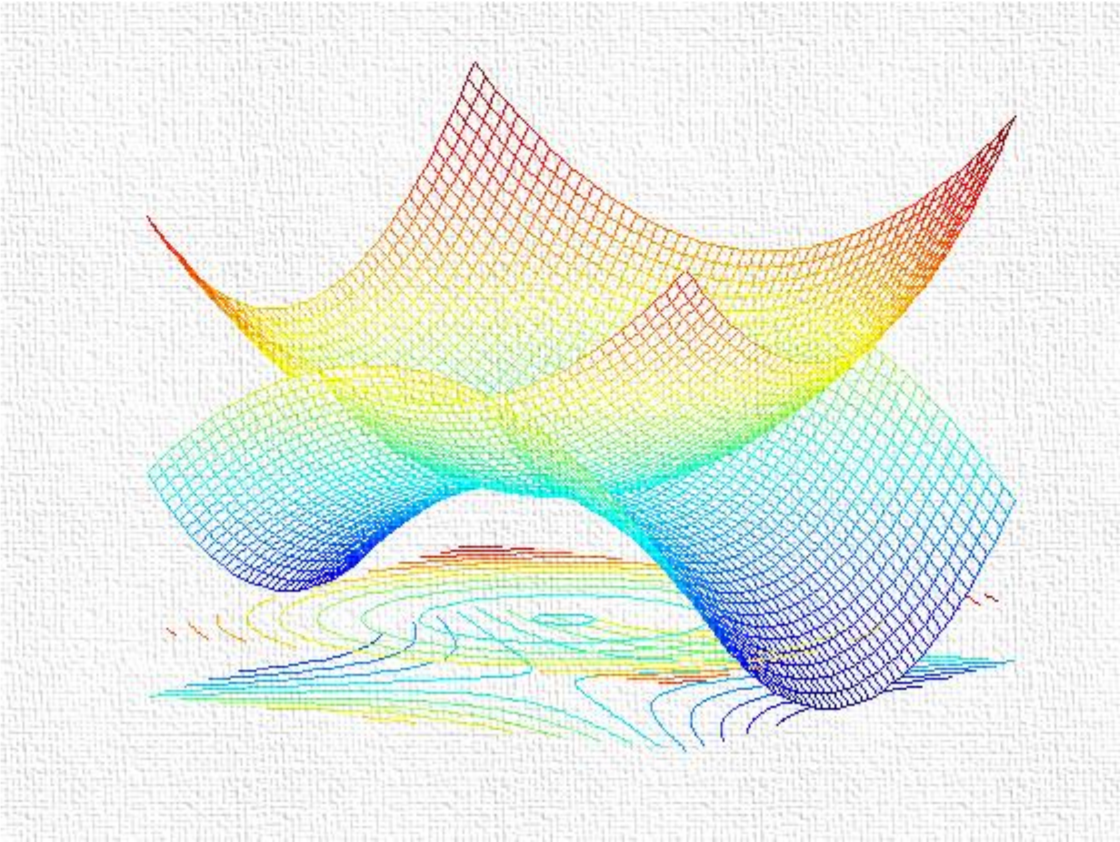
Curso de métodos numéricos



Tema 3. Interpolación y aproximación polinomial

Profa. Blanca Guillén

Agenda

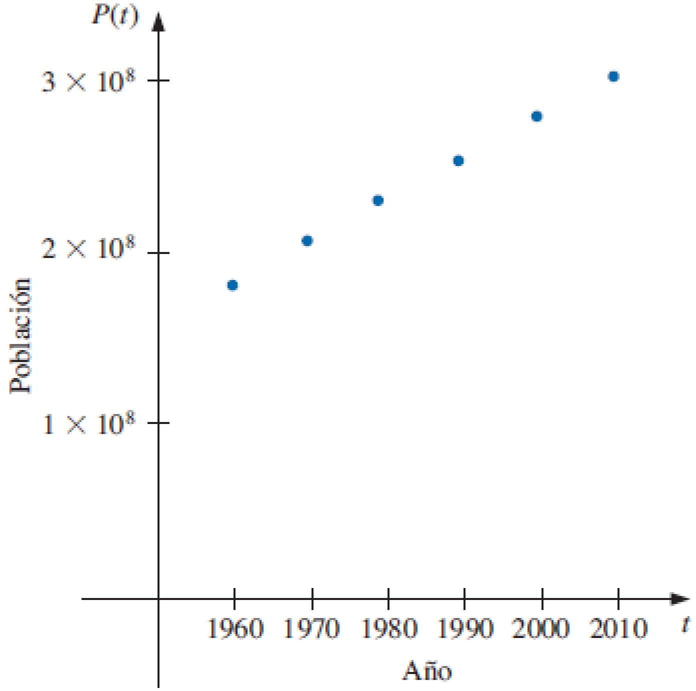
- Introducción al problema de interpolación polinomial
- Métodos de interpolación polinomial:
  - ✓ Método de Lagrange
  - ✓ Método de Newton
- Aproximación mediante mínimos cuadrados:
  - ✓ Regresión lineal
  - ✓ Regresión polinomial
  - ✓ Regresión exponencial y potencial

Interpolación – Introducción (Burden 10ª Ed. Pag 77)

Introducción

Se realiza un censo de la población de Estados Unidos cada 10 años. La siguiente tabla muestra la población, en miles de personas, desde 1960 hasta 2010, y los datos también se representan en la figura.

Año	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Población (en miles)	179 323	203 302	226 542	249 633	281 422	308 746



Al revisar estos datos, podríamos preguntar si se podrían usar para efectuar un cálculo razonable de la población, digamos, en 1975 o incluso en el año 2020. Las predicciones de este tipo pueden obtenerse por medio de una función que se ajuste a los datos proporcionados. Este proceso recibe el nombre de *interpolación* y es el tema de este capítulo. Este problema de población se considera a lo largo del capítulo y en los ejercicios 19 de la sección 3.1, 17 de la sección 3.3 y 24 de la sección 3.5.

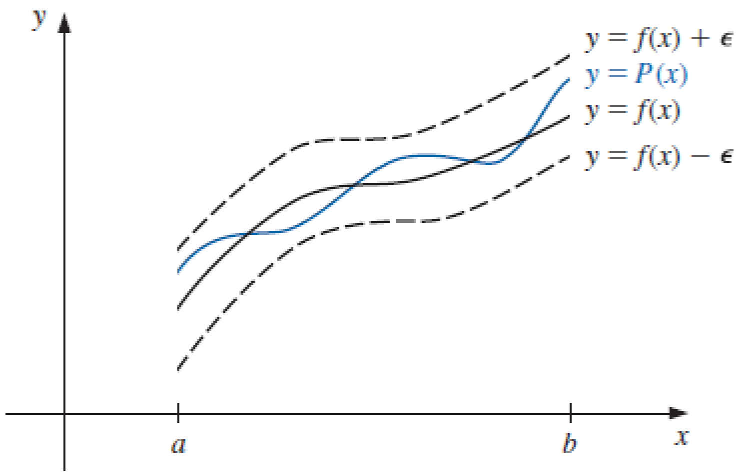
Fundamento de la interpolación polinomial

Interpolación polinomial (Burden 10ª Ed. Pag. 78)

Una de las clases más útiles y conocidas de funciones que mapean el conjunto de números reales en sí mismo son los *polinomios algebraicos*, el conjunto de funciones de la forma

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero positivo y $a_0, \ldots, a_n$ son constantes reales. Una razón de su importancia es que se aproximan de manera uniforme a las funciones continuas. Con esto queremos decir que dada una función, definida y continua sobre un intervalo cerrado y acotado, existe un polinomio que está tan "cerca" de la función dada como se desee. Este resultado se expresa con precisión en el teorema de aproximación de Weierstrass (consulte la figura 3.1).



(Teorema de aproximación de Weierstrass) (Burden 10ª Ed. Pag. 78)

Suponga que f está definida y es continua en $[a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$, con la propiedad de que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad \text{para todas las } x \text{ en } [a, b].$$ ■

La prueba de este teorema se puede encontrar en la mayoría de los textos básicos sobre análisis real (consulte, por ejemplo, [Bart], pp. 165–172).

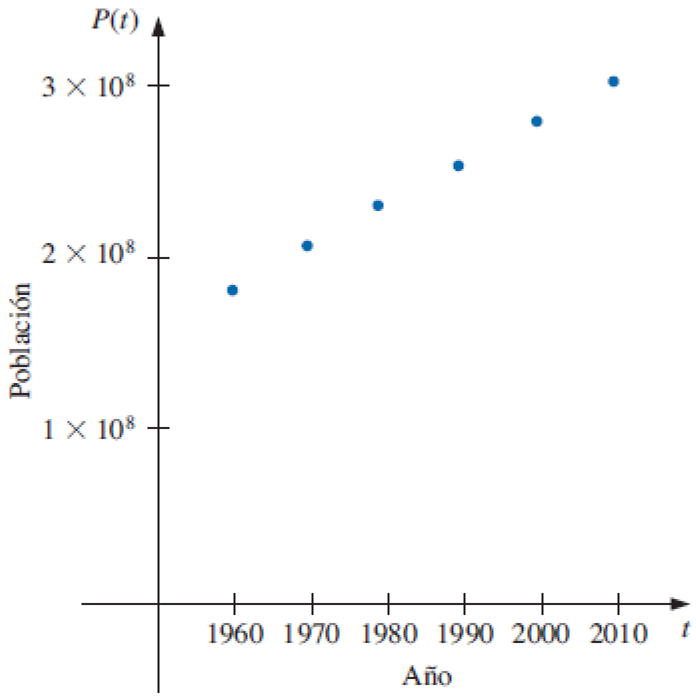
Otra razón importante para considerar la clase de polinomios en la aproximación de funciones es que la derivada y la integral indefinida de un polinomio son fáciles de determinar y también son polinomios. Por esta razón, a menudo se usan polinomios para aproximar funciones continuas.

Interpolación – Introducción (Burden 10ª Ed. Pag 77)

Introducción

Se realiza un censo de la población de Estados Unidos cada 10 años. La siguiente tabla muestra la población, en miles de personas, desde 1960 hasta 2010, y los datos también se representan en la figura.

Año	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Población (en miles)	179 323	203 302	226 542	249 633	281 422	308 746



Al revisar estos datos, podríamos preguntar si se podrían usar para efectuar un cálculo razonable de la población, digamos, en 1975 o incluso en el año 2020. Las predicciones de este tipo pueden obtenerse por medio de una función que se ajuste a los datos proporcionados. Este proceso recibe el nombre de *interpolación* y es el tema de este capítulo. Este problema de población se considera a lo largo del capítulo y en los ejercicios 19 de la sección 3.1, 17 de la sección 3.3 y 24 de la sección 3.5.

Problema a resolver: dado el conjunto de datos

$\{(1960,179323),(1970,203302),(1980,226542),\ldots$

$\ldots,(1990,249633),(2000,281422),(2010,308746)\}$

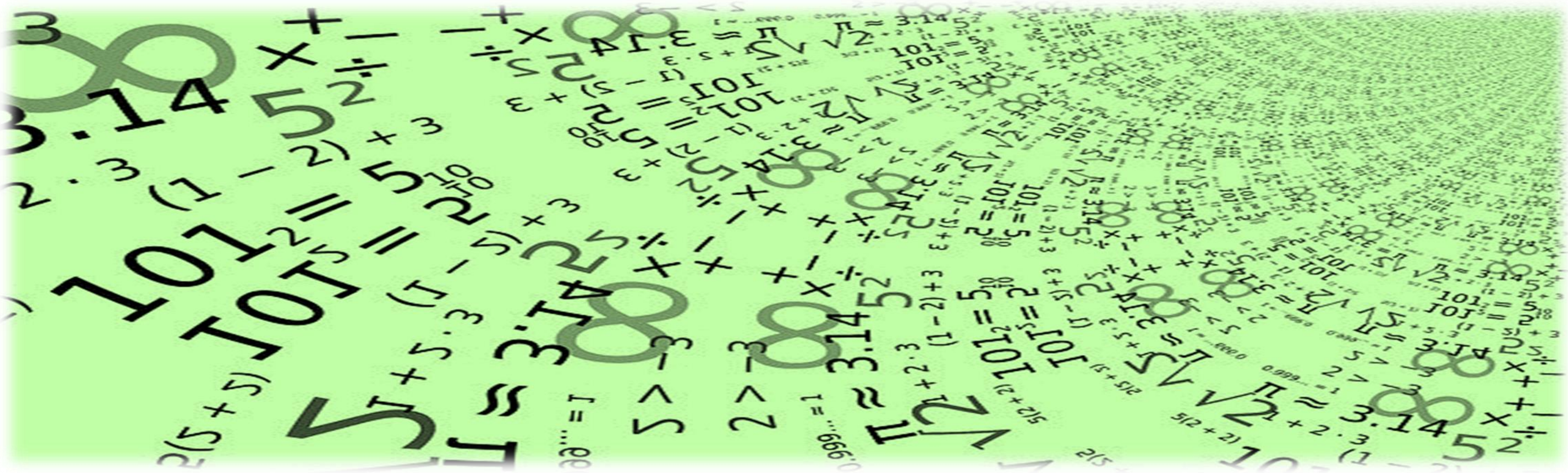
Hallar el polinomio de grado 5

$$Q(t)=a_5t^5+a_4t^4+a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$$

tal que:

$$Q(t_i)=P_i$$

($Q(t)$ interpola los puntos dados).



Interpolación de Lagrange

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Problema a resolver: dado el conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ hallar el polinomio de grado n que interpola los puntos dados.

En pocas palabras, el problema consiste en hallar los coeficientes del polinomio:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o,$$

tal que, $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 1{:}n+1$

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Problema a resolver: dado el conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ hallar el polinomio de grado n que interpola los puntos dados.

En pocas palabras, el problema consiste en hallar los coeficientes del polinomio:

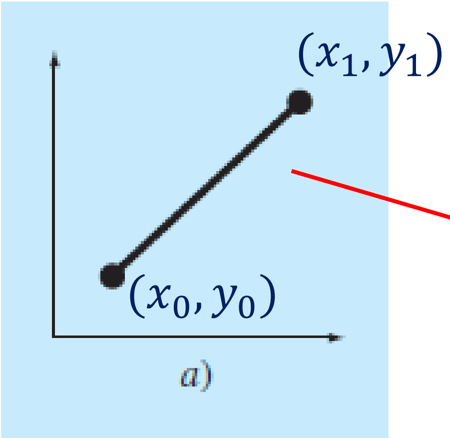
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o,$$

tal que, $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 1{:}n+1$

- ✓ El problema de encontrar un polinomio de grado n que pase por los puntos (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) es el mismo que el de aproximar una función f para la cual $f(x_0) = y_0$, …, $f(x_n) = y_n$.
- ✓ En lo que sigue supondremos que los puntos dados forman parte de la gráfica de una función que puede ser conocida o no.

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Interpolación polinomial (Fig. 18.1, Chapra 5ª ed., Pag. 503)



$$P_1(x) = a_1 x + a_0$$

$a_0 = ?$ $a_1 = ?$

a) Interpolación lineal: 2 puntos

Por ejemplo, el problema de encontrar un polinomio de grado 1 que pase por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es el mismo que el de aproximar una función f para la cual $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$. De modo que,

$$P_1(x) = a_1 x + a_0$$

Satisface las ecuaciones:

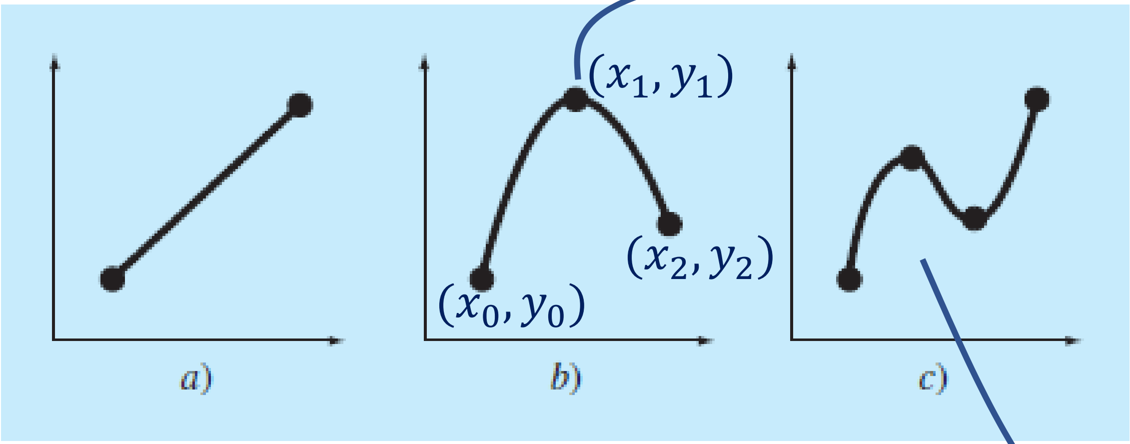
$$P_1(x_0) = a_1 x_0 + a_0 = y_0 = f(x_0)$$

$$P_1(x_1) = a_1 x_1 + a_0 = y_1 = f(x_1)$$

¿Cómo obtendría los coeficientes a_0 y a_1 de este polinomio?

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Interpolación polinomial (Fig. 18.1 Chapra 5ª ed. Pag. 503)



a) Interpolación lineal: 2 puntos

b) Interpolación cuadrática: 3 puntos

c) Interpolación cúbica: 4 puntos

Polinomio de interpolación que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$a_0 =?$ $a_1 =?$ $a_2 =?$

Polinomio de interpolación que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) :

$$P_2(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$a_0 =?$ $a_1 =?$ $a_2 =?$ $a_3 =?$

Formulación del polinomio de interpolación de Lagrange

El principio básico de la fórmula de Lagrange es el producto de factores.

Caso n=1. Dados dos puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, el polinomio de Lagrange de grado 1 se construye suponiendo que:

$$P_1(x) = a(x - x_0) + b(x - x_1)$$

Como P_1 interpola los puntos, entonces:

$$P_1(x_0) = a(x_0 - x_0) + b(x_0 - x_1) = f(x_0)$$

$$P_1(x_1) = a(x_1 - x_0) + b(x_1 - x_1) = f(x_1)$$

De donde resulta que,

$$a = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)}, \; b = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}$$

Al sustituir estos valores en P_1 y ordenar se obtiene el polinomio de Lagrange de grado 1 que interpola los puntos $(x_0, f(x_0))$, y $(x_1, f(x_1))$:

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

Formulación del polinomio de interpolación de Lagrange

El polinomio de Lagrange de grado 1 que interpola los puntos $(x_0, f(x_0))$, y $(x_1, f(x_1))$ viene dado por:

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

Ejemplo 1. Hallar el polinomio de Lagrange que interpola los puntos (2,4) y (5,1).

Solución. EL polinomio de Lagrange de grado 1 tiene la forma:

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

donde,

$$x_0 = 2, \qquad f(x_0) = 4,$$

$$x_1 = 5, \qquad f(x_1) = 1$$

Formulación del polinomio de interpolación de Lagrange

Ejemplo 1: Hallar el polinomio de Lagrange que interpola los puntos (2,4) y (5,1)

Solución: $x_0 = 2, x_1 = 5, y_0 = 4, y_1 = 1$

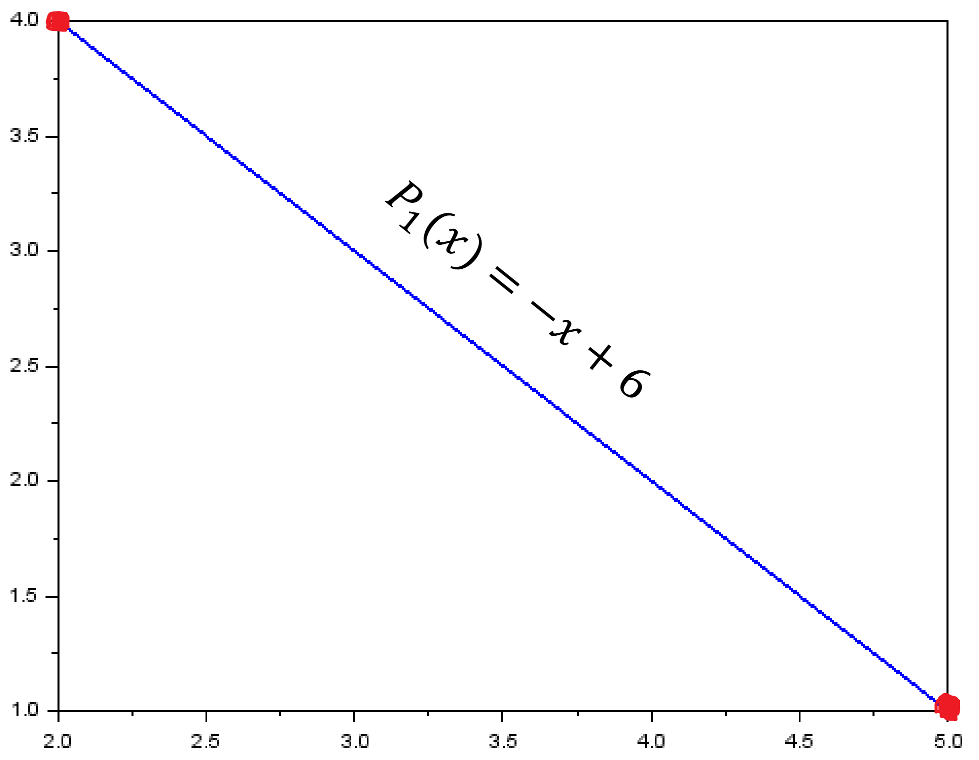
$$P_1(x) = \frac{(x-5)}{(2-5)}4 + \frac{(x-2)}{(5-2)}1$$

$$= -\tfrac{4}{3}(x-5) + \tfrac{1}{3}(x-2)$$

$$= -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{20}{3} - \frac{2}{3}$$

$$P_1(x) = -x + 6$$

Polinomio de Lagrange, ejemplo 1



$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)$$

Formulación del polinomio de interpolación de Lagrange

Caso n=2. Dados los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el **polinomio de Lagrange de grado 2** que interpola los puntos dados se define mediante:

$$P_2(x) = a(x - x_0)(x - x_1) + b(x - x_0)(x - x_2) + c(x - x_1)(x - x_2)$$

donde los coeficientes a, b y c se obtienen resolviendo las 'ecuaciones de interpolación':

$$P_2(x_0) = c(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = f(x_0), \qquad P_2(x_1) = b\,(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = f(x_1),$$

$$P_2(x_2) = a(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

Resolviendo y sustituyendo en la forma de Lagrange de P_2 resulta:

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Formulación del polinomio de interpolación de Lagrange

Ejemplo 2: Hallar el polinomio de Lagrange que interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en los nodos: $x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4$

Solución. Como $n = 2$ el polinomio de viene dado por la fórmula:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Al sustituir los datos en la fórmula de P_2 se obtiene.....

Ejercicio. Determinar el polinomio.

Formulación del polinomio de interpolación de Lagrange

¿Es posible generalizar la forma del polinomio de Lagrange P_2 para el caso en que se tienen $n+1$ puntos distintos? En pocas palabras, ¿qué forma tendrá $P_n(x)$?

Formulación del polinomio de interpolación de Lagrange

¿Es posible generalizar la forma del polinomio de Lagrange P_2 para el caso en que se tienen $n+1$ puntos distintos? En pocas palabras, ¿qué forma tendrá $P_n(x)$?

El polinomio de Lagrange:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Se puede escribir en forma compacta mediante la expresión:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} L_k(x) f(x_k)$$

con

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Formulación del polinomio de interpolación de Lagrange

¿Es posible generalizar la forma del polinomio de Lagrange P_2 para el caso en que se tienen $n+1$ puntos distintos? En pocas palabras, ¿qué forma tendrá $P_n(x)$?

El polinomio de Lagrange:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Se puede escribir en forma compacta mediante la expresión:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} L_k(x) f(x_k)$$

Caso: $\boldsymbol{n = 2}$

con

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Unicidad del polinomio de interpolación de Lagrange

El **polinomio de Lagrange de grado n** que interpola los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)),\ldots,(x_n, f(x_n))$ viene dado por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

donde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Unicidad del polinomio de interpolación de Lagrange

El **polinomio de Lagrange de grado n** que interpola los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ viene dado por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

donde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Teorema 3.2 (Burden, 10ª ed., pág. 82).

Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ números distintos y f es una función cuyos valores están determinados en esos números, entonces **existe un único polinomio** $P_n(x)$ de grado a lo sumo n con

$$f(x_k) = P_n(x_k), \qquad k = 0,1, \ldots, n$$

Error del polinomio de interpolación de Lagrange

El **polinomio de Lagrange de grado n** que interpola los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)),\ldots,(x_n, f(x_n))$ viene dado por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

donde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Teorema 3.3 (Burden, 10ª ed., pág. 83).

Suponga que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números distintos en el intervalo $[a,b]$ y $f \in C^{n+1}[a,b]$. Entonces, para cada x en $[a,b]$ existe un número $\xi(x)$ (generalmente no conocido) en (a,b) con

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n)$$

donde $P(x)$ es el polinomio de Lagrange.

Error=?

Error del polinomio de interpolación de Lagrange

El **polinomio de Lagrange de grado n** que interpola los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)),\ldots,(x_n, f(x_n))$ viene dado por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

donde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Teorema 3.3 (Burden, 10ª ed., pág. 83).

Suponga que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números distintos en el intervalo $[a,b]$ y $f \in C^{n+1}[a,b]$. Entonces, para cada x en $[a,b]$ existe un número $\xi(x)$ (generalmente no conocido) en (a,b) con

Término del Error

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Lagrange.

Error del polinomio de interpolación de Lagrange

El **polinomio de Lagrange de grado n** que interpola los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$,…,$(x_n, f(x_n))$ viene dado por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

donde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Teorema 3.3 (Burden, 10ª ed., pág. 83).

Suponga que $x_0, x_1, \dots, x_n$ son números distintos en el intervalo $[a,b]$ y $f \in C^{n+1}[a,b]$. Entonces, para cada x en $[a,b]$ existe un número $\xi(x)$ (generalmente no conocido) en (a,b) con

Término del Error

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Lagrange.

De aquí,

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

Error del polinomio de interpolación de Lagrange

El **polinomio de Lagrange de grado n** que interpola los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ viene dado por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

donde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

El error que se comete al aproximar la función $f(x)$ por el polinomio de Lagrange $P_n(x)$ es:

$$E(x) = f(x) - P_n(x)$$

Equivalentemente,

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(\xi(x)\big)}{(n+1)!}(x - x_0) \ldots (x - x_n)$$

Error del polinomio de interpolación de Lagrange

Ejemplo 3. (Burden, 10ª ed., pág. 85).

Determine la forma del error para el polinomio de Lagrange, así como el error máximo cuando se usa para aproximar a

$f(x) = \frac{1}{x}$, en los nodos:

$x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4.$

Solución. El error es:

$$\overbrace{f(x) - P(x)}^{\boldsymbol{E(x)}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n)$$

Con $n + 1 = 3$, resulta

$$E(x) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-2)(x-2.75)(x-4)$$

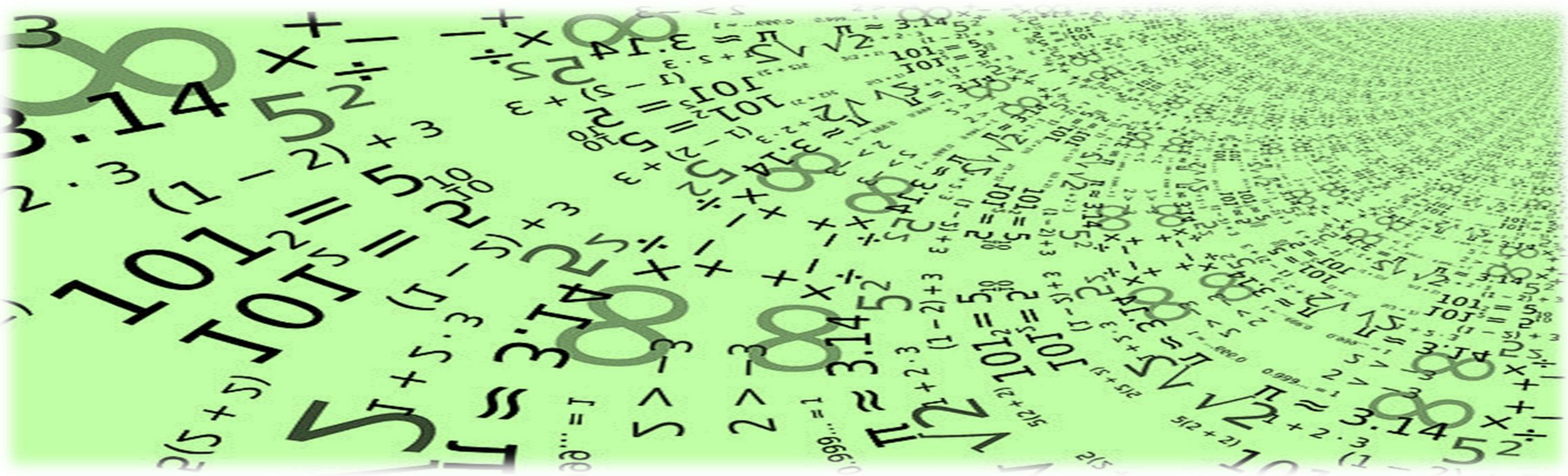
Ejercicio 1. Halle la cota del error o error máximo!

1. Demuestre que $f^{(k)}(x) = (-1)^k k!\, x^{-(k+1)}$
2. Demuestre que

$$\max_{2\le x\le 4} |(x-2)(x-2.75)(x-4)| = \frac{9}{16}$$

3. Concluya que

$$|E(x)| = |f(x) - P(x)| \le \frac{9}{256} \approx 0.03515625$$



Interpolación de Newton

Polinomio de Interpolación de Newton

Problema a resolver: dado el conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ hallar el polinomio de grado n que interpola los puntos dados. Esto es, determinar los coeficientes del polinomio:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o,$$

tal que, $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \ i = 0{:}n$

Polinomio de Interpolación de Newton

Problema a resolver: dado el conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ hallar el polinomio de grado n que interpola los puntos dados. Esto es, determinar los coeficientes del polinomio:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o,$$

tal que, $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \; i = 0\!:\!n$

Polinomio interpolante de Newton

- ✓ **Otra alternativa** para resolver el problema planteado.
- ✓ **Estrategia**. Incrementar el grado del polinomio sin necesidad de reconstruirlo por completo cada vez que se agrega un punto.
- ✓ **Práctico**. La formulación conduce a un **esquema de diferencias divididas** que es muy fácil de obtener.

Polinomio de Interpolación de Newton - Formulación

Polinomio de grado 1: dados los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ hallar el polinomio de interpolación de Newton que interpola dichos puntos.

Construcción. La forma del polinomio de Newton para $n = 1$ es,

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

tal que,

$$P_1(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

De aquí,

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Por lo tanto,

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Polinomio de Interpolación de Newton - Formulación

Notación.

$f[x_0] = f(x_0) = y_0,\quad f[x_1] = f(x_1) = y_1$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

entonces,

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

se representa como

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

Polinomio de Interpolación de Newton - Formulación

Notación.

$$f[x_0] = f(x_0) = y_0, \quad f[x_1] = f(x_1) = y_1$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

entonces,

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

se representa como

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

El **polinomio de Newton de grado 1** que interpola los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ viene dado por:

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 4. Hallar el polinomio de Newton que interpola los puntos $(2,4), (5,1)$.

Solución.

La forma del polinomio de Newton que interpola dos puntos es,

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 4. Hallar el polinomio de Newton que interpola los puntos $(2,4),(5,1)$.

Solución.

La forma del polinomio de Newton que interpola dos puntos es,

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

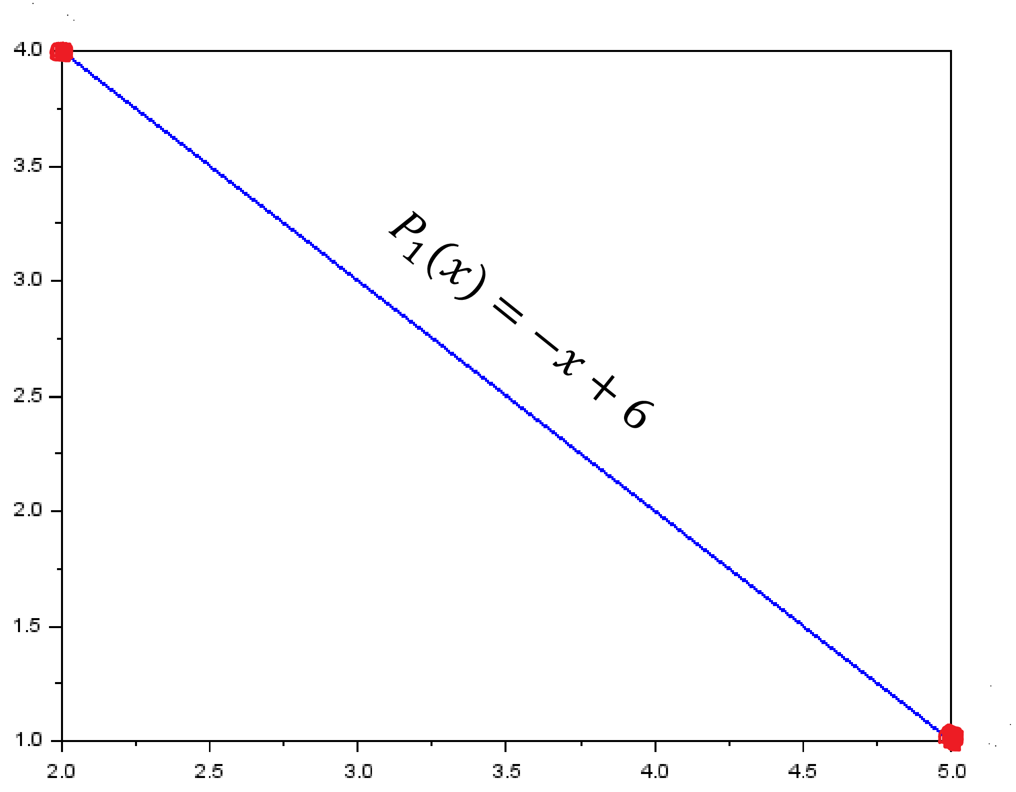
Sean, $x_0 = 2,\ y_0 = 4,\ x_1 = 5,\ y_1 = 1.$

Al sustituir los datos resulta,

$$P_1(x) = 4 + \frac{1-4}{5-2}(x - 2)$$

Por lo tanto,

$$P_1(x) = 4 + \frac{-3}{3}(x - 2) = -x + 6$$



Polinomio de Interpolación de Newton

Polinomio de grado 2: dado el conjunto de puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ hallar el polinomio de Newton que interpola los puntos dados.

Cuando n=2, el polinomio de interpolación de Newton toma la forma:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Tal que,

$$P_2(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$P_2(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$P_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) =$$

$$= f(x_2)$$

Polinomio de Interpolación de Newton

Polinomio de grado 2: dado el conjunto de puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ hallar el polinomio de Newton que interpola los puntos dados.

Cuando n=2, el polinomio de interpolación de Newton toma la forma:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Tal que,

$$P_2(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$P_2(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$P_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) =$$
$$= f(x_2)$$

Al resolver para cada ecuación y sustituir en la siguiente resulta,

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]$$

$$a_2 = \frac{\overbrace{f[x_1, x_2]} - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

Polinomio de Interpolación de Newton

El **polinomio de Newton de grado 2** que interpola los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ y (x_2, y_2) viene dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

o equivalentemente,

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \ldots, x_i]\;(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})$$

Polinomio de Interpolación de Newton

El **polinomio de Newton de grado 2** que interpola los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ y (x_2, y_2) viene dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

o equivalentemente,

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0)\dots(x - x_{i-1})$$

Los coeficientes $f[x_0, x_1]$ y $f[x_0, x_1, x_2]$, se denominan **diferencias divididas** de primer y segundo orden.

Polinomio de Interpolación de Newton – Diferencias divididas

Diferencias divididas

- ✓ Cero-ésima diferencia dividida: $f[x_i]$, $i = 0,1,\dots,n$
- ✓ Primeras diferencias divididas (de orden 1):

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = 0,\dots,n-1$$

- ✓ Segundas diferencias divididas (de orden 2):

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \qquad i = 0,\dots,n-2$$

- ✓ A partir de las k-ésimas diferencias divididas se calculan las de orden k+1
- ✓ El proceso termina con la n-ésima diferencia dividida:

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_n] - f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n - x_o}$$

Polinomio de Interpolación de Newton

El **polinomio de Newton de grado 2** que interpola los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ y (x_2, y_2) viene dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

o equivalentemente,

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

A partir de la fórmula de $P_2(x)$ es posible generalizar la forma del polinomio de interpolación de Newton al caso en que se tienen $n+1$ puntos, ¡basta con cambiar el número 2 por n!

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

Polinomio de Interpolación de Newton

El **polinomio de Newton de grado** n que interpola los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ viene dado por:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \dots, x_i] \ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

Observación:

La obtención del polinomio de Newton a partir de las diferencias divididas resulta ser bastante simple una vez se ha construido la tabla de diferencias divididas.

Tabla de diferencias divididas

Tabla 3.9 (Burden 10ª ed., pág. 93)

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Tabla de diferencias divididas

Tabla 3.9 (Burden 10a ed., pág. 93)

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Observación. Los coeficientes del polinomio de Newton son los elementos en la 1ª diagonal de la tabla.

$$P_n(x)=f[x_0]+\sum_{i=1}^{n} f[x_0,\dots,x_i]\;(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})$$

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 2. Hallar el polinomio de Newton que interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en los nodos: $x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4.$

Solución.

Polinomio de Newton:

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

donde

$$f[x_i] = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1,2$$

$$y_0 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad y_1 = \frac{1}{2.75} = 0.36363, \quad y_2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 2. Hallar el polinomio de Newton que interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en los nodos: $x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4.$

Solución.

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0)\dots(x - x_{i-1})$$

$$y_0 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad y_1 = \frac{1}{2.75} = 0.3636, \quad y_2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

Tabla de diferencias divididas.

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
2.00	0.5000		
2.75	0.3636		
4.00	0.2500		

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 2. Hallar el polinomio de Newton que interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en los nodos: $x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4.$

Solución.

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

$$y_0 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad y_1 = \frac{1}{2.75} = 0.3636, \quad y_2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0.3636 - 0.5}{2.75 - 2.0} = -0.18181$$

Tabla de diferencias divididas.

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
2.00	0.5000		
-	-	-0.1818	
2.75	0.3636		
4.00	0.2500		

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 2. Hallar el polinomio de Newton que interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en los nodos: $x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4.$

Solución.

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

$$y_0 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad y_1 = \frac{1}{2.75} = 0.3636, \quad y_2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0.3636 - 0.5}{2.75 - 2.0} = -0.18181$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.25 - 0.3636}{4 - 2.75} = -0.09088$$

Tabla de diferencias divididas.

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
2.00	0.5000		
		-0.1818	
2.75	0.3636		
		-0.0909	
4.00	0.2500		

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 2. Hallar el polinomio de Newton que interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en los nodos: $x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4.$

Solución.

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

$$y_0 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad y_1 = \frac{1}{2.75} = 0.3636, \quad y_2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0.3636 - 0.5}{2.75 - 2.0} = -0.18181$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.25 - 0.3636}{4 - 2.75} = -0.09088$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{-0.0909 - (-0.1818)}{4 - 2} = 0.0455$$

Tabla de diferencias divididas.

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
2.00	0.5000		
		-0.1818	
2.75	0.3636		0.0455
		-0.0909	
4.00	0.2500		

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 2. Hallar el polinomio de Newton que interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en los nodos: $x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4.$

Solución.

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

$$y_0 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad y_1 = \frac{1}{2.75} = 0.3636, \quad y_2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0.3636 - 0.5}{2.75 - 2.0} = -0.18181$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.25 - 0.3636}{4 - 2.75} = -0.09088$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{-0.0909 - (-0.1818)}{4 - 2} = 0.0455$$

Tabla de diferencias divididas.

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
2.00	0.5000		
		-0.1818	
2.75	0.3636		0.0455
		-0.0909	
4.00	0.2500		

Polinomio de Newton

$$P_2(x) = 0.5 - 0.1818\,(x - 2) + 0.0455(x - 2)(x - 2.75)$$

Polinomio de Interpolación de Newton

Ejemplo 2. Hallar el polinomio de Newton que interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en los nodos: $x_0 = 2,\ x_1 = 2.75,\ x_2 = 4.$

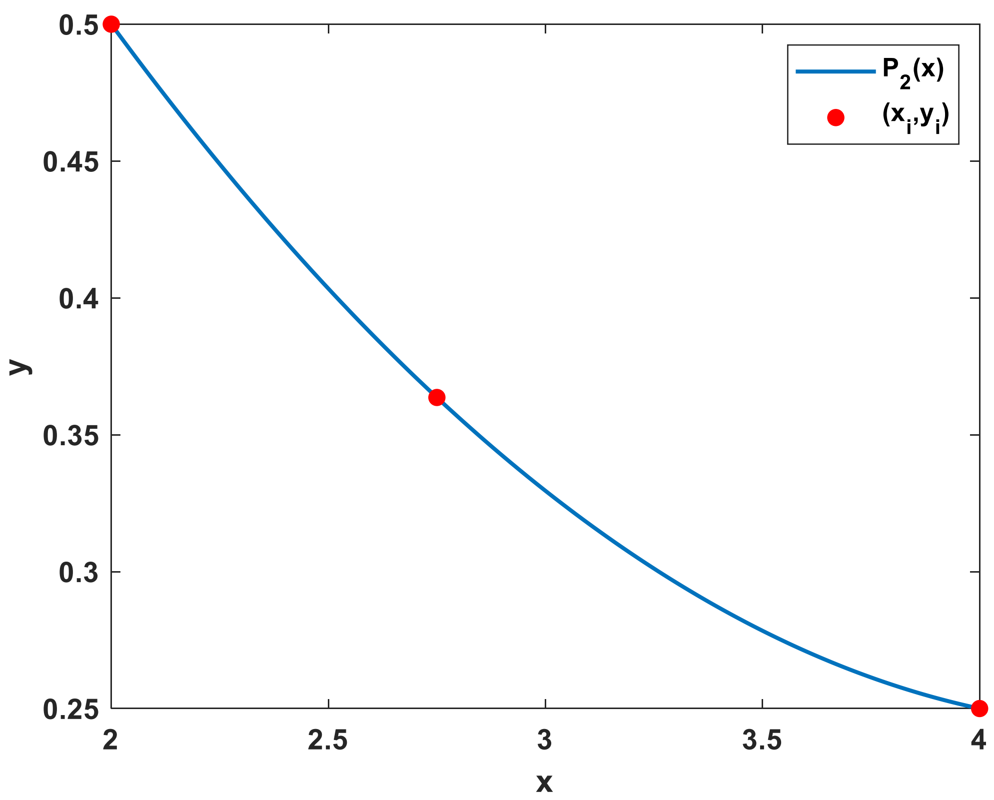
Solución.

$$P_2(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{2} f[x_0, \dots, x_i]\ (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

$$f(x_0) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f(x_1) = \frac{1}{2.75} = 0.3636$$

$$f(x_2) = \frac{1}{4} = 0.25$$



Polinomio de Newton

$$P_2(x) = 0.5 - 0.1818\ (x-2) + 0.0455(x-2)(x-2.75)$$

Error del polinomio de Interpolación de Newton

Fórmula del error para un polinomio de interpolación de n-ésimo grado:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Error del polinomio de Interpolación de Newton

Fórmula del error para un polinomio de interpolación de n-ésimo grado:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

Teorema 3.6 (Burden, 10ª ed., pág. 95)

Suponga que $f \in C^n[a, b]$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números distintos en $[a, b]$. Entonces existe un número ξ en (a, b) con

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Error del polinomio de Interpolación de Newton

Fórmula del error para un polinomio de interpolación de n-ésimo grado:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Teorema 3.6 (Burden, 10ª ed., pág. 95)

Suponga que $f \in C^n[a,b]$ y $x_0, x_1, \dots, x_n$ son números distintos en $[a,b]$. Entonces existe un número ξ en (a,b) con

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Nota. Si se tiene un dato adicional x_{n+1} es posible calcular el error, pues:

$$f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$