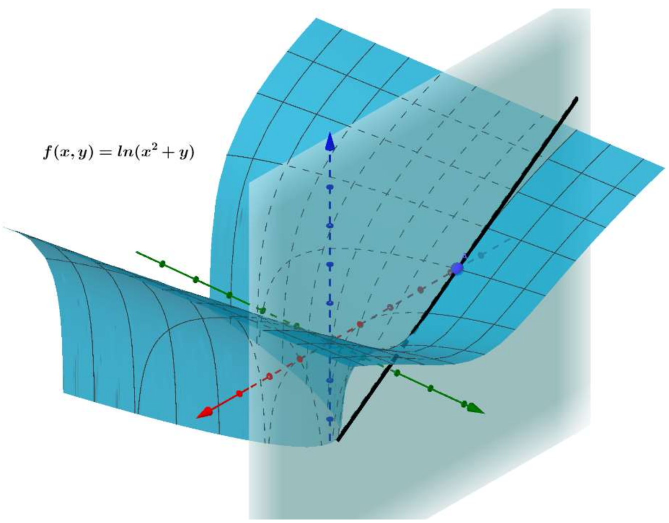
Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Límites y Continuidad



Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

26 de julio del 2021

Límite de una función de dos variables

- Suponga que tiene una función real de dos variables f y un punto (x_0, y_0) en el plano y quiere saber que pasa con la imagen de $f(x, y)$ cuando (x, y) es cercano a (x_0, y_0).
- Primero habría que aclarar que significa que "(x, y) es cercano a (x_0, y_0)". Estar cercano significa que la distancia entre los puntos es pequeña y acercarse significa que la distancia entre los puntos es cada vez mas pequeña.
- La distancia de dos puntos en el plano se determina con la fórmula

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

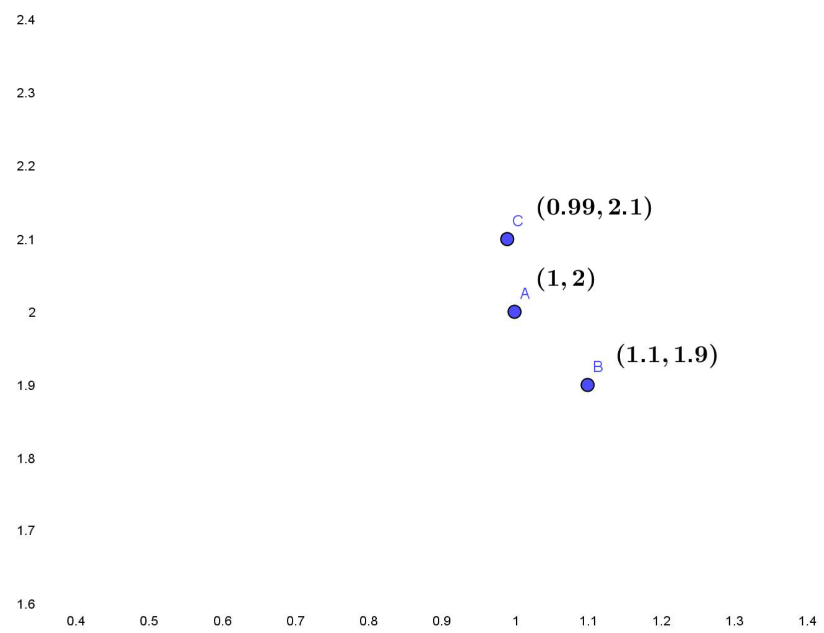
Ejemplo

Consideremos los puntos $\mathrm{A}(1{,}2), \mathrm{B}(1.1{,}1.9), \mathrm{C}(0.99{,}2.1)$. ¿Cuál de los puntos B y C está mas cercano a A?. Para responder debemos calcular sus distancias y ver cual es más pequeña:

- ✓ $d(A,B) = \sqrt{(1.1-1)^2 + (1.9-2)^2} \approx 0.141$
- ✓ $d(A,C) = \sqrt{(0.99-1)^2 + (2.1-2)^2} \approx 0.1$

Podemos decir entonces que C está mas cercano a A que B.

Gráficamente lo podemos visualizar cuando representamos los puntos en el plano.



- Vemos también que acercarse a un punto (x_0, y_0) puede hacerse alrededor del punto, no sólo por la izquierda o derecha.
- El concepto de límite de funciones reales de varias variables es similar al de una función de una variable.
- Recordemos: Cuando f es una función de una variable decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si la función f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a, cuando x se aproxima a a entonces $f(x)$ se aproxima a L. Formalmente:

DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces decimos que el **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** L, se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

En el caso de una función f de dos variables escribimos

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

para indicar que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) tiende al punto (a, b) que está en cualquier trayectoria que se encuentra dentro del dominio de f. En otras palabras, podemos hacer los valores de $f(x, y)$ tan cercanos a L como queramos haciendo el punto (x, y) lo suficientemente cercano al punto (a, b), pero no igual a (a, b). Una definición más exacta se presenta a continuación.

Definición Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene puntos arbitrariamente cercanos a (a, b). Entonces, decimos que el **límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b)** es L y escribimos

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

si $\quad (x, y) \in D \quad$ y $\quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \quad$ entonces $\quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$

Observe que $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L, y $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) y el punto (a, b). Por lo tanto, la definición establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña, pero no cero.

En la figura 1 se ilustra la definición 1 mediante un diagrama de flechas. Si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ está dado alrededor de L, entonces podemos encontrar un disco D_δ con centro en (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que f mapea todos los puntos en D_δ [excepto tal vez (a, b)] en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

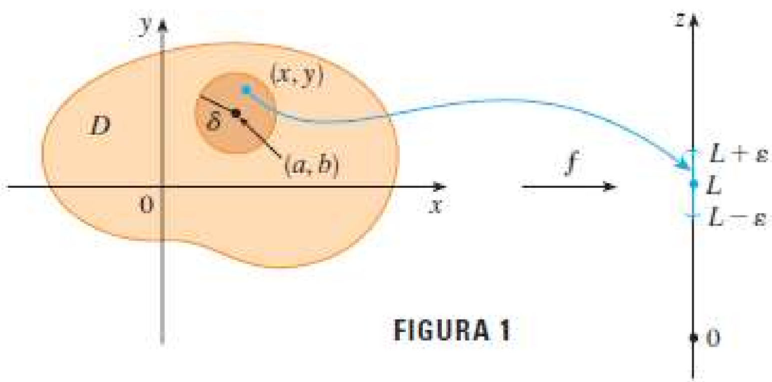


FIGURA 1

Otra ilustración de la definición 1 se muestra en la figura 2, donde la superficie S es la gráfica de f. Si $\varepsilon > 0$ está dada, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si (x, y) está restringido a quedar en el disco D_δ y $(x, y) \neq (a, b)$, entonces la parte correspondiente de S queda entre los planos horizontales $z = L - \varepsilon$ y $z = L + \varepsilon$.

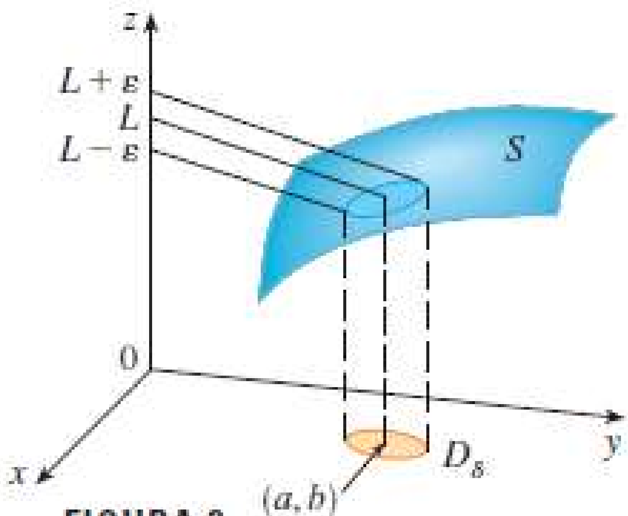
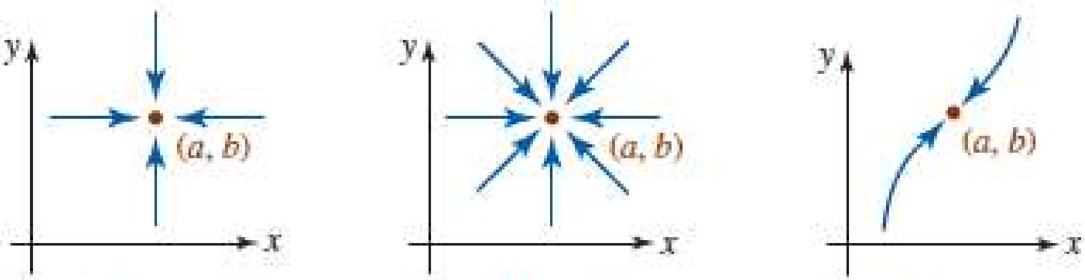


FIGURA 2

En la definición de límite se dice que $f(x,y)$ se aproxima a L cuando (x,y) se aproxima a (a,b) no importando la trayectoria que se siga para aproximarse.



a) A lo largo de las rectas horizontal y vertical que pasan por (a, b)

b) A lo largo de toda recta que pasa por (a, b)

c) A lo largo de toda curva que pasa por (a, b)

Tres de muchas maneras de aproximar el punto (a, b)

Por consiguiente, si existe el límite, entonces $f(x, y)$ tiene que aproximarse al mismo límite sin que importe cómo (x, y) se aproxima a (a, b). Por lo tanto, si encontramos dos trayectorias distintas de aproximación a lo largo de las cuales la función $f(x, y)$ tiene diferentes límites, entonces se infiere que $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ no existe.

> Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1, y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 1 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2}$ no existe.

Solución La función $f(x, y) = (x^2 - 3y^2)/(x^2 + 2y^2)$ se define en todas partes excepto en $(0, 0)$. dos maneras de aproximarse a $(0, 0)$ son a lo largo del eje x ($y = 0$) y a lo largo del eje y ($x = 0$). En $y = 0$ se tiene

$$\lim_{(x, 0)\to(0, 0)} f(x, 0) = \lim_{(x, 0)\to(0, 0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

donde $x = 0$,

$$\lim_{(0, y)\to(0, 0)} f(0, y) = \lim_{(0, y)\to(0, 0)} \frac{0 - 3y^2}{0 + 2y^2} = -\frac{3}{2}.$$

Como los límites son diferentes, concluimos que el límite no existe.

EJEMPLO 2 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe.

Solución En este caso los límites a lo largo de los ejes x y y son los mismos:

$$\lim_{(x, 0)\to(0, 0)} f(x, 0) = \lim_{(x, 0)\to(0, 0)} \frac{0}{x^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(0, y)\to(0, 0)} f(0, y) = \lim_{(0, y)\to(0, 0)} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ exista, ya que no se ha examinado *toda* trayectoria a (0, 0). Como se ilustra en la figura 13.2.2*b*), ahora intentaremos cualquier recta que pase por el origen dada por $y = mx$:

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Puesto que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ depende de la pendiente m de la recta sobre la cual se hace la aproximación al origen, concluimos que el límite no existe. Por ejemplo, en $y = x$ y en $y = 2x$, tenemos, respectivamente,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, x) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

$$f(x, 2x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, 2x) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}.$$

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ no existe.

Solución Sea $f(x, y) = x^3y/(x^6 + y^2)$, a lo largo del eje x, el eje y, cualquier recta $y = mx$, $m \neq 0$ que pasa por $(0, 0)$, y a lo largo de cualquier parábola $y = ax^2$, $a \neq 0$, que pasa por $(0, 0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Compruebalo como ejercicio

Si bien esto constituye verdaderamente un número infinito de trayectorias al origen, el límite *sigue* sin existir, ya que $y = x^3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, x^3) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}.$$

Propiedades de los Límites

Teorema Tres límites fundamentales

i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$, c una constante

ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y) = c \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Teorema Límite de una suma, producto, cociente

Suponga que (a, b) es un punto en el plano xy y que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ existe. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$, entonces

i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L_1 \pm L_2$,

ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = L_1L_2$, y

iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

EJEMPLO 4 Límite de una suma

Evalúe $\lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} f(x + y^2)$.

Solución De *ii*) del primer teorema advertimos primero que

$$\lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} x = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} y = 3.$$

Entonces de las partes *i*) y *ii*) del segundo teorema sabemos que el límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites siempre que exista el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} (x + y^2) &= \lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} x + \lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} y^2 \\
&= \lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} x + \left(\lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} y\right)\left(\lim_{(x,\,y)\to(2,\,3)} y\right) \\
&= 2 + 3 \cdot 3 = 11.
\end{aligned}$$

Uso de coordenadas polares

Si f es una función real de dos variables, podemos hacer el siguiente cambio de variables

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \text{ y } x^2 + y^2 = r^2$$

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Tenemos que cuando $(x, y) \to (0,0)$ entonces $r \to 0$ y podemos considerar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

✓Si la expresión $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ sólo depende de θ, entonces el límite no existe.

✓Sólo se hace este cambio cuando se va a calcular el límite cuando $(x, y) \to (0,0)$.

EJEMPLO 5 Uso de coordenadas polares

Evalúe $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2}$.

Solución Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la función, obtenemos

$$\frac{10xy^2}{x^2+y^2} = \frac{10r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = 10r\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta.$$

Puesto que $\displaystyle\lim_{r\to 0} r\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta = 0$, concluimos que

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

EJEMPLO 6 Evalúe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Solución: Si consideramos

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r\cos\theta\, r\,\mathrm{sen}\,\theta}{(r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2} = \frac{r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta)} = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Vemos que al hacer el cambio la función resultante sólo depende de θ por lo que el límite no existe. De hecho si evaluamos el límite por las trayectorias $x = 0$ y $x = y$ obtenemos dos límites distintos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Con lo anterior verificamos lo que se dedujo con el cambio a coordenadas polares que el límite no existe.

A continuación vamos a usar la definición formal de límites para demostrar el valor de un límite. Para eso es importante tener en cuenta las siguientes propiedades de valor absoluto:

1. $|a.b| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$
4. $x^2 \leq \sqrt{x^2+y^2}$
5. Si $0 < a < b$, entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

EJEMPLO

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0.$

Solución De la definición, si $\varepsilon > 0$ está dado, se desea determinar un número $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{10xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

si $(x, y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ entonces $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

La última línea es lo mismo que

$$\frac{10|x|y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

$$\left|\frac{10xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|10xy^2|}{|x^2+y^2|} = \frac{10|x|y^2}{x^2+y^2}$$

Como $x^2 \geq 0$, puede escribirse $y^2 \leq x^2 + y^2$ y

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Así,

$$\frac{10|x|y^2}{x^2+y^2} = 10|x| \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 10|x| = 10\sqrt{x^2} \leq 10\sqrt{x^2+y^2}.$$

De modo que si se elige $\delta = \varepsilon/10$, tenemos

$$\left|\frac{10xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 10\sqrt{x^2+y^2} \leq 10 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

Por la definición, esto demuestra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Continuidad

Una función $z = f(x, y)$ es **continua** en (a, b) si $f(a, b)$ está definida, $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ existe y el límite es el mismo que el valor de la función $f(a, b)$; esto es,

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b). \tag{5}$$

Si f no es continua en (a, b), se afirma que es **discontinua**. La gráfica de una función continua es una superficie sin quiebres. De la gráfica de la función $f(x, y) = 1/(9x^2 + y^2)$ en la FIGURA 13.2.4 vemos que f tiene una discontinuidad infinita en $(0, 0)$, esto es, $f(x, y) \to \infty$ como $(x, y) \to (0, 0)$. Una función $z = f(x, y)$ es **continua sobre un región *R*** del plano xy si f es continua en cualquier punto en R. La **suma** y el **producto** de dos funciones continuas también son continuas. El **cociente** de dos funciones continuas es continuo, excepto en el punto donde el denominador es cero. Además, si g es una función de dos variables continuas en (a, b) y F es una función de una variable continua en $g(a, b)$, entonces la **composición** $f(x, y) = F(g(x, y))$ es continua en (a, b).

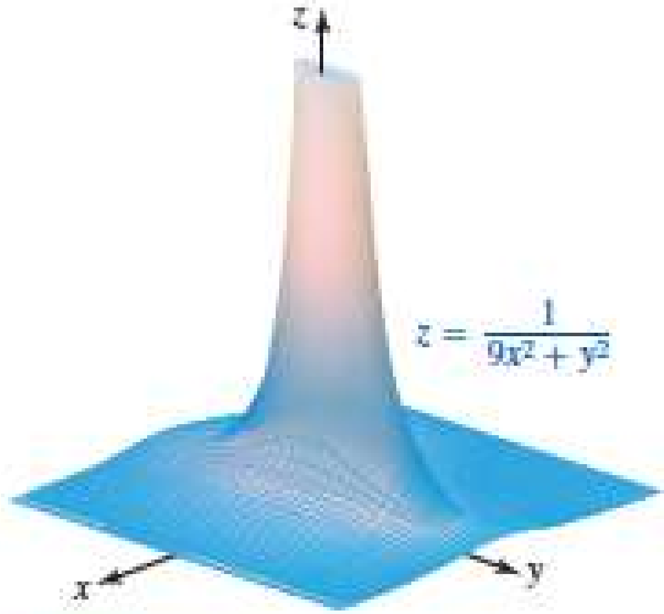


FIGURA 13.2.4 Función con una discontinuidad infinita en (0, 0)

EJEMPLO 7 Función discontinua en (0, 0)

La función $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ es discontinua en (0, 0), ya que $f(0, 0)$ no está definida. Sin embargo, como puede observarse en el siguiente ejemplo, f tiene una discontinuidad removible en (0, 0). ■

EJEMPLO 8 Función continua en (0, 0)

La función f definida por

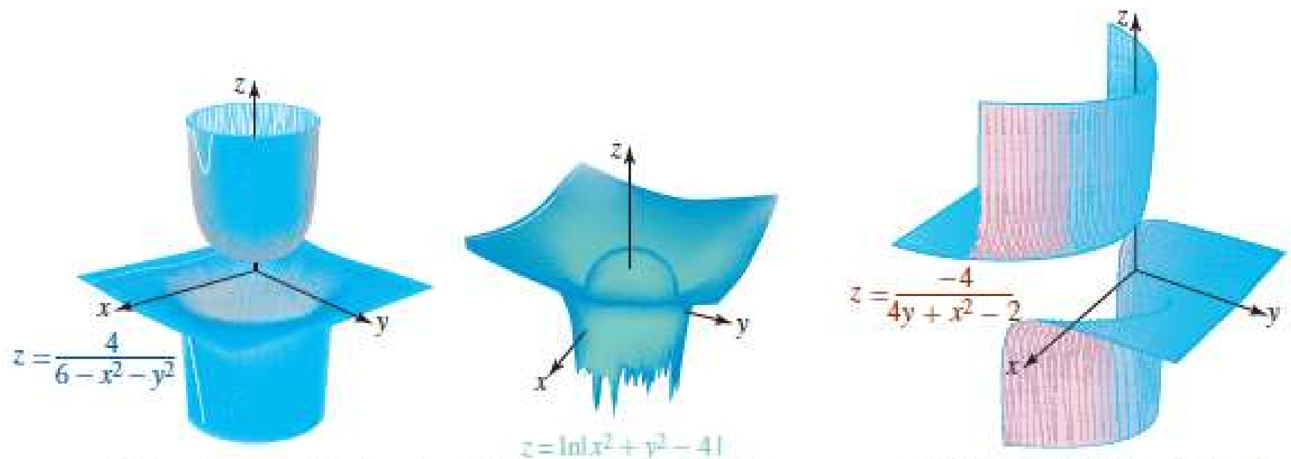
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0), ya que $f(0, 0) = 0$ y

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} (x^2 - y^2) = 0^2 - 0^2 = 0.$$

Por consiguiente, advertimos que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

Funciones polinomiales y racionales En la sección 13.1 vimos que una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$, donde m y n son enteros no negativos, y que el cociente de dos funciones polinomiales recibe el nombre de **función racional**. Las funciones polinomiales, como $f(x, y) = xy$, son continuas por todo el plano xy. Las funciones racionales son continuas salvo en puntos donde el denominador es cero. Por ejemplo, la función racional $f(x, y) = xy/(y - x)$ es continua salvo en puntos sobre la recta $y = x$. En la FIGURA 13.2.6 se han ilustrado las gráficas de tres funciones que son discontinuas en puntos sobre una curva. En los incisos *a*) y *c*) de la figura 13.2.6, la función racional es discontinua en todos los puntos sobre la curva obtenida igualando a 0 el denominador. En la figura 13.2.6*b*) la función logarítmica es discontinua donde $x^2 + y^2 - 4 = 0$, esto es, sobre el círculo $x^2 + y^2 = 4$.



a) Discontinua en $x^2 + y^2 = 6$ *b*) Discontinua en $x^2 + y^2 = 4$ *c*) Discontinua en $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

FIGURA 13.2.6 Tres funciones discontinuas

Ejemplo 9 Evalúe $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ es una polinomial y es continua, entonces se puede encontrar el límite mediante la sustitución directa:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

Ejemplo10 ¿Dónde es continua la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

SOLUCIÓN La función f es discontinua en $(0, 0)$ porque allí no está definida. Puesto que f es una función racional, es continua sobre su dominio, que es el conjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

Ejemplo 11 ¿Dónde es continua la función $h(x, y) = \arctan(y/x)$?

SOLUCIÓN La función $f(x, y) = y/x$ es una función racional y por lo tanto continua, excepto sobre la recta $x = 0$. La función $g(t) = \arctan t$ es continua en todas partes. Entonces la función compuesta

$$g(f(x, y)) = \arctan(y/x) = h(x, y)$$

es continua excepto donde $x = 0$.

Todo lo que hemos visto en esta sección se puede generalizar a funciones de tres o más variables. La notación

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que los valores de $f(x, y, z)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y, z) tiende al punto (a, b, c) a lo largo de cualquier trayectoria en el dominio de f. Como la distancia entre dos puntos (x, y, z) y (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ está dada por $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, podemos escribir la definición exacta como sigue: para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad (x, y, z) \text{ está en el dominio de } f \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$$

$$\text{entonces} \quad |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

La función f es **continua** en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Ejercicios Propuestos

5-22 Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

5. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2)$

7. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^4 + y^4}$

13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$

17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

19. $\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2} \tan(xz)$

20. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

29-38 Determine el conjunto de puntos en los cuales la función es continua.

29. $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$

31. $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

35. $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 + z^2)$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39-41 Mediante coordenadas polares determine el límite. [Si (r, θ) son las coordenadas polares del punto (x, y) con $r \geqslant 0$, observe que $r \to 0^+$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle \lim_{(x, y) \to (0, 0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$