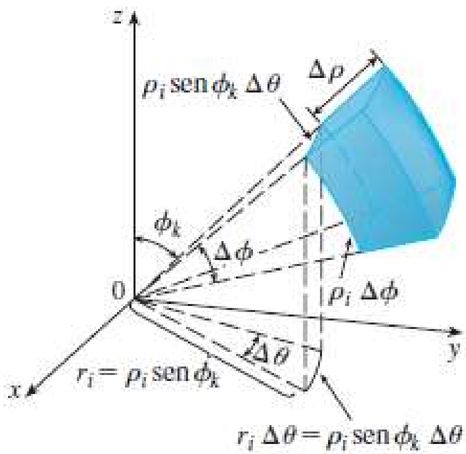
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Cambio de variables en integración múltiple



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

15 de agosto del 2021

Jacobiano

En una integral simple $\int_a^b f(x)\,dx$

se puede tener un cambio de variables haciendo $x = g(u)$, con lo que $dx = g'(u)\,du$, y obtener

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

donde $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Nótese que el proceso de cambio de variables introduce, en el integrando, un factor adicional $g'(u)$. Esto también ocurre en el caso de las integrales dobles

$$\int_R\int f(x, y)\,dA = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\underbrace{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right|}_{\text{Jacobiano}}\,du\,dv$$

donde el cambio de variables $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ introduce un factor llamado **jacobiano** de x y y con respecto a u y v. Al definir el jacobiano, es conveniente utilizar la notación siguiente que emplea determinantes.

DEFINICIÓN DEL JACOBIANO

Si $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, entonces el **jacobiano** de x y y con respecto a u y v, denotado por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

EJEMPLO 1 El jacobiano de la conversión rectangular-polar

Hallar el jacobiano para el cambio de variables definido por

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Solución De acuerdo con la definición de un jacobiano, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta \\
&= r.
\end{aligned}$$

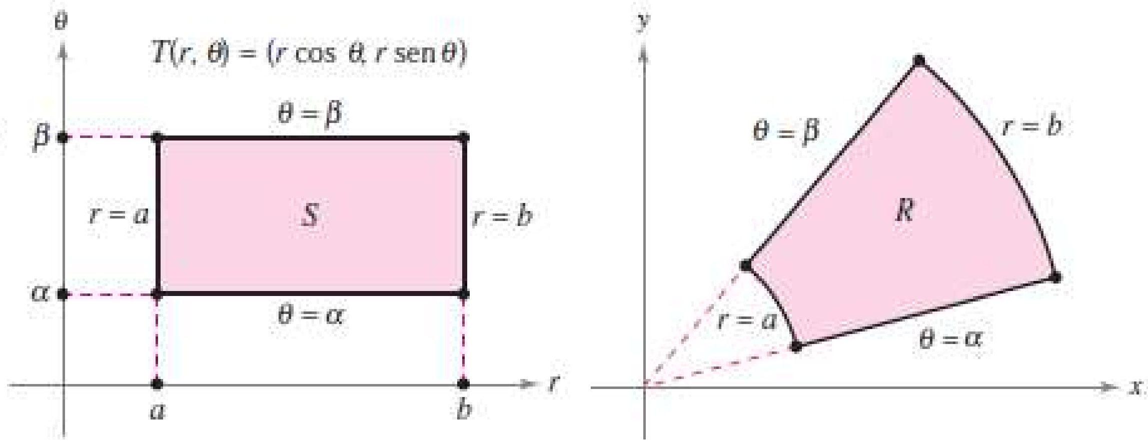
El ejemplo 1 indica que el cambio de variables de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble se puede escribir como

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_S\int f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)r\, dr\, d\theta,\quad r > 0$$
$$= \int_S\int f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\, d\theta$$

donde S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a la región R en el plano xy, como se muestra en la figura 14.71.

S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a R en el plano xy

Figura 14.71



En general, un cambio de variables está dado por una **transformación** biyectiva (o uno a uno) T de una región S en el plano uv en una región R en el plano xy dada por

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

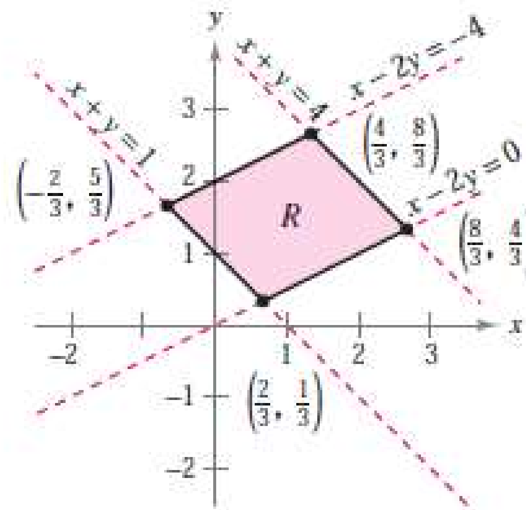
donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas en la región S. Nótese que el punto (u, v) se encuentra en S y el punto (x, y) se encuentra en R. En la mayor parte de las ocasiones, se busca una transformación en la que la región S sea más simple que la región R.

EJEMPLO 2 Hallar un cambio de variables para simplificar una región

Sea R la región limitada o acotada por las rectas

$$x - 2y = 0, \qquad x - 2y = -4, \qquad x + y = 4 \qquad \text{y} \qquad x + y = 1$$

como se muestra en la figura 14.72. Hallar una transformación T de una región S a R tal que S sea una región rectangular (con lados paralelos a los ejes u o v).



Región R en el plano xy
Figura 14.72

Solución Para empezar, sea $u = x + y$ y $v = x - 2y$. Resolviendo este sistema de ecuaciones para encontrar x y y se obtiene $T(u, v) = (x, y)$, donde

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{3}(u - v).$$

Los cuatro límites de R en el plano xy dan lugar a los límites siguientes de S en el plano uv.

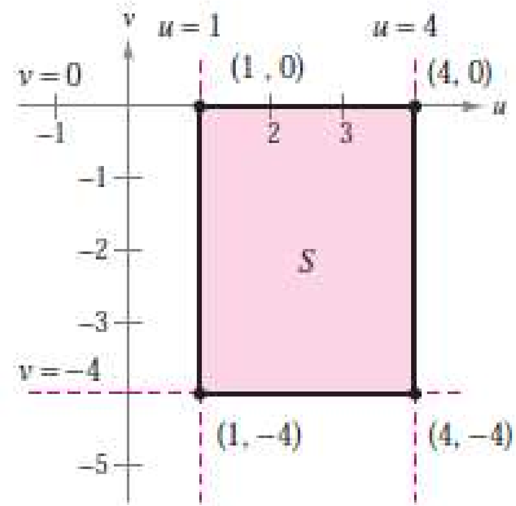
Límites en el plano xy		*Límites en el plano uv*
$x + y = 1$	$\Rightarrow$	$u = 1$
$x + y = 4$	$\Rightarrow$	$u = 4$
$x - 2y = 0$	$\Rightarrow$	$v = 0$
$x - 2y = -4$	$\Rightarrow$	$v = -4$

La región S se muestra en la figura 14.73. Nótese que la transformación T

$$T(u, v) = (x, y) = \left(\frac{1}{3}[2u + v], \frac{1}{3}[u - v]\right)$$

transforma los vértices de la región S en los vértices de la región R. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
T(1, 0) &= \left(\tfrac{1}{3}[2(1) + 0], \tfrac{1}{3}[1 - 0]\right) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\\
T(4, 0) &= \left(\tfrac{1}{3}[2(4) + 0], \tfrac{1}{3}[4 - 0]\right) = \left(\tfrac{8}{3}, \tfrac{4}{3}\right)\\
T(4, -4) &= \left(\tfrac{1}{3}[2(4) - 4], \tfrac{1}{3}[4 - (-4)]\right) = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{8}{3}\right)\\
T(1, -4) &= \left(\tfrac{1}{3}[2(1) - 4], \tfrac{1}{3}[1 - (-4)]\right) = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}\right).
\end{aligned}$$



Región S en el plano uv
Figura 14.73

Cambio de variables en integrales dobles

TEOREMA 14.5 CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

Sea R una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano xy y sea S una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano uv. Sea T desde S hasta R dado por $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$, donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas. Suponer que T es uno a uno excepto posiblemente en la frontera de S. Si f es continua en R y $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ no es cero en S, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

EJEMPLO 3 Un cambio de variables para simplificar una región

Sea R la región limitada o acotada por las rectas

$$x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4, \quad x + y = 4 \quad \text{y} \quad x + y = 1$$

como se muestra en la figura 14.76. Evaluar la integral doble

$$\int_R\int 3xy\, dA.$$

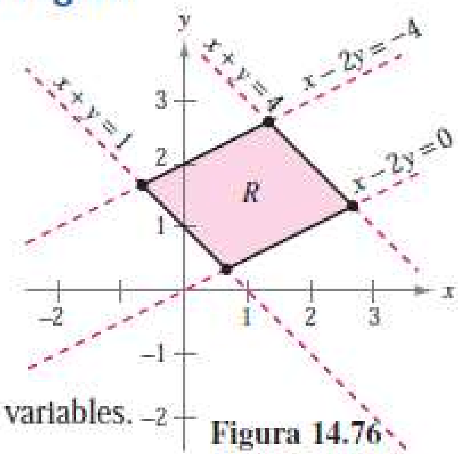


Figura 14.76

Solución De acuerdo con el ejemplo 2, se puede usar el cambio siguiente de variables.

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{3}(u - v)$$

Las derivadas parciales de x y y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{3}$$

lo cual implica que el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Por tanto, por el teorema 14.5, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_R\int 3xy\,dA &= \int_S\int 3\left[\frac{1}{3}(2u+v)\,\frac{1}{3}(u-v)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dv\,du\\
&= \int_1^4\int_{-4}^0 \frac{1}{9}(2u^2-uv-v^2)\,dv\,du\\
&= \frac{1}{9}\int_1^4\left[2u^2v-\frac{uv^2}{2}-\frac{v^3}{3}\right]_{-4}^0 du\\
&= \frac{1}{9}\int_1^4\left(8u^2+8u-\frac{64}{3}\right)du\\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{8u^3}{3}+4u^2-\frac{64}{3}u\right]_1^4\\
&= \frac{164}{9}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Un cambio de variables para simplificar un integrando

Sea R la región limitada o acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ y $(1, 0)$. Evaluar la integral

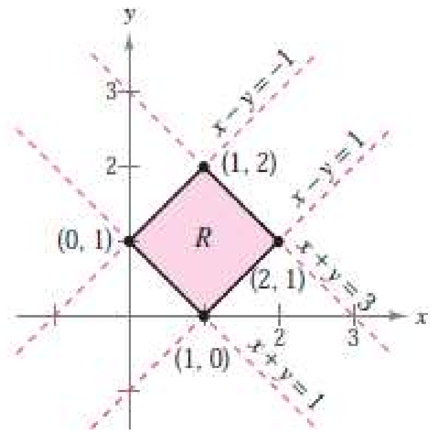
$$\int_R\int (x + y)^2 \operatorname{sen}^2(x - y)\, dA.$$

Solución Obsérvese que los lados de R se encuentran sobre las rectas $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 3$ y $x - y = -1$, como se muestra en la figura 14.77. Haciendo $u = x + y$ y $v = x - y$, se tiene que los límites o cotas de la región S en el plano uv son

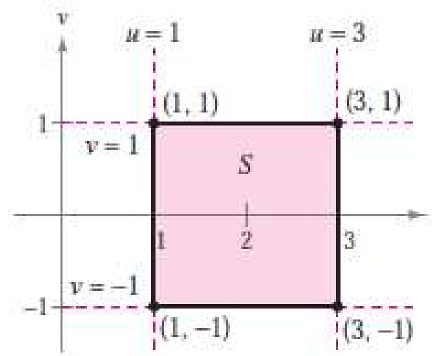
$$1 \leq u \leq 3 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq v \leq 1$$

como se muestra en la figura 14.78. Despejando x y y en términos de u y v se obtiene

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{2}(u - v).$$



Región R en el plano xy
Figura 14.77



Región S en el plano uv
Figura 14.78

Las derivadas parciales de x y y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}$$

lo cual implica que el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Por el teorema 14.5, sigue que

$$\begin{aligned}
\int_R\int (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dA &= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{3} u^2 \operatorname{sen}^2 v \left(\frac{1}{2}\right) du\, dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\operatorname{sen}^2 v) \frac{u^3}{3}\Big]_1^3 dv \\
&= \frac{13}{3}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}^2 v\, dv = \frac{13}{6}\int_{-1}^{1} (1 - \cos 2v)\, dv \\
&= \frac{13}{6}\left[v - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2v\right]_{-1}^{1} = \frac{13}{6}\left[2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-2)\right] \\
&= \frac{13}{6}(2 - \operatorname{sen} 2) \approx 2.363.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos (Larson, sec. 14.8)

En los ejercicios 1 a 8, hallar el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables indicado.

1. $x = -\frac{1}{2}(u - v),\ y = \frac{1}{2}(u + v)$

3. $x = u - v^2,\ y = u + v$

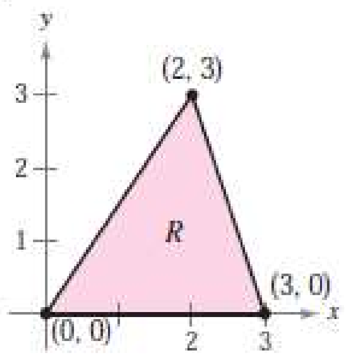
5. $x = u \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta,\ y = u \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta$

7. $x = e^u \operatorname{sen} v,\ y = e^u \cos v$

En los ejercicios 9 a 12, dibujar la imagen S en el plano uv de la región R en el plano xy utilizando las transformaciones dadas.

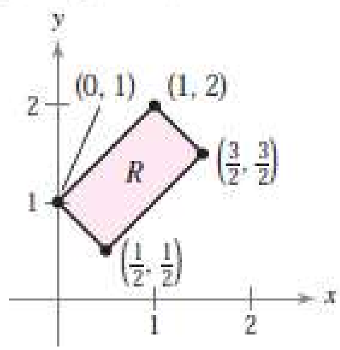
9. $x = 3u + 2v$

$y = 3v$



11. $x = \frac{1}{2}(u + v)$

$y = \frac{1}{2}(u - v)$

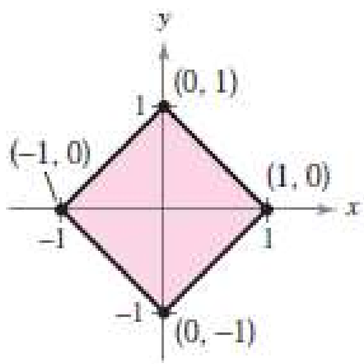


En los ejercicios 15 a 20, utilizar el cambio de variables indicado para hallar la integral doble.

15. $\displaystyle\int_R\int 4(x^2 + y^2)\, dA$

$x = \frac{1}{2}(u + v)$

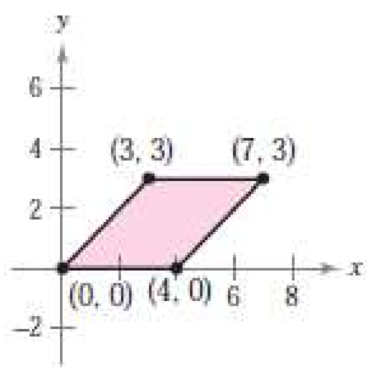
$y = \frac{1}{2}(u - v)$



17. $\displaystyle\int_R\int y(x - y)\, dA$

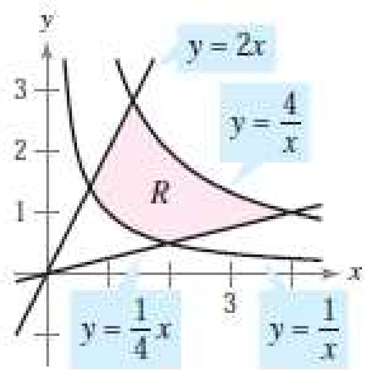
$x = u + v$

$y = u$



19. $\displaystyle\int_R\int e^{-xy/2}\, dA$

$x = \sqrt{\dfrac{v}{u}}, \; y = \sqrt{uv}$



En los ejercicios 21 a 28, utilizar un cambio de variables para hallar el volumen de la región sólida que se encuentra bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región plana R.

21. $f(x, y) = 48xy$

R: región limitada por el cuadrado con vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$

23. $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$

R: región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(4, 0)$, $(6, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 2)$

25. $f(x, y) = \sqrt{(x - y)(x + 4y)}$

R: región acotada por el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(5, 0)$, $(4, -1)$

27. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

R: región acotada por el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$, donde $a > 0$

29. La sustitución $u = 2x - y$ y $v = x + y$ hacen la región R (ver la figura) en una simple región S en el plano uv. Determinar el número total de lados de S que son paralelos a cualquiera de los ejes u o v.