章三. 集合论.

2^A：A的幂集. A所有子集的集合.

$|2^A| = 2^{|A|} = 2^n$.

设A,B非空. 则 $A=B \Leftrightarrow 2^A=2^B$.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)$.

$(A\cup B)'=A'\cap B'$.　$(A\cap B)'=A'\cup B'$.

$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

$A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

$(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

☆: $A\setminus B=A\cap B'$.

$A\oplus B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cap B')\cup(B\cap A')=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

$A'\oplus B'=A\oplus B$.　$(A\oplus B)'=A\oplus B'=A'\oplus B$.

☆: $\oplus$有消去律: $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$.

$A\otimes B=(A\oplus B)'$.

$A'\otimes B'=A\otimes B$.　$(A\otimes B)'=A'\otimes B=A\otimes B'$.

章四. 关系论.

叉积集合: $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$.

$A\times B=C\times D\Leftrightarrow A=C\wedge B=D$.

$R=\varnothing$. 空关系.　$R=A\times B$: 全关系 (一般是 $R\subseteq A\times B$. 称R是A,B间二元关系;

幺关系: $R=\{(a,a)\mid a\in A\}$. $\wedge A=B$.

$\cup[a]_R=A$.

$D(R)$, $R(R)$ 为R的前域、后域.

$D(R_1\cup R_2)=D(R_1)\cup D(R_2)$

$R(R_1\cup R_2)=R(R_1)\cup R(R_2)$.

$D(R_1\cap R_2)\subseteq D(R_1)\cap D(R_2)$

$R(R_1\cap R_2)\subseteq R(R_1)\cap R(R_2)$.

逆关系:

$\tilde{R}$是R的逆. $\tilde{R}=\{(b,a)\mid b\in B\wedge a\in A\wedge(a,b)\in R\}$.

若 $R\subseteq S$, 则 $\tilde{R}\subseteq\tilde{S}$.

$\widetilde{R\cup S}=\tilde{R}\cup\tilde{S}$.　$\widetilde{R\cap S}=\tilde{R}\cap\tilde{S}$.

设 $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$. (复合关系).

则: $R\circ S=\{(a,c)\mid a\in A\wedge c\in C\wedge \exists b\in B.\ (a,b)\in R\wedge(b,c)\in C\}$

若 $R_1\subseteq R_2$　$S_1\subseteq S_2$. 则 $R_1\circ S_1\subseteq R_2\circ S_2$.

$R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$.

$R\circ(S_1\cup S_2)=(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)$.

$R\circ(S_1\cap S_2)=(R\circ S_1)\cap(R\circ S_2)$.

$\widetilde{R\circ S}=\tilde{S}\circ\tilde{R}$.

设 $R\subseteq A\times A$. 则有:

$R^0=I_A$　　$R^{m+1}=R^m\circ R$.　　$(R^m)^n=R^{mn}$.

$R^1=R$.　　$R^m\circ R^n=R^{m+n}$

R的包: $R^+=\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k$. R^+是传递关系.

若 $R\subseteq S$ 且S是传递关系, 则 $R^+\subseteq S$.

若 $|A|=n$. 则 $R^+=\bigcup_{k=1}^{n}R^k$.

星包：$R^* = R^+ \cup I = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$. 自反∧传递.

若S是自反且传递的，且$R \subseteq S$，则$R^* \subseteq S$.

若$|A| = n$，则$R^* = \bigcup_{k=0}^{n} R^k$.

$X = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,1),(1,2)\}$

二元关系的性质.

自反：$\forall x \in X$，均有$(x,x) \in R$. 反自反：$\forall x \in X$，有$(x,x) \notin R$. 不自反

对称：$\forall (x,y) \in R$，有$(y,x) \in R$. 反对称：当$(x,y) \in R$且$(y,x) \in R$时，有$x=y$.

传递：$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$时，有$(x,z) \in R$.

全关系是自.对.传.

么关系：自反.对称.反对称.传递

空关系中是反自反.对称.反对称.传递的.

等价关系：自.对.传.

设R是A上的等价关系. $\forall a \in A$. 称$\{b \mid (b,a) \in R\}$是a关于R的等价类

记为$[a]_R$. a是代表元素. 即a是后面的，求前集.

而$\pi_R = \{[a]_R \mid a \in A\}$.为A关于R的商集. 记为$A/R$.

A/R中元素个数为R的秩.

若R是全关系，则$A/R = \{A\}$.

若R是么关系，则$A/R = \{\{a\} \mid a \in A\}$.

设R是A上的等价关系，则$\forall a, b \in A$.有：

$a \in [a]_R$. (自反)

$(a,b) \in R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$.

若$[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$，则$[a]_R = [b]_R$.

$\bigcup [a]_R = A$.

R是等价关系. 若$R_1 \subseteq R_2$，则$[a]_{R_1} \subseteq [a]_{R_2}$. $(\forall a \in A)$.

若$\forall a$有$[a]_{R_1} \subseteq [a]_{R_2}$，则$R_1 \subseteq R_2$.

$R_1 = R_2 \Leftrightarrow \forall a$，有$[a]_{R_1} = [a]_{R_2}$.

覆盖、划分.定义 P125

设R是A上等价关系. $\pi_R = \{[a]_R \mid a \in A\}$，则$\pi_R$是A的划分.

性：

设R是X上的等价关系. $\pi = \{[x]_R \mid x \in X\}$是等价类集合. 由$\pi$产生的等价关系$R' = \{(x,y) \mid (\exists z \in X)(x \in [z]_R \wedge y \in [z]_R)\}$，则$R' = R$.

设π是A上的一个划分. A_i是划分块. 等价关系$R = \{(a,b) \mid a,b$在同一个划分块里$\}$. 则分$\pi' = \{[a]_R \mid a \in A\}$. 有$\pi = \pi'$.

若R是自反、对称的，R为相容关系 $\rightarrow$ 覆盖.

半序关系：自反、反对称、传递. 半序关系的逆关系还是半序关系.

最大.最小元、唯一.

极大极小元，当极元唯一时，极元就是最元.

上下界，有上下界未必有上下确界.

全序关系：任意两点可以比较. 线序 or 链序.

设$(A, \leq)$是半序集，若A的每一个非空子集都有最小元素 $\rightarrow$ 良序.

良序 $\Rightarrow$ 全序，且有直接后继.

章五、$\boxed{\text{函数}}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

$f^{n+1}=f^n\circ f$

设f是从X到Y的双射函数．f^{-1}是f的逆函数．

则：$\begin{cases} f^{-1}\circ f=I_X & x\to y\to x \\ f\circ f^{-1}=I_Y. & y\to x\to y. \end{cases}$

若有双射函数$f: A\to B$. 则A与B等势：$A\approx B$. $\Leftrightarrow |A|=|B|$. (传递性).

N的基数为$\aleph_0$. $|R|=\aleph$.

若$A\approx N$. 则称A为可数集(无穷).

可数集取出有穷元素仍为可数集、其与它的无穷真子集等势.

X是无穷集$\Leftrightarrow$有一个可数子集$\Leftrightarrow$. X与其一真子集等势.

有理数集Q是可数集. $N. Z. Q$.

章六 $\boxed{\text{代数系统}}$

n元运算: $X^n\to X$. n为运算的阶.

代数系统: $A=\langle X, R_1,R_2\rangle$. 后者唯一、运算封闭.

幺元、零元. $x_0*x=x=x*x_0$　　$x_0*x=x_0=x*x_0$.

幺元、零元都是唯一的.

有幺元$\to$讨论逆元.

若$*$满足结合律. $*$有幺有逆. 则逆元唯一.

同态: 运算的映射=映射的运算.

半群: $\langle X,*\rangle$是代数系统. 若$*$满足结合律$\Rightarrow$半群.

循环半群: 有生成元(不一定唯一). 不一定有幺元.

$\Downarrow$

交换半群.

$\langle N,\times\rangle$不是(无生成元). $\langle N_5,+_5\rangle$是、且生成元$[1][2][3][4]$不唯一.

$\langle N_5,\times_5\rangle$不是. ($[0]$无法被生成).

群: $\langle G,*\rangle$: G中每个元素都有逆元.

$\langle Z,+\rangle$. $\langle M_{m\times n},+\rangle$. $\langle N_m,+_m\rangle$. $\langle 2^X,\oplus\rangle$. $\langle P[x],+\rangle$.

$\Downarrow$ 幺元: $\emptyset$. 逆元: 自身.

群中无零元. $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$. $*$满足消去律.

群中元素的阶: $\langle G,*\rangle$是群. $g\in G$. 使$g^k=e$的最小正整数k为g的阶. 若不存在, 则阶为无穷(可数).

若g的阶为$\begin{cases} n. \text{则} g^1 g^2\cdots g^n \text{不同} \\ \text{无穷. 则} g^1 g^2\cdots g^n\cdots \text{不同}. \end{cases}$　　g与g^{-1}的阶相同.

$|G|=n$. 则G中每个元素的阶$\leq n$.

群的阶$\Rightarrow$元素个数. 元素的阶: 使$g^k=e$成立的最小正整数k.

循环群: 生成元的整数次幂$\Longrightarrow$交换群.

$\langle Z,+\rangle$. $\langle N_m,+_m\rangle$. only two!!! (同构上).

设$\langle G,*\rangle$是循环群. a是生成元.

$\begin{cases} \text{若} a \text{的阶为} m: \langle G,*\rangle \text{与} \langle N_m,+_m\rangle \text{同构} \\ \text{若} a \text{的阶为无穷}: \langle G,*\rangle \text{与} \langle Z,+\rangle \text{同构}. \end{cases}$

设$|X|=n$. A是X上的置换构成的集合. $\diamond$是置换的合成.

若$\langle A,\diamond\rangle$是群. 则为置换群.

运动群/Klein-4群.

◇	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

设 $<G,*>$ 是有限群 $|G|=n$. 则 $<G,*>$ 同构于一个 n 次置换群.

子群: 判定子群的几大定理: 设 $<G,*>$ 是群. $S\subseteq G$ 且 $S\neq\emptyset$.

那么 $<S,*>$ 是 $<G,*>$ 子群的充要条件:

- $\forall a,b\in S$, 有 $a*b\in S$. $\forall a\in S$, 有 $a^{-1}\in S$.
- $\forall a,b\in S$, 有 $a*b^{-1}\in S$.
- 设 $<G,*>$ 是有限群 $|G|=n$. 则充要变为: $a*b\in S$.

$<\{e\},*>$ 与 $<G,*>$: 平凡子群.

设 $<G,*>$ 是群. $S=\{c\mid c\in G\wedge(\forall g\in G)(g*c=c*g)\}$.

则 $<S,*>$ 是 $<G,*>$ 子群. 称 $<S,*>$ 为 $<G,*>$ 中心.

陪集: aH Ha.

$S_l=\{aH\mid a\in G\}$ $S_r=\{Ha\mid a\in G\}$ 构成 G 的划分.

即: 陪集之集构成划分.

$|aH|=|H|=|Hb|$. 由 H 产生的左(右)陪集划分唯一.

$|S_r|$ $|S_l|$ 为 G 关于 H 的指数. 即不同划分块的个数 $=k$.

$|G|=k\cdot|H|$.

素数阶群的子群只有 2 个平凡群.

在有限群中. 每个元素的阶是群的阶的因子.

素数阶的群是循环群.

四阶不同构的群只有 2 个: 四阶循环群. Klein-4 群.

环: 设 $<R,\oplus,\otimes>$ 是代数系统.

- $<R,\oplus>$ 是交换群.
- $<R,\otimes>$ 是半群.
- $\otimes$ 对 $\oplus$ 有分配律.

$<Z,+,\times>$. $<M_{n\times n},+,\times>$. $<N_m,+_m,\times_m>$. $<2^X,\oplus,\cap>$. $<P[x],+,\times>$

若: $\otimes$ 可交换: 交换环. $\otimes$ 有幺元: 含幺环.

性质: $<R,\oplus,\otimes>$ 是环. $\forall a,b,c\in R$. 有:

$a\otimes 0=0=0\otimes a$. (0 为 $\oplus$ 的幺元).

$a\otimes(-b)=(-a)\otimes b=-(a\otimes b)$ $(-a)\otimes(-b)=a\otimes b$.

$a\otimes(b-c)=a\otimes b-a\otimes c$.

设 $<R,\oplus,\otimes>$ 是环. 若 $\exists a,b\in R$. 使 $a\neq 0$, $b\neq 0$. 有 $a\otimes b=0$.

则:
- a: 左零因子.
- b: 右.
- 含零因子环. else: 无 0 因子环.

$<Z,+,\times>$. 无 0. $<M_{n\times n},+,\times>$. 含 0. $<2^X,\oplus,\cap>$ 含 0. $<P[x],+,\times>$ 无 0

$<N_m,+_m,\times_m>$:
- m 为素数: 无 0.
- m 不为素数: 含 0.

$<R,\oplus,\otimes>$ 环中无零因子 $\Leftrightarrow$ $\otimes$ 满足消去律.

整环: $\otimes$ 交换律. 有幺元. 无 0 因子. $<Z,+,\times>$. $<P[x],+,\times>$. $<N_m,+_m,\times_m>$ m 素数时

除环: $\otimes$ 有幺元. $\forall a\in R$, 当 $a\neq 0$ 时: a 有逆元.

$<N_5,+_5,\times_5>$ 是除环. 幺元 [1]. $<N_4,+_4,\times_4>$ 不是除环 [2] 无逆元.

除环必无 0 因子.

P210.

设 $<R,\oplus,\otimes>$ 是有限含幺环. $|R|=n$. 则 $\otimes$ 消去律 $\Leftrightarrow$ $\otimes$ 除 0 元, 每个都有逆

章八 图论

1. 零图：有点无边 ≠ 空图.

2. 生成子图：$V'=V$ $E'\subseteq E$. 平凡子图×2.

简单图：无平行边、无自环.

无向图的奇结点个数为偶数.

简无图中：至少有2个节点度数相等.

图的同构⇒ {点数 / 边数. / 度数相同的节点个数

证明不同构找 要详细说明.

无重复 {边：简单… / 点：初级…

连通性概念：

(1). 无向：任意两点可达：连通图.
极大连通子图：连通支.

(2). 有向：任意2结点可达：强连通的.
至少有一个点可以到另一个点：单向连通.
去除边的方向后，是连通的：弱连通.

强 / 单向 / 弱 {连通支. 均要求极大.

每一个结点、每一条边恰在一个弱连通支中.
每一个结点恰在一个强连通支中
每一个结点、边至少属于一个单向连通支.

矩阵表示：

邻接矩阵：$v_{ii}=0$.

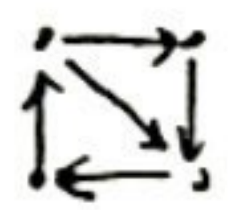
$B=A\cdot A^T$. 则 b_{ii} 表示 v_i 的出度

$B=A^TA$. 则 b_{ii} 表示 $\overrightarrow{deg}(v_i)$.

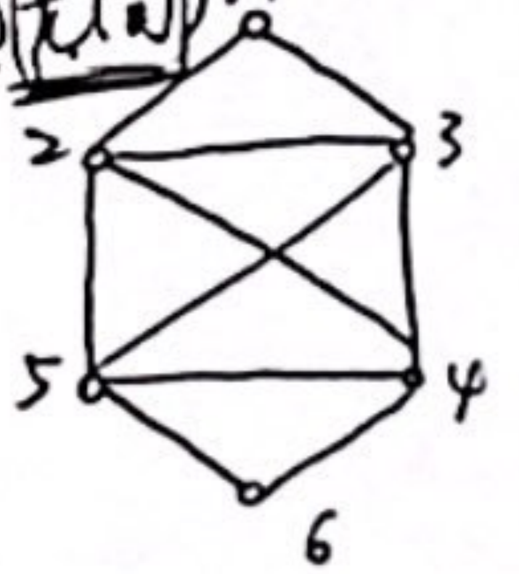
设G为简单有向图、A是它的邻接矩阵.
则 $a_{ij}^{(m)}$ 是由 v_i 到 v_j 的长度为m的路的条数.

R是可达矩阵. A是邻接矩阵.

{G是强连通的⇔R是全1阵.
G是单向连通的⇔ $R\vee R^T$ 的元素除对角线外全是1.
G是弱连通的⇔由 $A\vee A^T$ 确定的矩阵全1阵.
G中有圈⇔R中某些对角线元素 $r_{ii}=1$.

欧拉. 欧拉图→强连通图 

每个结点均为偶结点⇔Euler图.
且图连通 $\boxed{无向}$!



12346524531

设G是 $\boxed{无向}$ 连通图，且G中有Euler路⇔G中恰有2个奇结点.

强连通的
但不是Euler图.

一个有向图:

(1). 有欧拉路必须且只须此图是连通的. 且结点入度=出度.
最多两个结点例外. 它们中一个结点入度比出度多1. 另一结点出度比入度多1.

(2). 有Euler图: 必须且只须此图连通且每个结点入度=出度.

Hamilton. 图.

设G是无向连通图. 经过每个结点一次.

必要:

设G是H图, 则对于结点集合V的任一非空子集S. 均有:

$W(G \setminus S) \le |S|$.

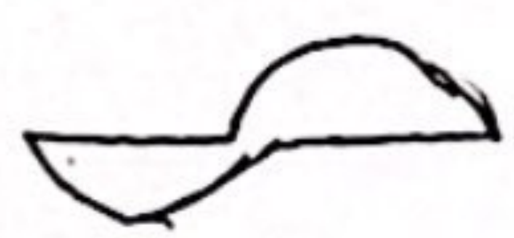
逆否: 若$\exists S$使$W(G \setminus S) > |S|$. 则G不是H图.

设G是一个具有n个结点的简单图. 若$\forall u,v \in V$. 均有:

$$\begin{cases} deg(u)+deg(v) \ge n-1. & \text{则G中必有一条H路.} \\ deg(u)+deg(v) \ge n. & \text{则G是H图.} \end{cases}$$

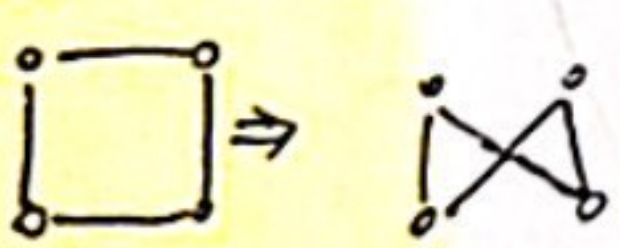
设$G=(V,E)$是简单图. 且$|V|=n$, $|E|=m$.

则: $m \ge \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2 \Rightarrow$ G是H图.



完全图的定向图是竞赛图. 每个结点的度为n-1.

完全二分图$K_{m,n}$的边数为: mn

 是二分图.

简单图G是二分图$\Leftrightarrow$G中每个圈的长度都是偶数.

二分图. 定理证明.

{判定

二分图中先数两类点. 若两类点个数不同. 必没有H图.