Integrales de Variable Compleja

Prof. Gerson Barazarte

Teorema

TEOREMA DE TAYLOR *Sea $f(z)$ analítica dentro y sobre una curva cerrada simple C. Sean a y $a+h$ dos puntos dentro de C. Entonces*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + \cdots$$

o escribiendo $z = a + h,\ h = z - a$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a)\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^(n)(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$

Este es el llamado teorema de Taylor. La región de convergencia de la serie está dada por $|z-a| < R$, donde el radio de convergencia R es la distancia desde a a la singularidad más próxima de la función $f(z)$ Sobre $|z-a| = R$, la serie puede converger o no. Para $|z-a| > R$, la serie diverge. Si $a = 0$, la serie que resulta se llama una serie de Maclaurin.

SERIES EN EL CAMPO COMPLEJO

SERIE DE TAYLOR, MACLAURIN

Teorema

TEOREMA DE TAYLOR *Sea $f(z)$ analítica dentro y sobre una curva cerrada simple C. Sean a y $a+h$ dos puntos dentro de C. Entonces*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + \cdots$$

o escribiendo $z = a+h, \; h = z-a$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a)\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^(n)(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$

Este es el llamado teorema de Taylor. La región de convergencia de la serie está dada por $|z-a| < R$, donde el radio de convergencia R es la distancia desde a a la singularidad más próxima de la función $f(z)$ Sobre $|z-a| = R$, la serie puede converger o no. Para $|z-a| > R$, la serie diverge. Si $a = 0$, la serie que resulta se llama una serie de Maclaurin.

SERIES EN EL CAMPO COMPLEJO

SERIE DE LAURENT

Teorema

TEOREMA DE LAURENT *Sean C_1 y C_2 círculos concéntricos de radios R_1 y R_2 respectivamente y centro en a. Suponga que $f(z)$ es unívoca y analítica sobre C_1 y C_2 en la región sombreada R (también llamada anillo) entre C_1 y C_2. Sea $a+h$ un punto en R. Entonces tenemos*

$$\begin{aligned} f(a+h) = & \quad a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots \\ & + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \cdots \\ donde \quad a_n = & \quad \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \\ a_{-n} = & \quad \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} (z-a)^{n-1} f(z) dz \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \end{aligned}$$

C_1 y C_2 se recorren en la dirección positiva respecto a sus interiores. La parte $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$ se llama la parte analítica de la serie de laurent, mientras que el resto de la serie que consiste de las potencias negatias de $(z-a)$ se llama la parte principal. Si la parte principal es cero, la serie de Laurent se reduce a la serie de Taylor.

CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

1. **Polos**. Si $f(z)$ la parte principal tiene solamente un número finito de términos dados por

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{a_{n1}}{(z-a)^n}$$

donde $a_{-n}\neq 0$, entonces $z=a$ se llama un polo de orden n. Si $n=1$, se llama un polo simple.

2. **Singularidades evitables.** Si una función unívoca $f(z)$ no está definida en $z=a$ pero

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

existe, entonces $z=a$ es una singularidad evitable. En tal caso definimos $f(z)$ en $z=a$ como igual al

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

3. **Singularidades esenciales.** Si $f(z)$ es unívoca, entonces cualquier singularidad que no es ni un polo ni una singularidad evitable se llama una singularidad esencial. Si $z=a$ es una singularidad esencial de $f(z)$, la parte principal del desarrollo de Laurent tiene infinitos términos.

CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

1. **Polos**. Si $f(z)$ la parte principal tiene solamente un número finito de términos dados por

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{a_{n1}}{(z-a)^n}$$

donde $a_{-n}\neq 0$, entonces $z=a$ se llama un polo de orden n. Si $n=1$, se llama un polo simple.

2. **Singularidades evitables.** Si una función unívoca $f(z)$ no está definida en $z=a$ pero

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

existe, entonces $z=a$ es una singularidad evitable. En tal caso definimos $f(z)$ en $z=a$ como igual al

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

3. **Singularidades esenciales.** Si $f(z)$ es unívoca, entonces cualquier singularidad que no es ni un polo ni una singularidad evitable se llama una singularidad esencial. Si $z=a$ es una singularidad esencial de $f(z)$, la parte principal del desarrollo de Laurent tiene infinitos términos.

CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

1. **Puntos de ramificación**. Un punto $z = z_0$ se llama un punto de ramificación de la función multívoca $f(z)$ si las ramas de $f(z)$ se intercambian cuando z describe un camino cerrado alrededor de z_0. Puesto que cada una de las ramas de una función multívoca es analítica. todos los teoremas para funciones analíticas, en particular el teorema de Taylor.

2. **Singularidades en el infinito.** Haciendo $z = \dfrac{1}{w}$ en $f(z)$, obtenemos la función $f(1/w) = F(w)$. Entonces la singularidad en $z = \infty$ (el punto en el infinito) está definida como la misma de $F(w)$ en $w = 0$.

RESIDUOS

RESIDUOS

Residuos

Sea $f(z)$ unívoca y analítica dentro y sobre el círculo C excepto en su centro, el punto $z = a$. Entonces, $f(z)$ tiene una serie de Laurent en torno a $z = a$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

CALCULO DE RESIDUOS

CALCULO DE RESIDUOS

Calculo de residuos

En elm caso $z = a$ es un polo de orden k existe una fórmula simple para a_{-1} dada por

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z)$$

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

Sea $f(z)$ unívoca y analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C excepto en las singularidades $a, b, c, \ldots$ interiores a C con residuos dados por $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots$. Entonces el teorema del residuo dice que

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi j(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots)$$