DR. JOSÉ ATILIO GUERRERO

February 23, 2018

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones

(Material en Revisión [1])

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA

DECANATO DE DOCENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

SAN CRISTÓBAL-VENEZUELA, ENERO 2018

[1] Email: jaguerrero4@gmail.com, jguerre@unet.edu.ve

# Capítulo 3

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Orden Superior

El tema de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias tiene una gran importancia desde los puntos de vista teórico y práctico. En teoría, este tema tiene una gran simplicidad y elegancia, prácticamente, las ecuaciones diferenciales lineales se originan en una gran variedad de aplicaciones a las ciencias y la ingeniería. Afortunadamente, muchas de las ecuaciones diferenciales lineales que se presentan son de tipos especiales, lineales con coeficientes constante. El propósito de esta unidad es estudiar algunos métodos explícitos de resolución de estas ecuaciones. Para tal fin, iniciaremos considerando la teoría necesaria en toda la unidad.

**Definición 63.**

Una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden "n" en la variable dependiente $y$ y la variable independiente $x$, es una expresión de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x) \tag{3.1}$$

donde $a_n(x) \neq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n$ y $F$ son funciones reales continuas definidas en un intervalo real $I$.

Si $F(x) \equiv 0$, la ecuación (3.1) se reduce a la *ecuación homogénea*[1]

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{3.2}$$

Si $F(x) \neq 0$, se dice que la ecuación (3.1) es *no homogénea*.

Para $n = 2$, la ecuación (3.1) se reduce a la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x). \tag{3.3}$$

No debe engañarnos el que las ecuaciones lineales de primer orden son fáciles de resolver mediante fórmulas. En general, (3.3) no se puede resolver explícitamente en términos de funciones elementales, ni tan siquiera en términos de integraciones indicadas. Para encontrar soluciones suele ser necesario recurrir a procesos infinitos de uno u otro tipo, con frecuencia series infinitas. En la presente unidad nuestras consideraciones sobre los métodos de resolución de (3.3) se restringirán, casi por completo, al caso especial en que lo coeficientes son constantes. Es de mencionar que la mayoría de las ideas y procedimientos que estudiaremos son generalizables a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, sin cambios en los principios básicos, aunque con una notable complicación en los detalles.

Dado que por lo general no es posible producir una solución explícita de (3.3) por simple inspección, lo primero que hemos de hacer es asegurarnos de que esa ecuación tiene realmente alguna solución. El siguiente resultado establece condiciones para que la ecuación diferencial dada tenga solución.

**Teorema 64.**

Sean $a_0(x),\ a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y $F(x)$ funciones continuas en un intervalo $I$. Si $x_0 \in I$ y $y_0,\ y_1, \ldots, y_{n-1}$ son números arbitrarios, entonces la ecuación (3.1) tiene una y sólo una solución $y(x)$ sobre $I$ tal que

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Para la ecuación diferencial lineal de segundo orden (3.3), los requisitos del teorema anterior son que $a_0, a_1, a_2$ y $F$ son continuas en un intervalo real $I$, $\ a_2 \neq 0$. Entonces si $x_0 \in I$ y si $y_0,\ y_1$ son constantes arbitrarias, existe precisamente una única solución $y(x)$ de (3.3) tal que

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad y'(x_0) = y_1.$$

[1]Este uso tradicional de la palabra *homogénea* no debe confundirse con otro igualmente tradicional pero totalmente diferente, usado en el Capítulo 2.

Geométricamente, (3.3) tiene una única solución en $I$ que pasa por un punto especificado $(x_0, y_0)$ con pendiente prefijada $y_0'$.

**Ejemplo 65.**

El problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 3xy' + x^3y = e^x \\ y(1) = 2; \;\; y'(1) = -5, \end{cases}$
posee una única solución en $\mathbb{R}$, pues los coeficientes $3x, x^3$, así como el término no homogéneo $e^x$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$, en donde $x_0 = 1, \; y_0 = 2, \; y_1 = -5$.

**Ejemplo 66.**

El Teorema 64 asegura que el problema de valor inicial de tercer orden

$$\begin{cases} 2y''' + xy'' + 3x^2y' - 5y = sen(x) \\ y(4) = 3; \;\; y'(4) = 5; \;\; y''(4) = -7/2, \end{cases}$$

posee una única solución en $\mathbb{R}$.

**Observación 67.**

Es de aclarar en que las *condiciones iniciales* que determinan en el Teorema 64 una única solución de (3.1) son condiciones sobre el valor de la solución y el de sus derivadas en *sólo un punto* fijado $x_0$ del intervalo $I$. En contraste con ello, el problema de hallar una solución de (3.1) que satisfaga condiciones de la forma $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, donde $x_0 \neq x_1$, no queda cubierto por el Teorema 64. Problemas de este tipo se denominan *problemas de contorno* y los mismos quedan fuera del contenido de nuestro estudio.

Una vez establecida que la ecuación diferencial (3.1) posee solución, para resolverla debemos en primer lugar resolver la ecuación homogénea asociada (3.2), por tal motivo a continuación estudiaremos algunos resultados fundamentales relacionados con dicha ecuación diferencial homogénea asociada.

**Teorema 68** (Principio de Superposición)**.**

Si $y_1,\ y_2, \ldots, y_n$ son $n$-soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (3.2)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

entonces

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n \tag{3.4}$$

también es solución de (3.2), para todas las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Por ejemplo, las funciones $y_1(x) = sen(x)$ y $y_2(x) = cos(x)$ son soluciones de $y'' + y = 0$. En efecto,

$$y_1'(x) = cos(x);\ \ y_1''(x) = -sen(x) \quad \text{luego} \quad y_1'' + y_1 = -sen(x) + sen(x) = 0;$$
$$y_2'(x) = -sen(x);\ \ y_2''(x) = -cos(x) \quad \text{luego} \quad y_1'' + y_1 = -cos(x) + cos(x) = 0.$$

El Principio de Superposición, garantiza que $5sen(x)+6cos(x)$ también es solución de $y''+y = 0$. En general, $\alpha_1 sen(x) + \alpha_2 cos(x)$ es solución de $y'' + y = 0$.

Por analogía con el álgebra lineal elemental, la solución (3.4) se dice que es una *combinación lineal* de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Bajo esta terminología, el Teorema 68, se reformula en la forma: *cualquier combinación lineal de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada* (3.2) *es también solución*.

Supongamos que por un medio u otro nos las hemos arreglado para conocer dos soluciones de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{3.5}$$

Entonces, el Teorema 68 nos da otra solución que contiene dos constantes arbitrarias, y que puede ser, por tanto, la solución general de (3.5). Existe una dificultad: si $y_1$ o $y_2$ son multiplos una de la otra, digamos $y_2 = ky_1$, entonces

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 k y_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 k)y_1,$$

y sólo hay una constante presente. Sobre esta base tenemos suficiente motivo para esperar que si ninguna de las soluciones $y_1$ e $y_2$ es multiplo de la otra entonces

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

será la solución general de (3.5).

Si dos funciones $f$ y $g$ están definidas sobre un intervalo $I$ y una de ellas es un multiplo constante de la otra, se dice que son *linealmente dependientes*. En caso contrario, es decir, si ninguna de ellas es multiplo constante de la otra, se dice que son *linealmente independientes*.

**Definición 69** (Linealmente Independientes)**.**

Un conjunto de $n$-funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente independientes en algún intervalo $I$, si la relación

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n = 0 \tag{3.6}$$

implica que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Si existe alguna constante $\alpha$ no nula que satisface (3.6), entonces este conjunto de $n$-funciones se denomina *linealmente dependiente*.

Un criterio más apropiado para verificar si estas funciones son linealmente independientes es con el apoyo del wronskiano.

**Teorema 70.**

Sean $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,$ $n$-funciones con al menos $(n-1)$-derivada. Este conjunto de funciones son linealmente independientes sobre el intervalo $I$ si y sólo si el Wronskiano de estas funciones, denotado por $W(f_1, \ldots, f_n)$, es no nulo.

El Wronskiano de $n$-funciones $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,$ viene dado por

$$W(f_1, \ldots, f_n) := \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

**Definición 71** (Conjunto Fundamental de Soluciones)**.**

Se denomina conjunto fundamental de soluciones en el intervalo $I$ de $(3.2)$ a cualquier conjunto de $n$-soluciones linealmente independientes.

**Definición 72** (Solución General)**.**

Sea $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de $(3.2)$ en el intervalo $I$. La solución general de $(3.2)$ viene dada por

$$y(x) := \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \tag{3.7}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son constantes arbitrarias.

**Ejemplo 73.**

La ecuación diferencial $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ tiene por solución general la función $y(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x}$.

En efecto, las funciones $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ y $y_3(x) = e^{3x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de dicha ecuación diferencial.

Cualquier función $y_p(x)$ que **no contenga** parámetros arbitrarios y que satisfaga la ecuación diferencial no homogénea $(3.1)$ se denomina *solución particular* de $(3.1)$.

**Teorema 74.**

Sea $y_1, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea $(3.2)$ y $y_p$ una solución particular de $(3.1)$. Entonces la **solución general** de $(3.1)$ es de la forma

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) + y_p(x) \\ &= y_c(x) + y_p(x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $y_c(x) = \alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x)$.

## 3.1 Ecuación Diferencial Lineal Homogénea con Coeficientes Constantes

En esta sección, estudiaremos el caso especial de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas en la que todos sus coeficientes son constantes reales, es decir

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{3.9}$$

en donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales.

La solución de $(3.9)$ requiere de una función que tenga la propiedad de que si esta y sus diferentes derivadas se multiplican cada una por ciertas constantes y los productos restantes se suman, el resultado será igual a cero. Para que éste sea el caso, necesitamos una función tal que sus derivadas sean multiplos constantes de sí misma. *¿Conocemos funciones $f$ que tengan esta propiedad*, esto es,

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \alpha f(x)$$

para toda x?. La respuesta es "si". Tomemos por ejemplo la función

$$f(x) = e^{mx}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Es claro que

$$\frac{d^k e^{mx}}{dx^k} = m^k e^{mx}.$$

Por tal condición de la función exponencial, buscaremos soluciones de $(3.9)$ de la forma

$$y(x) = e^{mx},$$

donde $m$ se eligirá de modo que $e^{mx}$ satisfaga la ecuación diferencial planteada.

Por consiguiente, supongamos que $y(x) = e^{mx}$ es una solución de $(3.9)$ para una cierta constante $m$, luego

$$y' = me^{mx}; \quad y'' = m^2 e^{mx}; \ \ldots \ y^{(n)} = m^n e^{mx}.$$

Sustituyendo en $(3.9)$, resulta

$$a_n m^n e^{mx} + a_{n-1} m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$$

o bien

$$\Big(a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0\Big) e^{mx} = 0.$$

Ya que $e^{mx} \neq 0$, se obtiene la ecuación polinomial en la incógnita $m$:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0. \tag{3.10}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación característica* asociada a $(3.9)$.

Así para resolver la ecuación diferencial lineal homogénea $(3.9)$, se plantea la ecuación característica $(3.10)$ y se resuelve para $m$ (es decir, se hallan las raíces de esta ecuación característica). Observese que $(3.10)$ se obtiene a partir de $(3.9)$ mediante la sustitución de la $k$-ésima derivada de $(3.9)$ por $m^k,\ k = 0, 1, \ldots, n$; esto da lugar a tres casos, según que las raíces de $(3.10)$ sean: *reales y diferentes, reales y repetidas* o *complejas*.

1. Raíces reales diferentes

   Si $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n,\ m_i \neq m_j,\ \ m_i \in \mathbb{R}$ son las raíces de la ecuación $(3.10)$, entonces la solución general de $(3.9)$ es

$$y(x) = \alpha_1 e^{m_1 x} + \alpha_2 e^{m_2 x} + \cdots + \alpha_n e^{m_n x}.$$

2. Raíces reales iguales(repetidas)

   Si la ecuación característica $(3.10)$ tiene la raíz real $m$ la cual se repite $k$-veces $(k \leq n)$, entonces la parte de la solución general de $(3.9)$ correspondiente a esta raíz repetida es

$$\Big(\alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_k x^{k-1}\Big) e^{mx}.$$

   Si además, las raíces restantes de $(3.10)$ son números reales distintos $m_{k+1}, \ldots, m_n$ entonces la solución general de $(3.9)$ es

$$y(x) = \Big(\alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_k x^{k-1}\Big) e^{mx} + \alpha_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots + \alpha_n e^{m_n x}.$$

3. Raíces complejas

   Si la ecuación $(3.10)$ tiene el número complejo $a + ib$ como raíz, entonces el número complejo conjugado $a - ib$ es también una raíz de $(3.10)$. Luego la solución general correspondiente a esta raíz compleja es

$$K_1 e^{(a+ib)x} + K_2 e^{(a-ib)x},$$

   por la fórmula de Euler, esta última expresión se reescribe en la forma

$$\begin{aligned} K_1 e^{(a+ib)x} + K_2 e^{(a-ib)x} &= K_1 e^{ax} e^{ibx} + K_2 e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}\Big(K_1 e^{ibx} + K_2 e^{-ibx}\Big) \\ &= e^{ax}\Big[\big(K_1 + K_2\big) cos(bx) + i\big(K_1 - K_2\big) sen(bx)\Big] \\ &= e^{ax}\Big[\alpha_1 cos(bx) + \alpha_2 sen(bx)\Big], \end{aligned}$$

   donde $\alpha_1 = K_1 + K_2$ y $\alpha_2 = i\big(K_1 - K_2\big)$.

Esto se resume en el siguiente resultado.

**Teorema 75.**

$(a)$ Si la ecuación característica $(3.10)$ tiene las raíces complejas $a \pm ib$, ninguna de las cuales repetidas, entonces la parte correspondiente de la solución general de $(3.9)$ es

$$e^{ax}\Big[\alpha_1 cos(bx) + \alpha_2 sen(bx)\Big].$$

$(b)$ Sin embargo si $a \pm ib$ son raíces que se repiten $k$-veces, entonces la parte correspondiente de la solución general de $(3.9)$ es

$$e^{ax}\Big(\alpha_1+\alpha_2 x+\cdots+\alpha_k x^{k-1}\Big)cos(bx)+e^{ax}\Big(\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2}x+\cdots+\alpha_{2k}x^{k-1}\Big)sen(bx).$$

**Veamos a continuación algunos ejemplos.**

**Ejemplo 76.**

$y'' - 4y' + 13y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 2.$

**<u>Solución</u>**

Es claro que este es un problema de valores iniciales, para resolverlo, debemos en primer lugar hallar la solución general, para lo cual planteamos su ecuación característica asociada: $m^2 - 4m + 13 = 0$. Cuyas raíces son $m = 2 \pm 3i$. Por lo que la solución general es

$$\boxed{y(x) = e^{2x}\Big[\alpha_1 cos(3x) + \alpha_2 sen(3x)\Big]}.$$

Como $y(0) = -1$, se tiene

$$-1 = e^0(\alpha_1 cos(0) + \alpha_2 sen(0)) \quad \text{ y así } \quad \alpha_1 = -1.$$

Por otro lado $y' = 2e^{2x}\Big[-cos(3x)+\alpha_2 sen(3x)\Big] + e^{2x}\Big[3sen(3x)+3\alpha_2 cos(3x)\Big]$ y puesto que $y'(0) = 2$ obtenemos que $\alpha_2 = 4/3$. Finalmente la solución (particular) del problema es

$$\boxed{y(x) = e^{2x}\Big[-cos(3x) + \tfrac{4}{3}\, sen(3x)\Big]}.$$

**Ejemplo 77.**

$y'' + 3y' - 5y = 0.$

**Solución**

Ecuación característica asociada: $m^2 + 3m - 5 = 0.$

Raíces: $m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$.

Solución general: $\boxed{y(x) = \alpha_1 e^{(-3+\sqrt{29})x/2} + \alpha_2 e^{(-3-\sqrt{29})x/2}}$.

**Ejemplo 78.**

$y'' + 8y' + 16y = 0.$

**Solución**

Ecuación característica asociada: $m^2 + 8m + 16 = 0.$

Raíces: $m_1 = m_2 = -4$, raíz real repetida.

Solución general: $\boxed{y(x) = \alpha_1 e^{-4x} + \alpha_2 x e^{-4x}}$.

**Ejemplo 79.**

$y''' - y'' - 12y' = 0.$

**Solución**

Ecuación característica asociada: $m^3 - m^2 - 12m = 0.$

Raíces: $m_1 = 0;\ m_2 = -3;\ m_3 = 4$, raíces reales diferentes.

Solución general: $\boxed{y(x) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-3x} + \alpha_3 e^{4x}}$.

**Ejemplo 80.**

$y^{(iv)} + y''' + 2y'' - y' + 3y = 0.$

**Solución**

Ecuación característica asociada:

$$m^4 + m^3 + 2m^2 - m + 3 = (m^2 + 2m + 3)(m^2 - m + 1) = 0.$$

Raíces: $m_1 = -1 \pm \sqrt{2}\, i;\ m_3 = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$, raíces complejas diferentes.
Solución general:

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\Big(\alpha_1 cos\big(\sqrt{2}\, x\big) + \alpha_2 sen\big(\sqrt{2}\, x\big)\Big) + e^{x/2}\Big(\alpha_3 cos\Big(\sqrt{3}\,\frac{x}{2}\Big) + \alpha_4 sen\Big(\sqrt{3}\,\frac{x}{2}\Big)\Big)}.$$

### 3.1.1 Ejercicios Propuestos

Comprobar que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial planteada y resolver el problema con valor inicial dado.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | $y'' - 9y = 0;$ | $y(0) = 2;$ | $y'(0) = 0;$ | $e^{3x},\ e^{-3x}$ |
| (2) | $y'' + 4y = 0;$ | $y(0) = -5;$ | $y'(0) = 2;$ | $cos(2x),\ sen(2x)$ |
| (3) | $y'' - 2y' + y = 0;$ | $y(0) = 4;$ | $y'(0) = 3;$ | $e^x,\ xe^x$ |
| (4) | $y'' + \omega^2 y = 0;$ | $y(0) = -3/2;$ | $y'(0) = 0;$ | $cos(\omega x),\ sen(\omega x),\ \ \omega \neq 0$ |
| (5) | $y'' - 4y' + 3y = 0;$ | $y(0) = -1;$ | $y'(0) = -5;$ | $e^x,\ e^{3x}$ |

Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (6) | $y'' + 3y' + 2y = 0;$ | (7) | $y'' - 9y = 0;$ | (8) | $y'' + 10y' + 25y = 0$ |
| (9) | $y'' + 4y' = 0;$ | (10) | $y'' - 6y' + 9y = 0;$ | (11) | $y'' - 2y' + 0.75y = 0$ |
| (12) | $y'' + 2y' - 15y = 0;$ | (13) | $y''' + y'' - 2y' = 0;$ | (14) | $y'' + 6y' + 9y = 0$ |
| (15) | $y^{(iv)} + 4y'' = 0;$ | (16) | $y'' + 25y = 0;$ | | |

Resolver los siguientes problemas con valor inicial

| | | | |
|---|---|---|---|
| (17) | $y'' - 16y = 0;$ | $y(0) = 1;$ | $y'(0) = 20$ |
| (18) | $y'' - 4y' + 4y = 0;$ | $y(0) = 0;$ | $y'(0) = -3$ |
| (19) | $y'' + 3.7y' = 0;$ | $y(-2) = 4;$ | $y'(-2) = 0$ |
| (20) | $5y'' + 16y' + 12.8y = 0;$ | $y(0) = 0;$ | $y'(0) = -2.3$ |
| (21) | $4y'' - 4y' - 3y = 0;$ | $y(-2) = e;$ | $y'(-2) = -e/2$ |

## 3.2 E.D.O. No Lineales de $2^{do}$ Orden Reducibles a $1^{er}$ Orden

En esta sección estudiaremos dos tipos especiales de ecuaciones diferenciales **no lineales** de segundo orden, que se reducen a primer orden mediante un cambio apropiado de variables.

### 3.2.1 E.D. de $2^{do}$ Orden con ausencia de la variable dependiente

Son aquellas ecuaciones diferenciales de la forma

$$y'' = f(x, y'), \tag{3.11}$$

las mismas se reducen a ecuaciones diferenciales de primer orden mediante el cambio de variable

$$v = y', \qquad \text{tener presente que } \; v = v(x), \;\; v' = \frac{dv}{dx},$$

derivando con respecto de $x$, se obtiene

$$v' = y'',$$

al susituir en (3.11), resulta

$$v' = f(x, v)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

**Ejemplo 81.**

$x^2y'' + 2xy' - 1 = 0, \qquad x > 0.$

**Solución**

Haciendo $v = y'$, se tiene que $v' = y''$, y al sustituir en la ecuación diferencial dada, obtenemos

$$x^2v' + 2xv = 1 \qquad \text{ó} \qquad \boxed{v' + \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^2}}$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, con solución general

$$v = e^{-2\int \frac{dx}{x}} \left( \int \frac{e^{2\int \frac{dx}{x}}}{x^2}\, dx + K_1 \right)$$

ó

$$\boxed{v = \frac{1}{x} + \frac{K_1}{x^2}}.$$

Al restituir a las variables originales, la solución general es

$$y = \int y' dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{K_1}{x^2} \right) dx = \ln(x) - \frac{K_1}{x} + K_2.$$

**Ejemplo 82.**

$x^2y'' = (y')^2, \qquad x > 0.$

**Solución**

Para $v = y'$, resulta $v' = y''$ y así

$$x^2v' = v^2 \qquad \text{ó} \qquad \frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x^2}$$

por lo que

$$v = \frac{x}{1 + K_1x}.$$

Restituyendo las variables originales, la solución general es

$$y = \int y'dx = \int vdx = \int \frac{x}{1 + K_1x}dx = \frac{x}{K_1} - \frac{\ln(1 + K_1x)}{K_1^2} + K_2.$$

### 3.2.2 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $y'' + x(y')^2 = 0.$ $\qquad y = \begin{cases} \frac{2}{K}arctg\left(\frac{x}{K}\right) + K_2 & \text{si} \quad K_1 = -K^2 < 0; \\ -2x^{-1} + K_2 & \text{si} \quad K_1 = 0; \\ \frac{1}{K}\ln\left|\frac{K - x}{K + x}\right| + K_2 & \text{si} \quad K1 = K^2. \end{cases}$

2) $y'' + y' = e^{-x}.$ $\qquad y = K_1e^{-x} + K_2 - xe^{-x}.$

3) $xy'' + y' = 1, \ \ x > 0.$ $\qquad y = K_1\ln(x) + x + K_2.$

4) $2x^2y'' + (y')^3 = 2xy', \ \ x > 0.$ $\qquad y = \begin{cases} \pm\frac{2}{3}(x - 2K_1)\sqrt{x + K_1} + K_2; \\ K. \end{cases}$

### 3.2.3 E.D. de $2^{do}$ Orden con ausencia de la variable independiente

Son ecuaciones diferenciales de la forma

$$y'' = f(y, y'), \tag{3.12}$$

en donde la variable independiente $x$ **no aparece** explícitamente, sólo a través de la variable dependiente $y = y(x)$. Realizando el mismo cambio de variable de la sección anterior

$$v = y', \qquad \text{tener presente que} \quad v = v(x), \ \ v' = \frac{dv}{dx}.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación (4.8), se obtiene

$$\frac{dv}{dx} = v' = y'' = f(y, v).$$

Al considerar a $y$ como la variable independiente y usando la regla de la cadena, resulta

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy},$$

por lo que

$$v\frac{dv}{dy} = f(y, v)$$

es una ecuación diferencial de primer orden.

**Ejemplo 83.**

$yy'' + (y')^2 = 0.$

**Solución**

Para el cambio $v = y'$, se tiene que $\dfrac{dv}{dx} = y''$, luego

$$y\frac{dv}{dx} + v^2 = 0.$$

Al considerar a $y$ como variable independiente, resulta

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy},$$

por lo que

$$yv\frac{dv}{dy} + v^2 = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \qquad \text{ó} \quad vy = K_1,$$

como $v = y'$ obtenemos

$$y'y = K_1 \qquad \text{ó} \quad ydy = K_1 dx,$$

integrando y despejando, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = \pm\sqrt{2K_1x + K_2}\,.$$

**Ejemplo 84.**

$yy'' - (y')^3 = 0.$

**Solución**

Si $v = y'$, se tiene que $\dfrac{dv}{dx} = y''$ y en consecuencia

$$y\frac{dv}{dx} - v^3 = 0,$$

al considerar a $y$ como la variable independiente, se obtiene

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy},$$

por consiguiente

$$yv\frac{dv}{dy} = v^3 \quad \text{ó} \quad \frac{dv}{v^2} = \frac{dy}{y} \quad \text{ó} \quad v = -\frac{1}{\ln(y) + K_1},$$

ya que $v = y'$, obtenemos

$$y' = -\frac{1}{\ln(y) + K_1} \quad \text{ó} \quad \Big(\ln(y) + K_1\Big)dy = -dx,$$

por tanto la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y\big(\ln(y) + K_1 + 1\big) = -x + K_2.$$

### 3.2.4 Ejercicios Propuestos

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $y'' + y = 0.$ | $y = K_1 sen(x + K_2) = \alpha_1 sen(x) + \alpha_2 cos(x);$ |
| 2) | $y'' + y(y')^3 = 0.$ | $y^3 - 6K_1 y = 6x + K_2, \quad$ ó $\; y = K;$ |
| 3) | $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1.$ | $x + K_2 = \pm\dfrac{2}{3}(y - 2K_1)\sqrt{y + K_1};$ |
| 4) | $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$ | $e^y = (x + K_2)^2 + K_1;$ |
| 5) | $y'y'' = 2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$ | $y = \dfrac{4(x+1)^{3/2} - 1}{3};$ |
| 6) | $y'' - 3y^2 = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4.$ | $y = 2(1 - x)^{-2};$ |
| 7) | $y'y'' - x = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1.$ | $y = \dfrac{x^2 + 3}{2}.$ |

## 3.3 E.D.O.L. No Homogéneas de Orden $n$, con Coeficientes Constantes

Retomando el Teorema 74, la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden $n$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = F(x) \tag{1}$$