Instituto Tecnológico de Monterrey
Campus Monterrey

Escuela de Ingeniería y Ciencias

F1010: Modelación con ecuaciones diferenciales

Reporte final: Situación problema

Grupo: 504

Docente:
Ruth Rodríguez Gallegos

Equipo 3:
Miranda Isabel Rada Chau | A01285243
Eliani González Laguna | A00836712
Kevin Jesús Martínez Trinidad | A00834493

Monterrey, Nuevo León, México; 17 de noviembre de 2023

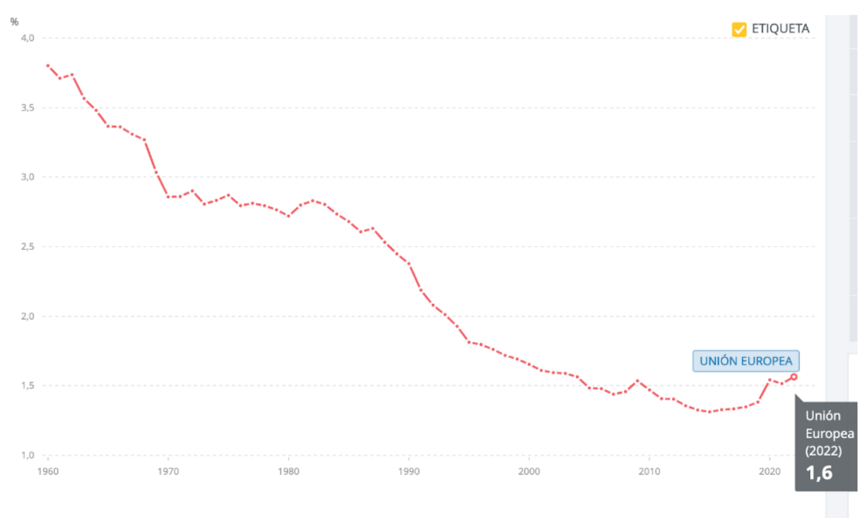
I. Identifica el Uso de los Recursos económicos en las carreras armamentistas

1.1 Investiga el gasto en armamento de los países de la Unión Europea, Rusia y Estados Unidos

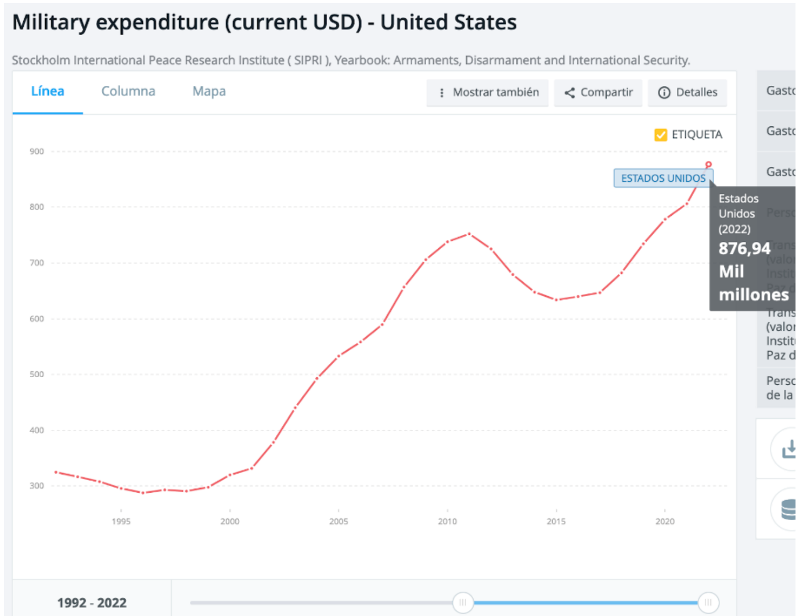
País	Gasto en armamento en miles de millones de dólares
Estados Unidos	$877
Rusia	$86.4
Unión Europea	$258.3
Francia	$53.6
Alemania	$55.8
Italia	$33.5
España	$20.3
Polonia	$16.6

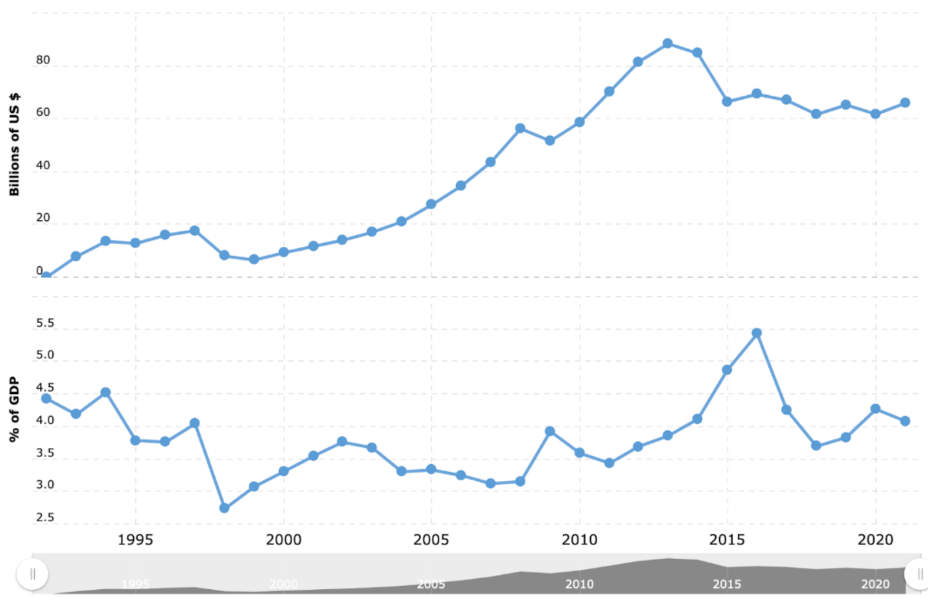
1.2 Investiga qué porcentaje del GDP de la Unión Europea se destina a armamento

El gasto de la Unión Europea en 2022 en armamento fue de 1.6% su PIB.



1.3 Compara el gasto en armamento de Estados Unidos frente al gasto de Rusia





En las gráficas de arriba primero se muestra el gasto militar de Estados Unidos y después el de Rusia. Como podemos ver, en los mismos años ambos han ido aumentando su gasto en armamento, con unos cuantos altos y altibajos. Sin embargo, a partir del 2017 se observa que el gasto de EU ha aumentado mucho más que el de Rusia.

II. Hacia la Solución Matemática de la Situación Problema

2.1 Investiga los modelos matemáticos utilizados para analizar una carrera armamentista.

Se considera muy importante analizar carreras armamentistas porque el análisis de los dos países que podrían estar involucrados en la guerra puede ayudar a predecir qué tan peligroso sería que surgiera una guerra entre estos dos. Estas carreras armamentistas convienen ser analizadas con modelos matemáticos porque son dinámicas. El modelo más reconocido para predecir las guerras que han ocurrido en los últimos años es el modelo de Richardson. El modelo de Richardson y otros modelos matemáticos utilizados para analizar las carreras armamentistas se basan en la teoría de ecuaciones diferenciales. Estos modelos son muy útiles para representar estas carreras armamentistas porque sirven para plantear las ecuaciones que se buscan representar con cada carrera. Uno de los conceptos necesarios para el planteamiento de estos modelos es la “paz”, que en este caso se refiere a un estado de armonía y tranquilidad que se relaciona con la estabilidad de operación. La estabilidad de operación se define en términos matemáticos y criterios precisos. Otro concepto relacionado es el de la guerra, que se refiere al rompimiento de la paz. Este implica el uso de fuerza por uno de los involucrados para vencer al otro involucrado. En este tipo de modelos las guerras son los eventos que se deberían de poder predecir e idealmente evitar matemáticamente. (Hernández, 1986)

Para comenzar a modelar el nivel de armamento de una nación se puede usar un sistema de ecuaciones de Volterra, la cual trabaja con ecuaciones diferenciales alinéales. (Hernández, 1986)

Teniendo este sistema de ecuaciones en cuenta, se va a comenzar a utilizar el modelo de Richardson, el cual se va a explicar más adelante. (Hernández, 1986)

Otros tipos de modelos que también se han utilizado para analizar carreras armamentistas son los modelos del “dilema del prisionero”, estos modelos generalmente se aplican entre las carreras armamentistas que suceden entre 2 países. Para implementar estos modelos, el primer paso es asumir que cada país puede escoger el nivel de armas y se asume que cada país busca que, si ellos eligen un nivel alto de armas y el otro país escoge un nivel bajo, tendrán una ventaja. Generalmente, los países escogen la estrategia del nivel alto de armas, ya que así no importa tanto la elección del otro país, porque van a tener mejores resultados si escogen el nivel alto que si escogen el nivel bajo. Este escenario se conoce como el equilibrio de Nash, ya que cada país eligió la estrategia ideal para ellos, sin tomar en cuenta lo que pueda suceder con el otro país. (Perlo-Freeman, 2023)

Además de estos modelos, también hay modelos económicos, con los cuales se puede asumir que las decisiones que toma el país están basadas en cómo gastan su dinero y cómo distribuyen sus recursos. Esto implica que además de enfocarse en la carrera, el gobierno se está enfocando en alcanzar varios objetivos como económicos, políticos y de seguridad, ya que divide sus recursos entre el ejército y sus ciudadanos.

El modelo económico más utilizado para analizar carreras armamentistas es el modelo de selección racional neoclásica. Este se refiere al modelo cuando se consideran dos países rivales y el nivel de seguridad de cada país depende de cuantos recursos puede gastar un país en su seguridad. Esto implica que dependen de la selección de los demás, ya que generalmente los países toman decisiones basándose en cuánto gasta su rival. El modelo resultante es similar al modelo de Richardson que se explica a continuación. (Perlo-Freeman, 2023)

2.2 Haz un resumen del modelo de Richardson que es una aplicación interesante de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Este modelo puede ser utilizado dentro de dos sistemas de ecuaciones lineales, donde sustentan los siguientes supuestos:

1. Las armas se terminan acumulando por el miedo y la desconfianza que existe entre ambos países.
2. Hay una resistencia por parte de la comunidad a gastar cada vez más recursos en armas.
3. Hay factores que son independientes al nivel de gastos militares, esto implica que a pesar de no estar relacionados contribuyen a la escalada militar.

Los cuales determinan las ecuaciones en donde es de máxima importancia el análisis de la magnitud de los signos de “r” y “s”, los cuales se denominan “grievance terms”.

Demostrándose en las siguientes ecuaciones:

- $\frac{dx}{dt} = ay - mx + r$
- $\frac{dy}{dt} = bx - ny + s$

Donde las variables toman los siguientes significados correspondientes al contexto del modelo:

- “x”,”y”: Los gastos de los países en armas con respecto al tiempo.
- “a”,”b”: Los términos de desconfianza.
- “n”,”m”: La resistencia social de la comunidad ante esos gastos.
- “r”,”s”: Los términos independientes que pueden desencadenar o no la guerra.

Tomando como nota que las líneas óptimas se pueden identificar cuando $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, siendo el punto de equilibrio “x*” e “y*” de la intersección entre estas dos. Mientras se puede decir que las trayectorias que se aproximan al origen van hacia el desarme y las trayectorias que se dirigen hacia infinito son las que alargan una carrera armamentista.

(Teoría Militar: Richardson Y Las Carreras de Armas, 2023)

III. Resolución del problema.

3.1 Utilizar el modelo de Richardson para modelar esta carrera armamentista con las siguientes suposiciones:

Considere el problema de Estados Unidos y Rusia con presupuesto para armamento x(t) e y(t), respectivamente, medido en miles de millones de dólares. Los presupuestos son funciones del tiempo medido en años.

a) El presupuesto para armamento de cada país aumentará a una tasa proporcional al gasto del otro país. Sean a y b las constantes de proporción para x(t) e y(t) respectivamente.
b) El presupuesto para armamento de cada país disminuirá a una tasa proporcional a su propio gasto. Sean m y n las constantes de proporción para x(t) e y(t) respectivamente.
c) La razón de cambio en el presupuesto para armamento en un país tiene una componente constante que mide el nivel de antagonismo de ese país hacia el otro. Sean r y s estas componentes para x(t) e y(t) respectivamente.
d) Los efectos de las tres suposiciones anteriores son aditivas. Además, se sabe que al inicio de esta carrera armamentista, los presupuestos de Estados Unidos y Rusia son PUSA y PRUS, respectivamente.

4.1 Resolver el modelo para determinar el gasto en armamento de Estados Unidos y Rusia en función del tiempo.

Las ecuaciones del modelo de Richardson son un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo:

$$\frac{dx}{dt} = ay - mx + r \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = bx - ny + s \quad y(0) = y_0$$

Donde x, y son los gastos de los países x (EU) e y (Rusia) en armas en el tiempo (derivada respecto al tiempo).
a, b son los términos de desconfianza, n, m la resistencia social a esos gastos y r, s son los términos independientes que pueden desencadenar o no la guerra.

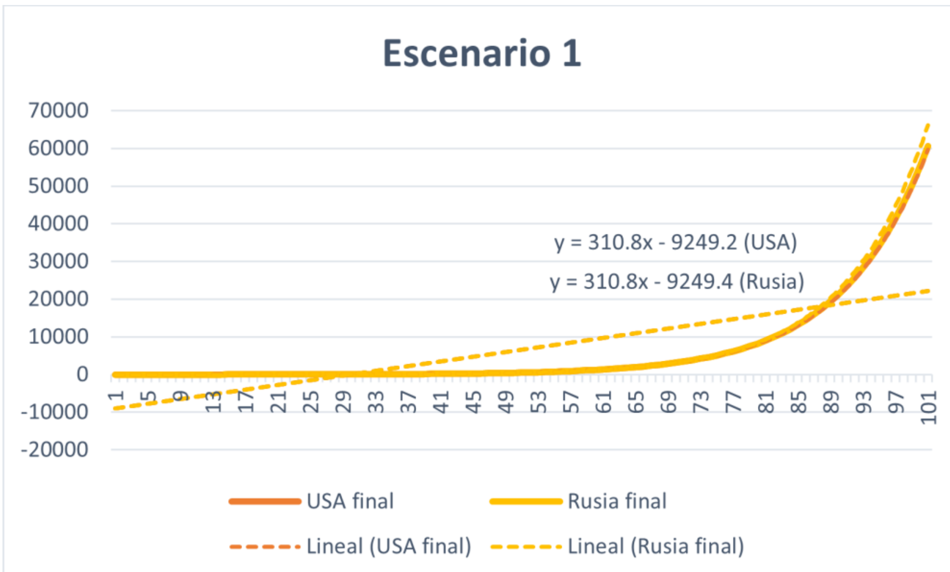
Escenario	a	m	b	n	r	s	Presupuesto USA	Presupuesto Rusia
1	4	3	2	1	2	2	4	1
2	4	3	2	1	-2	-2	2	1/2
3	3	4	1	2	6	1	0	0

5.1 Determinar si la solución del modelo muestra una situación controlable o incontrolable.

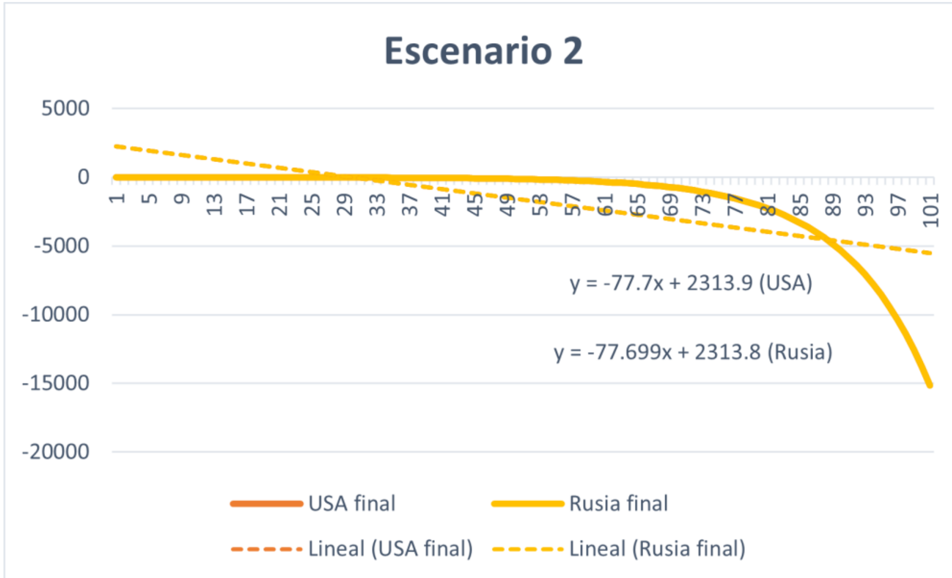
Para ello:

e) Simula los 3 escenarios haciendo uso de un método numérico. Muestra las soluciones gráficamente y compara los 3 escenarios. Interpreta las ecuaciones del sistema para cada caso.

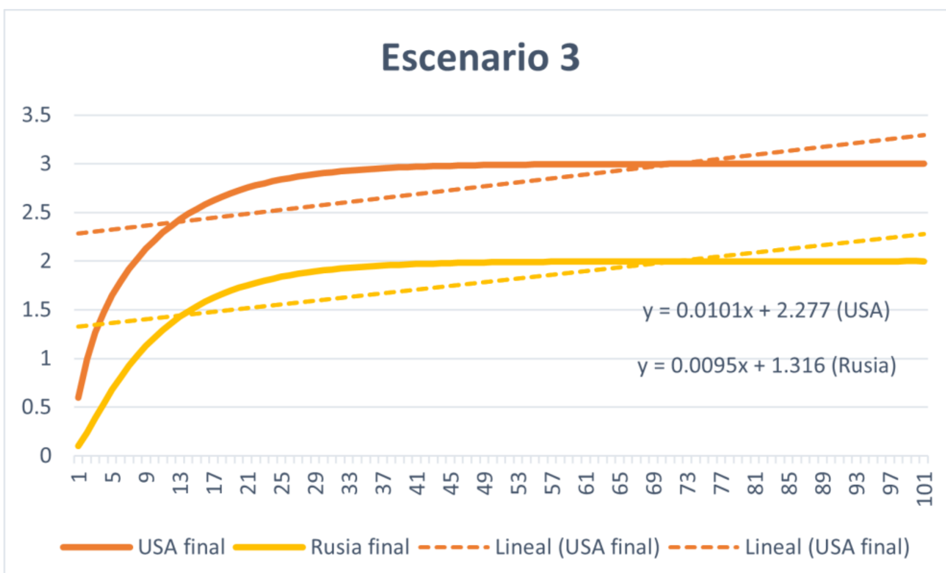
Link al Excel:
Reporte final situación problema equipo 3 - simulación de los 3 escenarios.xlsx



Escenario 1: En este escenario podemos observar el caso pesimista, pues es un caso en el que ambos países entran en un círculo vicioso y el gasto militar aumenta indefinidamente, probablemente provocado por un ciclo de amenazas y desconfianza.



Escenario 2: En este escenario se puede visualizar el caso optimista de los gastos realizados, ya que, en este se pueden observar que los dos países aparentemente entran en paz y la guerra cesa con rapidez, pues desde un inicio tiende a cero.



Escenario 3: Este escenario presenta una clase de conjunto de los dos anteriores hasta cierto punto, ya que al inicio aparenta ser como el escenario uno, pues, ambos países realizan gastos militares los cuales aumentan, pero con un diferenciador de que estos se detienen en un punto, y a partir de este tienden a ser continuos, por lo que, podemos decir que esta guerra permanecería indefinidamente en este estado, causando desconfianza e inseguridad en la población afectada.

f) Resuelve 1 de los 3 escenarios de manera simbólica. Compara los 2 procesos.

Eq. 3

Reto: Modelo de Richardson

Escenario 1

$a = 4$, $m = 3$, $b = 2$, $n = 1$, $r = 2$, $s = 2$

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 4y + 2 \qquad x(0) = 4$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y + 2 \qquad y(0) = 1$$

Solución Homogénea: $X' = AX$

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X$$

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (-3-\lambda)(-1-\lambda) - 8 = 0$$

$$\rightarrow 3 + 3\lambda + \lambda + \lambda^2 - 8 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \rightarrow (\lambda+5)(\lambda-1) \qquad \lambda_1 = -5, \ \lambda_2 = 1$$

Para $\lambda_1 = -5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} v_1 = -2v_2 \\ v_2 = v_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} v_2$$

Para $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} v_1 = v_2 \\ v_2 = v_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_2$$

$$x_h = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Eq. 3

Solución Particular: $X' = AX + F(t)$

$$F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad X'_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X'_p = AX_p + F \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 0 = -3a + 4b + 2 \\ 0 = 2a - b + 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -3a + 4b = -2 \\ 2a - b = -2 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4/3 & 2/3 \\ 2 & -1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4/3 & 2/3 \\ 0 & 5/3 & -10/3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} a = -2 \\ b = -2 \end{matrix} \Rightarrow X_p = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución General:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = -2c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t} - 2$$
$$y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t} - 2$$

$$\begin{matrix} x(0) = 4 = -2c_1 + c_2 - 2 \\ y(0) = 1 = c_1 + c_2 - 2 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

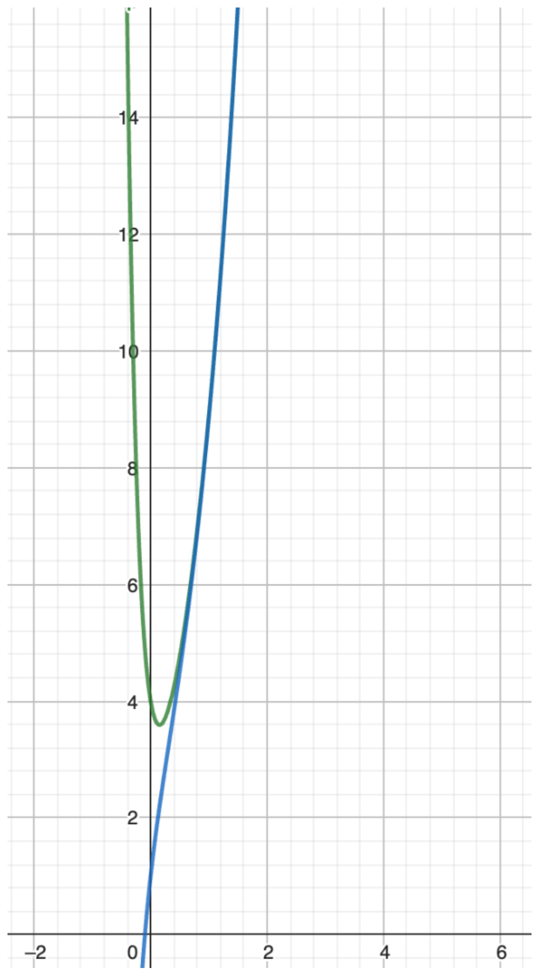
$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & -3 \\ 0 & 3/2 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_2 = 4 \end{matrix}$$

$$X = -1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x(t) = 2e^{-5t} + 4e^{t} - 2 \\ y(t) = -e^{-5t} + 4e^{t} - 2 \end{matrix}}$$

Tras este procedimiento, obtenemos los siguientes resultados:

$$x_{(t)} = 2e^{-5t} + 4e^{t} - 2$$
$$y_t = -e^{-5t} + 4e^{t} - 2$$



6.1 Preguntas detonadoras:

1. **¿Cuál es el modelo de Richardson para una carrera armamentista?**
El modelo primario de Richardson que modela la carrera armamentista de dos países se basa en un miedo mutuo que existe entre las mismas. Este modelo considera las restricciones internas de cada país que puede causar dificultades a la hora de preparar armas para una guerra. Una de estas dificultades esperadas es en cuestiones económicas, ya que conforme va aumentando el gasto de un país en armas, se va dificultando aumentar más porque no pueden gastar una cantidad ilimitada de recursos. Este límite existe porque si se consumen demasiados recursos ya no habrá recursos que gastar en su comunidad y el mantenimiento de la nación. Otro aspecto que se tiene que considerar son los factores que pueden causar que una

carrera armamentista se detenga. Estos comportamientos son independientes del nivel de gastos. La descripción y la estructura de este modelo se puede ver en la sección 2.2. (Zill, 2018)

2. **¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales lineales?**
   Los sistemas de ecuaciones diferenciales pueden estar escritos de maneras diferentes, se pueden escribir en la forma general o en forma de matriz, pero la manera en que se escribe no dicta si se puede resolver o no. Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se pueden resolver. La solución de un sistema de ED lineales se puede representar por medio de vectores. Un vector solución en un intervalo se denota como cualquier columna de una matriz que está conformado por funciones diferenciales que satisfacen al sistema en el intervalo dado. Los sistemas lineales de ED pueden ser homogéneos o no homogéneos, y esta característica dicta como son sus soluciones. La forma general de la solución de un sistema homogéneo es:

$$X' = c_1X_1 + c_2X_2.$$

Mientras la forma general de la solución de un sistema no homogéneo es:

$$X' = AX + F(t).$$

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se puede resolver de varias maneras diferentes. Uno de los métodos más conocidos es el método por eliminación sistemática. Este método se basa en la eliminación de variables, que es un principio algebraico. Otra manera de resolverlos es a través de la transformada de Laplace. Uno de los procesos más simples para resolver un sistema es a través de eigenvectores. Cuando los eigenvalores son diferentes, este proceso resulta en una solución escrita de la siguiente manera:

$$X = c_1K_1e^{\lambda_1 t} + \ c_2K_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + \ c_nK_ne^{\lambda_n t}$$

Para resolver un sistema de esta manera primero se necesita escribir el sistema en forma de matriz y encontrar $\det(A - \lambda I\ )$. Teniendo la determinante se pueden encontrar los eigenvalores y con estos los eigenvectores. Cada eigenvalor es un λ en la fórmula de la solución y cada eigenvector es una K en la fórmula. Esta es una de las maneras más fáciles de encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, solo hay que recordar que la fórmula cambia dependiendo de los valores de λ. Si los sistemas de ecuaciones lineales no son homogéneos, hay otras maneras de resolverlos, como variación de parámetros, que implica el uso de una matriz fundamental y también a través de coeficientes indeterminados. (Zill, 2018)

3. **¿Cómo se determina el comportamiento a largo plazo de la solución? Elige una ventana de tiempo adecuada.**

En el caso de este reporte utilizamos un intervalo de tiempo de 10 años. El comportamiento de la solución se puede determinar ya sea numéricamente o simbólicamente y ambas opciones deberían de resultar en los mismos resultados o mínimo tender a lo mismo. Esto se puede ver en este reporte ya que la simulación del escenario realizada simbólicamente coincide con la simulación numérica que se hizo del mismo escenario. Teniendo estas simulaciones, especialmente las numéricas se puede incrementar el intervalo de tiempo para poder predecir como se debería de comportar si mantiene la misma tendencia actual. Tomando en cuenta que en este reporte el tiempo se cuenta en años, consideramos que una ventana de tiempo a largo plazo sería una de 50 años, ya que es mucho considerando que el comportamiento que se está midiendo corresponde a los cambios que suceden cada año.

4. **¿Cómo mostrar que el control de armas es importante para promover la paz, la seguridad y el desarrollo sostenible de las naciones?**
   Diversos tratados de control de armas como el Tratado de No Proliferación de Armas Nucleares, el Tratado de Prohibición Completa de los Ensayos Nucleares, la Convención sobre Armas Biológicas y Químicas, entre otros, han demostrado que las organizaciones en busca de paz internacionales como la ONU o Amnistía Internacional ven en la proliferación de armas uno de los principales objetivos para alcanzar la paz.

   Mientras armas pequeñas y ligeras amenazan la seguridad de la ciudadanía común, propiciando la creación de bandas terroristas y criminales; las armas grandes o masivas amenazan no solo la vida de miles de personas, sino incluso de la raza humana, como en el caso de las bombas nucleares o armas biológicas.

   Es un hecho que ahora más que nunca el desarme es muy importante en orden de mantener la paz. Si bien en la actualidad diversas guerras están en proceso, no cabe duda de que estos tratados de No Proliferación ayudaron por muchos años a calmar las tensiones entre los países. Pues basta con darnos cuentas de que, al controlar la creación de armas en el mundo, los países enemigos se sienten menos amenazados, es decir, los valores a y b del sistema de ecuaciones son menores. (United Nations, 2017)

Conclusión

A partir del análisis realizado en este reporte se puede identificar que en cada escenario hay resultados completamente diferentes.

Con los datos del escenario 1, se puede ver que la gráfica tiene al infinito positivo, esto implica que es el peor escenario posible, ya que los gastos aumentarían demasiado para ambos países. Este resultado es completamente opuesto al del escenario 2, ya que este mismo tiende al infinito negativo, implicando que se alcanza un estado de paz en un tiempo relativamente pequeño, ya que los gastos comienzan a disminuir desde el principio. El escenario 3, se puede interpretar como un punto medio ya que al principio se muestra un gran incremento de datos, pero después de alcanzar un punto, se estabiliza. Esto implica que los gastos no crecen indefinidamente, pero tampoco cesan, por lo tanto, se crea una desconfianza e inseguridad entre estos países. Conociendo esto, podemos decir que el caso optimo es el escenario 2, ya que los gastos dejan de existir y por lo mismo la guerra también.

Referencias:

- Hernández Sánchez, J. (1986). *ARMAMENTISMO, CIBERNÉTICA Y PRONOSTICO DE GUERRAS*. https://revistamarina.cl/revistas/1986/5/hernandez.pdf

- Perlo-Freeman, S. (2023, mayo 23). arms race. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/topic/arms-race

- Teoría militar: Richardson y las carreras de armas By Container: Blogspot.com Year: 2023 URL: https://fdra.blogspot.com/2016/02/teoria-militar-richardson-y-las.html

- Zill, D. G. (2018). *Differential Equations with Boundary-Value Problems. .* Boston: Cengage Learning.

- United Nations. (2017) *Desarme* | *Naciones Unidas*. https://www.un.org/es/global-issues/disarmament

Referencias gráficas:

- https://es.statista.com/grafico/24733/paises-con-mayor-gasto-militar-y-su-relacion-con-el-pib/
- https://www.macrotrends.net/countries/USA/united-states/military-spending-defense-budget
- https://datos.bancomundial.org/indicador/MS.MIL.XPND.CD?end=2022&locations=US&start=1960&view=chart

- https://www.macrotrends.net/countries/RUS/russia/military-spending-defense-budget