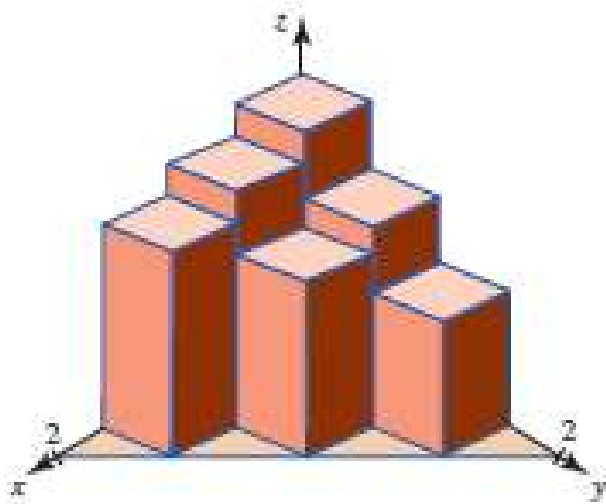




Departamento de Matemática y Física  
Curso: Matemática III  
Código: 0826301

---

# Integrales Triples



Arelis Díaz

Celular: 04269129844  
Email: jdiaz@unet.edu.ve

13 de agosto del 2021

# Definición de Integral Triple

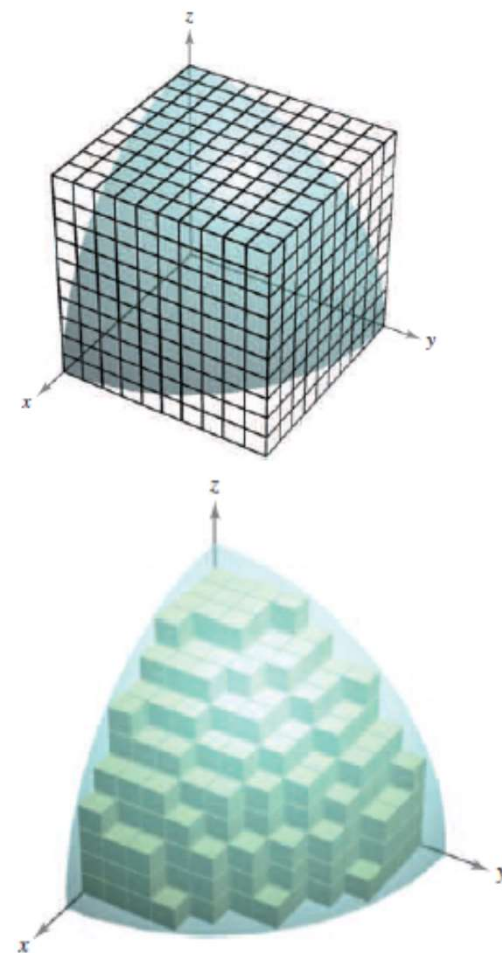
El procedimiento utilizado para definir una **integral triple** es análogo al utilizarlo para integrales dobles. Considerar una función  $f$  en tres variables que es continua sobre una región sólida acotada  $Q$ . Entonces, se encierra  $Q$  en una red de cubos y se forma una **partición interna** que consta de todos los cubos que quedan completamente dentro de  $Q$ , como se muestra en la figura 14.52. El volumen del  $i$ -ésimo cubo es

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i, \quad \text{Volumen del } i\text{-ésimo cubo.}$$

La **norma**  $\|\Delta\|$  de la partición es la longitud de la diagonal más larga en los  $n$  cubos de la partición. En cada cubo se elige un punto  $(x_i, y_i, z_i)$  y se forma la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Tomando el límite cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  se llega a la siguiente definición.



$$\text{Volumen de } Q \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

**Figura 14.52**

### DEFINICIÓN DE INTEGRAL TRIPLE

Si  $f$  es continua sobre una región sólida acotada  $Q$ , entonces la **integral triple de  $f$  sobre  $Q$**  se define como

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \, \Delta V_i$$

siempre que el limite exista. El **volumen** de la región sólida  $Q$  está dado por

$$\text{Volumen de } Q = \iiint_Q dV.$$

## Propiedades de las Integrales Triples

$$1. \iiint_Q cf(x, y, z) dV = c \iiint_Q f(x, y, z) dV$$

$$2. \iiint_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_Q f(x, y, z) dV \pm \iiint_Q g(x, y, z) dV$$

$$3. \iiint_Q f(x, y, z) dV = \iiint_{Q_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{Q_2} f(x, y, z) dV$$

En las propiedades dadas arriba,  $Q$  es la unión de dos subregiones sólidas que no se superponen  $Q_1$  y  $Q_2$ .

Si la región sólida  $Q$  es simple, la integral triple  $\iiint f(x, y, z) dV$  puede evaluarse con una integral iterada utilizando alguno de los seis posibles órdenes de integración:

$$dx dy dz \quad dy dx dz \quad dz dx dy \quad dx dz dy \quad dy dz dx \quad dz dy dx.$$

La versión siguiente del teorema de Fubini describe una región que es considerada simple con respecto al orden  $dz dy dx$ . Para los otros cinco órdenes pueden formularse descripciones similares.

#### TEOREMA 14.4 EVALUACIÓN MEDIANTE INTEGRALES ITERADAS

Sea  $f$  continua en una región sólida definida por  $Q$

$$a \leq x \leq b, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x), \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

donde  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  son funciones continuas. Entonces,

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Para evaluar una integral iterada triple en el orden  $dz \, dy \, dx$ , se mantienen  $x$  y  $y$  constantes para la integración más interior. Después, se mantiene  $x$  constante para la segunda integración.

### EJEMPLO 1   Evaluar una integral iterada triple

Evaluar la integral iterada triple

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z) \, dz \, dy \, dx.$$

**Solución** Para la primera integración, se mantienen  $x$  y  $y$  constantes y se integra con respecto a  $z$ .

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z) \, dz \, dy \, dx &= \int_0^2 \int_0^x e^x(yz + z^2) \Big|_0^{x+y} \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2) \, dy \, dx \end{aligned}$$

Para la segunda integración, mantener  $x$  constante y se integra con respecto a  $y$ .

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2) dy dx &= \int_0^2 \left[ e^x \left( x^2 y + \frac{3xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \right) \right]_0^x dx \\ &= \frac{19}{6} \int_0^2 x^3 e^x dx\end{aligned}$$

Por último, se integra con respecto a  $x$ .

$$\begin{aligned}\frac{19}{6} \int_0^2 x^3 e^x dx &= \frac{19}{6} \left[ e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \right]_0^2 \\ &= 19 \left( \frac{e^2}{3} + 1 \right) \\ &\approx 65.797\end{aligned}$$



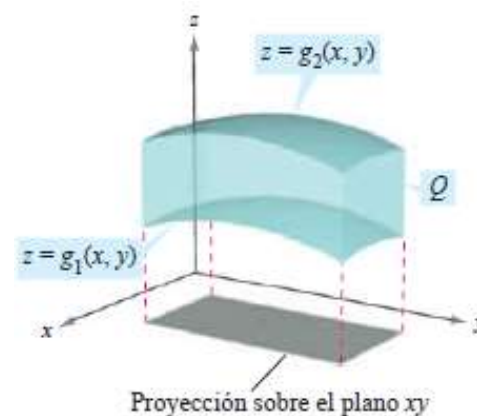
Para hallar los límites dado un orden determinado de integración, por lo general se aconseja determinar primero los límites más interiores, que pueden ser funciones de las dos variables exteriores. Después, proyectando el sólido  $Q$  sobre el plano coordenado de las dos variables exteriores, se pueden determinar sus límites de integración mediante los métodos usados para las integrales dobles. Por ejemplo, para evaluar

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

primero se determinan los límites de  $z$ , y entonces la integral toma la forma

$$\iint \left[ \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \, dx.$$

Proyectando el sólido  $Q$  sobre el plano  $xy$ , se pueden determinar los límites de  $x$  y de  $y$  de la misma manera que se hizo en el caso de las integrales dobles, como se muestra en la figura 14.53.



La región sólida  $Q$  se encuentra entre dos superficies

**Figura 14.53**

## EJEMPLO 2 Integral triple para hallar un volumen

Hallar el volumen del elipsoide dado por  $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ .

**Solución** Como en la ecuación  $x$ ,  $y$  y  $z$  juegan papeles similares, el orden de integración es probablemente irrelevante, y se puede elegir arbitrariamente  $dz \, dy \, dx$ . Además, se pueden simplificar los cálculos considerando sólo la porción del elipsoide que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la figura 14.54. Para el orden  $dz \, dy \, dx$ , se determinan primero los límites o cotas de  $z$ .

$$0 \leq z \leq 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Los límites o cotas de  $x$  y  $y$  son, como se ve en la figura 14.55,  $x$  y  $y$  y  $0 \leq x \leq 2$  y  $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ , por lo que el volumen del elipsoide es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_Q dV \\ &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \end{aligned}$$

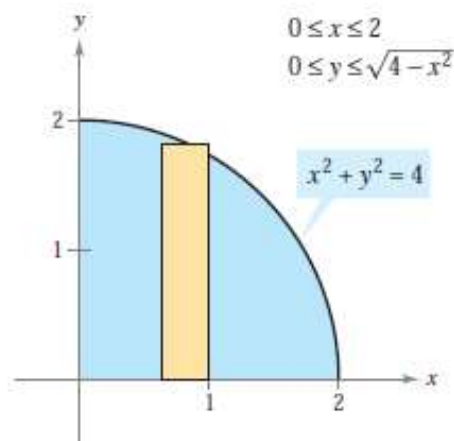
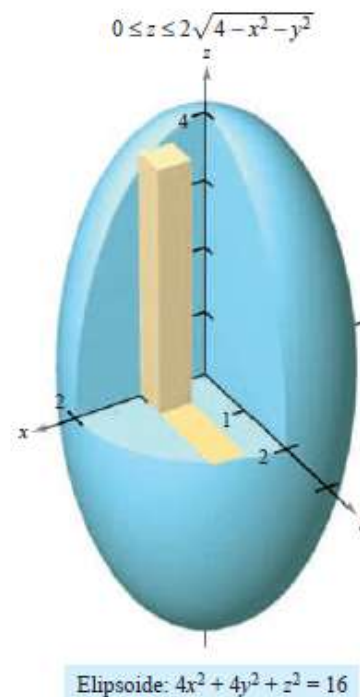


Figura 14.55



$$= 16 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-x^2)-y^2} \, dy \, dx$$

Tablas de integración (apéndice B), fórmula 37.

$$= 8 \int_0^2 \left[ y \sqrt{4-x^2-y^2} + (4-x^2) \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\right) \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= 8 \int_0^2 [0 + (4-x^2) \arcsen(1) - 0 - 0] dx$$

$$= 8 \int_0^2 (4-x^2) \left(\frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$= 4\pi \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \frac{64\pi}{3}.$$

Integrales con la forma  $\sqrt{a^2 - u^2}$ ,  $a > 0$

$$37. \int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{1}{2} \left( u \sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right) + C$$

### EJEMPLO 3 Cambiar el orden de integración

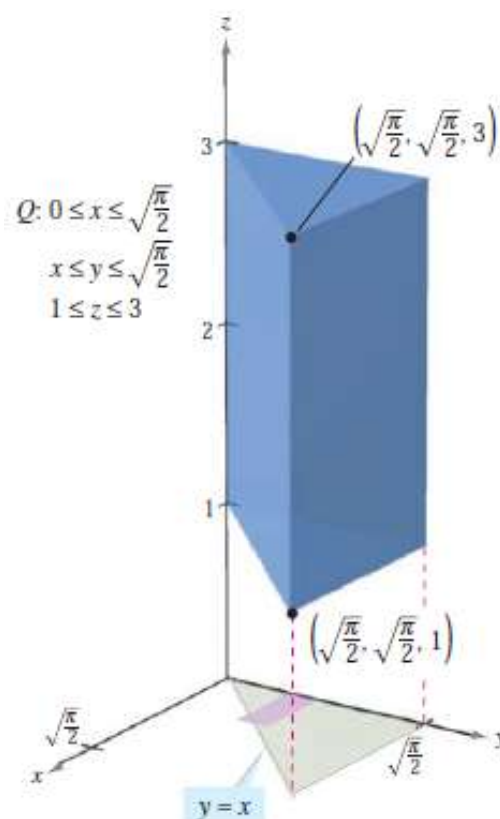
Evaluar  $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2) \, dz \, dy \, dx.$

**Solución** Obsérvese que después de una integración en el orden dado, se encontraría la integral  $2 \int \operatorname{sen}(y^2) \, dy$ , que no es una función elemental. Para evitar este problema, se cambia el orden de integración a  $dz \, dx \, dy$ , de manera que  $y$  sea la variable exterior. Como se muestra en la figura 14.56, la región sólida  $Q$  está dada por

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 1 \leq z \leq 3$$

y la proyección de  $Q$  en el plano  $xy$  proporciona los límites

$$0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad 0 \leq x \leq y.$$



Por tanto, la evaluación de la integral triple usando el orden  $dz \, dx \, dy$  produce

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2) \, dz \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \left[ z \operatorname{sen}(y^2) \right]_1^3 \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \operatorname{sen}(y^2) \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left[ x \operatorname{sen}(y^2) \right]_0^y \, dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \operatorname{sen}(y^2) \, dy \\ &= -\cos(y^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

#### EJEMPLO 4 Determinación de los límites de integración

Dar una integral triple para el volumen de cada una de las regiones sólidas.

- a) La región en el primer octante acotada superiormente por el cilindro  $z = 1 - y^2$  y comprendida entre los planos verticales  $x + y = 1$  y  $x + y = 3$
- b) El hemisferio superior dado por  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- c) La región acotada inferiormente por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

- a) En la figura 14.57, obsérvese que el sólido está acotado inferiormente por el plano  $xy$  ( $z = 0$ ) y superiormente por el cilindro  $z = 1 - y^2$ . Por tanto,

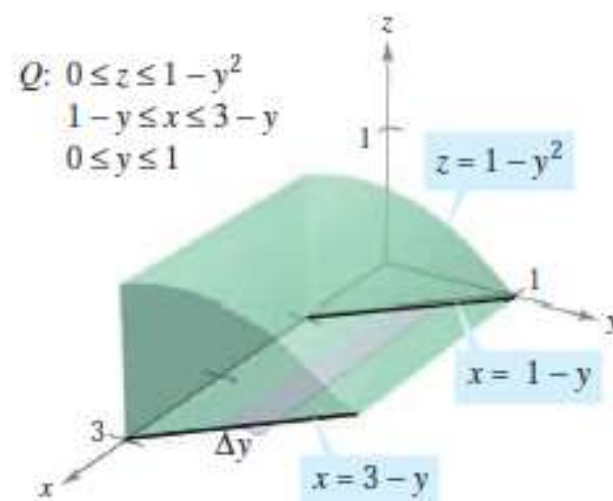
$$0 \leq z \leq 1 - y^2. \quad \text{Límites o cotas para } z.$$

Proyectando la región sobre el plano  $xy$  se obtiene un paralelogramo. Como dos de los lados del paralelogramo son paralelos al eje  $x$ , se tienen las cotas siguientes:

$$1 - y \leq x \leq 3 - y \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Por tanto, el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dz \, dx \, dy.$$





b) Para el hemisferio superior dado por  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , se tiene

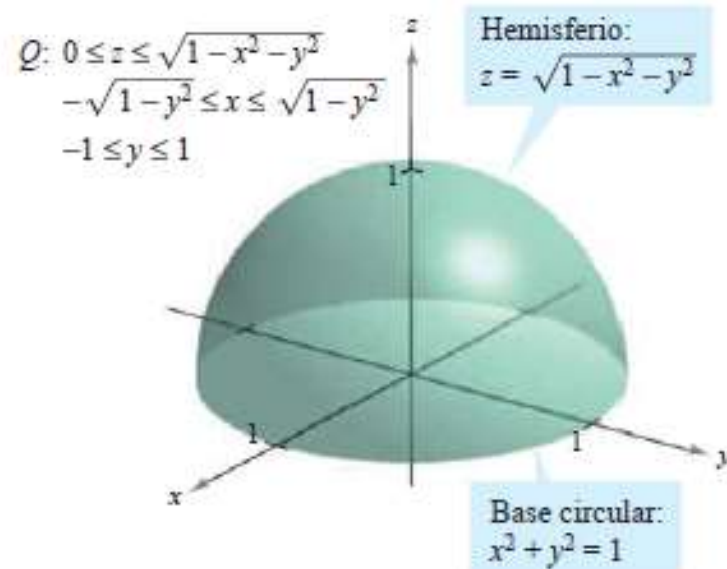
$$0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad \text{Cotas para } z.$$

En la figura 14.58, obsérvese que la proyección del hemisferio sobre el plano  $xy$  es el círculo dado por  $x^2 + y^2 = 1$ , y se puede usar el orden  $dx dy$  o el orden  $dy dx$ . Eligiendo el primero se obtiene

$$-\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy.$$



- c) Para la región acotada inferiormente por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ , se tiene

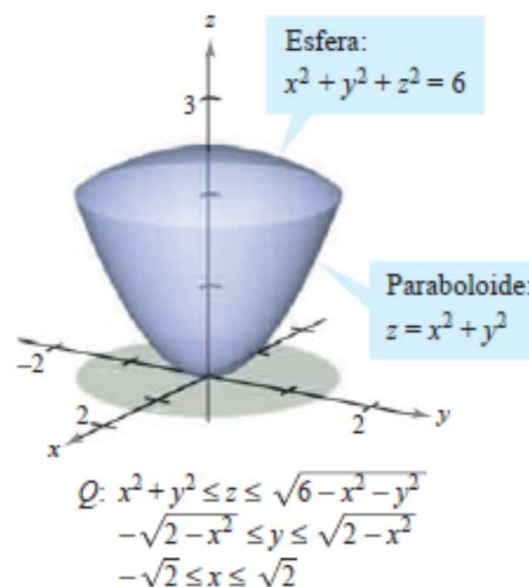
$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}, \quad \text{Cotas para } z.$$

La esfera y el paraboloide se cortan en  $z = 2$ . Además, en la figura 14.59 se puede ver que la proyección de la región sólida sobre el plano  $xy$  es el círculo dado por  $x^2 + y^2 = 2$ . Utilizando el orden  $dy \, dx$  se obtiene

$$-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \quad \text{y} \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx.$$





# Centro de masa y momentos de inercia

En el resto de esta sección se analizan dos aplicaciones importantes de las integrales triples a la ingeniería. Considérese una región sólida  $Q$  cuya densidad está dada por la función de densidad  $\rho$ . El centro de masa de una región sólida  $Q$  de masa  $m$  está dado por  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , donde

$$m = \iiint_Q \rho(x, y, z) dV$$

Masa del sólido.

$$M_{yz} = \iiint_Q x\rho(x, y, z) dV$$

Primer momento con respecto al plano  $yz$ .

$$M_{xz} = \iiint_Q y\rho(x, y, z) dV$$

Primer momento con respecto al plano  $xz$ .

$$M_{xy} = \iiint_Q z\rho(x, y, z) dV$$

Primer momento con respecto al plano  $xy$ .

y

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Las cantidades  $M_{yz}$ ,  $M_{xz}$  y  $M_{xy}$  se conocen como los **primeros momentos** de la región  $Q$  con respecto a los planos  $yz$ ,  $xz$  y  $xy$ , respectivamente.

Los primeros momentos de las regiones sólidas se toman con respecto a un plano, mientras que los segundos momentos de los sólidos se toman con respecto a una recta. Los **segundos momentos** (o **momentos de inercia**) con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  son los siguientes.

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

Momento de inercia con respecto al eje  $x$ .

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

Momento de inercia con respecto al eje  $y$ .

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

Momento de inercia con respecto al eje  $z$ .

En problemas que requieren el cálculo de los tres momentos, puede ahorrarse una cantidad considerable de trabajo empleando la propiedad aditiva de las integrales triples y escribiendo

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy} \quad \text{e} \quad I_z = I_{yz} + I_{xz}$$

donde  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  e  $I_{yz}$  son

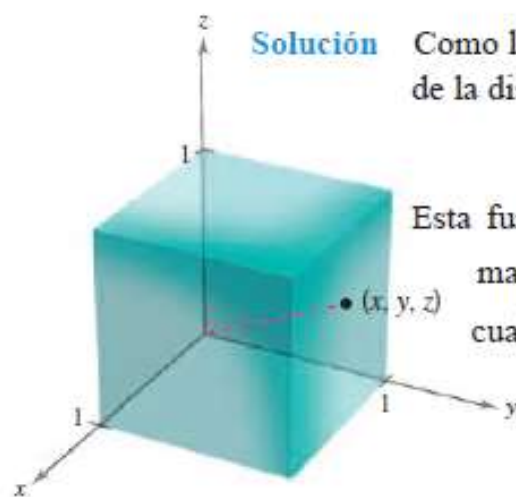
$$I_{xy} = \iiint_Q z^2 \rho(x, y, z) dV$$

$$I_{xz} = \iiint_Q y^2 \rho(x, y, z) dV$$

$$I_{yz} = \iiint_Q x^2 \rho(x, y, z) dV$$

### **EJEMPLO 5** Hallar el centro de masa de una región sólida

Hallar el centro de masa del cubo unidad mostrado en la figura 14.61, dado que la densidad en el punto  $(x, y, z)$  es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.



**Solución** Como la densidad en  $(x, y, z)$  es proporcional al cuadrado de la distancia entre  $(0, 0, 0)$  y  $(x, y, z)$ , se tiene

$$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2).$$

Esta función de densidad se puede utilizar para hallar la masa del cubo. Debido a la simetría de la región, cualquier orden de integración producirá integrales de dificultad comparable.

Densidad variable:  
 $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$

**Figura 14.61**

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx \\ &= k \int_0^1 \int_0^1 \left[ (x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 \, dy \, dx \\ &= k \int_0^1 \int_0^1 \left( x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) \, dy \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \int_0^1 \left[ \left( x^2 + \frac{1}{3} \right) y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx \\
&= k \int_0^1 \left( x^2 + \frac{2}{3} \right) dx \\
&= k \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right]_0^1 = k
\end{aligned}$$

El primer momento con respecto al plano  $yz$  es

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= k \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x(x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\
&= k \int_0^1 x \left[ \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy \right] dx.
\end{aligned}$$

Nótese que  $x$  puede sacarse como factor fuera de las dos integrales interiores, ya que es constante con respecto a  $y$  y a  $z$ . Después de factorizar, las dos integrales interiores son iguales con respecto a la masa  $m$ . Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k \int_0^1 x \left( x^2 + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= k \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{7k}{12}. \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{7k/12}{k} = \frac{7}{12}.$$

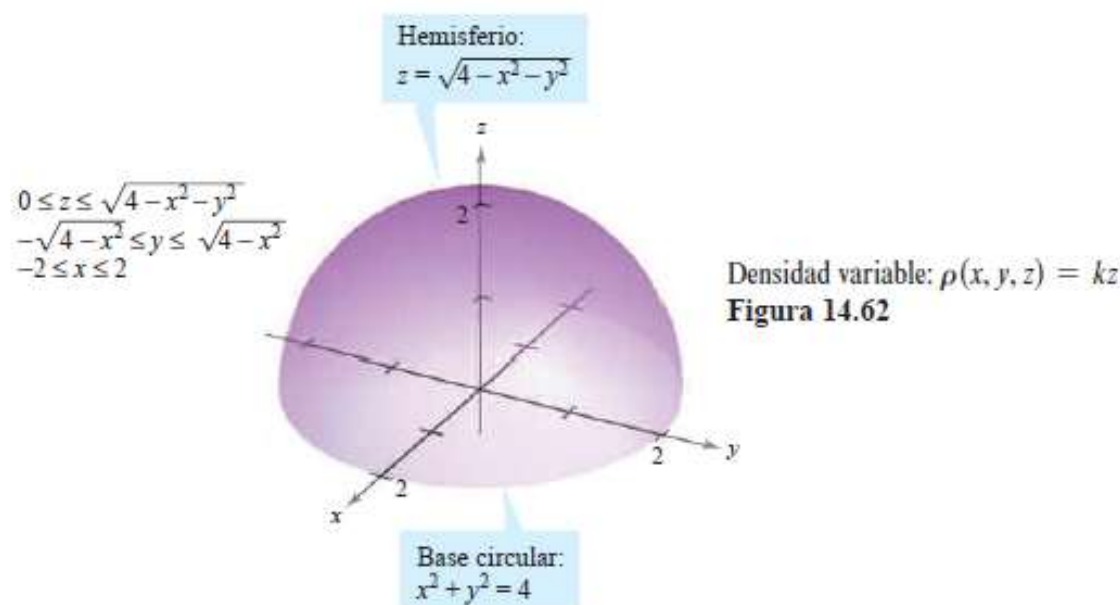
Por último, por la naturaleza de  $\rho$  y la simetría de  $x$ ,  $y$  y  $z$  en esta región sólida, se tiene  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ , y el centro de masa es  $\left( \frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12} \right)$ .

### EJEMPLO 6 Momentos de inercia de una región sólida

Hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  de la región sólida comprendida entre el hemisferio

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

y el plano  $xy$ , dado que la densidad en  $(x, y, z)$  es proporcional a la distancia entre  $(x, y, z)$  y el plano  $xy$ .



$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [(4-x^2)^2 - y^4] dy dx \\
&= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \left[ (4-x^2)^2 y - \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \frac{8}{5} (4-x^2)^{5/2} dx \\
&= \frac{4k}{5} \int_0^2 (4-x^2)^{5/2} dx \\
&= \frac{4k}{5} \int_0^{\pi/2} 64 \cos^6 \theta d\theta \\
&= \left( \frac{256k}{5} \right) \left( \frac{5\pi}{32} \right) \\
&= 8k\pi.
\end{aligned}$$

$$x = 2 \operatorname{sen} \theta.$$

Fórmula de Wallis.

Por tanto,  $I_x = 8k\pi = I_y$ .



# Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 8, evaluar la integral iterada.

1.  $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$

3.  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x \, dz \, dy \, dx$

5.  $\int_1^4 \int_0^1 \int_0^x 2ze^{-x^2} \, dy \, dx \, dz$

7.  $\int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{1-x} x \cos y \, dz \, dy \, dx$

En los ejercicios 13 a 18, dar una integral triple para el volumen del sólido.

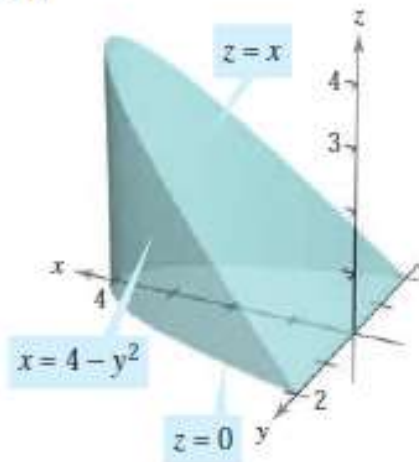
13. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano  $z = 5 - x - y$

15. El sólido acotado por el paraboloide  $z = 6 - x^2 - y^2$  y  $z = 0$

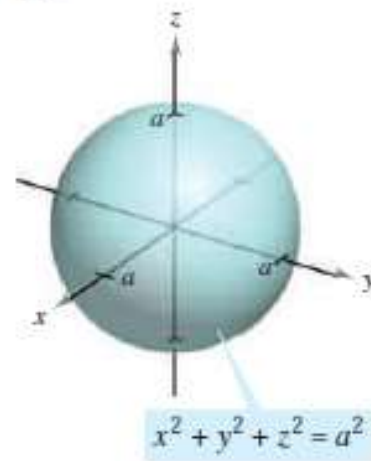
17. El sólido que es el interior común bajo de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 80$  y sobre el paraboloide  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

**Volumen** En los ejercicios 19 a 22, utilizar una integral triple para hallar el volumen del sólido mostrado en la figura.

19.



21.



**Volumen** En los ejercicios 23 a 26, usar una integral triple para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones.

23.  $z = 4 - x^2$ ,  $y = 4 - x^2$ , primer octante

25.  $z = 2 - y$ ,  $z = 4 - y^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$

**Masa y centro de masa** En los ejercicios 39 a 42, hallar la masa y las coordenadas indicadas del centro de masa del sólido de densidad dada acotado por las gráficas de las ecuaciones.

39. Hallar  $\bar{x}$  utilizando  $\rho(x, y, z) = k$ .

$$Q: 2x + 3y + 6z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$$

41. Hallar  $\bar{z}$  utilizando  $\rho(x, y, z) = kx$ .

$$Q: z = 4 - x, z = 0, y = 0, y = 4, x = 0$$

**Masa y centro de masa** En los ejercicios 43 y 44, formular las integrales triples para hallar la masa y el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

43.  $x = 0, x = b, y = 0, y = b, z = 0, z = b$

$$\rho(x, y, z) = kxy$$