Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ»

Выполнил
студент группы 3630102/70201

Кузин А.В.

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Список иллюстраций

1 Задачи

- Решить пример из лекции с треугольной матрицей и неправильными интервалами в правой части.
- Решить более масштабную задачу в 2 вариантах, относящуюся к компьютерной малоракурсной томографии.

2 Решение

2.1 Задача 1

Для решения задачи возьмём следующую треугольную точечную матрицу A с неправильными интервалами в правой части $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.1, 1.9] \\ [0.5, 0.8] \end{pmatrix} \tag{1}$$

Для начала разделяем $\mathbf{b}$ на компоненты левой и правой границ:

$$b_{inf} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}; b_{sup} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 0.8 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Теперь приступаем к решению.

В общем случае субдифференциальный метод Ньютона подразумевает перед основной работой генерацию интервальной матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathrm{mid}\mathbf{b}$. Так как исходная матрица точечная, то тут всё очевидно.

Конструируем знаково-блочную матрицу:

$$A^{\sim} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{+} & \mathrm{A}^{-} \\ \hline \mathrm{A}^{-} & \mathrm{A}^{+} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{array}\right) \tag{3}$$

Генерируем погружение sti для найденных границ $\mathbf{b}$:

$$\mathrm{sti}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -2.1 \\ -0.5 \\ 1.9 \\ 0.8 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Умножаем обратную матрицу к знаково-блочной (3) на (4) для нахождения формального решения или первого приближения в случае субдифференциального метода:

$$(A^{\sim})^{-1} \begin{pmatrix} -2.1 \\ -0.5 \\ 1.9 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \begin{pmatrix} -2.1 \\ -0.5 \\ 1.9 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.9 \\ -5 \\ -6.1 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Тогда формальное решение для системы ИСЛАУ равно:

$$\text{sti}^{-1}\begin{pmatrix}2.9\\-5\\-6.1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[-2.9,-6.1]\\ [5,8]\end{pmatrix} \tag{6}$$

В случае же субдифференциального метода Ньютона получается точно такое же решение за 1 итерацию.

Проверка решения:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[1.05,0.95]\\ [5,8]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[1.05,0.95]+[5,8]\\ [0.5,0.8]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[2.1,1.9]\\ [0.5,0.8]\end{pmatrix} \tag{7}$$

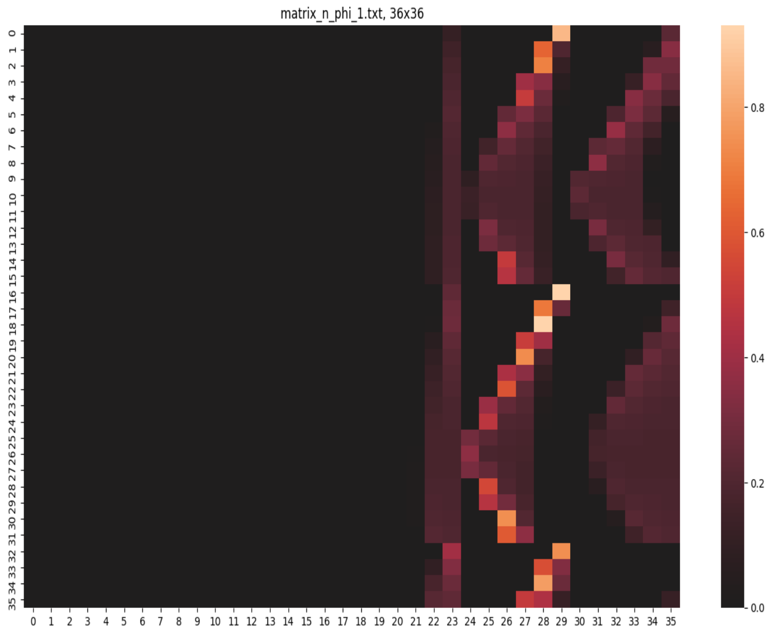
Получен верный результат.

2.2 Задача 2

2.2.1 1 вариант

Из файла *matrix_n_phi_1.txt* загружаем матрицу, определяем из неё максимальную размерность для квадратной матрицы.

Квадратная матрица в самом начале имеет следующую карту величин:



У текущей матрицы есть проблема - определитель равен нулю. Для нахождения решения близкого к истинному лучше брать матрицу с основательно отличительным от нуля определителем. Так как в текущей задаче размерность квадратной матрицы dim(A) = [36, 36] и выбор строк 36 из 256 вариантов, то двоичный перебор с реализацией более-менее "умного"двоичного перебора (без рассмотрения вариантов, которые точно не подходят в виду взятия элементов меньше или больше необходимого, то есть 36) сложен и времязатратен. Наиболее простая идея - случайный перебор вариантов с заранее определённым количеством итераций.

В рамках такого подхода установим две различные матрицы с ненулевым определителем за n = $5 * 10^5$ генераций. Т.к. подразумевается генерация двух квадратных матриц, разумно определить сейчас rad**b** для будущей интервальной правой части и x.

Определитель первой полученной матрицы:

```
---------------First matrix solution----------------
Task  36 x 36
Brute force progress:  0.0 %
Current max det:  0
Brute force progress:  10.0 %
Current max det:  8.68073407954954e-20
Brute force progress:  20.0 %
Current max det:  9.726494775394296e-20
Brute force progress:  30.0 %
Current max det:  8.303292317118002e-19
Brute force progress:  40.0 %
Current max det:  8.303292317118002e-19
Brute force progress:  50.0 %
Current max det:  8.303292317118002e-19
Brute force progress:  60.0 %
Current max det:  8.303292317118002e-19
Brute force progress:  70.0 %
Current max det:  8.303292317118002e-19
Brute force progress:  80.0 %
Current max det:  8.303292317118002e-19
Brute force progress:  90.0 %
Current max det:  8.303292317118002e-19

Max det in find matrix : 8.303292317118002e-19
```

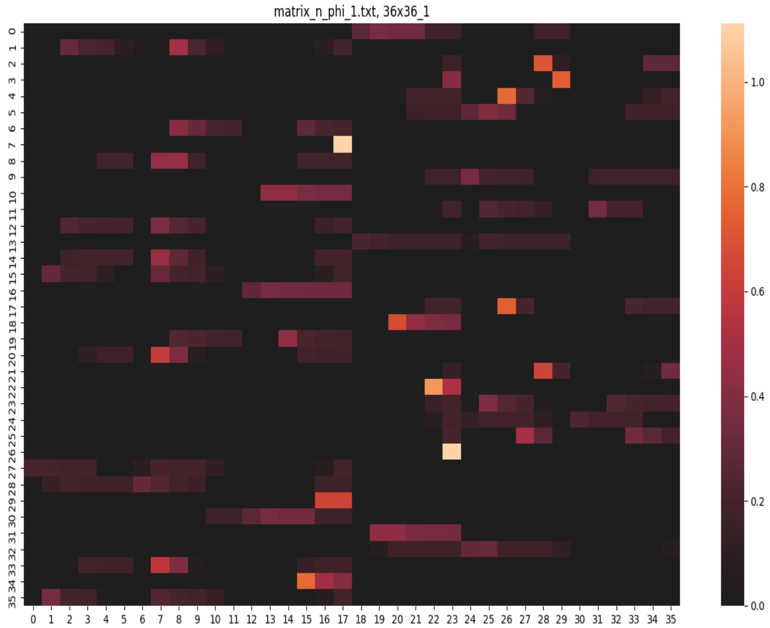
Рис. 1: Первая квадратная матрица для 2 задачи за $5 * 10^5$ итераций

Определитель второй полученной матрицы:

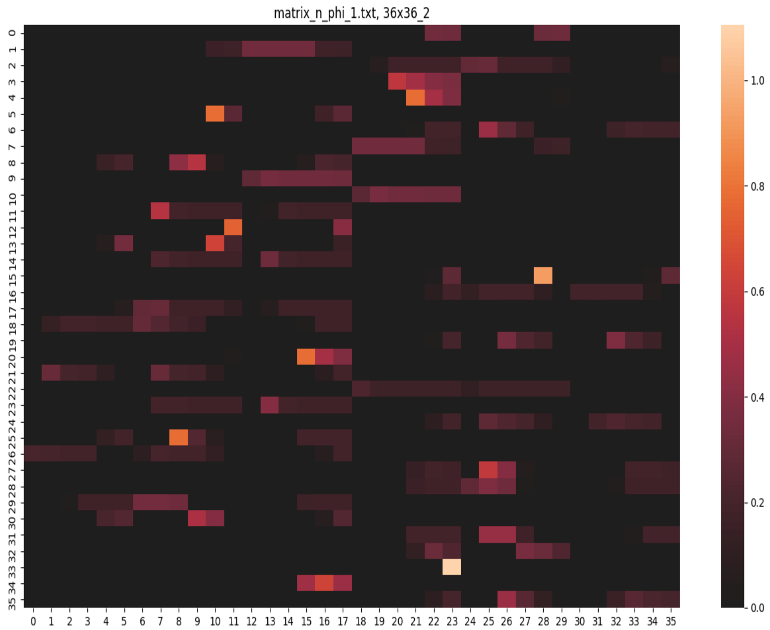
```
---------------Second matrix solution----------------
Task  36 x 36
Brute force progress:  0.0 %
Current max det:  0
Brute force progress:  10.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20
Brute force progress:  20.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20
Brute force progress:  30.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20
Brute force progress:  40.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20
Brute force progress:  50.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20
Brute force progress:  60.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20
Brute force progress:  70.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20
Brute force progress:  80.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20
Brute force progress:  90.0 %
Current max det:  5.739057372790125e-20

Max det in find matrix : 5.739057372790125e-20
```

Рис. 2: Вторая квадратная матрица для 2 задачи за $5 * 10^5$ итераций

То есть $\det(A_1) \approx 8.3 * 10^{-19}$ и $\det(A_2) \approx 5.74 * 10^{-20}$.
Тогда карта величин для первой матрицы станет следующей:



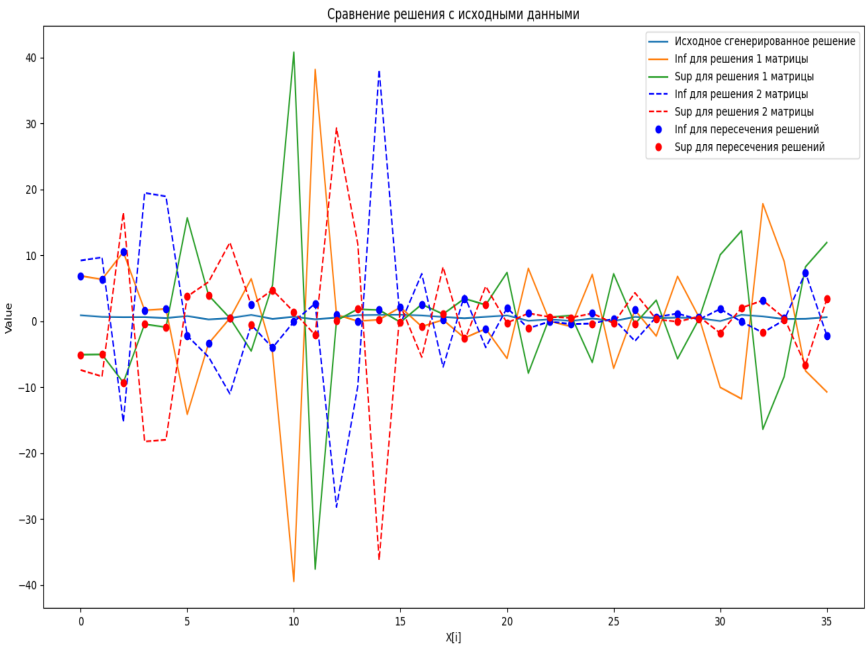
Для второй:



Теперь на основе уже сгенерированных x и rad**b** определим интервальную правую часть для обеих матриц.

Теперь с помощью субдифференциального метода Ньютона и использования формального решения за первое приближение находим решения ИСЛАУ для обеих матриц.

Далее находим пересечение решений для двух матриц и строим результирующий график сравнения с исходными данными:

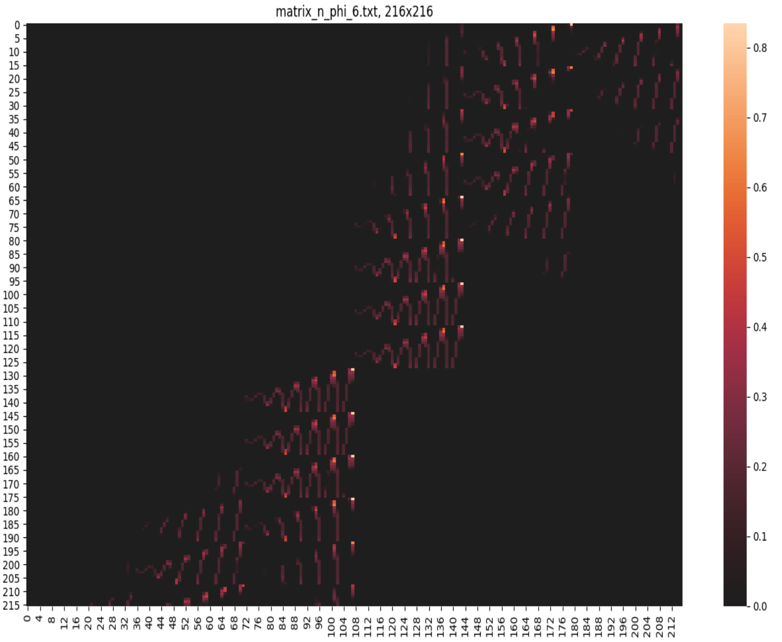


Как видим, алгоритм пересечения двух решений корректно отработал, а также по графику **x** содержит все реальные решения внутри себя. Субдифференциальный метод Ньютона завершил свою работу после первого приближения в обоих случаях за 1 итерацию на выбранной точности в $1 * 10^{-10}$.

2.2.2 2 вариант

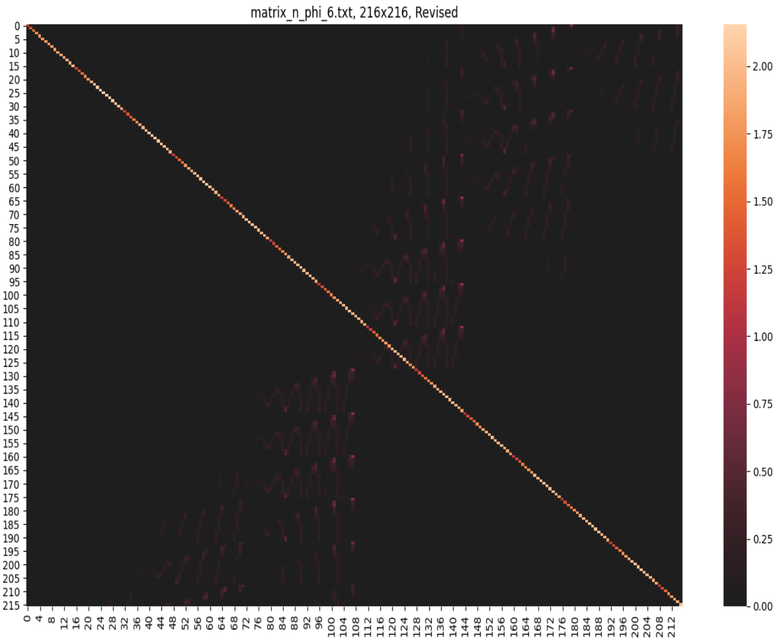
Загружаем данные из файла $matrix\_n\_phi\_6.txt$ и определяем максимальную размерность для квадратной.

Первоначальная карта величин для выбранной квадратной матрицы:

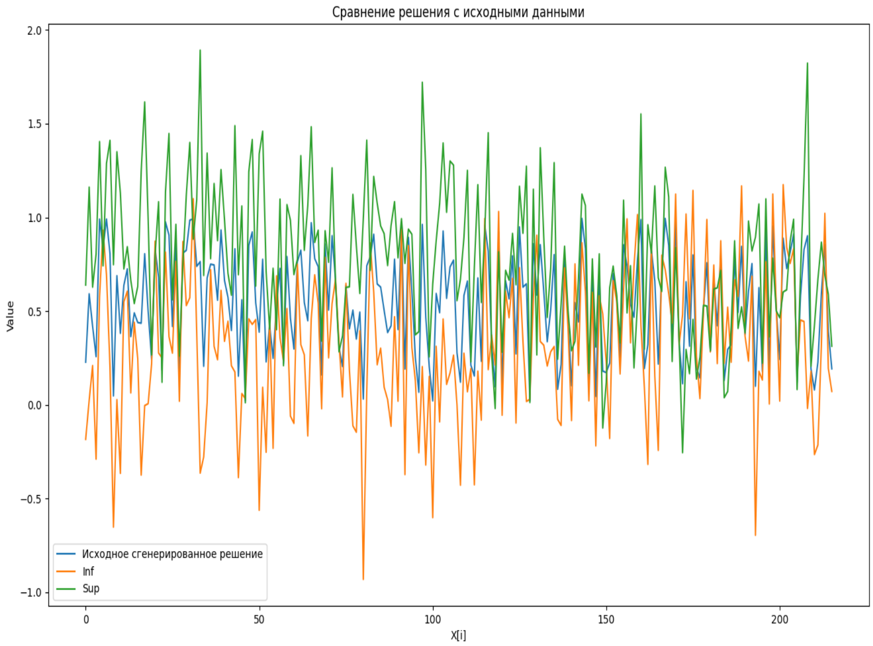


Квадратная матрица имеет нулевой определитель. Из-за большой размерности в этой задаче прибегнем к добавлению матрице свойства диагонального преобладания.

Карта величин теперь следующая:



После генерации данных (x и **b**) и решения с помощью сцепки формального решения за первое приближение и субдифференциального метода Ньютона получаем следующий график сравнения решения с исходными данными:



Из-за большой размерности задачи сложно разглядеть, но видно, что вершины ломаных всё также находятся между границами интервалов.

3 Приложения

Код программы на GitHub, URL: `https://github.com/Kexon5/Comp_complex.git`