciso de la probabilidad.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS En una gran cantidad de intentos, la probabilidad empírica de un evento se aproximará a su probabilidad real.

Para explicar la ley de los grandes números, supongamos que lanzamos una moneda común. El resultado de cada lanzamiento es cara o cruz. Si lanza la moneda una sola vez, la probabilidad empírica de las caras es cero o uno. Si lanzamos la moneda una gran cantidad de veces, la probabilidad del resultado de las caras se aproximará a 0.5. La siguiente tabla muestra los resultados de un experimento en el que se lanza una moneda 1, 10, 50, 100, 500, 1 000 y 10 000 veces, y, en seguida, se calcula la frecuencia relativa de las caras. Observe que conforme incrementamos el número de intentos, la probabilidad empírica de que salga una cara se aproxima a 0.5, que es su valor de acuerdo con el enfoque clásico de la probabilidad.

Probabilidad subjetiva

Si se cuenta con poca o ninguna experiencia o información con la cual sustentar la probabilidad, es posible aproximarla en forma subjetiva. En esencia, esto significa que un individuo evalúa las opiniones e información disponibles y luego calcula o asigna la probabilidad. Esta probabilidad se denomina adecuadamente **probabilidad subjetiva**.

CONCEPTO SUBJETIVO DE PROBABILIDAD Posibilidad (probabilidad) de un evento en particular que asigna un individuo a partir de cualquier información que encuentre disponible.

Algunos ejemplos de probabilidad subjetiva son los siguientes:

1. Calcular la posibilidad de que los Patriotas de Nueva Inglaterra jueguen el Súper Tazón el año que viene.
2. Calcular la posibilidad de que usted contraiga matrimonio antes de los 30 años.
3. Calcular la posibilidad de que el déficit presupuestario de Estados Unidos se reduzca a la mitad en los siguientes 10 años.

5.4 Algunas reglas para calcular probabilidades

Ahora, una vez definida la probabilidad y descrito sus diferentes enfoques, cabe atender al cálculo de la probabilidad de dos o más eventos aplicando las reglas de la adición y la multiplicación.

Reglas de la adición

Existen dos reglas de la adición: la regla especial de la adición y la regla general de la adición. Primero la regla especial de la adición.

Regla especial de la adición Para aplicar la **regla especial de la adición**, los eventos deben ser *mutuamente excluyentes*. Recuerde que mutuamente excluyentes significa que cuando un evento ocurre, ninguno de los demás eventos puede ocurrir al mismo tiempo. Un ejemplo de eventos mutuamente excluyentes en el experimento del lanzamiento del dado son los eventos "un número 4 o mayor" y "un número 2 o menor". Si el resultado se encuentra en el primer grupo {4, 5 y 6}, entonces no puede estar en el segundo grupo {1 y 2}. Otro ejemplo consiste en que un producto proveniente de la línea de montaje no puede estar defectuoso y en buen estado al mismo tiempo.

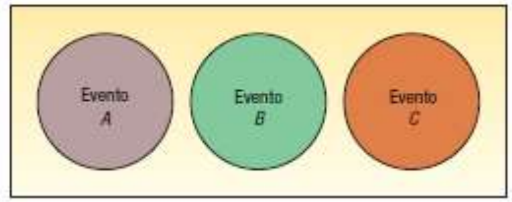
Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, la regla especial de la adición establece que la probabilidad de que ocurra uno *u* otro es igual a la suma de sus probabilidades. Esta regla se expresa mediante la siguiente fórmula:

REGLA ESPECIAL DE LA ADICIÓN $$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) \quad \text{(5-2)}$$

En el caso de los tres eventos mutuamente excluyentes designados A, B y C, la regla se expresa de la siguiente manera:

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

El lógico inglés J. Venn (1834-1923) creó un diagrama para representar de manera gráfica el resultado de un experimento. El concepto de *eventos mutuamente excluyentes*, así como de otras reglas para combinar probabilidades, se ilustra mediante este dispositivo. Para construir un diagrama de Venn, primero se encierra un espacio, el cual representa el total de posibles resultados. Este espacio es de forma rectangular. Así, un evento se representa por medio de un área circular, que se dibuja dentro del rectángulo, la cual corresponde a la probabilidad del evento. El siguiente diagrama de Venn ilustra el concepto de *eventos mutuamente excluyentes*. Los eventos no se superponen, lo cual significa que son mutuamente excluyentes. En el siguiente diagrama suponga que los eventos A, B y C son igualmente probables.



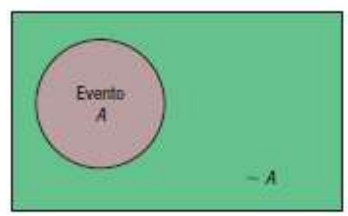
Regla del complemento La probabilidad de que una bolsa de verduras mixtas seleccionadas pese menos, $P(A)$, más la probabilidad de que no sea una bolsa con menos peso, $P(\sim A)$, que se lee *no A*, deber ser por lógica igual a 1. Esto se escribe:

$$P(A) + P(\sim A) = 1$$

Esta expresión puede reformularse:

REGLA DEL COMPLEMENTO $$P(A) = 1 - P(\sim A) \quad \text{(5-3)}$$

Tal es la **regla del complemento**. Se emplea para determinar la probabilidad de que un evento ocurra restando de 1 la probabilidad de un evento que no ha ocurrido. Esta regla es útil porque a veces es más fácil calcular la probabilidad de que un evento suceda determinando la probabilidad de que no suceda y restando el resultado de 1. Observe que los eventos A y $\sim A$ son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Por consiguiente, las probabilidades de A y $\sim A$ suman 1. Un diagrama de Venn ilustra la regla del complemento de la siguiente manera:



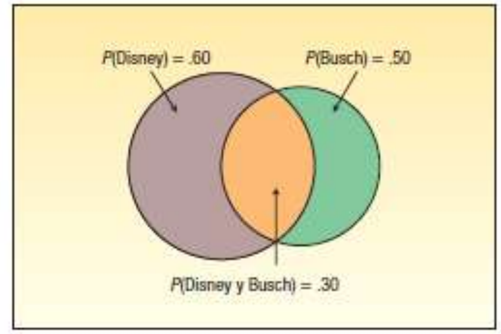
Regla general de la adición Los resultados de un experimento pueden no ser mutuamente excluyentes. Como ilustración, supongamos que Florida Tourist Commission seleccionó una muestra de 200 turistas que visitaron el estado durante el año. La encuesta reveló que 120 turistas fueron a Disney World y 100 a Busch Gardens, cerca de Tampa. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada haya visitado Disney World o Busch Gardens? Si se emplea la regla especial de la adición, la probabilidad de seleccionar un turista que haya ido a Disney World es de 0.60, que se determina mediante la división 120/200. De manera similar, la probabilidad de que un turista vaya a Busch Gardens es de 0.50. La suma de estas probabilidades es de 1.10. Sin embargo, sabemos que esta probabilidad no puede ser mayor que 1. La explicación es que muchos turistas visitaron ambas atracciones turísticas y se les ha contado dos veces. Una revisión de las respuestas de la encuesta reveló que 60 de los 200 encuestados visitó, en realidad, ambas atracciones turísticas.

Para responder cuál es la probabilidad de elegir a una persona que haya visitado Disney World o Busch Gardens, 1) sume la probabilidad de que un turista haya visitado Disney World y la probabilidad de que haya visitado Busch Gardens; y 2) reste la probabilidad de que haya visitado ambas atracciones turísticas. Por consiguiente:

$$P(\text{Disney o Busch}) = P(\text{Disney}) + P(\text{Busch}) - P(\text{tanto Disney como Busch})$$

$$= 0.60 + 0.50 - 0.30 = 0.80$$

Cuando dos eventos ocurren al mismo tiempo, la probabilidad se denomina **probabilidad conjunta**. La probabilidad de que un turista visite ambas atracciones turísticas (0.30) es un ejemplo de probabilidad conjunta.



PROBABILIDAD CONJUNTA Probabilidad que mide la posibilidad de que dos o más eventos sucedan simultáneamente.

En el caso de la expresión $P(A \text{ o } B)$, la conjunción *o* sugiere que puede ocurrir *A* o puede ocurrir *B*. Esto también incluye la posibilidad de que *A* y *B* ocurran. Tal uso de *o* a veces se denomina **inclusivo**. También es posible escribir $P(A \text{ o } B \text{ o ambos})$ para hacer hincapié en el hecho de que la unión de dos eventos incluye la intersección de *A* y *B*.

Si comparamos las reglas general y especial de la adición, la diferencia que importa consiste en determinar si los eventos son mutuamente excluyentes. Si lo son, entonces la probabilidad conjunta $P(A \text{ y } B)$ es 0 y podríamos aplicar la regla especial de la adición. De lo contrario, debemos tomar en cuenta la probabilidad conjunta y aplicar la regla general de la adición.

Esta regla para dos eventos designados *A* y *B* se escribe:

REGLA GENERAL DE LA ADICIÓN $$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B) \qquad \textbf{(5-4)}$$

Reglas de la multiplicación

Cuando empleamos las reglas de la adición en la sección anterior, determinamos la probabilidad de combinar dos eventos. En esta sección estimará la probabilidad de que la ocurrencia de dos eventos sea simultánea. Por ejemplo, una empresa de marketing desea calcular la probabilidad de que una persona de 21 años de edad o mayor compre una Hummer. Los diagramas de Venn ilustran este hecho como la intersección de dos eventos. Para determinar la probabilidad de dos eventos que se presentan simultáneamente emplee la regla de la multiplicación. Hay dos reglas de la multiplicación, la regla especial y la regla general.

Regla especial de la multiplicación La regla especial de la multiplicación requiere que dos eventos, A y B, sean independientes, y lo son si el hecho de que uno ocurra no altera la probabilidad de que el otro suceda.

INDEPENDENCIA Si un evento ocurre, no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de que otro evento acontezca.

Una forma de entender la independencia consiste en suponer que los eventos A y B ocurren en diferentes tiempos. Por ejemplo, cuando el evento B ocurre después del evento A, ¿influye A en la probabilidad de que el evento B ocurra? Si la respuesta es no, entonces A y B son eventos independientes. Para ilustrar la independencia, supongamos que se lanzan al aire dos monedas. El resultado del lanzamiento de una moneda (cara o cruz) no se altera por el resultado de cualquier moneda lanzada previamente (cara o cruz).

En el caso de dos eventos independientes A y B, la probabilidad de que A y B ocurran se determina multiplicando las dos probabilidades, tal es la **regla especial de la multiplicación**, cuya expresión simbólica es la siguiente:

REGLA ESPECIAL DE LA MULTIPLICACIÓN $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$ **(5-5)**

En el caso de tres eventos independientes, A, B y C, la regla especial de la multiplicación que se utiliza para determinar la probabilidad de que los tres eventos ocurran es:

$$P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A)P(B)P(C)$$

Regla general de la multiplicación Si dos eventos no son independientes, se dice que son **dependientes**. Con el fin de ilustrar el concepto de dependencia, supongamos que hay 10 latas de refresco en un refrigerador, 7 de los cuales son normales y 3 dietéticos. Se saca una lata del refrigerador. La probabilidad de que sea una lata de refresco dietético es de 3/10, y la probabilidad de que sea una lata de refresco normal es de 7/10. Luego, se elige una segunda lata del refrigerador sin devolver la primera. La probabilidad de que la segunda lata sea de refresco dietético depende de que la primera lo haya sido o no. La probabilidad de que la segunda lata sea de refresco dietético es:

2/9, si la primera bebida es dietética (sólo dos latas de refresco dietético quedan en el refrigerador).
3/9, si la primera lata elegida es normal (los tres refrescos aún están en el refrigerador).

La denominación adecuada de la fracción 2/9 (o 3/9) es **probabilidad condicional**, ya que su valor se encuentra condicionado (o depende) del hecho de que un refresco regular o dietético haya sido el primero en ser seleccionado del refrigerador.

PROBABILIDAD CONDICIONAL Probabilidad de que un evento en particular ocurra, dado que otro evento haya acontecido.

La regla general de la multiplicación sirve para determinar la probabilidad conjunta de dos eventos cuando éstos no son independientes. Por ejemplo, cuando el evento B ocurre después del evento A, y A influye en la probabilidad de que el evento B suceda, entonces A y B no son independientes.

La regla general de la multiplicación establece que en caso de dos eventos, A y B, la probabilidad conjunta de que ambos eventos ocurran se determina multiplicando la probabilidad de que ocurra el evento A por la probabilidad condicional de que ocurra el evento B, dado que A ha ocurrido. Simbólicamente, la probabilidad conjunta, $P(A \text{ y } B)$, se calcula de la siguiente manera:

REGLA GENERAL DE LA MULTIPLICACIÓN $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B|A)$ **(5-6)**

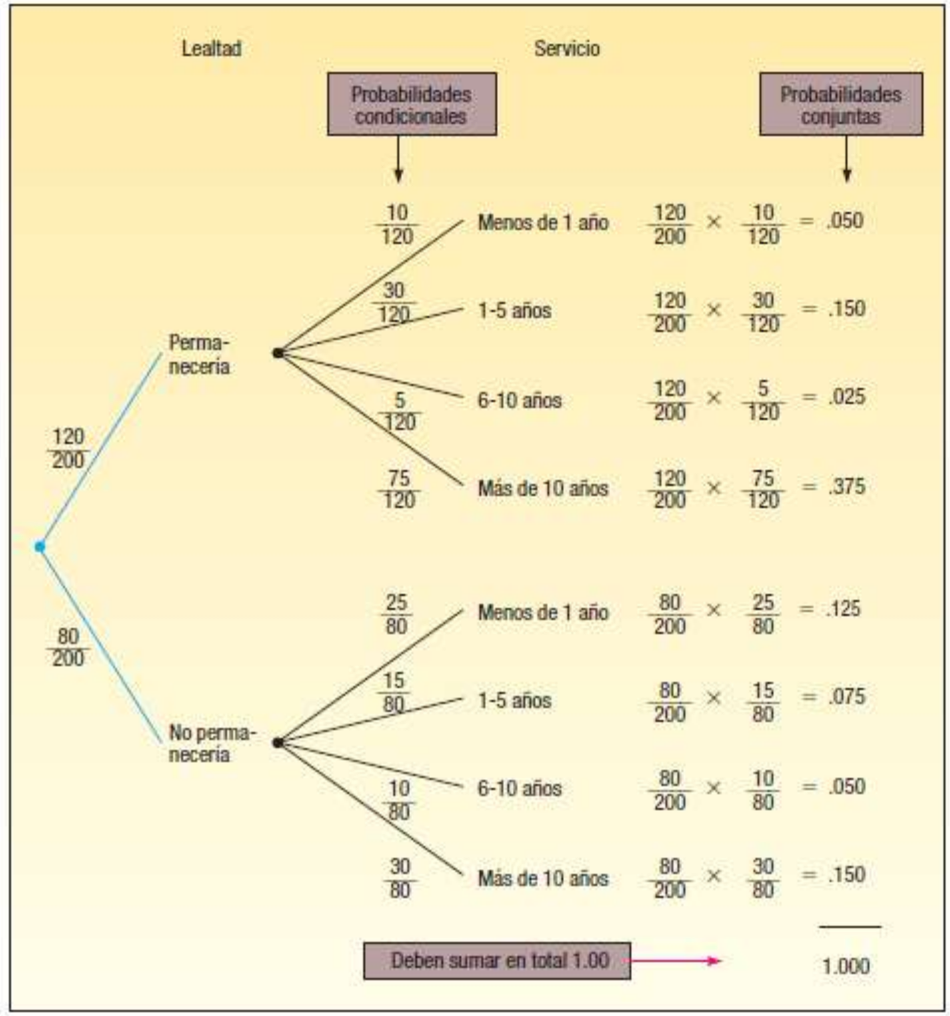
5.6 Diagramas de árbol

El **diagrama de árbol** es una gráfica útil para organizar cálculos que implican varias etapas. Cada segmento del árbol constituye una etapa del problema. Las ramas del árbol se ponderan por medio de probabilidades. Utilizaremos los datos de la tabla 5-1 para mostrar la construcción de un diagrama de árbol.

1. Para construir un diagrama de árbol, comenzamos dibujando un punto grueso a la izquierda para representar la raíz del árbol (vea gráfica 5-2).
2. En este problema, dos ramas principales salen de la raíz: la rama superior representa el evento "permanecería" y la rama inferior el evento "no permanecería". Sus probabilidades se anotan sobre las ramas, en este caso, 120/200 y 80/200. Estas probabilidades también se denotan $P(A_1)$ y $P(A_2)$.
3. De cada una de las ramas principales *salen* cuatro ramas, las cuales representan el tiempo de servicio: menos de 1 año, 1 a 5 años, 6 a 10 años y más de 10 años. Las probabilidades condicionales de la rama superior del árbol, 10/120, 30/120, 5/120, etc., se anotan en las ramas adecuadas, que son $P(B_1|A_1)$, $P(B_2|A_1)$, $P(B_3|A_1)$ y $P(B_4|A_1)$, en las cuales B_1 se refiere a menos de 1 año de servicio; B_2, a 1 a 5 años de servicio, B_3, a 6 a 10 años de servicio y B_4, a más de 10 años. En seguida, anotamos las probabilidades condicionales en la rama inferior.
4. Por último, las probabilidades conjuntas relativas al hecho de que los eventos A_1 y B_i o los eventos A_2 y B_i ocurrirán al mismo tiempo aparecen al lado derecho. Por ejemplo, de acuerdo con la fórmula (5-6), la probabilidad conjunta de seleccionar al azar a un ejecutivo que permanecería en la compañía y que tenga más de 1 año de servicio es:

$$P(A_1 \text{ y } B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1) = \left(\frac{120}{200}\right)\left(\frac{10}{120}\right) = 0.05$$

Como las probabilidades conjuntas representan todos los posibles resultados (permanecería, 6 a 10 años de servicio, no permanecería, más de 10 años de servicio, etc.), deben sumar 1.00 (vea gráfica 5-2).



GRÁFICA 5-2 Diagrama de árbol que muestra la lealtad y los años de servicio

5.7 Teorema de Bayes

En el siglo XVIII, el reverendo Thomas Bayes, un ministro presbiteriano inglés, planteó esta pregunta: ¿Dios realmente existe? Dado su interés en las matemáticas, intentó crear una fórmula para llegar a la probabilidad de que Dios existiera sobre la base de la evidencia de que disponía en la Tierra. Más tarde, Pierre-Simon Laplace perfeccionó el trabajo de Bayes y le dio el nombre de teorema de Bayes. De una forma entendible, el **teorema de Bayes** es el siguiente:

TEOREMA DE BAYES $$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} \quad \text{(5-7)}$$

En la fórmula (5-7) los eventos A_1 y A_2 son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, y A_i se refiere al evento A_1 o a A_2. De ahí que en este caso A_1 y A_2 sean complementos. El significado de los símbolos utilizados se ilustra en el siguiente ejemplo.

Suponga que 5% de la población de Umen, un país ficticio del Tercer mundo, tiene una enfermedad propia del país. Sea A_1 el evento "padece la enfermedad" y A_2 el evento "no padece la enfermedad". Por lo tanto, si selecciona al azar a una persona de Umen, la probabilidad de que el individuo elegido padezca la enfermedad es de 0.05 o $P(A_1) = 0.05$. Esta probabilidad, $P(A_1) = P$(padece la enfermedad) $= 0.05$, recibe el nombre de **probabilidad *a priori***. Se le da este nombre, porque la probabilidad se asigna antes de obtener los datos empíricos.

PROBABILIDAD *A PRIORI* Probabilidad basada en el nivel de información actual.

Por ende, la probabilidad *a priori* de que una persona no padezca la enfermedad es de 0.95, o $P(A_2) = 0.95$, que se calcula restando $1 - 0.05$.

Existe una técnica de diagnóstico para detectar la enfermedad, pero no es muy precisa. Sea B el evento "la prueba revela la presencia de la enfermedad". Suponga que la evidencia histórica muestra que si una persona padece realmente la enfermedad, la probabilidad de que la prueba indique su presencia es de 0.90. De acuerdo con las definiciones de probabilidad condicional que se establecieron en el capítulo, dicho enunciado se expresa de la siguiente manera:

$$P(B|A_1) = .90$$

Suponga la probabilidad de que la prueba indique la presencia de la enfermedad en una persona que en realidad no la padece es de 0.15.

$$P(B|A_2) = .15$$

Elija al azar a una persona de Umen y aplique la prueba. Los resultados indican que la enfermedad está presente. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona en realidad padezca la enfermedad? Lo que desea saber, en forma simbólica, es $P(A_1|B)$, que se interpreta de la siguiente manera: P(padece la enfermedad | la prueba resulta positiva). La probabilidad $P(A_1|B)$ recibe el nombre de **probabilidad *a posteriori***.

PROBABILIDAD *A POSTERIORI* Probabilidad revisada a partir de información adicional.

Con la ayuda del teorema de Bayes, fórmula (5-7), determine la probabilidad *a posteriori*:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$
$$= \frac{(.05)(.90)}{(.05)(.90) + (.95)(.15)} = \frac{.0450}{.1875} = .24$$

De esta forma, la probabilidad de que una persona padezca la enfermedad, dado que la prueba fue positiva, es de 0.24. ¿Cómo interpreta el resultado? Si selecciona al azar a una persona de la población, la probabilidad de que se encuentre enferma es de 0.05. Si se le somete a la prueba y resulta positiva, la probabilidad de que la persona padezca realmente la enfermedad se incrementa cinco veces, de 0.05 a 0.24.

En el problema anterior sólo había dos eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos A_1 y A_2. Si hay n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, el teorema de Bayes, fórmula (5-7), se transforma en

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

Con la notación anterior, los cálculos del problema de Umen se resumen en la siguiente tabla:

Evento, A_i	Probabilidad *a priori*, $P(A_i)$	Probabilidad condicional, $P(B\|A_i)$	Probabilidad conjunta, $P(A_i$ y $B)$	Probabilidad *a posteriori*, $P(A_i\|B)$
Padece la enfermedad, A_1	.05	.90	.0450	.0450/.1875 = .24
No padece la enfermedad, A_2	.95	.15	.1425	.1425/.1875 = .76
			$P(B)$ = .1875	1.00

5.8 Principios de conteo

Si la cantidad de posibles resultados de un experimento es pequeña, resulta relativamente fácil contarlas. Por ejemplo, existen seis posibles resultados del lanzamiento de un dado, a saber:

Sin embargo, si hay un número muy grande de resultados, tal como el número de caras y cruces en un experimento con 10 lanzamientos de una moneda, sería tedioso contar todas las posibilidades. Todos podrían ser caras, una cruz y nueve caras, dos caras y ocho cruces, y así sucesivamente. Para facilitar la cuenta, se analizarán tres fórmulas para contar: la **fórmula de la multiplicación** (no se confunda con la *regla* de la multiplicación descrita en el capítulo), la **fórmula de las permutaciones** y la **fórmula de las combinaciones.**

Fórmula de la multiplicación

Primero la fórmula de la multiplicación.

FÓRMULA DE LA MULTIPLICACIÓN Si hay m formas de hacer una cosa y n formas de hacer otra cosa, hay $m \times n$ formas de hacer ambas cosas.

En términos de la fórmula:

FÓRMULA DE LA MULTIPLICACIÓN Número total de disposiciones $= (m)(n)$ **(5-8)**

Esta fórmula se puede extender a más de dos eventos. En el caso de tres eventos m, n y o:

$$\text{Número total de disposiciones} = (m)(n)(o)$$

Un distribuidor de automóviles quiere anunciar que por $29 999 usted puede comprar un convertible, un sedán de dos puertas o un modelo de cuatro puertas y elegir entre rines de rayos o planos. ¿Cuántas disposiciones de modelos y rines puede ofrecer el distribuidor?

Por supuesto, el distribuidor podría determinar el número total de disposiciones haciendo un diagrama y contando. Hay seis.

Mediante la fórmula de la multiplicación se verifica el resultado (en cuyo caso m es el número de modelos y n el tipo de rin). De acuerdo con la fórmula (5-8):

$$\text{Número total de posibles disposiciones} = (m)(n) = (3)(2) = 6$$

No resultó difícil contar todas las posibles combinaciones de modelos y rines en este ejemplo. Sin embargo, supongamos que el distribuidor decidió ofrecer ocho modelos y seis tipos de rines. Resultaría tedioso representar y contar todas las posibles alternativas. Más bien, se puede aplicar la fórmula de la multiplicación. En este caso, hay $(m)(n) = (8)(6) = 48$ posibles disposiciones.

Observe en el ejemplo que, en la fórmula de la multiplicación, había *dos o más agrupamientos de los cuales usted hizo selecciones.* El distribuidor, por ejemplo, ofreció una variedad de modelos y de rines para elegir. Si un constructor de casas le ofrece cuatro diferentes estilos de exteriores y tres modelos de interiores, se aplicaría la fórmula de la multiplicación para determinar cuántas combinaciones son posibles. Hay 12 posibilidades.

Fórmula de las permutaciones

Como se ve, la fórmula de la multiplicación se aplica para determinar el número de posibles disposiciones de dos o más grupos. La **fórmula de las permutaciones** se aplica para determinar el número posible de disposiciones cuando sólo hay *un grupo* de objetos. He aquí algunos ejemplos de esta clase de problemas.

- Tres piezas electrónicas se van a montar en una unidad conectable a un aparato de televisión. Las piezas se pueden montar en cualquier orden. La pregunta es: ¿de cuántas formas pueden montarse tres partes?
- Un operador de máquinas debe llevar a cabo cuatro verificaciones de seguridad antes de hacer arrancar su máquina. No importa el orden en que realice las verificaciones. ¿De cuántas formas puede hacerlas?

Un orden para el primer ejemplo sería: primero el transistor, en seguida las LED y en tercer lugar el sintetizador. A esta distribución se le conoce como **permutación**.

PERMUTACIÓN Cualquier distribución de r objetos seleccionados de un solo grupo de n posibles objetos.

Observe que las distribuciones *a b c* y *b a c* son permutaciones diferentes. La fórmula para contar el número total de diferentes permutaciones es:

FÓRMULA DE LAS PERMUTACIONES $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (5\text{-}9)$$

donde:

n representa el total de objetos;
r representa el total de objetos seleccionados.

Antes de resolver los dos problemas planteados, note que en las permutaciones y las combinaciones (que se plantean en breve) se emplea la notación denominada *n factorial*. Ésta se representa como $n!$ y significa el producto de $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(1)$. Por ejemplo, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Respecto del grupo de tres piezas electrónicas que se van a montar en cualquier orden, ¿de cuántas formas se pueden montar?

Hay tres piezas electrónicas que van a montarse, así que $n = 3$. Como las tres se van a insertar en la unidad conectable, $r = 3$. De acuerdo con la fórmula (5-9), el resultado es:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 6$$

Podemos verificar el número de permutaciones que obtuvimos con la fórmula de las permutaciones. Determinamos cuántos *espacios* hay que llenar y las posibilidades para cada *espacio*. En el problema de las tres piezas electrónicas, hay tres lugares en la unidad conectable para las tres piezas. Hay tres posibilidades para el primer lugar, dos para el segundo (una se ha agotado) y una para el tercero:

$$(3)(2)(1) = 6 \text{ permutaciones}$$

Las seis formas en que las tres piezas electrónicas, representadas con las letras *A*, *B*, *C*, se pueden ordenar, es:

ABC	*BAC*	*CAB*	*ACB*	*BCA*	*CBA*

En el ejemplo anterior, seleccionamos y distribuimos todos los objetos, es decir que $n = r$. En muchos casos, sólo se seleccionan algunos objetos y se ordenan tomándolos de entre los n posibles objetos. En el siguiente ejemplo explicamos los detalles de este caso.

Betts Machine Shop, Inc., cuenta con ocho tornos, aunque sólo hay tres espacios disponibles en el área de producción para las máquinas. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las ocho máquinas en los tres espacios disponibles?

Hay ocho posibilidades para el primer espacio disponible en el área de producción, siete para el segundo espacio (una se ha agotado) y seis para el tercer espacio. Por consiguiente:

$$(8)(7)(6) = 336,$$

es decir, hay un total de 336 diferentes distribuciones posibles. Este resultado también podría obtenerse aplicando la fórmula (5-9). Si $n = 8$ máquinas y $r = 3$ espacios disponibles, la fórmula da como resultado

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{(8)(7)(6)\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336$$

Fórmula de las combinaciones

Si el orden de los objetos seleccionados *no* es importante, cualquier selección se denomina **combinación**. La fórmula para contar el número de *r* combinaciones de objetos de un conjunto de *n* objetos es:

FÓRMULA DE LAS COMBINACIONES $${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \textbf{(5-10)}$$

Por ejemplo, si los ejecutivos Able, Baker y Chauncy van a ser elegidos para formar un comité de negociación de una fusión, sólo existe una posible combinación con estos tres ejecutivos; el comité formado por Able, Baker y Chauncy es el mismo comité que el que forman Baker, Chauncy y Able. De acuerdo con la fórmula de las combinaciones:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1(1)} = 1$$

Se ha dado al departamento de marketing la tarea de designar códigos de colores a las 42 diferentes líneas de discos compactos que vende Goody Records. Tres colores se van a utilizar para cada CD; ahora bien, una combinación de tres colores para un CD no se puede reordenar para identificar un CD diferente. Esto significa que si se utilizaron el verde, amarillo y violeta para identificar una línea, entonces el amarillo, verde y violeta (o cualquier otra combinación de estos tres colores) no se puede emplear para identificar otra línea. ¿Serían adecuados siete colores tomados de tres en tres para codificar las 42 líneas?

De acuerdo con la fórmula (5-10), hay 35 combinaciones, que se determinan mediante

$${}_7C_3 = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Los siete colores tomados de tres en tres (es decir, tres colores para una línea) no serían adecuados para codificar las 42 líneas, ya que sólo proporcionarían 35 combinaciones. Ocho colores tomados de tres en tres darían 56 combinaciones. Esto sería más que suficiente para codificar las 42 diferentes líneas.