LIMITES

El límite de una función en un punto examina el comportamiento de la función $f(x)$ cuando los valores x se aproximan al punto x_0. Para tener una idea de la complejidad del problema pongamos el siguiente ejemplo:

Sea $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$. Se quiere saber el comportamiento de la función cuando x se acerca a 1. Observe que la función no está definida en 1. Sin embargo podemos tomar valores arbitrariamente cercanos a 1. La siguiente tabla nos hace intuir el resultado del proceso límite.

x tendiendo a 1 por la izquierda $\rightarrow$ $\leftarrow x$ tendiendo a 1 por la derecha

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.710	2.970	2.997	2.9997	No está definida	3.0003	3.003	3.03	3.31

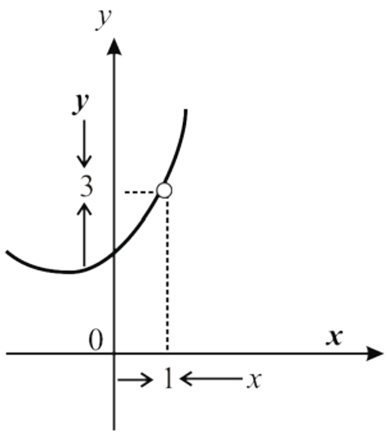
$f(x)$ tiende a 3

Vemos que los valores de la función se acercan a 3 conforme x se acerca a 1.

Esto se escribe como:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3$$

La siguiente es una definición informal de límite de $f(x)$.



Definición: Una función $f(x)$ tiene límite L en c si $f(x)$ se acerca cada vez más a un número L cuando x se aproxima cada vez más al número c en cualquier sentido, sin llegar a valer c.

La notación usada es $\lim_{x\to c} f(x)=L$ y se lee como:

el límite de $f(x)$ *cuando x tiende a c vale L.*

Comentario: Es importante que la función este definida cerca de *c*. No hace falta que esté definida en *c*, pues el valor de la función en *c* no importa para decir cuanto vale el límite. Lo importante son los valores de la función evaluados en puntos cercanos a *c*. Observe como la función $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ no está definida en 1

PROPIEDADES DE LÍMITES

En esta sección estableceremos las propiedades de los límites. Ellas permitirán calcular y establecer límites sin usar la definición formal. Las dos primeras propiedades resultan evidentes.

Suponga k una constante, entonces

1.- $\lim_{x\to a} k = k$ **Propiedad de la función constante**

2.- $\lim_{x\to a} x = a$. **Propiedad de la identidad**

El siguiente Teorema agrega más propiedades de límites.

Teorema 1.-Suponga $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Entonces:

3.-Si k es una constante tenemos que $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$. **Propiedad del factor constante**

4.- $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$. **Propiedad de la suma**

5.- $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ **Propiedad de la diferencia**

6.- $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$. **Propiedad de la multiplicación**

7.- $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. **Propiedad del cociente**

8.-Para n entero positivo tenemos $\lim_{x\to a}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$ **Propiedad de la potencia**

9.- $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, es válido siempre en el caso de n impar y si n es par podemos garantizarlo si $\lim_{x\to a} f(x) > 0$. **Propiedad de la raíz**

Comentarios:

1.- Las conclusiones del Teorema tienen dos partes, una implícita: la función que se le toma límite en el lado izquierdo de la igualdad tiene límite en a y otra explícita: se dice que este límite vale el lado derecho de la igualdad. Por ejemplo, si tenemos que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen entonces podemos asegurar que el límite de $(f+g)(x)$ cuando x va a a existe y vale el lado derecho de (4)

2.- Para aprenderse mejor estos resultados se suelen usar expresiones como: *los factores constantes salen fuera del límite* (propiedad 3); *el límite de una suma es la suma de los límites (ésta es la propiedad de la suma:* (propiedad 4); *el límite de un cociente es el cociente de los límites* si el límite del denominador es distinto de cero; *el límite se introduce dentro de la raíz*, en el caso que el índice de la raíz sea par podemos garantizar la propiedad si el límite del radicando es mayor que cero.

3.-

En los siguientes ejemplos se dirá de igualdad en igualdad que propiedades se están usando

Ejemplo 1.- Calcular los siguientes límites, justificando que propiedades se está usando.

a) $\lim_{x\to 2} 3x^4$; **b)** $\lim_{x\to 3} x^3 - x^2 + 15$; **c)** $\lim_{x\to 1}\sqrt[4]{\frac{1}{x+15}}$; **d)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{(x-2)^2}$

Solución.-

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x^4 \overset{factor\ constante}{=} 3\lim\limits_{x\to 2} x^4 \overset{potencia}{=} 3\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^4 \overset{identidad}{=} 3(2)^4 = 48$.

b) La propiedad de la suma y diferencia puede ser aplicada reiterativamente cuando hay más de dos términos, utilizando apropiadamente la propiedad asociativa. Directamente podemos ver la primera igualdad

$$\lim_{x\to 3} x^3 - x^2 + 15 \underset{suma}{\overset{diferencia}{=}} \lim_{x\to 3} x^3 - \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 15$$

$$\underset{const.}{\overset{potencia}{=}} \left(\lim_{x\to 3} x\right)^3 - \left(\lim_{x\to 3} x\right)^2 + 15 \overset{identidad}{=} (3)^3 - 3^2 + 15 = 27 - 9 + 15 = 33$$

c)

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{\frac{1}{x+15}} \overset{raiz}{=} \sqrt[4]{\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+15}} \overset{cociente}{=} \sqrt[4]{\frac{\lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1}(x+15)}} \underset{suma}{\overset{cte}{=}} \sqrt[4]{\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 15}} \underset{const.}{\overset{identidad}{=}} \sqrt[4]{\frac{1}{1+15}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{1}{2}$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{(x-2)^2} \overset{cociente}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-2)^2} \underset{potencia}{\overset{diferencia}{=}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 3}{(\lim\limits_{x\to 0}(x-2))^2} \underset{diferencia}{\overset{identidad,\ cte}{=}} \frac{0-3}{(\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 2)^2} \underset{const.}{\overset{identidad}{=}} \frac{-3}{(0-2)^2} = -\frac{3}{4}.$$

Comentarios:

1) Observe que en c) efectivamente se cumple la condición $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x+15} > 0$. Esta condición nos permite aplicar la propiedad de la raíz del límite, cuando el índice es par. Si no fuese así entonces pudiese ocurrir que este límite no tuviese sentido por estar evaluando fuera del dominio de la función.

2) Como se podrá apreciar en todos estos ejemplos, el límite se hubiese podido obtener sustituyendo, sin embargo hay que ser muy cautos, no todos los límites los podremos obtener de esta forma. Debemos siempre basarnos en alguna propiedad para ir obteniendo los límites. El siguiente Teorema nos permitirá en el caso de funciones polinómicas hacer la sustitución.

10.-Propiedad del límite de una función de un polinomio:

Teorema 2. Sea $p(x)$ una función polinómica. Entonces

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

Demostración: Sea $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. Entonces

$$\lim_{x\to a} c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} \ldots c_1 x + c_0 \underset{suma}{=} \lim_{x\to a} c_n x^n + \lim_{x\to a} c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} c_1 x + \lim_{x\to a} c_0 \underset{constante}{\overset{factor\ cte}{=}}$$

$$= c_n \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + c_1 \lim_{x\to a} x + c_0 \underset{identidad}{\overset{potencia}{=}} c_n (\lim_{x\to a} x)^n + c_{n-1}(\lim_{x\to a} x)^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0$$

$$\underset{identidad}{=} c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0 = p(a).$$

11.-Propiedad del límite de una función racional:

Corolario .- Sea $r(x)$ una función racional definida en a. Entonces

$$\lim_{x\to a} r(x) = r(a).$$

Ejemplo 2.- Calcular $\lim_{x\to 2} 3x^2+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} 3x^2+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}} \overset{suma}{=} \lim_{x\to 2} 3x^2+\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}$$

$$\underset{factor\ \ cte}{\overset{polinomio}{=}} 3\cdot 2^2+\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}$$

$$\overset{raiz}{=} 12+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}$$

La función racional está definida: el denominador no se anula

$$\overset{f.\ \ racional}{=} 12+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2^3-4\cdot 2+3}{2^5-2\cdot 2^2+3}}$$

$$=12+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{27}}=12+\frac{\sqrt[3]{3}}{6}.$$

Podríamos establecer más resultados que nos permitiera sustituir de una vez, pero vayamos con calma.

Ejercicio de desarrollo.- Calcular el siguiente límite justificando que propiedades se está usando

$$\lim_{x\to -1}\left[(3x+1)^3-\sqrt{\frac{2x^3-4x+3}{3x^2-x+1}}\right]$$

Respuesta: -9

CALCULO DE LÍMITES USANDO MANIPULACIONES ALGEBRAICAS.

En esta sección estudiaremos algunos límites donde las propiedades dadas anteriormente no podrán ser aplicadas directamente y habrá que reescribir $f(x)$ de una manera equivalente.

El siguiente ejemplo nos aclarará muchas situaciones y conceptos

Ejemplo 1.- Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{(x-2)^2}$

Solución: Observe que el denominador se hace 0 cuando x tiende a 2 **,** así no se puede aplicar la propiedad del cociente. Sin embargo observará que cuando x se acerca a 2, el numerador se acerca a 1 y el denominador va siendo cada vez más pequeño y positivo, el cociente por consiguiente va a un número extremadamente grande cuando x se acerca a 2. Diremos entonces que el límite no existe y abusando de nuestra propia terminología diremos que vale $+\infty$. Estos conceptos próximamente los aclararemos.

Ejemplo 2.- Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

Solución: De nuevo el denominador es 0 en 2, pero en este caso el numerador también, quedando la forma indefinida $\frac{0}{0}$. Cuando ocurre este tipo de situación se debe manipular algebraicamente, en el caso de polinomio sobre polinomio se deberá factorizar y luego simplificar.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\ .$$

Al simplificar nos quedará la función $\frac{1}{x+2}$, la cuál es igual a la original salvo en x=2 donde la primera no está definida, pero en la definición de límite no se consideran el valor 2, así que

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)}\overset{racional}{=}\frac{1}{(2+2)}=\frac{1}{4}.$$

Cuando tenemos un límite que al evaluarlo da la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ hay que realizar una manipulación algebraica según sea el caso que nos lleve a una simplificación, entre un factor del numerador y un factor del denominador.

Observación.- Un límite de una forma indeterminada puede ser una constante, cero, infinito o no existir. Veamos distintas situaciones triviales de límites de la forma $\frac{0}{0}$:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}\overset{simplificar}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1}=0$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x}\overset{simplificar}{=}\lim_{x\to 0}\frac{k}{1}=k$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}\overset{simplificar}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}\overset{simplificar}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$. Este último límite no está definido, si x se acerca a 0 por la derecha va a más infinito, si se acerca a 0 por la izquierda va a menos infinito.

El siguiente es otro ejemplo con forma indeterminada $\frac{0}{0}$, donde el numerador y el denominador son polinomios. De nuevo la idea será factorizar y simplificar.

Ejemplo 3.- Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^3-27}$

Solución.-

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^3-27}\underset{factorizar}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x^2+3x+9)}\underset{simplificar}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)}{(x^2+3x+9)}\underset{evaluar}{\overset{f.racional}{=}}\frac{3+1}{9+9+9}=\frac{4}{27}$$

En el próximo ejemplo tendremos otra vez la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, pero esta ocasión no será de la forma polinomio sobre polinomio, así que no podremos factorizar y simplificar de una vez.

Ejemplo 4.- Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Solución: De nuevo, al evaluar tenemos la forma $\frac{0}{0}$ pero esta vez aparece una raíz cuadrada en uno de los términos del numerador. El secreto de trabajar este tipo de límite con al menos uno de los dos miembros de la fracción con dos términos uno de los cuales lleva una raíz cuadrada en la variable es reescribir la expresión para $x\neq 1$. La forma de manipular es introducir la conjugada. Entonces tenemos para $x\neq 1$ que:

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot 1=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$$

Se reescribe 1 como la conjugada sobre la conjugada

$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

Se realiza el producto $(a+b)(a-b)$ que nos ayudará a eliminar la raíz. El otro producto del otro miembro de la fracción no se ejecuta.

$$=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

Se simplifica.

Así

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 1}(x+3)}+2}=\frac{1}{4}$$

De nuevo remarcamos que la primera igualdad se obtuvo porque las dos expresiones que se les está tomando límites asumen los mismos valores salvo en 1, que no interesa pues no está en la definición de límite.

Veamos otro ejemplo que intenta ilustrar la forma de trabajar. Algunos detalles de aplicación de propiedades son omitidos.

Ejemplo 5.- Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}$

Solución: En este límite se debe racionalizar el numerador pues tenemos otra vez la indeterminación 0/0.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}\cdot 1$$ Se racionaliza el numerador

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}\cdot\frac{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^2-\left(2\sqrt{x-1}\right)^2}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4(x-1)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}$$

Se factoriza numerador y denominador en los factores que al evaluar dan 0. Posteriormente se simplifica

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{(x-1)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}=\frac{-2}{1\cdot(\sqrt{2\cdot 2}+2)}=-\frac{1}{2}.$$

Ejercicio de desarrollo.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{1-x}$

La forma $\frac{0}{0}$ no es la única forma indeterminada. Tenemos también la forma 1^{∞}. Esta última la tiene el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

Un cálculo más avanzado permite demostrar que este límite es el número *e*, recordemos que es un número irracional cuyos primeros dígitos son 2,71828 y es la base de los logaritmos naturales.

Veamos a través de una tabla que este límite parece acercarse cada vez más al número *e* cuando *x* se acerca a 0.

x	x	$(1+x)^{1/x}$		$f(x)$
	-10^{-1}	$(0.9)^{-10}$	=2.8679	
↓	-10^{-2}	$(0.99)^{-100}$	=2.7279	↓
	-10^{-3}	$(0.999)^{-1000}$	=2.7196	
	-10^{-4}	$(0.9999)^{-10000}$	=2.7184	
0	0			*e*?
	10^{-4}	$(1.0001)^{10000}$	=2.7181	
↑	10^{-3}	$(1.001)^{1000}$	=2.7169	↑
	10^{-2}	$(1.01)^{100}$	=2.7048	

En ocasiones se asume la existencia de este límite para calcular a través de él otros límites con formas semejantes, por medio de manipulaciones y sustituciones apropiadas. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.- Asuma que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Calcular

a) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{-2/x}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\sqrt{(1-3x)^{1/x}}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{-2/x}=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{1/x}\right)^{-2}\overset{p.potencia}{=}\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)^{-2}=(e)^{-2}=e^{-2}$

b) $\lim_{x\to 0}\sqrt{(1-3x)^{1/x}}=\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0}(1+(-3x))^{\frac{-3}{2(-3x)}}=$

Se hace la sustitución $y=-3x$, esto es, sustituimos la expresión (-3*x*) por *y*, tomando además en consideración que si $x\to 0$, entonces $-3x\to 0$ y por consiguiente $y\to 0$.

$=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{-3}{2y}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)}$

El límite tiene que estar completamente en términos de la nueva variable *y*.

$\overset{p.potencia}{=}\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-3/2}=(e)^{-3/2}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$

Ejercicio de desarrollo: Asuma que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Calcular

$\lim_{x\to 0}4(1-5x)^{\frac{3}{2x}}$

El siguiente es un límite que se plantea en el cálculo diferencial:

Ejemplo 7.- Encontrar $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, donde $f(x)=x^2+2$.

Solución.- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2-(x^2+2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+2-x^2-2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=2x$

Observación: en este límite la variable sobre la que se está tomando límite es *h*, *x* se comporta como constante.

Ejercicio de desarrollo.- Calcular el siguiente límite para $f(x)=\sqrt{1-x}+2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

EJERCICIOS

1) Hallar los siguientes límites, justifique de igualdad en igualdad las propiedades que está usando.

1.1) $\lim_{x\to\frac{1}{4}}\sqrt{(1-2x)^3}$ **;** **1.2)** $\lim_{x\to 0}3x-\sqrt{x^2+1}$**;** **1.3)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-4x+1}{x^5-2x^2-5x+1}$**;** **1.4)** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-\sqrt{x+3}}$

2) Encuentre los siguientes límites.

2.1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$**;** **2.2)** $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^3-2x^2}$**;** **2.3)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-4x+1}{2x^2-3x+4}$

2.4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{x^2-x}$**;** **2.5)** $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$**;** **2.6)** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2x}$

2.7) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2-2x+1}$**;** **2.8)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2-2x}$**;** **2.9)** $\lim_{x\to 0}2(1+3x)^{2/x}$

2.10) $\lim_{x\to 0}(\frac{x-x^2}{x})^{1/x}$**;** **2.11)** $\lim_{x\to 0}2(1+3x)^{\frac{3x+4}{x}}$ **;** **2.12)** $\lim_{x\to 0}(1+2x^2)^{1/x^2}$

2.13) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-x}$**;** **2.14)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-(x+2)}{x}$**;** **2.15)** $\lim_{x\to 0}\sqrt{4(1-2x)^{-1/x}}$

2.16) $\lim_{t\to 4}\frac{16-t^2}{2\sqrt{t}-4}$**;** **2.17)** $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$**;** **2.18)**

3) Encontrar $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

3.1) $f(x)=x^2-2x$**;** **3.2)** $f(x)=x^2-2$**;** **3.3)** $f(x)=3-5x$**;**

3.4) $f(x)=\frac{1}{1+x}$**;** **3.5)** $f(x)=\sqrt{x+1}$**;** **3.6)** $f(x)=2\sqrt{x}$

4) Calcular

4.1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$**;** **4.2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x}}$**;** **4.3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}$

Respuestas: **1.1)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$; **1.2)** -1; **1.3)** 1; **1.4)** -1

2.1) $-\frac{1}{4}$; **2.2)** 3/4-1; **2.3)** $\frac{1}{4}$; **2.4)**-1; **2.5)** $\frac{1}{2}$; **2.6)** $-\frac{8}{7}$; **2.7)** 0; **2.8)** $-\frac{1}{2}$; **2.9)**$2e^6$; **2.10)** e^{-1};

2.11)$2e^{12}$; **2.12)** e^2; **2.13)** 6; **2.14)** -1; **2.15)** 2e; **2.16)** -16; **2.17)** $-\frac{3}{8}$; **2.18)**

3.1) $2x$-2 **3.2)**$2x$ **3.3)**-5; **3.4)** $-\frac{1}{(1+x)^2}$ **3.5)** $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; **3.6)** $\frac{1}{\sqrt{x}}$

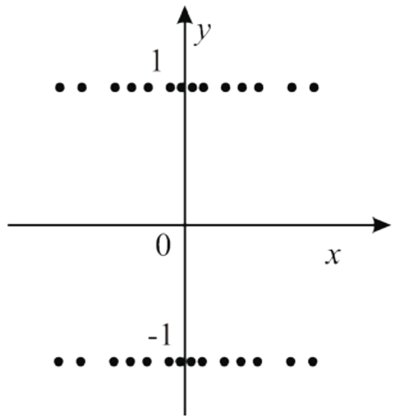
LIMITES QUE NO EXISTEN

En ocasiones el límite no existe ya que el valor de la función $f(x)$ no se aproxima a un único valor cuando x tiende a un x_0. Pretendemos mostrar en los siguientes ejemplos distintas formas en que el límite no existe. La primera que mostramos es una función muy irregular cerca de 0,

Ejemplo 1.- Determine $\lim_{x\to 0} f(x)$, donde *f* está definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1, & si \quad x=\dfrac{1}{2n} \\ -1 & si \quad x=\dfrac{1}{2n+1} \\ 0 & si \quad no \end{cases}$$

Con *n* número natural.



En el lado derecho mostramos la gráfica de la función *f* y abajo una tabla de distintos valores de la función para *x* cada vez más próximos a 0, escogidos estratégicamente para exhibir el comportamiento oscilatorio de la función alrededor de 0. Esto es, la grafica va de –1 a 1, pasando por cero, un número infinito de veces, en una vecindad de 0. Resulta imposible que *f*(*x*) este cerca de un solo número L, de aquí podemos decir que el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

$$\frac{\frac{1}{101}+\frac{1}{102}}{2}=\frac{203}{2(101)(102)}$$
punto medio entre 1/101 y 1/102

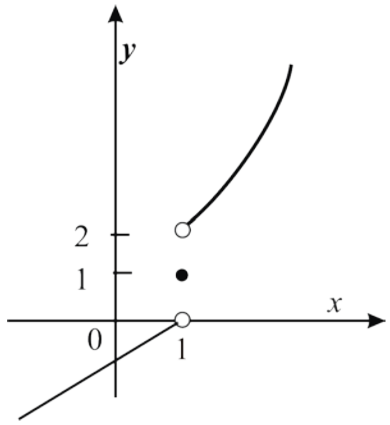
x	1/2	1/3	7/24	1/4	1/5	11/60	1/6	1/7	…	1/100	1/101		$\to$	0
f(*x*)	1	-1	0	1	-1	0	1	-1		1	-1	0	$\not\to$	

Se hace referencia a este tipo de situación diciendo que la **función oscila infinitamente cerca de** x_0**.**

Ejemplo 2.- Determine $\lim_{x\to 1} f(x)$**,** donde f esta definido por

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & si \quad x<1 \\ 1 & si \quad x=1 \\ x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Solución:
Observe que para valores de *x* muy cercanos a 1, pero menores que 1, los valores de la función *f* son muy cercanos a 0. Por el otro lado, si los valores de *x* están cerca de 1, pero mayores que 1, entonces los valores de la función allí son cercanos a 2. Como usted podrá ver no hay un solo número que la función se acerque cuando *x* se aproxima a 1. De aquí concluimos que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.



Cuando la gráfica de la función da un salto, el límite puede no existir. Específicamente **no existe el límite de *f*(*x*) en la situación que la función tiende a un número L_1 cuando *x* se acerca a x_0 por la izquierda distinto a cuando *x* se acerca x_0 por la derecha.**

Ejemplo 3.- Determine $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$.

Solución: En la sección pasada vimos que el valor de la función tiende a $+\infty$. Ahora bien $+\infty$ no es un número es una expresión para decir que los valores de la **función aumentan sin límite, cuando *x* se acerca a** x_0. Esta es otra situación en que un límite puede no existir.

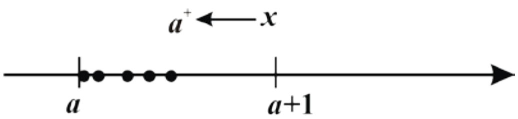
LIMITES LATERALES

En el ejemplo 2 de la sección pasada teníamos que para la función

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & si \quad x<1 \\ 1 & si \quad x=1 \\ x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

el límite no existía en 1, sin embargo si nos acercábamos a 1 por la derecha la función tendía a 2 y si nos acercábamos por la izquierda la función tendía a 0. Este hecho lo podemos expresar a través de los límites laterales.

Si *x* tiende a *a* por la derecha escribimos $x \to a^+$



Definición (intuitiva).- Si *f*(*x*) se acerca a un número específico *L*, cuando *x* se aproxima a *a* por la derecha decimos que el límite de *f*(*x*) cuando *x* tiende a *a* por la derecha es *L* y escribimos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L\,.$$

De manera análoga podemos definir $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Observación.- Las propiedades de los límites bilaterales se siguen cumpliendo en el caso de los límites laterales. Esto es, el límite de una suma es la suma de los límites, el límite de un producto, el límite de una raíz, etc. siguen las mismas reglas.

Podemos demostrar la existencia de determinados límites a través del siguiente Teorema.

Teorema.- Sean a y L dos números reales y f una función real definida en un intervalo abierto conteniendo a a. Tenemos entonces que $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

Este Teorema tiene dos formas de usarlo:

1.- Si los dos límites laterales son distintos, entonces concluimos que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

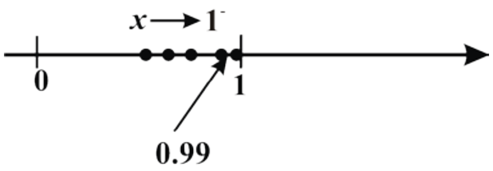
2.- En el caso que los dos límites laterales existan y sean iguales entonces concluimos que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y vale L.

Ejemplo 1.- Calcular **a)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ y **b)** $\lim_{x\to 2} f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad x=1 \\ 3x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Solución:

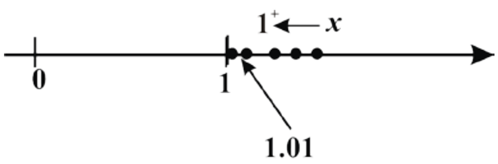
a) Como la función está definida con una fórmula antes de 1 y otra después de 1, hay que usar límites laterales y luego ver si son iguales o no para concluir la existencia del límite que nos interesa.



Observe que si $x\to 1^-$, estos x son menores que 1, así que $f(x)=x^2+1$ allí.

Por tanto

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=1^2+1=2$.



De manera análoga, si $x\to 1^+$, estos x son mayores que 1, así que $f(x)=3x\ -1$ allí.

Así

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^{-+}}(3x-1)=3.1-1=2$.

Como los dos límites laterales son iguales a 2, concluimos que

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

b) Para calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$ tomamos en cuenta que a medida que estamos más cerca de 2, los x son mayores que 1, por tanto $f(x)=3x-1$.

Así

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}3x-1=5$.

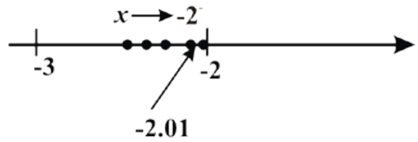
Ejemplo 2.- Calcular $\lim_{x \to -2} f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x+2}, & si \quad x<-2 \\ x-1 & si \quad x>-2 \end{cases}$$

Solución:
Como la función está definida con una fórmula antes de -2 y otra después de -2, hay que usar límites laterales y luego ver si son iguales o no para concluir la existencia del límite que nos interesa.

Observe que si $x \to -2^-$, estos x son menores que -2,

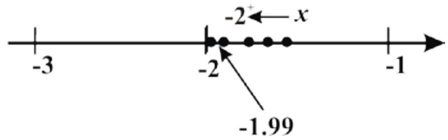
así que $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x+2}$ allí. Por tanto



$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{4-x^2}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{x+2} = \lim_{x \to -2}(2-x)=4.$$

De manera análoga, si $x \to -2^+$, estos x son mayores que -2,

así que $f(x)=x-1$ allí. Así



$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+}(x-1) = -2-1=-3.$$

Como los dos límites laterales son distintos concluimos que $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe

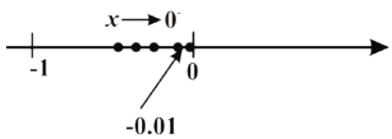
Ejemplo 3.- Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

Solución: Sabemos que al evaluar el valor absoluto tenemos que tomar en cuenta el signo de la variable *x*. Si *x* está cerca de 0, entonces tomaremos límites laterales

Si $x \to 0^-$, estos x son menores que 0, por consiguiente los *x´s* son negativos y de aquí $|x|=-x$

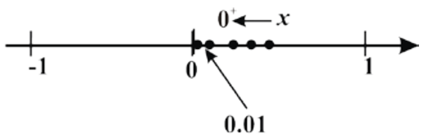
|-0.01|=0.01

Por consiguiente:



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-}(-1) = -1$$

Si $x \to 0^+$, estos x son mayores que 0, por consiguiente los *x´s* son positivos y de aquí $|x|=x$



Así obtenemos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+}(1) = 1.$$

Como los límites laterales son distintos concluimos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \text{ no existe.}$$

Ejercicio de desarrollo- Calcular $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+12}, & si \quad x<2\\ 3 & si \quad x=2\\ x^2 & si \quad x>2\end{cases}$$

Respuesta: $\lim_{x\to 3} f(x)$ =9; $\lim_{x\to 2} f(x)$ si existe y vale 4.

Ejemplo 3.- Consiga el valor de *k* para el cual $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe, donde

$$f(x)=\begin{cases}kx+2, & si \quad x<3\\ \\ x^2-1 & si \quad x>3\end{cases}$$

Solución: La función está definida por partes y justo en 3 cambia la fórmula para evaluar la función. Para que el límite $\lim_{x\to 3} f(x)$ exista los límites laterales deben ser iguales. Así que el procedimiento es calcular el límite lateral por la izquierda, que dependerá de k , y el límite por la derecha, luego plantear la ecuación que los dos límites laterales son iguales, resolviendo la ecuación se obtendrá el valor de *k*.

El límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} kx+2=k\cdot 3+2$$

El límite por la derecha

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} x^2-1=9-1=8$$

Se plantear la ecuación

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$3k+2=8$$

La solución de esta ecuación es $k=2$, así que para este valor de *k*, los límites laterales son iguales y por consiguiente el límite $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe si y sólo si $k=2$.

Observación.- De nuevo insistimos que la insistencia de un límite en un punto no depende si la función está definida o no en ese punto o si el valor de la función en ese punto es igual o no al límite.

Ejercicio de desarrollo.

Consiga el valor de *k* para el cual $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe, donde

$$f(x)=\begin{cases}3x-2, & si \quad x<-1\\ 1 & si \quad x=-1\\ xk & si \quad x>-1\end{cases}$$

Comentario.- Los límites laterales no sólo se introducen para el caso en que la función sea sospechosa de dar un salto. También son necesarios en el caso que la función tenga un dominio restringido.

Por ejemplo, el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ es el conjunto $[-1,+\infty)$. Si queremos saber que sucede con los valores de la función cuando x se aproxima a –1, solo tiene sentido plantear el límite cuando x tiende a –1 por la derecha, pues allí es donde está definida la función. No tiene sentido plantear en este caso $\lim_{x\to -1}\sqrt{x+1}$ ni $\lim_{x\to -1^-}\sqrt{x+1}$.

LIMITES INFINITOS

Ya habíamos visto que $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ no existía, pues los valores de la función se hacen arbitrariamente grandes cuando x se acerca a 0. Esto se escribe como

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\,.$$

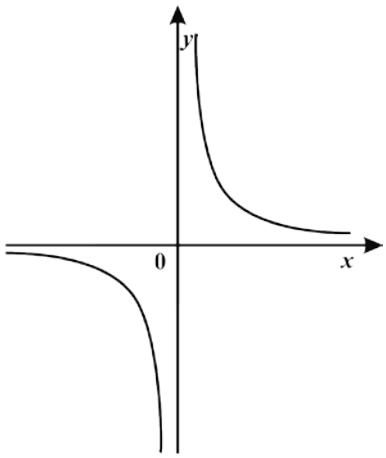
Veamos límites de la función $f(x)=\frac{1}{x}$, cuya gráfica es conocida.

Observe de la gráfica que si x se acerca a 0 por la derecha, la función toma valores arbitrariamente grandes, esto es

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\,.$$

Por el otro lado, la función (la y) toma valores negativos, pero arbitrariamente grandes en magnitud conforme x se aproxima a 0 por la izquierda, esto lo expresamos diciendo que la función va a $-\infty$. En nuestra notación, esto es:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\,.$$



Ejemplo 1.- Determinar $\lim_{x\to 2}\frac{x}{2x-x^2}$.

Solución: El denominador tiende a 0 cuando x se acerca a 2, pero el signo es distinto dependiendo por que lado vaya x a 2. Así tomamos límites laterales

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{2x-x^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2-x}\overset{\frac{1}{0^-}}{=}-\infty\,.$$

Si $x\to 2^+$, entonces los x´s son mayores que 2, por lo tanto $2-x\to 0^-$.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{2x-x^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}\overset{\frac{1}{0+}}{=}+\infty$$

De aquí concluimos que $\lim_{x\to 2}\frac{x}{2x-x^2}$ no existe.

Hay que remarcar que siempre que se pueda, se simplifica la expresión, en este caso resultó más fácil el análisis una vez simplificada la expresión. Pero no siempre se puede. Las expresiones factorizadas también ayudan en el análisis del signo del límite.

Ejemplo 2.- Determinar $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$.

Solución: Conviene factorizar, para realizar mejor un estudio de signos

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\overset{\frac{2}{0^-\cdot(-2)}}{=}+\infty$$

Si $x\to 1^-$, entonces $x+1\to 2$, $x-1\to 0^-$ y $x-3\to -2$.

Observe que el denominador es el producto de dos números negativos, por tanto el denominador es positivo y se acerca a 0.

Ejercicio de desarrollo.- Calcular el siguiente límite

$$\lim_{t\to -2^+}\frac{t^3-4}{4-t^2}$$

FORMA INDETERMINADA $\infty-\infty$

Si al evaluar un límite nos da la forma $\infty-\infty$ o $-\infty+\infty$ deberemos manipular la expresión y convertirla en un cociente. Recuerde que el resultado de un límite con una forma indeterminada puede dar cualquier cosa, observe como en el

Ejemplo 3.- Determinar **a)** $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=-\infty-\infty=-\infty$

b) El otro límite lateral si queda de la forma indeterminada $\infty-\infty$. Para convertirlo en un cociente sumamos fracciones:

$$\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{(x+1)^2}=-\infty$$

Ejemplo 4.- Determinar **a)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x(x-1)}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x(x-1)}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x(x-1)}\right)\overset{-\infty+\infty}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}\right)\overset{0/0}{=}$ Como quedó 0/0 factorizamos y simplificamos

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x} = 2\,.$$

b) Para calcular el límite bilateral tenemos que calcular el límite por la derecha. El lector se puede dar cuenta que el los pasos para calcular el límite por la derecha son mismo que en la parte a) y da

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x(x-1)}\right) = 2$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x(x-1)}\right) = 2$$

Ejercicio de desarrollo.- Calcular el siguiente límite

a) $\lim\limits_{t\to -2^+} \dfrac{t}{4-t^2}-\dfrac{1}{2-t}$

b) $\lim\limits_{t\to -2^-} \dfrac{t}{4-t^2}-\dfrac{1}{2-t}$

APLICACIONES

Ejemplo 1.- El costo de eliminar el *p* por ciento de contaminación en un lago está dado por $C(p)=\dfrac{1500p}{100-p}$. **a)** ¿Cuál es el costo de eliminar el 50% de la contaminación del lago?

b) Encuentre $\lim\limits_{p\to 100^-} C(p)$ **c)** ¿Se puede eliminar el 100% de la contaminación

Solución :

a) Se tiene que evaluar $C(p)$ en $p=50$. Esto da

$$C(50)=\frac{1500\cdot 50}{100-50}=1500\,\text{UM}$$

b) Observe que en $\lim\limits_{p\to 100^-}\dfrac{1500p}{100-p}$ el denominador se acerca a 0 con signo positivo y el numerador a 150000, así pues $\lim\limits_{p\to 100^-}\dfrac{1500p}{100-p}=\infty$.

c) El costo aumenta ilimitadamente cuando el porcentaje de contaminación que se quiere eliminar se acerca al 100%, así que es imposible eliminar toda la contaminación.

EJERCICIOS

1) Calcule los siguientes límites. Si alguno no existe, justifique

1.1) $\lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x-3}$; **1.2)** $\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x}{2-x}$; **1.3)** $\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2+4x+4}$;

1.4) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x^2+3x+2}$; **1.5)** $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{3}$; **1.6)** $\lim_{x\to 2} \frac{x}{2-x}$;

1.7) $\lim_{x\to -1^+} (1+x)^{-1}$; **1.8)** $\lim_{x\to 1} \left|\frac{1}{x-1}\right|$; **1.9)** $\lim_{x\to 5^-} \frac{\sqrt{25-x^2}}{2-x}$;

1.10) $\lim_{y\to 1^-} \frac{2y}{(1-y)\sqrt{1-y}}$; **1.11)** $\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x^2-4x+3}$; **1.12)** $\lim_{x\to -1^+} x\sqrt{1+x}$

1.13) $\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2}$; **1.14)** $\lim_{x\to -1^-} 1-\frac{2}{x^2-1}$; **1.15)** $\lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{x^2-x-2}$

1.16) $\lim_{y\to 0^-} \frac{y^2+2y^4}{2y^3+5y^4}$; **1.17)** $\lim_{x\to -1^+} x\sqrt{1+x}$; **1.18)** $\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{x-1}{x^2-4x}\right)$

1.19) $\lim_{x\to 1^-}\left(2-\frac{1}{x^2-4x+3}\right)$; **1.20)** $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-1}$; **1.21)** $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-x}\right)$

1.22) $\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{2}{y}-\frac{y+1}{y^3}\right)$; **1.23)** $\lim_{x\to 1^+} 1-\ln(x-1)$; **1.24)** $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}+\ln(1-x)$

2) Para las siguientes funciones encontrar los límites indicados. Si alguno no existen, justifique.

2.1) $f(x)=\begin{cases} -x^3+1, & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ 3x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 1} f(x)$; **b)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; **c)** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$;
d) $\lim_{x\to 0} f(x)$; **e)** $\lim_{x\to \infty} f(x)$

2.2) $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{x^2-1}, & si \quad x\le -2 \\ x^2-1 & si \quad x>-2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 0} g(x)$; **b)** $\lim_{x\to -2^+} g(x)$;
c) $\lim_{x\to -2^-} g(x)$; **d)** $\lim_{x\to -2} g(x)$

2.3) $f(x)=\begin{cases} 2^x & si \quad x\le 0 \\ \ln(x+1)+1 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 1} f(x)$; **b)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$;
c) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; **d)** $\lim_{x\to 0} f(x)$

2.4) $f(x)=\begin{cases} -1, & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x=0 \\ x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$; **b)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$;
c) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; **d)** $\lim_{x\to 0} f(x)$; **e)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

2.5) $h(x)=\begin{cases} \frac{x^3-2x^2}{x^2+2x-8} & x>2 \\ \frac{x^2+2}{6} & x\le 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 2^+} h(x)$; **b)** $\lim_{x\to 2} h(x)$.

2.6) $g(x)=\begin{cases} \frac{1-x^2}{x^2-4x+3}, & si \quad x<1 \\ x, & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 1} g(x)$; **b)** $\lim_{x\to 1^-} g(x)$

2.7) $h(x)=\begin{cases} x+3x^2 & x<2 \\ \dfrac{x^4-16}{4-\sqrt{8x}} & x>2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$**; c)** $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

2.8) $H(x)=\begin{cases} (1+\dfrac{x}{3})^{1/x} & x<0 \\ \sqrt[3]{e^{1-x}} & x\geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} H(x)$

3) Consiga el valor de *k* para el cual el límite de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe, donde

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & si \quad x<1 \\ x-k & si \quad x>1 \end{cases}$$

4) Consiga el valor de *k* para el cual el límite indicado exista

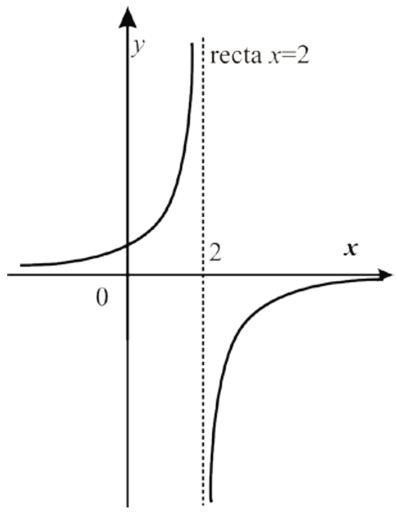
4.1) $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & si \quad x<-1 \\ 1 & si \quad x=-1 \\ xk & si \quad x>-1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; **4.2)** $f(x)=\begin{cases} kx-1, & si \quad x<2 \\ x^3\sqrt{k}-9 & si \quad x>2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Respuestas: 1.1) $-\infty$ **1.2)** ∞; **1.3)** $-\infty$; **1.4)** 0; **1.5)** $\sqrt{3}$; **1.6)**No existe; **1.7)** ∞; **1.8)** ∞; **1.9) 0; 1.10)** ∞;**1.11)** ∞; **1.12)**0; **1.13)**0; **1.14)** ∞0; **1.15)**-1/3 **1.16)** $-\infty$ **1.17)** 0; **1.18)** ∞ **1.19)** $-\infty$ **1.20) 3/2; 1.21)** $-\infty$**; 1.22)** ∞ **;1.23)** $+\infty$**;1.24)** $-\infty$**;** **2.1 a)** 2; **b)**-1; **c)**1; **d)**no existe **e)** ∞ **2.2) a)**-1; **b)**3; **c) -**$\sqrt{3}$ **d)**no existe; **2.3) a)** ln2+1; **b)**1; **c)**1; **d)**1; **2.4) a)**1 **b)**-1; **c)**-1; **d)**-1; **e)**-1; **2.5) a)**1/2; **b)**no existe; **2.6) a)**no existe**; b)**1**;**
2.7) a) -32 **b) -32; c)**no existe**. 2.8)** $\sqrt[3]{e}$ **3) 1; 4.1)** 1; **4.2)** 4

ASINTOTAS VERTICALES

Intuitivamente **una asíntota** de una función **es una recta** tal que la gráfica de la función se acerca cada vez más a ella en cierto sentido. Si hablamos de asíntota vertical nos referimos a una recta vertical.

En la figura se puede apreciar como la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ crece o decrece sin límite cuando x se acerca a 2. La gráfica de la función se acerca cada vez más a la recta x=2 La recta x=2 la llamaremos una asíntota vertical de la gráfica de f.



Este tipo de comportamiento es descrito por los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2-x}=-\infty\,.$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}=+\infty\,.$$

Esto dice que cuando x se acerca a 2 por la izquierda, los valores de la función (las y) toman valores positivos y arbitrariamente grandes, como efectivamente ocurre en la gráfica. Así que hay una correspondencia entre asíntotas verticales y límites laterales.

Definición.- La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$ si se cumple cualquiera de las siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ **ó** **d)** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$**.**

Para buscar las asíntotas verticales de la gráfica de una función, debemos conocer algo acerca de los valores que toma la función. En el caso que la función tenga algún término fraccionario deberíamos buscar asíntotas $x=k$, para aquellos valores k donde el denominador se hace 0.

Ejemplo 1.- Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{2}{(x-1)(x+3)}\,.$$

Bosquejar la gráfica de la función en la zona donde se aproxima a la asíntota.

Solución: Los candidatos a para que $x=a$ sea una asíntota vertical son los x donde se anula el denominador de la función; planteamos entonces la ecuación

$$(x-1)(x+3)=0$$

cuyas soluciones son 1 y –3.

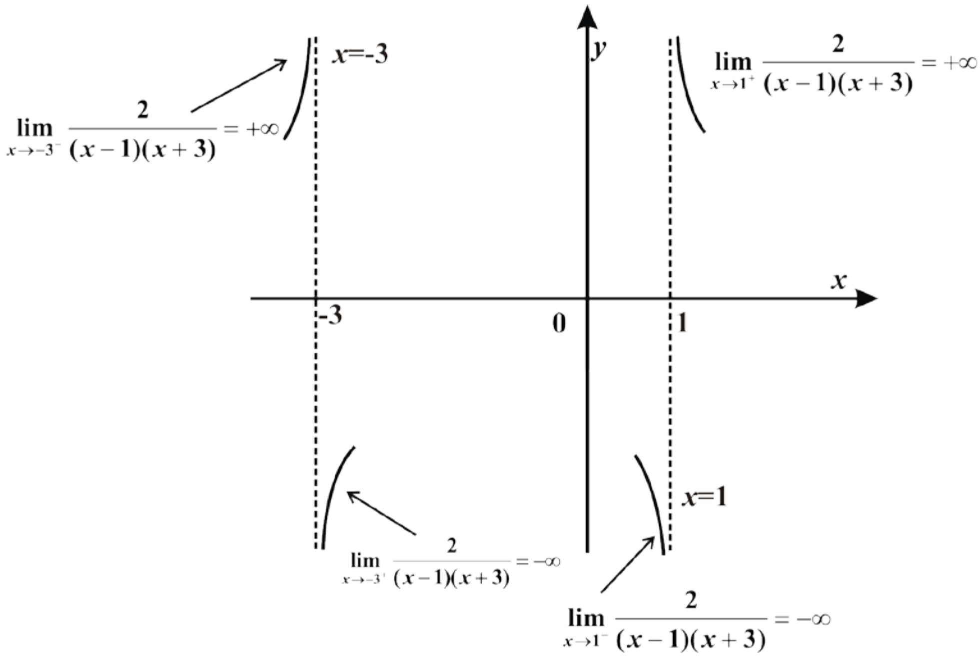
A fin de llevar a cabo la graficación requerida, planteamos todos los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{(x-1)(x+3)}\overset{\frac{2}{0^+\cdot 5}}{=}+\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{(x-1)(x+3)}\overset{\frac{2}{0^-\cdot 5}}{=}-\infty$$

De aquí concluimos que x=1 es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{2}{(x-1)(x+3)} \overset{\frac{2}{-4\cdot 0^+}}{=} -\infty \qquad \lim_{x\to -3^-}\frac{2}{(x-1)(x+3)} \overset{\frac{2}{-4\cdot 0^-}}{=} +\infty$$

Tenemos entonces que x=-3 también es una asíntota vertical. Esta información de los límites laterales es exhibida en la siguiente figura donde la gráfica está incompleta sólo se ha bosquejado en las zonas cercanas a las asíntotas.



Comentario: Una función puede no tener o tener un número finito o infinito de asíntotas verticales.

Ejemplo 2.- Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)}$.

Solución: Observe que el denominador se hace 0 en x=1. Así planteamos

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+1}{(x-1)} \underset{factorizar}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{x-1} \overset{simplificar}{=} \lim_{x\to 1^+}(x-1)=0.$$

Igual valor nos da el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda. Concluimos que esta función no tiene asíntotas verticales.

Recuerde que en una función fraccionaria, los x´s donde el denominador se hace 0 son sólo candidatos a Asíntota vertical.

Ejercicio de desarrollo.- Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x^3-x)}$

Funciones que tienen logaritmo en su definición pudieran tener asíntotas verticales, pues conocemos que el logaritmo toma valores tendiendo a $-\infty$ cuando se evalúa en valores tendiendo a cero.

Ejemplo 4.- Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de las siguientes funciones
a) $f(x)=\ln(x-2)+x$ **; b)** $h(x)=\ln(2-x)+\sqrt{1-x}$ **c)** $g(x)=(x-1)\ln(x-1)^2$ (requiere L´Hopital);
Solución:
a) El dominio de esta función es el conjunto $(2,\infty)$
Observe que el candidato a asíntota vertical es cuando $(x-2)=0$**,** esto es $x=2$**.** Para verificar sólo planteamos y resolvemos el límite por la derecha pues no tiene sentido plantear el límite por la izquierda.

$$\lim_{x\to 2^+} \ln(x-2)+x \;=\; -\infty$$

Así $x=2$ es una asíntota vertical de la función.
b) El dominio de la función es el conjunto $(-\infty,1]$**.** El único candidato a asíntota vertical es $x=2$, pero la función no está definida en un entorno de 2, por tanto la función no tiene asíntotas verticales
c) El dominio de esta función es **R**-{1}, pues $(x-1)^2>0$**,** salvo en 1 que es cero. $x=1$ es el candidato a asíntota vertical.
En este caso se plantean los dos límites:

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)^2 \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln(x-1)}{(x-1)^{-1}} \underset{L´H}{\overset{\infty/\infty}{=}}$$ se reescribió para poder usar L¨Hopital

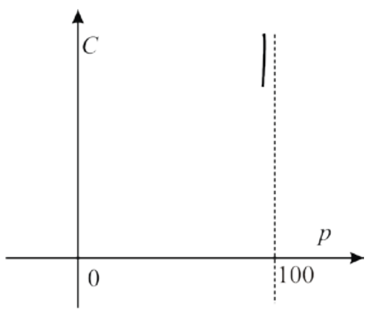
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\frac{1}{x-1}}{-1(x-1)^{-2}}= =\lim_{x\to 1^+}-2(x-1)=0$$

Similarmente podemos chequear que $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)^2=0$.
En conclusión la función *g* no tiene asíntotas verticales.

APLICACIÓN

Ejemplo 1.- El costo de eliminar el *p* por ciento de contaminación en un lago está dado por $C(p)=\dfrac{1500p}{100-p}$. a) Determine la asíntota vertical de la gráfica de $C(p)$ b) Dibuje el comportamiento de la función costo cerca de la asíntota

Solución
a)Como $\lim_{p\to 100^-}\dfrac{1500p}{100-p}=\infty$, entonces $p=100$ es una asíntota vertical de la grafica de $C(p)$
b) Al lado se muestra la grafica de $C(p)$ en una vecindad de *p*=100



EJERCICIOS

1) Determinar todas las asíntotas verticales de las funciones dadas. Dibuje la gráfica cerca de las asintotas

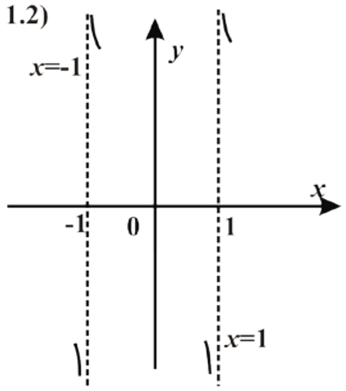
1.1) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ **;** **1.2)** $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$**;** **1.3)** $f(x)=\dfrac{x}{x^3+2x^2-x-2}$

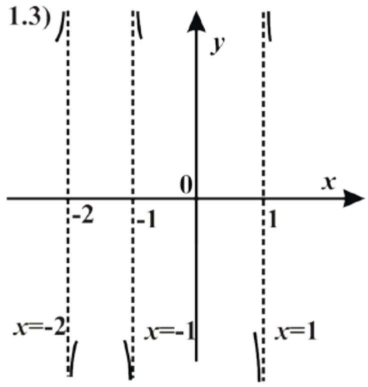
1.4) $f(x) = (2-x)^{-2}$ **;** **1.5)** $h(x) = \dfrac{x^3-2}{x^3+8}$ **;** **1.6)** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-4x}$

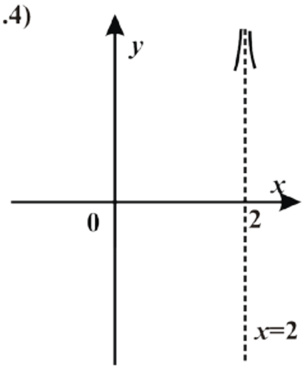
1.7) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{4-x^2}$ **;** **1.8)** $f(x) = \sqrt{x} - \ln(1+x)$ **;** **1.9)** $g(x) = x - \ln(1+x)$ **;**

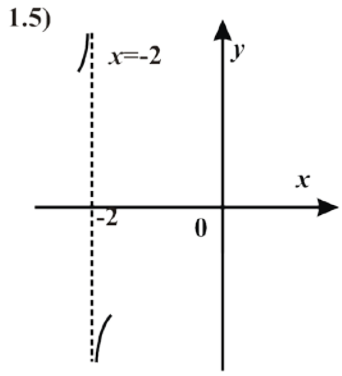
1.10) $f(x) = x + \ln(1-x)$ **;** **1.11)** $f(x) = \dfrac{4-x}{2x-x^2}$

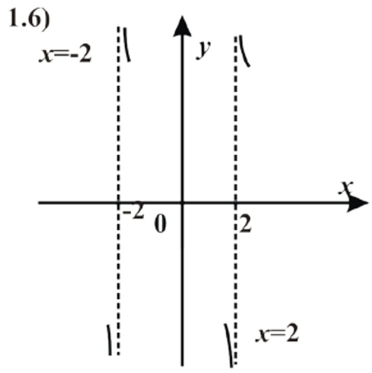
Respuestas: 1.1) No tiene; **1.2)** $x=-1$; $x=1$; **1.3)** $x=-1$; $x=1$; $x=-2$; **1.4)** $x=2$; **1.5)** $x=-2$; **1.6)** $x=-2$; $x=2$; **1.8)** No tiene ; **1.9)** $x=-1$; **1.10)** $x=1$ **; 1.11)** $x=2$; $x=0$

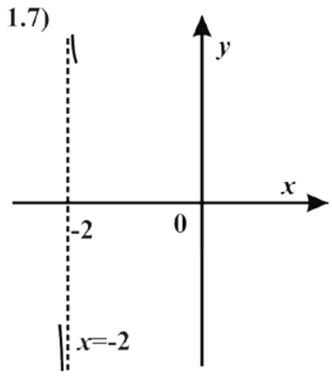
1.2)


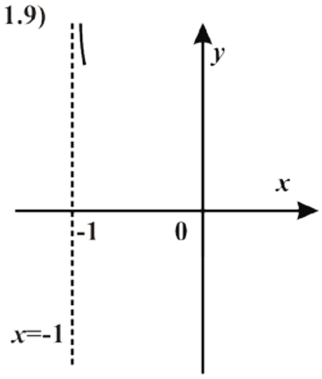
1.3)


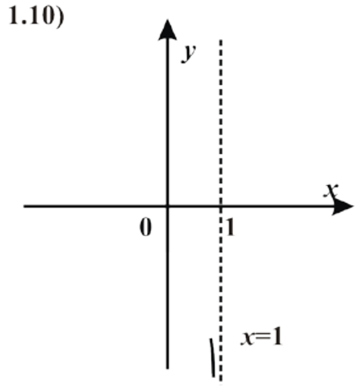
1.4)


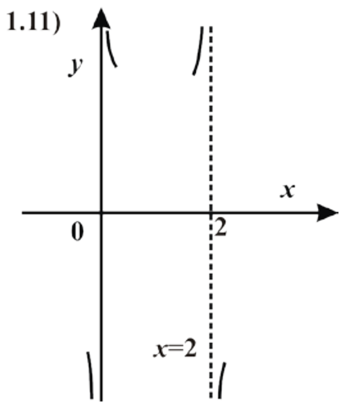
1.5)


1.6)


1.7)


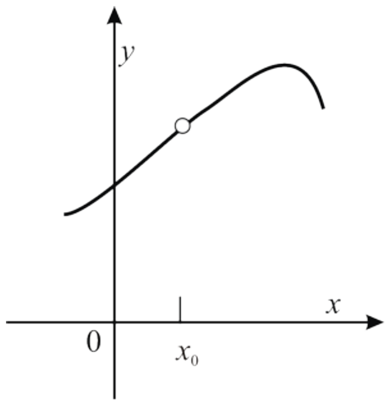
1.9)


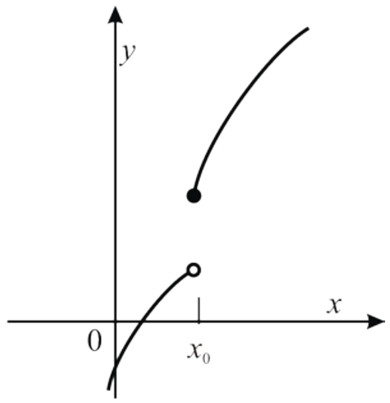
1.10)


1.11)


CONTINUIDAD

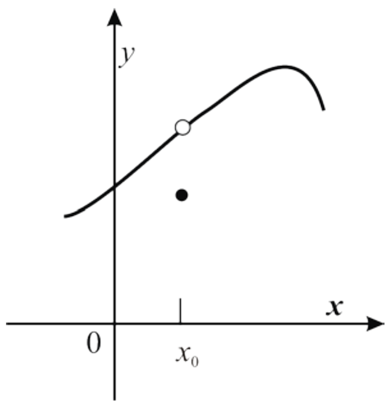
Intuitivamente una función f es continua en un punto x_0 si la gráfica de f no tiene saltos, dicho de otro modo: podemos hacer su gráfica sin levantar el lápiz al pasar por $(x_0, f(x_0))$. En el caso que la función no sea continua en x_0 decimos que es discontinua en el punto. Antes de dar la definición formal de continuidad, veamos estos tres ejemplos de funciones discontinuas en x_0.





El trazo de la gráfica de está función se ve interrumpido en x_0 porque la función no está definida allí.

La gráfica de está función se ve interrumpido en x_0 porque el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe.



La figura de al lado muestra la gráfica de una función discontinua en x_0 donde el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, la función está definida en x_0, sin embargo la discontinua se debe a que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no coincide con $f(x_0)$.

Estos tres ejemplos motivan la siguiente definición

Definición.- Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si cumplen las siguientes condiciones:

1.- $f(x_0)$ está definida.

2.- El $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y

3.- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Comentario: Observe que en las gráficas de las funciones dadas arriba al menos una de estas condiciones no se cumple.

Los siguientes ejemplos muestran como concluir si una función es continua o no en un punto usando la definición anterior.

Ejemplo 1.- Determinar si la siguiente función es continua en 0.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & si \quad x\leq 0 \\ x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$$

Solución: Para determinar la continuidad iremos chequeando una por una las tres condiciones de la definición, en cuanto una condición no se cumpla podremos concluir de una vez que la función no es continua en el punto en cuestión.

1.- *f* está definida en 0: efectivamente $f(0)=1$.

2.- $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, pues $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$ y $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$. De aquí concluimos que la función es discontinua en 0.

Remarcamos que para ver que una función es continua en un punto hay que chequear que se cumple las tres condiciones.

Ejemplo 2.- Determinar si la siguiente función es continua en 1.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}.$$

Solución: Chequeamos una por una las tres condiciones de continuidad en un punto,

1.- *f* está definida en 1:

$f(1)=2\cdot 1-1=1$.

2.- Para la segunda condición calculamos límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x-1=1 \text{ y}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1.$$

Por tanto $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe y vale 1

3.- Finalmente pasamos a la condición 3: vemos que $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$. De aquí concluimos que la función es continua en 1.

Ejemplo 3.- Determinar si la siguiente función $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ es continua en 0.

Solución: La función no está definida en 0, 0 no está en el dominio de la función. Por tanto la función no es continua en 0.

Ejercicio de desarrollo.- Determinar si las siguientes funciones son continuas en -1.

a) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3+1}, & si \quad x<-1 \\ -\dfrac{2}{3} & si \quad x=-1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^3+1} & si \quad x>-1 \end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

El siguiente Teorema tendrá consecuencias muy importantes.

Teorema 1.- *Sean f y g funciones continuas en x_0 y c un número escalar. Entonces las funciones cf , f+g, f-g, fg son continuas en x_0. Si $g(x_0)\neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0.*

Entre las consecuencias es que si asumimos que *x* es una función continúa entonces:

Corolario 1.- Las funciones polinómicas son continuas en cada x_0.

Las propiedades de los límites fueron enunciadas sin demostración. Algunas de ellas se basan en la continuidad. Así por ejemplo teníamos la propiedad de los polinomios, ella es justificada ahora porque sabemos que los polinomios son funciones continuas en cada punto x_0 y así por el punto 3 de la definición tenemos que

$$\lim_{x\to x_0} p(x)=p(x_0)$$

Corolario 2.- Sea *r* una función racional definida a través del cociente de polinomios $\dfrac{p(x)}{q(x)}$. Si x_0 está en el dominio de *r* entonces *r* es continua en x_0.

Demostración: Si x_0 está en el dominio de *r* entonces $q(x_0)\neq 0$. Como los polinomios son continuos en cualquier punto entonces por el Teorema 1 tenemos que $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es continuo en x_0.

De este corolario sale la propiedad del límite de funciones racionales:

Si *r*(*x*) una función racional definida en *a*. Entonces

$$\lim_{x\to a} r(x)=r(a).$$

La operación de composición entre funciones continuas en un punto x_0, también producen funciones continuas.

Teorema 2.- *Sean g función continua en x_0 y f función continua en $g(x_0)$. Entonces la función $f\circ g$ es continua en x_0.*

Si asumimos que $f(x)=\sqrt{x}$ en cada punto de su dominio, podemos verificar continuidad puntual de una gran familia de funciones sin recurrir a la definición

Ejemplo 4 .- Examinar la continuidad de $h(x)=\sqrt{x^2+1}$ en x_0

Solución: La función h puede ser expresada por la composición de: $f(x)=\sqrt{x}$ y la función $g(x)=x^2+1$. Hemos asumido que $f(x)=\sqrt{x}$ es continua en cada punto de su dominio. La función g también es continua en cualquier punto por ser polinomio.

Como f y g son continuas para cada punto de su dominio entonces $h(x)=(f\circ g)(x)$ es continua en cualquier punto x_0

El Teorema anterior se puede deducir del siguiente:

Teorema 3.- *Sean g tal que* $\lim_{x\to x_0} g(x)=L$ *y* y f *función continua en L. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0} g(x))$$

Definición.- Diremos que *f* es continua en un intervalo abierto si *f* es continua para cada punto de dicho intervalo.

Intuitivamente una función es continua en un intervalo abierto si la gráfica en ese intervalo no se ve interrumpida en ningún punto.

Casi todas las funciones que se tratan en los cursos de cálculo son continuas en su dominio salvo quizás en un conjunto finito de puntos.

A través de las gráficas usted puede ver que $f(x)=\sqrt[n]{x}$, x^n log(*x*), e^x, sen(*x*), cos(*x*) son continuas en su dominio.

Las funciones polinómicas y racionales son continuas en intervalos abiertos contenidos en su dominio.

Es fácil demostrar el siguiente:

Teorema 4.- Suponga f y g funciones continuas en un intervalo abierto *I* y *c* un número escalar. Entonces las funciones cf, $f+g$, $f-g$ y fg son continuas en *I*. La función $\dfrac{f}{g}$ es continua en *I* si *g* no se anula en ningún punto de *I*.

Comentario: Si queremos analizar los puntos donde una función definida por partes es continua es conveniente dividir el dominio en partes. En los intervalos se usaran los Teoremas y Corolario dados y en los puntos de empate nos valemos de la definición para ver continuidad.

Ejemplo 5.- Determinar el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son continuas

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}+1}{x^2-2x}$; **b)** $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x} & x<0\\ e^x+1 & x\geq 0\end{cases}$

Solución.-

a) El dominio de la función es el conjunto de los reales positivos, excepto el 2. Dom *f*= $(2,\infty)$

Veamos que el numerador es una función continua: $h_1(x)=2x$ es una función continua por ser un polinomio.La función definida por $\sqrt{2x}$ es una función continua por ser una composición de funciones continua: $h_2(x)=\sqrt{x}$ con la función $h_1(x)=2x$. De aquí concluimos que $\sqrt{2x}+1$ es una función continua por ser suma de funciones continuas.

Por otro lado el denominador es continuo por ser un polinomio.

Finalmente la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}+1}{x^2-2x}$ es continua en $(0,2)\cup(2,\infty)$ por ser cociente de funciones continuas en puntos donde el denominador no se anula.

b) Para analizar continuidad de funciones definidas por partes, conviene considerar cada parte por separado y los puntos de empates.

PARTE I ¿Continuidad en (-∞,0) ?

La función h es continua en (-∞,0) por ser cociente de funciones continuas que no se anulan el denominador.

PARTE II ¿Continuidad en (0, ∞)?

En (0, ∞) es continua por ser suma de funciones continuas.

PARTE III ¿Continuidad en el empate (x=0)?

Recuerde: En los puntos de empate nos valemos de la definición para ver continuidad.

Condición **1**: h(0) está definida y vale 2.

Condición **2**: $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x+1=2$, sin embargo $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-1}{x}=+\infty$. Por tanto $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ no existe y de una vez podemos decir que la función es discontinua e 0.

Concluimos que la función es continua en (-∞,0)$\cup(0,\infty$).

Ejemplo 6.- Determinar el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son continuas

$$f(x)=\begin{cases} -x-\dfrac{1}{2} & x\le 1 \\ \dfrac{x^3-1}{1-x^2} & x>1 \end{cases}$$

Solución: Como es una función definida por partes analizamos la continuidad en tres partes Los dos intervalos y el empate

PARTE I: $(-\infty,1)$ (Se concluye por Teoremas) La función está definida en esta parte como $f(x)=-x-\dfrac{1}{2}$, es un polinomio y por tanto continua.

PARTE II: $(1,\infty)$ (Se concluye por Teoremas) La función en esta parte está definida como $f(x)=\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$ es una función racional que no se anula en este intervalo y por tanto continua.

PARTE III: El punto $x=1$ Se discute por definición.

1. f está definido en 1 y vale $f(1)=-\dfrac{3}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}-x-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$

   $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-1}{1-x^2}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(1-x)(1+x)}=-\dfrac{3}{2}$

   De aquí el limite existe y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

3.- $f(1)=-\dfrac{3}{2}=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Por tanto la función es continua en 1.

En definitiva tenemos que la función es continua en **R**

Ejercicio de desarrollo.- Determinar el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son continuas

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+8}-4}$

b) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2}{2-x} & x<0\\ \ln(x+e) & x\geq 0\end{cases}$

c) Consiga el valor de *k* para que la siguiente función sea continua en su dominio.

$h(x)=\begin{cases} kx-1 & si \quad x\leq -3\\ 2x-k & si \quad x>-3\end{cases}$

EJERCICIOS

1) Determinar si las siguientes funciones son continuas en 1. Justifique

1.1) $h(x)=x-1$; **1.2)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$; **1.3)** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x}$;

1.4) $f(t)=\sqrt{t+1}$; **1.5)** $g(w)=\sqrt{2}$; **1.6)** $h(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$;

1.7) $g(x)=\dfrac{1-x}{x}$; **1.8)** $f(x)=\begin{cases}(2x-1)^2, & si \quad x\leq 1\\ 1-2x & si \quad x>1\end{cases}$;

1.9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & si \quad x\neq 1\\ 2 & si \quad x=1\end{cases}$; **1.10)** $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{2-x}, & si \quad x<1\\ x-1 & si \quad x\geq 1\end{cases}$;

1.11) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & si \quad x<1\\ \dfrac{1}{x+1} & si \quad x\geq 1\end{cases}$;

2) Determinar el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son continuas. Justifique.

2.1) $h(x)=x^2+x-1$; **2.2)** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$; **2.3)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$;

2.4) $f(x)=\dfrac{x-1}{4}$; **2.5)** $f(t)=\dfrac{1}{t^3-1}$; **2.6)** $h(w)=\sqrt{2-w}$;

2.7) $f(x)=\begin{cases} 4, & si \quad x<-2 \\ -2x, & si \quad x\geq -2 \end{cases}$ **;** **2.8)** $h(x)=\begin{cases} 2, & si \quad x\leq 3 \\ -x+1, & si \quad x\geq 3 \end{cases}$ **;**

2.9) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2-x}, & si \quad x\neq 2 \\ -4, & si \quad x=2 \end{cases}$ **;** **2.10)** $h(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\leq 1 \\ 1-2x & si \quad 1<x<2 \\ -3 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ **;**

2.11) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-27}{x-3}, & si \quad x\neq 3 \\ 18, & si \quad x=3 \end{cases}$ **2.12)** $h(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<1 \\ 0 & si \quad x=1 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & si \quad x>1 \end{cases}$

3) VERDADERO O FALSO. Justifique

3.1) ( )Si al menos una de las dos funciones *f* o g es discontinua en x_0 entonces $f-g$ es discontinua en x_0.
3.2) ( ) Si *f*+*g* es una función continua entonces *f* es continua.
3.3) ( ) Si *f* es continua entonces |*f*| es continua.
3.4) ( ) Si *f* es una función racional entonces solo puede haber un número finitos de puntos de discontinuidades.
3.5) ( ) La función $g(x)=\begin{cases} 0, & si \quad x \quad es \quad racional \\ 1, & si \quad x \quad es \quad irracional \end{cases}$, no tiene ningún punto de continuidad.
3.6) Si el límite $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe entonces el límite vale $\dfrac{f(1)}{g(1)}$**.**
3.7) Si $f(x)>0$ para toda *x* y $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe entonces $\lim_{x\to 1} f(x)>0$**.**
3.8) Si *f* es una función racional definida como $f(x)=\dfrac{p(x)}{x-1}$ donde *p* es un polinomio entonces *x*=1 es una Asíntota vertical.
3.9) El resultado de $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$ es 0/0.

4) Demuestre que si *f* y *g* son funciones continuas en x_0 entonces la función *fg* es continua en x_0.

5) Consiga el valor de *k* para que la siguiente función sea continua en su dominio.

5.1) $h(x)=\begin{cases} kx^2-1 & si \quad x<1 \\ 3x-k & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ **5.2)** $h(x)=\begin{cases} k^2-x & si \quad x<1 \\ 8 & si \quad x=1 \\ 2x-2k & si \quad x>1 \end{cases}$

5.3) $h(x)=\begin{cases} xk^2 & si \quad x\le -2 \\ \\ -6k-2x & si \quad x>-2 \end{cases}$

APLICACIONES

1) La sensación térmica por efecto del viento está modelada por la siguiente función de *v* velocidad del viento en Km/h.

$$W(v)=\begin{cases} T & si \quad v<6.4009 \\ 33-(33-T)\times(0.47547534+0.2392\sqrt{v}-0.0126v) & si \quad 6.4009\le v\le 90.0601 \\ 1.61072608T-20.15396064 & si \quad v>90.0601 \end{cases}$$

Donde *T* es la temperatura en ºC.
v es la velocidad del viento en Km/h. ¿Es la función continua en 6.4009 y en 90.0601? ¿Por qué el modelo para representar la sensación térmica es continuo?

2) A fin de propiciar el ahorro de electricidad se estableció la siguiente tarifa

$$t(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<100 \\ 2000+3.5(x-100) & si \quad 100\le x\le 400 \\ 4x & si \quad x>400 \end{cases}$$

donde *x* es el número de kilowatios-horas consumidos al mes. ¿Es *t* continua en 100? ¿Es continua en 400? ¿Qué importancia tiene que la función de tarifa sea continua?

Respuestas;
1.1) Continua **1.2)** Discontinua; **1.3)** Discontinua en 1 **1.4**) Continua;**1.5)** Continua
1.6) Continua; **1.7)** continua en 1; **1.8**) Discontinua; **1.9)** Continua en 1. **1.10)** Continua; **1.11**) Discontinua en 1
2.1) Continua en **R; 2.2)** Continua en **R**-{-1,3};**2.3.-** Continua en **R; 2.4)** Continua en **R**
2.5) Continua en **R**-{1} **2.6)** Continua en su dominio $(-\infty,2]$;**2.7**) Continua en **R;**
2.8) Continua en **R**-{3}; **2.9)** Continua en **R**. **2.10**) Continua en **R**-{1}
2.11) Continua en **R; 2.12)** Continua en **R**-{1} (l limite por la derecha es 1/2 y por la izquierda 0). **3.1)** Falso, **3.2)** Falso; **3.3)** Verdadero; **3.4)** Verdadero; **3.5)** Verdadero; **3.6)** Falso; ; **3.7)** Falso; ; **3.8)** Falso; ; **3.9)** Falso;
5.1) $k=2$ **5.2)** $k=-3$**; 5.3)** *k*=1,2