Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ»

Выполнил
студент группы 3630102/70201

Кузин А.В.

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

1.1 Задача 1

Имеем 2x2 матрицу A: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$

Пусть все элементы матрицы a_{ij} имеют теперь радиус ϵ: $rada_{ij} = \epsilon$.

Получаем $\begin{pmatrix} [1-\epsilon, 1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \\ [1.1-\epsilon, 1.1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \end{pmatrix}$

Определить, при каком радиусе ϵ матрица содержит особенные матрицы.

1.2 Задача 2

Имеем n x n матрицу **A**: $\begin{pmatrix} 1 & [0,\epsilon] & ... & [0,\epsilon] \\ [0,\epsilon] & 1 & ... & [0,\epsilon] \\ : & : & : & : \\ [0,\epsilon] & [0,\epsilon] & ... & 1 \end{pmatrix}$

Определить, при каком радиусе ϵ матрица содержит особенные матрицы.

2 Теория

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ называется неособенной, если неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. Интервальная матрица называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

2.1 Признак Бекка

Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ такова, что ее середина mid A неособенна и

$$\rho(|(midA)|^{-1} \cdot radA) < 1 \tag{1}$$

Тогда **A** неособенна.

2.2 Теорема

Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ такова, что ее середина mid A неособенна и

$$\max_{i \le j \le n} (radA \cdot |(midA)|^{-1})_{jj} \ge 1 \tag{2}$$

Тогда **A** - особенная.

2.3 Теорема Адамара

Интервальная матрица с диагональным преобладанием является неособенной.

2.4 Теорема (Критерий Баумана)

Интервальная матрица A неособенна тогда и только тогда, когда определители всех её крайних матриц имеют одинаковый знак.

3 Решение

3.1 Задача 1

Воспользуемся для решения теоремой о максимальном элементе диагонали.
Имеем интервальную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\epsilon, 1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \\ [1.1-\epsilon, 1.1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \end{pmatrix} \tag{3}$$

Рассчитаем для нее середину:

$$midA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Радиус:

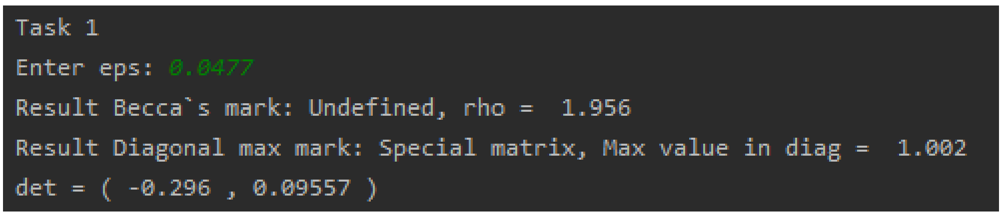
$$radA = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \tag{5}$$

Определитель середины отличен от 0, т.е. матрица не вырождена и можно применить теорему.
Имеем:

$$radA \cdot |(midA)|^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21\epsilon & 20\epsilon \\ 21\epsilon & 20\epsilon \end{pmatrix} \tag{6}$$

Среди элементов диагонали ищем максимальный и применяем (2): $21\epsilon \geq 1$.

Сделаем проверку с помощью программы, в которой реализован признак Бекка и теорема о максимальном диагональном элементе. На вход подается ϵ и далее выдается результат:



```
Task 1
Enter eps: 0.0477
Result Becca`s mark: Undefined, rho =  1.956
Result Diagonal max mark: Special matrix, Max value in diag =  1.002
det = ( -0.296 , 0.09557 )
```

Рис. 1: Проверка правильности решения задачи 1 критерием Бекка

Оценку можно улучшить. Воспользуемся методом дихотомии, где правой границей будет введёное ϵ, а левой 0. Возьмём за основу, что в правой границе выполняется условие особенности матрицы, а в левой нет. Тогда в средней точке для определителя интервальной матрицы может выполняться критерий Баумана либо нет. Если выполняется, то меняем левую границу, если нет, то правую. В итоге получаем решение с заданной точностью.

```
Task 1
Enter eps: 0.0477
Result Becca`s mark: Undefined, rho =  1.956
Result Diagonal max mark: Special matrix, Max value in diag =  1.002
det = ( -0.296 , 0.09557 )
Found eps:  0.0245953125
det = ( -0.201 , 0.00084 )
```

Рис. 2: Уточнение решения задачи 1 с использованием метода дихотомии с $\epsilon = 1e-3$ и критерием Баумана

3.2 Задача 2

По теореме Адамара интервальная матрица с диагональным преобладанием является неособенной.

Если n - размерность квадратной матрицы, то максимальная сумма элементов вне диагонали в каждой строке равна $\varepsilon(n-1)$. То есть для нарушения диагонального преобладания необходимо, чтобы $\varepsilon > \frac{1}{n-1}$.

Для вычисления определителя с различными n будем использовать замену $[0, \varepsilon] = e$ и библиотеку SymPy.

После получения общей формулы для вычисления определителя разобьём операнды на слагаемые левой и правой границы интервала.

Правая граница всегда получается положительной, так как там полиномы с положительными коэффициентами и $\varepsilon > 0$ по условию.

По левой границе можно рассмотреть ε, при которых значение границы будет отрицательным. С помощью программы найдём соответствующий корень для полинома.

Получим следующее решение для $n = 5$:

```
Task 2
Enter dim: 5
4*e**5 - 15*e**4 + 20*e**3 - 10*e**2 + 1
Left bound:  [-15*e**4 - 10*e**2 + 1]
Right bound:  [4*e**5 + 20*e**3 + 1]
Determinant: ( 0 ,  1.53407380634639 )
Epsilon: 0.297159364689135
1/(N-1) =  0.25
```

Рис. 3: Результат решения задачи 2 для $n = 5$

Для выявления закономерности приведём ещё решение для $n = 7$:

```
Task 2
Enter dim: 7
6*e**7 - 35*e**6 + 84*e**5 - 105*e**4 + 70*e**3 - 21*e**2 + 1
Left bound:  [-35*e**6 - 105*e**4 - 21*e**2 + 1]
Right bound:  [6*e**7 + 84*e**5 + 70*e**3 + 1]
Determinant: ( 1.11022302462516e-16 ,  1.57910946598036 )
Epsilon: 0.199131202011131
1/(N-1) =  0.16666666666666666
```

Рис. 4: Результат решения задачи 2 для $n = 7$

Заметно, что при увеличении n граница подходящих для решения ε уменьшается и приближается к оценке нарушения диагонального преобладания.

4 Приложения

Код программы на GitHub, URL: `https://github.com/Kexon5/Comp_complex.git`