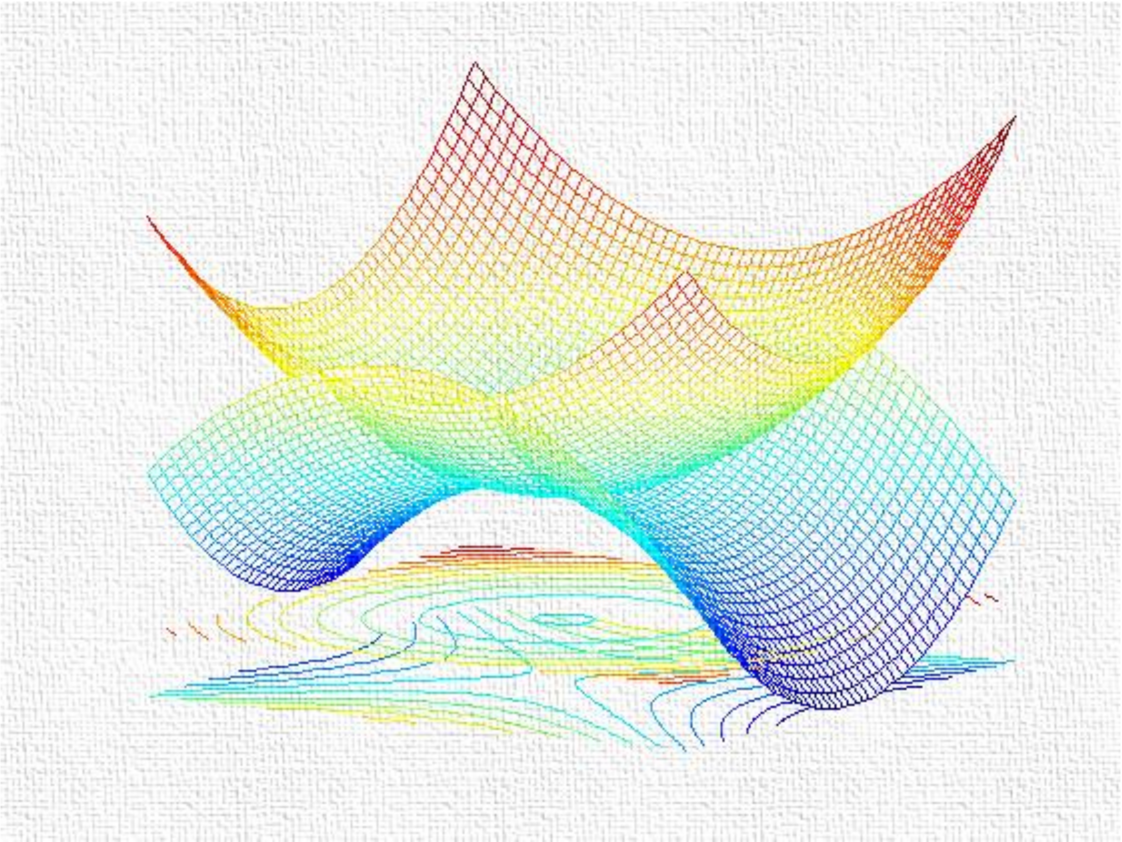
Curso de métodos numéricos



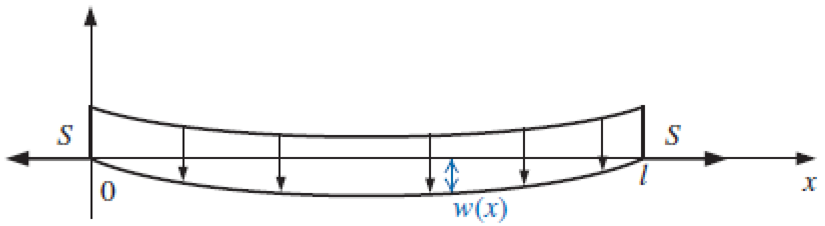
Unidad 7: Problema de valores en la frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias

Profa. Blanca Guillén

Unidad 7. Problemas de valores en la frontera para EDO

Introducción (Burden 10ª Ed., pág. 505)

Un problema común en ingeniería civil concierne a la deflexión de una viga de sección transversal rectangular sujeta a carga uniforme, mientras los extremos de la viga están sujetos de tal forma que no sufren deflexión.



Suponga que l, q, E, S e I representan, respectivamente, la longitud de la viga, la intensidad de la carga uniforme, el módulo de elasticidad, el esfuerzo en los extremos y el momento central de inercia. La ecuación diferencial que aproxima la situación física es de la forma

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x - l),$$

donde $w(x)$ es la deflexión de una distancia x desde el extremo izquierdo de la viga. Puesto que no se presenta deflexión en los extremos de la viga, existen dos condiciones en la frontera:

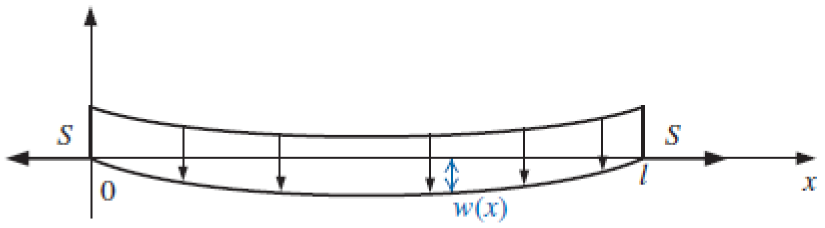
$$w(0) = 0 \quad \text{y} \quad w(l) = 0.$$

Cuando la viga tiene un grosor uniforme, el producto EI es constante. En este caso, la solución exacta se obtiene fácilmente. Cuando el grosor no es uniforme, el momento de inercia I es una función de x, y se necesitan técnicas de aproximación. Los problemas de este tipo se consideran en el ejercicio 7 de la sección 11.3, en el ejercicio 6 de la sección 11.4 y en el ejercicio 7 de la sección 11.5.

Unidad 7. Problemas de valores en la frontera para EDO

Introducción (Burden 10ª Ed., pág. 505)

Un problema común en ingeniería civil concierne a la deflexión de una viga de sección transversal rectangular sujeta a carga uniforme, mientras los extremos de la viga están sujetos de tal forma que no sufren deflexión.



Suponga que l, q, E, S e I representan, respectivamente, la longitud de la viga, la intensidad de la carga uniforme, el módulo de elasticidad, el esfuerzo en los extremos y el momento central de inercia. La ecuación diferencial que aproxima la situación física es de la forma

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x-l),$$

donde $w(x)$ es la deflexión de una distancia x desde el extremo izquierdo de la viga. Puesto que no se presenta deflexión en los extremos de la viga, existen dos condiciones en la frontera:

$$w(0) = 0 \quad \text{y} \quad w(l) = 0.$$

Cuando la viga tiene un grosor uniforme, el producto EI es constante. En este caso, la solución exacta se obtiene fácilmente. Cuando el grosor no es uniforme, el momento de inercia I es una función de x, y se necesitan técnicas de aproximación. Los problemas de este tipo se consideran en el ejercicio 7 de la sección 11.3, en el ejercicio 6 de la sección 11.4 y en el ejercicio 7 de la sección 11.5.

El problema a resolver en este caso:

$$w''(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x-l)$$

es una ecuación diferencial ordinaria de 2do orden, pero dotada de condiciones en los extremos del intervalo $[0, l]$:

$$w(0) = 0$$

$$w(l) = 0$$

Unidad 7. Problemas de valores en la frontera para EDO

Características:

- ✓ Describen problemas físicos que dependen de la posición en lugar del tiempo.
- ✓ Las condiciones se imponen en los extremos del intervalo.
- ✓ Para las EDO de 1er orden se especifica una sola condición inicial, por lo que no hay diferencia entre un PVI y un PVF.
- ✓ Consideraremos solo PVF de 2do orden.

Unidad 7. PVF para EDO – Problema a resolver

Los problemas de valores en la frontera (PVF) para EDO implican una ecuación diferencial de la forma:

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad a \le x \le b$$

junto con las condiciones de frontera:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Unidad 7. PVF para EDO – Problema a resolver

Los problemas de valores en la frontera (PVF) para EDO implican una ecuación diferencial de la forma:

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad a \leq x \leq b$$

junto con las condiciones de frontera:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Problema a resolver. Aproximar la solución del PVF:

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad a \leq x \leq b$$

junto con las condiciones de frontera:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Unidad 7. PVF para EDO – Existencia y unicidad de soluciones

Teorema 1. (Burden 10ª Ed., pág. 506)

Suponga que la función f en el problema de valor en la frontera

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta,$$

es continua en el conjunto

$$D = \{(x, y, y') \mid \text{para } a \leq x \leq b, \text{con } -\infty < y < \infty \text{ y } -\infty < y' < \infty\},$$

y que las derivadas parciales f_y y $f_{y'}$ también son continuas en D. Si

i) $f_y(x, y, y') > 0$, para todas $(x, y, y') \in D$, y

ii) existe una constante M, con

$$|f_{y'}(x, y, y')| \leq M, \text{ para todas } (x, y, y') \in D,$$

entonces el problema de valor en la frontera tiene una única solución.

Para garantizar la existencia y unicidad de la solución del PVF, la función

$$f(x, y, y')$$

debe cumplir las condiciones:

$$f_y(x, y, y') > 0$$

$$|f_{y'}(x, y, y')| \leq M$$

en el conjunto:

$$D = \{(x, y, y') \mid 1 \leq x \leq 2, -\infty < y, y' < \infty\}.$$

Aquí, M es una cota superior de la derivada parcial $f_{y'}$.

Unidad 7. Problemas de valores en la frontera para EDO

Ejemplo 1: (Burden 10ª Ed., pág. 507)

Use el teorema 1 para mostrar que el problema de valor en la frontera

$$y'' + e^{-xy} + \operatorname{sen} y' = 0, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2, \text{con } y(1) = y(2) = 0,$$

tiene una única solución.

Solución tenemos

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \operatorname{sen} y'$$

y, para todas las x en $[1, 2]$,

$$f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \quad \text{y} \quad \left|f_{y'}(x, y, y')\right| = |-\cos y'| \leq 1.$$

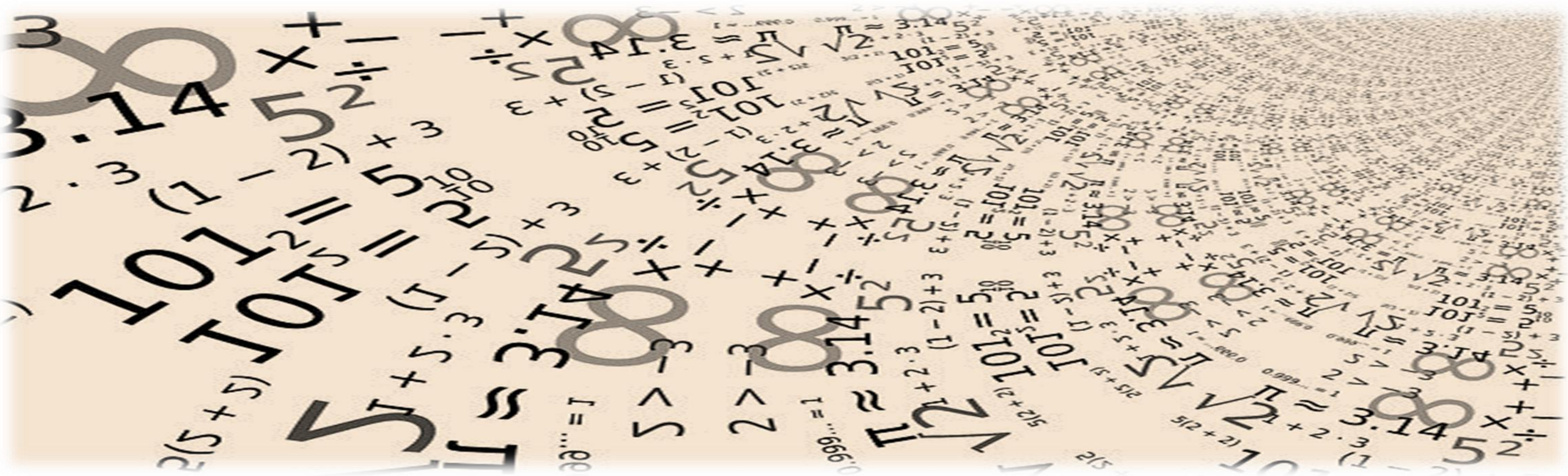
Por lo que el problema tiene una única solución.

M

Unidad 7. Problemas de valores en la frontera para EDO

Técnicas numéricas para resolver un PVF:

- ✓ Método del disparo lineal
- ✓ Método del disparo no lineal
- ✓ Métodos de diferencias finitas



Método del disparo lineal

Unidad 7. Método del disparo lineal

Definición 1. Se dice que la ecuación diferencial

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

es lineal si $f(x, y, y')$ se puede expresar en la forma:

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

En caso contrario se dice que es no lineal.

Unidad 7. Método del disparo lineal

Definición 1. Se dice que la ecuación diferencial

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

es lineal si $f(x, y, y')$ se puede expresar en la forma:

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

En caso contrario se dice que es no lineal.

Ejemplo 2. La ecuación

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{sen(\ln(x))}{x^2}$$

para $1 \leq x \leq 2$, con

$$y(1) = 1$$

$$y(2) = 2$$

describe un PVF lineal, donde

$$p(x) = -\frac{2}{x}, \qquad q(x) = \frac{2}{x^2}, \qquad r(x) = \frac{sen(\ln(x))}{x^2}$$

Unidad 7. Método del disparo lineal

La solución del problema lineal

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta$$

mediante el **método del disparo lineal** se obtiene resolviendo los PVI:

PVI 1.

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x), \qquad a \leq x \leq b$$

$$u(a) = \alpha, \;\; u'(a) = 0$$

PVI 2.

$$v'' = p(x)v' + q(x)v, \qquad a \leq x \leq b$$

$$v(a) = 0, \;\; v'(a) = 1$$

Unidad 7. Método del disparo lineal

La solución del problema lineal

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta$$

mediante el **método del disparo lineal** se obtiene resolviendo los PVI:

PVI 1.

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x), \qquad a \leq x \leq b$$

$$u(a) = \alpha, \;\; u'(a) = 0$$

PVI 2.

$$v'' = p(x)v' + q(x)v, \qquad a \leq x \leq b$$

$$v(a) = 0, \;\; v'(a) = 1$$

Interpretación geométrica. En este método el 'disparo' golpea el objetivo después de un disparo de prueba.

Vector de Negocios creado por rawpixel.com - www.freepik.es

Unidad 7. Método del disparo lineal

La solución del problema lineal

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \le x \le b$$

$$y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta$$

mediante el **método del disparo lineal** se obtiene resolviendo los PVI:

PVI 1.

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x), \qquad a \le x \le b$$

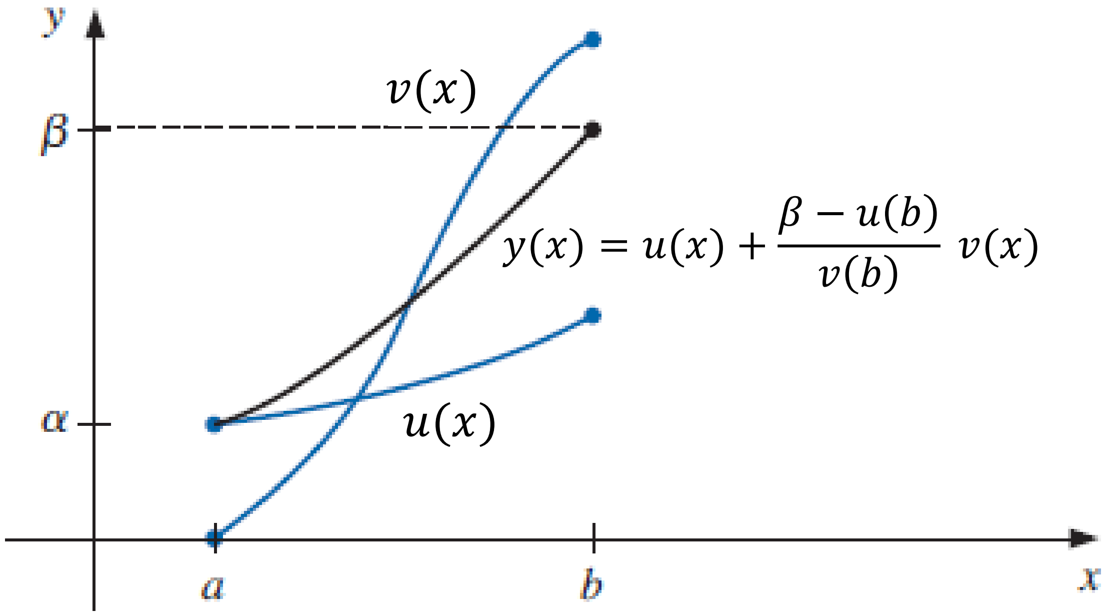
$$u(a) = \alpha, \;\; u'(a) = 0$$

PVI 2.

$$v'' = p(x)v' + q(x)v, \qquad a \le x \le b$$

$$v(a) = 0, \;\; v'(a) = 1$$

Interpretación geométrica. En este método el 'disparo' golpea el objetivo después de un disparo de prueba.



Burden 10ª Ed., pág. 508

Unidad 7. Método del disparo lineal: resumen

Teorema 2. (Burden 10ª Ed., pág. 506)

Si existen funciones $p(x), q(x)$ y $r(x)$ continuas en $[a,b]$, tales que:

$$y'' = f(x,y,y') = p(x)y' + q(x)y + r(x),$$
$$y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

y además, $q(x) > 0$ en $[a,b]$, entonces el PVF:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \le x \le b$$
$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta$$

tiene una solución única dada por:

$$y(x) = u(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}\, v(x)$$

siempre que $v(b) \neq 0$, donde u y v son las soluciones de los PVI:

PVI 1.

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x), \qquad a \le x \le b$$
$$u(a) = \alpha,\ u'(a) = 0$$

PVI 2.

$$v'' = p(x)v' + q(x)v, \qquad a \le x \le b$$
$$v(a) = 0,\ v'(a) = 1$$

Unidad 7. Método del disparo lineal

Observaciones:

- ✓ Cada PVI se debe convertir a un sistema de 2 ecuaciones diferenciales.

- ✓ Los sistemas de ecuaciones resultantes se pueden resolver utilizando Euler, Euler mejorado, punto medio o RK.

- ✓ Es fácil ver que la función

$$y(x) = u(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}\, v(x)$$

es solución del PVF.

Unidad 7. Método del disparo lineal

Observaciones:

- ✓ Cada PVI se debe convertir a un sistema de 2 ecuaciones diferenciales.

- ✓ Los sistemas de ecuaciones resultantes se pueden resolver utilizando Euler, Euler mejorado, punto medio o RK.

- ✓ Es fácil ver que la función

$$y(x) = u(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}\, v(x)$$

es solución del PVF.

Ejercicio 1. Demuestre que

$$y(x) = u(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}\, v(x), \qquad a \leq x \leq b$$

es solución del PVF:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal,

tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución

real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$$

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal, tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + x$$

Solución.

1. Identificar las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$.
2. Plantear los PVI
3. Resolver los problemas de valor inicial
4. Ensamblar la solución
5. Comparar los resultados

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal, tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$$

Solución.

1. Identificar las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$.

   Recordar:

   $$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

   Por lo tanto,

   $$p(x) = 0$$

   $$q(x) = 4$$

   $$r(x) = -4x,$$

   para todo $0 \le x \le 1$.

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal, tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$$

Solución.

1. Identificar $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 4, \quad r(x) = -4x$$

2. Plantear los PVI.

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal, tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + x$$

Solución.

1. Identificar $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 4, \quad r(x) = -4x$$

2. Plantear los PVI.

PVI 1.

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x), \; a \le x \le b$$

$$u(a) = \alpha, \; u'(a) = 0$$

De modo que,

$$u'' = 4u - 4x, \; 0 \le x \le 1$$

$$u(0) = 0, \; u'(0) = 0$$

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal,

tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución

real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + x$$

Solución.

1. Identificar $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 4, \quad r(x) = -4x$$

2. Plantear los PVI.

PVI 1.

$$u'' = 4u - 4x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0) = 0, \ u'(0) = 0$$

PVI 2.

$$v'' = p(x)v' + q(x)v, \qquad a \le x \le b$$

$$v(a) = 0, \ v'(a) = 1$$

por lo que,

$$v'' = 4v, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$v(0) = 0, \ v'(0) = 1$$

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal,

tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución

real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$$

Solución.

1. Identificar $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 4, \quad r(x) = -4x$$

2. Plantear los PVI.

$$\text{PVI 1} \begin{cases} u'' = 4u - 4x, \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0, \; u'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{PVI 2} \begin{cases} v'' = 4v, \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ v(0) = 0, \; v'(0) = 1 \end{cases}$$

3. Resolver los PVI. Ejercicio.

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal, tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$$

Solución.

1. Identificar $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 4, \quad r(x) = -4x$$

2. Plantear los PVI.

$$\text{PVI 1}\ \begin{cases} u'' = 4u - 4x, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, \ u'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{PVI 2}\ \begin{cases} v'' = 4v, & 0 \le x \le 1 \\ v(0) = 0, \ v'(0) = 1 \end{cases}$$

3. Resolver los PVI. Ejercicio.
4. Ensamblar la solución

Unidad 7. Método del disparo lineal

Ejemplo 3. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 4y - 4x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$$

Mediante el método del disparo lineal, tome $h = 1/3$.

Compare sus resultados con la solución real,

$$y(x) = \frac{e^2}{e^4 - 1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$$

Solución.

1. Identificar $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 4, \quad r(x) = -4x$$

2. Plantear los PVI.

$$\text{PVI 1}\begin{cases} u'' = 4u - 4x, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, \ u'(0) = 0 \end{cases}$$

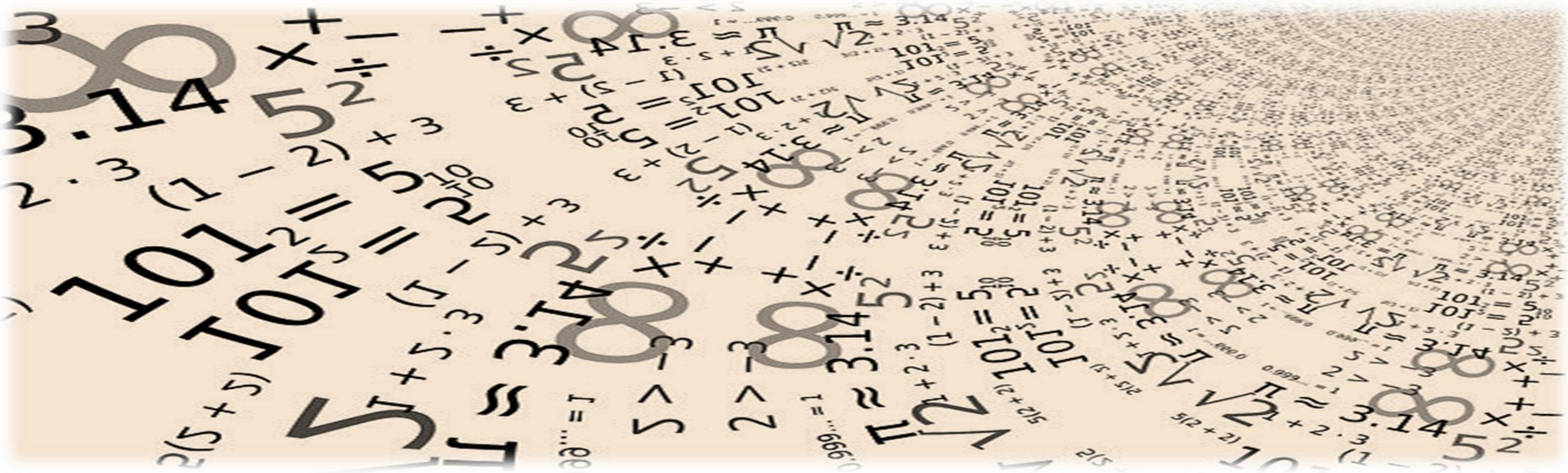
$$\text{PVI 2}\begin{cases} v'' = 4v, & 0 \le x \le 1 \\ v(0) = 0, \ v'(0) = 1 \end{cases}$$

3. Resolver los PVI. Ejercicio.

4. Ensamblar la solución

$$y(x_i) = u(x_i) + \frac{\beta - u(1)}{v(1)} v(x_i)$$

$i = 0,1,2,3;\ x_i = 0, 1/3, 2/3, 1$



Método del disparo no lineal

Unidad 7. Método del disparo no lineal

El método del disparo para el **PVF no lineal**

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b$$

$$y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta$$

utiliza las soluciones de una sucesión de PVIs de la forma:

$$y''_{t_k} = f\left(x, y_{t_k}, y'_{t_k}\right), \qquad a \le x \le b$$

$$y_{t_k}(a) = \alpha$$

$$y'_{t_k}(a) = t_k$$

donde t_k es un parámetro introducido para producir variaciones de $y'_{t_k}(a)$ hasta que $y_{t_k}(b) = \beta$.

Unidad 7. Método del disparo no lineal

El método del disparo para el **PVF no lineal**

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b$$
$$y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta$$

utiliza las soluciones de una sucesión de PVIs de la forma:

PVI1
$$\begin{cases} y''_{t_k} = f\left(x, y_{t_k}, y'_{t_k}\right), \qquad a \le x \le b \\ y_{t_k}(a) = \alpha \\ y'_{t_k}(a) = t_k \end{cases}$$

donde t_k es un parámetro introducido para producir variaciones de $y'_{t_k}(a)$ hasta que $y_{t_k}(b) = \beta$.

Es decir, partiendo de un valor conocido t_0 de $y'(a)$ se plantea construir una sucesión de pendientes $\{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots\}$, que converja a un valor t, con

$$\lim_{k\to\infty} y_{t_k}(b) = \beta$$

donde y_{t_k} denota la solución del PVI1.

Unidad 7. Método del disparo no lineal

El método del disparo para el **PVF no lineal**

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b$$
$$y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta$$

utiliza las soluciones de una sucesión de PVIs de la forma:

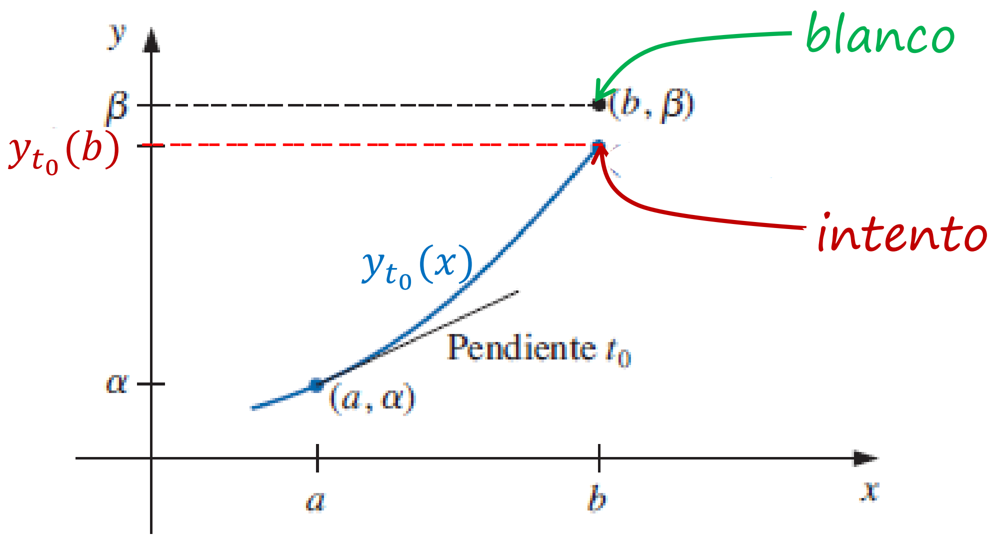
PVI1
$$\begin{cases} y''_{t_k} = f\left(x, y_{t_k}, y'_{t_k}\right), \qquad a \leq x \leq b \\ y_{t_k}(a) = \alpha \\ y'_{t_k}(a) = t_k \end{cases}$$

donde t_k es un parámetro introducido para producir variaciones de $y'_{t_k}(a)$ hasta que $y_{t_k}(b) = \beta$.

Es decir, partiendo de un valor conocido t_0 de $y'(a)$ se plantea construir una sucesión de pendientes $\{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots\}$, que converja a un valor t, con

$$\lim_{k \to \infty} y_{t_k}(b) = \beta$$

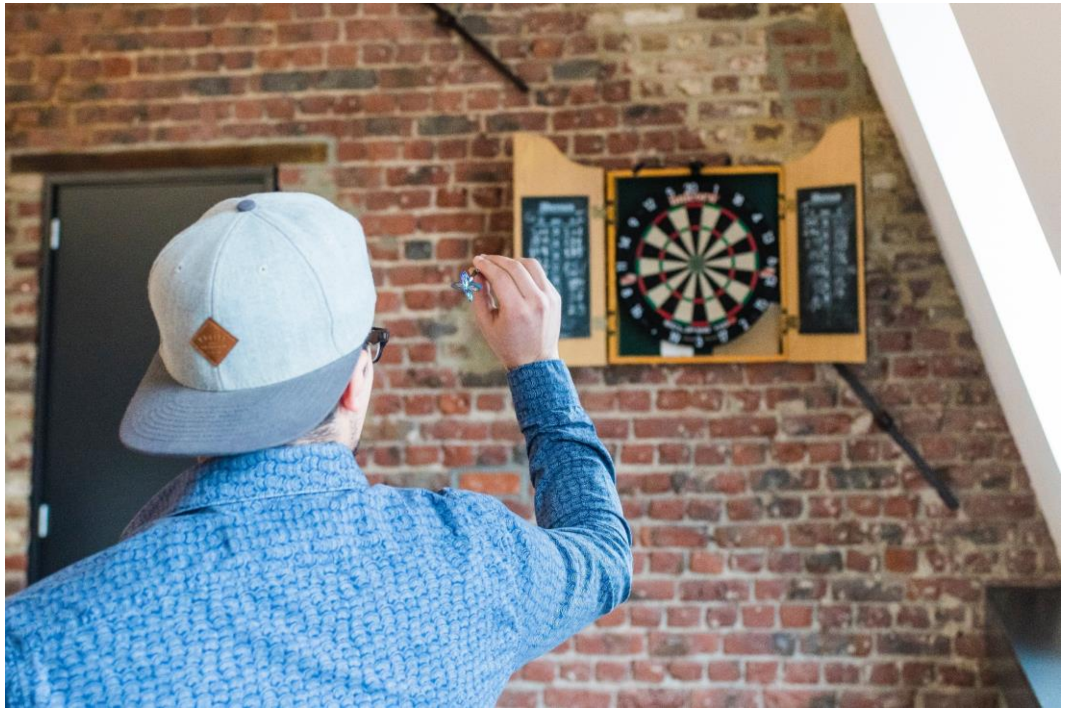
donde y_{t_k} denota la solución del PVI1.



Burden 10ª Ed., pág. 512

Unidad 7. Método del disparo no lineal

En pocas palabras, el método se basa en aproximar sucesivamente la solución de la EDO no lineal 'disparando' (cambiando la pendiente) hasta llegar a 'acertar' (con una tolerancia dada) la condición de frontera en el punto $x = b$.



https://www.pexels.com/es-es/foto/foto-de-vista-posterior-del-hombre-con-camisa-de-vestir-azul-y-sombrero-gris-jugando-a-los-dardos-2423222/

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Pasos para aproximar la solución:

1. Elegir la pendiente inicial a la que se dispara al objeto desde el punto (a, α) y a lo largo de la curva descrita por el PVI

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha, \; y'(a) = t_0$$

2. Si $y(b; t_0)$ no está suficientemente cerca de β, se corrige la aproximación eligiendo pendientes $t_1, t_2, \ldots, t_K$ hasta que $y(b; t_K)$ esté suficientemente cerca de β.

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Pasos para aproximar la solución:

1. Elegir la pendiente inicial a la que se dispara al objeto desde el punto (a, α) y a lo largo de la curva descrita por el PVI

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha, \; y'(a) = t_0$$

2. Si $y(b; t_0)$ no está suficientemente cerca de β, se corrige la aproximación eligiendo pendientes $t_1, t_2, \ldots, t_K$ hasta que $y(b; t_K)$ esté suficientemente cerca de β.

¿Cómo elegir las pendientes (elevaciones) del disparo?

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Elección del parámetro t.

Para establecer un método que permita determinar el valor del parámetro t es conveniente escribir la solución del PVI en términos de las variables x y t. Esto es, se supone que la solución del PVI

$$y''_{t_k} = f\left(x, y_{t_k}, y'_{t_k}\right), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y_{t_k}(a) = \alpha, \ \ y'_{t_k}(a) = t_k$$

es la función

$$y_t\,(x) = y(x;t)$$

para la cual,

$$y_t\,(b) = \beta$$

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Elección del parámetro t.

Para establecer un método que permita determinar el valor del parámetro t es conveniente escribir la solución del PVI en términos de las variables x y t. Esto es, se supone que la solución del PVI

$$y''_{t_k} = f(x, y_{t_k}, y'_{t_k}), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y_{t_k}(a) = \alpha, \;\; y'_{t_k}(a) = t_k$$

es la función

$$y_t\,(x) = y(x;t)$$

para la cual,

$$y_t\,(b) = \beta$$

Hallar el valor óptimo del disparo se reduce a resolver la ecuación no lineal de una variable:

$$g(t) = y_t(b) - \beta = 0$$

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Elección del parámetro t.

Para establecer un método que permita determinar el valor del parámetro t es conveniente escribir la solución del PVI en términos de las variables x y t. Esto es, se supone que la solución del PVI

$$y''_{t_k} = f\left(x, y_{t_k}, y'_{t_k}\right), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y_{t_k}(a) = \alpha, \;\; y'_{t_k}(a) = t_k$$

es la función

$$y_t(x) = y(x;t)$$

para la cual,

$$y_t(b) = \beta$$

Hallar el valor óptimo del disparo se reduce a resolver la ecuación no lineal de una variable:

$$g(t) = y_t(b) - \beta = 0$$

- ✓ Este último problema puede resolverse utilizando el método de Bisección, secante o Newton.
- ✓ Usaremos el método de la secante.

Unidad 7. Método del disparo no lineal: resumen

Observaciones.

✓ En cada iteración del método del disparo es necesario resolver dos problemas.

Problema 1. PVI

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha, \;\; y'(a) = t$$

Problema 2. La ecuación no lineal

$$g(t) = y(b; t) - \beta = 0$$

Unidad 7. Método del disparo no lineal: resumen

Observaciones.

- ✓ En cada iteración del método del disparo es necesario resolver dos problemas.

Problema 1. PVI

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b$$
$$y(a) = \alpha, \;\; y'(a) = t$$

Problema 2. La ecuación no lineal

$$g(t) = y(b; t) - \beta = 0$$

- ✓ Para el parámetro t pueden usarse como aproximaciones iniciales los valores:

$$t_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$
$$t_1 = 2t_0$$

- ✓ El método de la secante para g toma la forma:

$$t_k = t_{k-1} - \left[\frac{t_{k-1} - t_{k-2}}{g(t_{k-1}) - g(t_{k-2})}\right] g(t_{k-1})$$

Unidad 7. Método del disparo no lineal: resumen

Observaciones.

✓ En cada iteración del método del disparo es necesario resolver dos problemas.

Problema 1. PVI

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha, \;\; y'(a) = t$$

Problema 2. La ecuación no lineal

$$g(t) = y(b; t) - \beta = 0$$

✓ Para el parámetro t pueden usarse como aproximaciones iniciales los valores:

$$t_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

$$t_1 = 2t_0$$

✓ En términos de las aproximaciones numéricas $w_{1,i} \approx y(x_i)$, el método de la secante toma la forma:

$$t_k = t_{k-1} - \left[\frac{t_{k-1} - t_{k-2}}{w_{1,N}^{k-1} - w_{1,N}^{k-2}}\right](w_{1,N}^{k-1} - \beta)$$

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Ejemplo 4. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 2y^3, \qquad -1 \le x \le 0$$

$$y(-1) = \frac{1}{2}, \qquad y(0) = \frac{1}{3}$$

mediante el método del disparo no lineal. Use el método de Euler para resolver el PVI con tamaño de paso $h = 0.25$.

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Ejemplo 4. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 2y^3, \qquad -1 \le x \le 0$$

$$y(-1) = \frac{1}{2}, \qquad y(0) = \frac{1}{3}$$

mediante el método del disparo no lineal.

Use el método de Euler para resolver el PVI con tamaño de paso $h = 0.25$.

Esquema de solución.

1. Elegir la pendiente del disparo inicial: t_0
2. Resolver el PVI:

$$y''_{t_0} = f(x, y_{t_0}, y'_{t_0}), \qquad a \le x \le b$$

$$y_{t_0}(a) = \alpha, \; y'_{t_0}(a) = t_0$$

3. Si $y_{t_0}(b) = \beta$, terminar

   Si no, tomar $t_1 = 2t_0$

   repetir el paso 2, con t_1 en vez de t_0
4. Si $y_{t_1}(b) = \beta$, terminar

   Si no, elija t_2 (con el método de la secante):

$$t_2 = t_1 - \left[\frac{t_1 - t_0}{g(t_1) - g(t_0)}\right] g(t_1)$$

5. Repita el paso 4 hasta que alcance la precisión deseada: $|y_{t_k}(b) - \beta| < tol$, $k = 3, \ldots$

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Ejemplo 4. Aproximar la solución del PVF:

$$y'' = 2y^3, \qquad -1 \le x \le 0$$

$$y(-1) = \frac{1}{2}, \qquad y(0) = \frac{1}{3}$$

mediante el método del disparo no lineal.

Use el método de Euler para resolver el PVI con tamaño de paso $h = 0.25$.

Esquema de solución.

1. Elegir la pendiente del disparo inicial:

$$t_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = -\frac{1}{6}$$

2. Resolver el PVI:

$$y'' = 2y^3, \ -1 \le x \le 0$$

$$y(-1) = 1/2$$

$$y'(-1) = -1/6$$

3. Si $y_{t_0}(b) - \beta \le tol,$ terminar

   Si no, tomar $t_1 = 2t_0$

   repetir el paso 2, con t_1 en vez de t_0

Unidad 7. Método del disparo no lineal

Los métodos del disparo lineal y no lineal para PVF pueden presentar problemas de inestabilidad.