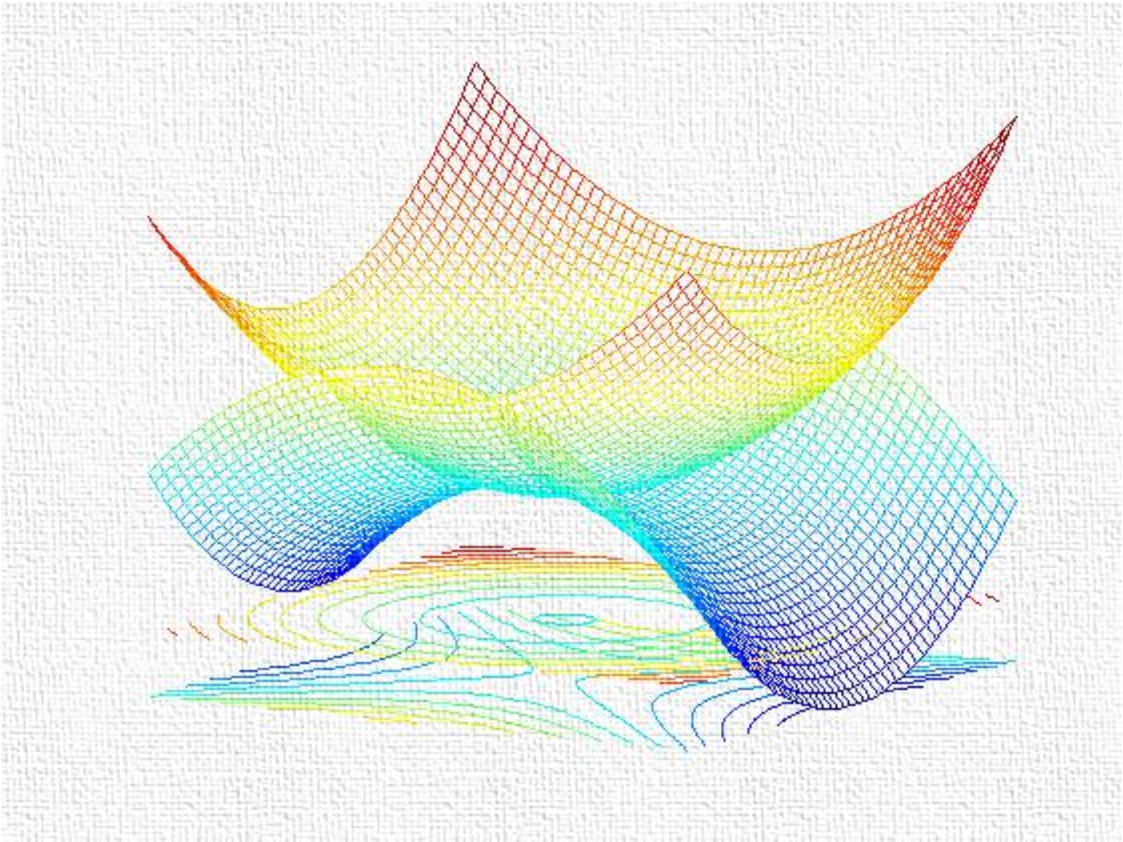
Curso de métodos numéricos



Unidad 8: Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Profa. Blanca Guillén

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales

Introducción (Burden 10ª Ed., pág. 541)

Un cuerpo es *isotrópico* si la conductividad térmica en cada uno de sus puntos es independiente de la dirección del flujo de calor a través del punto. Suponga que k, c y ρ son funciones de (x, y, z) y representan, respectivamente, la conductividad térmica, el calor específico y la densidad de un cuerpo isotrópico en el punto (x, y, z). Entonces la temperatura $u \equiv u(x, y, z, t)$, en el cuerpo se puede encontrar al resolver la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Cuando k, c y ρ son constantes, a esta ecuación se le conoce como ecuación de calor tridimensional y se expresa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Si la frontera del cuerpo es relativamente simple, la solución de esta ecuación se puede encontrar por medio de series de Fourier.

En muchas situaciones, cuando k, c y ρ no son constantes o cuando la frontera es irregular, la solución de la ecuación diferencial parcial se debe obtener por medio de técnicas de aproximación. En este capítulo se presenta una introducción a estas técnicas.

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales

Introducción (Burden 10ª Ed., pág. 541)

Un cuerpo es *isotrópico* si la conductividad térmica en cada uno de sus puntos es independiente de la dirección del flujo de calor a través del punto. Suponga que k, c y ρ son funciones de (x, y, z) y representan, respectivamente, la conductividad térmica, el calor específico y la densidad de un cuerpo isotrópico en el punto (x, y, z). Entonces la temperatura $u \equiv u(x, y, z, t)$, en el cuerpo se puede encontrar al resolver la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Cuando k, c y ρ son constantes, a esta ecuación se le conoce como ecuación de calor tridimensional y se expresa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{c\rho}{k}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Si la frontera del cuerpo es relativamente simple, la solución de esta ecuación se puede encontrar por medio de series de Fourier.

En muchas situaciones, cuando k, c y ρ no son constantes o cuando la frontera es irregular, la solución de la ecuación diferencial parcial se debe obtener por medio de técnicas de aproximación. En este capítulo se presenta una introducción a estas técnicas.

Generalmente, las ecuaciones diferenciales parciales se clasifican de manera similar a las secciones cónicas en:

1. Elípticas
2. Parabólicas
3. Hiperbólicas

Unidad 8. Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales

1. Ecuaciones diferenciales elípticas (EDPE).

Las ecuaciones de este tipo surgen en el estudio de diferentes problemas físicos independientes del tiempo, como la distribución de estado estable del calor en una región plana y problemas de estado estable bidimensionales que implican fluidos incompresibles.

Unidad 8. Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales

1. Ecuaciones diferenciales elípticas (EDPE).

Las ecuaciones de este tipo surgen en el estudio de diferentes problemas físicos independientes del tiempo, como la distribución de estado estable del calor en una región plana y problemas de estado estable bidimensionales que implican fluidos incompresibles.

Ejemplos de ecuaciones elípticas:

a) **Ecuación de Poisson:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)$$

donde f describe la entrada para el problema en una región plana R con frontera S.

Observación. Para obtener una solución única de esta ecuación se deben imponer condiciones adicionales.

Unidad 8. Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales

1. Ecuaciones diferenciales elípticas (EDPE).

Las ecuaciones de este tipo surgen en el estudio de diferentes problemas físicos independientes del tiempo, como la distribución de estado estable del calor en una región plana y problemas de estado estable bidimensionales que implican fluidos incompresibles.

Ejemplos de ecuaciones elípticas:

b) Ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

que modela la distribución de estado estable del calor en una región plana y resulta al hacer $f(x,y) = 0$ en la ecuación de Poisson.

Unidad 8. Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales

Si en **la ecuación de Laplace,**

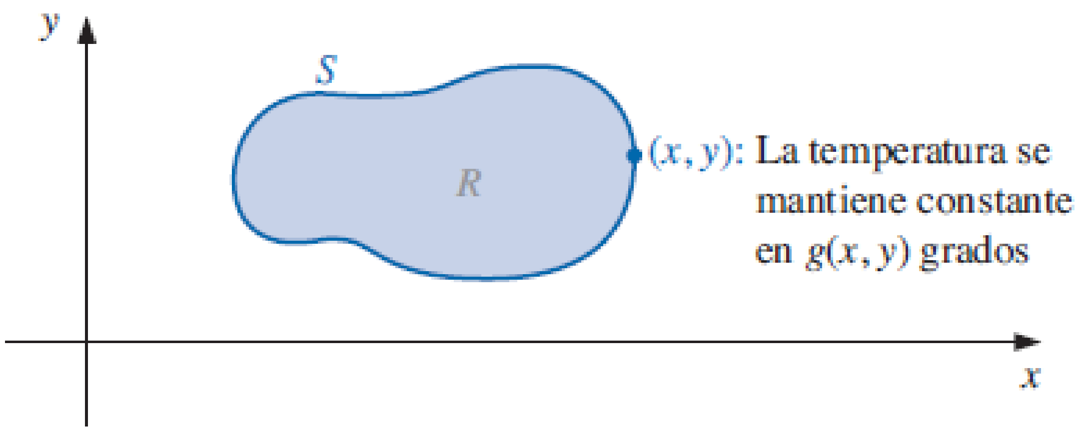
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

la temperatura dentro de la región R se determina mediante la distribución de temperatura en la frontera S, las restricciones reciben el nombre de **condiciones de frontera de Dirichlet** y vienen dadas por:

$$u(x,y) = g(x,y)$$

para todo (x,y) en S.

Burden 10ª Ed., pág. 542



2. Ecuaciones diferenciales parabólicas (EDPP).

Las ecuaciones parabólicas surgen en el estudio de problemas físicos que describen el flujo de calor a lo largo de una varilla (una dimensión), así como en el estudio de la difusión unidireccional de un gas.

Burden 10ª Ed., pág. 542

2. Ecuaciones diferenciales parabólicas (EDPP).

Las ecuaciones parabólicas surgen en el estudio de problemas físicos que describen el flujo de calor a lo largo de una varilla (una dimensión), así como en el estudio de la difusión unidireccional de un gas.

Burden 10ª Ed., pág. 542

Ejemplos de ecuaciones parabólicas:

a) Ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Modela el flujo de calor a lo largo de una varilla de longitud l con temperatura uniforme en la sección transversal.

2. Ecuaciones diferenciales parabólicas (EDPP).

Las ecuaciones parabólicas surgen en el estudio de problemas físicos que describen el flujo de calor a lo largo de una varilla (una dimensión), así como en el estudio de la difusión unidireccional de un gas.

Burden 10ª Ed., pág. 542

Ejemplos de ecuaciones parabólicas:

a) **Ecuación de difusión del calor:**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Si se especifica la distribución inicial de calor en la varilla como:

$$u(x,0) = f(x)$$

y los extremos se mantienen a temperaturas constantes U_1 y U_2, entonces, $u(0,t) = U_1$, $u(l,t) = U_2$, y

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x$$

2. Ecuaciones diferenciales parabólicas (EDPP).

Las ecuaciones parabólicas surgen en el estudio de problemas físicos que describen el flujo de calor a lo largo de una varilla (una dimensión), así como en el estudio de la difusión unidireccional de un gas.

Burden 10ª Ed., pág. 542

Ejemplos de ecuaciones parabólicas:

a) Ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Si, por el contrario, la varilla se aísla y el calor no fluye en los extremos, las condiciones en la frontera son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

Entonces, el calor no escapa de la varilla y, en el caso límite, la temperatura es constante.

3. Ecuaciones diferenciales hiperbólicas (EDPH).

Las ecuaciones de este tipo modelan problemas físicos relacionados con vibraciones, como en el caso de la ecuación de onda, el estudio de vigas que vibran con uno o ambos extremos sujetados y en la transmisión de electricidad en una línea larga donde existe alguna fuga de corriente hacia el piso.

3. Ecuaciones diferenciales hiperbólicas (EDPH).

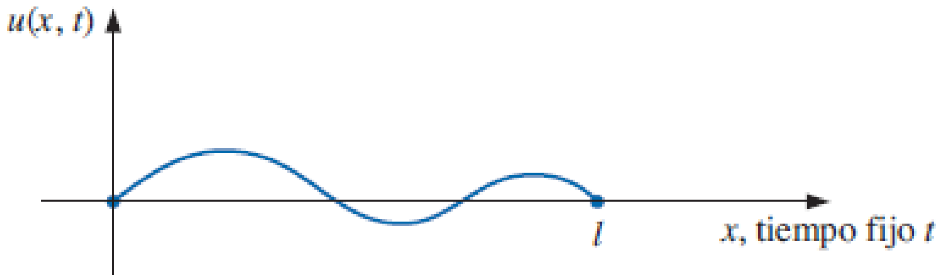
Las ecuaciones de este tipo modelan problemas físicos relacionados con vibraciones, como en el caso de la ecuación de onda, el estudio de vigas que vibran con uno o ambos extremos sujetados y en la transmisión de electricidad en una línea larga donde existe alguna fuga de corriente hacia el piso.

Ejemplos de ecuaciones hiperbólicas:

a) Ecuación de onda:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

para $0 \leq x \leq l$, $t > 0$, donde $u(x,t)$ mide el desplazamiento vertical de un punto x en el tiempo t.



Burden 10ª Ed., pág. 543

3. Ecuaciones diferenciales hiperbólicas (EDPH).

Las ecuaciones de este tipo modelan problemas físicos relacionados con vibraciones, como en el caso de la ecuación de onda, el estudio de vigas que vibran con uno o ambos extremos sujetados y en la transmisión de electricidad en una línea larga donde existe alguna fuga de corriente hacia el piso.

Ejemplos de ecuaciones hiperbólicas:

a) Ecuación de onda:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

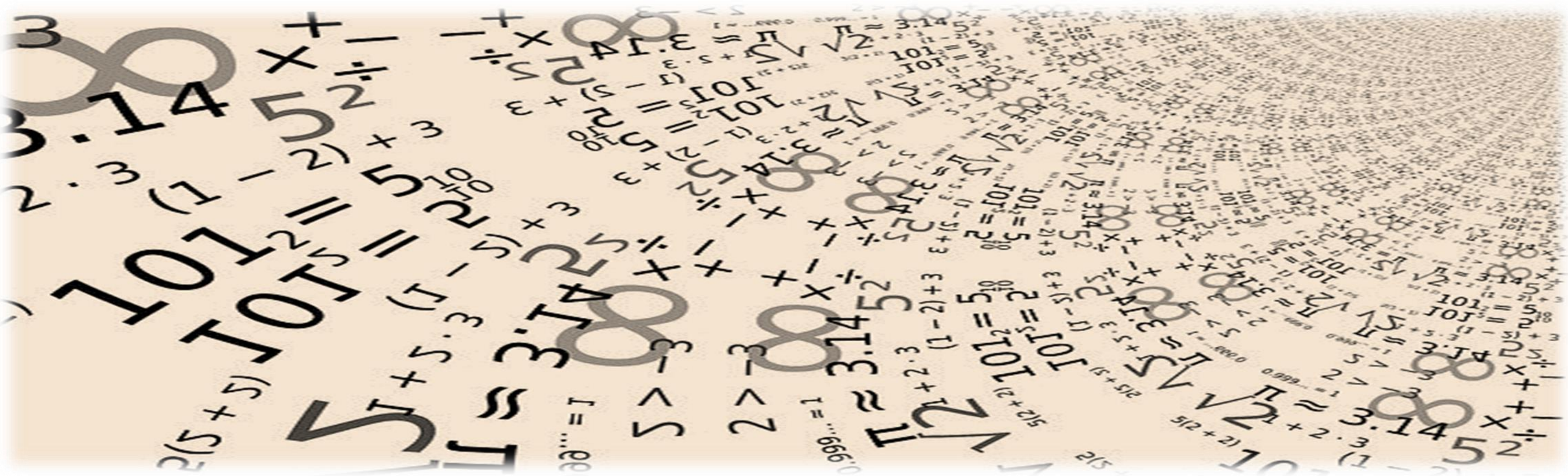
para $0 \leq x \leq l$, $t > 0$.

Las restricciones sobre la posición y velocidad inicial para este modelo son:

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

para $0 \leq x \leq l$. Si los extremos están fijos, entonces

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ \forall\, t > 0$$



Ecuaciones elípticas

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

Problema a resolver: **ecuación de Poisson,**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)$$

en la región:

$$R = \{(x,y) | \, a < x < b, c < y < d\}$$

con $u(x,y) = g(x,y)$ para $(x,y) \in S$, donde S es la frontera de R.

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

Problema a resolver: **ecuación de Poisson,**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)$$

en la región:

$$R = \{(x,y) | \, a < x < b, c < y < d\}$$

con $u(x,y) = g(x,y)$ para $(x,y) \in S$, donde S es la frontera de R.

- ✓ Si f y g son continuas en sus dominios, entonces existe una única solución para esta ecuación.
- ✓ Aproximación de la solución: método de diferencias finitas centradas.
- ✓ Formulación: las diferencias finitas se obtienen a partir del polinomio de Taylor en dos variables en puntos de red (x_i, y_j) de R.

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Problema a resolver: **ecuación de Poisson,**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)$$

en la región:

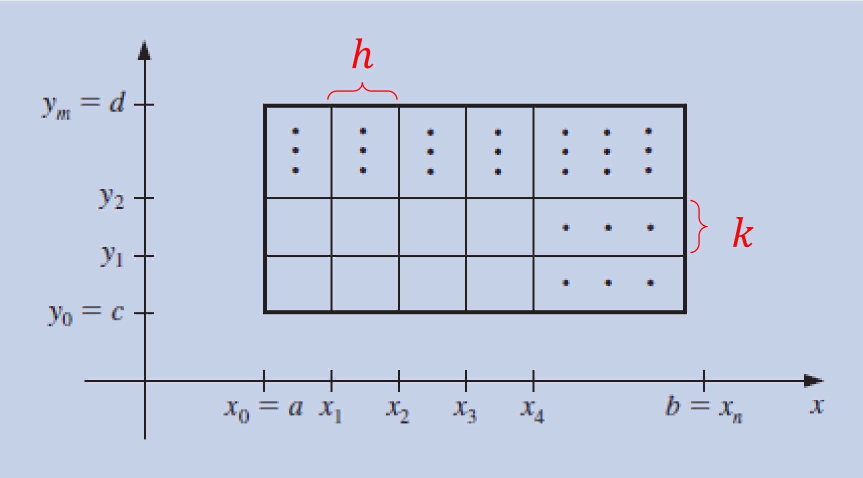
$$R = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\}$$

con $u(x,y) = g(x,y)$ para $(x,y) \in S$, donde S es la frontera de R.

Selección de la cuadrícula.

Consiste en subdividir la región R en una cuadrícula de tamaño $m \times n$, con m y n elegidos de modo que la cuadrícula tenga tamaños de paso,

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad k = \frac{d-c}{m}$$



Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

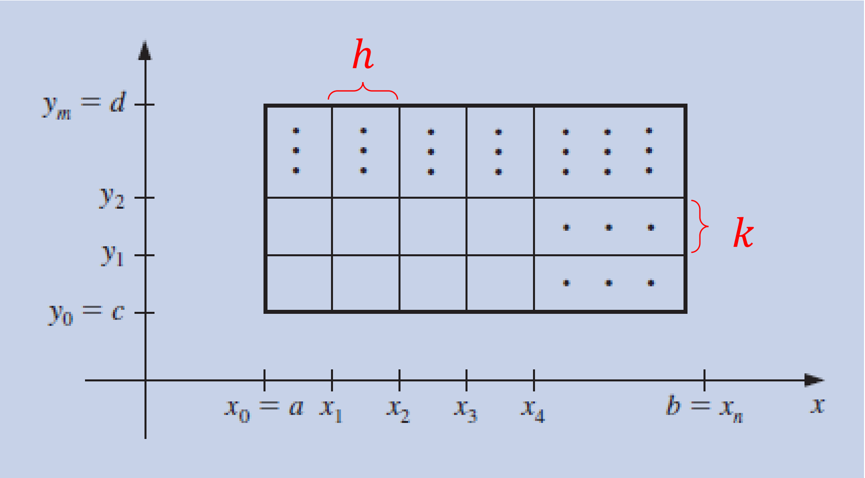
Problema a resolver: **ecuación de Poisson,**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=f(x,y)$$

en la región:

$$R=\{(x,y)|\; a<x<b, c<y<d\}$$

con $u(x,y)=g(x,y)$ para $(x,y)\in S$, donde S es la frontera de R.



Selección de la cuadrícula.

Consiste en subdividir la región R en una cuadrícula de tamaño $m \times n$, con m y n elegidos de modo que la cuadrícula tenga tamaños de paso,

$$h=\frac{b-a}{n}, \qquad k=\frac{d-c}{m}$$

Con esta partición R se subdivide en $m \times n$ rectángulos con puntos de red (x_i, y_j), con

$$x_i = a+ih, \qquad i=0,1,\ldots,n$$

$$y_j = c+jk, \qquad j=0,1,\ldots,m$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

En cada punto de red del interior de la cuadrícula se aproximan las derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j), \quad \xi_i \epsilon (x_{i-1}, x_{i+1})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j), \quad \eta_j \epsilon (y_{j-1}, y_{j+1})$$

El uso de estas fórmulas permite expresar la **ecuación de Poisson** en los puntos de red (x_i, y_j)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$$

mediante,

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} = f(x_i, y_j) +$$

$$+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j)$$

Error de aproximación

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Denotando con w_{ij} la aproximación de $u(x_i, y_j)$ y truncando el término del error resulta el método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson:

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right] w_{ij} - \left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) - \left(\frac{h}{k}\right)^2 \left(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}\right) = -h^2 f\left(x_i, y_j\right), \qquad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$w_{0j} = g\left(x_0, y_j\right), \qquad w_{nj} = g\left(x_n, y_j\right), \text{ para cada } j = 0,1,\dots,m$$

$$w_{i0} = g(x_i, y_0), \qquad w_{im} = g(x_i, y_m), \text{ para cada } i = 0,1,\dots,n$$

Este método tiene un error de truncamiento local de orden $O(h^2 + k^2)$.

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Problema: ecuación de Poisson,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)$$

en la región:

$$R = \{(x,y) |\ a < x < b, c < y < d\}$$

con $u(x,y) = g(x,y)$ para $(x,y) \in S$, donde S es la frontera de R.

Método de diferencias finitas para aproximar la solución es:

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right] w_{ij} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \left(\frac{h}{k}\right)^2 (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

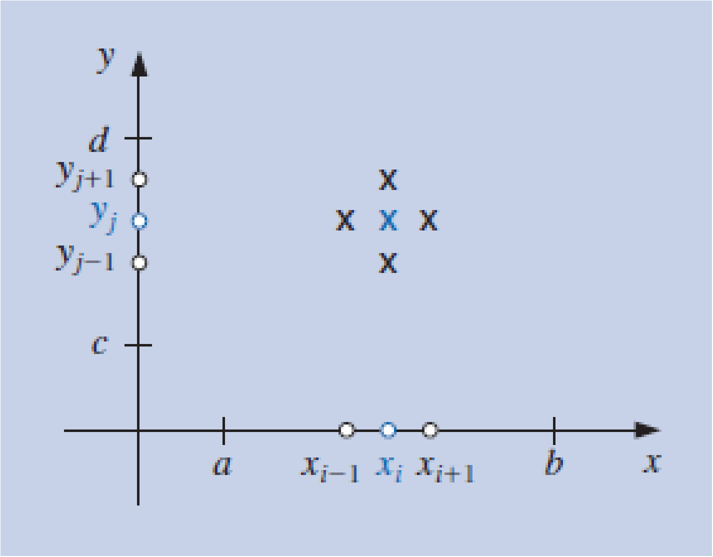
para $i = 1,2,\dots,n-1,\ j = 1,2,\dots,m-1$, y

$$w_{0j} = g(x_0, y_j), \qquad w_{nj} = g(x_n, y_j), \quad j = 0,1,\dots,m$$

$$w_{i0} = g(x_i, y_0), \qquad w_{im} = g(x_i, y_m), \quad i = 1,\dots,n-1$$

Esquema de puntos del método

(Burden 10ª. Ed., pág. 545)



Produce un sistema lineal de tamaño:

$$(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

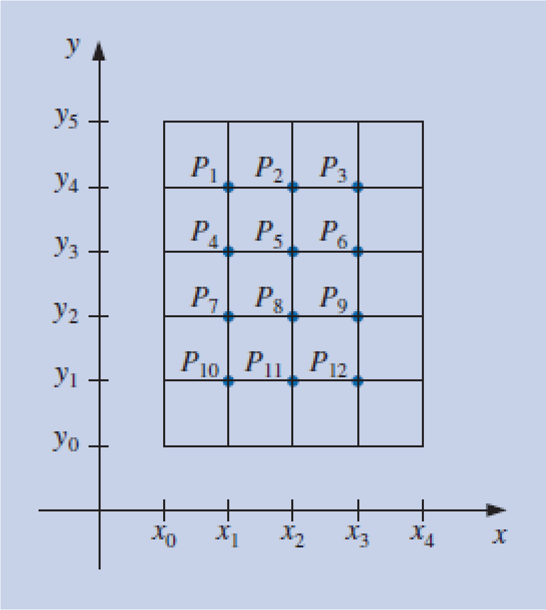
Observación. (Burden 10ª Ed., pág. 546)

El sistema lineal que contiene estas incógnitas se expresa, para los cálculos de matriz, de forma más eficiente si se introduce el reetiquetado de los puntos de malla interiores. Un etiquetado recomendado de estos puntos (consulte [Var1], p. 210) es hacer

$$P_l = (x_i, y_j) \quad \text{y} \quad w_l = w_{i,j},$$

donde $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, m - 1$. Esto etiqueta los puntos de malla de forma consecutiva desde la izquierda hasta la derecha y desde la parte superior hasta la parte inferior. Etiquetar los puntos de esta forma garantiza que el sistema necesario para determinar $w_{i,j}$ es una matriz con un ancho de banda como máximo $2n - 1$.

Por ejemplo, con $n = 4$ y $m = 5$, el reetiquetado resulta en una cuadrícula cuyos puntos se muestran en la figura 12.6.



Para este esquema hay que resolver un sistema de ecuaciones lineales de tamaño 12×12.

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 546).
Determine la distribución de calor en estado estable en una placa de metal cuadrada y delgada con dimensiones de $0.5\,m$ por $0.5\,m$ usando $m = n = 4$. Dos fronteras adyacentes se mantienen a $0°C$ y el calor en las otras fronteras se incrementa de manera lineal desde $0°C$ en una esquina hasta $100°C$ donde se unen los lados.

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 546). Determine la distribución de calor en estado estable en una placa de metal cuadrada y delgada con dimensiones de $0.5\,m$ por $0.5\,m$ usando $m = n = 4$. Dos fronteras adyacentes se mantienen a $0°C$ y el calor en las otras fronteras se incrementa de manera lineal desde $0°C$ en una esquina hasta $100°C$ donde se unen los lados.

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 546). Determine la distribución de calor en estado estable en una placa de metal cuadrada y delgada con dimensiones de $0.5\,m$ por $0.5\,m$ usando $m = n = 4$. Dos fronteras adyacentes se mantienen a $0°C$ y el calor en las otras fronteras se incrementa de manera lineal desde $0°C$ en una esquina hasta $100°C$ donde se unen los lados.

Solución Coloque los lados con las condiciones de frontera cero a lo largo de los ejes x y y. Entonces, el problema se expresa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

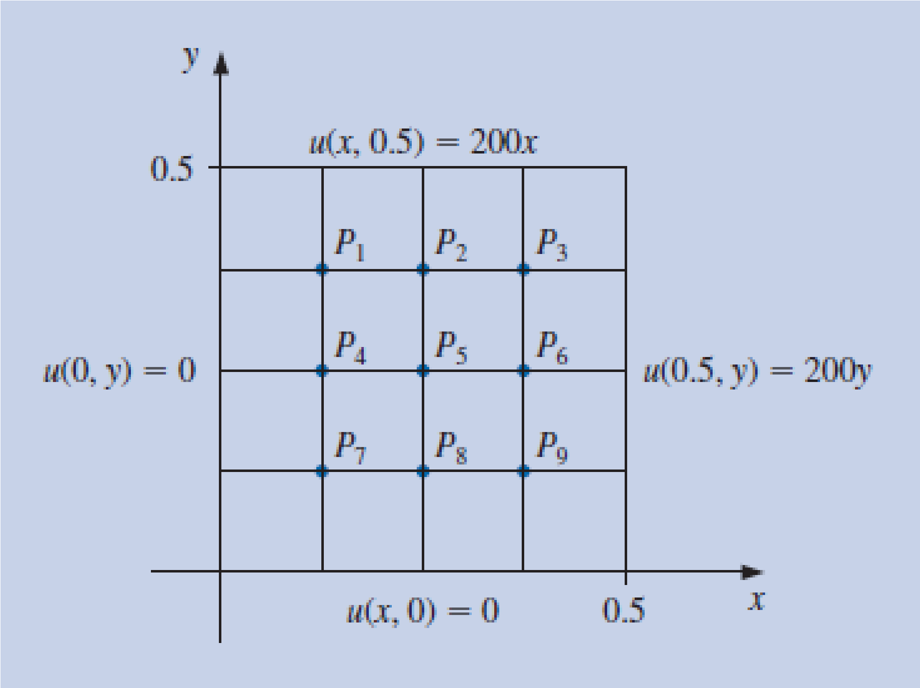
para (x, y) en el conjunto $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0.5,\ 0 < y < 0.5\}$. Las condiciones de frontera son

$$u(0, y) = 0,\quad u(x, 0) = 0,\quad u(x, 0.5) = 200x,\ \text{ y }\ u(0.5, y) = 200y.$$

Si $n = m = 4$, el problema tiene la cuadrícula que se muestra en la figura 12.7 y la ecuación de diferencias (12.4) es

$$4w_{i,j} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} = 0,$$

para cada $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$.



Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 546). Determine la distribución de calor en estado estable en una placa de metal cuadrada y delgada con dimensiones de $0.5\,m$ por $0.5\,m$ usando $m = n = 4$. Dos fronteras adyacentes se mantienen a $0°C$ y el calor en las otras fronteras se incrementa de manera lineal desde $0°C$ en una esquina hasta $100°C$ donde se unen los lados.

Expresar esto en términos de puntos de cuadrícula interior reetiquetados $w_i = u(P_i)$ implica que las ecuaciones en los puntos P_i son

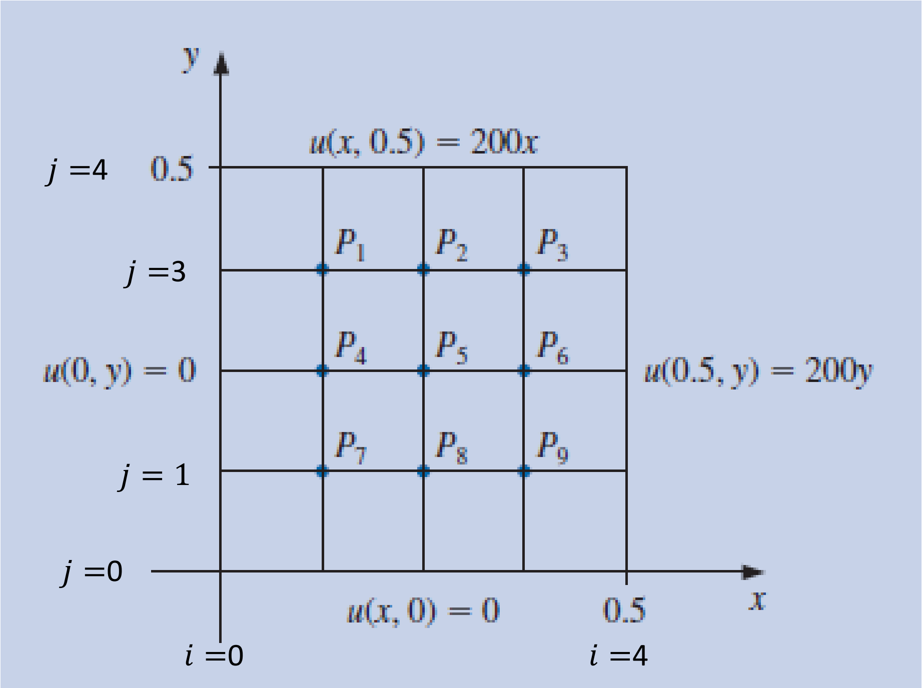
$$
\begin{aligned}
P_1 &: \quad 4w_1 - w_2 - w_4 = w_{0,3} + w_{1,4}, \\
P_2 &: \quad 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 = w_{2,4}, \\
P_3 &: \quad 4w_3 - w_2 - w_6 = w_{4,3} + w_{3,4}, \\
P_4 &: \quad 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 = w_{0,2}, \\
P_5 &: \quad 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 = 0, \\
P_6 &: \quad 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 = w_{4,2}, \\
P_7 &: \quad 4w_7 - w_8 - w_4 = w_{0,1} + w_{1,0}, \\
P_8 &: \quad 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 = w_{2,0}, \\
P_9 &: \quad 4w_9 - w_8 - w_6 = w_{3,0} + w_{4,1},
\end{aligned}
$$

donde los lados derechos de las ecuaciones se obtienen a partir de las condiciones de frontera.

De hecho, las condiciones de frontera implican que

$$w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0,$$

$$w_{1,4} = w_{4,1} = 25, \quad w_{2,4} = w_{4,2} = 50, \quad \text{y} \quad w_{3,4} = w_{4,3} = 75.$$



$$4w_{ij} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} = 0$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 546). Determine la distribución de calor en estado estable en una placa de metal cuadrada y delgada con dimensiones de $0.5\,m$ por $0.5\,m$ usando $m = n = 4$. Dos fronteras adyacentes se mantienen a $0°C$ y el calor en las otras fronteras se incrementa de manera lineal desde $0°C$ en una esquina hasta $100°C$ donde se unen los lados.

Expresar esto en términos de puntos de cuadrícula interior reetiquetados $w_i = u(P_i)$ implica que las ecuaciones en los puntos P_i son

$$
\begin{aligned}
P_1 &: \quad 4w_1 - w_2 - w_4 = w_{0,3} + w_{1,4},\\
P_2 &: \quad 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 = w_{2,4},\\
P_3 &: \quad 4w_3 - w_2 - w_6 = w_{4,3} + w_{3,4},\\
P_4 &: \quad 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 = w_{0,2},\\
P_5 &: \quad 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 = 0,\\
P_6 &: \quad 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 = w_{4,2},\\
P_7 &: \quad 4w_7 - w_8 - w_4 = w_{0,1} + w_{1,0},\\
P_8 &: \quad 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 = w_{2,0},\\
P_9 &: \quad 4w_9 - w_8 - w_6 = w_{3,0} + w_{4,1},
\end{aligned}
$$

donde los lados derechos de las ecuaciones se obtienen a partir de las condiciones de frontera.

De hecho, las condiciones de frontera implican que

$$w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0,$$

$$w_{1,4} = w_{4,1} = 25, \quad w_{2,4} = w_{4,2} = 50, \quad \text{y} \quad w_{3,4} = w_{4,3} = 75.$$

Por lo que el sistema lineal asociado con este problema tiene la forma

$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\\ w_5\\ w_6\\ w_7\\ w_8\\ w_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 25\\ 50\\ 150\\ 0\\ 0\\ 50\\ 0\\ 0\\ 25 \end{bmatrix}.
$$

Los valores de $w_1, w_2, \ldots, w_9$, encontrados al aplicar el método Gauss-Seidel a esta matriz se establecen en la tabla 12.1.

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Ejemplo 1. (Burden 10ª Ed., pág. 546). Determine la distribución de calor en estado estable en una placa de metal cuadrada y delgada con dimensiones de $0.5\,m$ por $0.5\,m$ usando $m = n = 4$. Dos fronteras adyacentes se mantienen a $0°C$ y el calor en las otras fronteras se incrementa de manera lineal desde $0°C$ en una esquina hasta $100°C$ donde se unen los lados.

Expresar esto en términos de puntos de cuadrícula interior reetiquetados $w_i = u(P_i)$ implica que las ecuaciones en los puntos P_i son

$$
\begin{array}{ll}
P_1: & 4w_1 - w_2 - w_4 = w_{0,3} + w_{1,4}, \\
P_2: & 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 = w_{2,4}, \\
P_3: & 4w_3 - w_2 - w_6 = w_{4,3} + w_{3,4}, \\
P_4: & 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 = w_{0,2}, \\
P_5: & 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 = 0, \\
P_6: & 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 = w_{4,2}, \\
P_7: & 4w_7 - w_8 - w_4 = w_{0,1} + w_{1,0}, \\
P_8: & 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 = w_{2,0}, \\
P_9: & 4w_9 - w_8 - w_6 = w_{3,0} + w_{4,1},
\end{array}
$$

donde los lados derechos de las ecuaciones se obtienen a partir de las condiciones de frontera.

De hecho, las condiciones de frontera implican que

$$w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0,$$

$$w_{1,4} = w_{4,1} = 25, \quad w_{2,4} = w_{4,2} = 50, \quad \text{y} \quad w_{3,4} = w_{4,3} = 75.$$

Por lo que el sistema lineal asociado con este problema tiene la forma

$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}.
$$

Los valores de $w_1, w_2, \ldots, w_9$, encontrados al aplicar el método Gauss-Seidel a esta matriz se establecen en la tabla 12.1.

$$w_1 = 18.75, w_2 = 37.50, w_3 = 56.25, w_4 = 12.50$$

$$w_5 = 25.00, w_6 = 37.50, w_7 = 6.25, w_8 = 12.50$$

$$w_9 = 18.75$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

Ejercicio 1. Aproxime la solución de la ecuación de Poisson:

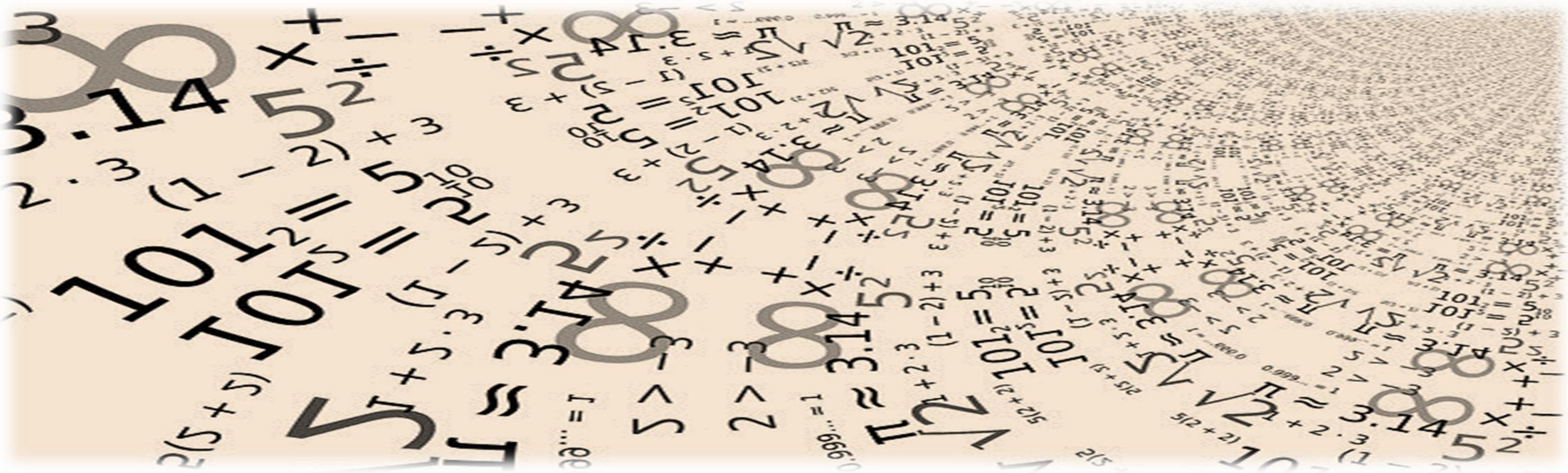
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$$

para $0 < x < 2$, $0 < y < 1$, con las condiciones de frontera:

$$u(0,y) = 0,\ u(2,y) = 2e^y,\ 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x,0) = x,\ u(x,1) = xe,\ 0 \leq x \leq 2$$

Use $h = \frac{1}{4}$ y $k = \frac{1}{2}$. Compare sus resultados con la solución exacta: $u(x,y) = xe^y$.



Ecuaciones parabólicas

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

Problema a resolver: **ecuación de difusión del calor,**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; 0 \le x \le l$$

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

Problema a resolver: **ecuación de difusión del calor,**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq l$$

- ✓ Métodos: diferencias finitas progresivas y regresivas
- ✓ Formulación: las diferencias finitas se obtienen a partir de expansiones del polinomio de Taylor en dos variables en los puntos de red (x_i, t_j).

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

Problema a resolver: ecuación de difusión del calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; 0 \le x \le l$$

Selección de la malla: se consigue eligiendo un entero m y un paso de tiempo $k > 0$, y se define:

$$h = \frac{l}{m}$$

Así, los puntos de red son (x_i, t_j), con

$$x_i = ih, \qquad t_j = jk$$

Para $i = 0,1, \ldots, m$, $j = 0,1, \ldots$

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

Problema a resolver: **ecuación de difusión del calor,**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; 0 \leq x \leq l$$

Selección de la malla: los puntos de red son (x_i, t_j), con $x_i = ih$, $t_j = jk$, para $i = 0,1,\ldots,m$, $j = 0,1,\ldots;$ $h = \frac{l}{m}$

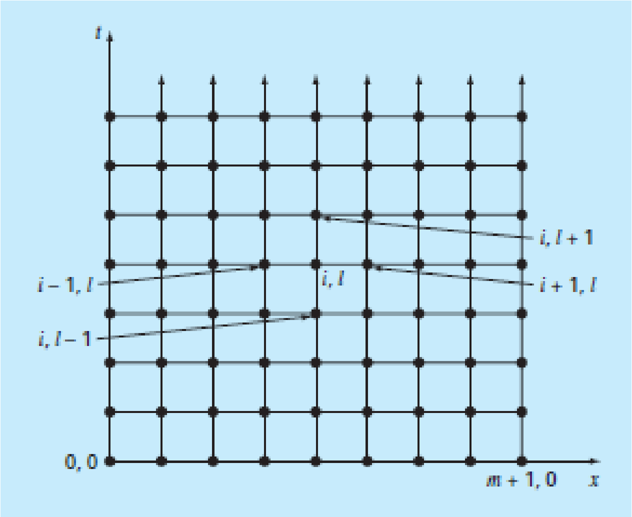


FIGURA 30.2
Una malla utilizada para la solución por diferencias finitas de las EDP parabólicas con dos variables independientes, por ejemplo la ecuación de conducción del calor. Observe como, a diferencia de la figura 29.3, la malla está abierta en los extremos en la dimensión temporal.

Chapra 5ª Ed., pág. 888

Unidad 8. Método de diferencias progresivas

En cada punto de red del interior de la malla se aproximan las derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j), \quad \mu_j \epsilon (t_j, t_{j+1})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j), \quad \xi_i \epsilon (x_{j-1}, x_{j+1})$$

El uso de estas fórmulas permite expresar la ecuación de difusión del calor en los puntos (x_i, t_j)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

mediante,

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas

Suponiedo que $w_{ij} \approx u(x_i, t_j)$ y truncando el término del error resulta el **método de diferencias progresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{(w_{i,j+1} - w_{i,j})}{k} - \frac{\alpha^2(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j})}{h^2} = 0, \qquad i = 1, \dots, m-1, \qquad j = 1,2, \dots$$

Al resolver esta ecuación para $w_{i,j+1}$ se obtiene,

$$w_{i,j+1} = \left(1 - 2\alpha^2 \frac{k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}), \qquad \forall\, i = 1, \dots, m-1, \qquad j = 0,2,$$

Este método tiene un error de truncamiento local de orden $O(h^2 + k)$.

Cuando $j = 0$, se requiere conocer $w_{i,0}, \forall\, i = 0,1, \dots, m$. Estos valores se obtienen de las condiciones: $w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), 0 \leq x \leq l$. Además, $w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \forall\, j = 1,2, \dots$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas- Resumen

El método de **diferencias progresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ \ 0 \leq x \leq l$$

viene dado por:

$$w_{i,j+1} = \left(1 - 2\alpha^2 \frac{k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right)$$

para $i = 1, \ldots, m-1, j = 1,2, \ldots,$ además

$$w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad 0 \leq x \leq l$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad \forall\, j = 0,1, \ldots$$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas- Esquema de puntos

El método de **diferencias progresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ \ 0 \le x \le l$$

viene dado por:

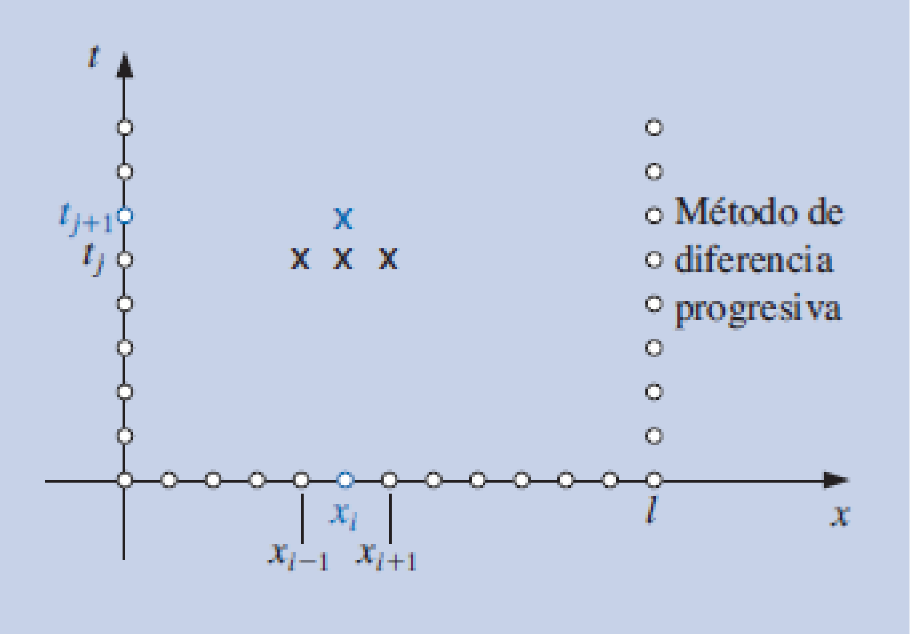
$$w_{i,j+1} = \left(1 - 2\alpha^2 \frac{k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right)$$

para $i = 1, \ldots, m-1, j = 1,2, \ldots,$ además

$$w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad 0 \le x \le l$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad \forall\, j = 0,1, \ldots$$

Esquema de puntos del método. (Burden 10ª Ed., pág. 553)



Unidad 8. Método de diferencias progresivas – Forma matricial

El método de **diferencias progresivas**:

$$w_{i,j+1} = \left(1 - 2\alpha^2 \frac{k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} \left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right)$$

para $i = 1, \dots, m-1, j = 0,1, \dots,$ junto con las condiciones:

$$w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad i = 0, \dots, m$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad j = 0,1, \dots$$

produce un SEL tridiagonal.

Unidad 8. Método de diferencias progresivas – Forma matricial

El método de **diferencias progresivas**:

$$w_{i,j+1} = \left(1 - 2\alpha^2 \frac{k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} \left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right)$$

para $i = 1, \dots, m-1, j = 0,1, \dots$, junto con las condiciones:

$$w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad i = 0, \dots, m$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad j = 0,1, \dots$$

produce un SEL tridiagonal.

SEL (Burden 10ª Ed., pág. 552). Para $j = 0$:

$$w_{0,0} = f(x_0), \quad w_{1,0} = f(x_1), \quad \dots w_{m,0} = f(x_m).$$

Luego generamos la siguiente t-fila por

$$\begin{aligned}
w_{0,1} &= u(0, t_1) = 0; \\
w_{1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{2,0} + w_{0,0}); \\
w_{2,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{2,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{3,0} + w_{1,0}); \\
&\vdots \\
w_{m-1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{m-1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{m,0} + w_{m-2,0}); \\
w_{m,1} &= u(m, t_1) = 0.
\end{aligned}$$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas – Forma matricial

SEL (Burden 10ª Ed., pág. 552). Para $j = 0$:

$$w_{0,0} = f(x_0), \quad w_{1,0} = f(x_1), \quad \ldots w_{m,0} = f(x_m).$$

Luego generamos la siguiente t-fila por

$$\begin{aligned}
w_{0,1} &= u(0, t_1) = 0;\\
w_{1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{2,0} + w_{0,0});\\
w_{2,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{2,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{3,0} + w_{1,0});\\
&\vdots\\
w_{m-1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{m-1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{m,0} + w_{m-2,0});\\
w_{m,1} &= u(m, t_1) = 0.
\end{aligned}$$

Definiendo

$$w^{(0)} = [w_{1,0} \;\; w_{2,0} \; \ldots w_{m-1,0}]^t$$

$$w^{(1)} = [w_{1,1} \;\; w_{2,1} \; \ldots w_{m-1,1}]^t$$

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$$

El SEL admite la forma matricial,

$$w^{(1)} = A w^{(0)}$$

donde A es la matriz tridiagonal:

$$A = \begin{bmatrix}
(1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0\\
\lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda\\
0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda)
\end{bmatrix}$$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas – Forma matricial

SEL (Burden 10ª Ed., pág. 552). Para $j = 0$:

$$w_{0,0} = f(x_0), \quad w_{1,0} = f(x_1), \quad \ldots w_{m,0} = f(x_m).$$

Luego generamos la siguiente t-fila por

$$\begin{aligned}
w_{0,1} &= u(0, t_1) = 0; \\
w_{1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{2,0} + w_{0,0}); \\
w_{2,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{2,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{3,0} + w_{1,0}); \\
&\vdots \\
w_{m-1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{m-1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{m,0} + w_{m-2,0}); \\
w_{m,1} &= u(m, t_1) = 0.
\end{aligned}$$

En general, el método de diferencias progresivas puede expresarse en la forma:

$$w^{(j+1)} = Aw^{(j)}, \qquad j = 0,1,..$$

$$w^{(0)} = \left(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{m-1})\right)^t$$

donde A es una matriz tridiagonal con entradas:

$$diag(A) = (1 - 2\lambda, 1 - 2\lambda, \ldots, 1 - 2\lambda)_{(m-1)}$$

$$diag(A, 1) = diag(A, -1) = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)_{(m-2)}$$

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas - Resumen

La forma matricial del **método de diferencias progresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ \ 0 \leq x \leq l$$

viene dado por:

$$w^{(j+1)} = Aw^{(j)}, \qquad j = 0,2,..$$

$$w^{(0)} = \left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1})\right)^t$$

donde,

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas – Estabilidad

Nota: El método de diferencias progresivas es condicionalmente estable. Esto es, el error se mantiene controlado siempre que $\rho(A) \leq 1$. De hecho, el método converge a la solución $u(x,t)$ de la ecuación de difusión con rapidez de convergencia $O(k + h^2)$ siempre que,

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas

Ejemplo 2. (Burden 10ª Ed., pág. 553)

Use los tamaños de paso **a)** $h = 0.1$ y $k = 0.0005$ y **b)** $h = 0.1$ y $k = 0.01$ para aproximar la solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t,$$

con condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t,$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), \quad 0 \le x \le 1.$$

Unidad 8. Método de diferencias progresivas

Ejemplo 2. (Burden 10ª Ed., pág. 553)

Use los tamaños de paso a) $h = 0.1$ y $k = 0.0005$ y b) $h = 0.1$ y $k = 0.01$ para aproximar la solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t,$$

con condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t,$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = \text{sen}(\pi x), \quad 0 \le x \le 1.$$

Solución.

Solución aproximada mediante el método de diferencias progresivas:

$$w^{(j+1)} = Aw^{(j)}, \qquad j = 0,1,..$$

$$w^{(0)} = \left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1})\right)^t$$

donde A es la matriz tridiagonal con entradas:

$$diag(A) = (1-2\lambda, 1-2\lambda, \dots, 1-2\lambda)_{(m-1)}$$

$$diag(A,1) = diag(A,-1) = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)_{(m-2)}$$

Observación. Dado que $\alpha^2 = 1$, entonces

a) Cuando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2} = \frac{0.0005}{0.01} = 0.05 < 0.5$$

de modo que el método converge.

b) Cuando $h = 0.1$ y $k = 0.01$

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2} = \frac{0.01}{0.01} = 1 > 0.5$$

y el método diverge.

Unidad 8. Método de diferencias progresivas

Ejemplo 2. (Burden 10ª Ed., pág. 553)

Use los tamaños de paso **a)** $h = 0.1$ y $k = 0.0005$ y **b)** $h = 0.1$ y $k = 0.01$ para aproximar la solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t,$$

con condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t,$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Compare los resultados en $t = 0.5$ con la solución exacta

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\operatorname{sen}(\pi x).$$

Solución **a)** El método de diferencias progresivas con $h = 0.1$, $k = 0.0005$, y $\lambda = (1)^2(0.0005/(0.1)^2) = 0.05$ da los resultados en la tercera columna de la tabla 12.3. Como se puede observar a partir de la cuarta columna, estos resultados son bastante exactos.

b) El método de diferencias progresivas con $h = 0.1$, $k = 0.01$ y $\lambda = (1)^2(0.01/(0.1)^2) = 1$ da los resultados en la quinta columna de la tabla 12.3. Como se puede observar a partir de la sexta columna, estos resultados son inútiles. ■

Tabla 12.3

x_i	$u(x_i, 0.5)$	$w_{i,1000}$ $k = 0.0005$	$\lvert u(x_i, 0.5) - w_{i,1000}\rvert$	$w_{i,50}$ $k = 0.01$	$\lvert u(x_i, 0.5) - w_{i,50}\rvert$
0.0	0	0		0	
0.1	0.00222241	0.00228652	6.411×10^{-5}	8.19876×10^{7}	8.199×10^{7}
0.2	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}	-1.55719×10^{8}	1.557×10^{8}
0.3	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}	2.13833×10^{8}	2.138×10^{8}
0.4	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}	-2.50642×10^{8}	2.506×10^{8}
0.5	0.00719188	0.00739934	2.075×10^{-4}	2.62685×10^{8}	2.627×10^{8}
0.6	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}	-2.49015×10^{8}	2.490×10^{8}
0.7	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}	2.11200×10^{8}	2.112×10^{8}
0.8	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}	-1.53086×10^{8}	1.531×10^{8}
0.9	0.00222241	0.00228652	6.511×10^{-5}	8.03604×10^{7}	8.036×10^{7}
1.0	0	0		0	

Unidad 8. Método de diferencias regresivas

En este caso se usa en cada punto de red del interior de la cuadrícula las aproximaciones

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j), \quad \mu_j \epsilon (t_j, t_{j+1})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j), \quad \xi_i \epsilon (x_{j-1}, x_{j+1})$$

El uso de estas fórmulas permite expresar la ecuación de difusión del calor en los puntos (x_i, t_j)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

mediante,

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} = \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas

Suponiendo que $w_{ij} \approx u(x_i, t_j)$ y truncando el término del error resulta el **método de diferencias regresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\left(w_{i,j} - w_{i,j-1}\right)}{k} - \frac{\alpha^2\left(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}\right)}{h^2} = 0, \qquad i = 1, \dots, m-1, \qquad j = 1,2, \dots$$

Si denotamos con $\lambda = \alpha^2\left(\frac{k}{h^2}\right)$, el método se puede expresar mediante,

$$(1 + 2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}, \qquad \forall\, i = 1, \dots, m-1, \qquad j = 1,2,$$

Cuando $j = 1$, se requiere conocer $w_{i,0}, \forall\, i = 0,1, \dots, m$. Estos valores se obtienen de las condiciones: $w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i),\ i = 1, \dots m-1$. Además, $w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \forall\, j = 1,2, \dots$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas - Resumen

El método de **diferencias regresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ \ 0 \leq x \leq l$$

viene dado por:

$$(1+2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

donde, $i = 1, \dots, m-1, j = 1,2, \dots;\ \lambda = \alpha^2\left(\frac{k}{h^2}\right)$

$$w_{i,0} \approx\ u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad i = 1, \dots, m-1$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad j = 1,2, \dots$$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas – Esquema de puntos

El método de **diferencias regresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l$$

viene dado por:

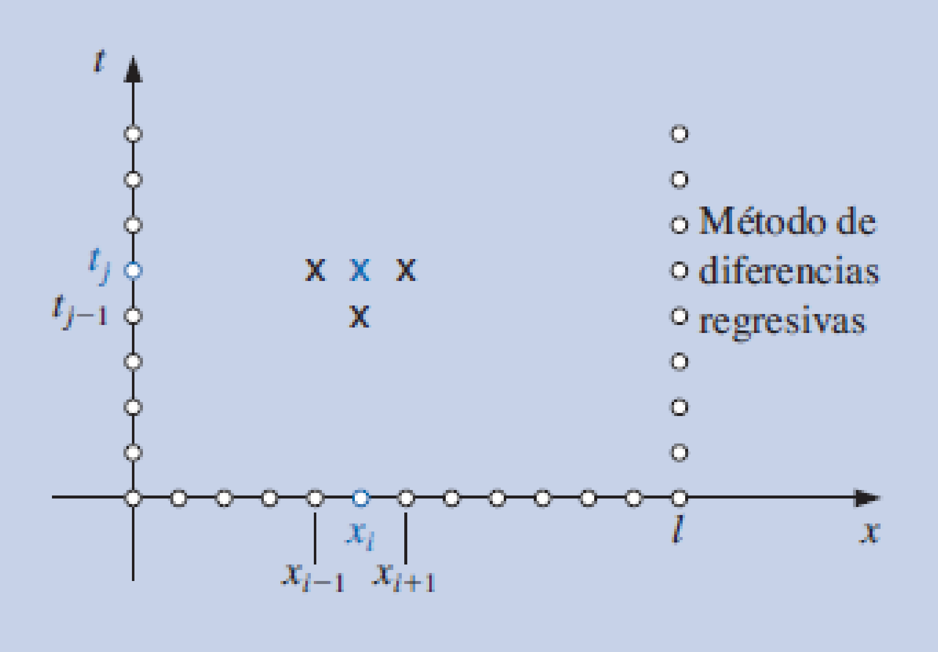
$$(1+2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

donde, $i = 1, \ldots, m-1, j = 1,2, \ldots;\ \lambda = \alpha^2 \left(\frac{k}{h^2}\right)$

$$w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, m-1$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad j = 1,2, \ldots$$

Esquema de puntos del método (Burden 10ª. Ed., pág. 556)



Unidad 8. Método de diferencias regresivas – Forma matricial

El método de **diferencias regresivas**:

$$(1+2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

para $i = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots$, junto con las condiciones:

$$w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad i = 0, \dots, m$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad j = 0,1, \dots$$

produce un SEL tridiagonal.

Unidad 8. Método de diferencias regresivas – Forma matricial

El método de **diferencias regresivas**:

$$(1+2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

para $i = 1, \ldots, m-1, j = 1, \ldots$, junto con las condiciones:

$$w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad i = 0, \ldots, m$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad j = 0,1, \ldots$$

produce un SEL tridiagonal.

En efecto, cuando $j = 0$:

$$w_{0,0} = f(x_0), w_{1,0} = f(x_1), \ldots, w_{m,0} = f(x_m)$$

cuando $j = 1$, $i = 0, m$:

$$w_{0,1} = w_{m,1} = 0$$

para $j = 1$, $\mathrm{i} = 1, \ldots, m-1$

$$(1+2\lambda)\, w_{1,1} - \lambda\, w_{2,1} - \lambda\, w_{0,1} = w_{1,0}$$

$$(1+2\lambda)\, w_{2,1} - \lambda\, w_{3,1} - \lambda\, w_{1,1} = w_{2,0}$$

$$\vdots$$

$$(1+2\lambda)\, w_{m-1,1} - \lambda\, w_{m,1} - \lambda\, w_{m-2,1} = w_{m,0}$$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas – Forma matricial

El método de **diferencias regresivas**:

$$(1+2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

para $i = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots,$ junto con las condiciones:

$$w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = f(x_i), \qquad i = 0, \dots, m$$

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \qquad j = 0,1, \dots$$

produce un SEL tridiagonal.

En efecto, cuando $j = 0$:

$$w_{0,0} = f(x_0), w_{1,0} = f(x_1), \dots, w_{m,0} = f(x_m)$$

cuando $j = 1$,

$$w_{0,1} = w_{m,1} = 0$$

para $j = 1,\ \mathrm{i} = 1, \dots, m-1$

$$(1+2\lambda)\, w_{1,1} - \lambda\, w_{2,1} - \lambda\, w_{0,1} = w_{1,0}$$

$$(1+2\lambda)\, w_{2,1} - \lambda\, w_{3,1} - \lambda\, w_{1,1} = w_{2,0}$$

$$\vdots$$

$$(1+2\lambda)\, w_{m-1,1} - \lambda\, w_{m,1} - \lambda\, w_{m-2,1} = w_{m,0}$$

Este sistema puede ser escrito en la forma:

$$Aw^{(1)} = w^{(0)}$$

donde,

$$A = \begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix}$$

$$w^{(0)} = \left[w_{1,0}\ \ w_{2,0}\ \dots w_{m-1,0}\right]^t$$

$$w^{(1)} = \left[w_{1,1}\ \ w_{2,1}\ \dots w_{m-1,1}\right]^t$$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas – Forma matricial

En general, el método de diferencias regresivas se puede expresar en forma matricial como:

$$A\,w^{(j)} = w^{(j-1)}, \qquad j = 1,2,..$$

$$w^{(0)} = \left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1})\right)^t$$

donde A es una matriz tridiagonal con entradas:

$$diag(A) = (1+2\lambda, 1+2\lambda, \dots, 1+2\lambda)_{(m-1)}$$

$$diag(A,1) = diag(A,-1) = (-\lambda, -\lambda, \dots, -\lambda)_{(m-2)}$$

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$$

Forma matricial del método:

$$A\,w^{(j)} = w^{(j-1)}, \qquad j = 1,2,..$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix}}_{w^{(j)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}}_{w^{(j-1)}}$$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas – Resumen

La forma matricial del **método de diferencias regresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ \ 0 \leq x \leq l$$

viene dado por:

$$w^{(0)} = \left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1})\right)^t$$

$$A\, w^{(j)} = w^{(j-1)}, \qquad j = 1,2,..$$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas – Resumen

La forma matricial del **método de diferencias regresivas** para la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ \ 0 \leq x \leq l$$

viene dado por:

$$w^{(0)} = \left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1})\right)^t$$

$$A\, w^{(j)} = w^{(j-1)}, \qquad j = 1,2,..$$

Como

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}$$

se verifica que $\lambda > 0$, por lo que la matriz A es definida positiva y estrictamente dominante en sentido diagonal. En consecuencia, **el método** es incondicionalmente estable y **siempre converge**.

Unidad 8. Método de diferencias regresivas

Ejemplo 3. (Burden 10ª Ed., pág. 558)

Use el método de diferencias regresivas (algoritmo 12.2) con $h = 0.1$ y $k = 0.01$ para aproximar la solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t,$$

sujeta a las restricciones

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas

Ejemplo 3. (Burden 10ª Ed., pág. 558)

Use el método de diferencias regresivas (algoritmo 12.2) con $h = 0.1$ y $k = 0.01$ para aproximar la solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t,$$

sujeta a las restricciones

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Solución.

Como $\alpha = 1$,

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2} = \frac{0.01}{(0.1)^2} = 1$$

Además,

$$w^{(0)} = [sen(\pi x_1), sen(\pi x_2), \dots, sen(\pi x_1)]^t$$

Por otro lado,

$$diag(A) = (1+2\lambda, 1+2\lambda, \dots, 1+2\lambda)_{(m-1)}$$

$$diag(A) = \ diag(A) = (3, 3, \dots, 3\ )_{9\times 1}$$

$$diag(A,1) = diag(A,-1) = (-\lambda, -\lambda, \dots, -\lambda)_{(m-2)}$$

$$diag(A,1) = diag(A,-1) = (-1, -1, \dots, -1\ )_{8\times 1}$$

Unidad 8. Método de diferencias regresivas

Ejemplo 3. (Burden 10ª Ed., pág. 558)

Use el método de diferencias regresivas (algoritmo 12.2) con $h = 0.1$ y $k = 0.01$ para aproximar la solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t,$$

sujeta a las restricciones

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Solución Este problema se consideró en el ejemplo 1, donde encontramos que seleccionar $h = 0.1$ y $k = 0.0005$ da resultados bastante exactos. Sin embargo, con los valores en este ejemplo, $h = 0.1$ y $k = 0.01$, los resultados fueron excepcionalmente pobres. Para demostrar la estabilidad incondicional del método de diferencias regresivas, utilizaremos $h = 0.1$ y $k = 0.01$ y nuevamente, comparamos $w_{i,50}$ con $u(x_i, 0.5)$, donde $i = 0, 1, \ldots, 10$.

Los resultados mostrados en la tabla 12.4 tienen los mismos valores de h y k que en la quinta y sexta columnas de la tabla 12.3, lo cual ilustra la estabilidad de este método. ■

Tabla 12.4

x_i	$w_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$\lvert w_{i,50} - u(x_i, 0.5)\rvert$
0.0	0	0	
0.1	0.00289802	0.00222241	6.756×10^{-4}
0.2	0.00551236	0.00422728	1.285×10^{-3}
0.3	0.00758711	0.00581836	1.769×10^{-3}
0.4	0.00891918	0.00683989	2.079×10^{-3}
0.5	0.00937818	0.00719188	2.186×10^{-3}
0.6	0.00891918	0.00683989	2.079×10^{-3}
0.7	0.00758711	0.00581836	1.769×10^{-3}
0.8	0.00551236	0.00422728	1.285×10^{-3}
0.9	0.00289802	0.00222241	6.756×10^{-4}
1.0	0	0	

Unidad 8. Aproximación de solución de EDP parabólica

Ejercicio 2. Aproxime la solución de la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

para $0 < x < 2$, $t > 0$, con las condiciones de frontera:

$$u(0,t) = 0 = u(2,t) = 0,\ t > 0$$

$$u(x,0) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right),\ 0 \leq x \leq 2$$

Use $m = 4$, $n = 2$, $\mathrm{T} = 0.1$. Compare sus resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = e^{-\frac{\pi}{2}t} sen\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Solución numérica de EDP

Caso 3: ecuaciones hiperbólicas

Prof. Blanca Guillén

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas

Problema a resolver: **ecuación de onda,**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le l$$

donde α es una constante dependiente de las condiciones físicas del problema.

Unidad 8. Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas

Problema a resolver: **ecuación de onda,**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

para $0 < x < l,\ t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le l$$

donde α es una constante dependiente de las condiciones físicas del problema.

Selección de la malla: se consigue eligiendo el tamaño del paso de tiempo $k > 0$ y un entero m que define el tamaño de paso h mediante la relación:

$$h = \frac{l}{m}$$

Los puntos de red se denotan como (x_i, t_j), donde

$$x_i = ih, \qquad t_j = jk$$

para $i = 0,1, \ldots, m$, $j = 0,1, \ldots$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

En cada punto de red (x_i, y_j) del interior de la cuadrícula se aproximan las derivadas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_j), \quad \eta_j \epsilon (t_{j-1}, t_{j+1})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j), \quad \xi_i \epsilon (x_{i-1}, x_{i+1})$$

El uso de estas fórmulas permite expresar la e**cuación de onda** en los puntos de red (x_i, t_j):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

mediante,

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} = \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Denotando con w_{ij} la aproximación de $u(x_i, t_j)$ y truncando el término del error resulta el método de diferencias finitas para la ecuación de onda:

$$w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1} - \left(\frac{\alpha k}{h}\right)^2 \left(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}\right) = 0, \qquad i = 1, \dots, m-1, \qquad j = 1,2, \dots$$

Sea $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$, al resolver la ecuación de diferencias para $w_{i,j+1}$ resulta

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) - w_{i,j-1}, \qquad \forall\ i = 1{:}\, m-1, \qquad j = 1,2, \dots$$

Las condiciones de frontera nos dan:

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \ \ para\ j = 1,2, \dots$$

y la condición inicial implica que

$$w_{i,0} = f(x_i), \ para\ i = 0, \dots, m$$

Unidad 8. Diferencias finitas para la ecuación de onda - Resumen

El método de diferencias finitas para aproximar la solución de la **ecuación de onda**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

para $0 < x < l, t > 0$, sujeta a las condiciones

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), 0 \leq x \leq l$$

viene dado por:

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) - w_{i,j-1}$$

para $i = 1,2,\dots,m-1,\ j = 1,2,\dots,$ con

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0,\quad j = 1,2,\dots$$

$$w_{i,0} = f(x_i\,),\qquad i = 0,\dots,m$$

Unidad 8. Diferencias finitas para la ecuación de onda - Resumen

El método de diferencias finitas para aproximar la solución de la **ecuación de onda**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

para $0 < x < l, t > 0$, sujeta a las condiciones

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), 0 \leq x \leq l$$

viene dado por:

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) - w_{i,j-1}$$

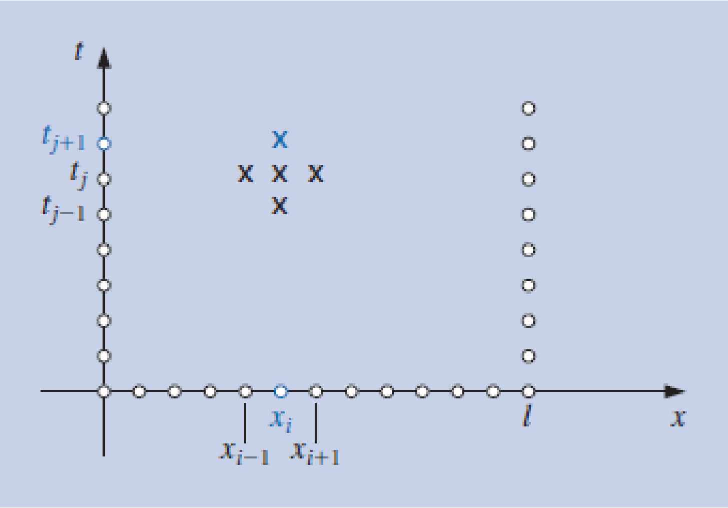
para $i = 1,2,\dots,m-1,\ j = 1,2,\dots,$ con

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0,\quad j = 1,2,\dots$$

$$w_{i,0} = f(x_i),\qquad i = 0,\dots,m$$

Esquema del método (Burden 10ª Ed., pág. 564).

- ✓ Esquema de 5 puntos
- ✓ Para determinar la solución en la capa $j+1$, requiere la solución de las capas j y $j-1$.



Unidad 8. Diferencias finitas para la ecuación de onda – Forma matricial

El método de diferencias finitas para aproximar la solución de la **ecuación de onda**:

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) - w_{i,j-1}$$

para $i = 1,2,\ldots,n-1$, $j = 1,2,\ldots,m-1$, con

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots$$

$$w_{i,0} = f(x_i\,), \qquad i = 0,\ldots,m$$

se puede expresar en forma matricial mediante la expresión:

$$w^{(j+1)} = A\,w^{(j)} - w^{(j-1)}, \qquad j = 1,2,..$$

Unidad 8. Diferencias finitas para la ecuación de onda – Forma matricial

El método de diferencias finitas para aproximar la solución de la **ecuación de onda**:

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) - w_{i,j-1}$$

para $i = 1,2,\dots,n-1$, $j = 1,2,\dots,m-1$, con

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \quad j = 1,2,\dots$$

$$w_{i,0} = f(x_i), \qquad i = 0,\dots,m$$

se puede expresar en forma matricial mediante la expresión:

$$w^{(j+1)} = A\, w^{(j)} - w^{(j-1)}, \qquad j = 1,2,..$$

Forma matricial del método:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix}}_{w^{(j+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix}}_{w^{(j)}} - \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}}_{w^{(j-1)}}$$

Unidad 8. Diferencias finitas para la ecuación de onda – Forma matricial

El método de diferencias finitas para aproximar la solución de la **ecuación de onda**:

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) - w_{i,j-1}$$

para $i = 1,2,\dots,n-1,\ j = 1,2,\dots,m-1$, con

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0,\quad j = 1,2,\dots$$

$$w_{i,0} = f(x_i),\qquad i = 0,\dots,m$$

se puede expresar en forma matricial mediante la expresión:

$$w^{(j+1)} = A\,w^{(j)} - w^{(j-1)},\qquad j = 1,2,..$$

Forma matricial del método:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix}}_{w^{(j+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix}}_{w^{(j)}} - \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}}_{w^{(j-1)}}$$

Entradas de la matriz A:

$$diag(A) = (2(1-\lambda^2),\dots,2(1-\lambda^2))_{(m-1)}$$

$$diag(A,1) = diag(A,-1) = (\lambda^2,\dots,\lambda^2)_{(m-2)}$$

con

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h}$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Observaciones:

✓ Al hacer $j = 1$ en la ecuación:

$$w^{(j+1)} = A\,w^{(j)} - w^{(j-1)}$$

resulta:

$$w^{(2)} = A\,w^{(1)} - w^{(0)}$$

Es decir, la solución en la capa 2 requiere el conocimiento de las soluciones $w^{(0)}$ y $w^{(1)}$.

Observaciones:

- ✓ Al hacer $j = 1$ en la ecuación:

$$w^{(j+1)} = A\, w^{(j)} - w^{(j-1)}$$

resulta:

$$w^{(2)} = A\, w^{(1)} - w^{(0)}$$

Es decir, la solución en la capa 2 requiere el conocimiento de las soluciones $w^{(0)}$ y $w^{(1)}$.

- ✓ La solución $w^{(0)}$ se obtiene a partir de la condición inicial:

$$w_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$$

esto es,

$$w^{(0)} = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)]^t$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Observaciones:

✓ Al hacer $j = 1$ en la ecuación:

$$w^{(j+1)} = A\, w^{(j)} - w^{(j-1)}$$

resulta:

$$w^{(2)} = A\, w^{(1)} - w^{(0)}$$

Es decir, la solución en la capa 2 requiere el conocimiento de las soluciones $w^{(0)}$ y $w^{(1)}$.

✓ La solución $w^{(0)}$ se obtiene a partir de la condición inicial:

$$w_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$$

esto es,

$$w^{(0)} = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)]^t$$

✓ La solución $w^{(1)}$ se obtiene a partir de la condición $u_t(x_i, 0) = g(x_i)$, pero para obtenerla es necesario aproximar la derivada u_t.

$$w^{(1)} = ?$$

Unidad 8. Aproximación de la solución $w^{(1)}$

Al aproximar u_t por:

$$u_t(x_i, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) \approx \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k}$$

y resolver para $u(x_i, t)$ se obtiene:

$$u(x_i, t_1) \approx u(x_i, 0) + k u_t(x_i, 0)$$

Sustituyendo la condición

$$u_t(x_i, 0) = g(x_i\ )$$

resulta,

$$u(x_i, t_1) \approx u(x_i, 0) + k\, g(x_i)$$

de donde

$$w_{i,1} = w_{i,0} + k\, g(x_i), \qquad i = 1, \dots, m-1$$

Unidad 8. Aproximación de la solución $w^{(1)}$

Al aproximar u_t por:

$$u_t(x_i,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) \approx \frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k}$$

y resolver para $u(x_i,t)$ se obtiene:

$$u(x_i,t_1) \approx u(x_i,0) + k u_t(x_i,0)$$

Sustituyendo la condición

$$u_t(x_i,0) = g(x_i\ )$$

resulta,

$$u(x_i,t_1) \approx u(x_i,0) + k\ g(x_i)$$

de donde

$$w_{i,1} = w_{i,0} + k\ g(x_i), \qquad i = 1, \dots, m-1$$

La solución aproximada de la ecuación de ondas viene dada por:

$$w^{(j+1)} = A\, w^{(j)} - w^{(j-1)}, \qquad j = 1,2,..$$

con

$$w^{(0)} = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)]^t$$

$$w^{(1)} = w^{(0)} + k\ G$$

$$G = [g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_m)]^t$$

Unidad 8. Aproximación de la solución $w^{(1)}$

Al aproximar u_t por:

$$u_t(x_i,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0)\approx\frac{u(x_i,t_1)-u(x_i,0)}{k}$$

y resolver para $u(x_i,t)$ se obtiene:

$$u(x_i,t_1)\approx u(x_i,0)+ku_t(x_i,0)$$

Sustituyendo la condición

$$u_t(x_i,0)=g(x_i\ )$$

resulta,

$$u(x_i,t_1)\approx u(x_i,0)+k\,g(x_i)$$

de donde

$$w_{i,1}=w_{i,0}+k\,g(x_i),\qquad i=1,\dots,m-1$$

La solución aproximada de la ecuación de ondas viene dada por:

$$w^{(j+1)}=A\,w^{(j)}-w^{(j-1)},\qquad j=1{,}2,..$$

con

$$w^{(0)}=[f(x_0),f(x_1),\dots,f(x_m)]^t$$

$$w^{(1)}=w^{(0)}+k\,G$$

$$G=[g(x_0),g(x_1),\dots,g(x_m)]^t$$

Desventaja: orden del método se reduce a O(k)

Unidad 8. Aproximación de la solución $w^{(1)}$

Al aproximar u_t por:

$$u_t(x_i,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) \approx \frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,0)}{k}$$

y resolver para $u(x_i,t)$ se obtiene:

$$u(x_i,t_1) \approx u(x_i,0) + ku_t(x_i,0)$$

Sustituyendo la condición

$$u_t(x_i,0) = g(x_i\ )$$

resulta,

$$u(x_i,t_1) \approx u(x_i,0) + k\,g(x_i)$$

de donde

$$w_{i,1} = w_{i,0} + k\,g(x_i), \qquad i = 1,\dots,m-1$$

La solución aproximada de la ecuación de ondas viene dada por:

$$w^{(j+1)} = A\,w^{(j)} - w^{(j-1)}, \qquad j = 1,2,..$$

con

$$w^{(0)} = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)]^t$$

$$w^{(1)} = w^{(0)} + k\,G$$

$$G = [g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_m)]^t$$

Mejora de la aproximación inicial $w^{(1)}$

$$w_{i,1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_i)$$

Ejemplo 4. (Burden 10ª Ed., pág. 566).

Aproxime la solución del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t$$

con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = sen(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compare los resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Ejemplo 4. (Burden 10ª Ed., pág. 566).

Aproxime la solución del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t$$

con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = sen(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compare los resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Solución.

1. Determinar los puntos de red
2. Determinar el valor de λ
3. Calcular la solución $w^{(0)}$
4. Calcular la solución $w^{(1)}$
5. Hallar la solución $w^{(j+1)}$, para $j = 1,2,\ldots$
6. Comparar los resultados con la solución exacta.

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Ejemplo 4. (Burden 10ª Ed., pág. 566).

Aproxime la solución del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t$$

con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = sen(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compare los resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Solución.

1. Puntos de red:

$$\{(x_i, t_j) | x_i = 0.1i, t_j = 0.05j,\ i = 0{:}\,10, j = 0,1,\ldots\}$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Ejemplo 4. (Burden 10ª Ed., pág. 566).

Aproxime la solución del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t$$

con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = sen(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compare los resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Solución.

1. Puntos de red:

$$\{(x_i, t_j) | x_i = 0.1i, t_j = 0.05j,\ i = 0{:}10, j = 0,1,\ldots\}$$

2. Valor de λ. Como $\alpha^2 = 4$,

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h} = \frac{2*0.05}{0.1} = 1$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Ejemplo 4. (Burden 10ª Ed., pág. 566).

Aproxime la solución del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t$$

con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = sen(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compare los resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Solución.

1. Puntos de red:

$$\{(x_i, t_j) | x_i = 0.1i, t_j = 0.05j, \; i = 0{:}10, j = 0,1,\dots\}$$

2. Valor de λ. Como $\alpha^2 = 4$,

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h} = \frac{2*0.05}{0.1} = 1$$

3. Solución $w^{(0)}$:

$$w^{(0)} = w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = sen(\pi x_i), \qquad i = 0{:}10$$

$$w^{(0)} = [sen(0), sen(0.1\pi), sen(0.2\pi), \dots, sen(\pi)]^t$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Ejemplo 4. (Burden 10ª Ed., pág. 566).

Aproxime la solución del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t$$

con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = sen(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compare los resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Solución.

1. Puntos de red:

$$\{(x_i, t_j) | x_i = 0.1i, t_j = 0.05j, \ i = 0:10, j = 0,1,\ldots\}$$

2. Valor de λ. Como $\alpha^2 = 4$,

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h} = \frac{2*0.05}{0.1} = 1$$

3. Solución $w^{(0)}$:

$$w^{(0)} = w_{i,0} \approx u(x_i, 0) = sen(\pi x_i), \qquad i = 0:10$$

$$w^{(0)} = [sen(0), sen(0.1\pi), sen(0.2\pi), \ldots, sen(\pi)]^t$$

4. Solución $w^{(1)}$

$$w^{(1)} = w_{i,1} \approx u(x_i, t_1) = u(x_i, 0.05), \qquad i = 0:10$$

$$u(x_i, t_1) \approx w_{i,0} + kg(x_i) = w_{i,0} + 0.05 * 0, \ i = 0:10$$

$$w^{(1)} = w^{(0)}$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Ejemplo 4. (Burden 10ª Ed., pág. 566).

Aproxime la solución del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t$$

con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = sen(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compare los resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Solución. Continuación.

5. Solución $w^{(j+1)}$:

$$w^{(j+1)} = Aw^{(j)} - w^{(j-1)}, \ j = 1,2,\dots$$

con

$w^{(0)} = [sen(0), sen(0.1\pi), sen(0.2\pi), \dots, sen(\pi)]^t$

$w^{(1)} = w^{(0)}$

Entradas de la matriz A:

$$diag(A) = (2(1-\lambda^2), \dots, 2(1-\lambda^2))_{9\times 9}$$

$$diag(A,1) = diag(A,-1) = (\lambda^2, \dots, \lambda^2)$$

con $\lambda = 1$.

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Ejemplo 4. (Burden 10ª Ed., pág. 566).

Aproxime la solución del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t$$

con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = sen(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compare los resultados con la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Observación. Si se fija un tiempo máximo: $T = 1$, entonces, $m = \frac{T}{k} = \frac{1}{0.05} = 20$, y $j = 0{:}\,20$

Solución en la capa $t_{20} = 1$:

Tabla 12.6

x_i	$w_{i,20}$
0.0	0.0000000000
0.1	0.3090169944
0.2	0.5877852523
0.3	0.8090169944
0.4	0.9510565163
0.5	1.0000000000
0.6	0.9510565163
0.7	0.8090169944
0.8	0.5877852523
0.9	0.3090169944
1.0	0.0000000000

Burden 10ª Ed., pág. 566

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Convergencia del método. (Burden 10ª Ed., pág. 567). El método de diferencias finitas explícito para la ecuación de onda tiene problemas de estabilidad. De hecho es necesario que $\lambda \leq 1$ para que el método sea estable y será convergente si f y g son suficientemente diferenciables.

Condición para la convergencia:

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h} \leq 1$$

Unidad 8. Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

Ejercicio 3. Aproxime la solución de la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{16\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para $0 < x < 0.5$, $t > 0$, con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(0.5,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 0.5$$

$$u_t(x,0) = sen(4\pi x), \qquad 0 \le x \le 0.5$$

Usando el algoritmo de diferencias finitas con $m = n = 4$ y $T = 0.5$. Compare sus resultados en $t = 0.5$ con los de la solución exacta:

$$u(x,t) = sen(t)sen(4\pi t)$$