Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Rectas y Planos en el Espacio

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

16 de julio del 2021

Rectas en el espacio

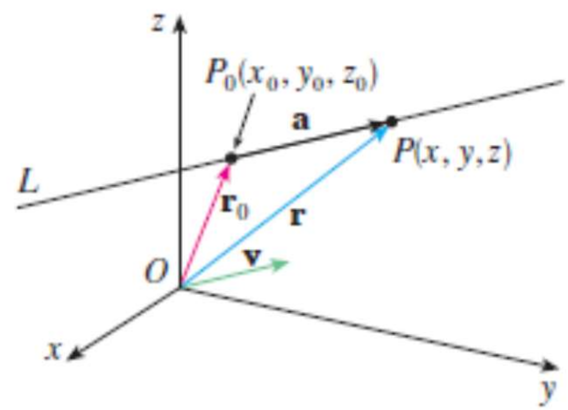
Supongamos que tenemos una recta L en el espacio que pasa por un punto $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ y sea $\vec{v} = (a, b, c)$ un vector paralelo a la recta. Consideremos $P(x, y, z)$ un punto cualquiera sobre la recta, entonces si $\vec{a}$ es el vector de representación de P_0 a P, entonces $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{v}$ y existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{a} = t\vec{v}$$

Si $\vec{r}$ es el vector $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{r_0}$ es el vector $\overrightarrow{OP_0}$ entonces se puede ver que

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{a}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{v}$$



Esta última ecuación se llama **ecuación vectorial de la recta**.

Si el vector $\mathbf{v}$ que da la dirección de la recta L se escribe en forma de componentes como $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, entonces se tiene $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc \rangle$. Se puede escribir también $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, por tanto, la ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ se transforma en

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

Dos vectores son iguales si y sólo si las componentes correspondientes son iguales. Por tanto, se tienen tres ecuaciones escalares:

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta L que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$. Cada valor del parámetro t da un punto (x, y, z) sobre L.

Los número a, b, c de $\vec{v}$ se llaman números directores de la recta L.

EJEMPLO 1

a) Encuentre la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto (5, 1, 3) y es paralela al vector $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
b) Encuentre otros dos puntos sobre la recta.

SOLUCIÓN

a) Aquí $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3 \rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, así que la ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ se convierte en

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

o bien,
$$\mathbf{r} = (5 + t)\mathbf{i} + (1 + 4t)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

$x = 5 + 1 = 6$
$y = 1 + 4(1) = 5$
$z = 3 - 2(1) = 1$

b) La elección del valor de parámetro $t = 1$ da $x = 6$, $y = 5$ y $z = 1$, por tanto, (6, 5, 1) es un punto sobre la recta. De manera similar, $t = -1$ da el punto (4, −3, 5).

$x = 5 - 1 = 4$
$y = 1 + 4(-1) = -3$
$z = 3 - 2(1) = 1$

La ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de una recta no son únicas. Si se cambia el punto o el parámetro, o se elige un vector paralelo diferente, entonces cambian las ecuaciones. Por ejemplo, si en lugar de (5, 1, 3), se elige el punto (6, 5, 1) en el ejemplo 1, entonces las ecuaciones paramétricas de la recta se convierten en

$$x = 6 + t \qquad y = 5 + 4t \qquad z = 1 - 2t$$

O bien, si se permanece con el punto (5, 1, 3) pero se elige un vector paralelo $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, se llega a las ecuaciones

$$x = 5 + 2t \qquad y = 1 + 8t \qquad z = 3 - 4t$$

Si tenemos que a, b, y c son diferentes de cero, en las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

Podemos despejar t y nos queda

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Que son las ecuaciones simétricas de la recta L.

Si una de las literales a, b o c es 0, se puede eliminar a t. Por ejemplo, si $a = 0$, se podrían escribir las ecuaciones de L como

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Esto significa que L yace en el plano vertical $x = x_0$.

EJEMPLO 2

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta que pasa a través de los puntos $A(2, 4, -3)$ y $B(3, -1, 1)$.

b) ¿En qué punto interseca esta recta el plano xy?

SOLUCIÓN

a) No se da de manera explícita un vector paralelo a la recta, pero observe que el vector $\mathbf{v}$ con representación $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a la recta y

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3) \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle$$

Así, los números directores son $a = 1$, $b = -5$ y $c = 4$. Si se toma el punto $(2, 4, -3)$ como P_0, se ve que las ecuaciones paramétricas son

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t$$

y las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

b) La recta interseca el plano xy cuando $z = 0$, así que se pone $z = 0$ en las ecuaciones simétricas y se obtiene

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{3}{4}$$

$$x - 2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

$$\frac{y-4}{-5} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{15}{4} + 4 = \frac{1}{4}$$

Esto da $x = \frac{11}{4}$ y $y = \frac{1}{4}$, así que la recta interseca al plano xy en el punto $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

V EJEMPLO 3 Demuestre que las rectas L_1 y L_2 con ecuaciones paramétricas

$$x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$
$$x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son **rectas oblicuas**; es decir, no se intersecan y no son paralelas (y, por tanto, no pertenecen al mismo plano).

Primero chequeamos si las rectas son paralelas para ello identificamos los vectores de dirección de ambas rectas. Consideramos los coeficientes de los parámetros, el vector de dirección de la primera recta es $\langle 1,3,-1 \rangle$ y la de la segunda recta es $\langle 2,1,4 \rangle$. Para revisar si son paralelos ambos vectores, dividimos las componentes de los vectores respectivamente esto es:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{1} \qquad -\frac{1}{4}$$

Como los cocientes son distintos entonces los vectores no son proporcionales y por lo tanto los vectores no son paralelos.

Para saber si las rectas se intersectan debemos resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene cuando igualamos las x, y y z de las ecuaciones paramétricas de las rectas:

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2s \\ -2 + 3t &= 3 + s \\ 4 - t &= -3 + 4s \end{aligned}$$

Nuestras incógnitas serían t y s, entonces podemos despejar t de la primera ecuación y sustituir en la segunda ecuación y hallar s:

$$1 + t = 2s \Rightarrow t = 2s - 1$$

$$-2 + 3(2s - 1) = 3 + s$$

$$-2 + 6s - 3 = 3 + s \Rightarrow 5s = 8 \Rightarrow s = \frac{8}{5}$$

Luego $t = 2\left(\frac{8}{5}\right) - 1 = \frac{11}{5}$. Sustituimos los valores de t y s obtenidos en la tercera ecuación para ver si la satisface:

$$4 - \frac{11}{5} \overset{?}{=} -3 + 4\left(\frac{8}{5}\right)$$

$$\frac{9}{5} = \frac{47}{5}$$

Vemos que no se satisface la igualdad, por lo tanto no hay punto intersección. Entonces como las rectas no son paralelas ni se cortan, decimos que las rectas son oblicuas.

Ecuación de un Plano

Un plano en el espacio se determina por
1. un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano
2. un vector $\mathbf{n}$ que es ortogonal al plano.

Este vector ortogonal $\mathbf{n}$ se llama **vector normal.**

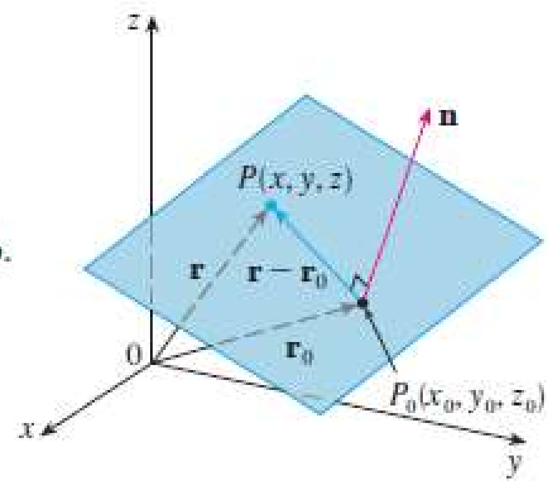
Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en el plano, y sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de P_0 y P. Entonces el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ se representa por $\overrightarrow{P_0P}$. (Véase la figura) El vector normal $\mathbf{n}$ es ortogonal a todo vector en el plano dado. En particular, $\mathbf{n}$ es ortogonal a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ y, por tanto, se tiene

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

que se puede reescribir como

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

recibe el nombre de **ecuación vectorial del plano.**



Para obtener una ecuación escalar del plano, se escribe $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. Entonces la ecuación vectorial se transforma en

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

o bien,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

La ecuación **es la ecuación escalar del plano que pasa por** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **con vector normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$.

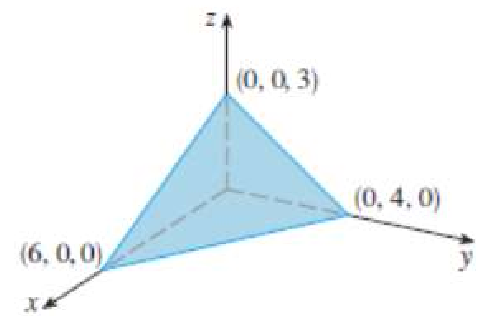
V **EJEMPLO 4** Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ con vector normal $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$. Determine las intersecciones con los ejes y bosqueje el plano.

SOLUCIÓN Si se escribe $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y $z_0 = -1$ entonces la ecuación del plano es

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

o bien,

$$2x + 3y + 4z = 12$$



Para hallar la intersección con el eje x, se establece que $y = z = 0$ en esta ecuación y se obtiene $x = 6$. De manera similar, la intersección con el eje y es 4 y la intersección con el eje z es 3. Esto permite bosquejar la porción del plano que yace en el primer octante

Ecuación General de un Plano

Si a, b y c no son todos iguales a cero, entonces la ecuación lineal

$$ax + by + cz + d = 0$$

Representa un plano con vector normal $\mathrm{n} = \langle a, b, c \rangle$.

Ejemplo:

La ecuación $3x - 5y + z - 6 = 0$ representa un plano que tiene normal $n = \langle 3, -5, 1 \rangle$. Si damos valores a dos de las variables de la ecuación, podemos encontrar un punto sobre el plano. En este caso, si tomamos $x = y = 0$, vemos que

$$3(0) - 5(0) + z - 6 = 0 \Rightarrow z = 6$$

Entonces un punto en el plano es $(0,0,6)$

EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ y $R(5, 2, 0)$.

SOLUCIÓN Los vectores **a** y **b** que corresponden a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4 \rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2 \rangle$$

Puesto que **a** y **b** están en el plano, su producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal al plano y se puede tomar como el vector normal. Así,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k}$$

Con el punto $P(1, 3, 2)$ y el vector normal **n**, la ecuación del plano es

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0$$

o bien,

$$6x + 10y + 7z = 50$$

Posición relativa entre dos planos

- Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos entre si.
- Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales entre si.
- Dos planos se intersectan si tienen una recta en común.
- El ángulo entre dos planos, es el ángulo entre sus vectores normales.
- La distancia entre un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $ax + by + cz = 0$ es

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V EJEMPLO 7

a) Encuentre el ángulo entre los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$.
b) Obtenga las ecuaciones simétricas para la recta de intersección L de estos dos planos.

SOLUCIÓN

a) Los vectores normales de estos planos son

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \qquad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3 \rangle$$

y, por tanto, si θ es el ángulo entre los planos, el corolario 12.3.6 da

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^\circ$$

b) Primero se necesita hallar un punto sobre L. Por ejemplo, se puede hallar el punto donde la recta interseca al plano xy poniendo $z = 0$ en las ecuaciones de ambos planos. Esto da las ecuaciones $x + y = 1$ y $x - 2y = 1$, cuya solución es $x = 1$, $y = 0$. Por tanto, el punto $(1, 0, 0)$ pertenece a la recta L.

Ahora se observa que, puesto que L yace en ambos planos, es perpendicular a los dos vectores normales. Así, un vector $\mathbf{v}$ paralelo a L está dado por el producto cruz

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

y, por tanto, las ecuaciones simétricas de L se pueden escribir como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

EJEMPLO 9 Encuentre la distancia entre los planos paralelos $10x + 2y - 2z = 5$ y $5x + y - z = 1$.

SOLUCIÓN Primero notamos que los planos son paralelos porque sus vectores normales $\langle 10, 2, -2 \rangle$ y $\langle 5, 1, -1 \rangle$ son paralelos. Para hallar la distancia D entre los planos, se elige cualquier punto sobre un plano y se calcula su distancia al otro plano. En particular, si se escribe $y = z = 0$ en la ecuación del primer plano, se obtiene $10x = 5$ y, por tanto, $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ es un punto en este plano. Por la fórmula 9, la distancia entre $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ y el plano $5x + y - z - 1 = 0$ es

$$D = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Así que la distancia entre los planos es $\sqrt{3}/6$.

Ejercicios Propuestos:

6-12 Encuentre las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas para la recta.

6. La recta que pasa por el origen y el punto $(4, 3, -1)$

7. La recta por los puntos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ y $(2, 1, -3)$

10. La recta por $(2, 1, 0)$ y perpendicular a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. La recta por $(1, -1, 1)$ y paralela a la recta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$.

12. La recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 1$ y $x - y + z = 1$

16. a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(2, 4, 6)$ que es perpendicular al plano $x - y + 3z = 7$.

b) ¿En qué puntos esta recta corta a los planos coordenados?

19-22 Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se intersecan, determine el punto de intersección.

19. L_1: $x = 3 + 2t, \quad y = 4 - t, \quad z = 1 + 3t$

L_2: $x = 1 + 4s, \quad y = 3 - 2s, \quad z = 4 + 5s$

20. L_1: $x = 5 - 12t, \quad y = 3 + 9t, \quad z = 1 - 3t$

L_2: $x = 3 + 8s, \quad y = -6s, \quad z = 7 + 2s$

21. L_1: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{-3}$

L_2: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-2}{-7}$

23-40 Encuentre una ecuación del plano.

23. El plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector $\langle 1, -2, 5 \rangle$

24. El plano que pasa por el punto $(5, 3, 5)$ y con vector normal $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. El plano que pasa por el punto $(2, 0, 1)$ y perpendicular a la recta $x = 3t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 4t$

27. El plano que pasa por el punto $(1, -1, -1)$ y es paralelo al plano $5x - y - z = 6$

33. El plano que pasa por los puntos $(3, -1, 2)$, $(8, 2, 4)$ y $(-1, -2, -3)$

34. El plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y contiene a la recta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

39. El plano que pasa por el punto $(1, 5, 1)$ y es perpendicular a los planos $2x + y - 2z = 2$ y $x + 3z = 4$

40. El plano que pasa a través de la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$ y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

45-47 Encuentre el punto en el que la recta interseca al plano dado.

47. $x = y - 1 = 2z; \quad 4x - y + 3z = 8$

51-56 Determine si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguno. Si no son paralelos ni perpendiculares encuentre el ángulo entre ellos.

51. $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$

52. $2z = 4y - x, \quad 3x - 12y + 6z = 1$

53. $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1$