Práctica 7

Introducción

Con la realización de esta práctica se espera que el estudiante adquiera las competencias necesarias para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales así como problemas con valores en la frontera utilizando diversos métodos de solución numérica, entre los que destacan los métodos de Runge-Kutta, tanto de forma manual como con el apoyo de funciones propias o predefinidas utilizando los entornos de software MATLAB o Scilab.

Cabe destacar que tanto MATLAB como Scilab cuentan con bibliotecas de software para resolver ecuaciones diferenciales. En particular, haremos uso de la función `ode45` de MATLAB, por lo que se recomienda al estudiante revisar el contenido de esta página donde encontrará una descripción detallada de esta función junto con algunos ejemplos de uso. Quienes prefieren usar Scilab tienen a su disposición la función `ode`, cuya sintaxis y algunos ejemplos de uso se describen en este documento, entre muchos otros disponibles en internet.

En lo que sigue se entiende por **problema de valor inicial** a uno de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad a \le t \le b \\ \mathbf{y}(a) &= \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \tag{1}$$

Mientras que la referencia a un **problema con valores en la frontera** indicará uno del tipo:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \quad a \le x \le b \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{aligned} \tag{2}$$

1 Diseño de algoritmos

1. Diseñe una función de nombre **euler.m** que resuelva el problema de valor inicial (1) mediante el método de Euler. Dicha función deberá tener como argumentos de entrada: (i) la función $f(t, y(t))$, (ii) los extremos del intervalo $[a, b]$, (iii) la condición inicial α, y (iv) el tamaño del paso h. Los argumentos de salida serán: (i) el vector de puntos de red $t_i = a + ih, \ i = 0, ..., N$, donde $N = (b-a)/h$, y (ii) el vector w con las aproximaciones de la función $y(t)$ en los puntos de red. Por lo tanto, la sintaxis para invocar esta función debe tener la forma: `[t,w]=euler(f,a,b,alpha,h)`.
   Escriba su función de manera que pueda operar sobre vectores. Es decir, suponga que f y α son funciones vectoriales (como las que surgen en los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarios) y desarrolle el programa de manera que opere sobre estructuras de este tipo.

2. Diseñe una función de nombre **eulermejorado.m** que resuelva el problema de valor inicial (1) mediante el método de Euler mejorado. Dicha función deberá tener como argumentos de entrada: (i) la función $f(t, y(t))$, (ii) los extremos del intervalo $[a, b]$, (iii) la condición inicial α, y (iv) el tamaño del paso h. Los argumentos de salida serán: (i) el vector de puntos de red $t_i = a + ih, \ i = 0, ..., N$, donde $N = (b-a)/h$, y (ii) el vector w con las aproximaciones de la función $y(t)$ en los puntos de red. Escríbala de manera que pueda operar sobre vectores como se pide en el ejercicio anterior.

3. Diseñe una función de nombre **puntomedioedo.m** que resuelva el problema de valor inicial (1) mediante el método del punto medio. Dicha función deberá tener como argumentos de entrada: (i) la función $f(t, y(t))$, (ii) los extremos del intervalo $[a, b]$, (iii) la condición inicial α, y (iv) el tamaño del paso h. Los argumentos de salida serán: (i) el vector de puntos de red $t_i = a + ih,\ i = 0, ..., N$, donde $N = (b-a)/h$, y (ii) el vector w con las aproximaciones de la función $y(t)$ en los puntos de red. Escriba su función de manera que pueda operar sobre vectores.

4. Escribir un subprograma de nombre **disparolineal.m** para aproximar el problema lineal con valores en la frontera haciendo uso del método del disparo lineal visto en clases. El programa tendrá como argumentos de entrada: (i) la función lineal $f(x, y(x), y'(x)) = p(x)y' + q(x)y + r(x)$, (ii) los extremos del intervalo $[a, b]$, (iii) las condiciones de frontera α y β, y (iv) el tamaño del paso h. Los argumentos de salida serán: (i) el vector de puntos de red $x_i = a + ih,\ i = 0, ..., N$, donde $N = (b-a)/h$, y (ii) el vector w con las aproximaciones de la función $y(x)$ en los puntos de red.

5. Haciendo uso del método del disparo no lineal visto en clases, escribir un subprograma de nombre **disparonolineal.m** con argumentos de entrada: (i) la función no lineal $f(x, y(x), y'(x))$, (ii) los extremos del intervalo $[a, b]$, (iii) las condiciones de frontera α y β, y (iv) el tamaño del paso h. Los argumentos de salida serán: (i) el vector de puntos de red $x_i = a + ih,\ i = 0, ..., N$, donde $N = (b-a)/h$, y (ii) el vector w con las aproximaciones de la función $y(x)$ en los puntos de red. Utilice el método de Runge-Kutta de orden 4-5 (`ode45`) para aproximar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que surgen durante la formulación del método. Use el método de la secante para resolver la ecuación no lineal $h(t) = y(b; t) - \beta = 0$, con aproximaciones iniciales $t_0 = (\beta - \alpha)/(b-a)$ y $t_1 = 2t_0$.

2 Ejercicios propuestos

1. Utilice las funciones `euler.m`, `eulermejorado.m`, `puntomedioedo.m` y `ode45` para aproximar la solución de los problemas de valor inicial siguientes:

   a. $y' = y\cos(t)$, $y(0) = 1$, $t \in [0, 1]$; $h = 0.2$, 0.1 y 0.05. Solución exacta: $y(t) = e^{sen(t)}$.

   b. $y' = \dfrac{1}{1+t^2} - 2y^2$, $y(0) = 0$, $t \in [0, 2]$; $h = 0.2$, 0.1 y 0.05. Solución exacta: $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$.

   c. Aproxime la solución del sistema siguiente con $h = 0.2$.

   $$\begin{aligned} u_1' &= 3u_1 + 2u_2 - (2t^2+1)e^{2t},\ t \in [0,1],\ u_1(0) = 1 \\ u_2' &= 4u_1 + u_2 + (t^2+2t-4)e^{2t},\ t \in [0,1],\ u_2(0) = 1 \end{aligned}$$

   Soluciones exactas: $u_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}$, $u_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t}$.

   d. Aproxime la solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

   $$y'' - 2y' + y = te^t - t, \qquad t \in [0,1], \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

   Use $h = 0.1$. Solución exacta: $y(t) = \frac{1}{6}t^3e - te^t + 2e^t - t - 2$.

Para cada uno de los problemas y cada valor de h calcule el error absoluto y el error relativo y grafique (superpuestas) la solución exacta y la aproximada. Haga un análisis de los resultados.

2. Use el programa `disparolineal.m` para resolver los problemas de valores en la frontera lineales que se dan a continuación.

   a. $y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x},\ \ 0 \leq x \leq 1,\ \ y(0) = -1,\ \ y(1) = 0$; use $h = 0.1$.

   b. $y'' = -\dfrac{4}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y - \dfrac{2\ln(x)}{x^2},\ \ 1 \leq x \leq 2,\ \ y(1) = -0.5,\ \ y(2) = \ln(2)$; use $h = 0.05$.

3. Use el programa `disparonolineal.m` para resolver los siguientes problemas de valores en la frontera no lineales.

   a. $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = \frac{5}{2}$; use $h = 0.1$ y compare sus resultados con la solución exacta: $y(x) = x + x^{-1}$.

   b. $y'' = \dfrac{x^2(y')^2 - 9y^2 + 4x^6}{x^5}$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln(256)$; use $h = 0.05$ y compare sus resultados con la solución exacta: $y(x) = x^3\ln(x)$.