Hoja de Ejercicios 5. Intervalos de confianza: media y varianza.

1. Distribución t de Student.

1. Sea T una variable aleatoria de tipo t de Student, con $k = 15$ grados de libertad. Calcular:
   (a) Valor de t tal que $P(T \leq t) = 0.95$.
   (b) Valor de t tal que $P(T \geq t) = 0.025$.
   (c) Valor de t tal que $P(T \leq t) = 0.05$.
   (d) Valor de t tal que $P(T \geq t) = 0.975$.
   (e) $P(T \geq 2.602)$
   (f) $P(T \leq -1.341)$
   (g) $P(-1.753 \leq T \leq 1.753)$
   (h) Valor de t tal que $P(-t \leq T \leq t) = 0.95$.
   (i) Valor de t tal que $P(-t \leq T \leq t) = 0.93$.

2. Intervalos de confianza para la media.

2. Las medias de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamientos producidas en una máquina en una semana dieron una media de 0.824cm y una desviación típica de 0.042cm. Hallar intervalos de confianza al (a) 95 %, (b) 99 %,(c) 98 % y(d) 99.73 %. Ordena esos intervalos por su anchura.

3. De una cierta población se ha extraído una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$, resultando $\bar{x} = 35$ y $s = 3$. Calcular un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

4. Se obtuvo una muestra de 1000 individuos adultos aparentemente sanos con el fin de establecer un patrón con respecto a lo que se considera un nivel normal de calcio en sangre. Se extrajo una muestra de sangre de cada uno de los individuos. La variable X del estudio es el número de miligramos de calcio por decilitro de sangre. Se obtuvo una media muestral de 9.5 y una desviación típica de 0.5. Hallar un intervalo de confianza para μ_X al 95 %.

5. Las granjas de patos, alineadas en las orillas del Great South Bay, han contaminado seriamente el agua. Uno de los contaminantes es el nitrógeno en forma de ácido úrico. La siguiente es una muestra aleatoria de nueve observaciones de X, número de libras de nitrógeno producidas por granja y día:

   4.9 5.8 5.9 6.5 5.5 5.0 5.6 6.0 5.7

   Suponiendo que X es normal, construir un intervalo de confianza al 99 % para μ_X.

6. Al medir el tiempo de reacción en un grupo de individuos, un psicólogo estima que la desviación típica es 0.05 segundos. ¿De qué tamaño ha de tomarse una muestra de medidas para tener una confianza del (a) 95 % y (b) 99 % de que el error no supera los 0.01 segundos?

7. Una muestra aleatoria (con $n = 144$) extraída de una población normal de varianza igual a 100 presenta una media muestral igual a 160. Se pide (a) calcular un intervalo al 95 % de confianza para la media poblacional, (b) calcular un intervalo al 90 % de confianza para la media poblacional, (c) si se quiere tener una confianza al 95 % de que la estimación se encuentra a una distancia de ± 1.2cm de la verdadera media poblacional, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?

8. Se quiere conocer la permanencia media de pacientes en un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se obtienen datos referidos a la estancia (expresada en días) de 800 pacientes, con estos resultados:

   $$\bar{x} = 8.1 \text{ días}, \; s = 9 \text{ días}$$

   Obtener un intervalo de confianza al 95 % para la estancia media.

3. Distribución χ^2.

9. Sea Y una variable aleatoria de tipo χ^2_9 (con $k = 9$ grados de libertad). Calcular:
   (a) $P(Y \leq 2.09)$
   (b) $P(Y \geq 11.4)$
   (c) $P(14.7 \leq Y \leq 16.9)$
   (d) Valor de y tal que $P(Y \geq y) = 0.05$.
   (e) Valor de y tal que $P(Y \leq y) = 0.01$.
   (f) Valores y_1, y_2 tales que $P(y_1 \leq Y \leq y_2) = 0.90$ y además $P(Y \leq y_1) = P(Y \geq y_2)$.

4. Intervalos de confianza para la varianza.

10. En los inviernos rigurosos se usa sal para quitar el hielo de las carreteras. Para hallar la cantidad aproximada de sal que se está introduciendo en el medio ambiente por esta causa se realizó un estudio en Nueva Inglaterra. Se obtuvieron las siguientes observaciones sobre la variable aleatoria X, número de toneladas métricas de sal utilizadas sobre las carreteras por semana, en distritos aleatoriamente seleccionados a lo largo de la región:

    3900, 3875, 3820, 3860, 3840, 3852, 3800, 3825, 3790.

    Suponiendo que X está normalmente distribuida, se pide:
    (a) Establecer un intervalo de confianza al 90 % para μ_X, la media de X.
    (b) Establecer un intervalo de confianza al 90 % para σ_X^2 y σ_X.

11. Una agencia de alquiler de automóviles necesita estimar el número medio de kilómetros diarios que realiza su flota de automóviles; a tal fin, a lo largo de varios días, se anotan los recorridos de cien vehículos de su flota y obtiene que la media muestral es de 165km/día y que la cuasidesviación muestral es 6km/día. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para la varianza de dicha distribución.

12. Se ha obtenido una muestra de tamaño $n = 10$ de una población normal, resultando la media y cuasidesviación típica muestrales iguales a $\bar{X} = 35$ y $s = 3$. Hallar intervalos de confianza al 95 % para la media y la varianza poblacionales.

13. En un muestreo aleatorio realizado en una población normal se han obtenido los resultados de la tabla que aparece más abajo. Calcúlense intervalos de confianza al 90 % para la media y varianza poblacionales.

Intervalo	frecuencia
2220-2225	1
2225-2230	3
2230-2235	4
2235-2240	2

14. El tiempo que permanece conectado a lo largo del día determinado equipo informático es una variable aleatoria con distribución normal de media 5.2 horas. Observados 10 días al azar se obtuvieron los siguientes tiempos de conexión del equipo:

    6, 3.4, 5.6, 6.3, 6.4, 5.3, 5.4, 5, 5.2, 5.5.

    Obtener un intervalo de confianza al 95 % para la varianza de dicha variable.

Respuestas

1. (a) 1.75305, (b) 2.13145, (c) -1.75305 (¿ves la relación con (a)?), (d) -2.13145 (¿ves la relación con (b)?), (e) 0.01001, (f) 0.099937, (g) 0.89999, (h) 2.13145 (¿ves la relación con (b)?),(i) 1.95094.
2. (a) 0.824 ± 0.006cm. (b) 0.824 ± 0.008cm. (c) 0.824 ± 0.0069cm. (d) 0.824 ± 0.0089cm. Observa que, para la misma muestra, a mayor nivel de confianza, mayor es la anchura del intervalo.
3. El intervalo es $(32.738, 37.262)$.

4. 9.5 ± 0.031.
5. El intervalo es $(5.11, 6.21)$.
6. (a) $N \geq 97$ (b) $N \geq 167$.
7. (a) $(158.37, 161.63)$, (b) $(158.63, 161.37)$, (c) 123 adicionales (total $267 = 144 + 123$).
8. El intervalo es $(7.48, 8.72)$.
9. (a) 0.01 (b) 0.25 (c) 0.05 (d) 16.9 (e) 2.09 (f) $y_1 = 3.33$, $y_2 = 16.9$.
10. (a) (3818.2, 3862.2) (b) (650.89, 3693.71) para la varianza y (25.51, 60.78) para la desviación típica.
11. (28.92, 46.26).
12. (32.85, 37.14) para la media, y (4.26, 29.997) para la varianza.
13. $(2228, 26,\ 2233, 74)$ para la media, y (11.98, 60.81) para la varianza.
14. (0.338, 2.381).

Varios de estos problemas han sido tomados o adaptados de:
(1) *Métodos estadísticos, C.Físicas*, V.Novo. UNED.
(2) *Curso y ejercicios de estadística, 2a. ed.*. V.Quesada, A.Isidoro, L.A.López. Ed. Alhambra (1984).
(3) *Estadística para Biología y Ciencias de la Salud, 3a. ed.*. J.S.Milton. Ed. McGraw-Hill Iberoamericana (2001).
(4) *Estadística (Serie Schaum) 4ª edición*, M.Spiegel. Ed. MacGraw-Hill. Isbn: 9789701068878.
(5) *Estadística básica con R y R-Commander.* A.J.Arriaza,F.Fernández,M.A.López,M.Muñoz,S.Pérez,A.Sánchez. Ed. Universidad de Cádiz (2008).
(6) *Estadística aplicada, 1a. ed.*. J. de la Horra. Ed. Díaz de Santos (1995).