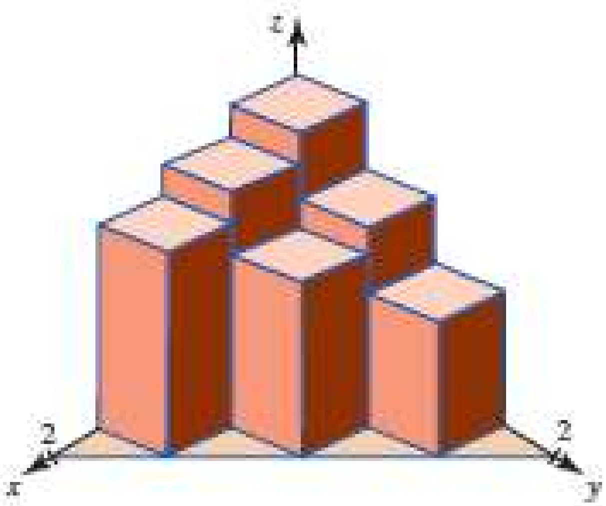
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Área de una superficie



Arelis Díaz

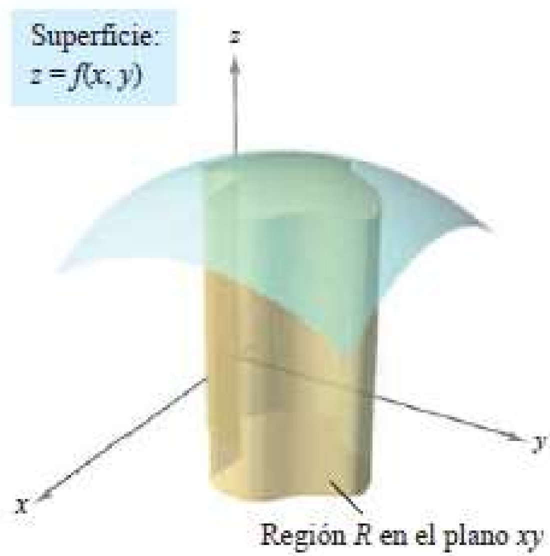
Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

12 de agosto del 2021

Área de una superficie

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R en el plano xy, entonces el área de la superficie S dada por $z = f(x, y)$ sobre R está dada por

$$\text{Área de la superficie} = \int_R\int dS$$
$$= \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA.$$



EJEMPLO 1 El área de la superficie de una región plana

Hallar el área de la superficie de la porción del plano

$$z = 2 - x - y$$

que se encuentra sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 14.45.

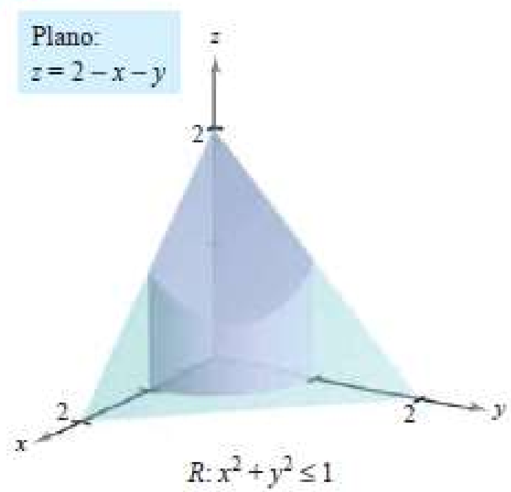
Solución Como $f_x(x, y) = -1$ y $f_y(x, y) = -1$, el área de la superficie está dada por

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \qquad \text{Fórmula para el área de la superficie.}$$

$$= \iint_R \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dA \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= \iint_R \sqrt{3}\, dA$$

$$= \sqrt{3} \iint_R dA. = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\ dr d\theta = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big]_0^1 d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$



EJEMPLO 2 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la porción de la superficie

$$f(x, y) = 1 - x^2 + y$$

que se encuentra sobre la región triangular cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$, como se muestra en la figura 14.46*a*.

Solución Como $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 1$, se tiene

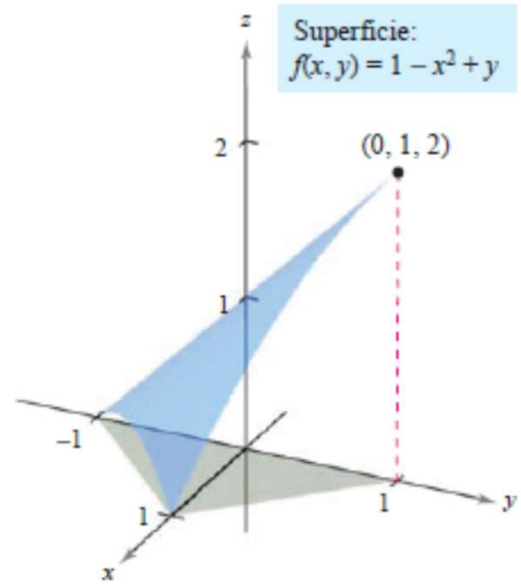
$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA = \int_R\int \sqrt{1 + 4x^2 + 1}\, dA.$$

En la figura 14.46*b* se ve que los límites o cotas de R son $0 \leq x \leq 1$ y $x - 1 \leq y \leq 1 - x$. Por lo que la integral será

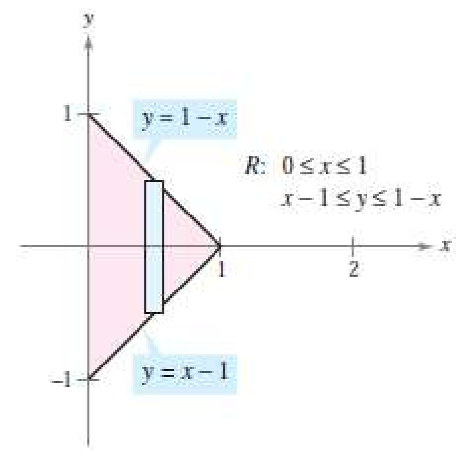
$$S = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \sqrt{2 + 4x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 y\sqrt{2 + 4x^2}\,\Big]_{x-1}^{1-x}\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[(1 - x)\sqrt{2 + 4x^2} - (x - 1)\sqrt{2 + 4x^2}\right] dx$$



a)



b)

Figura 14.46

$$= \int_0^1 \left(2\sqrt{2+4x^2} - 2x\sqrt{2+4x^2}\right) dx$$

Tablas de integración (apéndice B). Fórmula 26 y regla de la potencia.

$$= \left[x\sqrt{2+4x^2} + \ln\left(2x + \sqrt{2+4x^2}\right) - \frac{(2+4x^2)^{3/2}}{6} \right]_0^1$$

$$= \sqrt{6} + \ln\left(2 + \sqrt{6}\right) - \sqrt{6} - \ln \sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 1.618.$$

Integrales con la forma $\sqrt{u^2 \pm a^2},\ a > 0$

26. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

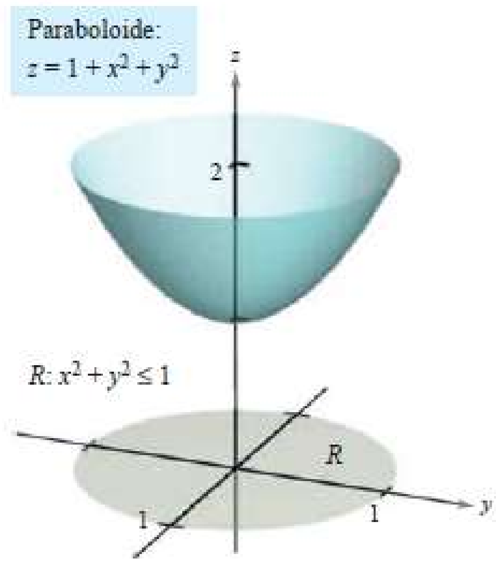
Hallar el área de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ que se encuentra sobre el círculo unidad o unitario, como se muestra en la figura 14.47.

Solución Como $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = 2y$, se tiene

$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA = \int_R\int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA.$$

Se puede pasar a coordenadas polares haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, se tiene

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}\, d\theta \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}\,\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)}{6} \\
&\approx 5.33.
\end{aligned}$$



EJEMPLO 4 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la superficie S correspondiente a la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \qquad \text{Hemisferio.}$$

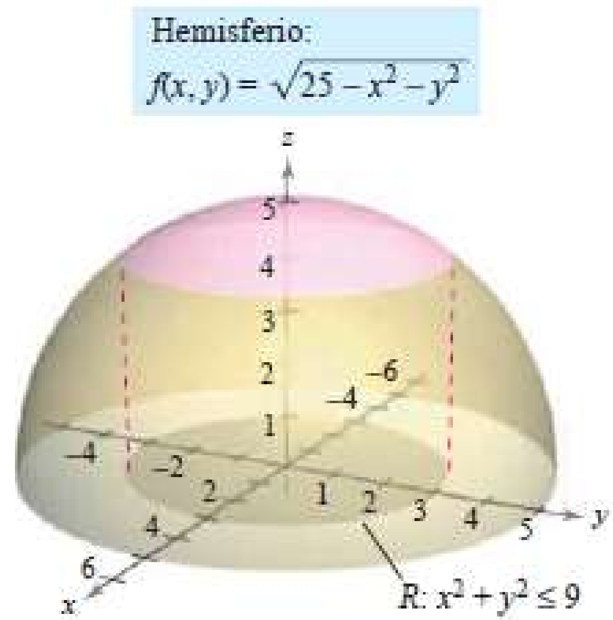
que se encuentra sobre la región R limitada o acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, como se muestra en la figura 14.48.

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

y, de acuerdo con la fórmula para el área de una superficie, se tiene

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dA \\ &= \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA. \end{aligned}$$



Así, el área de la superficie es

$$S = \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA.$$

Se puede pasar a coordenadas polares haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \le r \le 3$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta \\ &= 5\int_0^{2\pi} -\sqrt{25 - r^2}\,\Big]_0^3\, d\theta \\ &= 5\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

En los ejercicios 1 a 14, hallar el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

1. $f(x, y) = 2x + 2y$

R: triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$

3. $f(x, y) = 7 + 2x + 2y$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$

5. $f(x, y) = 9 - x^2$

R: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$

7. $f(x, y) = 3 + x^{3/2}$

R: rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 0)$

9. $f(x, y) = \ln|\sec x|$

$R = \left\{(x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \tan x\right\}$

11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$

13. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq b^2, 0 < b < a\}$

En los ejercicios 15 a 18, hallar el área de la superficie.

15. Porción del plano $z = 24 - 3x - 2y$ en el primer octante

17. Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$