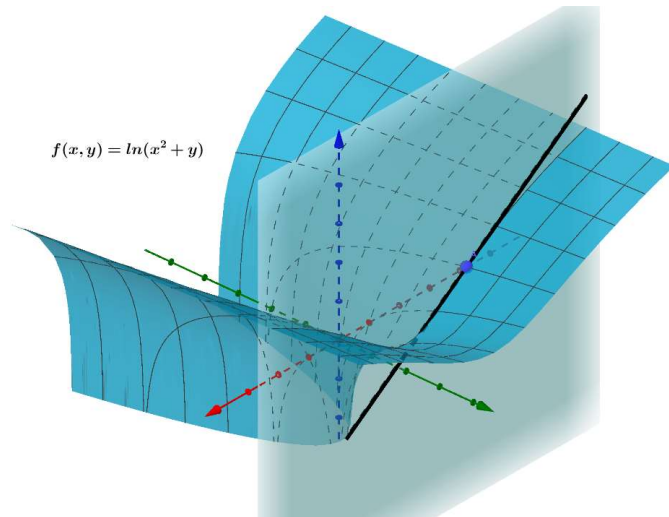




Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Derivadas Parciales



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

28 de julio del 2021

Derivadas Parciales

Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Regla para derivar parcialmente

- Para derivar con respecto a x , f_x , considere a y como una constante y derive $f(x, y)$ con respecto a x
- Para derivar con respecto a y , f_y , considere a x como una constante y derive $f(x, y)$ con respecto a y

EJEMPLO 1 Derivadas parciales

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, encuentre

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$ y b) $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución

- a) Diferenciamos z con respecto a x mientras y se mantiene fija y se tratan a las constantes de la manera usual:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \overset{\substack{\text{y es constante} \\ \downarrow}}{(12x^2)}y^2 - \overset{\substack{\text{y es constante} \\ \downarrow}}{8x} + 0 + 0 = 12x^2y^2 - 8x.$$

- b) Ahora tratando a x como constante, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \overset{\substack{\text{x es constante} \\ \downarrow}}{4x^3}(2y) - 0 + \overset{\substack{\text{x es constante} \\ \downarrow}}{6y^5} + 0 = 8x^3y + 6y^5.$$

Notación

Si $z = f(x, y)$ escribimos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D_x f = D_1 f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = D_y f = D_2 f$$

Cualquiera de esas notaciones se pueden emplear para representar la derivación parcial.

Símbolos como $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ se denominan **operadores de diferenciación parcial** y denotan la *operación* de tomar una derivada parcial, en este caso con respecto a x y y . Por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}x^2 - \frac{\partial}{\partial x}y^2 = 2x - 0 = 2x$$

y
$$\frac{\partial}{\partial y}e^{x^4y^3} = e^{x^4y^3} \cdot \frac{\partial}{\partial y}x^4y^3 = e^{x^4y^3}x^4 \cdot \frac{\partial}{\partial y}y^3 = e^{x^4y^3}x^4(3y^2) = 3x^4y^2e^{x^4y^3}.$$

El valor de una derivada parcial en un punto (x_0, y_0) se escribe de diversas maneras. Por ejemplo, la derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a x para (x_0, y_0) se escribe como

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad f_x(x_0, y_0).$$

EJEMPLO 2 Empleo de la regla del producto

Si $f(x, y) = x^5 y^{10} \cos(xy^2)$, encuentre f_y .

Solución Cuando x se mantiene fija, observe que

$$f(x, y) = x^5 \overbrace{y^{10} \cos(xy^2)}^{\text{producto de dos funciones de } y}.$$

Por consiguiente, por las reglas del producto y de la cadena la derivada parcial de f con respecto a y es,

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= x^5 [y^{10}(-\operatorname{sen}(xy^2)) \cdot 2xy + 10y^9 \cdot \cos(xy^2)] \\ &= -2x^6 y^{11} \operatorname{sen}(xy^2) + 10x^5 y^9 \cos(xy^2). \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Una tasa de cambio

La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ relaciona el área superficial (en pies cuadrados) del cuerpo de una persona como una función del peso w (en libras) y la altura h (en pulgadas). Encuentre $\partial S/\partial w$ cuando $w = 150$ y $h = 72$. Interprete.

Solución La derivada parcial de S respecto a w ,

$$\frac{\partial S}{\partial w} = (0.1091)(0.425)w^{-0.575}h^{0.725},$$

evaluada en $(150, 72)$ es

$$\left. \frac{\partial S}{\partial w} \right|_{(150, 72)} = (0.1091)(0.425)(150)^{-0.575}(72)^{0.725} \approx 0.058.$$

La derivada parcial $\partial S/\partial w$ es la tasa a la cual el área superficial de una persona de altura *fija* h , como un adulto, cambia con respecto al peso w . Puesto que las unidades para la derivada son $\text{pies}^2/\text{libra}$ y $\partial S/\partial w > 0$, advertimos que el aumento de 1 lb, mientras que h está fija en 72, produce un *aumento* en el área de la piel de aproximadamente $0.058 \approx \frac{1}{17}$ pie^2 .

■ **Interpretación geométrica** Como advertimos en la FIGURA 13.3.1a), cuando y es constante, digamos $y = b$, la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano $y = b$ es la curva azul C . Si definimos la pendiente de una secante a través de los puntos $P(a, b, f(a, b))$ y $R(a + h, b, f(a + h, b))$ como

$$\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

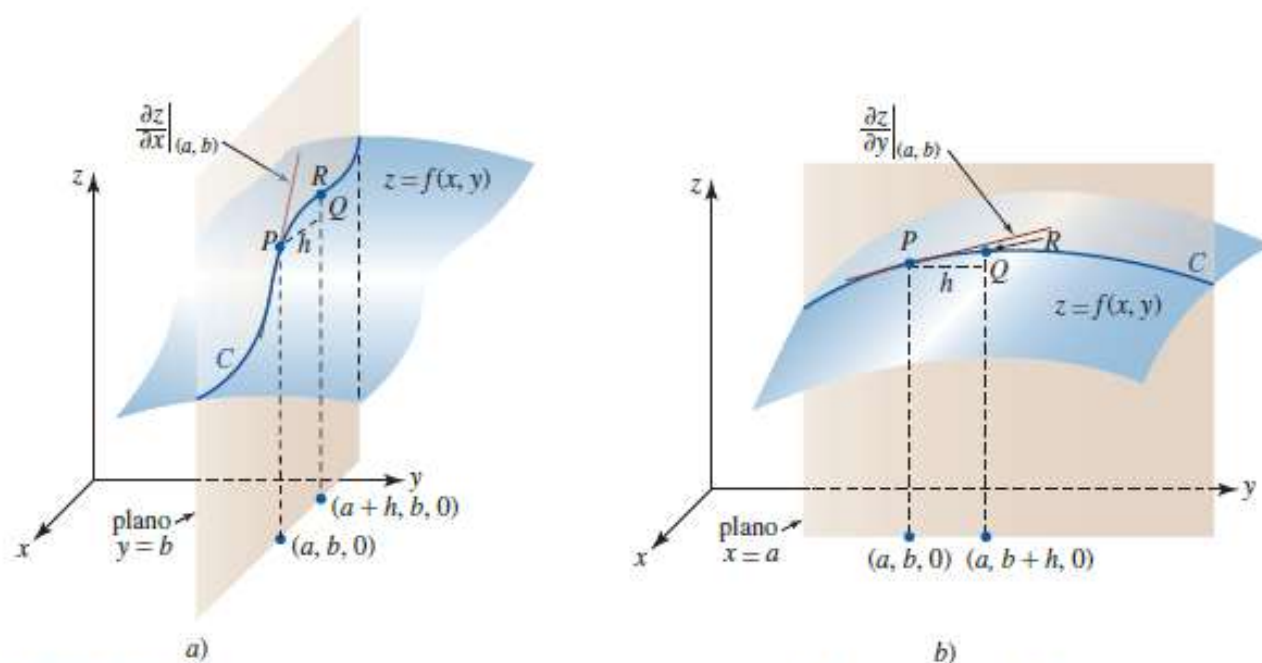


FIGURA 13.3.1 Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son pendientes de la recta tangente a la curva C de intersección de la superficie y el plano paralelo a los ejes x o y .

tenemos

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a, b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

En otras palabras, es posible interpretar $\partial z / \partial x$ como la pendiente de la recta tangente en el punto P (para la cual el límite existe) sobre la curva C de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = b$. A su vez, una inspección de la figura 13.3.1*b*) revela que $\partial z / \partial y$ es la pendiente de la recta tangente en el punto P sobre la curva C de intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $x = a$.

EJEMPLO 4 Pendientes de rectas tangentes

Para $z = 9 - x^2 - y^2$, encuentre la pendiente de la recta tangente en $(2, 1, 4)$ en

- a) el plano $x = 2$ y b) el plano $y = 1$.

Solución

- a) Al especificar el plano $x = 2$, se mantienen todos los valores de x constantes. Por consiguiente, calculamos la derivada parcial de z con respecto a y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

En $(2, 1, 4)$ la pendiente es $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2, 1)} = -2$.

- b) En el plano $y = 1$, y es constante y por ello encontramos la derivada parcial de z con respecto a x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x.$$

En $(2, 1, 4)$ la pendiente es $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, 1)} = -4$.

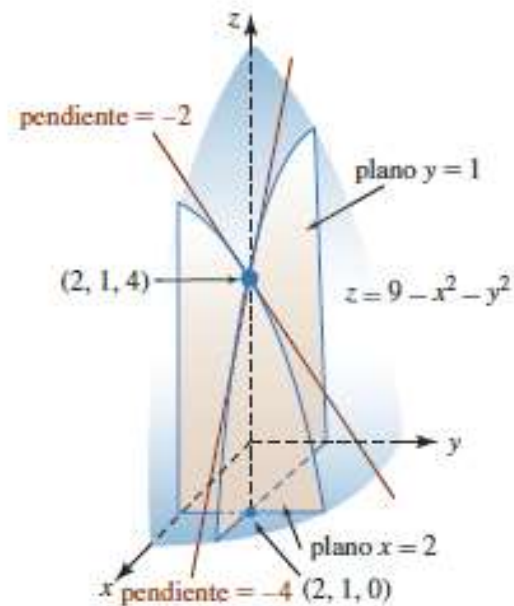


FIGURA 13.3.2 Pendientes de las rectas tangentes del ejemplo 4

Si $z = f(x, y)$, entonces los valores de las derivadas parciales $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ en un punto $(a, b, f(a, b))$ también se denominan **pendientes de la superficie** en las direcciones x y y , respectivamente.

■ **Funciones de tres o más variables** Las tasas de cambio de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ en las direcciones x , y y z son las derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$, respectivamente. La derivada parcial de f respecto a z se define como

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}, \quad (3)$$

siempre que el límite exista. Para calcular, por ejemplo, $\partial w/\partial x$, se deriva con respecto a x de la manera usual mientras se mantienen constantes *tanto y como* z . De esta manera se extiende el proceso de diferenciación parcial a funciones de cualquier número de variables. Si $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función de n variables, entonces la derivada parcial de f con respecto a la variable i -ésima, $i = 1, 2, \dots, n$, se define como

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}. \quad (4)$$

Para calcular $\partial u/\partial x_i$ se deriva con respecto a x_i mientras se mantienen fijas las $n - 1$ variables restantes.

EJEMPLO 5 Empleo de la regla del cociente

Si $w = \frac{x^2 - z^2}{y^2 + z^2}$, encuentre $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Solución Se emplea la regla del cociente mientras se mantiene constante x y y :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(y^2 + z^2)(-2z) - (x^2 - z^2)2z}{(y^2 + z^2)^2} = -\frac{2z(x^2 + y^2)}{(y^2 + z^2)^2}.$$

EJEMPLO 6 Tres derivadas parciales

Si $f(x, y, t) = e^{-3\pi t} \cos 4x \sin 6y$, entonces las derivadas parciales con respecto a x , y y t son, a su vez,

$$f_x(x, y, t) = -4e^{-3\pi t} \sin 4x \sin 6y,$$

$$f_y(x, y, t) = 6e^{-3\pi t} \cos 4x \cos 6y,$$

y

$$f_t(x, y, t) = -3\pi e^{-3\pi t} \cos 4x \sin 6y.$$

■ **Derivadas de orden superior y mixtas** Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son ellas mismas funciones de x y y . En consecuencia, se pueden calcular las **derivadas parciales de segundo orden** y de orden superior. De hecho, se encuentra la derivada parcial de $\partial z/\partial x$ con respecto a y , y la derivada parcial de $\partial z/\partial y$ con respecto a x . Los últimos tipos de derivadas parciales se denominan **derivadas parciales mixtas**. En resumen, las segundas, terceras derivadas parciales y la derivada parcial mixta de $z = f(x, y)$ están definidas por:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Derivadas parciales de segundo orden mixtas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

diferenciar ↑
primero con
respecto a y

diferenciar ↑
primero con
respecto a x

Observe en el resumen que hay cuatro derivadas parciales de segundo orden. ¿Cuántas derivadas parciales de tercer orden de $z = f(x, y)$ hay? Las derivadas parciales de orden superior para $z = f(x, y)$ y para funciones de tres o más variables se definen de manera similar.

EJEMPLO 7 Derivadas parciales de segundo orden

Si $z = x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5$, encuentre

$$a) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \quad b) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \quad y \quad c) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Solución De las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 12x^3 \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - 3y^2$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2y^2 + 36x^2 \quad y \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = 72x, \\ b) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2x^2 - 6y \quad y \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = -6, \\ c) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 4xy. \end{aligned}$$

Debemos verificar que $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 4xy$.



Si f es una función de dos variables y tiene derivadas parciales de primer, segundo y tercer orden continuas sobre algún disco abierto, entonces las derivadas mixtas de tercer orden son iguales; esto es,

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} \quad \text{y} \quad f_{yxx} = f_{xyx} = f_{xxy}.$$

Se sostienen comentarios similares para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x , y y z que posee derivadas parciales continuas de cualquier orden en alguna bola abierta, entonces las derivadas parciales como $f_{xyz} = f_{zyx} = f_{yxz}$ son iguales en cada punto en la bola.

Es muy importante la condición de que las derivadas parciales en los diferentes ordenes sean continuas para que se cumpla la igualdad mencionada anteriormente. Ver ejemplo 11, pág 951 del libro El Calculo de Leithold, donde las derivadas parciales mixtas no son iguales.

EJEMPLO 8 Derivadas parciales mixtas de tercer orden

Si $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^4 + z^6}$, determine f_{yzz} .

Solución f_{yzz} es una derivada parcial mixta de tercer orden. Primero se encuentra la derivada parcial con respecto a y mediante la regla de potencias para funciones:

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2} 4y^3 = 2y^3(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2}.$$

La derivada parcial con respecto a z de la función en la última línea es entonces

$$\begin{aligned} f_{yz} &= (f_y)_z = 2y^3 \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2} \cdot 6z^5 \\ &= -6y^3 z^5 (x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Por último, por la regla del producto,

$$\begin{aligned} f_{yzz} &= (f_{yz})_z = -6y^3 z^5 \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2} \cdot 6z^5 - 30y^3 z^4 (x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2} \\ &= y^3 z^4 (x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2} (24z^6 - 30x^2 - 30y^4). \end{aligned}$$

Se sugiere que el lector calcule f_{zzy} y f_{zyz} y verifique sobre cualquier disco abierto que no contenga al origen que $f_{yzz} = f_{zzy} = f_{zyz}$.

Ejercicios Propuestos

15-40 Calcule las primeras derivadas parciales de la función.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$

17. $f(x, t) = e^{-t} \cos \pi x$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$

23. $f(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy}$

25. $g(u, v) = (u^2v - v^3)^5$

27. $R(p, q) = \tan^{-1}(pq^2)$

29. $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$

31. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$

33. $w = \ln(x + 2y + 3z)$

35. $u = xy \sin^{-1}(yz)$

37. $h(x, y, z, t) = x^2y \cos(z/t)$

41-44 Determine las derivadas parciales indicadas.

41. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; $f_x(3, 4)$

43. $f(x, y, z) = \frac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

53-58 Determine las segundas derivadas parciales.

53. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

55. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

57. $z = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$

63-70 Encuentre la derivada parcial indicada.

63. $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$; f_{xxx} , f_{xyx}

65. $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; f_{xyz}

67. $u = e^{r\theta} \sin \theta$; $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$

69. $w = \frac{x}{y + 2z}$; $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

81. Verifique que la función $z = \ln(e^x + e^y)$ es una solución de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

94. El paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ interseca el plano $x = 1$ en una parábola. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la tangente a esta parábola en el punto $(1, 2, -4)$. Con una computadora grafique el paraboloide, la parábola y la tangente en la misma pantalla.
95. El elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ interseca el plano $y = 2$ en una elipse. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 2)$.