# Оглавление

# Часть I

# Элементарные переобразования

Вычислить выражение

**1.** Вычислить выражение.

1) $\dfrac{a+b+c}{d\cdot h+f\cdot k}\cdot l+m\cdot n$

√ $\dfrac{a+b+c}{dh+fk}l+mn$

$\rightarrow$ $a=\ 3+\dfrac{1}{5};\ \ 3-\dfrac{1}{5};\ \ 4+\dfrac{1}{2};\ \ 4-\dfrac{1}{2};\ \ 6+\dfrac{1}{5};\ \ 6-\dfrac{1}{5};\ \ 3+\dfrac{1}{10}$

$\rightarrow$ $b=\ 1+\dfrac{7}{10};\ \ 2+\dfrac{1}{10};\ \ 2+\dfrac{1}{2};\ \ 3+\dfrac{9}{10}$

$\rightarrow$ $c=\ \dfrac{3}{2};\ \ \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow$ $d=\ \dfrac{29}{5};\ \ \dfrac{16}{5}$

$\rightarrow$ $f=\ 1;\ \ 2$

$\rightarrow$ $h=\ \dfrac{1}{5};\ \ \dfrac{2}{5}$

$\rightarrow$ $k=\ 1+\dfrac{13}{20};\ \ 1+\dfrac{6}{5}$

$\rightarrow$ $l=\ 3+\dfrac{1}{5};\ \ 1+\dfrac{1}{2}$

$\rightarrow$ $m=\ 1+\dfrac{1}{2};\ \ 2+\dfrac{1}{2}$

$\rightarrow$ $n=\ \dfrac{11}{20};\ \ 1+\dfrac{1}{5}$

Упростить

**2.** Упростить.

1) $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}} : \sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$

✓ $\sqrt[m]{y}$

$\rightarrow$ $m =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 32 ; 34 ; 36

$\rightarrow$ $n =$ 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21 ; 23

Упростить

**3.** Упростить.

1) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{c+d-2\sqrt{cd}}$

$\checkmark$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b=$ 2 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11

$\rightarrow$ $c=$ 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 32

$\rightarrow$ $d=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

Упростить

**4.** Упростить.

1) $$\frac{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{\frac{2}{m}}-a^{\frac{2}{n}})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$$

$\checkmark$ $$\frac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$$

$\rightarrow$ $m=$ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24

$\rightarrow$ $n=$ 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21 ; 23

Упростить

**5.** Упростить.

1) $$\frac{(x^{\frac{2}{m}}-9x^{\frac{2}{n}})\cdot(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}})^2-12x^{\frac{m+n}{mn}}}$$

$\surd$ $$\frac{x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}}{x}$$

$\rightarrow$ $m=$ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24

$\rightarrow$ $n=$ 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21 ; 23

Решить уравнение

**6.** Решить уравнение.

1) $$\frac{5(a+b)}{y+(a+b)}+\frac{4(a+b)}{y+2(a+b)}+\frac{3(a+b)}{y+3(a+b)}=8$$

$\surd$ $y_1=0,\ \ y_{2,3}=\dfrac{(a+b)}{4}(-9\pm\sqrt{5})$

$\rightarrow$ $a=$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13

$\rightarrow$ $b=$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13

Решить уравнение

**7.** Решить уравнение.

1) $$\frac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$$

$\surd$ $x_1=a,\;\; x_2=\dfrac{1}{4}(4a-b)$

$\rightarrow$ $a=$ 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25

$\rightarrow$ $b=$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

Упростить

**8.** Упростить.

1) $a^{\frac{2}{\log_b a}+1}b-2a^{\log_a b}b^{\log_b a}+a\cdot b^{\frac{2}{\log_a b}+1}$

$\checkmark$ $ab(a-b)^2$

$\rightarrow$ $a=$ 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24

$\rightarrow$ $b=$ 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23

Упростить

**9.** Упростить.

1) $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a \frac{a}{b}}$

$\checkmark$ $\log_a b$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24

$\rightarrow$ $b =$ 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21 ; 23

Упростить

**10.** Упростить.

1) $\dfrac{\log_a b - \log_{\sqrt{a}/b^3} \sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b - \log_{a/b^6} b} : \log_b(a^3 b^{-12})$

✓ $\log_a b$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22

$\rightarrow$ $b =$ 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21 ; 23

# Часть II

# Алгебра и теория чисел

НОД двух чисел

**11.** Найдите $d =$НОД$(a, b)$ и представте его в виде $d = ak + bs$, где $k$, $s \in Z$.

1) $a = r_5(q_1q_2q_3q_4q_5q_6 + q_1q_2q_5q_6 + q_1q_4q_5q_6 + q_1q_2q_3q_6 + q_1q_2q_3q_4 + q_1q_2 + q_1q_4 + q_1q_6 + q_3q_4q_5q_6 + q_5$

$\surd$ $d = r_5,\ k = 1 + q_2q_3 + q_2q_5 + q_4q_5 + q_2q_3q_4q_5,\ s = -(q_1 + q_3 + q_5 + q_1q_2q_3 + q_1q_2q_5 + q_1q_4q_5 + q_3q_4$

$\to$ $r_5 =$ 2 ; 3 ; 6 ; 13

$\to$ $q_1 =$ 3 ; 2

$\to$ $q_2 =$ 1 ; 2

$\to$ $q_3 =$ 2 ; 3

$\to$ $q_4 =$ 1 ; 3

$\to$ $q_5 =$ 2 ; 1

$\to$ $q_6 =$ 2 ; 3

НОД двух многочленов

**12.** Найдите НОД двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

1) $f(x) = a_3A_1A_2A_3A_4x^6 + (a_3(A_1A_2A_3B_4 + A_1A_2A_4B_3 + A_1A_3A_4B_2 + A_2A_3A_4B_1) + b_3A_1A_2A_3A_4)$

√ $d = \text{НОД}(f(x), g(x)) = a_3x + b_3$

$\to$ $a_3 =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

$\to$ $b_3 =$ 1 ; −1 ; 2 ; −3

$\to$ $A_4 =$ 1 ; 2

$\to$ $A_3 =$ 1 ; −3

$\to$ $A_2 =$ 1 ; 2 ; −2

$\to$ $A_1 =$ 0 ; 1 ; 2

$\to$ $B_4 =$ 1 ; −2

$\to$ $B_3 =$ 1 ; −3

$\to$ $B_2 =$ 1 ; 2 ; −1

$\to$ $B_1 =$ 1 ; −1 ; 2 ; −2

$\to$ $C_1 =$ 1 ; 2 ; −1

**13.** Найдите рациональные корни многочлена $f(x)$.

1) $f(x) = akmx^5 + (bmk - alm - akn)x^4 + (ckm - blm - bkn + aln)x^3 + (bln - clm - ckn + dkm)$

√ $x_1 = \frac{l}{k}$, $x_2 = \frac{n}{m}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4

→ $b =$ 2 ; −3 ; −5

→ $c =$ 2 ; 3 ; −2

→ $d =$ −3 ; 2 ; 6

→ $k =$ 1 ; 7 ; 6

→ $l =$ 2 ; −3 ; 5

→ $m =$ 1 ; 7 ; 3

→ $n =$ 2 ; 5 ; 4

**14.** Разложить многочлен на неприводимые над полем $\mathbb{R}$ множители.

1) $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

√ $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

→ $a_3 = \ -(a+b+c+d)$

→ $a_2 = \ ab+ac+ad+bc+bd+cd$

→ $a_1 = \ -(bcd+acd+abd+abc)$

→ $a_0 = \ abcd$

→ $d = \ c+1\,; \quad c+2$

→ $c = \ b+1\,; \quad b+2$

→ $b = \ a+1\,; \quad a+2$

→ $a = \ -3\,; \quad -2$

2) $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

√ $(x-a)^2(x-b)(x-c)$

→ $a_3 = \ -(a+b+c+d)$

→ $a_2 = \ ab+ac+ad+bc+bd+cd$

→ $a_1 = \ -(bcd+acd+abd+abc)$

→ $a_0 = \ abcd$

→ $d = \ a$

→ $c = \ b+1\,; \quad b+2$

→ $b = \ a+1\,; \quad a+2\,; \quad a+3$

→ $a = \ -3\,; \quad -2$

3) $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

√ $(x-a)^3(x-b)$

→ $a_3 = \ -(a+b+c+d)$

→ $a_2 = \ ab+ac+ad+bc+bd+cd$

→ $a_1 = \ -(bcd+acd+abd+abc)$

→ $a_0 = \ abcd$

→ $d = \ a$

→ $c = \ a$

→ $b = \ -2\,; \quad -1\,; \quad 3$

→ $a = \ -3\,; \quad 1\,; \quad 2$

4) $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

√ $(x-a)^2(x-b)^2$

→ $a_3 = \ -(a+b+c+d)$

$\rightarrow\ a_2 =\ ab + ac + ad + bc + bd + cd$

$\rightarrow\ a_1 =\ -(bcd + acd + abd + abc)$

$\rightarrow\ a_0 =\ abcd$

$\rightarrow\ d =\ a$

$\rightarrow\ c =\ b$

$\rightarrow\ b =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 3$

$\rightarrow\ a =\ -3\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

5) $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$\checkmark\ \ (x-a)(x-b)(x^2+cx+d)$

$\rightarrow\ a_3 =\ c - a - b$

$\rightarrow\ a_2 =\ d + ab - ca - cb$

$\rightarrow\ a_1 =\ abc - da - db$

$\rightarrow\ a_0 =\ abd$

$\rightarrow\ b =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 3$

$\rightarrow\ a =\ -3\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ d =\ c^2+1\,;\ \ c^2+2\,;\ \ c^2+3\,;\ \ c^2+4$

$\rightarrow\ c =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

6) $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$\checkmark\ \ (x-a)^2(x^2+cx+d)$

$\rightarrow\ a_3 =\ c - a - b$

$\rightarrow\ a_2 =\ d + ab - ca - cb$

$\rightarrow\ a_1 =\ abc - da - db$

$\rightarrow\ a_0 =\ abd$

$\rightarrow\ b =\ a$

$\rightarrow\ a =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow\ d =\ c^2+1\,;\ \ c^2+2\,;\ \ c^2+3\,;\ \ c^2+4$

$\rightarrow\ c =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

**15.** Построить интерполяционный полином Лагранжа по данной таблице

1)

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |

$\surd$ $ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\rightarrow$ $f_1 = \; ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$

$\rightarrow$ $f_2 = \; ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$

$\rightarrow$ $f_3 = \; ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d$

$\rightarrow$ $f_4 = \; ax_4^3 + bx_4^2 + cx_4 + d$

$\rightarrow$ $a = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow$ $b = \; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $c = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4$

$\rightarrow$ $d = \; -7\,; \;\; -6\,; \;\; -5\,; \;\; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5\,; \;\; 6\,; \;\; 7$

$\rightarrow$ $x_4 = \; x_3 + 1\,; \;\; x_3 + 2$

$\rightarrow$ $x_3 = \; x_2 + 1\,; \;\; x_2 + 2$

$\rightarrow$ $x_2 = \; x_1 + 1\,; \;\; x_1 + 2$

$\rightarrow$ $x_1 = \; -3\,; \;\; -2$

`Интерполяционный полином степени 4`

**16.** Построить интерполяционный полином наименьшей степени по данной таблице.

1)

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |

$\surd$ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$\to$ $f_1 = \ ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e$

$\to$ $f_2 = \ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e$

$\to$ $f_3 = \ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e$

$\to$ $f_4 = \ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e$

$\to$ $f_5 = \ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e$

$\to$ $a = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $b = \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\to$ $c = \ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\to$ $d = \ -6\,;\ \ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6$

$\to$ $e = \ -9\,;\ \ -8 - 7\,;\ \ -6\,;\ \ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7\,;\ \ 8\,;\ \ 9$

$\to$ $x_5 = \ 2$

$\to$ $x_4 = \ 1$

$\to$ $x_3 = \ 0$

$\to$ $x_2 = \ -1$

$\to$ $x_1 = \ -2$

**17.** Представить правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей.

$\Rightarrow$ $a = \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ -4$

$\Rightarrow$ $A = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $B = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $C = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

1) $$\frac{(A+B+C)x^2-(A(b+c)+B(a+c)+C(a+b))x+(Abc+Bac+Cab)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$\surd$ $$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

$\rightarrow$ $b = \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $c = \ 1\,;\ \ 4\,;\ \ -5$

2) $$\frac{(B+C)x^2+(A-B(a+b)-2aC)x+(-Ab+Bab+Ca^2)}{(x-a)^2(x-b)}$$

$\surd$ $$\frac{A}{(x-a)^2}+\frac{B}{x-a}+\frac{C}{x-b}$$

$\rightarrow$ $b = \ 1\,;\ \ 4\,;\ \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ 5$

3) $$\frac{Ax^2+(B-2aA)x+(Aa^2-Ba+C)}{(x-a)^3}$$

$\surd$ $$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x-a)^3}$$

4) $$\frac{(B+A)x^2+(C-Ba+2bA)x+(-Ca+Ac)}{(x-a)(x^2+2bx+c)}$$

$\surd$ $$\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+2bx+c}$$

$\rightarrow$ $c = \ b^2+1\,;\ \ b^2+2\,;\ \ b^2+3\,;\ \ b^2+4$

$\rightarrow$ $b = \ 0\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ -2\,;\ \ 2$

**18.** Представить правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей.

$\Rightarrow$ $a = \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ -4$

$\Rightarrow$ $A = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $B = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $C = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

1) $$\frac{(A+B+C)x^2-(A(b+c)+B(a+c)+C(a+b))x+(Abc+Bac+Cab)}{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc}$$

$\surd$ $$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

$\rightarrow$ $b = \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $c = \ 1\,;\ \ 4\,;\ \ -5$

2) $$\frac{(B+C)x^2+(A-B(a+b)-2aC)x+(-Ab+Bab+Ca^2)}{x^3-(2a+b)x^2+(2ab+a^2)x-a^2b}$$

$\surd$ $$\frac{A}{(x-a)^2}+\frac{B}{x-a}+\frac{C}{x-b}$$

$\rightarrow$ $b = \ 1\,;\ \ 4\,;\ \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ 5$

3) $$\frac{Ax^2+(B-2aA)x+(Aa^2-Ba+C)}{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}$$

$\surd$ $$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x-a)^3}$$

4) $$\frac{(B+A)x^2+(C-Ba+2bA)x+(-Ca+Ac)}{x^3+(2b-a)x^2+(c-2ba)x-ac}$$

$\surd$ $$\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+2bx+c}$$

$\rightarrow$ $c = \ b^2+1\,;\ \ b^2+2\,;\ \ b^2+3\,;\ \ b^2+4$

$\rightarrow$ $b = \ 0\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ -2\,;\ \ 2$

**19.** Представить рациональную дробь в виде суммы простейших дробей.

$\Rightarrow$ $a = \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ -4$

$\Rightarrow$ $A = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5$

$\Rightarrow$ $B = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5$

$\Rightarrow$ $C = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5$

$\Rightarrow$ $p = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $q = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\Rightarrow$ $r = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

1) $\dfrac{px^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$

$\checkmark$ $px^2 + qx + r + \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$

$\rightarrow$ $c_4 = \ q + b_2p$

$\rightarrow$ $c_3 = \ r + b_2q + b_1p$

$\rightarrow$ $c_2 = \ a_2 + b_2r + b_1q + b_0p$

$\rightarrow$ $c_1 = \ a_1 + b_1r + b_0q$

$\rightarrow$ $c_0 = \ a_0 + b_0r$

$\rightarrow$ $a_2 = \ A + B + C$

$\rightarrow$ $a_1 = \ -A(b+c) - B(a+c) - C(a+b)$

$\rightarrow$ $a_0 = \ Abc + Bac + Cab$

$\rightarrow$ $b_2 = \ -a - b - c$

$\rightarrow$ $b_1 = \ ab + ac + bc$

$\rightarrow$ $b_0 = \ -abc$

$\rightarrow$ $b = \ -2\,; \ \ -3\,; \ \ 5$

$\rightarrow$ $c = \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ -5$

2) $\dfrac{px^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$

$\checkmark$ $px^2 + qx + r + \dfrac{A}{(x-a)^2} + \dfrac{B}{x-a} + \dfrac{C}{x-b}$

$\rightarrow$ $c_4 = \ q + b_2p$

$\rightarrow$ $c_3 = \ r + b_2q + b_1p$

$\rightarrow$ $c_2 = \ a_2 + b_2r + b_1q + b_0p$

$\rightarrow$ $c_1 = \ a_1 + b_1r + b_0q$

$\rightarrow$ $c_0 = \ a_0 + b_0r$

$\rightarrow$ $a_2 = \ B + C$

$\rightarrow$ $a_1 = \ A - B(a+b) - 2aC$

$\rightarrow$ $a_0 = \ -Ab + Bab + Ca^2$

$\rightarrow\ b_2 = \ -(2a+b)$

$\rightarrow\ b_1 = \ 2ab + a^2$

$\rightarrow\ b_0 = \ -a^2 b$

$\rightarrow\ b = \ 1\,;\quad 4\,;\quad -2\,;\quad -3\,;\quad 5$

3) $$\frac{px^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

$\checkmark\ \ px^2 + qx + r + \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2} + \dfrac{C}{(x-a)^3}$

$\rightarrow\ c_4 = \ q + b_2p$

$\rightarrow\ c_3 = \ r + b_2q + b_1p$

$\rightarrow\ c_2 = \ a_2 + b_2r + b_1q + b_0p$

$\rightarrow\ c_1 = \ a_1 + b_1r + b_0q$

$\rightarrow\ c_0 = \ a_0 + b_0r$

$\rightarrow\ a_2 = \ A$

$\rightarrow\ a_1 = \ B - 2aA$

$\rightarrow\ a_0 = \ Aa^2 - Ba + C$

$\rightarrow\ b_2 = \ -3a$

$\rightarrow\ b_1 = \ 3a^2$

$\rightarrow\ b_0 = \ -a^3$

4) $$\frac{px^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

$\checkmark\ \ px^2 + qx + r + \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2bx+c}$

$\rightarrow\ c_4 = \ q + b_2p$

$\rightarrow\ c_3 = \ r + b_2q + b_1p$

$\rightarrow\ c_2 = \ a_2 + b_2r + b_1q + b_0p$

$\rightarrow\ c_1 = \ a_1 + b_1r + b_0q$

$\rightarrow\ c_0 = \ a_0 + b_0r$

$\rightarrow\ a_2 = \ B + A$

$\rightarrow\ a_1 = \ C - Ba + 2bA$

$\rightarrow\ a_0 = \ -Ca + Ac$

$\rightarrow\ b_2 = \ 2b - a$

$\rightarrow\ b_1 = \ c - 2ba$

$\rightarrow\ b_0 = \ -ac$

$\rightarrow\ c = \ b^2+1\,;\quad b^2+2\,;\quad b^2+3\,;\quad b^2+4$

$\rightarrow\ b = \ 0\,;\quad -1\,;\quad 1\,;\quad -2\,;\quad 2$

# Часть III

# Комплексные числа

**20.** Вычислить $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$.

1) $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2,\ z_3 = a_3a_2 - b_3b_2 + i(a_3b_2 + b_3a_2)$

√ $a_1 + a_1a_3 - b_1b_3 + i(b_1 + a_1b_3 + b_1a_3)$

$\rightarrow$ $a_1 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\rightarrow$ $b_1 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\rightarrow$ $a_2 = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $b_2 = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $a_3 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\rightarrow$ $b_3 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

**21.** Найти произведение и частное $z_1 z_2$ и $z_1/z_2$ в алгебраической форме. Затем записать комплексные числа в тригонометрической форме и проверить полученный результат.

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

$\Rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

1) $z_1 = a + ai, \quad z_2 = b + bi$

$$z_1 z_2 = 2abi, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{b},$$

√ $$z_1 = a\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) $z_1 = a - ai, \quad z_2 = b + bi$

$$z_1 z_2 = 2ab, \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{a}{b}i,$$

√ $$z_1 = a\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

3) $z_1 = -a + ai, \quad z_2 = b + bi$

$$z_1 z_2 = -2ab, \quad \frac{z_1}{z_2} = 2\frac{a}{b}i,$$

√ $$z_1 = a\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

4) $z_1 = -a - ai, \quad z_2 = b + bi$

$$z_1 z_2 = -2abi, \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{a}{b},$$

√ $$z_1 = a\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

5) $z_1 = a - ai, \quad z_2 = -b - bi$

$$z_1 z_2 = -2ab, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{b}i,$$

√ $$z_1 = a\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

**22.** Построить на комплексной плоскости следующие множества точек

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

1) $|z|^2 + 2a\Re z \leq a^2$

✓ $(x+a)^2 + y^2 \leq 2a^2$ внутренность круга с центром в т. $(-a;0)\,, R = a\sqrt{2}$

2) $\Im z^2 = 2a,\ z = x + iy$

✓ $y = \dfrac{a}{x}$ , ветви в I и III четвертях гиперболы

3) $\Re z^2 = 2a\ ,\ z = x + iy$

✓ $\dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{y^2}{2a} = 1$ , гипербола равнобокая

4) $\Im \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2a}$

✓ $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ окружность с центром в т. $(0;a)\,, R = a$

5) $\Re \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2a}$

✓ $(x-2)^2 + y^2 = a^2$ окружность с центром в т. $(a;0)\,, R = a$

6) $\Im \dfrac{z-a}{z+a} \leq 0$

✓ $y \leq 0$ нижняя полуокружность, включая действительную полуось

7) $\Re \dfrac{z-a}{z+a} > 0$

✓ $x^2 + y^2 > a^2$ внешность круга с центром в т. $(0;0)\,, R = a$

8) $\left|\dfrac{z-a}{z+a}\right| \leq 1$

✓ $x \geq 0$ правая полуокружность, включая мнимую ось

9) $|z| = \Re(a+z)$

✓ $y^2 = 2a\left(x + \dfrac{a}{2}\right)$ парабола, ветви вправо, с вершиной в т. $\left(-\dfrac{a}{2};0\right)$

10) $|\bar{z}| = \Im(a+z)$

✓ $x^2 = 2a\left(y + \dfrac{a}{2}\right)$ парабола, ветви вверх, с вершиной в т. $\left(0;-\dfrac{a}{2}\right)$

11) $0 \leq \Re ai\bar{z} \leq a$

✓ $0 \leq y \leq a$ полоса, ограниченная прямыми $y = 0, y = 1$

12) $0 \leq \Im ai\bar{z} \leq 1$

$\surd$ $0 \leq x \leq 1$ полоса, ограниченная прямыми $x = 0, x = 1$

Решение комплексного уравнения

**23.** Решить уравнение

$\Rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

1) $|z| - z = a + ai$

$\surd$ $z = -ai$

2) $|z| + z = a + ai$

$\surd$ $z = ai$

3) $|z| - z = a + a\sqrt{3}i$

$\surd$ $z = a - \sqrt{3}ai$

4) $|z| + z = a + a\sqrt{3}i$

$\surd$ $z = -a + \sqrt{3}ai$

5) $|z| - az = -\sqrt{a^2 - 1}i$

$\surd$ $z = \pm 1 - \sqrt{a^2 - 1}i$

**24.** Возвести комплексное число в 200 степень и найти корень 3-ей степени. Построить корни на комплексной плоскости.

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

1) $z = ai$

$$z^{200} = a^{200}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{3}\right), k = \overline{0,2}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$\checkmark$

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt[3]{a}$$

2) $z = -ai$

$$z^{200} = a^{200}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{-\pi/2+2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\pi/2+2\pi k}{3}\right), k = \overline{0,2}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{a}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt[3]{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$\checkmark$

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{a}i$$

$$\alpha_2 = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

**25.** Возвести комплексное число в 200 степень и найти корни 4-ой степени.

$\Rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

1) $z = a + ai$

$$z^{200} = a^{200}2^{100}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi/4 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi/4 + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

√
$$\alpha_2 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{15\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{15\pi}{16}\right)\right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right)\right)$$

2) $z = a - ai$

$$z^{200} = a^{200}2^{100}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\pi/4 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\pi/4 + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$$

√
$$\alpha_1 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}i$$

3) $z = -a + ai$

$$z^{200} = a^{200} 2^{100}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{16} + i\sin\frac{11\pi}{16}\right)$$

$\checkmark$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{16}\right)\right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{16} + i\sin\frac{27\pi}{16}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{16}\right)\right)$$

4) $z = -a - ai$

$$z^{200} = a^{200} 2^{100}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-3\pi/4 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-3\pi/4 + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{16}\right)\right)$$

$\checkmark$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{a}\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{16}\right)\right)$$

5) $z = a + i\sqrt{3}a$

$$z^{200} = 2a^{200}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi/3 + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$\checkmark$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

6) $z = a - i\sqrt{3}a$

$$z^{200} = 2a^{200}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{-\pi/3 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\pi/3 + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$\checkmark$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

7) $z = -a + i\sqrt{3}a$

$$z^{200} = (2a)^{200}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{2\pi/3 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi/3 + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{8\pi}{12} + i\sin\frac{8\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

√ $$= \sqrt[4]{2a}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{14\pi}{12} + i\sin\frac{14\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{20\pi}{12} + i\sin\frac{20\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2a}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

8) $z = -a - i\sqrt{3}a$

$$z^{200} = (2a)^{200}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{-2\pi/3 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-2\pi/3 + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

√

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{2a}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[4]{2a}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

# Часть IV

# Линейная алгебра

**26.** Найти линейные комбинации заданных матриц:

$\Rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -3\,; \ \ 2\,; \ \ 5$

$\Rightarrow$ $l = \ -5\,; \ \ -4\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_{11} = \ -7\,; \ \ -4\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 5$

$\Rightarrow$ $a_{12} = \ -6\,; \ \ -3\,; \ \ 0\,; \ \ 3\,; \ \ 6$

$\Rightarrow$ $a_{21} = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ 7$

$\Rightarrow$ $a_{22} = \ -4\,; \ \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\Rightarrow$ $b_{11} = \ -7\,; \ \ -4\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 5$

$\Rightarrow$ $b_{12} = \ -6\,; \ \ -3\,; \ \ 0\,; \ \ 3\,; \ \ 6$

$\Rightarrow$ $b_{21} = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ 7$

$\Rightarrow$ $b_{22} = \ -4\,; \ \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

1) $kA + lB, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} ka_{11} + lb_{11} & ka_{12} + lb_{12} \\ ka_{21} + lb_{21} & ka_{22} + lb_{22} \\ ka_{31} + lb_{31} & ka_{32} + lb_{32} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a_{31} = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ -4\,; \ \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow$ $b_{31} = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $b_{32} = \ -4\,; \ \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

2) $kA + lB, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} ka_{11} + lb_{11} & ka_{12} + lb_{12} & ka_{13} + lb_{13} \\ ka_{21} + lb_{21} & ka_{22} + lb_{22} & ka_{23} + lb_{23} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a_{13} = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $a_{23} = \ -4\,; \ \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow$ $b_{13} = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $b_{23} = \ -4\,; \ \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

3) $kA + lB, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} ka_{11} + lb_{11} & ka_{12} + lb_{12} & ka_{13} + lb_{13} \\ ka_{21} + lb_{21} & ka_{22} + lb_{22} & ka_{23} + lb_{23} \\ ka_{31} + lb_{31} & ka_{32} + lb_{32} & ka_{33} + lb_{33} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a_{13} = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $a_{23} = \ -4\,; \ \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow$ $b_{13} = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 4\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $b_{23} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

$\rightarrow$ $a_{31} = -5\,;\ -2\,;\ 1\,;\ 4\,;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{32} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

$\rightarrow$ $b_{31} = -5\,;\ -2\,;\ 1\,;\ 4\,;\ 7$

$\rightarrow$ $b_{32} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

$\rightarrow$ $a_{33} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

$\rightarrow$ $b_{33} = -5\,;\ -2\,;\ 1\,;\ 4\,;\ 7$

Произведение матриц 2x2, 2x1 и 1x2

**27.** Вычислить произведение

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} m(ae+bf) & n(ae+bf) \\ m(ce+df) & n(ce+df) \end{pmatrix}$

$\to$ $a =$ 2 ; 4

$\to$ $b =$ −5 ; 0

$\to$ $c =$ −3 ; 2

$\to$ $d =$ 1 ; 3

$\to$ $e =$ 0 ; −2

$\to$ $f =$ −1 ; 1

$\to$ $m =$ −4 ; 4

$\to$ $n =$ −1 ; 3

Разность матриц 2x2 и 2x2

**28.** Вычислить

1) $\begin{pmatrix} 1+la & a \\ k+l+lka & 1+ka \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^{T}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} 1+ka-e & -a-g \\ -k-l-lka-f & 1+la-h \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $k =$ −5 ; 1

$\rightarrow$ $l =$ −3 ; 2

$\rightarrow$ $e =$ 0 ; 6

$\rightarrow$ $f =$ −1 ; 1

$\rightarrow$ $g =$ −4 ; 5

$\rightarrow$ $h =$ −1 ; 2

**29.** Найти произведение $AB$.

$\Rightarrow$ $a_{11} = -3;\ 0;\ 2$

$\Rightarrow$ $a_{12} = -5;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $a_{13} = -4;\ 1;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{21} = -2;\ 0;\ 5$

$\Rightarrow$ $a_{22} = -1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $a_{23} = -2;\ -3;\ -4;\ 1;\ 5$

$\Rightarrow$ $b_{11} = -3;\ 0;\ 2$

$\Rightarrow$ $b_{12} = -5;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $b_{21} = -4;\ 1;\ 3$

$\Rightarrow$ $b_{22} = -2;\ 0;\ 5$

$\Rightarrow$ $b_{31} = -1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $b_{32} = -2;\ -3;\ -4;\ 1;\ 5$

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

$\rightarrow$ $p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

$\rightarrow$ $p_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$

$\rightarrow$ $p_{14} = a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34}$

$\rightarrow$ $p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$

$\rightarrow$ $p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

$\rightarrow$ $p_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$

$\rightarrow$ $p_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34}$

$\rightarrow$ $b_{13} = -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $b_{14} = -5;\ -4;\ -2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $b_{23} = -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $b_{24} = -3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $b_{34} = -5;\ -4;\ -2;\ 3;\ 4;\ 5$

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$\surd \quad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$

$\rightarrow \ p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

$\rightarrow \ p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

$\rightarrow \ p_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$

$\rightarrow \ p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$

$\rightarrow \ p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

$\rightarrow \ p_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$

$\rightarrow \ p_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$

$\rightarrow \ p_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$

$\rightarrow \ p_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$

$\rightarrow \ a_{31} = -3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow \ a_{32} = -5;\ -4;\ -2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow \ a_{33} = -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow \ b_{13} = -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow \ b_{23} = -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow \ b_{33} = -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

$\surd \quad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{pmatrix}$

$\rightarrow \ p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

$\rightarrow \ p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

$\rightarrow \ p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$

$\rightarrow \ p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

$\rightarrow \ p_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$

$\rightarrow \ p_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$

$\rightarrow \ a_{31} = -3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow \ a_{32} = -5;\ -4;\ -2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow \ a_{33} = -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

**30.** Найти $AB$.

$\Rightarrow$ $a_{11} = \ -3\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{12} = \ -5\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_{13} = \ -4\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{21} = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $a_{22} = \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_{23} = \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ -4\,;\ \ 1\,;\ \ 5$

1) $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

$\surd$ $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a_1 = \ -3\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $a_2 = \ -5\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\rightarrow$ $a_3 = \ -4\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $a_4 = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $b_1 = \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\rightarrow$ $b_2 = \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ -4\,;\ \ 1\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $b_3 = \ -5\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\rightarrow$ $b_4 = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 5$

2) $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

$\surd$ $\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a_1 = \ -3\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $a_2 = \ -5\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\rightarrow$ $a_3 = \ -4\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $a_4 = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $b_1 = \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\rightarrow$ $b_2 = \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ -4\,;\ \ 1\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $b_3 = \ -5\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\rightarrow$ $b_4 = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 5$

3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$\surd \quad \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad a_{11} = \ -3\,; \ \ 0\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad a_{12} = \ -5\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow \quad a_{13} = \ -4\,; \ \ 1\,; \ \ 3$

$\rightarrow \quad a_{21} = \ -2\,; \ \ 0\,; \ \ 5$

$\rightarrow \quad a_{22} = \ -5\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow \quad a_{23} = \ -4\,; \ \ 1\,; \ \ 3$

$\rightarrow \quad b_1 = \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow \quad b_2 = \ -2\,; \ \ -3\,; \ \ -4\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow \quad b_3 = \ -5\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

4) $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$

$\surd \quad \begin{pmatrix} a_1b_{11} + a_2b_{21} & a_1b_{12} + a_2b_{22} & a_1b_{13} + a_2b_{23} \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad a_1 = \ -3\,; \ \ 0\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad a_2 = \ -5\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow \quad b_{11} = \ -4\,; \ \ 1\,; \ \ 3$

$\rightarrow \quad b_{12} = \ -2\,; \ \ 0\,; \ \ 5$

$\rightarrow \quad b_{13} = \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow \quad b_{21} = \ -2\,; \ \ -3\,; \ \ -4\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow \quad b_{22} = \ -5\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

$\rightarrow \quad b_{23} = \ -2\,; \ \ 0\,; \ \ 5$

Произведения матриц AB и BA, размер 2x2

**31.** Найти $AB$ и $BA$.

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a_{11} = -9;\ -6;\ -4;\ -2;\ -1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 9$

$\rightarrow$ $a_{22} = -8;\ -7;\ -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 8$

$\rightarrow$ $b_{22} = -9;\ -6;\ -4;\ -2;\ -1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 9$

$\rightarrow$ $b_{11} = -8;\ -7;\ -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 8$

$\rightarrow$ $a_{12} = -3;\ 0;\ 1;\ 4$

$\rightarrow$ $a_{21} = -2;\ -1;\ 0;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{21} = -3;\ 0;\ 1;\ 4$

$\rightarrow$ $b_{12} = -2;\ -1;\ 0;\ 2$

**32.** Найти $AB$ и $BA$.

$\Rightarrow$ $a_{11} = \ -4\,;\ \ -1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{12} = \ -5\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{13} = \ -3\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $a_{21} = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{22} = \ -3\,;\ \ 1\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_{23} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{31} = \ -4\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{32} = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $a_{33} = \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $b_{11} = \ -4\,;\ \ -1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $b_{12} = \ -5\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $b_{13} = \ -3\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $b_{21} = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $b_{22} = \ -3\,;\ \ 1\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $b_{23} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $b_{31} = \ -4\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $b_{32} = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $b_{33} = \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 5$

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\surd \quad AB = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $p_{11} = \ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

$\rightarrow$ $p_{12} = \ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

$\rightarrow$ $p_{13} = \ a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$

$\rightarrow$ $p_{21} = \ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$

$\rightarrow$ $p_{22} = \ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

$\rightarrow$ $p_{23} = \ a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$

$\rightarrow$ $p_{31} = \ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$

$\rightarrow$ $p_{32} = \ a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$

$\rightarrow$ $p_{33} = \ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$

$\rightarrow$ $q_{11} = \ b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}$

$\rightarrow$ $q_{12} = \ b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32}$

$\rightarrow$ $q_{13} = \ b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33}$

$\longrightarrow$ $q_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31}$

$\longrightarrow$ $q_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}$

$\longrightarrow$ $q_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33}$

$\longrightarrow$ $q_{31} = b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31}$

$\longrightarrow$ $q_{32} = b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32}$

$\longrightarrow$ $q_{33} = b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33}$

`Произведение трёх матриц размера 2x2`

**33.** Найти произведение трёх матриц.

$\Rightarrow$ $a_{11} = -4;\ -2;\ -1;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{12} = -3;\ 0;\ 1;\ 4$

$\Rightarrow$ $a_{21} = -2;\ -1;\ 0;\ 2$

$\Rightarrow$ $b_{22} = -4;\ -2;\ -1;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $b_{11} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $b_{21} = -3;\ 0;\ 1;\ 4$

$\Rightarrow$ $b_{12} = -2;\ -1;\ 0;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{11} = -4;\ -2;\ -1;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $c_{22} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{12} = -3;\ 0;\ 1;\ 4$

$\Rightarrow$ $c_{21} = -2;\ -1;\ 0;\ 2$

1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$\surd$ $\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $q_{11} = p_{11}c_{11} + p_{12}c_{21}$

$\rightarrow$ $q_{12} = p_{11}c_{12} + p_{12}c_{22}$

$\rightarrow$ $q_{21} = p_{21}c_{11} + p_{22}c_{21}$

$\rightarrow$ $q_{22} = p_{21}c_{12} + p_{22}c_{22}$

$\rightarrow$ $p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$

$\rightarrow$ $p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$

$\rightarrow$ $p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$

$\rightarrow$ $p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

**34.** Найти произведение трёх матриц.

$\Rightarrow$ $a_{11} = -4\,;\ -1\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{12} = -5\,;\ 0\,;\ 2$

$\Rightarrow$ $a_{13} = -3\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $a_{21} = -2\,;\ 0\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{22} = -3\,;\ 1\,;\ 4$

$\Rightarrow$ $a_{23} = -1\,;\ 0\,;\ 2$

$\Rightarrow$ $a_{31} = -4\,;\ 0\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{32} = -2\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $a_{33} = -2\,;\ 1\,;\ 5$

$\Rightarrow$ $b_{11} = -4\,;\ -1\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $b_{12} = -5\,;\ 0\,;\ 2$

$\Rightarrow$ $b_{13} = -3\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $b_{21} = -2\,;\ 0\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $b_{22} = -3\,;\ 1\,;\ 4$

$\Rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\ 0\,;\ 2$

$\Rightarrow$ $b_{31} = -4\,;\ 0\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $b_{32} = -2\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\ 1\,;\ 5$

$\Rightarrow$ $c_{11} = -4\,;\ -1\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{12} = -5\,;\ 0\,;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{13} = -3\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $c_{21} = -2\,;\ 0\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{22} = -3\,;\ 1\,;\ 4$

$\Rightarrow$ $c_{23} = -1\,;\ 0\,;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{31} = -4\,;\ 0\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{32} = -2\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $c_{33} = -2\,;\ 1\,;\ 5$

1) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$\surd$ $$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $q_{11} = p_{11}c_{11} + p_{12}c_{21} + p_{13}c_{31}$

$\rightarrow$ $q_{12} = p_{11}c_{12} + p_{12}c_{22} + p_{13}c_{32}$

$\rightarrow$ $q_{13} = p_{11}c_{13} + p_{12}c_{23} + p_{13}c_{33}$

$\rightarrow$ $q_{21} = p_{21}c_{11} + p_{22}c_{21} + p_{23}c_{31}$

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow \quad q_{22} &= p_{21}c_{12} + p_{22}c_{22} + p_{23}c_{32} \\
\longrightarrow \quad q_{23} &= p_{21}c_{13} + p_{22}c_{23} + p_{23}c_{33} \\
\longrightarrow \quad q_{31} &= p_{31}c_{11} + p_{32}c_{21} + p_{33}c_{31} \\
\longrightarrow \quad q_{32} &= p_{31}c_{12} + p_{32}c_{22} + p_{33}c_{32} \\
\longrightarrow \quad q_{33} &= p_{31}c_{13} + p_{32}c_{23} + p_{33}c_{33} \\
\longrightarrow \quad p_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\
\longrightarrow \quad p_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\
\longrightarrow \quad p_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\
\longrightarrow \quad p_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\
\longrightarrow \quad p_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\
\longrightarrow \quad p_{23} &= a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\
\longrightarrow \quad p_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \\
\longrightarrow \quad p_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\
\longrightarrow \quad p_{33} &= a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}
\end{aligned}
$$

**35.** Найти $f(A)$, если:

$\Rightarrow$ $a_{11} =\ -4\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $a_{22} =\ -5\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{12} =\ -3\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_{21} =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a =\ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $b =\ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $c =\ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $d =\ -7\,;\ \ -6\,;\ \ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7\,;\ \ 8\,;\ \ 9$

1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\surd$ $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $x_{11} =\ aq_{11} + bp_{11} + ca_{11} + de_{11}$

$\rightarrow$ $x_{12} =\ aq_{12} + bp_{12} + ca_{12} + de_{12}$

$\rightarrow$ $x_{21} =\ aq_{21} + bp_{21} + ca_{21} + de_{21}$

$\rightarrow$ $x_{22} =\ aq_{22} + bp_{22} + ca_{22} + de_{22}$

$\rightarrow$ $q_{11} =\ p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21}$

$\rightarrow$ $q_{12} =\ p_{11}a_{12} + p_{12}a_{22}$

$\rightarrow$ $q_{21} =\ p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21}$

$\rightarrow$ $q_{22} =\ p_{21}a_{12} + p_{22}a_{22}$

$\rightarrow$ $p_{11} =\ a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}$

$\rightarrow$ $p_{12} =\ a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}$

$\rightarrow$ $p_{21} =\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}$

$\rightarrow$ $p_{22} =\ a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}$

$\rightarrow$ $e_{11} =\ 1$

$\rightarrow$ $e_{12} =\ 0$

$\rightarrow$ $e_{21} =\ 0$

$\rightarrow$ $e_{22} =\ 1$

**36.** Найти $f(A)$, если:

$\Rightarrow$ $a_{11} =\ -4\,;\ \ -1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{12} =\ -5\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{13} =\ -3\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $a_{21} =\ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{22} =\ -3\,;\ \ 1\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_{23} =\ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{31} =\ -4\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{32} =\ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $a_{33} =\ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $a =\ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $b =\ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $c =\ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $d =\ -7\,;\ \ -6\,;\ \ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7\,;\ \ 8\,;\ \ 9$

$\Rightarrow$ $e_{11} =\ 1$

$\Rightarrow$ $e_{12} =\ 0$

$\Rightarrow$ $e_{13} =\ 0$

$\Rightarrow$ $e_{21} =\ 0$

$\Rightarrow$ $e_{22} =\ 1$

$\Rightarrow$ $e_{23} =\ 0$

$\Rightarrow$ $e_{31} =\ 0$

$\Rightarrow$ $e_{32} =\ 0$

$\Rightarrow$ $e_{33} =\ 1$

$$1)\quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\surd \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $x_{11} =\ aq_{11} + bp_{11} + ca_{11} + de_{11}$

$\rightarrow$ $x_{12} =\ aq_{12} + bp_{12} + ca_{12} + de_{12}$

$\rightarrow$ $x_{13} =\ aq_{13} + bp_{13} + ca_{13} + de_{13}$

$\rightarrow$ $x_{21} =\ aq_{21} + bp_{21} + ca_{21} + de_{21}$

$\rightarrow$ $x_{22} =\ aq_{22} + bp_{22} + ca_{22} + de_{22}$

$\rightarrow$ $x_{23} =\ aq_{23} + bp_{23} + ca_{23} + de_{23}$

$\rightarrow$ $x_{31} =\ aq_{31} + bp_{31} + ca_{31} + de_{31}$

$\rightarrow$ $x_{32} =\ aq_{32} + bp_{32} + ca_{32} + de_{32}$

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow\quad x_{33} &= aq_{33} + bp_{33} + ca_{33} + de_{33}\\
\longrightarrow\quad q_{11} &= p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21} + p_{13}a_{31}\\
\longrightarrow\quad q_{12} &= p_{11}a_{12} + p_{12}a_{22} + p_{13}a_{32}\\
\longrightarrow\quad q_{13} &= p_{11}a_{13} + p_{12}a_{23} + p_{13}a_{33}\\
\longrightarrow\quad q_{21} &= p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21} + p_{23}a_{31}\\
\longrightarrow\quad q_{22} &= p_{21}a_{12} + p_{22}a_{22} + p_{23}a_{32}\\
\longrightarrow\quad q_{23} &= p_{21}a_{13} + p_{22}a_{23} + p_{23}a_{33}\\
\longrightarrow\quad q_{31} &= p_{31}a_{11} + p_{32}a_{21} + p_{33}a_{31}\\
\longrightarrow\quad q_{32} &= p_{31}a_{12} + p_{32}a_{22} + p_{33}a_{32}\\
\longrightarrow\quad q_{33} &= p_{31}a_{13} + p_{32}a_{23} + p_{33}a_{33}\\
\longrightarrow\quad p_{11} &= a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}\\
\longrightarrow\quad p_{12} &= a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32}\\
\longrightarrow\quad p_{13} &= a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33}\\
\longrightarrow\quad p_{21} &= a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31}\\
\longrightarrow\quad p_{22} &= a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{32}\\
\longrightarrow\quad p_{23} &= a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33}\\
\longrightarrow\quad p_{31} &= a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31}\\
\longrightarrow\quad p_{32} &= a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32}\\
\longrightarrow\quad p_{33} &= a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}a_{33}
\end{aligned}
$$

Произведение матрицы на её транспонированную

**37.** Вычислить произведения $AA^T$ и $A^TA$, если:

1) $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$

$$\checkmark \quad AA^T = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \end{pmatrix}, \quad A^TA = \begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_1a_5 \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & a_2a_4 & a_2a_5 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3 & a_3a_4 & a_3a_5 \\ a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & a_4a_4 & a_4a_5 \\ a_5a_1 & a_5a_2 & a_5a_3 & a_5a_4 & a_5a_5 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $a_1 = -4;\ -1;\ 3$

$\rightarrow$ $a_2 = -5;\ -2;\ 2$

$\rightarrow$ $a_3 = -3;\ 4;\ 1$

$\rightarrow$ $a_4 = -2;\ 0;\ 3$

$\rightarrow$ $a_5 = -3;\ 1;\ 4$

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$

$$\checkmark \quad AA^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} + a_{14}a_{14} & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} + a_{14}a_{24} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} + a_{24}a_{14} & a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{23} + a_{24}a_{24} \end{pmatrix}, \quad A^TA = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + \\ a_{12}a_{11} + \\ a_{13}a_{11} + \\ a_{14}a_{11} + \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $a_{11} = -4;\ -1;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{12} = -5;\ 0;\ 2$

$\rightarrow$ $a_{13} = -3;\ 3;\ 1$

$\rightarrow$ $a_{14} = -2;\ -1;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{21} = -3;\ 1;\ 4$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -1;\ 2$

$\rightarrow$ $a_{23} = -3;\ 2;\ 1$

$\rightarrow$ $a_{24} = -2;\ 0;\ 3$

3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

$$\checkmark \quad AA^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} & a_{31}a_{31} + a_{32}a_{32} \end{pmatrix}, \quad A^TA = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $a_{11} = -4;\ -1;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{12} = -5;\ 0;\ 2$

$\rightarrow$ $a_{21} = -3;\ 1;\ 4$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -1;\ 2$

$\rightarrow$ $a_{31} = -3;\ 3;\ 1$

$\rightarrow$ $a_{32} = -2;\ -1;\ 3$

**38.** Найти след матриц $AB$ и $BA$ (сумму диагональных элементов), если

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ a & c & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & c \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\surd$ $tr(AB) = tr(BA) = b + a + c^2 - 2$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; 3 ; 4

Определитель 2x2

**39.** Вычислить определитель.

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$\checkmark$ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = -7\,;\ -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 8$

$\rightarrow$ $a_{12} = -8\,;\ -6\,;\ -5\,;\ -3\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{21} = -7\,;\ -5\,;\ -4\,;\ -3\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 7$

Определитель 3x3

**40.** Вычислить определитель.

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

✓ $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

$\to$ $a_{11} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\to$ $a_{12} = -3\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 4$

$\to$ $a_{13} = -5\,;\ -4\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3\,;\ 4$

$\to$ $a_{21} = -3\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 4\,;\ 5$

$\to$ $a_{22} = -3\,;\ -2\,;\ 1\,;\ 4$

$\to$ $a_{23} = -4\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\to$ $a_{31} = -4\,;\ -3\,;\ -1\,;\ 3\,;\ 5$

$\to$ $a_{32} = -3\,;\ -2\,;\ 1\,;\ 4$

$\to$ $a_{33} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ 3\,;\ 4$

Простой определитель 4x4

**41.** Вычислить определитель.

1) $\begin{vmatrix} ap+d & a & ar+B & as+dk+e \\ amp+bp+dm+C & am+b & amr+br+Bm & ams+bs+dkm+em+Ck \\ Ap & A & Ar & As \\ anp+cp+dn+f & an+c & anr+cr+Bn & ans+cs+dkn+en+fk+D \end{vmatrix}$

$\surd$ $ABCD$

$\rightarrow$ $A =$ $-3$ ; $4$ ; $2$ ; $3$ ; $-2$

$\rightarrow$ $B =$ $1$ ; $-1$ ; $3$ ; $-2$

$\rightarrow$ $C =$ $2$ ; $4$ ; $-2$

$\rightarrow$ $D =$ $5$ ; $-3$

$\rightarrow$ $a =$ $-2$ ; $-1$ ; $0$ ; $1$ ; $2$

$\rightarrow$ $b =$ $3$ ; $4$

$\rightarrow$ $c =$ $-2$ ; $5$

$\rightarrow$ $d =$ $7$

$\rightarrow$ $e =$ $3$

$\rightarrow$ $f =$ $-2$

$\rightarrow$ $k =$ $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; $2$ ; $5$

$\rightarrow$ $m =$ $2$

$\rightarrow$ $n =$ $-3$

$\rightarrow$ $p =$ $2$

$\rightarrow$ $r =$ $-2$

$\rightarrow$ $s =$ $5$

Определитель 4x4

**42.** Вычислить определитель.

1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \\ o & p & q & r \end{vmatrix}$

$\surd$ $aA - bB + cC - dD$

$\rightarrow$ $A = \ f(mr - nq) - g(lr - pn) + h(lq - pm)$

$\rightarrow$ $B = \ e(mr - nq) - g(kr - on) + h(kq - om)$

$\rightarrow$ $C = \ e(lr - pn) - f(kr - on) + h(kp - ol)$

$\rightarrow$ $D = \ e(lq - pm) - f(kq - om) + g(kp - ol)$

$\rightarrow$ $a = \ -2\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $b = \ 0\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $c = \ -2\,;\ \ -1$

$\rightarrow$ $d = \ -3\,;\ \ 2\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $e = \ -2\,;\ \ 4$

$\rightarrow$ $f = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $g = \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $h = \ -1\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $m = \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $n = \ -2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $o = \ -1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $p = \ -3\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $q = \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $r = \ -2\,;\ \ -1$

Разность определителей

**43.** Вычислить $\det A - \det B$, если

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

$\surd$ 0

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

Система 2x2

**44.** Решить систему уравнений

1) $\begin{cases} ax + by = aX + bY, \\ cx + dy = cX + dY \end{cases}$

$\checkmark$ $x = X;\ y = Y$

$\rightarrow$ $X =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $Y =\ -5\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $a =\ k_b k_c$

$\rightarrow$ $b =\ k_b l_b$

$\rightarrow$ $c =\ k_c l_c$

$\rightarrow$ $d =\ k + l_b l_c$

$\rightarrow$ $k =\ -1\,;\ \ 1\,;\ \ -2\,;\ \ 2\,;\ \ -3\,;\ \ 3\,;\ \ -4\,;\ \ 4\,;\ \ -5\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $k_b =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $l_b =\ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $k_c =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $l_c =\ -5\,;\ \ -4 - 3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

Простая система 3x3

**45.** Решить систему уравнений.

1) $$\begin{cases} ax+by+cz=aX+bY+cZ,\\ amx+(bm+e)y+(cm+f)z=amX+(bm+e)Y+(cm+f)Z,\\ anx+(bn+le)y+(cn+fl+h)z=anX+(bn+le)Y+(cn+fl+h)Z \end{cases}$$

$\surd$ $x=X$; $y=Y$; $z=Z$

$\rightarrow$ $a=$ $-1$; $2$; $1$

$\rightarrow$ $e=$ $-1$; $1$

$\rightarrow$ $h=$ $-1$; $1$; $2$

$\rightarrow$ $X=$ $-2$; $-1$; $1$; $2$; $3$; $4$

$\rightarrow$ $Y=$ $-2$; $-1$; $0$; $1$; $2$; $3$; $4$

$\rightarrow$ $Z=$ $-1$; $1$; $2$; $3$; $4$

$\rightarrow$ $m=$ $-2$; $-1$; $1$; $2$

$\rightarrow$ $n=$ $-2$; $-1$; $1$; $2$

$\rightarrow$ $l=$ $-1$; $1$

$\rightarrow$ $b=$ $-3$; $-2$; $2$; $3$

$\rightarrow$ $c=$ $-2$; $-1$; $1$; $2$

$\rightarrow$ $f=$ $-3$; $-2$; $0$; $2$; $3$

**46.**

$\Rightarrow$ $a_{11} = a$

$\Rightarrow$ $a_{12} = b$

$\Rightarrow$ $a_{13} = c$

$\Rightarrow$ $b_1 = aX + bY + cZ$

$\Rightarrow$ $a_{21} = am$

$\Rightarrow$ $a_{22} = bm + e$

$\Rightarrow$ $a_{23} = cm + f$

$\Rightarrow$ $b_2 = amX + (bm + e)Y + (cm + f)Z$

$\Rightarrow$ $a_{31} = an$

$\Rightarrow$ $a_{32} = bn + le$

$\Rightarrow$ $a_{33} = cn + fl + h$

$\Rightarrow$ $b_3 = anX + (bn + le)Y + (cn + fl + h)Z$

$\Rightarrow$ $a = 2;\ 1;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $e = 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $h = 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $X = 200;\ 250;\ 300;\ 350;\ 400;\ 450;\ 500$

$\Rightarrow$ $Y = 200;\ 250;\ 300;\ 350;\ 400;\ 450;\ 500$

$\Rightarrow$ $Z = 200;\ 250;\ 300;\ 350;\ 400;\ 450;\ 500$

$\Rightarrow$ $m = 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $n = 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $l = 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $b = 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $c = 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $f = 2;\ 3$

1)

| Вид сырья | Расход сырья по видам продукции, усл. ед. | | | Расход сырья за 1 день, усл. ед |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $b_2$ |
| 3 | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $b_3$ |

$\checkmark$ $X, Y, Z$

Система 3x3

**47.** Решить систему уравнений.

1) $\begin{cases} (a+en)x+fny+(b+gn)z=(a+en)X+fnY+(b+gn)Z, \\ (c+em)x+fmy+(d+gm)z=(c+em)X+fmY+(d+gm)Z, \\ ex+fy+gz=eX+fY+gZ \end{cases}$

$\checkmark$ $x=X;\ y=Y;\ z=Z$

$\rightarrow$ $n=\ -2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $m=\ -1\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $X=\ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 0$

$\rightarrow$ $Y=\ -2\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $Z=\ 0\,;\ \ -1$

$\rightarrow$ $a=\ 2\,;\ \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ -1$

$\rightarrow$ $b=\ 2\,;\ \ -2$

$\rightarrow$ $c=\ 3\,;\ \ -3$

$\rightarrow$ $d=\ -4\,;\ \ 4$

$\rightarrow$ $e=\ -4\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $f=\ 3\,;\ \ -2$

$\rightarrow$ $g=\ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 0$

Несовместная система 3x3

**48.** Решить систему уравнений

1) $\begin{cases} ax + by + cz = A, \\ ex + fy + gz = B, \\ (an + el)x + (bn + fl)y + (cn + gl)z = An + Bl + C \end{cases}$

$\checkmark$ $\emptyset$

$\rightarrow$ $a =\ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $b =\ -3\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $c =\ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $e =\ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $f =\ -1\,;\ \ -2\,;\ \ 0$

$\rightarrow$ $g =\ -3\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $n =\ 1\,;\ \ -3$

$\rightarrow$ $l =\ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $A =\ 3\,;\ \ -2$

$\rightarrow$ $B =\ -1\,;\ \ -3$

$\rightarrow$ $C =\ -1\,;\ \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

`Неопределенная система 3x3`

**49.** Решить систему уравнений

1) $\begin{cases} ax + by + (-aA_1 - bA_2)z = aB_1 + bB_2, \\ ex + fy + (-eA_1 - fA_2)z = eB_1 + fB_2, \\ (ka + le)x + (kb + lf)y + (k(-aA_1 - bA_2) + l(-eA_1 - fA_2))z = k(aB_1 + bB_2) + l(eB_1 + fB_2) \end{cases}$

$\checkmark$ $x = A_1\alpha + B_1,\ y = A_2\alpha + B_2,\ z = \alpha$

$\to$ $a =\ -1;\ \ 2;\ \ 1$

$\to$ $b =\ -3;\ \ 2$

$\to$ $e =\ 1;\ \ 2$

$\to$ $f =\ -1;\ \ 0$

$\to$ $k =\ 1;\ \ -3$

$\to$ $l =\ 2;\ \ 3$

$\to$ $A_1 =\ 3;\ \ -2$

$\to$ $A_2 =\ 2;\ \ -1$

$\to$ $B_1 =\ -1;\ \ -3$

$\to$ $B_2 =\ 1;\ \ 1$

`Однородная система 3x3 с бесконечным множеством решением`

**50.** Решить систему уравнений

1) $$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ ex + fy + gz = 0, \\ (an + el)x + (bn + fl)y + (cn + gl)z = 0 \end{cases}$$

✓ $x = -\dfrac{ag + cbe - cfa}{abe - afa} z, y = \dfrac{ag}{be - fa} z, z \in \mathbb{R}$

→ $n =\ -2\,;\ \ 3$

→ $a =\ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 1$

→ $b =\ -3\,;\ \ 2$

→ $c =\ 2\,;\ \ 3$

→ $e =\ 1\,;\ \ 2$

→ $f =\ -1\,;\ \ 0$

→ $g =\ -3\,;\ \ 1$

→ $n =\ 1\,;\ \ -3$

→ $l =\ 2\,;\ \ 3$

Однородная система 3x3 с нулевым решением

**51.** Решить систему уравнений

1) $$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ ex + fy + gz = 0, \\ (an + el)x + (bn + fl)y + cnz = 0 \end{cases}$$

$\checkmark$ $\{(0,0,0)\}$

$\to$ $a =$ $-1$ ; $2$ ; $1$

$\to$ $b =$ $-3$ ; $2$

$\to$ $c =$ $2$ ; $3$

$\to$ $e =$ $1$ ; $2$

$\to$ $f =$ $-1$ ; $0$

$\to$ $g =$ $-3$ ; $1$

$\to$ $n =$ $1$ ; $-3$

$\to$ $l =$ $2$ ; $3$

**52.** Найти фундаментальную систему решений однородной системы ЛАУ

1) $$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + ax_3 + 2ax_4 = 0 \\ cx_1 + \dfrac{1+bc}{2}x_2 + gx_3 + hx_4 = 0 \end{cases}$$

$\surd$ $\big(b(g-c)-1; a(c-g); 1; 0\big);$

$\big(b(h-2c)-2; a(2c-h); 0; 1\big)$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; $-1$ ; 3 ; $-3$

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; $-1$ ; 3 ; $-3$

$\rightarrow$ $g =$ 2 ; 4

$\rightarrow$ $h =$ 1 ; 3

Система 4x3

**53.** Решить систему уравнений.

1) $\begin{cases} (a+en)x+fny+(b+gn)z=(a+en)X+fnY+(b+gn)Z, \\ Ax+By+Cz=AX+BY+CZ, \\ (c+em)x+fmy+(d+gm)z=(c+em)X+fmY+(d+gm)Z, \\ ex+fy+gz=eX+fY+gZ \end{cases}$

$\surd$ $x=X;\ y=Y;\ z=Z$

$\rightarrow$ $n=\ -2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $m=\ -1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $X=\ 1\,;\ \ 0\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $Y=\ 1\,;\ \ -2\,;\ \ -3$

$\rightarrow$ $Z=\ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $a=\ 2\,;\ \ -2\,;\ \ 4\,;\ \ -4$

$\rightarrow$ $b=\ 7\,;\ \ -7$

$\rightarrow$ $c=\ 3\,;\ \ -3$

$\rightarrow$ $d=\ -5\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $e=\ -4\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $f=\ 3\,;\ \ -2\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $g=\ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 0$

$\rightarrow$ $A=\ -5\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $B=\ 7\,;\ \ -5$

$\rightarrow$ $C=\ 3\,;\ \ -2$

**54.** Решить систему уравнений.

$\Rightarrow$ $b_{44} = a_{44} + k_{34}a_{34} + k_{24}a_{24} + k_{14}a_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{43} = k_{34}a_{33} + k_{24}a_{23} + k_{14}a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{42} = k_{24}a_{22} + k_{14}a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{41} = k_{14}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{34} = a_{34} + k_{23}a_{24} + k_{13}a_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = a_{33} + k_{23}a_{23} + k_{13}a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{23}a_{22} + k_{13}a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{13}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{24} = a_{24} + k_{12}a_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = a_{23} + k_{12}a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = a_{22} + k_{12}a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{12}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{14} = a_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = a_{11}$

$\Rightarrow$ $k_{14} = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

$\Rightarrow$ $k_{24} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{34} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $a_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $a_{44} = -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $a_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $a_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $a_{14} = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

$\Rightarrow$ $a_{23} = -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $a_{24} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $a_{34} = -2;\ -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $X_1 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $X_2 = -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $X_3 = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $X_4 = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

1) $\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 + b_{14}X_4, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}X_4, \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 = b_{31}X_1 + b_{32}X_2 + b_{33}X_3 + b_{34}X_4, \\ b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 = b_{41}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}X_4 \end{cases}$

$\surd$ $x_1 = X_1;\ x_2 = X_2;\ x_3 = X_3;\ x_4 = X_4$

2) $\begin{cases} b_{23}x_1 + b_{24}x_2 + b_{21}x_3 + b_{22}x_4 = b_{23}X_1 + b_{24}X_2 + b_{21}X_3 + b_{22}X_4, \\ b_{43}x_1 + b_{44}x_2 + b_{41}x_3 + b_{42}x_4 = b_{43}X_1 + b_{44}X_2 + b_{41}X_3 + b_{42}X_4, \\ b_{33}x_1 + b_{34}x_2 + b_{31}x_3 + b_{32}x_4 = b_{33}X_1 + b_{34}X_2 + b_{31}X_3 + b_{32}X_4, \\ b_{13}x_1 + b_{14}x_2 + b_{11}x_3 + b_{12}x_4 = b_{13}X_1 + b_{14}X_2 + b_{11}X_3 + b_{12}X_4 \end{cases}$

$\surd$ $x_1 = X_1;\ x_2 = X_2;\ x_3 = X_3;\ x_4 = X_4$

3) $\begin{cases} b_{24}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{21}x_4 = b_{24}X_1 + b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{21}X_4, \\ b_{34}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{31}x_4 = b_{34}X_1 + b_{32}X_2 + b_{33}X_3 + b_{31}X_4, \\ b_{14}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{11}x_4 = b_{14}X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 + b_{11}X_4, \\ b_{44}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{41}x_4 = b_{44}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{41}X_4 \end{cases}$

$\surd$ $x_1 = X_1;\ x_2 = X_2;\ x_3 = X_3;\ x_4 = X_4$

**55.** Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2 \end{cases}$

√ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha,\ x_2 = \alpha,$ частное решение: $x_1 = X_1,\ x_2 = 0$

→ $a_{21} = \ ka_{11}$

→ $a_{22} = \ ka_{12}$

→ $A_2 = \ kA_1$

→ $k = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

→ $A_1 = \ a_{11}X_1$

→ $X_1 = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

→ $a_{12} = \ -a_{11}z_{11}$

→ $z_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

→ $a_{11} = \ -1\,;\ \ 1$

2) $\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1 \end{cases}$

√ система несовместна

→ $a_{21} = \ ka_{11}$

→ $a_{22} = \ ka_{12}$

→ $A_2 = \ kA_1 + d$

→ $d = \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 5$

→ $k = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

→ $A_1 = \ a_{11}X_1$

→ $X_1 = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

→ $a_{12} = \ -a_{11}z_{11}$

→ $z_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

→ $a_{11} = \ -1\,;\ \ 1$

3) $\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1 \end{cases}$

√ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta,$ частное решение: $x_1 = X_1,\ x_2 = 0,\ x_3 =$

→ $a_{21} = \ ka_{11}$

→ $a_{22} = \ ka_{12}$

→ $a_{23} = \ ka_{13}$

→ $A_2 = \ kA_1$

→ $k = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $A_1 = a_{11}X_1$

$\rightarrow$ $X_1 = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -a_{11}z_{21}$

$\rightarrow$ $z_{21} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{12} = -a_{11}z_{11}$

$\rightarrow$ $z_{11} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{11} = -1\,;\ 1$

4) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2 \end{cases}$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{21} = ka_{11}$

$\rightarrow$ $a_{22} = ka_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = ka_{13}$

$\rightarrow$ $A_2 = kA_1 + d$

$\rightarrow$ $d = -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 5$

$\rightarrow$ $k = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $A_1 = a_{11}X_1$

$\rightarrow$ $X_1 = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -a_{11}z_{21}$

$\rightarrow$ $z_{21} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{12} = -a_{11}z_{11}$

$\rightarrow$ $z_{11} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{11} = -1\,;\ 1$

**56.** Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

⇒ $A_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$

⇒ $A_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$

⇒ $X_1 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

⇒ $X_2 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

⇒ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

⇒ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

⇒ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

⇒ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2 \end{cases}$

√ система имеет единственное решение: $x_1 = X_1,\ x_2 = X_2$

2) $\begin{cases} a_{13}x_1 + a_{12}x_2 + a_{11}x_3 = A_1, \\ a_{23}x_1 + a_{22}x_2 + a_{21}x_3 = A_2 \end{cases}$

√ общее решение: $x_1 = \alpha,\ x_2 = X_2 + z_{12}\alpha,\ x_3 = X_1 + z_{11}\alpha,$ частное решение: $x_1 = 0,\ x_2 = X_2,\ x_3$

→ $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

→ $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

→ $z_{11} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $z_{12} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

3) $\begin{cases} a_{12}x_1 + a_{14}x_2 + a_{11}x_3 + a_{13}x_4 = A_1, \\ a_{22}x_1 + a_{24}x_2 + a_{21}x_3 + a_{23}x_4 = A_2 \end{cases}$

√ общее решение: $x_1 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta,\ x_2 = \beta,\ x_3 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\ x_4 = \alpha,$ частное решени

→ $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

→ $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

→ $a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

→ $a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

→ $z_{11} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $z_{12} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $z_{21} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $z_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

4) $\begin{cases} a_{14}x_1 + a_{15}x_2 + a_{11}x_3 + a_{13}x_4 + a_{12}x_5 = A_1, \\ a_{24}x_1 + a_{25}x_2 + a_{21}x_3 + a_{23}x_4 + a_{22}x_5 = A_2 \end{cases}$

√ общее решение: $x_1 = \beta,\ x_2 = \gamma,\ x_3 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma,\ x_4 = \alpha,\ x_5 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta +$

→ $a_{15} = -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$

$\rightarrow$ $z_{31} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{32} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow$ $z_{21} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

5) $\begin{cases} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = A_3, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2 \end{cases}$

$\surd$ система имеет единственное решение: $x_1 = X_1, \ x_2 = X_2$

$\rightarrow$ $a_{31} = \ ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $A_3 = \ kA_1 + lA_2$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

6) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = A_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2 \end{cases}$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{31} = \ ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $A_3 = \ kA_1 + lA_2 + d$

$\rightarrow$ $d = \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

7) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha, \ x_2 = X_2 + z_{12}\alpha, \ x_3 = \alpha,$ частное решение: $x_1 = X_1, \ x_2 = X_2,$

$\rightarrow$ $a_{31} = \ ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \ ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $A_3 = \; kA_1 + lA_2$

$\rightarrow$ $k = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $l = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \; -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \; -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$$8) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3 \end{cases}$$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{31} = \; ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \; ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \; ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $A_3 = \; kA_1 + lA_2 + d$

$\rightarrow$ $d = \; -3\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 5$

$\rightarrow$ $k = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $l = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \; -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \; -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$$9) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{13}x_2 + a_{12}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_2 + a_{22}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_2 + a_{32}x_3 + a_{34}x_4 = A_3 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta, \;\; x_2 = \alpha, \;\; x_3 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta, \;\; x_4 = \beta,$ частное решени

$\rightarrow$ $a_{31} = \; ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \; ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \; ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \; ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $A_3 = \; kA_1 + lA_2$

$\rightarrow$ $k = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $l = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \; -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \; -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{14} = \; -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \; -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{21} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

10) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3 \end{cases}$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{31} = \ ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \ ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \ ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $A_3 = \ kA_1 + lA_2 + d$

$\rightarrow$ $d = \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{21} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

11) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{14}x_2 + a_{13}x_3 + a_{15}x_4 + a_{12}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{24}x_2 + a_{23}x_3 + a_{25}x_4 + a_{22}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{34}x_2 + a_{33}x_3 + a_{35}x_4 + a_{32}x_5 = A_3 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma, \ x_2 = \beta, \ x_3 = \alpha, \ x_4 = \gamma, \ x_5 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta +$

$\rightarrow$ $a_{31} = \ ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \ ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \ ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \ ka_{15} + la_{25}$

$\rightarrow$ $A_3 = \ kA_1 + lA_2$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$

$\rightarrow$ $z_{31} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{32} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow$ $z_{21} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

12) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3 \end{cases}$$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{31} = \ ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \ ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \ ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \ ka_{15} + la_{25}$

$\rightarrow$ $A_3 = \ kA_1 + lA_2 + d$

$\rightarrow$ $d = \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$

$\rightarrow$ $z_{31} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{32} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow$ $z_{21} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

**57.** Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$\Rightarrow$ $A_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3$

$\Rightarrow$ $A_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3$

$\Rightarrow$ $A_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3$

$\Rightarrow$ $X_1 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $X_2 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $X_3 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33} =$

- $b_{11},\ b_{12},\ b_{13},\ b_{21},\ b_{22},\ b_{23},\ b_{31},\ b_{32},\ b_{33};$
- $b_{22},\ b_{21},\ b_{23},\ b_{12},\ b_{11},\ b_{13},\ b_{32},\ b_{31},\ b_{33};$
- $b_{32},\ b_{31},\ b_{33},\ b_{12},\ b_{11},\ b_{13},\ b_{22},\ b_{21},\ b_{23}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{13}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{12}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = c_{11}$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $c_{23} = -1;\ 1;\ 2$

$$1)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3 \end{cases}$$

$\checkmark$ система имеет единственное решение: $x_1 = X_1,\ x_2 = X_2,\ x_3 = X_3$

2) $\begin{cases} a_{14}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{11}x_4 = A_1, \\ a_{24}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{21}x_4 = A_2, \\ a_{34}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{31}x_4 = A_3 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = \alpha,\ x_2 = X_2 + z_{12}\alpha,\ x_3 = X_3 + z_{13}\alpha,\ x_4 = X_1 + z_{11}\alpha,$ частное решение: $x_1$

$\to$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\to$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\to$ $a_{34} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\to$ $z_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $z_{12} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $z_{13} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

3) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_3 + a_{15}x_4 + a_{13}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_3 + a_{25}x_4 + a_{23}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_3 + a_{35}x_4 + a_{33}x_5 = A_3 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\ x_2 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ x_5 = X_3 + z_{13}\alpha$

$\to$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$

$\to$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$

$\to$ $a_{35} = \ -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$

$\to$ $z_{21} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $z_{22} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $z_{23} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\to$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\to$ $a_{34} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\to$ $z_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $z_{12} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $z_{13} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

4) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = A_4, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3 \end{cases}$

$\surd$ система имеет единственное решение: $x_1 = X_1,\ x_2 = X_2,\ x_3 = X_3$

$\to$ $a_{41} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\to$ $a_{42} = \ ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\to$ $a_{43} = \ ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\to$ $A_4 = \ kA_1 + lA_2 + mA_3$

$\to$ $k = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\to$ $l = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\to$ $m = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

5) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = A_4 \end{cases}$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{41} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = \ ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = \ ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $A_4 = \ kA_1 + lA_2 + mA_3 + d$

$\rightarrow$ $d = \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $m = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

6) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_3 + a_{13}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_3 + a_{23}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_3 + a_{33}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{44}x_3 + a_{43}x_4 = A_4 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha, \ x_2 = X_2 + z_{12}\alpha, \ x_3 = \alpha, \ x_4 = X_3 + z_{13}\alpha,$ частное решение: $x_1$

$\rightarrow$ $a_{41} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = \ ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = \ ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = \ ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $A_4 = \ kA_1 + lA_2 + mA_3$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $m = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

7) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4 \end{cases}$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{41} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = \ ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = \ ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = \ ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $A_4 = \ kA_1 + lA_2 + mA_3 + d$

$\rightarrow$ $d = \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $m = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

8) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta, \ x_2 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta, \ x_3 = X_3 + z_{13}\alpha + z_{23}\beta, \ x_4 = \alpha,$

$\rightarrow$ $a_{41} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = \ ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = \ ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = \ ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $a_{45} = \ ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$

$\rightarrow$ $A_4 = \ kA_1 + lA_2 + mA_3$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $m = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \ -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$

$\rightarrow$ $z_{21} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{23} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$$9) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3 \end{cases}$$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{41} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = \ ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = \ ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = \ ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $a_{45} = \ ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$

$\rightarrow$ $A_4 = \ kA_1 + lA_2 + mA_3 + d$

$\rightarrow$ $d = \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $l = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $m = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \ -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$

$\rightarrow$ $z_{21} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{23} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

**58.** Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$\Rightarrow$ $A_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4$

$\Rightarrow$ $A_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4$

$\Rightarrow$ $A_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4$

$\Rightarrow$ $A_4 = a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4$

$\Rightarrow$ $X_1 = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $X_2 = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $X_3 = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $X_4 = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{11}\,,\ a_{12}\,,\ a_{13}\,,\ a_{14}\,,\ a_{21}\,,\ a_{22}\,,\ a_{23}\,,\ a_{24}\,,\ a_{31}\,,\ a_{32}\,,\ a_{33}\,,\ a_{34}\,,\ a_{41}\,,\ a_{42}\,,\ a_{43}\,,\ a_{44} =$

- $b_{11}\,,\ b_{12}\,,\ b_{13}\,,\ b_{14}\,,\ b_{21}\,,\ b_{22}\,,\ b_{23}\,,\ b_{24}\,,\ b_{31}\,,\ b_{32}\,,\ b_{33}\,,\ b_{34}\,,\ b_{41}\,,\ b_{42}\,,\ b_{43}\,,\ b_{44}\,;$
- $b_{32}\,,\ b_{31}\,,\ b_{34}\,,\ b_{33}\,,\ b_{12}\,,\ b_{11}\,,\ b_{14}\,,\ b_{13}\,,\ b_{22}\,,\ b_{21}\,,\ b_{24}\,,\ b_{23}\,,\ b_{42}\,,\ b_{41}\,,\ b_{44}\,,\ b_{43}\,;$
- $b_{43}\,,\ b_{42}\,,\ b_{41}\,,\ b_{44}\,,\ b_{13}\,,\ b_{12}\,,\ b_{11}\,,\ b_{14}\,,\ b_{33}\,,\ b_{32}\,,\ b_{31}\,,\ b_{34}\,,\ b_{23}\,,\ b_{22}\,,\ b_{21}\,,\ b_{24}$

$\Rightarrow$ $b_{44} = c_{44} + k_{34}c_{34} + k_{24}c_{24} + k_{14}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{43} = k_{34}c_{33} + k_{24}c_{23} + k_{14}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{42} = k_{24}c_{22} + k_{14}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{41} = k_{14}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{34} = c_{34} + k_{23}c_{24} + k_{13}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{13}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{24} = c_{24} + k_{12}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{12}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{14} = c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = c_{11}$

$\Rightarrow$ $k_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $k_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\Rightarrow\ k_{23} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{12} = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow\ c_{11} = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow\ c_{22} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{33} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{44} = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{12} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{13} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{14} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{23} = \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{24} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{34} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

$$1)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4 \end{cases}$$

$\surd$ система имеет единственное решение: $x_1 = X_1,\ x_2 = X_2,\ x_3 = X_3,\ x_4 = X_3$

$$2)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{15}x_3 + a_{14}x_4 + a_{13}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{25}x_3 + a_{24}x_4 + a_{23}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{35}x_3 + a_{34}x_4 + a_{33}x_5 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{45}x_3 + a_{44}x_4 + a_{43}x_5 = A_4 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha,\ x_2 = X_2 + z_{12}\alpha,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = X_4 + z_{14}\alpha,\ x_5 = X_3 + z_{13}\alpha$, част

$\rightarrow\ a_{15} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$

$\rightarrow\ a_{25} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$

$\rightarrow\ a_{35} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$

$\rightarrow\ a_{45} = \ -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$

$\rightarrow\ z_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ z_{12} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ z_{13} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ z_{14} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$$3)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 = A_5 \end{cases}$$

$\surd$ система имеет единственное решение: $x_1 = X_1,\ x_2 = X_2,\ x_3 = X_3,\ x_4 = X_3$

$\rightarrow\ a_{51} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$

$\rightarrow$ $a_{52} = \; ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$

$\rightarrow$ $a_{53} = \; ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$

$\rightarrow$ $a_{54} = \; ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$

$\rightarrow$ $A_5 = \; kA_1 + lA_2 + mA_3 + nA_4$

$\rightarrow$ $k = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow$ $l = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow$ $m = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow$ $n = \; -1\,; \;\; 1$

$$4)\; \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 = A_5 \end{cases}$$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{51} = \; ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$

$\rightarrow$ $a_{52} = \; ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$

$\rightarrow$ $a_{53} = \; ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$

$\rightarrow$ $a_{54} = \; ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$

$\rightarrow$ $A_5 = \; kA_1 + lA_2 + mA_3 + nA_4 + d$

$\rightarrow$ $d = \; -3\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 5$

$\rightarrow$ $k = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow$ $l = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow$ $m = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow$ $n = \; -1\,; \;\; 1$

$$5)\; \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = A_5 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha, \;\; x_2 = X_2 + z_{12}\alpha, \;\; x_3 = X_3 + z_{13}\alpha, \;\; x_4 = X_4 + z_{14}\alpha, \;\; x_5 = \alpha,$ част

$\rightarrow$ $a_{51} = \; ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$

$\rightarrow$ $a_{52} = \; ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$

$\rightarrow$ $a_{53} = \; ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$

$\rightarrow$ $a_{54} = \; ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$

$\rightarrow$ $a_{55} = \; ka_{15} + la_{25} + ma_{35} + na_{45}$

$\rightarrow$ $A_5 = \; kA_1 + lA_2 + mA_3 + nA_4$

$\rightarrow$ $k = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow$ $l = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $m = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $n = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{45} = \ -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{14} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

6) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = A_5 \end{cases}$$

$\surd$ система несовместна

$\rightarrow$ $a_{51} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$

$\rightarrow$ $a_{52} = \ ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$

$\rightarrow$ $a_{53} = \ ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$

$\rightarrow$ $a_{54} = \ ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$

$\rightarrow$ $a_{55} = \ ka_{15} + la_{25} + ma_{35} + na_{45}$

$\rightarrow$ $A_5 = \ kA_1 + lA_2 + mA_3 + nA_4 + d$

$\rightarrow$ $d = \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 5$

$\rightarrow$ $k = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $l = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $m = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $n = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{45} = \ -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{14} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

`Однородная система, ранг 2`

**59.** Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$\Rightarrow$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\Rightarrow$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\Rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

1) $\begin{cases} a_{12}x_1 + a_{14}x_2 + a_{11}x_3 + a_{13}x_4 = 0, \\ a_{22}x_1 + a_{24}x_2 + a_{21}x_3 + a_{23}x_4 = 0 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta,\ x_2 = \beta,\ x_3 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\ x_4 = \alpha,$ базис подпространства ре

$\to$ $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\to$ $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\to$ $a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\to$ $a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\to$ $z_{11} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{12} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{21} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

2) $\begin{cases} a_{14}x_1 + a_{15}x_2 + a_{11}x_3 + a_{13}x_4 + a_{12}x_5 = 0, \\ a_{24}x_1 + a_{25}x_2 + a_{21}x_3 + a_{23}x_4 + a_{22}x_5 = 0 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = \beta,\ x_2 = \gamma,\ x_3 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma,\ x_4 = \alpha,\ x_5 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta + z_{32}\gamma,$ базис

$\to$ $a_{15} = -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$

$\to$ $a_{25} = -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$

$\to$ $z_{31} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{32} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\to$ $a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\to$ $z_{21} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\to$ $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\to$ $z_{11} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{12} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

3) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{13}x_2 + a_{12}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_2 + a_{22}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_2 + a_{32}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta,\ x_4 = \beta,$ базис подпространства ре

$\rightarrow$ $a_{31} = \; ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \; ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \; ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \; ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $k = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $l = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \; -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \; -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{14} = \; -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \; -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{21} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

4) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{14}x_2 + a_{13}x_3 + a_{15}x_4 + a_{12}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{24}x_2 + a_{23}x_3 + a_{25}x_4 + a_{22}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{34}x_2 + a_{33}x_3 + a_{35}x_4 + a_{32}x_5 = 0 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma,\; x_2 = \beta,\; x_3 = \alpha,\; x_4 = \gamma,\; x_5 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta + z_{32}\gamma,$ базис

$\rightarrow$ $a_{31} = \; ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \; ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \; ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \; ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \; ka_{15} + la_{25}$

$\rightarrow$ $k = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $l = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{15} = \; -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \; -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$

$\rightarrow$ $z_{31} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{32} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = \; -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \; -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow$ $z_{21} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{13} = \; -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \; -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

5) $\begin{cases} a_{41}x_1 + a_{43}x_2 + a_{42}x_3 + a_{44}x_4 = 0, \\ a_{11}x_1 + a_{13}x_2 + a_{12}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_2 + a_{22}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_2 + a_{32}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta,\ x_4 = \beta,$ базис подпространства ре

$\rightarrow$ $a_{41} = \ Ka_{11} + La_{21}$

$\rightarrow$ $a_{42} = \ Ka_{12} + La_{22}$

$\rightarrow$ $a_{43} = \ Ka_{13} + La_{23}$

$\rightarrow$ $a_{44} = \ Ka_{14} + La_{24}$

$\rightarrow$ $a_{31} = \ ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = \ ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \ ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $k = \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $l = \ -1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $L = \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $K = \ -1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $a_{13} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow$ $a_{14} = \ -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \ -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{21} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

6) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{14}x_2 + a_{13}x_3 + a_{15}x_4 + a_{12}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{44}x_2 + a_{43}x_3 + a_{45}x_4 + a_{42}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{24}x_2 + a_{23}x_3 + a_{25}x_4 + a_{22}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{34}x_2 + a_{33}x_3 + a_{35}x_4 + a_{32}x_5 = 0 \end{cases}$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \gamma,\ x_5 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta + z_{32}\gamma,$ базис

$\rightarrow$ $a_{41} = \ Ka_{11} + La_{21}$

$\rightarrow$ $a_{42} = \ Ka_{12} + La_{22}$

$\rightarrow$ $a_{43} = \ Ka_{13} + La_{23}$

$\rightarrow$ $a_{44} = \ Ka_{14} + La_{24}$

$\rightarrow$ $a_{45} = \ Ka_{15} + La_{25}$

$\rightarrow$ $a_{31} = \ ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \ ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow \; a_{33} = \; ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow \; a_{34} = \; ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow \; a_{35} = \; ka_{15} + la_{25}$

$\rightarrow \; k = \; -2\,; \;\; 1\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; l = \; -1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \; L = \; -2\,; \;\; 1\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; K = \; -1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \; a_{15} = \; -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$

$\rightarrow \; a_{25} = \; -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$

$\rightarrow \; z_{31} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; z_{32} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; a_{14} = \; -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$

$\rightarrow \; a_{24} = \; -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$\rightarrow \; z_{21} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; z_{22} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; a_{13} = \; -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\rightarrow \; a_{23} = \; -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\rightarrow \; z_{11} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; z_{12} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

`Однородная система, ранг 3`

**60.** Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$\Rightarrow$ $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{21}$, $a_{22}$, $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{32}$, $a_{33}$ =

- $b_{11}$, $b_{12}$, $b_{13}$, $b_{21}$, $b_{22}$, $b_{23}$, $b_{31}$, $b_{32}$, $b_{33}$;
- $b_{22}$, $b_{21}$, $b_{23}$, $b_{12}$, $b_{11}$, $b_{13}$, $b_{32}$, $b_{31}$, $b_{33}$;
- $b_{32}$, $b_{31}$, $b_{33}$, $b_{12}$, $b_{11}$, $b_{13}$, $b_{22}$, $b_{21}$, $b_{23}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{13}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{12}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = c_{11}$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $c_{23} = -1;\ 1;\ 2$

$$1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_3 + a_{15}x_4 + a_{13}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_3 + a_{25}x_4 + a_{23}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_3 + a_{35}x_4 + a_{33}x_5 = 0 \end{cases}$$

√ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\ x_2 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ x_5 = z_{13}\alpha + z_{23}\beta,$ базис по

$\to$ $a_{15} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$

$\to$ $a_{25} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$

$\to$ $a_{35} = -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$

$\to$ $z_{21} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\to$ $a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\to$ $a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\to$ $z_{11} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{13} = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$$2)\;\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\; x_2 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta,\; x_3 = z_{13}\alpha + z_{23}\beta,\; x_4 = \alpha,\; x_5 = \beta,$ базис по

$\rightarrow$ $a_{41} = \; ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = \; ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = \; ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = \; ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $a_{45} = \; ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$

$\rightarrow$ $k = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $l = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $m = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $a_{15} = \; -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \; -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \; -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$

$\rightarrow$ $z_{21} = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{22} = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{23} = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = \; -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{24} = \; -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \; -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{12} = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $z_{13} = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$$3)\;\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta,\; x_2 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta,\; x_3 = z_{13}\alpha + z_{23}\beta,\; x_4 = \alpha,\; x_5 = \beta,$ базис по

$\rightarrow$ $a_{51} = \; Ka_{11} + La_{21} + Ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{52} = \; Ka_{12} + La_{22} + Ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{53} = \; Ka_{13} + La_{23} + Ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{54} = \; Ka_{14} + La_{24} + Ma_{34}$

$\rightarrow \quad a_{55} = \quad Ka_{15} + La_{25} + Ma_{35}$

$\rightarrow \quad a_{41} = \quad ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow \quad a_{42} = \quad ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow \quad a_{43} = \quad ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow \quad a_{44} = \quad ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow \quad a_{45} = \quad ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$

$\rightarrow \quad k = \; -2\,; \;\; 1$

$\rightarrow \quad l = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow \quad m = \; -1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad K = \; 2\,; \;\; -1$

$\rightarrow \quad L = \; -2\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad M = \; -2\,; \;\; 1$

$\rightarrow \quad a_{15} = \quad -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$

$\rightarrow \quad a_{25} = \quad -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$

$\rightarrow \quad a_{35} = \quad -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$

$\rightarrow \quad z_{21} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \quad z_{22} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \quad z_{23} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \quad a_{14} = \quad -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$

$\rightarrow \quad a_{24} = \quad -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$

$\rightarrow \quad a_{34} = \quad -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$\rightarrow \quad z_{11} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \quad z_{12} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \quad z_{13} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

**61.** Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

⇒ $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{14}$, $a_{21}$, $a_{22}$, $a_{23}$, $a_{24}$, $a_{31}$, $a_{32}$, $a_{33}$, $a_{34}$, $a_{41}$, $a_{42}$, $a_{43}$, $a_{44}$ =

- $b_{11}$, $b_{12}$, $b_{13}$, $b_{14}$, $b_{21}$, $b_{22}$, $b_{23}$, $b_{24}$, $b_{31}$, $b_{32}$, $b_{33}$, $b_{34}$, $b_{41}$, $b_{42}$, $b_{43}$, $b_{44}$;
- $b_{32}$, $b_{31}$, $b_{34}$, $b_{33}$, $b_{12}$, $b_{11}$, $b_{14}$, $b_{13}$, $b_{22}$, $b_{21}$, $b_{24}$, $b_{23}$, $b_{42}$, $b_{41}$, $b_{44}$, $b_{43}$;
- $b_{43}$, $b_{42}$, $b_{41}$, $b_{44}$, $b_{13}$, $b_{12}$, $b_{11}$, $b_{14}$, $b_{33}$, $b_{32}$, $b_{31}$, $b_{34}$, $b_{23}$, $b_{22}$, $b_{21}$, $b_{24}$

⇒ $b_{44} = c_{44} + k_{34}c_{34} + k_{24}c_{24} + k_{14}c_{14}$

⇒ $b_{43} = k_{34}c_{33} + k_{24}c_{23} + k_{14}c_{13}$

⇒ $b_{42} = k_{24}c_{22} + k_{14}c_{12}$

⇒ $b_{41} = k_{14}c_{11}$

⇒ $b_{34} = c_{34} + k_{23}c_{24} + k_{13}c_{14}$

⇒ $b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$

⇒ $b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$

⇒ $b_{31} = k_{13}c_{11}$

⇒ $b_{24} = c_{24} + k_{12}c_{14}$

⇒ $b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$

⇒ $b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$

⇒ $b_{21} = k_{12}c_{11}$

⇒ $b_{14} = c_{14}$

⇒ $b_{13} = c_{13}$

⇒ $b_{12} = c_{12}$

⇒ $b_{11} = c_{11}$

⇒ $k_{14} = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

⇒ $k_{24} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

⇒ $k_{34} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

⇒ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

⇒ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

⇒ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

⇒ $c_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

⇒ $c_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

⇒ $c_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

⇒ $c_{44} = -1;\ 1$

⇒ $c_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

⇒ $c_{13} = -2;\ -1;\ 1$

⇒ $c_{14} = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

$\Rightarrow$ $c_{23} = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $c_{24} = \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $c_{34} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1$

$$1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{15}x_3 + a_{14}x_4 + a_{13}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{25}x_3 + a_{24}x_4 + a_{23}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{35}x_3 + a_{34}x_4 + a_{33}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{45}x_3 + a_{44}x_4 + a_{43}x_5 = 0 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha, \ x_2 = z_{12}\alpha, \ x_3 = \alpha, \ x_4 = z_{14}\alpha, \ x_5 = z_{13}\alpha,$ базис подпространства ре

$\rightarrow$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{45} = \ -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{14} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$$2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = 0 \end{cases}$$

$\surd$ общее решение: $x_1 = z_{11}\alpha, \ x_2 = z_{12}\alpha, \ x_3 = z_{13}\alpha, \ x_4 = z_{14}\alpha, \ x_5 = \alpha,$ базис подпространства ре

$\rightarrow$ $a_{51} = \ ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$

$\rightarrow$ $a_{52} = \ ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$

$\rightarrow$ $a_{53} = \ ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$

$\rightarrow$ $a_{54} = \ ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$

$\rightarrow$ $a_{55} = \ ka_{15} + la_{25} + ma_{35} + na_{45}$

$\rightarrow$ $k = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $l = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $m = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $n = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $a_{15} = \ -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{25} = \ -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \ -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$

$\rightarrow$ $a_{45} = \ -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$

$\rightarrow$ $z_{11} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{12} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $z_{14} = \; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

`Модель Леонтьева 2x2`

**62.** Определите вектор $X$ валового выпуска продукции двух отраслей, если известны матрица прямых затрат $A$ и вектор конечного продукта $Y$.

1) $A = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{100} & \frac{a_{12}}{100} \\ \frac{a_{21}}{100} & \frac{a_{22}}{100} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 100x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \\ 100x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \end{pmatrix}$

√ $X = (100x_1, 100x_2)$

→ $x_1 =$ 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

→ $x_2 =$ 5 ; 6 ; 7 ; 8

→ $x_3 =$ 5 ; 6 ; 7 ; 8

→ $a_{11} =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13

→ $a_{12} =$ 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 23 ; 25

→ $a_{21} =$ 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20

→ $a_{22} =$ 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16 ; 17

**63.** Определите вектор $X$ валового выпуска продукции трёх отраслей, если известны матрица прямых затрат $A$ и вектор конечного продукта $Y$.

1) $A = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{100} & \frac{a_{12}}{100} & \frac{a_{13}}{100} \\ \frac{a_{21}}{100} & \frac{a_{22}}{100} & \frac{a_{23}}{100} \\ \frac{a_{31}}{100} & \frac{a_{32}}{100} & \frac{a_{33}}{100} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 100x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ 100x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \\ 100x_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

$\surd$ $X = (100x_1, 100x_2, 100x_3)$

$\rightarrow$ $x_1 =$ 4; 5; 6; 7; 8; 9

$\rightarrow$ $x_2 =$ 5; 6; 7; 8

$\rightarrow$ $x_3 =$ 5; 6; 7; 8

$\rightarrow$ $a_{11} =$ 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

$\rightarrow$ $a_{12} =$ 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 15; 16; 17; 18; 19; 20

$\rightarrow$ $a_{13} =$ 4; 5; 7; 8; 9; 11; 12; 14

$\rightarrow$ $a_{21} =$ 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 12; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20

$\rightarrow$ $a_{22} =$ 3; 4; 6; 7; 8

$\rightarrow$ $a_{23} =$ 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14

$\rightarrow$ $a_{31} =$ 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 16; 17; 18

$\rightarrow$ $a_{32} =$ 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15

$\rightarrow$ $a_{33} =$ 4; 5; 6; 8; 10; 11

**64.** Определите вектор $X$ валового выпуска продукции четырёх отраслей, если известны матрица прямых затрат $A$ и вектор конечного продукта $Y$.

1) $A = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{100} & \frac{a_{12}}{100} & \frac{a_{13}}{100} & \frac{a_{14}}{100} \\ \frac{a_{21}}{100} & \frac{a_{22}}{100} & \frac{a_{23}}{100} & \frac{a_{24}}{100} \\ \frac{a_{31}}{100} & \frac{a_{32}}{100} & \frac{a_{33}}{100} & \frac{a_{34}}{100} \\ \frac{a_{41}}{100} & \frac{a_{42}}{100} & \frac{a_{43}}{100} & \frac{a_{44}}{100} \end{pmatrix}$, $\quad Y = \begin{pmatrix} 100x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 \\ 100x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 \\ 100x_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4 \\ 100x_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4 \end{pmatrix}$

$\surd$ $X = (100x_1, 100x_2, 100x_3, 100x_4)$

$\rightarrow$ $x_1 =$ 4; 5; 6; 7; 8; 9

$\rightarrow$ $x_2 =$ 5; 6; 7; 8

$\rightarrow$ $x_3 =$ 5; 6; 7; 8

$\rightarrow$ $x_4 =$ 5; 6; 7; 8

$\rightarrow$ $a_{11} =$ 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

$\rightarrow$ $a_{12} =$ 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 15

$\rightarrow$ $a_{13} =$ 4; 5; 7; 8; 9; 11; 12; 14

$\rightarrow$ $a_{14} =$ 4; 5; 7; 8; 9; 11; 12; 14; 15; 17

$\rightarrow$ $a_{21} =$ 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 12; 14; 15; 16

$\rightarrow$ $a_{22} =$ 3; 4; 6; 7; 8

$\rightarrow$ $a_{23} =$ 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14

$\rightarrow$ $a_{24} =$ 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11

$\rightarrow$ $a_{31} =$ 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12

$\rightarrow$ $a_{32} =$ 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15

$\rightarrow$ $a_{33} =$ 4; 5; 6; 8; 10; 11

$\rightarrow$ $a_{34} =$ 4; 5; 6; 8; 10; 11; 12; 15; 16

$\rightarrow$ $a_{41} =$ 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11

$\rightarrow$ $a_{42} =$ 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15

$\rightarrow$ $a_{43} =$ 4; 5; 6; 8; 10; 11; 12

$\rightarrow$ $a_{44} =$ 4; 5; 6; 7; 8; 10

**65.** Найти матрицу, обратную данной.

1) $$\begin{pmatrix} a+bk & A & b \\ Bk+am+bkm & Am & B+bm \\ C+ck+an+bkn & An & c+bn \end{pmatrix}$$

✓ $$\frac{1}{ABC}\begin{pmatrix} Amc-AnB & -Ac & AB \\ -amc+BC+bmC+Ban & ac-bC & -aB \\ BkAn-CAm-ckAm & AC+Ack & -ABk \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $A=$ 2 ; 3 ; −3 ; −2

$\rightarrow$ $B=$ −1 ; 1 ; 2

$\rightarrow$ $C=$ −2 ; 1 ; 3

$\rightarrow$ $a=$ 3 ; −1

$\rightarrow$ $b=$ 2 ; 2

$\rightarrow$ $c=$ −2 ; 3

$\rightarrow$ $k=$ −2 ; 4

$\rightarrow$ $m=$ 1 ; 3

$\rightarrow$ $n=$ −3 ; 1

Обратная матрица 2x2

**66.** Найти матрицу, обратную данной

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $A = \dfrac{d}{\Delta}$

$\rightarrow$ $B = -\dfrac{b}{\Delta}$

$\rightarrow$ $C = -\dfrac{c}{\Delta}$

$\rightarrow$ $D = \dfrac{a}{\Delta}$

$\rightarrow$ $\Delta = ka$

$\rightarrow$ $a = k_b k_c$

$\rightarrow$ $b = k_b l_b$

$\rightarrow$ $c = k_c l_c$

$\rightarrow$ $d = k + l_b l_c$

$\rightarrow$ $k = -1\,;\ 1\,;\ -2\,;\ 2\,;\ -3\,;\ 3\,;\ -4\,;\ 4\,;\ -5\,;\ 5$

$\rightarrow$ $k_b = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $l_b = -5\,;\ -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow$ $k_c = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $l_c = -5\,;\ -4 - 3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

**67.** Найти матрицу, обратную данной

$\Rightarrow$ $B_{11} = A_{11} - k_{31}B_{13} - k_{21}B_{12}$

$\Rightarrow$ $B_{21} = -k_{31}B_{23} - k_{21}B_{22}$

$\Rightarrow$ $B_{31} = -k_{31}B_{33} - k_{21}B_{32}$

$\Rightarrow$ $B_{12} = A_{12} - k_{32}B_{13}$

$\Rightarrow$ $B_{22} = A_{22} - k_{32}B_{23}$

$\Rightarrow$ $B_{32} = -k_{32}B_{33}$

$\Rightarrow$ $B_{13} = A_{13}$

$\Rightarrow$ $B_{23} = A_{23}$

$\Rightarrow$ $B_{33} = A_{33}$

$\Rightarrow$ $A_{13} = -k_{13}A_{11}$

$\Rightarrow$ $A_{23} = -k_{23}A_{22}$

$\Rightarrow$ $A_{12} = -k_{12}A_{11}$

$\Rightarrow$ $A_{11} = \dfrac{D}{a_{11}}$

$\Rightarrow$ $A_{22} = \dfrac{D}{a_{22}}$

$\Rightarrow$ $A_{33} = \dfrac{D}{a_{33}}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = a_{33} + k_{32}a_{23} + k_{31}a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{32}a_{22} + k_{31}a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{31}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = a_{23} + k_{21}a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = a_{22} + k_{21}a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{21}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = a_{13}$

$\Rightarrow$ $a_{13} = k_{13}a_{33} + k_{12}a_{23}$

$\Rightarrow$ $a_{12} = k_{12}a_{22}$

$\Rightarrow$ $a_{23} = k_{23}a_{33}$

$\Rightarrow$ $a_{11} = d_1 s_1$

$\Rightarrow$ $a_{22} = d_2 s_2$

$\Rightarrow$ $a_{33} = d_3 s_3$

$\Rightarrow$ $s_1 = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $s_2 = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $s_3 = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ d_1\,,\quad d_2\,,\quad d_3\,,\quad D =$

- $1\,,\quad 1\,,\quad 1\,,\quad 1\,;$
- $1\,,\quad 2\,,\quad 1\,,\quad 2\,;$
- $1\,,\quad 1\,,\quad 3\,,\quad 3\,;$
- $3\,,\quad 1\,,\quad 2\,,\quad 6\,;$
- $3\,,\quad 2\,,\quad 2\,,\quad 6\,;$
- $1\,,\quad 4\,,\quad 1\,,\quad 4\,;$
- $1\,,\quad 4\,,\quad 2\,,\quad 4\,;$
- $1\,,\quad 1\,,\quad 5\,,\quad 5\,;$
- $2\,,\quad 5\,,\quad 2\,,\quad 10\,;$
- $5\,,\quad 3\,,\quad 3\,,\quad 15\,;$
- $7\,,\quad 1\,,\quad 1\,,\quad 7$

$\Rightarrow\ k_{12} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\Rightarrow\ k_{13} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

$\Rightarrow\ k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\Rightarrow\ k_{31} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

$\Rightarrow\ k_{32} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\Rightarrow\ k_{21} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

1) $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$\checkmark\quad \dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$

$\checkmark\quad \dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

**68.** Найти матрицу, обратную данной

$\Rightarrow$ $B_{11} = -k_{41}B_{14} - k_{31}B_{13} - k_{21}B_{12} + A_{11}$

$\Rightarrow$ $B_{21} = -k_{41}B_{24} - k_{31}B_{23} - k_{21}B_{22}$

$\Rightarrow$ $B_{31} = -k_{41}B_{34} - k_{31}B_{33} - k_{21}B_{32}$

$\Rightarrow$ $B_{41} = -k_{41}B_{44} - k_{31}B_{43} - k_{21}B_{42}$

$\Rightarrow$ $B_{12} = -k_{42}B_{14} - k_{32}B_{13} + A_{12}$

$\Rightarrow$ $B_{22} = -k_{42}B_{24} - k_{32}B_{23} + A_{22}$

$\Rightarrow$ $B_{32} = -k_{42}B_{34} - k_{32}B_{33}$

$\Rightarrow$ $B_{42} = -k_{42}B_{44} - k_{32}B_{43}$

$\Rightarrow$ $B_{13} = -k_{43}B_{14} + A_{13}$

$\Rightarrow$ $B_{23} = -k_{43}B_{24} + A_{23}$

$\Rightarrow$ $B_{33} = -k_{43}B_{34} + A_{33}$

$\Rightarrow$ $B_{43} = -k_{43}B_{44}$

$\Rightarrow$ $B_{14} = A_{14}$

$\Rightarrow$ $B_{24} = A_{24}$

$\Rightarrow$ $B_{34} = A_{34}$

$\Rightarrow$ $B_{44} = A_{44}$

$\Rightarrow$ $A_{14} = -k_{14}A_{11}$

$\Rightarrow$ $A_{24} = -k_{24}A_{22}$

$\Rightarrow$ $A_{34} = -k_{34}A_{33}$

$\Rightarrow$ $A_{13} = -k_{13}A_{11}$

$\Rightarrow$ $A_{23} = -k_{23}A_{22}$

$\Rightarrow$ $A_{12} = -k_{12}A_{11}$

$\Rightarrow$ $A_{11} = \dfrac{D}{a_{11}}$

$\Rightarrow$ $A_{22} = \dfrac{D}{a_{22}}$

$\Rightarrow$ $A_{33} = \dfrac{D}{a_{33}}$

$\Rightarrow$ $A_{44} = \dfrac{D}{a_{44}}$

$\Rightarrow$ $b_{44} = k_{41}a_{14} + k_{42}a_{24} + k_{43}a_{34} + a_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{43} = k_{41}a_{13} + k_{42}a_{23} + k_{43}a_{33}$

$\Rightarrow$ $b_{42} = k_{41}a_{12} + k_{42}a_{22}$

$\Rightarrow$ $b_{41} = k_{41}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{34} = k_{31}a_{14} + k_{32}a_{24} + a_{34}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = k_{31}a_{13} + k_{32}a_{23} + a_{33}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{31}a_{12} + k_{32}a_{22}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{31}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{24} = k_{21}a_{14} + a_{24}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = k_{21}a_{13} + a_{23}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = k_{21}a_{12} + a_{22}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{21}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{14} = a_{14}$

$\Rightarrow$ $a_{14} = k_{12}a_{24} + k_{13}a_{34} + k_{14}a_{44}$

$\Rightarrow$ $a_{13} = k_{12}a_{23} + k_{13}a_{33}$

$\Rightarrow$ $a_{12} = k_{12}a_{22}$

$\Rightarrow$ $a_{24} = k_{23}a_{34} + k_{24}a_{44}$

$\Rightarrow$ $a_{23} = k_{23}a_{33}$

$\Rightarrow$ $a_{34} = k_{34}a_{44}$

$\Rightarrow$ $a_{11} = d_1 s_1$

$\Rightarrow$ $a_{22} = d_2 s_2$

$\Rightarrow$ $a_{33} = d_3 s_3$

$\Rightarrow$ $a_{44} = d_4 s_4$

$\Rightarrow$ $s_1 = -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $s_2 = -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $s_3 = -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $s_4 = -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $d_1,\quad d_2,\quad d_3,\quad d_4,\quad D =$

- 1, 1, 1, 1, 1;
- 1, 2, 1, 1, 2;
- 2, 1, 1, 2, 2;
- 1, 1, 3, 1, 3;
- 1, 3, 3, 1, 3;
- 1, 1, 1, 4, 4;
- 1, 4, 4, 1, 4;
- 1, 4, 2, 1, 4;
- 2, 4, 2, 1, 4;
- 1, 1, 1, 5, 5;
- 1, 5, 5, 1, 5;
- 2, 2, 3, 2, 6;
- 3, 2, 2, 3, 6

$\Rightarrow$ $k_{12} = -1;\ 0;\ 1$

$\Rightarrow\ k_{13} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{14} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow\ k_{23} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{24} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{34} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{21} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{31} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{41} = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{32} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{42} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{43} = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$$1)\quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark\quad \frac{1}{D}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}$$

$$2)\quad \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark\quad \frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

**69.** Найти матрицу, обратную данной.

1) $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} & s_{41} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} & s_{42} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{43} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{pmatrix}$

$\rightarrow\ s_{11} = +b_{22}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) - b_{23}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) + b_{24}(b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42})$

$\rightarrow\ s_{12} = -b_{21}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) + b_{23}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) - b_{24}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{13} = +b_{21}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) - b_{22}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) + b_{24}(b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{14} = -b_{21}(b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42}) + b_{22}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41}) - b_{23}(b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{21} = -b_{12}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) + b_{13}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) - b_{14}(b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42})$

$\rightarrow\ s_{22} = +b_{11}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) - b_{13}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) + b_{14}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{23} = -b_{11}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) + b_{12}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) - b_{14}(b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{24} = +b_{11}(b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42}) - b_{12}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41}) + b_{13}(b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{31} = +b_{12}(b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43}) - b_{13}(b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}) + b_{14}(b_{22}b_{43} - b_{23}b_{42})$

$\rightarrow\ s_{32} = -b_{11}(b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43}) + b_{13}(b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41}) - b_{14}(b_{21}b_{43} - b_{23}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{33} = +b_{11}(b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}) - b_{12}(b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41}) + b_{14}(b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{34} = -b_{11}(b_{22}b_{43} - b_{23}b_{42}) + b_{12}(b_{21}b_{43} - b_{23}b_{41}) - b_{13}(b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41})$

$\rightarrow\ s_{41} = -b_{12}(b_{23}b_{34} - b_{24}b_{33}) + b_{13}(b_{22}b_{34} - b_{24}b_{32}) - b_{14}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})$

$\rightarrow\ s_{42} = +b_{11}(b_{23}b_{34} - b_{24}b_{33}) - b_{13}(b_{21}b_{34} - b_{24}b_{31}) + b_{14}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31})$

$\rightarrow\ s_{43} = -b_{11}(b_{22}b_{34} - b_{24}b_{32}) + b_{12}(b_{21}b_{34} - b_{24}b_{31}) - b_{14}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})$

$\rightarrow\ s_{44} = +b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + b_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})$

$\rightarrow\ b_{44} = a_{44} + k_{34}a_{34} + k_{24}a_{24} + k_{14}a_{14}$

$\rightarrow\ b_{43} = k_{34}a_{33} + k_{24}a_{23} + k_{14}a_{13}$

$\rightarrow\ b_{42} = k_{24}a_{22} + k_{14}a_{12}$

$\rightarrow\ b_{41} = k_{14}a_{11}$

$\rightarrow\ b_{34} = a_{34} + k_{23}a_{24} + k_{13}a_{14}$

$\rightarrow\ b_{33} = a_{33} + k_{23}a_{23} + k_{13}a_{13}$

$\rightarrow\ b_{32} = k_{23}a_{22} + k_{13}a_{12}$

$\rightarrow\ b_{31} = k_{13}a_{11}$

$\rightarrow\ b_{24} = a_{24} + k_{12}a_{14}$

$\rightarrow\ b_{23} = a_{23} + k_{12}a_{13}$

$\rightarrow\ b_{22} = a_{22} + k_{12}a_{12}$

$\rightarrow\ b_{21} = k_{12}a_{11}$

$\rightarrow\ b_{14} = a_{14}$

$\rightarrow\ b_{13} = a_{13}$

$\rightarrow\ b_{12} = a_{12}$

$\rightarrow\ b_{11} = a_{11}$

$\rightarrow\ k_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow\ k_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ k_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow\ a_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow\ a_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ a_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ a_{44} = -1\,;\ 1$

$\rightarrow\ a_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ a_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\rightarrow\ a_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow\ a_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ a_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ a_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

**70.** Найти значение матричного многочлена $f(A)$.

$\Rightarrow$ $K = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $B = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $D = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

1) $$f(x) = Kx^3 - Bx^2 + D;\quad A = \begin{pmatrix} n & m \\ l & 0 \end{pmatrix}$$

$\checkmark$ $$f(A) = \begin{pmatrix} n^2(Kn - B) + ml(2Kn - B) + D & m(Kn^2 + Klm - Bn) \\ l(Kn^2 + Kml - Bn) & lm(Kn - B) + D \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $n = -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $m = -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $l = -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

2) $$f(x) = Kx^3 - Bx^2 + D;\quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$\checkmark$ $$f(A) = \begin{pmatrix} a^2(Ka - B) + D & 0 & b(Ka^2 + Kaf + Kf^2 - Ba - Bf) \\ c(Ka^2 + Kad + Kd^2 - Ba - Bd) & d^2(Kd - B) + D & bc(Ka + Kf + Kd - B) \\ 0 & 0 & f^2(Kf - B) + D \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $a = -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $b = -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $c = -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $d = -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $f = -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

Матричное уравнение 2x2 простое

**71.** Решить матричное уравнение.

$\Rightarrow$ $u = -3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $v = -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $x = -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $y = -3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $a = -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\Rightarrow$ $d = -3;\ -1;\ 1;\ 3$

$\Rightarrow$ $b = -2;\ 0;\ 2;\ 4$

$\Rightarrow$ $c = -3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} au + bx & av + by \\ cu + dx & cv + dy \end{pmatrix}$

$\surd$ $X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$

2) $X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua + vc & ub + vd \\ xa + yc & xb + yd \end{pmatrix}$

$\surd$ $X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$

Матричное уравнение 2x2

**72.** Решить матричное уравнение.

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(au+bx)+r(av+by) & q(au+bx)+s(av+by) \\ p(cu+dx)+r(cv+dy) & q(cu+dx)+s(cv+dy) \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$

$\to$ $u = -3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\to$ $v = -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\to$ $x = -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $y = -3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a = -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\to$ $d = -3;\ -1;\ 1;\ 3$

$\to$ $b = -2;\ 0;\ 2;\ 4$

$\to$ $c = -3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $r = -3;\ -1;\ 1;\ 3$

$\to$ $q = -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\to$ $p = -2;\ 0;\ 2;\ 4$

$\to$ $s = -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

Матричное уравнение 3x3

**73.** Решить матричное уравнение.

$\Rightarrow$ $x_{11} = \; -2\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3$

$\Rightarrow$ $x_{12} = \; -1\,;\; 0\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3$

$\Rightarrow$ $x_{13} = \; -2\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3\,;\; 4$

$\Rightarrow$ $x_{21} = \; -2\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3$

$\Rightarrow$ $x_{22} = \; -3\,;\; -2\,;\; 0\,;\; 1\,;\; 2$

$\Rightarrow$ $x_{23} = \; -3\,;\; -2\,;\; 1\,;\; 2$

$\Rightarrow$ $x_{31} = \; -2\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3$

$\Rightarrow$ $x_{32} = \; -2\,;\; 0\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3$

$\Rightarrow$ $x_{33} = \; -3\,;\; -2\,;\; 1\,;\; 2$

$\Rightarrow$ $b_{33} = \; a_{33} + k_{32}a_{23} + k_{31}a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = \; k_{32}a_{22} + k_{31}a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = \; k_{31}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = \; a_{23} + k_{21}a_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = \; a_{22} + k_{21}a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = \; k_{21}a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = \; a_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = \; a_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = \; a_{13}$

$\Rightarrow$ $a_{13} = \; k_{13}a_{33} + k_{12}a_{23}$

$\Rightarrow$ $a_{12} = \; k_{12}a_{22}$

$\Rightarrow$ $a_{23} = \; k_{23}a_{33}$

$\Rightarrow$ $a_{11} = \; d_1 s_1$

$\Rightarrow$ $a_{22} = \; d_2 s_2$

$\Rightarrow$ $a_{33} = \; d_3 s_3$

$\Rightarrow$ $s_1 = \; -1\,;\; 1$

$\Rightarrow$ $s_2 = \; -1\,;\; 1$

$\Rightarrow$ $s_3 = \; -1\,;\; 1$

$\Rightarrow$ $d_1$ ,   $d_2$ ,   $d_3$ ,   $D =$

- 1 , 1 , 1 , 1 ;
- 1 , 2 , 1 , 2 ;
- 1 , 1 , 3 , 3 ;
- 3 , 1 , 2 , 6 ;
- 3 , 2 , 2 , 6 ;
- 1 , 4 , 1 , 4 ;
- 1 , 4 , 2 , 4 ;
- 1 , 1 , 5 , 5 ;
- 2 , 5 , 2 , 10

$\Rightarrow$ $k_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

$\Rightarrow$ $k_{31} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{32} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{21} = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

1) $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}$

$\surd$ $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $y_{11} = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{21} + b_{13}x_{31}$

$\rightarrow$ $y_{12} = b_{11}x_{12} + b_{12}x_{22} + b_{13}x_{32}$

$\rightarrow$ $y_{13} = b_{11}x_{13} + b_{12}x_{23} + b_{13}x_{33}$

$\rightarrow$ $y_{21} = b_{21}x_{11} + b_{22}x_{21} + b_{23}x_{31}$

$\rightarrow$ $y_{22} = b_{21}x_{12} + b_{22}x_{22} + b_{23}x_{32}$

$\rightarrow$ $y_{23} = b_{21}x_{13} + b_{22}x_{23} + b_{23}x_{33}$

$\rightarrow$ $y_{31} = b_{31}x_{11} + b_{32}x_{21} + b_{33}x_{31}$

$\rightarrow$ $y_{32} = b_{31}x_{12} + b_{32}x_{22} + b_{33}x_{32}$

$\rightarrow$ $y_{33} = b_{31}x_{13} + b_{32}x_{23} + b_{33}x_{33}$

2) $X \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}$

$\surd$ $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $y_{11} = x_{11}b_{11} + x_{12}b_{21} + x_{13}b_{31}$

$\rightarrow$ $y_{12} = x_{11}b_{12} + x_{12}b_{22} + x_{13}b_{32}$

$\rightarrow \quad y_{13} = \; x_{11}b_{13} + x_{12}b_{23} + x_{13}b_{33}$

$\rightarrow \quad y_{21} = \; x_{21}b_{11} + x_{22}b_{21} + x_{23}b_{31}$

$\rightarrow \quad y_{22} = \; x_{21}b_{12} + x_{22}b_{22} + x_{23}b_{32}$

$\rightarrow \quad y_{23} = \; x_{21}b_{13} + x_{22}b_{23} + x_{23}b_{33}$

$\rightarrow \quad y_{31} = \; x_{31}b_{11} + x_{32}b_{21} + x_{33}b_{31}$

$\rightarrow \quad y_{32} = \; x_{31}b_{12} + x_{32}b_{22} + x_{33}b_{32}$

$\rightarrow \quad y_{33} = \; x_{31}b_{13} + x_{32}b_{23} + x_{33}b_{33}$

**74.** Найти ранг матрицы.

1) $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$

✓ 1

→ $a_{21} = ka_{11}$

→ $a_{22} = ka_{12}$

→ $a_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

2) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \end{pmatrix}$

✓ 1

→ $a_{21} = ka_{11}$

→ $a_{22} = ka_{12}$

→ $a_{23} = ka_{13}$

→ $a_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

3) $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{24} & a_{23} & a_{21} \end{pmatrix}$

✓ 1

→ $a_{21} = ka_{11}$

→ $a_{22} = ka_{12}$

→ $a_{23} = ka_{13}$

→ $a_{24} = ka_{14}$

→ $a_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

4) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

✓ 2

→ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4\,;\ -2\,;\ 2\,;\ 4\,;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5\,;\ -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3\,;\ 5$

5) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 2

$\rightarrow$ $a_{11} = -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4\,;\ -2\,;\ 2\,;\ 4\,;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5\,;\ -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

6) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 2

$\rightarrow$ $a_{11} = -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4\,;\ -2\,;\ 2\,;\ 4\,;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5\,;\ -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

**75.** Найти ранг матрицы.

1) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

√ 2

→ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

→ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

→ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

→ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

2) $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}$

√ 2

→ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

→ $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$

→ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

→ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

→ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

→ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

3) $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{13} & a_{11} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{23} & a_{21} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{33} & a_{31} & a_{35} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 2

$\rightarrow$ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $a_{35} = ka_{15} + la_{25}$

$\rightarrow$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{15} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

4) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 3

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

5) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 3

$\rightarrow$ $a_{14} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

6) $\begin{pmatrix} a_{24} & a_{21} & a_{25} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{31} & a_{35} & a_{32} & a_{33} \\ a_{14} & a_{11} & a_{15} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 3

$\rightarrow$ $a_{14} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{15} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{35} = -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

**76.** Найти ранг матрицы.

1) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 2

$\rightarrow$ $a_{31} = k_3 a_{11} + l_3 a_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_3 a_{12} + l_3 a_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = k_3 a_{13} + l_3 a_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = k_3 a_{14} + l_3 a_{24}$

$\rightarrow$ $a_{41} = k_4 a_{11} + l_4 a_{21}$

$\rightarrow$ $a_{42} = k_4 a_{12} + l_4 a_{22}$

$\rightarrow$ $a_{43} = k_4 a_{13} + l_4 a_{23}$

$\rightarrow$ $a_{44} = k_4 a_{14} + l_4 a_{24}$

$\rightarrow$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $k_3 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $l_3 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $k_4 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $l_4 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{32} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{42} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 2

$\rightarrow$ $a_{31} = k_3 a_{11} + l_3 a_{21}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_3 a_{12} + l_3 a_{22}$

$\rightarrow$ $a_{33} = k_3 a_{13} + l_3 a_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = k_3 a_{14} + l_3 a_{24}$

$\rightarrow$ $a_{35} = k_3 a_{15} + l_3 a_{25}$

$\rightarrow$ $a_{41} = k_4 a_{11} + l_4 a_{21}$

$\rightarrow$ $a_{42} = k_4a_{12} + l_4a_{22}$

$\rightarrow$ $a_{43} = k_4a_{13} + l_4a_{23}$

$\rightarrow$ $a_{44} = k_4a_{14} + l_4a_{24}$

$\rightarrow$ $a_{45} = k_4a_{15} + l_4a_{25}$

$\rightarrow$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{15} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $k_3 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $l_3 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $k_4 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $l_4 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

3) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \end{pmatrix}$

$\surd$ 3

$\rightarrow$ $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $m = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

4) $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{34} & a_{35} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{14} & a_{15} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$

$\surd$ 3

$\rightarrow$ $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$

$\rightarrow$ $k = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $l = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $m = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{15} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{35} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

5) $\begin{pmatrix} a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} \end{pmatrix}$

$\surd$ 4

$\rightarrow$ $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{41} = k_{14}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{14} = b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{14} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1$

$\rightarrow$ $k_{24} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{34} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{44} = -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

6) $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{22} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{42} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{12} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ 4

$\rightarrow$ $a_{15} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{35} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{45} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{41} = k_{14}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{14} = b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow$ $k_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow \quad k_{34} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad k_{13} = \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad k_{23} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad k_{12} = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow \quad b_{11} = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow \quad b_{22} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad b_{33} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad b_{44} = \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow \quad b_{12} = \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad b_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow \quad b_{14} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1$

$\rightarrow \quad b_{23} = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad b_{24} = \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow \quad b_{34} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1$

**77.** Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

1) $(a_{12}, a_{11})$, $(a_{22}, a_{21})$

√ да

→ $a_{21} = ka_{11}$

→ $a_{22} = ka_{12}$

→ $a_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

2) $(a_{22}, a_{21}, a_{23})$, $(a_{12}, a_{11}, a_{13})$

√ да

→ $a_{21} = ka_{11}$

→ $a_{22} = ka_{12}$

→ $a_{23} = ka_{13}$

→ $a_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

3) $(a_{12}, a_{14}, a_{13}, a_{11})$, $(a_{22}, a_{24}, a_{23}, a_{21})$

√ да

→ $a_{21} = ka_{11}$

→ $a_{22} = ka_{12}$

→ $a_{23} = ka_{13}$

→ $a_{24} = ka_{14}$

→ $a_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

4) $(a_{11}, a_{12})$, $(a_{21}, a_{22})$

√ нет

→ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

→ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

5) $(a_{22}, a_{23}, a_{21})$, $(a_{12}, a_{13}, a_{11})$

$\surd$ нет

$\rightarrow$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

6) $(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$, $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$

$\surd$ нет

$\rightarrow$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

**78.** Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

1) $(a_{22}, a_{21}, a_{23})$, $(a_{12}, a_{11}, a_{13})$, $(a_{32}, a_{31}, a_{33})$

$\surd$ да

$\to$ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

$\to$ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

$\to$ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

$\to$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\to$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\to$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\to$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

2) $(a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{32})$, $(a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{12})$, $(a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{22})$

$\surd$ да

$\to$ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

$\to$ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

$\to$ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

$\to$ $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$

$\to$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\to$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\to$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\to$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

3) $(a_{22}, a_{21}, a_{23})$, $(a_{32}, a_{31}, a_{33})$, $(a_{12}, a_{11}, a_{13})$

$\surd$ нет

$\to$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\to$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1;\ 1;\ 2$

4) $(a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{12})$, $(a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{32})$, $(a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{22})$

$\surd$ нет

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

Проверка линейной зависимости векторов, 4 вектора

**79.** Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

1) $(a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $(a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $(a_{31}, a_{32}, a_{33})$, $(a_{41}, a_{42}, a_{43})$

$\surd$ да

$\to$ $a_{11} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{13} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{21} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{22} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{23} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{31} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{32} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{33} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{41} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{42} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{43} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

2) $(a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{22})$, $(a_{41}, a_{43}, a_{44}, a_{42})$, $(a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{32})$, $(a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{12})$

$\surd$ да

$\to$ $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\to$ $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\to$ $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\to$ $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\to$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $m = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{34} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\to$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\to$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\to$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\to$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\to$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\to$ $a_{13} = b_{13}$

$\to$ $a_{12} = b_{12}$

$\to$ $a_{11} = b_{11}$

$\to$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\to$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\to$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $b_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $b_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\to$ $b_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\to$ $b_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\to$ $b_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\to$ $b_{23} = -1;\ 1;\ 2$

3) $(a_{31}, a_{34}, a_{35}, a_{32}, a_{33})$, $(a_{21}, a_{24}, a_{25}, a_{22}, a_{23})$, $(a_{11}, a_{14}, a_{15}, a_{12}, a_{13})$, $(a_{41}, a_{44}, a_{45}, a_{42}, a_{43})$

$\checkmark$ да

$\to$ $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\to$ $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\to$ $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\to$ $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\to$ $a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$

$\to$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $m = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{15} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{25} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{34} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{35} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\to$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\to$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\to$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\to$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\to$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\to$ $a_{13} = b_{13}$

$\to$ $a_{12} = b_{12}$

$\to$ $a_{11} = b_{11}$

$\to$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\to$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

4) $(a_{42}, a_{43}, a_{41}, a_{44})$, $(a_{22}, a_{23}, a_{21}, a_{24})$, $(a_{12}, a_{13}, a_{11}, a_{14})$, $(a_{32}, a_{33}, a_{31}, a_{34})$

$\surd$ нет

$\rightarrow$ $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{41} = k_{14}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{14} = b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow$ $k_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{44} = -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

5) $(a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, a_{32})$, $(a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{22})$, $(a_{41}, a_{43}, a_{44}, a_{45}, a_{42})$, $(a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{12})$

$\surd$ нет

$\rightarrow$ $a_{15} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{35} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{45} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{41} = k_{14}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{14} = b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow$ $k_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{44} = -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $b_{14} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $b_{24} = \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $b_{34} = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1$

**80.** Выяснить, является ли линейно зависимой каждая из систем векторов в пространстве $\mathbb{R}_{n,m}$.

1) $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{23} & a_{21} \end{pmatrix}$

√ да

→ $a_{21} = ka_{11}$

→ $a_{22} = ka_{12}$

→ $a_{23} = ka_{13}$

→ $a_{24} = ka_{14}$

→ $a_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

2) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$

√ нет

→ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

→ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

→ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

3) $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{34} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{14} & a_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}$

√ да

→ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

→ $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$

→ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

→ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

4) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{14} & a_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{34} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\surd$ нет

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1;\ 1;\ 2$

5) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{41} & a_{43} \\ a_{44} & a_{42} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{34} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{14} & a_{12} \end{pmatrix}$

$\surd$ да

$\rightarrow$ $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $k = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $l = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $m = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

6) $\begin{pmatrix} a_{42} & a_{43} \\ a_{41} & a_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{34} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ нет

$\rightarrow$ $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{41} = k_{14}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow \quad a_{22} = \; b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow \quad a_{21} = \; k_{12}b_{11}$

$\rightarrow \quad a_{14} = \; b_{14}$

$\rightarrow \quad a_{13} = \; b_{13}$

$\rightarrow \quad a_{12} = \; b_{12}$

$\rightarrow \quad a_{11} = \; b_{11}$

$\rightarrow \quad k_{14} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1$

$\rightarrow \quad k_{24} = \; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad k_{34} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad k_{13} = \; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad k_{23} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad k_{12} = \; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \quad b_{11} = \; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \quad b_{22} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad b_{33} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad b_{44} = \; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow \quad b_{12} = \; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad b_{13} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow \quad b_{14} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1$

$\rightarrow \quad b_{23} = \; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad b_{24} = \; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \quad b_{34} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1$

Нахождение координат вектора в базисе, размерность 2x2

**81.** В арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}_{1,2}$ заданы векторы $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{x}$. Показать, что $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ есть базис пространства $\mathbb{R}_{1,2}$ и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе, если:

$\Rightarrow$ $x_1 = \; a_{11}y_1 + a_{12}y_2$

$\Rightarrow$ $x_2 = \; a_{21}y_1 + a_{22}y_2$

$\Rightarrow$ $y_1 = \; -2\,;\; -1\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3\,;\; 4\,;\; 5$

$\Rightarrow$ $y_2 = \; -3\,;\; -2\,;\; -1\,;\; 0\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3\,;\; 4\,;\; 5$

$\Rightarrow$ $a_{11} = \; -3\,;\; -1\,;\; 1\,;\; 3\,;\; 5\,;\; 7$

$\Rightarrow$ $a_{12} = \; -4\,;\; -3\,;\; -2\,;\; -1\,;\; 0\,;\; 1\,;\; 2\,;\; 3\,;\; 4\,;\; 5$

$\Rightarrow$ $a_{21} = \; -4\,;\; -2\,;\; 2\,;\; 4\,;\; 6$

$\Rightarrow$ $a_{22} = \; -5\,;\; -3\,;\; -1\,;\; 1\,;\; 3\,;\; 5$

1) $\mathbf{e_1} = (a_{11}, a_{21}),\;\; \mathbf{e_2} = (a_{12}, a_{22}),\;\; \mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$\surd$ $(y_1, y_2)$

Нахождение координат вектора в базисе, размерность 3x3

**82.** В арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}_{1,3}$ заданы векторы $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, $\mathbf{x}$. Показать, что $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ есть базис пространства $\mathbb{R}_{1,3}$ и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе, если:

$\Rightarrow$ $x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$

$\Rightarrow$ $x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$

$\Rightarrow$ $x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$

$\Rightarrow$ $y_1 = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $y_2 = -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $y_3 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33} =$

- $b_{11},\ b_{12},\ b_{13},\ b_{21},\ b_{22},\ b_{23},\ b_{31},\ b_{32},\ b_{33};$
- $b_{22},\ b_{21},\ b_{23},\ b_{12},\ b_{11},\ b_{13},\ b_{32},\ b_{31},\ b_{33};$
- $b_{32},\ b_{31},\ b_{33},\ b_{12},\ b_{11},\ b_{13},\ b_{22},\ b_{21},\ b_{23}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{13}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{12}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = c_{11}$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $c_{23} = -1;\ 1;\ 2$

1) $\mathbf{e_1} = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\mathbf{e_2} = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $\mathbf{e_3} = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\checkmark$ $(y_1, y_2, y_3)$

Нахождение координат вектора в базисе, размерность 4x4

**83.** В арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}_{1,4}$ заданы векторы $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_4}$, $\mathbf{x}$. Показать, что $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_3})$ есть базис пространства $\mathbb{R}_{1,4}$ и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе, если:

$\Rightarrow$ $x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4$

$\Rightarrow$ $x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4$

$\Rightarrow$ $x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4$

$\Rightarrow$ $x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4$

$\Rightarrow$ $y_1 = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $y_2 = -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $y_3 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $y_4 = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34},\ a_{41},\ a_{42},\ a_{43},\ a_{44} =$

- $b_{11},\ b_{12},\ b_{13},\ b_{14},\ b_{21},\ b_{22},\ b_{23},\ b_{24},\ b_{31},\ b_{32},\ b_{33},\ b_{34},\ b_{41},\ b_{42},\ b_{43},\ b_{44};$
- $b_{32},\ b_{31},\ b_{34},\ b_{33},\ b_{12},\ b_{11},\ b_{14},\ b_{13},\ b_{22},\ b_{21},\ b_{24},\ b_{23},\ b_{42},\ b_{41},\ b_{44},\ b_{43};$
- $b_{43},\ b_{42},\ b_{41},\ b_{44},\ b_{13},\ b_{12},\ b_{11},\ b_{14},\ b_{33},\ b_{32},\ b_{31},\ b_{34},\ b_{23},\ b_{22},\ b_{21},\ b_{24}$

$\Rightarrow$ $b_{44} = c_{44} + k_{34}c_{34} + k_{24}c_{24} + k_{14}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{43} = k_{34}c_{33} + k_{24}c_{23} + k_{14}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{42} = k_{24}c_{22} + k_{14}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{41} = k_{14}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{34} = c_{34} + k_{23}c_{24} + k_{13}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{13}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{24} = c_{24} + k_{12}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{12}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{14} = c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = c_{11}$

$\Rightarrow$ $k_{14} = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

$\Rightarrow$ $k_{24} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{34} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow\ k_{13} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{23} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{12} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow\ c_{11} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow\ c_{22} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{33} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{44} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{12} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{13} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{14} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{23} = -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{24} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{34} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

1) $\mathbf{e_1} = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}),\ \mathbf{e_2} = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}),\ \mathbf{e_3} = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}),\ \mathbf{e_4} = (a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}),\ \mathbf{x} =$

$\surd\ \ (y_1, y_2, y_3, y_4)$

**84.** Записать матрицу перехода от базиса $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ к базису $(\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'})$ и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'})$, если:

$\Rightarrow$ $x_1 = \ a_{11}y_1 + a_{12}y_2$

$\Rightarrow$ $x_2 = \ a_{21}y_1 + a_{22}y_2$

$\Rightarrow$ $y_1 = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $y_2 = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $a_{11} = \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

$\Rightarrow$ $a_{12} = \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $a_{21} = \ -4\,;\ \ -2\,;\ \ 2\,;\ \ 4\,;\ \ 6$

$\Rightarrow$ $a_{22} = \ -5\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 5$

1) $\mathbf{e_1'} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2,\ \mathbf{e_2'} = a_{12}e_1 + a_{22}e_2,\ \mathbf{x} = x_1e_1 + x_2e_2$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $(y_1, y_2)$

**85.** Записать матрицу перехода от базиса

$$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = (1, x, x^2)$$

к базису $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3})$ и найти координаты вектора $\mathbf{a}$ в этих базисах если:

$\Rightarrow$ $x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$

$\Rightarrow$ $x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$

$\Rightarrow$ $x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$

$\Rightarrow$ $y_1 = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $y_2 = -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $y_3 = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33} =$

- $b_{11},\ b_{12},\ b_{13},\ b_{21},\ b_{22},\ b_{23},\ b_{31},\ b_{32},\ b_{33};$
- $b_{22},\ b_{21},\ b_{23},\ b_{12},\ b_{11},\ b_{13},\ b_{32},\ b_{31},\ b_{33};$
- $b_{32},\ b_{31},\ b_{33},\ b_{12},\ b_{11},\ b_{13},\ b_{22},\ b_{21},\ b_{23}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = k_{13}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = k_{12}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = c_{11}$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $c_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\Rightarrow$ $c_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\Rightarrow$ $c_{23} = -1;\ 1;\ 2$

1) $\mathbf{e'_1} = a_{31}x^2 + a_{21}x + a_{11}$, $\mathbf{e'_2} = a_{32}x^2 + a_{22}x + a_{12}$, $\mathbf{e'_3} = a_{33}x^2 + a_{23}x + a_{13}$, $\mathbf{a} = x_3x^2 + x_2x + x_1$

√ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{a} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $\quad \mathbf{a} = y_1e'_1 + y_2e'_2 + y_3e'_3$

**86.** Записать матрицу перехода от базиса

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

к базису $(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ и найти координаты вектора $a$ в этих базисах если:

$\Rightarrow$ $x_1 = \ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4$

$\Rightarrow$ $x_2 = \ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4$

$\Rightarrow$ $x_3 = \ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4$

$\Rightarrow$ $x_4 = \ a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4$

$\Rightarrow$ $y_1 = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $y_2 = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $y_3 = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $y_4 = \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{11}\,,\ a_{12}\,,\ a_{13}\,,\ a_{14}\,,\ a_{21}\,,\ a_{22}\,,\ a_{23}\,,\ a_{24}\,,\ a_{31}\,,\ a_{32}\,,\ a_{33}\,,\ a_{34}\,,\ a_{41}\,,\ a_{42}\,,\ a_{43}\,,\ a_{44} =$

- $b_{11}\,,\ b_{12}\,,\ b_{13}\,,\ b_{14}\,,\ b_{21}\,,\ b_{22}\,,\ b_{23}\,,\ b_{24}\,,\ b_{31}\,,\ b_{32}\,,\ b_{33}\,,\ b_{34}\,,\ b_{41}\,,\ b_{42}\,,\ b_{43}\,,\ b_{44}\,;$
- $b_{32}\,,\ b_{31}\,,\ b_{34}\,,\ b_{33}\,,\ b_{12}\,,\ b_{11}\,,\ b_{14}\,,\ b_{13}\,,\ b_{22}\,,\ b_{21}\,,\ b_{24}\,,\ b_{23}\,,\ b_{42}\,,\ b_{41}\,,\ b_{44}\,,\ b_{43}\,;$
- $b_{43}\,,\ b_{42}\,,\ b_{41}\,,\ b_{44}\,,\ b_{13}\,,\ b_{12}\,,\ b_{11}\,,\ b_{14}\,,\ b_{33}\,,\ b_{32}\,,\ b_{31}\,,\ b_{34}\,,\ b_{23}\,,\ b_{22}\,,\ b_{21}\,,\ b_{24}$

$\Rightarrow$ $b_{44} = \ c_{44} + k_{34}c_{34} + k_{24}c_{24} + k_{14}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{43} = \ k_{34}c_{33} + k_{24}c_{23} + k_{14}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{42} = \ k_{24}c_{22} + k_{14}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{41} = \ k_{14}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{34} = \ c_{34} + k_{23}c_{24} + k_{13}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = \ c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = \ k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = \ k_{13}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{24} = \ c_{24} + k_{12}c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = \ c_{23} + k_{12}c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = \ c_{22} + k_{12}c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = \ k_{12}c_{11}$

$\Rightarrow$ $b_{14} = \ c_{14}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = \ c_{13}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = \ c_{12}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = \ c_{11}$

$\Rightarrow$ $k_{14} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{24} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{34} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{13} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{23} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{12} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow\ c_{11} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow\ c_{22} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{33} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{44} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{12} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{13} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{14} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ c_{23} = -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{24} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ c_{34} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

1) $e'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{31} & a_{41} \end{pmatrix},\ e'_2 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{32} & a_{42} \end{pmatrix},\ e'_3 = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{33} & a_{43} \end{pmatrix},\ e'_4 = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} \\ a_{34} & a_{44} \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$\checkmark\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},\quad \begin{aligned} a &= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \\ a &= y_1e'_1 + y_2e'_2 + y_3e'_3 + y_4e'_4 \end{aligned}$

**87.** Показать что система векторов $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$ пространства $\mathbb{R}_{1,4}$ или $\mathbb{R}_{1,5}$ линейно независима, и дополнить ее до базиса всего пространства:

1) $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{12})$, $\mathbf{a_2} = (a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{32})$, $\mathbf{a_3} = (a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{22})$

√ $\mathbf{a_4} = (0, 0, 1, 0)$

→ $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

→ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

→ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

→ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

→ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

→ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

→ $a_{13} = b_{13}$

→ $a_{12} = b_{12}$

→ $a_{11} = b_{11}$

→ $k_{13} = -1; 0; 1; 2$

→ $k_{23} = -2; -1; 1; 2$

→ $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→ $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→ $b_{22} = -2; -1; 1; 2$

→ $b_{33} = -2; -1; 1; 2$

→ $b_{12} = -1; 0; 1; 2$

→ $b_{13} = -2; -1; 1$

→ $b_{23} = -1; 1; 2$

2) $\mathbf{a_1} = (a_{24}, a_{21}, a_{25}, a_{22}, a_{23})$, $\mathbf{a_2} = (a_{24}, a_{31}, a_{35}, a_{32}, a_{33})$, $\mathbf{a_3} = (a_{14}, a_{11}, a_{15}, a_{12}, a_{13})$

√ $\mathbf{a_4} = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a_5} = (0, 0, 1, 0, 0)$

→ $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

→ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

→ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2$

**88.** Найти ранг и какой-либо базис системы векторов:

1) $\mathbf{a_1} = (a_{22}, a_{12}, a_{32})$, $\mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{11}, a_{31})$, $\mathbf{a_3} = (a_{23}, a_{13}, a_{33})$

√ $2, (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})$

→ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

→ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

→ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

→ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

2) $\mathbf{a_1} = (a_{31}, a_{11}, a_{21})$, $\mathbf{a_2} = (a_{33}, a_{13}, a_{23})$, $\mathbf{a_3} = (a_{34}, a_{14}, a_{24})$, $\mathbf{a_4} = (a_{32}, a_{12}, a_{22})$

√ $2, (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_4})$

→ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

→ $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$

→ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

→ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

→ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

→ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

→ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

→ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

→ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

3) $\mathbf{a_1} = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $\mathbf{a_2} = (a_{14}, a_{24}, a_{34})$, $\mathbf{a_3} = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$, $\mathbf{a_4} = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\mathbf{a_5} = (a_{15}, a_{25}, a_{35})$

√ $2, (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_4})$

→ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

$\rightarrow$ $a_{34} = \; ka_{14} + la_{24}$

$\rightarrow$ $a_{35} = \; ka_{15} + la_{25}$

$\rightarrow$ $a_{11} = \; -3\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 3\,; \;\; 5\,; \;\; 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = \; -4\,; \;\; -2\,; \;\; 2\,; \;\; 4\,; \;\; 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = \; -5\,; \;\; -3\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 3\,; \;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = \; -5\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{15} = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{23} = \; -5\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $a_{24} = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 5$

$\rightarrow$ $k = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $l = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

4) $\mathbf{a_1} = (a_{22}, a_{32}, a_{12}), \;\; \mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{31}, a_{11}), \;\; \mathbf{a_3} = (a_{23}, a_{33}, a_{13})$

$\checkmark$ $3, (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$

$\rightarrow$ $a_{33} = \; b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = \; k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = \; k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = \; b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = \; b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = \; k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = \; b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = \; b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = \; b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = \; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = \; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = \; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = \; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = \; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

5) $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{31}, a_{21}), \;\; \mathbf{a_2} = (a_{13}, a_{33}, a_{23}), \;\; \mathbf{a_3} = (a_{14}, a_{34}, a_{24}), \;\; \mathbf{a_4} = (a_{12}, a_{32}, a_{22}),$

$\checkmark$ $3, (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_4})$

$\rightarrow$ $a_{14} = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 5$

$\rightarrow\ a_{24} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow\ a_{34} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow\ a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow\ a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow\ a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow\ a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow\ a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow\ a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow\ a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow\ a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow\ a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow\ k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow\ b_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow\ b_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ b_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow\ b_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\rightarrow\ b_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

6) $\mathbf{a_1} = (a_{24}, a_{34}, a_{14}),\ \mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{31}, a_{11}),\ \mathbf{a_3} = (a_{25}, a_{35}, a_{15}),\ \mathbf{a_4} = (a_{22}, a_{32}, a_{12}),\ \mathbf{a_5} = (a_{23}, a_{33}, a_{13})$

$\surd$ $3, (\mathbf{a_2}, \mathbf{a_4}, \mathbf{a_5})$

$\rightarrow\ a_{14} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow\ a_{15} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow\ a_{24} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow\ a_{25} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow\ a_{34} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow\ a_{35} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow\ a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow\ a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow\ a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow\ a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow\ a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow\ a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow\ a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow\ a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow\ a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow\ k_{13} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ k_{23} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ k_{12} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow\ b_{11} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow\ b_{22} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ b_{33} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ b_{12} = -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ b_{13} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

$\rightarrow\ b_{23} = -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

**89.** Найти ранг и какой-либо базис системы векторов:

1) $f_1 = a_{22}x^3 + a_{32}x^2 + a_{12}x + a_{42},\ f_2 = a_{21}x^3 + a_{31}x^2 + a_{11}x + a_{41},\ f_3 = a_{23}x^3 + a_{33}x^2 + a_{13}x + a_{43},$

$\checkmark$ $2, (f_1, f_2)$

$\to$ $a_{31} = k_3a_{11} + l_3a_{21}$

$\to$ $a_{32} = k_3a_{12} + l_3a_{22}$

$\to$ $a_{33} = k_3a_{13} + l_3a_{23}$

$\to$ $a_{34} = k_3a_{14} + l_3a_{24}$

$\to$ $a_{41} = k_4a_{11} + l_4a_{21}$

$\to$ $a_{42} = k_4a_{12} + l_4a_{22}$

$\to$ $a_{43} = k_4a_{13} + l_4a_{23}$

$\to$ $a_{44} = k_4a_{14} + l_4a_{24}$

$\to$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\to$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\to$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\to$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{13} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $a_{23} = -5;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\to$ $k_3 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $l_3 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $k_4 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $l_4 = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

2) $f_1 = a_{11}x^3 + a_{31}x^2 + a_{41}x + a_{21},\ f_2 = a_{13}x^3 + a_{33}x^2 + a_{43}x + a_{23},\ f_3 = a_{14}x^3 + a_{34}x^2 + a_{44}x + a_{24},$

$\checkmark$ $2, (f_1, f_5)$

$\to$ $a_{31} = k_3a_{11} + l_3a_{21}$

$\to$ $a_{32} = k_3a_{12} + l_3a_{22}$

$\to$ $a_{33} = k_3a_{13} + l_3a_{23}$

$\to$ $a_{34} = k_3a_{14} + l_3a_{24}$

$\to$ $a_{35} = k_3a_{15} + l_3a_{25}$

$\to$ $a_{41} = k_4a_{11} + l_4a_{21}$

$\to$ $a_{42} = k_4a_{12} + l_4a_{22}$

$\to$ $a_{43} = k_4a_{13} + l_4a_{23}$

$\to$ $a_{44} = k_4a_{14} + l_4a_{24}$

$\to$ $a_{45} = k_4a_{15} + l_4a_{25}$

$\to$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\rightarrow$ $a_{12} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{21} = -4\,;\ -2\,;\ 2\,;\ 4\,;\ 6$

$\rightarrow$ $a_{22} = -5\,;\ -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{13} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{15} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{23} = -5\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $k_3 = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $l_3 = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $k_4 = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $l_4 = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

3) $f_1 = a_{21}x^3 + a_{41}x^2 + a_{31}x + a_{11},\ f_2 = a_{23}x^3 + a_{43}x^2 + a_{33}x + a_{13},\ f_3 = a_{24}x^3 + a_{44}x^2 + a_{34}x + a_{14},$

$\surd$ $3, (f_1, f_2, f_4)$

$\rightarrow$ $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $k = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $l = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $m = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2;\ -1;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1;\ 1;\ 2$

4) $f_1 = a_{31}x^3 + a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{41},\ f_2 = a_{34}x^3 + a_{24}x^2 + a_{14}x + a_{44},\ f_3 = a_{35}x^3 + a_{25}x^2 + a_{15}x + a_{45},$

$\checkmark$ $3, (f_1, f_4, f_5)$

$\rightarrow$ $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$

$\rightarrow$ $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$

$\rightarrow$ $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$

$\rightarrow$ $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

$\rightarrow$ $a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$

$\rightarrow$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $m = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $a_{14} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{15} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{24} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{34} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{35} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1;\ 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2;\ -1;\ 1;\ 2$

$\to$ $b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $b_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\to$ $b_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

5) $f_1 = a_{42}x^3 + a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{32},\ f_2 = a_{43}x^3 + a_{23}x^2 + a_{13}x + a_{33},\ f_3 = a_{41}x^3 + a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{31},$

$\surd$ $4, (f_1, f_2, f_3, f_4)$

$\to$ $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$

$\to$ $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$

$\to$ $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$

$\to$ $a_{41} = k_{14}b_{11}$

$\to$ $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$

$\to$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\to$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\to$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\to$ $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$

$\to$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\to$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\to$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\to$ $a_{14} = b_{14}$

$\to$ $a_{13} = b_{13}$

$\to$ $a_{12} = b_{12}$

$\to$ $a_{11} = b_{11}$

$\to$ $k_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\to$ $k_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $k_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\to$ $b_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\to$ $b_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $b_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $b_{44} = -1\,;\ 1$

$\to$ $b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $b_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\to$ $b_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\to$ $b_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $b_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\to$ $b_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

6) $f_1 = a_{31}x^3 + a_{21}x^2 + a_{41}x + a_{11},\ f_2 = a_{33}x^3 + a_{23}x^2 + a_{43}x + a_{13},\ f_3 = a_{34}x^3 + a_{24}x^2 + a_{44}x + a_{14},$

$\checkmark$ $4, (f_1, f_2, f_3, f_5)$

$\rightarrow$ $a_{15} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{25} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{35} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{45} = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5$

$\rightarrow$ $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{41} = k_{14}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{31} = k_{13}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{21} = k_{12}b_{11}$

$\rightarrow$ $a_{14} = b_{14}$

$\rightarrow$ $a_{13} = b_{13}$

$\rightarrow$ $a_{12} = b_{12}$

$\rightarrow$ $a_{11} = b_{11}$

$\rightarrow$ $k_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow$ $k_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{34} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{13} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_{12} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{11} = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_{22} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{33} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{44} = -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{12} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{13} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\rightarrow$ $b_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{24} = -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $b_{34} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1$

**90.** Найти базис ядра и базис образа линейного оператора, заданного матрицей $A$:

1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\surd$ базис ядра: $\left(\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, базис образа: $\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}\right)$

$\to$ $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

$\to$ $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

$\to$ $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

$\to$ $k = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $l = -2;\ -1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$

$\to$ $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$

$\to$ $z_{11} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $z_{12} = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $a_{11} = -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7$

$\to$ $a_{12} = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\to$ $a_{21} = -4;\ -2;\ 2;\ 4;\ 6$

$\to$ $a_{22} = -5;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5$

2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\surd$ базис ядра: $\left(\begin{bmatrix} -l \\ k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ m \\ -l \end{bmatrix}\right)$, базис образа: $\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right)$

$\to$ $a_{11} = kb_1$

$\to$ $a_{21} = kb_2$

$\to$ $a_{31} = kb_3$

$\to$ $a_{12} = lb_1$

$\to$ $a_{22} = lb_2$

$\to$ $a_{32} = lb_3$

$\to$ $a_{13} = mb_1$

$\to$ $a_{23} = mb_2$

$\to$ $a_{33} = mb_3$

$\to$ $k = -4;\ -2;\ 2;\ 4$

$\to$ $l = -9;\ -3;\ 3;\ 9$

$\to$ $m = -7;\ -5;\ 5;\ 7$

$\rightarrow$ $b_1 = -2\,;\ -1\,;\ 4$

$\rightarrow$ $b_2 = -3\,;\ 1\,;\ 3$

$\rightarrow$ $b_3 = -5\,;\ 2\,;\ 3$

Вычисление матрицы оператора в новом базисе, 2x2

**91.** Дана матрица $A$ линейного оператора $\varphi$ векторного пространства $U_n$ в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$:

$\Rightarrow$ $c_{11} = Ab_{11} + Bb_{21}$

$\Rightarrow$ $c_{12} = Ab_{12} + Bb_{22}$

$\Rightarrow$ $c_{21} = Cb_{11} + Db_{21}$

$\Rightarrow$ $c_{22} = Cb_{12} + Db_{22}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = a_{11}a + a_{12}c$

$\Rightarrow$ $b_{12} = a_{11}b + a_{12}d$

$\Rightarrow$ $b_{21} = a_{21}a + a_{22}c$

$\Rightarrow$ $b_{22} = a_{21}b + a_{22}d$

$\Rightarrow$ $a_{11} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{12} = -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{21} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{22} = 3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $A = \dfrac{d}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $B = -\dfrac{b}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $C = -\dfrac{c}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $D = \dfrac{a}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $a = d(bc + \Delta)$

$\Rightarrow$ $\Delta = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $d = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $b = -3\,;\ \ -2\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $c = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{l} e'_1 = ae_1 + ce_2 \\ e'_2 = be_1 + de_2 \end{array}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{l} e_1 = ae'_1 + ce'_2 \\ e_2 = be'_1 + de'_2 \end{array}$

$\checkmark$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Вычисление матрицы оператора в новом базисе, 3x3

**92.** Дана матрица $A$ линейного оператора $\varphi$ векторного пространства $U_n$ в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$:

$\Rightarrow$ $c_{11} = S_{11}b_{11} + S_{12}b_{21} + S_{13}b_{31}$

$\Rightarrow$ $c_{12} = S_{11}b_{12} + S_{12}b_{22} + S_{13}b_{32}$

$\Rightarrow$ $c_{13} = S_{11}b_{13} + S_{12}b_{23} + S_{13}b_{33}$

$\Rightarrow$ $c_{21} = S_{21}b_{11} + S_{22}b_{21} + S_{23}b_{31}$

$\Rightarrow$ $c_{22} = S_{21}b_{12} + S_{22}b_{22} + S_{23}b_{32}$

$\Rightarrow$ $c_{23} = S_{21}b_{13} + S_{22}b_{23} + S_{23}b_{33}$

$\Rightarrow$ $c_{31} = S_{31}b_{11} + S_{32}b_{21} + S_{33}b_{31}$

$\Rightarrow$ $c_{32} = S_{31}b_{12} + S_{32}b_{22} + S_{33}b_{32}$

$\Rightarrow$ $c_{33} = S_{31}b_{13} + S_{32}b_{23} + S_{33}b_{33}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = a_{11}s_{11} + a_{12}s_{21} + a_{13}s_{31}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = a_{11}s_{12} + a_{12}s_{22} + a_{13}s_{32}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = a_{11}s_{13} + a_{12}s_{23} + a_{13}s_{33}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = a_{21}s_{11} + a_{22}s_{21} + a_{23}s_{31}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = a_{21}s_{12} + a_{22}s_{22} + a_{23}s_{32}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = a_{21}s_{13} + a_{22}s_{23} + a_{23}s_{33}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = a_{31}s_{11} + a_{32}s_{21} + a_{33}s_{31}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = a_{31}s_{12} + a_{32}s_{22} + a_{33}s_{32}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = a_{31}s_{13} + a_{32}s_{23} + a_{33}s_{33}$

$\Rightarrow$ $a_{11} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{12} = -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{13} = -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{21} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{22} = 3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $a_{23} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{31} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{32} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_{33} = -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $S_{11} = R_{11} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12}$

$\Rightarrow$ $S_{21} = -k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$

$\Rightarrow$ $S_{31} = -k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$

$\Rightarrow$ $S_{12} = R_{12} - k_{32}S_{13}$

$\Rightarrow$ $S_{22} = R_{22} - k_{32}S_{23}$

$\Rightarrow$ $S_{32} = -k_{32}S_{33}$

$\Rightarrow$ $S_{13} = R_{13}$

$\Rightarrow$ $S_{23} = R_{23}$

$$\Rightarrow \quad S_{33} = \quad R_{33}$$
$$\Rightarrow \quad R_{13} = \quad -k_{13}R_{11}$$
$$\Rightarrow \quad R_{23} = \quad -k_{23}R_{22}$$
$$\Rightarrow \quad R_{12} = \quad -k_{12}R_{11}$$
$$\Rightarrow \quad R_{11} = \quad \frac{1}{r_{11}}$$
$$\Rightarrow \quad R_{22} = \quad \frac{1}{r_{22}}$$
$$\Rightarrow \quad R_{33} = \quad \frac{1}{r_{33}}$$
$$\Rightarrow \quad s_{33} = \quad r_{33} + k_{32}r_{23} + k_{31}r_{13}$$
$$\Rightarrow \quad s_{32} = \quad k_{32}r_{22} + k_{31}r_{12}$$
$$\Rightarrow \quad s_{31} = \quad k_{31}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{23} = \quad r_{23} + k_{21}r_{13}$$
$$\Rightarrow \quad s_{22} = \quad r_{22} + k_{21}r_{12}$$
$$\Rightarrow \quad s_{21} = \quad k_{21}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{11} = \quad r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{12} = \quad r_{12}$$
$$\Rightarrow \quad s_{13} = \quad r_{13}$$
$$\Rightarrow \quad r_{13} = \quad k_{13}r_{33} + k_{12}r_{23}$$
$$\Rightarrow \quad r_{12} = \quad k_{12}r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad r_{23} = \quad k_{23}r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad r_{11} = \quad -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad r_{22} = \quad -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad r_{33} = \quad -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{12} = \quad -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{13} = \quad -2\,; \quad -1\,; \quad 0\,; \quad 1\,; \quad 2$$
$$\Rightarrow \quad k_{23} = \quad -2\,; \quad -1\,; \quad 1\,; \quad 2$$
$$\Rightarrow \quad k_{31} = \quad -2\,; \quad -1\,; \quad 0\,; \quad 1\,; \quad 2$$
$$\Rightarrow \quad k_{32} = \quad -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{21} = \quad -1\,; \quad 1$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e'_1 &= s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + s_{31}e_3 \\ e'_2 &= s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + s_{32}e_3 \\ e'_3 &= s_{13}e_1 + s_{23}e_2 + s_{33}e_3 \end{aligned}$$

$$\surd \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$, $\quad \begin{aligned} e_1 &= s_{11}e'_1 + s_{21}e'_2 + s_{31}e'_3 \\ e_2 &= s_{12}e'_1 + s_{22}e'_2 + s_{32}e'_3 \\ e_3 &= s_{13}e'_1 + s_{23}e'_2 + s_{33}e'_3 \end{aligned}$

$\surd \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

**93.** Дана матрица $A$ линейного оператора $\varphi$ векторного пространства $U_n$ в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$:

$\Rightarrow$ $c_{11} = S_{11}b_{11} + S_{12}b_{21} + S_{13}b_{31} + S_{14}b_{41}$

$\Rightarrow$ $c_{12} = S_{11}b_{12} + S_{12}b_{22} + S_{13}b_{32} + S_{14}b_{42}$

$\Rightarrow$ $c_{13} = S_{11}b_{13} + S_{12}b_{23} + S_{13}b_{33} + S_{14}b_{43}$

$\Rightarrow$ $c_{14} = S_{11}b_{14} + S_{12}b_{24} + S_{13}b_{34} + S_{14}b_{44}$

$\Rightarrow$ $c_{21} = S_{21}b_{11} + S_{22}b_{21} + S_{23}b_{31} + S_{24}b_{41}$

$\Rightarrow$ $c_{22} = S_{21}b_{12} + S_{22}b_{22} + S_{23}b_{32} + S_{24}b_{42}$

$\Rightarrow$ $c_{23} = S_{21}b_{13} + S_{22}b_{23} + S_{23}b_{33} + S_{24}b_{43}$

$\Rightarrow$ $c_{24} = S_{21}b_{14} + S_{22}b_{24} + S_{23}b_{34} + S_{24}b_{44}$

$\Rightarrow$ $c_{31} = S_{31}b_{11} + S_{32}b_{21} + S_{33}b_{31} + S_{34}b_{41}$

$\Rightarrow$ $c_{32} = S_{31}b_{12} + S_{32}b_{22} + S_{33}b_{32} + S_{34}b_{42}$

$\Rightarrow$ $c_{33} = S_{31}b_{13} + S_{32}b_{23} + S_{33}b_{33} + S_{34}b_{43}$

$\Rightarrow$ $c_{34} = S_{31}b_{14} + S_{32}b_{24} + S_{33}b_{34} + S_{34}b_{44}$

$\Rightarrow$ $c_{41} = S_{41}b_{11} + S_{42}b_{21} + S_{43}b_{31} + S_{44}b_{41}$

$\Rightarrow$ $c_{42} = S_{41}b_{12} + S_{42}b_{22} + S_{43}b_{32} + S_{44}b_{42}$

$\Rightarrow$ $c_{43} = S_{41}b_{13} + S_{42}b_{23} + S_{43}b_{33} + S_{44}b_{43}$

$\Rightarrow$ $c_{44} = S_{41}b_{14} + S_{42}b_{24} + S_{43}b_{34} + S_{44}b_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = a_{11}s_{11} + a_{12}s_{21} + a_{13}s_{31} + a_{14}s_{41}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = a_{11}s_{12} + a_{12}s_{22} + a_{13}s_{32} + a_{14}s_{42}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = a_{11}s_{13} + a_{12}s_{23} + a_{13}s_{33} + a_{14}s_{43}$

$\Rightarrow$ $b_{14} = a_{11}s_{14} + a_{12}s_{24} + a_{13}s_{34} + a_{14}s_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = a_{21}s_{11} + a_{22}s_{21} + a_{23}s_{31} + a_{24}s_{41}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = a_{21}s_{12} + a_{22}s_{22} + a_{23}s_{32} + a_{24}s_{42}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = a_{21}s_{13} + a_{22}s_{23} + a_{23}s_{33} + a_{24}s_{43}$

$\Rightarrow$ $b_{24} = a_{21}s_{14} + a_{22}s_{24} + a_{23}s_{34} + a_{24}s_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = a_{31}s_{11} + a_{32}s_{21} + a_{33}s_{31} + a_{34}s_{41}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = a_{31}s_{12} + a_{32}s_{22} + a_{33}s_{32} + a_{34}s_{42}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = a_{31}s_{13} + a_{32}s_{23} + a_{33}s_{33} + a_{34}s_{43}$

$\Rightarrow$ $b_{34} = a_{31}s_{14} + a_{32}s_{24} + a_{33}s_{34} + a_{34}s_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{41} = a_{41}s_{11} + a_{42}s_{21} + a_{43}s_{31} + a_{44}s_{41}$

$\Rightarrow$ $b_{42} = a_{41}s_{12} + a_{42}s_{22} + a_{43}s_{32} + a_{44}s_{42}$

$\Rightarrow$ $b_{43} = a_{41}s_{13} + a_{42}s_{23} + a_{43}s_{33} + a_{44}s_{43}$

$\Rightarrow$ $b_{44} = a_{41}s_{14} + a_{42}s_{24} + a_{43}s_{34} + a_{44}s_{44}$

$\Rightarrow$ $a_{11} = 1\,;\;\; 2$

$\Rightarrow$ $a_{12} = -1\,;\;\; 3$

$\Rightarrow$ $a_{13} = -1\,;\;\; 1$

$\Rightarrow\ a_{14} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{21} = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\Rightarrow\ a_{22} = -5\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{23} = -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\Rightarrow\ a_{24} = -2\,;\ -1\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{31} = -3\,;\ -1\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{32} = -1\,;\ 1\,;\ 3$

$\Rightarrow\ a_{33} = -3\,;\ -1\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{34} = -1\,;\ 1\,;\ 0\,;\ 5$

$\Rightarrow\ a_{31} = -3\,;\ -1\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{32} = -2\,;\ 2$

$\Rightarrow\ a_{33} = -4\,;\ -2\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{34} = -1\,;\ 2\,;\ 4$

$\Rightarrow\ a_{41} = -4\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 2$

$\Rightarrow\ a_{42} = -1\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{43} = -3\,;\ -2\,;\ 0\,;\ 1$

$\Rightarrow\ a_{44} = -1\,;\ 2$

$\Rightarrow\ S_{11} = -k_{41}S_{14} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} + R_{11}$

$\Rightarrow\ S_{21} = -k_{41}S_{24} - k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$

$\Rightarrow\ S_{31} = -k_{41}S_{34} - k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$

$\Rightarrow\ S_{41} = -k_{41}S_{44} - k_{31}S_{43} - k_{21}S_{42}$

$\Rightarrow\ S_{12} = -k_{42}S_{14} - k_{32}S_{13} + R_{12}$

$\Rightarrow\ S_{22} = -k_{42}S_{24} - k_{32}S_{23} + R_{22}$

$\Rightarrow\ S_{32} = -k_{42}S_{34} - k_{32}S_{33}$

$\Rightarrow\ S_{42} = -k_{42}S_{44} - k_{32}S_{43}$

$\Rightarrow\ S_{13} = -k_{43}S_{14} + R_{13}$

$\Rightarrow\ S_{23} = -k_{43}S_{24} + R_{23}$

$\Rightarrow\ S_{33} = -k_{43}S_{34} + R_{33}$

$\Rightarrow\ S_{43} = -k_{43}S_{44}$

$\Rightarrow\ S_{14} = R_{14}$

$\Rightarrow\ S_{24} = R_{24}$

$\Rightarrow\ S_{34} = R_{34}$

$\Rightarrow\ S_{44} = R_{44}$

$\Rightarrow\ R_{14} = -k_{14}R_{11}$

$\Rightarrow\ R_{24} = -k_{24}R_{22}$

$\Rightarrow\ R_{34} = -k_{34}R_{33}$

$\Rightarrow\ R_{13} = -k_{13}R_{11}$

$\Rightarrow\ R_{23} = -k_{23}R_{22}$

$$\Rightarrow \quad R_{12} = -k_{12}R_{11}$$

$$\Rightarrow \quad R_{11} = \frac{1}{r_{11}}$$

$$\Rightarrow \quad R_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

$$\Rightarrow \quad R_{33} = \frac{1}{r_{33}}$$

$$\Rightarrow \quad R_{44} = \frac{1}{r_{44}}$$

$$\Rightarrow \quad s_{44} = k_{41}r_{14} + k_{42}r_{24} + k_{43}r_{34} + r_{44}$$

$$\Rightarrow \quad s_{43} = k_{41}r_{13} + k_{42}r_{23} + k_{43}r_{33}$$

$$\Rightarrow \quad s_{42} = k_{41}r_{12} + k_{42}r_{22}$$

$$\Rightarrow \quad s_{41} = k_{41}r_{11}$$

$$\Rightarrow \quad s_{34} = k_{31}r_{14} + k_{32}r_{24} + r_{34}$$

$$\Rightarrow \quad s_{33} = k_{31}r_{13} + k_{32}r_{23} + r_{33}$$

$$\Rightarrow \quad s_{32} = k_{31}r_{12} + k_{32}r_{22}$$

$$\Rightarrow \quad s_{31} = k_{31}r_{11}$$

$$\Rightarrow \quad s_{24} = k_{21}r_{14} + r_{24}$$

$$\Rightarrow \quad s_{23} = k_{21}r_{13} + r_{23}$$

$$\Rightarrow \quad s_{22} = k_{21}r_{12} + r_{22}$$

$$\Rightarrow \quad s_{21} = k_{21}r_{11}$$

$$\Rightarrow \quad s_{11} = r_{11}$$

$$\Rightarrow \quad s_{12} = r_{12}$$

$$\Rightarrow \quad s_{13} = r_{13}$$

$$\Rightarrow \quad s_{14} = r_{14}$$

$$\Rightarrow \quad r_{14} = k_{12}r_{24} + k_{13}r_{34} + k_{14}r_{44}$$

$$\Rightarrow \quad r_{13} = k_{12}r_{23} + k_{13}r_{33}$$

$$\Rightarrow \quad r_{12} = k_{12}r_{22}$$

$$\Rightarrow \quad r_{24} = k_{23}r_{34} + k_{24}r_{44}$$

$$\Rightarrow \quad r_{23} = k_{23}r_{33}$$

$$\Rightarrow \quad r_{34} = k_{34}r_{44}$$

$$\Rightarrow \quad r_{11} = -1\,; \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad r_{22} = -1\,; \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad r_{33} = -1\,; \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad r_{44} = -1\,; \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad k_{12} = -1\,; \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad k_{13} = -1\,; \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad k_{14} = -1\,; \quad 0\,; \quad 1\,; \quad 2$$

$$\Rightarrow \quad k_{23} = -1\,; \quad 1$$

$\Rightarrow\ k_{24} = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{34} = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{21} = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{31} = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{41} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{32} = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{42} = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{43} = \ -1\,;\ \ 1$

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e'_1 &= s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + s_{31}e_3 + s_{41}e_4 \\ e'_2 &= s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + s_{32}e_3 + s_{42}e_4 \\ e'_3 &= s_{13}e_1 + s_{23}e_2 + s_{33}e_3 + s_{43}e_4 \\ e'_4 &= s_{14}e_1 + s_{24}e_2 + s_{34}e_3 + s_{44}e_4 \end{aligned}$$

$$\surd\quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

$$2)\quad A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1 &= s_{11}e'_1 + s_{21}e'_2 + s_{31}e'_3 + s_{41}e'_4 \\ e_2 &= s_{12}e'_1 + s_{22}e'_2 + s_{32}e'_3 + s_{42}e'_4 \\ e_3 &= s_{13}e'_1 + s_{23}e'_2 + s_{33}e'_3 + s_{43}e'_4 \\ e_4 &= s_{14}e'_1 + s_{24}e'_2 + s_{34}e'_3 + s_{44}e'_4 \end{aligned}$$

$$\surd\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Приведение матрицы к диагональному виду, 2x2

**94.** Найти матрицу $S$, трансформирующую матрицу $A$ к диагональному виду $D$, и найти этот вид:

$\Rightarrow$ $a_{11} = \ ab_{11} + bb_{21}$

$\Rightarrow$ $a_{12} = \ ab_{12} + bb_{22}$

$\Rightarrow$ $a_{21} = \ cb_{11} + db_{21}$

$\Rightarrow$ $a_{22} = \ cb_{12} + db_{22}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = \ d_{11}A + d_{12}C$

$\Rightarrow$ $b_{12} = \ d_{11}B + d_{12}D$

$\Rightarrow$ $b_{21} = \ d_{21}A + d_{22}C$

$\Rightarrow$ $b_{22} = \ d_{21}B + d_{22}D$

$\Rightarrow$ $d_{11}\,,\quad d_{22} =$

- $-5\,,\quad -3\,;$
- $-5\,,\quad -2\,;$
- $-5\,,\quad -1\,;$
- $-5\,,\quad 1\,;$
- $-5\,,\quad 2\,;$
- $-5\,,\quad 3\,;$
- $-5\,,\quad 5\,;$
- $-3\,,\quad -2\,;$
- $-3\,,\quad -1\,;$
- $-3\,,\quad 0\,;$
- $-3\,,\quad 1\,;$
- $-3\,,\quad 2\,;$
- $-3\,,\quad 3\,;$
- $-3\,,\quad 5\,;$
- $-2\,,\quad -1\,;$
- $-2\,,\quad 1\,;$
- $-2\,,\quad 2\,;$
- $-2\,,\quad 3\,;$
- $-2\,,\quad 4\,;$
- $-2\,,\quad 5\,;$
- $-1\,,\quad 0\,;$
- $-1\,,\quad 1\,;$
- $-1\,,\quad 2\,;$
- $-1\,,\quad 3\,;$
- $-1\,,\quad 4\,;$
- $-1\,,\quad 5\,;$
- $0\,,\quad 3\,;$
- $0\,,\quad 5\,;$
- $1\,,\quad 2\,;$
- $1\,,\quad 3\,;$
- $1\,,\quad 4\,;$
- $1\,,\quad 5\,;$
- $2\,,\quad 3\,;$
- $2\,,\quad 4\,;$
- $2\,,\quad 5\,;$
- $3\,,\quad 5$

$\Rightarrow$ $d_{12} =\ 0$

$\Rightarrow\ d_{21} = \ 0$

$\Rightarrow\ A = \ \dfrac{d}{\Delta}$

$\Rightarrow\ B = \ -\dfrac{b}{\Delta}$

$\Rightarrow\ C = \ -\dfrac{c}{\Delta}$

$\Rightarrow\ D = \ \dfrac{a}{\Delta}$

$\Rightarrow\ a = \ d(bc + \Delta)$

$\Rightarrow\ \Delta = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ d = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ b = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow\ c = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$

**95.** Найти матрицу $S$, трансформирующую матрицу $A$ к диагональному виду $D$, и найти этот вид:

$\Rightarrow$ $a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$

$\Rightarrow$ $a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$

$\Rightarrow$ $a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$

$\Rightarrow$ $a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$

$\Rightarrow$ $a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$

$\Rightarrow$ $a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$

$\Rightarrow$ $a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$

$\Rightarrow$ $a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$

$\Rightarrow$ $a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$

$\Rightarrow$ $d_{33} = d_{22} + l$

$\Rightarrow$ $d_{22} = d_{11} + k$

$\Rightarrow$ $d_{11} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1$

$\Rightarrow$ $k\,,\quad l =$

- $0\,,\quad 1\,;$
- $0\,,\quad 2\,;$
- $0\,,\quad 3\,;$
- $1\,,\quad 0\,;$
- $1\,,\quad 1\,;$
- $1\,,\quad 2\,;$
- $1\,,\quad 3\,;$
- $2\,,\quad 0\,;$
- $2\,,\quad 1\,;$
- $2\,,\quad 2\,;$
- $3\,,\quad 0\,;$
- $3\,,\quad 1$

$\Rightarrow$ $d_{12} = 0$

$\Rightarrow \quad d_{13} = \; 0$

$\Rightarrow \quad d_{21} = \; 0$

$\Rightarrow \quad d_{23} = \; 0$

$\Rightarrow \quad d_{31} = \; 0$

$\Rightarrow \quad d_{32} = \; 0$

$\Rightarrow \quad S_{11} = \; R_{11} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12}$

$\Rightarrow \quad S_{21} = \; -k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$

$\Rightarrow \quad S_{31} = \; -k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$

$\Rightarrow \quad S_{12} = \; R_{12} - k_{32}S_{13}$

$\Rightarrow \quad S_{22} = \; R_{22} - k_{32}S_{23}$

$\Rightarrow \quad S_{32} = \; -k_{32}S_{33}$

$\Rightarrow \quad S_{13} = \; R_{13}$

$\Rightarrow \quad S_{23} = \; R_{23}$

$\Rightarrow \quad S_{33} = \; R_{33}$

$\Rightarrow \quad R_{13} = \; -k_{13}R_{11}$

$\Rightarrow \quad R_{23} = \; -k_{23}R_{22}$

$\Rightarrow \quad R_{12} = \; -k_{12}R_{11}$

$$\Rightarrow \quad R_{11} = \; \frac{1}{r_{11}}$$

$$\Rightarrow \quad R_{22} = \; \frac{1}{r_{22}}$$

$$\Rightarrow \quad R_{33} = \; \frac{1}{r_{33}}$$

$\Rightarrow \quad s_{33} = \; r_{33} + k_{32}r_{23} + k_{31}r_{13}$

$\Rightarrow \quad s_{32} = \; k_{32}r_{22} + k_{31}r_{12}$

$\Rightarrow \quad s_{31} = \; k_{31}r_{11}$

$\Rightarrow \quad s_{23} = \; r_{23} + k_{21}r_{13}$

$\Rightarrow \quad s_{22} = \; r_{22} + k_{21}r_{12}$

$\Rightarrow \quad s_{21} = \; k_{21}r_{11}$

$\Rightarrow \quad s_{11} = \; r_{11}$

$\Rightarrow \quad s_{12} = \; r_{12}$

$\Rightarrow \quad s_{13} = \; r_{13}$

$\Rightarrow \quad r_{13} = \; k_{13}r_{33} + k_{12}r_{23}$

$\Rightarrow \quad r_{12} = \; k_{12}r_{22}$

$\Rightarrow \quad r_{23} = \; k_{23}r_{33}$

$\Rightarrow \quad r_{11} = \; -1\,; \quad 1$

$\Rightarrow \quad r_{22} = \; -1\,; \quad 1$

$\Rightarrow \quad r_{33} = \; -1\,; \quad 1$

$\Rightarrow \quad k_{12} = \; -1\,; \quad 1$

$\Rightarrow\ k_{13} = \ -2\,;\quad -1\,;\quad 0\,;\quad 1\,;\quad 2$

$\Rightarrow\ k_{23} = \ -2\,;\quad -1\,;\quad 1\,;\quad 2$

$\Rightarrow\ k_{31} = \ -2\,;\quad -1\,;\quad 0\,;\quad 1\,;\quad 2$

$\Rightarrow\ k_{32} = \ -1\,;\quad 1$

$\Rightarrow\ k_{21} = \ -1\,;\quad 1$

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\surd\quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

**96.** Найти матрицу $S$, трансформирующую матрицу $A$ к диагональному виду $D$, и найти этот вид:

$\Rightarrow$ $a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\Rightarrow$ $a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\Rightarrow$ $a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\Rightarrow$ $a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\Rightarrow$ $a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\Rightarrow$ $a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\Rightarrow$ $a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\Rightarrow$ $a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\Rightarrow$ $a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\Rightarrow$ $a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\Rightarrow$ $a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\Rightarrow$ $a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\Rightarrow$ $a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\Rightarrow$ $a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\Rightarrow$ $a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\Rightarrow$ $a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\Rightarrow$ $b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\Rightarrow$ $b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\Rightarrow$ $b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\Rightarrow$ $b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\Rightarrow$ $b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\Rightarrow$ $b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\Rightarrow$ $b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\Rightarrow$ $b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\Rightarrow$ $b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\Rightarrow$ $b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\Rightarrow$ $b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\Rightarrow$ $b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\Rightarrow$ $b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\Rightarrow$ $d_{11}$ , $d_{22}$ , $d_{33}$ , $d_{44}$ =

- $-2$ , $-1$ , $0$ , $1$ ;
- $-2$ , $-1$ , $0$ , $2$ ;
- $-2$ , $-1$ , $1$ , $2$ ;
- $-2$ , $0$ , $1$ , $2$ ;
- $-1$ , $0$ , $1$ , $2$ ;
- $-1$ , $-1$ , $1$ , $2$ ;
- $-2$ , $1$ , $1$ , $2$ ;
- $-1$ , $0$ , $1$ , $1$ ;
- $-1$ , $-1$ , $1$ , $1$ ;
- $1$ , $1$ , $2$ , $2$ ;
- $-1$ , $-1$ , $-1$ , $2$ ;
- $-2$ , $1$ , $1$ , $1$

$\Rightarrow$ $d_{12} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{13} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{14} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{21} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{23} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{24} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{31} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{32} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{34} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{41} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{42} = 0$

$\Rightarrow$ $d_{43} = 0$

$\Rightarrow$ $S_{11} = -k_{41}S_{14} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} + R_{11}$

$\Rightarrow$ $S_{21} = -k_{41}S_{24} - k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$

$\Rightarrow$ $S_{31} = -k_{41}S_{34} - k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$

$\Rightarrow$ $S_{41} = -k_{41}S_{44} - k_{31}S_{43} - k_{21}S_{42}$

$\Rightarrow$ $S_{12} = -k_{42}S_{14} - k_{32}S_{13} + R_{12}$

$\Rightarrow$ $S_{22} = -k_{42}S_{24} - k_{32}S_{23} + R_{22}$

$\Rightarrow$ $S_{32} = -k_{42}S_{34} - k_{32}S_{33}$

$\Rightarrow$ $S_{42} = -k_{42}S_{44} - k_{32}S_{43}$

$\Rightarrow$ $S_{13} = -k_{43}S_{14} + R_{13}$

$\Rightarrow$ $S_{23} = -k_{43}S_{24} + R_{23}$

$\Rightarrow$ $S_{33} = -k_{43}S_{34} + R_{33}$

$\Rightarrow$ $S_{43} = -k_{43}S_{44}$

$\Rightarrow$ $S_{14} = R_{14}$

$$\Rightarrow \quad S_{24} = R_{24}$$
$$\Rightarrow \quad S_{34} = R_{34}$$
$$\Rightarrow \quad S_{44} = R_{44}$$
$$\Rightarrow \quad R_{14} = -k_{14}R_{11}$$
$$\Rightarrow \quad R_{24} = -k_{24}R_{22}$$
$$\Rightarrow \quad R_{34} = -k_{34}R_{33}$$
$$\Rightarrow \quad R_{13} = -k_{13}R_{11}$$
$$\Rightarrow \quad R_{23} = -k_{23}R_{22}$$
$$\Rightarrow \quad R_{12} = -k_{12}R_{11}$$
$$\Rightarrow \quad R_{11} = \frac{1}{r_{11}}$$
$$\Rightarrow \quad R_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$
$$\Rightarrow \quad R_{33} = \frac{1}{r_{33}}$$
$$\Rightarrow \quad R_{44} = \frac{1}{r_{44}}$$
$$\Rightarrow \quad s_{44} = k_{41}r_{14} + k_{42}r_{24} + k_{43}r_{34} + r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad s_{43} = k_{41}r_{13} + k_{42}r_{23} + k_{43}r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad s_{42} = k_{41}r_{12} + k_{42}r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad s_{41} = k_{41}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{34} = k_{31}r_{14} + k_{32}r_{24} + r_{34}$$
$$\Rightarrow \quad s_{33} = k_{31}r_{13} + k_{32}r_{23} + r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad s_{32} = k_{31}r_{12} + k_{32}r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad s_{31} = k_{31}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{24} = k_{21}r_{14} + r_{24}$$
$$\Rightarrow \quad s_{23} = k_{21}r_{13} + r_{23}$$
$$\Rightarrow \quad s_{22} = k_{21}r_{12} + r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad s_{21} = k_{21}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{11} = r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{12} = r_{12}$$
$$\Rightarrow \quad s_{13} = r_{13}$$
$$\Rightarrow \quad s_{14} = r_{14}$$
$$\Rightarrow \quad r_{14} = k_{12}r_{24} + k_{13}r_{34} + k_{14}r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad r_{13} = k_{12}r_{23} + k_{13}r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad r_{12} = k_{12}r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad r_{24} = k_{23}r_{34} + k_{24}r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad r_{23} = k_{23}r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad r_{34} = k_{34}r_{44}$$

$\Rightarrow \ r_{11} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ r_{22} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ r_{33} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ r_{44} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{12} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{13} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{14} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{23} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{24} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{34} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{21} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{31} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{41} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{32} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{42} = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow \ k_{43} = \ -1\,; \ \ 1$

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$

**97.** Найти матрицу $S$, трансформирующую матрицу $A$ к жордановой нормальной форме $J$, и найти эту форму:

$\Rightarrow$ $a_{11} = ab_{11} + bb_{21}$

$\Rightarrow$ $a_{12} = ab_{12} + bb_{22}$

$\Rightarrow$ $a_{21} = cb_{11} + db_{21}$

$\Rightarrow$ $a_{22} = cb_{12} + db_{22}$

$\Rightarrow$ $b_{11} = d_{11}A + d_{12}C$

$\Rightarrow$ $b_{12} = d_{11}B + d_{12}D$

$\Rightarrow$ $b_{21} = d_{21}A + d_{22}C$

$\Rightarrow$ $b_{22} = d_{21}B + d_{22}D$

$\Rightarrow$ $d_{22} = d_{11}$

$\Rightarrow$ $d_{11} = -5\,;\ -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\Rightarrow$ $d_{12} = 1$

$\Rightarrow$ $d_{21} = 0$

$\Rightarrow$ $A = \dfrac{d}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $B = -\dfrac{b}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $C = -\dfrac{c}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $D = \dfrac{a}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $a = d(bc + \Delta)$

$\Rightarrow$ $\Delta = -1\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $d = -1\,;\ 1$

$\Rightarrow$ $b = -3\,;\ -2\,;\ 2\,;\ 3$

$\Rightarrow$ $c = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$

**98.** Найти матрицу $S$, трансформирующую матрицу $A$ к жордановой нормальной форме $J$, и найти эту форму:

$\Rightarrow$ $S_{11} = R_{11} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12}$

$\Rightarrow$ $S_{21} = -k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$

$\Rightarrow$ $S_{31} = -k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$

$\Rightarrow$ $S_{12} = R_{12} - k_{32}S_{13}$

$\Rightarrow$ $S_{22} = R_{22} - k_{32}S_{23}$

$\Rightarrow$ $S_{32} = -k_{32}S_{33}$

$\Rightarrow$ $S_{13} = R_{13}$

$\Rightarrow$ $S_{23} = R_{23}$

$\Rightarrow$ $S_{33} = R_{33}$

$\Rightarrow$ $R_{13} = -k_{13}R_{11}$

$\Rightarrow$ $R_{23} = -k_{23}R_{22}$

$\Rightarrow$ $R_{12} = -k_{12}R_{11}$

$\Rightarrow$ $R_{11} = \dfrac{1}{r_{11}}$

$\Rightarrow$ $R_{22} = \dfrac{1}{r_{22}}$

$\Rightarrow$ $R_{33} = \dfrac{1}{r_{33}}$

$\Rightarrow$ $s_{33} = r_{33} + k_{32}r_{23} + k_{31}r_{13}$

$\Rightarrow$ $s_{32} = k_{32}r_{22} + k_{31}r_{12}$

$\Rightarrow$ $s_{31} = k_{31}r_{11}$

$\Rightarrow$ $s_{23} = r_{23} + k_{21}r_{13}$

$\Rightarrow$ $s_{22} = r_{22} + k_{21}r_{12}$

$\Rightarrow$ $s_{21} = k_{21}r_{11}$

$\Rightarrow$ $s_{11} = r_{11}$

$\Rightarrow$ $s_{12} = r_{12}$

$\Rightarrow$ $s_{13} = r_{13}$

$\Rightarrow$ $r_{13} = k_{13}r_{33} + k_{12}r_{23}$

$\Rightarrow$ $r_{12} = k_{12}r_{22}$

$\Rightarrow$ $r_{23} = k_{23}r_{33}$

$\Rightarrow$ $r_{11} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $r_{22} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $r_{33} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $k_{12} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow \; k_{31} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\Rightarrow \; k_{32} = \; -1\,; \;\; 1$

$\Rightarrow \; k_{21} = \; -1\,; \;\; 1$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\surd \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \; a_{11} = \; s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$

$\rightarrow \; a_{12} = \; s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$

$\rightarrow \; a_{13} = \; s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$

$\rightarrow \; a_{21} = \; s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$

$\rightarrow \; a_{22} = \; s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$

$\rightarrow \; a_{23} = \; s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$

$\rightarrow \; a_{31} = \; s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$

$\rightarrow \; a_{32} = \; s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$

$\rightarrow \; a_{33} = \; s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$

$\rightarrow \; b_{11} = \; d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$

$\rightarrow \; b_{12} = \; d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$

$\rightarrow \; b_{13} = \; d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$

$\rightarrow \; b_{21} = \; d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$

$\rightarrow \; b_{22} = \; d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$

$\rightarrow \; b_{23} = \; d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$

$\rightarrow \; b_{31} = \; d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$

$\rightarrow \; b_{32} = \; d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$

$\rightarrow \; b_{33} = \; d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$

$\rightarrow \; d_{33} = \; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; d_{22} = \; d_{11}$

$\rightarrow \; d_{11} = \; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \; d_{12} = \; 1$

$\rightarrow \; d_{13} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{21} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{23} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{31} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{32} = \; 0$

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\surd$ $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ , $J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 \\ 0 & d_{22} & 1 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$

$\rightarrow$ $a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$

$\rightarrow$ $a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$

$\rightarrow$ $a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$

$\rightarrow$ $a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$

$\rightarrow$ $a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$

$\rightarrow$ $a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$

$\rightarrow$ $a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$

$\rightarrow$ $a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$

$\rightarrow$ $b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$

$\rightarrow$ $b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$

$\rightarrow$ $b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$

$\rightarrow$ $b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$

$\rightarrow$ $b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$

$\rightarrow$ $b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$

$\rightarrow$ $b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$

$\rightarrow$ $b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$

$\rightarrow$ $b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$

$\rightarrow$ $d_{33} = d_{11}$

$\rightarrow$ $d_{22} = d_{11}$

$\rightarrow$ $d_{11} = -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $d_{12} = 1$

$\rightarrow$ $d_{13} = 0$

$\rightarrow$ $d_{21} = 0$

$\rightarrow$ $d_{23} = 1$

$\rightarrow$ $d_{31} = 0$

$\rightarrow$ $d_{32} = 0$

**99.** Найти матрицу $S$, трансформирующую матрицу $A$ к жордановой нормальной форме $J$, и найти эту форму:

$\Rightarrow$ $S_{11} = -k_{41}S_{14} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} + R_{11}$

$\Rightarrow$ $S_{21} = -k_{41}S_{24} - k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$

$\Rightarrow$ $S_{31} = -k_{41}S_{34} - k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$

$\Rightarrow$ $S_{41} = -k_{41}S_{44} - k_{31}S_{43} - k_{21}S_{42}$

$\Rightarrow$ $S_{12} = -k_{42}S_{14} - k_{32}S_{13} + R_{12}$

$\Rightarrow$ $S_{22} = -k_{42}S_{24} - k_{32}S_{23} + R_{22}$

$\Rightarrow$ $S_{32} = -k_{42}S_{34} - k_{32}S_{33}$

$\Rightarrow$ $S_{42} = -k_{42}S_{44} - k_{32}S_{43}$

$\Rightarrow$ $S_{13} = -k_{43}S_{14} + R_{13}$

$\Rightarrow$ $S_{23} = -k_{43}S_{24} + R_{23}$

$\Rightarrow$ $S_{33} = -k_{43}S_{34} + R_{33}$

$\Rightarrow$ $S_{43} = -k_{43}S_{44}$

$\Rightarrow$ $S_{14} = R_{14}$

$\Rightarrow$ $S_{24} = R_{24}$

$\Rightarrow$ $S_{34} = R_{34}$

$\Rightarrow$ $S_{44} = R_{44}$

$\Rightarrow$ $R_{14} = -k_{14}R_{11}$

$\Rightarrow$ $R_{24} = -k_{24}R_{22}$

$\Rightarrow$ $R_{34} = -k_{34}R_{33}$

$\Rightarrow$ $R_{13} = -k_{13}R_{11}$

$\Rightarrow$ $R_{23} = -k_{23}R_{22}$

$\Rightarrow$ $R_{12} = -k_{12}R_{11}$

$\Rightarrow$ $R_{11} = \dfrac{1}{r_{11}}$

$\Rightarrow$ $R_{22} = \dfrac{1}{r_{22}}$

$\Rightarrow$ $R_{33} = \dfrac{1}{r_{33}}$

$\Rightarrow$ $R_{44} = \dfrac{1}{r_{44}}$

$\Rightarrow$ $s_{44} = k_{41}r_{14} + k_{42}r_{24} + k_{43}r_{34} + r_{44}$

$\Rightarrow$ $s_{43} = k_{41}r_{13} + k_{42}r_{23} + k_{43}r_{33}$

$\Rightarrow$ $s_{42} = k_{41}r_{12} + k_{42}r_{22}$

$\Rightarrow$ $s_{41} = k_{41}r_{11}$

$\Rightarrow$ $s_{34} = k_{31}r_{14} + k_{32}r_{24} + r_{34}$

$\Rightarrow$ $s_{33} = k_{31}r_{13} + k_{32}r_{23} + r_{33}$

$$\Rightarrow \quad s_{32} = k_{31}r_{12} + k_{32}r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad s_{31} = k_{31}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{24} = k_{21}r_{14} + r_{24}$$
$$\Rightarrow \quad s_{23} = k_{21}r_{13} + r_{23}$$
$$\Rightarrow \quad s_{22} = k_{21}r_{12} + r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad s_{21} = k_{21}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{11} = r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{12} = r_{12}$$
$$\Rightarrow \quad s_{13} = r_{13}$$
$$\Rightarrow \quad s_{14} = r_{14}$$
$$\Rightarrow \quad r_{14} = k_{12}r_{24} + k_{13}r_{34} + k_{14}r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad r_{13} = k_{12}r_{23} + k_{13}r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad r_{12} = k_{12}r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad r_{24} = k_{23}r_{34} + k_{24}r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad r_{23} = k_{23}r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad r_{34} = k_{34}r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad r_{11} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad r_{22} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad r_{33} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad r_{44} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{12} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{13} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{14} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{23} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{24} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{34} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{21} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{31} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{41} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{32} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{42} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{43} = -1\,; \quad 1$$

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\surd\quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow\ a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow\ b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow\ d_{33}\,,\quad d_{44} =$

- $-2\,,\quad -2\,;$
- $-2\,,\quad -1\,;$
- $-2\,,\quad 0\,;$
- $-2\,,\quad 1\,;$
- $-2\,,\quad 2\,;$
- $-1\,,\quad -1\,;$
- $-1\,,\quad 0\,;$
- $-1\,,\quad 1\,;$
- $-1\,,\quad 2\,;$
- $0\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad 1\,;$
- $0\,,\quad 2\,;$
- $1\,,\quad 1\,;$
- $1\,,\quad 2\,;$
- $2\,,\quad 2$

$\rightarrow\ d_{22} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ d_{12} = \ 1$

$\rightarrow\ d_{13} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{14} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{21} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{23} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{24} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{31} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{32} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{34} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{41} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{42} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{43} = \ 0$

$$2)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\surd \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow\ a_{11} = \ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow\ b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow\ d_{44} = d_{33}$

$\rightarrow\ d_{22} = d_{11}$

$\rightarrow$ $d_{11}$ , $d_{33}$ =

- $-2$ , $-2$ ;
- $-2$ , $-1$ ;
- $-2$ , $0$ ;
- $-2$ , $1$ ;
- $-2$ , $2$ ;
- $-1$ , $-1$ ;
- $-1$ , $0$ ;
- $-1$ , $1$ ;
- $-1$ , $2$ ;
- $0$ , $0$ ;
- $0$ , $1$ ;
- $0$ , $2$ ;
- $1$ , $1$ ;
- $1$ , $2$ ;
- $2$ , $2$

$\rightarrow$ $d_{12} = 1$

$\rightarrow$ $d_{13} = 0$

$\rightarrow$ $d_{14} = 0$

$\rightarrow$ $d_{21} = 0$

$\rightarrow$ $d_{23} = 0$

$\rightarrow$ $d_{24} = 0$

$\rightarrow$ $d_{31} = 0$

$\rightarrow$ $d_{32} = 0$

$\rightarrow$ $d_{34} = 1$

$\rightarrow$ $d_{41} = 0$

$\rightarrow$ $d_{42} = 0$

$\rightarrow$ $d_{43} = 0$

3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\surd$ $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}$ , $J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{14} =\ s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{21} =\ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{22} =\ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{23} =\ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{24} =\ s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{31} =\ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{32} =\ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{33} =\ s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{34} =\ s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{41} =\ s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{42} =\ s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{43} =\ s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{44} =\ s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow\ b_{11} =\ d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{12} =\ d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{13} =\ d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{14} =\ d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{21} =\ d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{22} =\ d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{23} =\ d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{24} =\ d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{31} =\ d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{32} =\ d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{33} =\ d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{34} =\ d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{41} =\ d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{42} =\ d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{43} =\ d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{44} =\ d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow\ d_{44} =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ d_{33} =\ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{22} =\ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{11} =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ d_{12} =\ 1$

$\rightarrow\ d_{13} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{14} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{21} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{23} =\ 1$

$\rightarrow\ d_{24} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{31} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{32} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{34} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{41} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{42} =\ 0$

$\rightarrow\ d_{43} =\ 0$

$$4)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\surd\quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow\ a_{11} =\ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{12} =\ s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{13} =\ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{14} =\ s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{21} =\ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{22} =\ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{23} =\ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{24} =\ s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{31} =\ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{32} =\ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{33} =\ s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{34} =\ s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{41} =\ s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{42} =\ s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{43} =\ s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{44} =\ s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow\ b_{11} =\ d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{12} =\ d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{13} =\ d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{14} =\ d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{21} =\ d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{22} =\ d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{23} =\ d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{24} =\ d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow\ d_{44} = d_{11}$

$\rightarrow\ d_{33} = d_{11}$

$\rightarrow\ d_{22} = d_{11}$

$\rightarrow\ d_{11} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ d_{12} = 1$

$\rightarrow\ d_{13} = 0$

$\rightarrow\ d_{14} = 0$

$\rightarrow\ d_{21} = 0$

$\rightarrow\ d_{23} = 1$

$\rightarrow\ d_{24} = 0$

$\rightarrow\ d_{31} = 0$

$\rightarrow\ d_{32} = 0$

$\rightarrow\ d_{34} = 1$

$\rightarrow\ d_{41} = 0$

$\rightarrow\ d_{42} = 0$

$\rightarrow\ d_{43} = 0$

Собственные значения и векторы, 2x2

**100.** Найти собственные значения $\lambda_i$ и соответствующие им базисы собственных векторов $L_i$ линейного оператора, заданного в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}_{3,1}$ матрицей $A$:

$\Rightarrow$ $A = \dfrac{d}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $B = -\dfrac{b}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $C = -\dfrac{c}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $D = \dfrac{a}{\Delta}$

$\Rightarrow$ $a = d(bc + \Delta)$

$\Rightarrow$ $\Delta = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $d = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $b = -3\,;\ \ -2\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $c = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

√ $\lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right), \quad \lambda_2 = d_{22},\ L_2 = \left(\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$

$\rightarrow$ $a_{11} = ab_{11} + bb_{21}$

$\rightarrow$ $a_{12} = ab_{12} + bb_{22}$

$\rightarrow$ $a_{21} = cb_{11} + db_{21}$

$\rightarrow$ $a_{22} = cb_{12} + db_{22}$

$\rightarrow$ $b_{11} = d_{11}A + d_{12}C$

$\rightarrow$ $b_{12} = d_{11}B + d_{12}D$

$\rightarrow$ $b_{21} = d_{21}A + d_{22}C$

$\rightarrow$ $b_{22} = d_{21}B + d_{22}D$

$\rightarrow$ $d_{11}$ , $d_{22}$ =

- $-5$ , $-3$ ;
- $-5$ , $-2$ ;
- $-5$ , $-1$ ;
- $-5$ , $1$ ;
- $-5$ , $2$ ;
- $-5$ , $3$ ;
- $-5$ , $5$ ;
- $-3$ , $-2$ ;
- $-3$ , $-1$ ;
- $-3$ , $0$ ;
- $-3$ , $1$ ;
- $-3$ , $2$ ;
- $-3$ , $3$ ;
- $-3$ , $5$ ;
- $-2$ , $-1$ ;
- $-2$ , $1$ ;
- $-2$ , $2$ ;
- $-2$ , $3$ ;
- $-2$ , $4$ ;
- $-2$ , $5$ ;
- $-1$ , $0$ ;
- $-1$ , $1$ ;
- $-1$ , $2$ ;
- $-1$ , $3$ ;
- $-1$ , $4$ ;
- $-1$ , $5$ ;
- $0$ , $3$ ;
- $0$ , $5$ ;
- $1$ , $2$ ;
- $1$ , $3$ ;
- $1$ , $4$ ;
- $1$ , $5$ ;
- $2$ , $3$ ;
- $2$ , $4$ ;
- $2$ , $5$ ;
- $3$ , $5$

$\rightarrow$ $d_{12} = 0$

$\rightarrow \; d_{21} = \; 0$

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\surd \quad \lambda_1 = d_{11}, \; L_1 = \left( \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow \; a_{11} = \; ab_{11} + bb_{21}$

$\rightarrow \; a_{12} = \; ab_{12} + bb_{22}$

$\rightarrow \; a_{21} = \; cb_{11} + db_{21}$

$\rightarrow \; a_{22} = \; cb_{12} + db_{22}$

$\rightarrow \; b_{11} = \; d_{11}A + d_{12}C$

$\rightarrow \; b_{12} = \; d_{11}B + d_{12}D$

$\rightarrow \; b_{21} = \; d_{21}A + d_{22}C$

$\rightarrow \; b_{22} = \; d_{21}B + d_{22}D$

$\rightarrow \; d_{22} = \; d_{11}$

$\rightarrow \; d_{11} = \; -5\,; \;\; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5$

$\rightarrow \; d_{12} = \; 1$

$\rightarrow \; d_{21} = \; 0$

**101.** Найти собственные значения $\lambda_i$ и соответствующие им базисы собственных векторов $L_i$ линейного оператора, заданного в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}_{3,1}$ матрицей $A$:

$\Rightarrow$ $S_{11} = R_{11} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12}$

$\Rightarrow$ $S_{21} = -k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$

$\Rightarrow$ $S_{31} = -k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$

$\Rightarrow$ $S_{12} = R_{12} - k_{32}S_{13}$

$\Rightarrow$ $S_{22} = R_{22} - k_{32}S_{23}$

$\Rightarrow$ $S_{32} = -k_{32}S_{33}$

$\Rightarrow$ $S_{13} = R_{13}$

$\Rightarrow$ $S_{23} = R_{23}$

$\Rightarrow$ $S_{33} = R_{33}$

$\Rightarrow$ $R_{13} = -k_{13}R_{11}$

$\Rightarrow$ $R_{23} = -k_{23}R_{22}$

$\Rightarrow$ $R_{12} = -k_{12}R_{11}$

$\Rightarrow$ $R_{11} = \dfrac{1}{r_{11}}$

$\Rightarrow$ $R_{22} = \dfrac{1}{r_{22}}$

$\Rightarrow$ $R_{33} = \dfrac{1}{r_{33}}$

$\Rightarrow$ $s_{33} = r_{33} + k_{32}r_{23} + k_{31}r_{13}$

$\Rightarrow$ $s_{32} = k_{32}r_{22} + k_{31}r_{12}$

$\Rightarrow$ $s_{31} = k_{31}r_{11}$

$\Rightarrow$ $s_{23} = r_{23} + k_{21}r_{13}$

$\Rightarrow$ $s_{22} = r_{22} + k_{21}r_{12}$

$\Rightarrow$ $s_{21} = k_{21}r_{11}$

$\Rightarrow$ $s_{11} = r_{11}$

$\Rightarrow$ $s_{12} = r_{12}$

$\Rightarrow$ $s_{13} = r_{13}$

$\Rightarrow$ $r_{13} = k_{13}r_{33} + k_{12}r_{23}$

$\Rightarrow$ $r_{12} = k_{12}r_{22}$

$\Rightarrow$ $r_{23} = k_{23}r_{33}$

$\Rightarrow$ $r_{11} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $r_{22} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $r_{33} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $k_{12} = -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow$ $k_{13} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_{23} = -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{31} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow\ k_{32} = \ -1\,;\ \ 1$

$\Rightarrow\ k_{21} = \ -1\,;\ \ 1$

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\surd\ \ \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left(\begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix}\right), \quad \lambda_2 = d_{22},\ L_2 = \left(\begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \end{bmatrix}\right), \quad \lambda_3 = d_{33},\ L_3 = \left(\begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{bmatrix}\right)$

$\rightarrow\ a_{11} = \ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$

$\rightarrow\ a_{12} = \ s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$

$\rightarrow\ a_{13} = \ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$

$\rightarrow\ a_{21} = \ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$

$\rightarrow\ a_{22} = \ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$

$\rightarrow\ a_{23} = \ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$

$\rightarrow\ a_{31} = \ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$

$\rightarrow\ a_{32} = \ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$

$\rightarrow\ a_{33} = \ s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$

$\rightarrow\ b_{11} = \ d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$

$\rightarrow\ b_{12} = \ d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$

$\rightarrow\ b_{13} = \ d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$

$\rightarrow\ b_{21} = \ d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$

$\rightarrow\ b_{22} = \ d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$

$\rightarrow\ b_{23} = \ d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$

$\rightarrow\ b_{31} = \ d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$

$\rightarrow\ b_{32} = \ d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$

$\rightarrow\ b_{33} = \ d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$

$\rightarrow\ d_{33} = \ d_{22} + l$

$\rightarrow\ d_{22} = \ d_{11} + k$

$\rightarrow\ k\,,\quad l =$

- 1 ,  1 ;
- 1 ,  2 ;
- 1 ,  3 ;
- 2 ,  1 ;
- 2 ,  2 ;
- 3 ,  1

$\rightarrow\ d_{11} = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1$

$\rightarrow\ d_{12} = \ 0$

$\rightarrow \; d_{13} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{21} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{23} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{31} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{32} = \; 0$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \; L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{33}, \; L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{bmatrix} \right)$$

$\rightarrow \; a_{11} = \; s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$

$\rightarrow \; a_{12} = \; s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$

$\rightarrow \; a_{13} = \; s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$

$\rightarrow \; a_{21} = \; s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$

$\rightarrow \; a_{22} = \; s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$

$\rightarrow \; a_{23} = \; s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$

$\rightarrow \; a_{31} = \; s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$

$\rightarrow \; a_{32} = \; s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$

$\rightarrow \; a_{33} = \; s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$

$\rightarrow \; b_{11} = \; d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$

$\rightarrow \; b_{12} = \; d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$

$\rightarrow \; b_{13} = \; d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$

$\rightarrow \; b_{21} = \; d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$

$\rightarrow \; b_{22} = \; d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$

$\rightarrow \; b_{23} = \; d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$

$\rightarrow \; b_{31} = \; d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$

$\rightarrow \; b_{32} = \; d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$

$\rightarrow \; b_{33} = \; d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$

$\rightarrow \; d_{22} = \; d_{11}$

$\rightarrow$ $d_{11}$ , $d_{33}$ =

- $-2$ , $-3$ ;
- $-2$ , $-1$ ;
- $-2$ , $0$ ;
- $-2$ , $1$ ;
- $-2$ , $2$ ;
- $-2$ , $3$ ;
- $-1$ , $-3$ ;
- $-1$ , $-2$ ;
- $-1$ , $0$ ;
- $-1$ , $1$ ;
- $-1$ , $2$ ;
- $-1$ , $3$ ;
- $1$ , $-3$ ;
- $1$ , $-2$ ;
- $1$ , $-1$ ;
- $1$ , $0$ ;
- $1$ , $2$ ;
- $1$ , $3$ ;
- $2$ , $-3$ ;
- $2$ , $-2$ ;
- $2$ , $-1$ ;
- $2$ , $0$ ;
- $2$ , $1$ ;
- $2$ , $3$ ;
-

$\rightarrow$ $d_{12} =\ 0$

$\rightarrow$ $d_{13} =\ 0$

$\rightarrow$ $d_{21} =\ 0$

$\rightarrow$ $d_{23} =\ 0$

$\rightarrow$ $d_{31} =\ 0$

$\rightarrow$ $d_{32} =\ 0$

3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

√ $\lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix} \right)$ , $\lambda_2 = d_{33},\ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow$ $a_{11} =\ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$

$\rightarrow\ a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$

$\rightarrow\ a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$

$\rightarrow\ a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$

$\rightarrow\ a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$

$\rightarrow\ a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$

$\rightarrow\ a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$

$\rightarrow\ a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$

$\rightarrow\ a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$

$\rightarrow\ b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$

$\rightarrow\ b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$

$\rightarrow\ b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$

$\rightarrow\ b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$

$\rightarrow\ b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$

$\rightarrow\ b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$

$\rightarrow\ b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$

$\rightarrow\ b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$

$\rightarrow\ b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$

$\rightarrow\ d_{22} = d_{11}$

$\rightarrow$ $d_{11}\,, \quad d_{33} =$

- $-2\,, \quad -3\,;$
- $-2\,, \quad -1\,;$
- $-2\,, \quad 0\,;$
- $-2\,, \quad 1\,;$
- $-2\,, \quad 2\,;$
- $-2\,, \quad 3\,;$
- $-1\,, \quad -3\,;$
- $-1\,, \quad -2\,;$
- $-1\,, \quad 0\,;$
- $-1\,, \quad 1\,;$
- $-1\,, \quad 2\,;$
- $-1\,, \quad 3\,;$
- $1\,, \quad -3\,;$
- $1\,, \quad -2\,;$
- $1\,, \quad -1\,;$
- $1\,, \quad 0\,;$
- $1\,, \quad 2\,;$
- $1\,, \quad 3\,;$
- $2\,, \quad -3\,;$
- $2\,, \quad -2\,;$
- $2\,, \quad -1\,;$
- $2\,, \quad 0\,;$
- $2\,, \quad 1\,;$
- $2\,, \quad 3$

$\rightarrow$ $d_{12} = \; 1$

$\rightarrow$ $d_{13} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{21} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{23} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{31} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{32} = \; 0$

4) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\lambda_1 = d_{11},\;\; L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow$ $a_{11} = \;\; s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$

$\rightarrow$ $a_{12} = \;\; s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$

$\rightarrow \ a_{13} = \ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$

$\rightarrow \ a_{21} = \ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$

$\rightarrow \ a_{22} = \ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$

$\rightarrow \ a_{23} = \ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$

$\rightarrow \ a_{31} = \ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$

$\rightarrow \ a_{32} = \ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$

$\rightarrow \ a_{33} = \ s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$

$\rightarrow \ b_{11} = \ d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$

$\rightarrow \ b_{12} = \ d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$

$\rightarrow \ b_{13} = \ d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$

$\rightarrow \ b_{21} = \ d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$

$\rightarrow \ b_{22} = \ d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$

$\rightarrow \ b_{23} = \ d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$

$\rightarrow \ b_{31} = \ d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$

$\rightarrow \ b_{32} = \ d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$

$\rightarrow \ b_{33} = \ d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$

$\rightarrow \ d_{33} = \ d_{11}$

$\rightarrow \ d_{22} = \ d_{11}$

$\rightarrow \ d_{11} = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow \ d_{12} = \ 1$

$\rightarrow \ d_{13} = \ 0$

$\rightarrow \ d_{21} = \ 0$

$\rightarrow \ d_{23} = \ 0$

$\rightarrow \ d_{31} = \ 0$

$\rightarrow \ d_{32} = \ 0$

5) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\surd \ \ \lambda_1 = d_{11}, \ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow \ a_{11} = \ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$

$\rightarrow \ a_{12} = \ s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$

$\rightarrow \ a_{13} = \ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$

$\rightarrow \ a_{21} = \ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$

$\rightarrow \ a_{22} = \ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$

$\rightarrow \ a_{23} = \ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$

$\rightarrow \ a_{31} = \ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$

$\rightarrow \ a_{32} = \ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$

$\rightarrow \quad a_{33} = \; s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$

$\rightarrow \quad b_{11} = \; d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$

$\rightarrow \quad b_{12} = \; d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$

$\rightarrow \quad b_{13} = \; d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$

$\rightarrow \quad b_{21} = \; d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$

$\rightarrow \quad b_{22} = \; d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$

$\rightarrow \quad b_{23} = \; d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$

$\rightarrow \quad b_{31} = \; d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$

$\rightarrow \quad b_{32} = \; d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$

$\rightarrow \quad b_{33} = \; d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$

$\rightarrow \quad d_{33} = \; d_{11}$

$\rightarrow \quad d_{22} = \; d_{11}$

$\rightarrow \quad d_{11} = \; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3$

$\rightarrow \quad d_{12} = \; 1$

$\rightarrow \quad d_{13} = \; 0$

$\rightarrow \quad d_{21} = \; 0$

$\rightarrow \quad d_{23} = \; 1$

$\rightarrow \quad d_{31} = \; 0$

$\rightarrow \quad d_{32} = \; 0$

**102.** Найти собственные значения $\lambda_i$ и соответствующие им базисы собственных векторов $L_i$ линейного оператора, заданного в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}_{3,1}$ матрицей $A$:

$\Rightarrow\ S_{11} = -k_{41}S_{14} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} + R_{11}$

$\Rightarrow\ S_{21} = -k_{41}S_{24} - k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$

$\Rightarrow\ S_{31} = -k_{41}S_{34} - k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$

$\Rightarrow\ S_{41} = -k_{41}S_{44} - k_{31}S_{43} - k_{21}S_{42}$

$\Rightarrow\ S_{12} = -k_{42}S_{14} - k_{32}S_{13} + R_{12}$

$\Rightarrow\ S_{22} = -k_{42}S_{24} - k_{32}S_{23} + R_{22}$

$\Rightarrow\ S_{32} = -k_{42}S_{34} - k_{32}S_{33}$

$\Rightarrow\ S_{42} = -k_{42}S_{44} - k_{32}S_{43}$

$\Rightarrow\ S_{13} = -k_{43}S_{14} + R_{13}$

$\Rightarrow\ S_{23} = -k_{43}S_{24} + R_{23}$

$\Rightarrow\ S_{33} = -k_{43}S_{34} + R_{33}$

$\Rightarrow\ S_{43} = -k_{43}S_{44}$

$\Rightarrow\ S_{14} = R_{14}$

$\Rightarrow\ S_{24} = R_{24}$

$\Rightarrow\ S_{34} = R_{34}$

$\Rightarrow\ S_{44} = R_{44}$

$\Rightarrow\ R_{14} = -k_{14}R_{11}$

$\Rightarrow\ R_{24} = -k_{24}R_{22}$

$\Rightarrow\ R_{34} = -k_{34}R_{33}$

$\Rightarrow\ R_{13} = -k_{13}R_{11}$

$\Rightarrow\ R_{23} = -k_{23}R_{22}$

$\Rightarrow\ R_{12} = -k_{12}R_{11}$

$\Rightarrow\ R_{11} = \dfrac{1}{r_{11}}$

$\Rightarrow\ R_{22} = \dfrac{1}{r_{22}}$

$\Rightarrow\ R_{33} = \dfrac{1}{r_{33}}$

$\Rightarrow\ R_{44} = \dfrac{1}{r_{44}}$

$\Rightarrow\ s_{44} = k_{41}r_{14} + k_{42}r_{24} + k_{43}r_{34} + r_{44}$

$\Rightarrow\ s_{43} = k_{41}r_{13} + k_{42}r_{23} + k_{43}r_{33}$

$\Rightarrow\ s_{42} = k_{41}r_{12} + k_{42}r_{22}$

$\Rightarrow\ s_{41} = k_{41}r_{11}$

$\Rightarrow\ s_{34} = k_{31}r_{14} + k_{32}r_{24} + r_{34}$

$\Rightarrow\ s_{33} = k_{31}r_{13} + k_{32}r_{23} + r_{33}$

$$\Rightarrow \quad s_{32} = k_{31}r_{12} + k_{32}r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad s_{31} = k_{31}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{24} = k_{21}r_{14} + r_{24}$$
$$\Rightarrow \quad s_{23} = k_{21}r_{13} + r_{23}$$
$$\Rightarrow \quad s_{22} = k_{21}r_{12} + r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad s_{21} = k_{21}r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{11} = r_{11}$$
$$\Rightarrow \quad s_{12} = r_{12}$$
$$\Rightarrow \quad s_{13} = r_{13}$$
$$\Rightarrow \quad s_{14} = r_{14}$$
$$\Rightarrow \quad r_{14} = k_{12}r_{24} + k_{13}r_{34} + k_{14}r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad r_{13} = k_{12}r_{23} + k_{13}r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad r_{12} = k_{12}r_{22}$$
$$\Rightarrow \quad r_{24} = k_{23}r_{34} + k_{24}r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad r_{23} = k_{23}r_{33}$$
$$\Rightarrow \quad r_{34} = k_{34}r_{44}$$
$$\Rightarrow \quad r_{11} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad r_{22} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad r_{33} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad r_{44} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{12} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{13} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{14} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{23} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{24} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{34} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{21} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{31} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{41} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{32} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{42} = -1\,; \quad 1$$
$$\Rightarrow \quad k_{43} = -1\,; \quad 1$$

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\surd \quad \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{22},\ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{42} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_3 = d_{33},\ L_3 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_4 = d_{44},$$

$\rightarrow$ $a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow$ $a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow$ $a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow$ $a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow$ $b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow$ $b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow$ $b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow$ $b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow$ $b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow$ $b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow$ $b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow$ $b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow$ $b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow$ $b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow$ $b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow$ $b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow$ $b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow$ $b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow$ $b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow$ $b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow$ $d_{11}\,,\quad d_{22}\,,\quad d_{33}\,,\quad d_{44} =$

- $-2\,,\quad -1\,,\quad 0\,,\quad 1\,;$
- $-2\,,\quad -1\,,\quad 0\,,\quad 2\,;$
- $-2\,,\quad -1\,,\quad 1\,,\quad 2\,;$
- $-2\,,\quad 0\,,\quad 1\,,\quad 2\,;$
- $-1\,,\quad 0\,,\quad 1\,,\quad 2$

$\rightarrow$ $d_{12} = 0$

$\rightarrow$ $d_{13} = 0$

$\rightarrow$ $d_{14} = 0$

$\rightarrow$ $d_{21} = 0$

$\rightarrow$ $d_{23} = 0$

$\rightarrow$ $d_{24} = 0$

$\rightarrow$ $d_{31} = 0$

$\rightarrow$ $d_{32} = 0$

$\rightarrow$ $d_{34} = 0$

$\rightarrow$ $d_{41} = 0$

$\rightarrow$ $d_{42} = 0$

$\rightarrow$ $d_{43} = 0$

$$2)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\surd\quad \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{42} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{33},\ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_3 = d_{44},\ L_3 = \left( \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$$

$\rightarrow$ $a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow$ $a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow$ $a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow$ $a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$$\rightarrow \quad a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$$
$$\rightarrow \quad a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$$
$$\rightarrow \quad a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$$
$$\rightarrow \quad b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$$
$$\rightarrow \quad b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$$
$$\rightarrow \quad b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$$
$$\rightarrow \quad b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$$
$$\rightarrow \quad b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$$
$$\rightarrow \quad b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$$
$$\rightarrow \quad b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$$
$$\rightarrow \quad b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$$
$$\rightarrow \quad b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$$
$$\rightarrow \quad b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$$
$$\rightarrow \quad b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$$
$$\rightarrow \quad b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$$
$$\rightarrow \quad b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$$
$$\rightarrow \quad b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$$
$$\rightarrow \quad b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$$
$$\rightarrow \quad b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$$
$$\rightarrow \quad d_{22} = d_{11}$$

→ $d_{11}$ , $d_{33}$ , $d_{44}$ =

- $-2$ , $-1$ , $0$ ;
- $-2$ , $-1$ , $1$ ;
- $-2$ , $-1$ , $2$ ;
- $-2$ , $0$ , $1$ ;
- $-2$ , $0$ , $2$ ;
- $-2$ , $1$ , $2$ ;
- $-1$ , $-2$ , $0$ ;
- $-1$ , $-2$ , $1$ ;
- $-1$ , $-2$ , $2$ ;
- $-1$ , $0$ , $1$ ;
- $-1$ , $0$ , $2$ ;
- $-1$ , $1$ , $2$ ;
- $1$ , $-2$ , $-1$ ;
- $1$ , $-2$ , $0$ ;
- $1$ , $-2$ , $2$ ;
- $1$ , $-1$ , $0$ ;
- $1$ , $-1$ , $2$ ;
- $1$ , $0$ , $2$ ;
- $2$ , $-2$ , $-1$ ;
- $2$ , $-2$ , $0$ ;
- $2$ , $-2$ , $1$ ;
- $2$ , $-1$ , $0$ ;
- $2$ , $-1$ , $1$ ;
- $2$ , $0$ , $1$

→ $d_{12} = 0$

→ $d_{13} = 0$

→ $d_{14} = 0$

→ $d_{21} = 0$

→ $d_{23} = 0$

→ $d_{24} = 0$

→ $d_{31} = 0$

→ $d_{32} = 0$

→ $d_{34} = 0$

→ $d_{41} = 0$

→ $d_{42} = 0$

→ $d_{43} = 0$

3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{42} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{33},\ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow \ a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow \ a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow \ a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow \ a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow \ a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow \ a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow \ a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow \ a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow \ a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow \ a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow \ a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow \ a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow \ a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow \ a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow \ a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow \ a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow \ b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow \ b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow \ b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow \ b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow \ b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow \ b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow \ b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow \ b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow \ b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow \ b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow \ b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow \ b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow \ b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow \ b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow \ b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow \ b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow$ $d_{44} = \; d_{33}$

$\rightarrow$ $d_{22} = \; d_{11}$

$\rightarrow$ $d_{11}\,, \quad d_{33} =$

- $-2\,, \quad -1\,;$
- $-2\,, \quad 0\,;$
- $-2\,, \quad 1\,;$
- $-2\,, \quad 2\,;$
- $-1\,, \quad 0\,;$
- $-1\,, \quad 1\,;$
- $-1\,, \quad 2\,;$
- $0\,, \quad 1\,;$
- $0\,, \quad 2\,;$
- $1\,, \quad 2$

$\rightarrow$ $d_{12} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{13} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{14} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{21} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{23} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{24} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{31} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{32} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{34} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{41} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{42} = \; 0$

$\rightarrow$ $d_{43} = \; 0$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11},\; L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{42} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{44},\; L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$$

$\rightarrow$ $a_{11} = \; s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{12} = \; s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{13} = \; s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{14} = \; s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow$ $a_{21} = \; s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{22} = \; s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{23} = \; s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{24} = \; s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow \; a_{31} = \; s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{32} = \; s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{33} = \; s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{34} = \; s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow \; a_{41} = \; s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{42} = \; s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{43} = \; s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{44} = \; s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow \; b_{11} = \; d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow \; b_{12} = \; d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow \; b_{13} = \; d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow \; b_{14} = \; d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow \; b_{21} = \; d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow \; b_{22} = \; d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow \; b_{23} = \; d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow \; b_{24} = \; d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow \; b_{31} = \; d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow \; b_{32} = \; d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow \; b_{33} = \; d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow \; b_{34} = \; d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow \; b_{41} = \; d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow \; b_{42} = \; d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow \; b_{43} = \; d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow \; b_{44} = \; d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow \; d_{33} = \; d_{11}$

$\rightarrow \; d_{22} = \; d_{11}$

$\longrightarrow$ $d_{11}\,,\quad d_{44} =$

- $-2\,,\quad -1\,;$
- $-2\,,\quad 0\,;$
- $-2\,,\quad 1\,;$
- $-2\,,\quad 2\,;$
- $-1\,,\quad -2\,;$
- $-1\,,\quad 0\,;$
- $-1\,,\quad 1\,;$
- $-1\,,\quad 2\,;$
- $0\,,\quad -2\,;$
- $0\,,\quad -1\,;$
- $0\,,\quad 1\,;$
- $0\,,\quad 2\,;$
- $1\,,\quad -2\,;$
- $1\,,\quad -1\,;$
- $1\,,\quad 0\,;$
- $1\,,\quad 2\,;$
- $2\,,\quad -2\,;$
- $2\,,\quad -1\,;$
- $2\,,\quad 0\,;$
- $2\,,\quad 1$

$\longrightarrow$ $d_{12} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{13} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{14} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{21} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{23} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{24} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{31} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{32} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{34} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{41} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{42} =\ 0$

$\longrightarrow$ $d_{43} =\ 0$

5) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\surd \quad \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{33},\ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_3 = d_{44},\ L_3 = \left( \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow\ a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow\ b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow$ $d_{22} =$ $d_{11}$

$\rightarrow$ $d_{11}$ , $d_{33}$ , $d_{44}$ =

- $-2$ , $-1$ , $0$ ;
- $-2$ , $-1$ , $1$ ;
- $-2$ , $-1$ , $2$ ;
- $-2$ , $0$ , $1$ ;
- $-2$ , $0$ , $2$ ;
- $-2$ , $1$ , $2$ ;
- $-1$ , $-2$ , $0$ ;
- $-1$ , $-2$ , $1$ ;
- $-1$ , $-2$ , $2$ ;
- $-1$ , $0$ , $1$ ;
- $-1$ , $0$ , $2$ ;
- $-1$ , $1$ , $2$ ;
- $1$ , $-2$ , $-1$ ;
- $1$ , $-2$ , $0$ ;
- $1$ , $-2$ , $2$ ;
- $1$ , $-1$ , $0$ ;
- $1$ , $-1$ , $2$ ;
- $1$ , $0$ , $2$ ;
- $2$ , $-2$ , $-1$ ;
- $2$ , $-2$ , $0$ ;
- $2$ , $-2$ , $1$ ;
- $2$ , $-1$ , $0$ ;
- $2$ , $-1$ , $1$ ;
- $2$ , $0$ , $1$

$\rightarrow$ $d_{12} =$ 1

$\rightarrow$ $d_{13} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{14} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{21} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{23} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{24} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{31} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{32} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{34} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{41} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{42} =$ 0

$\rightarrow$ $d_{43} =$ 0

6) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{33},\ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow \ a_{11} = \ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow \ a_{12} = \ s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow \ a_{13} = \ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow \ a_{14} = \ s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow \ a_{21} = \ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow \ a_{22} = \ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow \ a_{23} = \ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow \ a_{24} = \ s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow \ a_{31} = \ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow \ a_{32} = \ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow \ a_{33} = \ s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow \ a_{34} = \ s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow \ a_{41} = \ s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow \ a_{42} = \ s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow \ a_{43} = \ s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow \ a_{44} = \ s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow \ b_{11} = \ d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow \ b_{12} = \ d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow \ b_{13} = \ d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow \ b_{14} = \ d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow \ b_{21} = \ d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow \ b_{22} = \ d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow \ b_{23} = \ d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow \ b_{24} = \ d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow \ b_{31} = \ d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow \ b_{32} = \ d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow \ b_{33} = \ d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow \ b_{34} = \ d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow \ b_{41} = \ d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow \ b_{42} = \ d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow \ b_{43} = \ d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow \ b_{44} = \ d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

- $\rightarrow\ d_{44} = \ d_{33}$
- $\rightarrow\ d_{22} = \ d_{11}$
- $\rightarrow\ d_{11}\,, \quad d_{33} =$
  - $-2\,, \quad -1\,;$
  - $-2\,, \quad 0\,;$
  - $-2\,, \quad 1\,;$
  - $-2\,, \quad 2\,;$
  - $-1\,, \quad -2\,;$
  - $-1\,, \quad 0\,;$
  - $-1\,, \quad 1\,;$
  - $-1\,, \quad 2\,;$
  - $0\,, \quad -2\,;$
  - $0\,, \quad -1\,;$
  - $0\,, \quad 1\,;$
  - $0\,, \quad 2\,;$
  - $1\,, \quad -2\,;$
  - $1\,, \quad -1\,;$
  - $1\,, \quad 0\,;$
  - $1\,, \quad 2\,;$
  - $2\,, \quad -2\,;$
  - $2\,, \quad -1\,;$
  - $2\,, \quad 0\,;$
  - $2\,, \quad 1$
- $\rightarrow\ d_{12} = \ 1$
- $\rightarrow\ d_{13} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{14} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{21} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{23} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{24} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{31} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{32} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{34} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{41} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{42} = \ 0$
- $\rightarrow\ d_{43} = \ 0$

7) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{44}, \ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$

$\to \ a_{11} = \ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\to \ a_{12} = \ s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\to \ a_{13} = \ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\to \ a_{14} = \ s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\to \ a_{21} = \ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\to \ a_{22} = \ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\to \ a_{23} = \ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\to \ a_{24} = \ s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\to \ a_{31} = \ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\to \ a_{32} = \ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\to \ a_{33} = \ s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\to \ a_{34} = \ s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\to \ a_{41} = \ s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\to \ a_{42} = \ s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\to \ a_{43} = \ s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\to \ a_{44} = \ s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\to \ b_{11} = \ d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\to \ b_{12} = \ d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\to \ b_{13} = \ d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\to \ b_{14} = \ d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\to \ b_{21} = \ d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\to \ b_{22} = \ d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\to \ b_{23} = \ d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\to \ b_{24} = \ d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\to \ b_{31} = \ d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\to \ b_{32} = \ d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\to \ b_{33} = \ d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\to \ b_{34} = \ d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\to \ b_{41} = \ d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\to \ b_{42} = \ d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\to \ b_{43} = \ d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\to \ b_{44} = \ d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

→ $d_{33} = d_{11}$

→ $d_{22} = d_{11}$

→ $d_{11}, \quad d_{44} =$

- $-2, \quad -1;$
- $-2, \quad 0;$
- $-2, \quad 1;$
- $-2, \quad 2;$
- $-1, \quad -2;$
- $-1, \quad 0;$
- $-1, \quad 1;$
- $-1, \quad 2;$
- $0, \quad -2;$
- $0, \quad -1;$
- $0, \quad 1;$
- $0, \quad 2;$
- $1, \quad -2;$
- $1, \quad -1;$
- $1, \quad 0;$
- $1, \quad 2;$
- $2, \quad -2;$
- $2, \quad -1;$
- $2, \quad 0;$
- $2, \quad 1$

→ $d_{12} = 1$

→ $d_{13} = 0$

→ $d_{14} = 0$

→ $d_{21} = 0$

→ $d_{23} = 0$

→ $d_{24} = 0$

→ $d_{31} = 0$

→ $d_{32} = 0$

→ $d_{34} = 0$

→ $d_{41} = 0$

→ $d_{42} = 0$

→ $d_{43} = 0$

$$8)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$$

$\longrightarrow \quad a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\longrightarrow \quad a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\longrightarrow \quad a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\longrightarrow \quad a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\longrightarrow \quad a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\longrightarrow \quad a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\longrightarrow \quad a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\longrightarrow \quad a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\longrightarrow \quad a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\longrightarrow \quad a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\longrightarrow \quad a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\longrightarrow \quad a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\longrightarrow \quad a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\longrightarrow \quad a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\longrightarrow \quad a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\longrightarrow \quad a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\longrightarrow \quad b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\longrightarrow \quad b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\longrightarrow \quad b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\longrightarrow \quad b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\longrightarrow \quad b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\longrightarrow \quad b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\longrightarrow \quad b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\longrightarrow \quad b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\longrightarrow \quad b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\longrightarrow \quad b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\longrightarrow \quad b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\longrightarrow \quad b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\longrightarrow \quad b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\longrightarrow \quad b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\longrightarrow \quad b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\longrightarrow \quad b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow\ d_{44} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{33} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{22} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{11}\,,\quad d_{44} =$

- $-2$ ;
- $-1$ ;
- $0$ ;
- $1$ ;
- $2$

$\rightarrow\ d_{12} = \ 1$

$\rightarrow\ d_{13} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{14} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{21} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{23} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{24} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{31} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{32} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{34} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{41} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{42} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{43} = \ 0$

$$9)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark\quad \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \right),\quad \lambda_2 = d_{33},\ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right)$$

$\rightarrow\ a_{11} = \ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{12} = \ s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{13} = \ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{14} = \ s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{21} = \ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{22} = \ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{23} = \ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{24} = \ s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{31} = \ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{32} = \ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow$ $a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow$ $a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow$ $a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow$ $a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow$ $b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow$ $b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow$ $b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow$ $b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow$ $b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow$ $b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow$ $b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow$ $b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow$ $b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow$ $b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow$ $b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow$ $b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow$ $b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow$ $b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow$ $b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow$ $b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow$ $d_{44} = d_{33}$

$\rightarrow$ $d_{22} = d_{11}$

$\rightarrow$ $d_{11}\,, \quad d_{33} =$

- $-2\,, \quad -1\,;$
- $-2\,, \quad 0\,;$
- $-2\,, \quad 1\,;$
- $-2\,, \quad 2\,;$
- $-1\,, \quad 0\,;$
- $-1\,, \quad 1\,;$
- $-1\,, \quad 2\,;$
- $0\,, \quad 1\,;$
- $0\,, \quad 2\,;$
- $1\,, \quad 2$

$\rightarrow$ $d_{12} = 1$

$\rightarrow$ $d_{13} = 0$

$\rightarrow$ $d_{14} = 0$

$\longrightarrow\ d_{21} =\ 0$

$\longrightarrow\ d_{23} =\ 0$

$\longrightarrow\ d_{24} =\ 0$

$\longrightarrow\ d_{31} =\ 0$

$\longrightarrow\ d_{32} =\ 0$

$\longrightarrow\ d_{34} =\ 1$

$\longrightarrow\ d_{41} =\ 0$

$\longrightarrow\ d_{42} =\ 0$

$\longrightarrow\ d_{43} =\ 0$

10) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark\ \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right)$

$\longrightarrow\ a_{11} =\ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\longrightarrow\ a_{12} =\ s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\longrightarrow\ a_{13} =\ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\longrightarrow\ a_{14} =\ s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\longrightarrow\ a_{21} =\ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\longrightarrow\ a_{22} =\ s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\longrightarrow\ a_{23} =\ s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\longrightarrow\ a_{24} =\ s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\longrightarrow\ a_{31} =\ s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\longrightarrow\ a_{32} =\ s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\longrightarrow\ a_{33} =\ s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\longrightarrow\ a_{34} =\ s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\longrightarrow\ a_{41} =\ s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\longrightarrow\ a_{42} =\ s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\longrightarrow\ a_{43} =\ s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\longrightarrow\ a_{44} =\ s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\longrightarrow\ b_{11} =\ d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\longrightarrow\ b_{12} =\ d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\longrightarrow\ b_{13} =\ d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\longrightarrow\ b_{14} =\ d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\longrightarrow\ b_{21} =\ d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\longrightarrow\ b_{22} =\ d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{23} = \ d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{24} = \ d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{31} = \ d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{32} = \ d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{33} = \ d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{34} = \ d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{41} = \ d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{42} = \ d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{43} = \ d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{44} = \ d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow\ d_{44} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{33} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{22} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ d_{12} = \ 1$

$\rightarrow\ d_{13} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{14} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{21} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{23} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{24} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{31} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{32} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{34} = \ 1$

$\rightarrow\ d_{41} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{42} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{43} = \ 0$

11) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark\ \ \lambda_1 = d_{11},\ L_1 = \left(\begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}\right), \quad \lambda_2 = d_{44},\ L_2 = \left(\begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix}\right)$

$\rightarrow\ a_{11} = \ s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow\ a_{12} = \ s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow\ a_{13} = \ s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{14} = \ s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow\ a_{21} = \ s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow \quad a_{22} = \; s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow \quad a_{23} = \; s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow \quad a_{24} = \; s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow \quad a_{31} = \; s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow \quad a_{32} = \; s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow \quad a_{33} = \; s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow \quad a_{34} = \; s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow \quad a_{41} = \; s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow \quad a_{42} = \; s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow \quad a_{43} = \; s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow \quad a_{44} = \; s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow \quad b_{11} = \; d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow \quad b_{12} = \; d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow \quad b_{13} = \; d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow \quad b_{14} = \; d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow \quad b_{21} = \; d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow \quad b_{22} = \; d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow \quad b_{23} = \; d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow \quad b_{24} = \; d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow \quad b_{31} = \; d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow \quad b_{32} = \; d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow \quad b_{33} = \; d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow \quad b_{34} = \; d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow \quad b_{41} = \; d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow \quad b_{42} = \; d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow \quad b_{43} = \; d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow \quad b_{44} = \; d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow \quad d_{33} = \; d_{11}$

$\rightarrow \quad d_{22} = \; d_{11}$

→ $d_{11}\,,\quad d_{44} =$

- $-2\,,\quad -1\,;$
- $-2\,,\quad 0\,;$
- $-2\,,\quad 1\,;$
- $-2\,,\quad 2\,;$
- $-1\,,\quad -2\,;$
- $-1\,,\quad 0\,;$
- $-1\,,\quad 1\,;$
- $-1\,,\quad 2\,;$
- $0\,,\quad -2\,;$
- $0\,,\quad -1\,;$
- $0\,,\quad 1\,;$
- $0\,,\quad 2\,;$
- $1\,,\quad -2\,;$
- $1\,,\quad -1\,;$
- $1\,,\quad 0\,;$
- $1\,,\quad 2\,;$
- $2\,,\quad -2\,;$
- $2\,,\quad -1\,;$
- $2\,,\quad 0\,;$
- $2\,,\quad 1$

→ $d_{12} = \ 1$

→ $d_{13} = \ 0$

→ $d_{14} = \ 0$

→ $d_{21} = \ 0$

→ $d_{23} = \ 1$

→ $d_{24} = \ 0$

→ $d_{31} = \ 0$

→ $d_{32} = \ 0$

→ $d_{34} = \ 0$

→ $d_{41} = \ 0$

→ $d_{42} = \ 0$

→ $d_{43} = \ 0$

12) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\surd \quad \lambda_1 = d_{11}, \;\; L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow \; a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow \; a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow \; a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow \; a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow \; b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow \; b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow \; b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow \; b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow \; b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow \; b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow \; b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow \; b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow \; b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow \; b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow \; b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow \; b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow \; b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow \; b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow \; b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow \; b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow \; d_{44} = \; d_{11}$

$\rightarrow \; d_{33} = \; d_{11}$

$\rightarrow \; d_{22} = \; d_{11}$

$\rightarrow \; d_{11} = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 0\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

$\rightarrow \; d_{12} = \; 1$

$\rightarrow \; d_{13} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{14} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{21} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{23} = \; 1$

$\rightarrow \; d_{24} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{31} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{32} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{34} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{41} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{42} = \; 0$

$\rightarrow \; d_{43} = \; 0$

13) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$\checkmark \;\; \lambda_1 = d_{11}, \;\; L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \right)$

$\rightarrow \; a_{11} = \; s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{12} = \; s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{13} = \; s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{14} = \; s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$

$\rightarrow \; a_{21} = \; s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{22} = \; s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{23} = \; s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{24} = \; s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$

$\rightarrow \; a_{31} = \; s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{32} = \; s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{33} = \; s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$

$\rightarrow \; a_{34} = \; s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$

$\rightarrow \; a_{41} = \; s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$

$\rightarrow \; a_{42} = \; s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$

$\rightarrow \; a_{43} = \; s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$

$\rightarrow\ a_{44} = \ s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$

$\rightarrow\ b_{11} = \ d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{12} = \ d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{13} = \ d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{14} = \ d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{21} = \ d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{22} = \ d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{23} = \ d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{24} = \ d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{31} = \ d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{32} = \ d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{33} = \ d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{34} = \ d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44}$

$\rightarrow\ b_{41} = \ d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41}$

$\rightarrow\ b_{42} = \ d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42}$

$\rightarrow\ b_{43} = \ d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43}$

$\rightarrow\ b_{44} = \ d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}$

$\rightarrow\ d_{44} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{33} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{22} = \ d_{11}$

$\rightarrow\ d_{11} = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow\ d_{12} = \ 1$

$\rightarrow\ d_{13} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{14} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{21} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{23} = \ 1$

$\rightarrow\ d_{24} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{31} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{32} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{34} = \ 1$

$\rightarrow\ d_{41} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{42} = \ 0$

$\rightarrow\ d_{43} = \ 0$

**103.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. Привести матрицу к диагональному виду. Указать диагонализирующую матрицу.

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & 2b + \frac{a}{2} \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\sigma(A) = \left\{a + 2b; \dfrac{a}{2}\right\}$; $\vec{x}_1 = (x_1; 2x_1)$; $\vec{x}_2 = \left(-\dfrac{2b}{a}x_2; x_2\right)$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 4 ; 6 ; $-2$ ; $-4$ ; $-6$

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; $-1$ ; $-2$ ; $-3$ ; $-4$

Спектр матрицы 1

**104.** Найти спектр матрицы $A$

1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ b & -c & a \end{pmatrix}$

✓ $\sigma(A) = \{a; a; a\}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5

→ $b =$ 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9 ; −10

→ $c =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −8 ; −9 ; −10

2) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & c & a \end{pmatrix}$

✓ $\sigma(A) = \{a; a-c; a+c\}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9 ; −10

→ $c =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; −2 ; −4 ; −6 ; −8 ; −10 ; −12 ; −14

3) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & a & a \\ a & \frac{c}{2} & c \end{pmatrix}$

✓ $\sigma(A) = \{0; a; a+c\}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9 ; −10

→ $c =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; −2 ; −4 ; −6 ; −8 ; −10 ; −12 ; −14

**105.** Найти спектр матрицы $A$

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\surd$ $\sigma(A) = \{s_1; s_2; s_3\}$

$\rightarrow$ $k = \sqrt{K}\,; \quad -\sqrt{K}$

$\rightarrow$ $K\,, \quad s_1\,, \quad s_2\,, \quad s_3 =$

- $2\,, \quad 2\,, \quad 5\,, \quad 5\,;$
- $6\,, \quad 1\,, \quad 5\,, \quad 6\,;$
- $20\,, \quad -1\,, \quad 5\,, \quad 8\,;$
- $30\,, \quad -2\,, \quad 5\,, \quad 9\,;$
- $42\,, \quad -3\,, \quad 5\,, \quad 10\,;$
- $56\,, \quad -4\,, \quad 5\,, \quad 11\,;$
- $72\,, \quad -5\,, \quad 5\,, \quad 12\,;$
- $12\,, \quad 0\,, \quad 5\,, \quad 7$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & k & 4 \end{pmatrix}$

$\surd$ $\sigma(A) = \{s_1; s_2; s_3\}$

$\rightarrow$ $k = \sqrt{K}\,; \quad -\sqrt{K}$

$\rightarrow$ $K\,, \quad s_1\,, \quad s_2\,, \quad s_3 =$

- $2\,, \quad 3\,, \quad 3\,, \quad 6\,;$
- $6\,, \quad 2\,, \quad 3\,, \quad 7\,;$
- $12\,, \quad 1\,, \quad 3\,, \quad 8\,;$
- $20\,, \quad 0\,, \quad 3\,, \quad 9\,;$
- $30\,, \quad -1\,, \quad 3\,, \quad 10\,;$
- $42\,, \quad -2\,, \quad 3\,, \quad 11\,;$
- $56\,, \quad -3\,, \quad 3\,, \quad 12\,;$
- $72\,, \quad -4\,, \quad 3\,, \quad 13$

Спектр комплексной матрицы 3x3

**106.** Найти спектр матрицы.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & a-bi & 0 \\ a+bi & 0 & c+di \\ 0 & 0 & k+mi \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\sigma(A) = \left\{k+mi; \sqrt{a^2+b^2}; -\sqrt{a^2+b^2}\right\}$

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & c+di \\ 0 & 0 & k+mi \end{pmatrix}$

$\checkmark$ $\sigma(A) = \{k+mi; a+bi; -a+bi\}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $d =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $m =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

Спектр матрицы 4x4

**107.** Найти спектр матрицы $A$.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & c \\ n & 0 & k & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

✓ $\sigma(A) = \{0; 0; 0; b\}$

→ $a = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $b = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $c = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $m = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $n = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $k = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & n \\ k & m & 0 & b \end{pmatrix}$

✓ $\sigma(A) = \{0; 0; 0; b\}$

→ $a = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $b = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $c = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $m = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $n = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $k = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

3) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & n & k \\ k & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

✓ $\sigma(A) = \{0; 0; a; b\}$

→ $a = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $b = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $c = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $m = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $n = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

→ $k = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4$

4) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & k \\ k & n & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

$\surd$ $\sigma(A) = \{0; 0; a; b\}$

$\to$ $a =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $b =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $c =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $m =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $n =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $k =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

5) $A = \begin{pmatrix} b & 0 & a & c \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & n & b \end{pmatrix}$

$\surd$ $\sigma(A) = \{0; 0; b - c; b + c\}$

$\to$ $a =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $b =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $c =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $m =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $n =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

6) $A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & m & 0 & n \\ c & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

$\surd$ $\sigma(A) = \{0; 0; b - c; b + c\}$

$\to$ $a =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $b =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $c =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $m =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\to$ $n =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\surd$ $\sigma(A) = \{bi; -bi; b; -b\}$

$\to$ $b =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$ ; 5 ; $-5$ ; 6 ; $-6$ ; 7 ; $-7$ ; 8 ; $-8$ ; 9 ; $-9$

**108.** Найти собственные векторы матрицы $A$.

$$1)\quad A=\begin{pmatrix}0&0&a&c\\n&0&k&m\\0&0&0&0\\0&0&0&b\end{pmatrix}$$

$$\lambda=0,\ (0;x_2;0;0),\ x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

√

$$\lambda=b,\ \left(\frac{c}{b}x_4;\left(\frac{nc}{b^2}+\frac{m}{b}\right)x_4;0;x_4\right),\ x_4\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $b=$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$

$\rightarrow$ $c=$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $m=$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $n=$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $k=$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$$2)\quad A=\begin{pmatrix}0&a&0&0\\0&0&0&0\\a&c&0&n\\k&m&0&b\end{pmatrix}$$

$$\lambda=0,\ (0;0;x_3;0),\ x_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

√

$$\lambda=b,\ \left(0;0;\frac{n}{b}x_4;x_4\right),\ x_4\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $b=$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$

$\rightarrow$ $c=$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $m=$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $n=$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $k=$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$$3)\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\m&-a&n&k\\k&0&-a&c\\0&0&0&b-a\end{pmatrix}$$

$$\lambda=0,\ (0;x_2;0;0),\ x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\lambda=a,\ \left(\frac{a}{k}x_3;\left(\frac{m}{k}+\frac{n}{a}\right)x_3;x_3;0\right),\ x_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

√

$$\lambda=b,\ \left(0;\left(\frac{nc}{b^2}+\frac{k}{b}\right)x_4;\frac{c}{b}x_4;x_4\right),\ x_4\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; $-1$ ; 3 ; $-3$

$\rightarrow$ $b=$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $c=$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $m =$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $n =$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $k =$ 2 ; $-2$

4) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & k \\ k & n & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

$\lambda = 0,\ (0; 0; x_3; 0),\ x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\checkmark$ $\lambda = a,\ \left(\frac{a}{m}x_2; x_2; \left(\frac{k}{m} + \frac{n}{a}\right) x_2; 0\right),\ x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda = b,\ \left(0; \frac{k}{b}x_4; \left(\frac{kn}{b^2} + \frac{c}{b}\right) x_4; x_4\right),\ x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; $-1$ ; 3 ; $-3$

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $m =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$

$\rightarrow$ $n =$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $k =$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

5) $A = \begin{pmatrix} b & 0 & a & c \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & n & b \end{pmatrix}$

$\lambda = 0,\ (0; x_2; 0; 0),\ x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\checkmark$ $\lambda = b - c,\ (-x_4; 0; 0; x_4),\ x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda = b + c,\ (x_4; 0; 0; x_4),\ x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; $-1$ ; 3 ; $-3$

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; $-2$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $m =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $n =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

6) $A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & m & 0 & n \\ c & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

$\lambda = 0,\ (0; 0; x_3; 0),\ x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\checkmark$ $\lambda = b - c,\ \left(-x_4; 0; \frac{n-a}{b-c}x_4; x_4\right),\ x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda = b + c,\ \left(x_4; 0; \frac{a+n}{b+c}x_4; x_4\right),\ x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; $-1$

$\rightarrow$ $b =$ $c+2$ ; $c-2$ ; $c+4$

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; 4

$\rightarrow$ $m =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$

$\rightarrow$ $n =$ 3 ; $-3$ ; 5 ; $-5$

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = b,\ (x_4; x_4; x_4; x_4),\ x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda = -b,\ (-x_4; x_4; -x_4; x_4),\ x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\surd$

$\lambda = bi,\ (-x_3; -ix_3; x_3; ix_3),\ x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda = -bi,\ (-x_3; ix_3; x_3; -ix_3),\ x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$ ; 5 ; $-5$ ; 6 ; $-6$ ; 7 ; $-7$ ; 8 ; $-8$ ; 9 ; $-9$

**109.** Найти собственные векторы матрицы $A$

$\Rightarrow$ $b = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ -5;\ -6;\ -7;\ -8;\ -9$

$\Rightarrow$ $k = 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $c = 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ -5;\ -6;\ -7;\ -8$

$\Rightarrow$ $d = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ -1;\ -2;\ -3;\ -4 - 5;\ -6;\ -7;\ -8;\ -9$

1) $A = \begin{pmatrix} b+k & d & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & b+k \end{pmatrix}$

√ $\lambda_1 = b$, $\left(-\dfrac{k}{c}x_3; \dfrac{k^2-c^2}{cd}x_3; x_3\right)$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$\lambda_2 = b+k-c$, $(-x_3; 0; x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$\lambda_3 = b+k+c$, $(x_3; 0; x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

2) $A = \begin{pmatrix} b+k & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & d & b+k \end{pmatrix}$

√ $\lambda_1 = b$, $\left(-\dfrac{c}{k}x_3; \dfrac{c^2-k^2}{kd}x_3; x_3\right)$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$\lambda_2 = b+k-c$, $(-x_3; 0; x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$\lambda_3 = b+k+c$, $(x_3; 0; x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

**110.** Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду

1) $L(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + ax_3^2 - 2ax_1x_2$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

√

$L(y_1, y_2, y_3) = by_1^2 + 2ay_3^2$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 6

→ $b =$ 5; −5; 7; −7; 9; −9

2) $L(x_1, x_2, x_3) = bx_1^2 + ax_2^2 - 2ax_2x_3 + ax_3^2$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

√

$L(y_1, y_2, y_3) = by_1^2 + 2ay_3^2$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 6

→ $b =$ 5; −5; 7; −7; 9; −9

3) $L(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 - 2ax_1x_2$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

√

$L(y_1, y_2, y_3) = by_1^2 + 2ay_3^2$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 6

→ $b =$ 5; −5; 7; −7; 9; −9

4) $L(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + cx_2^2 + ax_3^2 - 2bx_1x_3$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

√

$L(y_1, y_2, y_3) = cy_1^2 + (a-b)y_2^2 + (a+b)y_3^2$

→ $a =$ 3; 4; 5

→ $b =$ 1; 2

→ $c =$ 8; 9; 10

5) $L(x_1, x_2, x_3) = cx_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 - 2bx_2x_3$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

√

$L(y_1, y_2, y_3) = cy_1^2 + (a-b)y_2^2 + (a+b)y_3^2$

$\rightarrow$ $a =$ 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2

$\rightarrow$ $c =$ 8 ; 9 ; 10

6) $L(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + cx_3^2 - 2bx_1x_2$

$\surd$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L(y_1, y_2, y_3) = cy_1^2 + (a-b)y_2^2 + (a+b)y_3^2$$

$\rightarrow$ $a =$ 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2

$\rightarrow$ $c =$ 8 ; 9 ; 10

# Часть V

# Прямая на плоскости

Область

**111.** Построить облать решений следующих систем неравенств.

1) $$\begin{cases} Bx - ay + aA \geq 0, \\ Cx + by \leq aC + b(A+B), \\ (A+B-C)x + cy \leq (a+b+c)(A+B-C), \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\checkmark$ $(0,0)$, $(0,A)$, $(a, A+B)$, $(a+b, A+B-C)$, $(a+b+c, 0)$

$\rightarrow$ $A =$ 3; 4; 5; 6; 7

$\rightarrow$ $B =$ 2; 3; 4; 5

$\rightarrow$ $C =$ 0; 1; 2; 3; 4

$\rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6

$\rightarrow$ $c =$ $b-1$; $b+1$; $b+2$

$\rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3

**112.** Написать уравнение прямой, проходящей через точки

1) $A(A, B),\ B(A+ka, B+kb)$

$\surd$ $bx - ay + aB - bA = 0$

$\to$ $A =\ -3\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

$\to$ $B =\ -4\,;\ \ -2\,;\ \ 4$

$\to$ $a =\ -5\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 5$

$\to$ $b =\ -2\,;\ \ -4\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 4$

$\to$ $k =\ 1\,;\ \ -1\,;\ \ 3\,;\ \ -2$

**113.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A$, и параллельной прямой, соединяющей точки $M$ и $N$.

1) $A(A, B)$, $M(C, D)$, $N(C + kc, D + kd)$

√ $dx - cy + cB - dA = 0$

→ $c =$ $-5$ ; $-3$ ; $-1$ ; $1$ ; $3$ ; $5$

→ $d =$ $-2$ ; $-4$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $4$

→ $A =$ $-1$ ; $2$ ; $3$

→ $B =$ $1$ ; $2$ ; $-3$

→ $C =$ $-3$ ; $5$ ; $7$

→ $D =$ $-4$ ; $-2$ ; $4$

→ $k =$ $1$ ; $-1$ ; $3$ ; $-2$

**114.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A$, и перпендикулярной прямой, соединяющей точки $M$ и $N$.

1) $A(A, B),\ M(C, D),\ N(C+kc, D+kd)$

√ $cx + dy - cA - dB = 0$

→ $c =\ -5\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 5$

→ $d =\ -2\,;\ \ -4\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 4$

→ $A =\ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

→ $B =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ -3$

→ $C =\ -3\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

→ $D =\ -4\,;\ \ -2\,;\ \ 4$

→ $k =\ 1\,;\ \ -1\,;\ \ 3\,;\ \ -2$

**115.** Найти угол между прямыми:

1) $ax + by - aA - bB = 0, \; cx + dy - cC - dD = 0$

✓ $\operatorname{arctg}\left|\dfrac{ad - bc}{ac + bd}\right|$

→ $a = \; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; -2$

→ $b = \; 1\,; \;\; -1\,; \;\; 3\,; \;\; -3\,; \;\; 5\,; \;\; -5$

→ $c = \; 1\,; \;\; -1\,; \;\; 3\,; \;\; -3\,; \;\; 5\,; \;\; -5$

→ $d = \; 2\,; \;\; -2\,; \;\; 1\,; \;\; -1$

→ $A = \; 2\,; \;\; -3$

→ $B = \; 3\,; \;\; -4$

→ $C = \; 1\,; \;\; -5$

→ $D = \; 6\,; \;\; -3$

Точка пересечения диагоналей четырёхугольника с плохим ответом

**116.** Найти точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

1) $A(a, A),\ B(b, B),\ C(c, C),\ D(d, D)$

$\checkmark$ $\left(\dfrac{lb - ka + A - B}{l - k}, k\dfrac{lb - la + A - B}{l - k} + A\right)$

$\rightarrow$ $k = \dfrac{C - A}{c - a}$

$\rightarrow$ $l = \dfrac{D - B}{d - b}$

$\rightarrow$ $a = -4;\ -5;\ -6;\ -7$

$\rightarrow$ $b = 9;\ 10;\ 11;\ 12$

$\rightarrow$ $c = 9;\ 10;\ 11;\ 12$

$\rightarrow$ $d = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

$\rightarrow$ $A = 3;\ 4;\ 5;\ 6$

$\rightarrow$ $B = 5;\ 6;\ 7;\ 8$

$\rightarrow$ $C = -2;\ -1;\ 0;\ 1$

$\rightarrow$ $D = -5;\ -4;\ -3;\ -2$

**117.** Найти точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

1) $A(A+ka, B+kb)$, $B(A+mc, B+md)$, $C(A+la, B+lb)$, $D(A+nc, B+nd)$

$\surd$ $(A, B)$

$\rightarrow$ $A = -5;\ 3;\ -1$

$\rightarrow$ $B = -2;\ 4;\ 6$

$\rightarrow$ $a = 1;\ -1;\ 3;\ -3$

$\rightarrow$ $b = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 4;\ -4$

$\rightarrow$ $c = 5;\ -5$

$\rightarrow$ $d = 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 4;\ -4;\ 3;\ -3$

$\rightarrow$ $k = 3;\ 5$

$\rightarrow$ $l = -2;\ -4$

$\rightarrow$ $m = 3;\ 2$

$\rightarrow$ $n = -1;\ -5$

Высота в треугольнике

**118.** В треугольнике $ABC$ найти длину высоты $AD$.

1) $A(A+cl, B+dl),\ B(A,B),\ C(A+ak, B+bk)$

✓ $\left|\dfrac{-bcl+adl}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

→ $a=$ 2 ; −3 ; 3 ; 4 ; −4

→ $b=$ 1 ; −4 ; 4 ; 3 ; −3

→ $A=$ 3 ; −2

→ $B=$ −4 ; 5

→ $c=$ 1 ; 2 ; −2 ; −3 ; 3

→ $d=$ −5 ; 5

→ $k=$ 1 ; 2 ; −3

→ $l=$ 3 ; −2

Прямая через точку

**119.**

1) Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M(a, b)$ и отсекающих на координатных осях отрезки равной длины.

√ $y = x - a + b$; $y = -x + a + b$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

Периметр и площадь треугольника по вершинам

**120.**

1) Дан треугольник с вершинами $A(a, b)$, $B(a+3, b+3)$, $C(a+4, b-4)$. Найти его периметр и площадь.

$\surd$ $P = 12,\ S = 6$

$\rightarrow$ $a = \ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $b = \ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

**121.**

1) Дан треугольник с вершинами $A(a, b)$, $B(a+3, b+3)$, $C(a+4, b-4)$. Найти уравнения сторон.

$AB$: $x - y - a + b = 0$;

√ $AC$: $x + y - a - b = 0$;

$BC$: $7x + y - b - 7a - 24 = 0$

→ $a =$ $-5$ ; $-4$ ; $-3$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$

→ $b =$ $-5$ ; $-4$ ; $-3$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$

Внутренние углы треугольника

**122.**

1) Дан треугольник с вершинами $A(a, b)$, $B(a+3, b+3)$, $C(a+4, b-4)$. Найти его внутренние углы.

$\angle A = 90°$,

√ $\angle C = \operatorname{arctg} 3/4$,

$\angle B = \operatorname{arctg} 4/3$

→ $a =$ $-5$ ; $-4$ ; $-3$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$

→ $b =$ $-5$ ; $-4$ ; $-3$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$

**123.**

1) Известны уравнения сторон треугольника $ABC$: $x - y - a + b = 0$ $(AB)$, $x + y - a - b = 0$ $(AC)$, $7x + y - b - 7a - 24 = 0$ $(BC)$. Найти его периметр и площадь.

√ $P = 12,\ S = 6$

→ $a =\ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

→ $b =\ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

**124.**

1) Известны уравнения сторон треугольника $ABC$: $x-y-a+b=0$ $(AB)$, $x+y-a-b=0$ $(AC)$, $7x+y-b-7a-24=0$ $(BC)$. Составить уравнение биссектрисы, проведённой из вершины $A$ и найти её длину.

√ $y=b,\ d=3\frac{3}{7}$

→ $a=$ $-5$ ; $-4$ ; $-3$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$

→ $b=$ $-5$ ; $-4$ ; $-3$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$

Точка на прямой, равноудалённая от двух данных точек

**125.**

1) На прямой $y - x - 2c = 0$ найти точку, равноудалённую от точек $A(a; a)$ и $B(a + 2b; a + 2b)$.

√ $M(a + b - c; a + b + c)$

→ $a = -5\,;\ -4\,;\ -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

→ $b = -5\,;\ -4\,;\ -3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

→ $c = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

**126.**

1) Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + y - a - b = 0$ и $7x + y - b - 7a - 24 = 0$ и делящей отрезок $AB$ между точками $A(a + 5, b + 1)$ и $B(a + 8, b - 2)$ в отношении $2 : 1$.

$\surd$ $y = x - a + b - 8$

$\rightarrow$ $a = -5;\ -4;\ -3;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\rightarrow$ $b = -5;\ -4;\ -3;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

**127.**

$\Rightarrow$ $a = -5;\ -4;\ -3;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $b = -5;\ -4;\ -3;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $C = -5;\ -4;\ -3;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

$\Rightarrow$ $k = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9$

1) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(a;b)$ параллельно прямой $y = kx + C$.

$\surd$ $y = kx - ka + b$

2) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(a;b)$ параллельно прямой $kAx - Ay + C = 0$.

$\surd$ $y = kx - ka + b$

$\rightarrow$ $A = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$

3) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(a;b)$ перпендикулярно прямой $y = -\frac{1}{k}x + C$.

$\surd$ $y = kx - ka + b$

4) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(a;b)$ параллельно прямой $Ax + Aky + C = 0$.

$\surd$ $y = kx - ka + b$

$\rightarrow$ $A = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$

**128.**

1) Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой $bx + ay - ab = 0$ от координатного угла.

√ $\frac{1}{2}ab$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

**129.**

1) Найти расстояние от начала координат до прямой $Ax - Ay + C = 0$

√ $d = \dfrac{C}{A\sqrt{2}}$

→ $A =\ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

→ $C =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7\,;\ \ 8\,;\ \ 9$

# Часть VI

# Прямая и плоскость в пространстве

Уравнение плоскости Простая

**130.** Составить уравнение плоскости.

$\Rightarrow$ $a =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $b =\ -4\,;\ \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $c =\ -5\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 7$

$\Rightarrow$ $A =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $B =\ -4\,;\ \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $C =\ -5\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

1) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(a;b;c)$ и имеет нормальныей вектор $\vec{N} = (A;B;C)$.

$\surd$ $Ax + By + Cz - aA - bB - cC = 0$

2) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(a;b;c)$ и параллельна плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$\surd$ $Ax + By + Cz - aA - bB - cC = 0$

$\rightarrow$ $D =\ -11\,;\ \ -9\,;\ \ -7\,;\ \ 3\,;\ \ 5\,;\ \ 8$

**131.** Составить уравнение плоскости.

$\Rightarrow$ $a =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $b =\ -4\,;\ \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $c =\ -5\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 7$

$\Rightarrow$ $l_1 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $l_2 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $l_3 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $k_1 =\ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_2 =\ 1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $k_3 =\ 0\,;\ \ 2$

1) Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(a;b;c)$, $M_2(a+l_1;b+l_2;c+l_3)$, и перпендикулярной плоскости $k_1l_1x+k_2l_2y+k_3l_3z+D=0$.

$\surd$ $(k_3-k_2)l_2l_3(x-a)+(k_1-k_3)l_1l_3(y-b)+(k_2-k_1)l_1l_2(z-c)=0$

$\rightarrow$ $D =\ -11\,;\ \ -9\,;\ \ -7\,;\ \ 3\,;\ \ 5\,;\ \ 8$

2) Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(a;b;c)$, $M_2(a+l_1;b+l_2;c+l_3)$, $M_3(a+k_1l_1;b+k_2l_2;c+k_3l_3)$.

$\surd$ $(k_3-k_2)l_2l_3(x-a)+(k_1-k_3)l_1l_3(y-b)+(k_2-k_1)l_1l_2(z-c)=0$

**132.** Составить уравнение плоскости.

$\Rightarrow$ $a =$ $-3$ ; $-2$ ; $0$ ; $1$ ; $2$ ; $3$

$\Rightarrow$ $b =$ $-4$ ; $-2$ ; $1$ ; $3$ ; $4$

1) Написать уравнение плоскости, проходящей через ось $Ox$ и точку $M(0; a; b)$.

$\checkmark$ $by - az = 0$

2) Написать уравнение плоскости, проходящей через ось $Oy$ и точку $M(a; 0; b)$.

$\checkmark$ $bx - az = 0$

3) Написать уравнение плоскости, проходящей через ось $Oz$ и точку $M(a; b; 0)$.

$\checkmark$ $bx - ay = 0$

4) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(a; b; c)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

$\checkmark$ $x + y + z - a - b - c = 0$

$\rightarrow$ $c =$ $-5$ ; $-1$ ; $0$ ; $2$ ; $3$ ; $7$

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(a; b; c)$ и отсекающей на осях $Oy$ и $Oz$ в $k$ раз большие отрезки, чем на оси $Ox$.

$\checkmark$ $kx + y + z - ka - b - c = 0$

$\rightarrow$ $c =$ $-5$ ; $-1$ ; $0$ ; $2$ ; $3$ ; $7$

$\rightarrow$ $k =$ $2$ ; $3$

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(a; b; c)$ и отсекающей на осях $Ox$ и $Oz$ в $k$ раз большие отрезки, чем на оси $Oy$.

$\checkmark$ $x + ky + z - a - kb - c = 0$

$\rightarrow$ $c =$ $-5$ ; $-1$ ; $0$ ; $2$ ; $3$ ; $7$

$\rightarrow$ $k =$ $2$ ; $3$

7) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(a; b; c)$ и отсекающей на осях $Ox$ и $Oy$ в $k$ раз большие отрезки, чем на оси $Oz$.

$\checkmark$ $x + y + kz - a - b - kc = 0$

$\rightarrow$ $c =$ $-5$ ; $-1$ ; $0$ ; $2$ ; $3$ ; $7$

$\rightarrow$ $k =$ $2$ ; $3$

**133.** Найти расстояние.

⇒ $a = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

⇒ $b = \ -4\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

⇒ $c = \ -5\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 7$

⇒ $A = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

⇒ $B = \ -4\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 3$

⇒ $C = \ -5\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

⇒ $D = \ -11\,; \ \ -9\,; \ \ -7\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 8$

1) Найти расстояние от точки $M_0(a;b;c)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

√ $\dfrac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

**134.** Найти угол между плоскостями.

$\Rightarrow$ $A_1 = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $B_1 = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $C_1 = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $D_1 = \ -6\,; \ \ -4\,; \ \ -2\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 7$

$\Rightarrow$ $D_2 = \ -5\,; \ \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 4\,; \ \ 6$

$\Rightarrow$ $k_1 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_2 = \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_3 = \ -2\,; \ \ -1$

1) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

√ $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{((A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2)\,((A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2)}}$

$\rightarrow$ $A_2 = \ k_1A_1$

$\rightarrow$ $B_2 = \ k_2B_1$

$\rightarrow$ $C_2 = \ k_3C_1$

**135.** Составить уравнение прямой.

$\Rightarrow$ $a =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $b =\ -4\,;\ \ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $c =\ -5\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 7$

$\Rightarrow$ $l_1 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $l_2 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $l_3 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

1) Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(a;b;c)$, $M_2(a+l_1;b+l_2;c+l_3)$.

$\checkmark$ $$\frac{x-a}{l_1}=\frac{y-b}{l_2}=\frac{z-c}{l_3}$$

2) Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(a;b;c)$, параллельно прямой $\frac{x-a_2}{l_1}=\frac{y-b_2}{l_2}=\frac{z-c_2}{l_3}$.

$\checkmark$ $$\frac{x-a}{l_1}=\frac{y-b}{l_2}=\frac{z-c}{l_3}$$

$\rightarrow$ $a_2 =\ -1\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $b_2 =\ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $c_2 =\ -4\,;\ \ -3\,;\ \ 1\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

**136.** Проверить, будут ли прямые $l_1$ и $l_2$ параллельны, ортогональными либо не обладают ни одним из этих свойств.

$\Rightarrow$ $A =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $B =\ -3\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $C =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $D_1 =\ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $D_2 =\ -3\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $a =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $b =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $c =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $k_1 =\ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_2 =\ -1\,;\ \ 0$

$\Rightarrow$ $k_3 =\ -2\,;\ \ 3$

1)
$$l_1 : \begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0; \\ k_1Ax + k_2By + k_3Cz + D_2 = 0; \end{cases}$$
$$l2 : \frac{x-a}{k(k_3-k_2)BC} = \frac{y-b}{k(k_1-k_3)AC} = \frac{z-c}{k(k_2-k_1)AB}.$$

√ коллинеарны

$\rightarrow$ $k =\ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

2)
$$l_1 : \begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0; \\ k_1Ax + k_2By + k_3Cz + D_2 = 0; \end{cases}$$
$$l_2 : \frac{x-a}{k(k_2-k_1)AB} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{k(k_2-k_3)BC}.$$

√ ортогональны

$\rightarrow$ $k =\ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

3)
$$l_1 : \begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0; \\ k_1Ax + k_2By + k_3Cz + D_2 = 0; \end{cases}$$
$$l_2 : \frac{x-a}{l_1(k_3-k_2)BC} = \frac{y-b}{l_2(k_1-k_3)AC} = \frac{z-c}{l_3(k_2-k_1)AB}.$$

$\rightarrow$ $l_1 =\ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $l_2 =\ 1\,;\ \ 3$

$\rightarrow$ $l_3 =\ 2\,;\ \ 4$

√ не обладают

Проекция точки на плоскость

**137.** Найти проекцию.

⇒ $a = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

⇒ $b = \ -4\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

⇒ $c = \ -5\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 7$

⇒ $A = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

⇒ $B = \ -4\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 3$

⇒ $C = \ 0\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

⇒ $D = \ -11\,; \ \ -9\,; \ \ -7\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 8$

1) Найти ортогональную проекцию точки $M_0(a;b;c)$ на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

√ $$\left(a-A\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}, b-B\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}, c-C\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}\right)$$

# Часть VII

# Векторы

**138.** Проверить, будут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарными, ортогональными либо не обладают ни одним из этих свойств.

$\Rightarrow$ $a_1 = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $a_2 = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $a_3 = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $c_1 = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $c_2 = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $c_3 = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $l_1 = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $l_2 = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\Rightarrow$ $l_3 = -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

1) $\begin{array}{ll} A(a_1, a_2, a_3), & B(a_1 + l_1, a_2 + l_2, a_3 + l_3), \\ C(c_1, c_2, c_3), & D(c_1 + kl_1, c_2 + kl_2, c_3 + kl_3) \end{array}$

$\surd$ коллинеарны

$\rightarrow$ $k = -1;\ 1;\ 2;\ 3$

2) $\begin{array}{ll} A(a_1, a_2, a_3), & B(a_1 + l_1, a_2 + l_2, a_3 + l_3), \\ C(c_1, c_2, c_3), & D(c_1 + kl_3, c_2, c_3 - kl_1) \end{array}$

$\surd$ ортогональны

$\rightarrow$ $k = -1;\ 1;\ 2;\ 3$

3) $\begin{array}{ll} A(a_1, a_2, a_3), & B(a_1 + l_1, a_2 + l_2, a_3 + l_3), \\ C(c_1, c_2, c_3), & D(c_1 + k_1 l_1, c_2 + k_2 l_2, c_3 + k_3 l_3) \end{array}$

$\surd$ не обладают

$\rightarrow$ $k_1 = 0;\ 1;\ 2$

$\rightarrow$ $k_2 = 1;\ 3$

$\rightarrow$ $k_3 = 0;\ 2$

**139.** При каких значениях параметров $\alpha$ и $\beta$ векторы коллинеарны/ортогональны

1) Даны векторы

$$\vec{a} = n\vec{i} + \vec{j} + \alpha\vec{k}$$
$$\vec{b} = \vec{i} - \beta\vec{j} + m\vec{k}$$

При каких значениях $\alpha$ и $\beta$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

√ $\beta = -\dfrac{1}{n}$, $\alpha = m$

→ $n =$ −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $m =$ −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

2) Даны векторы

$$\vec{a} = n\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{b} = \alpha\vec{i} + l\vec{j} + m\vec{k}$$

При каких значениях $\alpha$ они ортогональны?

√ $\alpha = -\dfrac{m}{n+l}$

→ $n =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $n =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $m =$ −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

**140.** Решить задачу

1) Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a} \cdot \vec{b} = k(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$.

√ $\vec{b} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

→ $a_1 = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

→ $a_2 = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

→ $a_3 = -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

→ $k = -2\,;\ -1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

Нахождение ортогонального вектора

**141.** Решить задачу

1) Найти вектор $\vec{c}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (3; -2; 1)$ и $\vec{b} = (3b_3 - 1; b_2; b_3)$, если его длина равна $\sqrt{(b_2 + 2b_3)^2 + 1 + (6b_3 - 2 + 3b_2)^2}$, а проекция вектора $\vec{c}$ на ось $OY$ положительна.

$\surd$ $\vec{c} = (b_2 + 2b_3; 1; -(6b_3 - 2 + 3b_2))$

$\rightarrow$ $b_2 = \;-3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 4$

$\rightarrow$ $b_3 = \;-3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 4$

Длина суммы двух вектров

**142.**

1) Вычислить длину вектора $\vec{c} = k\vec{a} + n\vec{b}$, если $|\vec{a}| = n$, $|\vec{b}| = k$, $\varphi = 120$, где $\varphi$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\surd$ $|\vec{c}| = kn$

$\rightarrow$ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $n =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

**143.** Найти вектор, удовлетворяющий условиям

$\Rightarrow$ $n = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\Rightarrow$ $l = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\Rightarrow$ $m = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\Rightarrow$ $f = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\Rightarrow$ $d = \;-2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

1) Найти вектор $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{a} = n\vec{i} + l\vec{j} + m\vec{k}$ и удовлетворяющий условиям: $\vec{b} \cdot \vec{i} = fm$ и $\vec{b} \cdot \vec{j} = dm$.

$\checkmark$ $\vec{b} = (mf; dm; -(nf + ld))$

2) Найти вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий условиям $\vec{b} \cdot \vec{i} = f$, $\vec{b} \cdot \vec{k} = d$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = l$, где $\vec{a} = n\vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$.

$\checkmark$ $\vec{b} = (f; l - nf - md; d)$

**144.** Найти вектор $\vec{q}$

1) Даны три вектора

$$\vec{u} = (a + en)\vec{i} + fn\vec{j} + (b + gn)\vec{k};$$

$$\vec{v} = (c + em)\vec{i} + fm\vec{j} + (d + gm)\vec{k};$$

$$\vec{w} = e\vec{i} + f\vec{j} + g\vec{k}$$

Найти вектор $\vec{q}$, удовлетворяющий условиям $\vec{u} \cdot \vec{q} = (a + en)X + fnY + (b + gn)Z$, $\vec{v} \cdot \vec{q} = (c + em)X + fmY + (d + gm)Z$ и $\vec{w} \cdot \vec{q} = eX + fY + gZ$.

$\surd$ $\vec{q} = (X; Y; Z)$

$\rightarrow$ $n =$ $-2$ ; $3$

$\rightarrow$ $m =$ $-1$ ; $5$

$\rightarrow$ $X =$ $1$ ; $7$

$\rightarrow$ $Y =$ $-2$ ; $-3$

$\rightarrow$ $Z =$ $4$ ; $-1$

$\rightarrow$ $a =$ $2$ ; $-2$ ; $4$ ; $-4$

$\rightarrow$ $b =$ $7$ ; $-7$

$\rightarrow$ $c =$ $3$ ; $-3$

$\rightarrow$ $d =$ $-5$ ; $5$

$\rightarrow$ $e =$ $-4$ ; $2$ ; $3$

$\rightarrow$ $f =$ $3$ ; $-2$ ; $5$

$\rightarrow$ $g =$ $-2$ ; $1$ ; $0$

**145.** Сила $\vec{F}$ приложена к точке $A$. Вычислить

а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A$ в положение $B$;

б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки $B$.

$\Rightarrow$ $f_1 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $f_2 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $f_3 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_1 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_2 =\ -2\,;\ \ 0\,;\ \ 2\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $a_3 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $b_1 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $b_2 =\ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 3$

$\Rightarrow$ $b_3 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

1) $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3),\ A(a_1, a_2, a_3),\ B(b_1, b_2, b_3),$

$\surd$ $A = A,\ |\vec{M}| = V$

$\rightarrow$ $A =\ f_1(b_1 - a_1) + f_2(b_2 - a_2) + f_3(b_3 - a_3)$

$\rightarrow$ $V =\ \sqrt{(f_3(a_2 - b_2) - f_2(a_3 - b_3))^2 + (f_3(a_1 - b_1) - f_1(a_3 - b_3))^2 + (f_2(a_1 - b_1) - f_1(a_2 - b_2))^2}$

**146.** Даны три силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, приложенные к точке $C$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A$.

$\Rightarrow$ $f_1 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $f_2 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $f_3 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $p_1 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $p_2 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $p_3 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $q_1 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $q_2 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $q_3 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_1 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_2 = \ -2\,; \ \ 0\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_3 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $c_1 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $c_2 = \ -1\,; \ \ 1$

$\Rightarrow$ $c_3 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

1) $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3), \ \vec{P} = (p_1, p_2, p_3), \ \vec{Q} = (q_1, q_2, q_3),$
$A(a_1, a_2, a_3), \ C(c_1, c_2, c_3)$

$$\vec{M} = ni - lj + mk,$$

√

$$\cos\alpha = \frac{n}{M}, \ \cos\beta = \frac{l}{M}, \ \cos\gamma = \frac{m}{M},$$

$\rightarrow$ $M = \ \sqrt{n^2 + l^2 + m^2}$

$\rightarrow$ $n = \ (c_2 - a_2)(f_3 + p_3 + q_3) - (c_3 - a_3)(f_2 + p_2 + q_2)$

$\rightarrow$ $l = \ (c_1 - a_1)(f_3 + p_3 + q_3) - (c_3 - a_3)(f_1 + p_1 + q_1)$

$\rightarrow$ $m = \ (c_1 - a_1)(f_2 + p_2 + q_2) - (c_2 - a_2)(f_1 + p_1 + q_1)$

**147.** Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$\Rightarrow$ $k =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $l =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $p =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $f =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $d =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $q =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

1) $$\begin{gathered}\vec{a} = k\vec{m} + l\vec{n},\ \vec{b} = p\vec{m} + f\vec{n}\\ |\vec{m}| = 2d,\ |\vec{n}| = q,\ (\vec{m}\,\widehat{;}\,\vec{n}) = \frac{2\pi}{3}\end{gathered}$$

$\checkmark$ $4kpd^2 - (kf + lp)dq + lfq^2$

2) $$\begin{gathered}\vec{a} = k\vec{m} + l\vec{n},\ \vec{b} = p\vec{m} + f\vec{n}\\ |\vec{m}| = 2d,\ |\vec{n}| = q,\ (\vec{m}\,\widehat{;}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{3}\end{gathered}$$

$\checkmark$ $4kpd^2 + (kf + lp)dq + lfq^2$

**148.** Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\Rightarrow$ $a_1 =\ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_2 =\ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_3 =\ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_1 =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_2 =\ 1\,;\ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_3 =\ -2\,;\ \ -1$

1) $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

$\checkmark$ $$\cos\varphi = \frac{a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 - b_3^2}{\sqrt{((a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + (a_3+b_3)^2)\,((a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2)}}$$

$\rightarrow$ $b_1 =\ k_1 a_1$

$\rightarrow$ $b_2 =\ k_2 a_2$

$\rightarrow$ $b_3 =\ k_3 a_3$

**149.** Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\Rightarrow$ $b_1 = \ k_1a_1$

$\Rightarrow$ $b_2 = \ k_2a_2$

$\Rightarrow$ $b_3 = \ k_3a_3$

$\Rightarrow$ $a_1 = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_2 = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $a_3 = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_1 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_2 = \ 1\,; \ \ 2$

$\Rightarrow$ $k_3 = \ -2\,; \ \ -1$

1) $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

$\checkmark$ $\sqrt{(a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2}$

**150.** Найти вектор $\vec{x}$, зная что

$\Rightarrow$ $a =$ $-2$ **;** $-1$ **;** $1$ **;** $2$ **;** $3$ **;** $4$

$\Rightarrow$ $b =$ $-2$ **;** $-1$ **;** $1$ **;** $2$ **;** $3$ **;** $4$

1) $\vec{x} \cdot \vec{i} = a,\ \vec{x} \times \vec{i} = -b\vec{k}$

$\surd$ $\vec{x} = (a; b; 0)$

2) $\vec{x} \cdot \vec{k} = a,\ \vec{x} \times \vec{k} = b\vec{i}$

$\surd$ $\vec{x} = (0; b; a)$

3) $\vec{x} \cdot \vec{j} = a,\ \vec{x} \times \vec{j} = -b\vec{i}$

$\surd$ $\vec{x} = (0; a; b)$

4) $\vec{x} \cdot \vec{k} = -a,\ \vec{x} \times \vec{k} = b\vec{j}$

$\surd$ $\vec{x} = (-b; 0; -a)$

**151.** Решить задачу на тему «Смешанное произведение векторов»

1) Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = (1; k; lm)$, $\vec{b} = (1, l, km)$ и $\vec{c} = (1; m; kl)$.

$\checkmark$ $(l-k)(m-k)(m-l)$

$\to$ $l =\ -4\ ;\ \ -1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 4$

$\to$ $k =\ -3\ ;\ \ 1\ ;\ \ 3$

$\to$ $m =\ -5\ ;\ \ -2\ ;\ \ 5$

2) Будут ли векторы $\vec{a} = (k+l; m; 1)$, $\vec{b} = (l+m; k; 1)$ и $\vec{c} = (m+k; l; 1)$ компланарны?

$\checkmark$ да

$\to$ $l =\ -4\ ;\ \ -1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 4$

$\to$ $k =\ -3\ ;\ \ 1\ ;\ \ 3$

$\to$ $m =\ -5\ ;\ \ -2\ ;\ \ 5$

3) Лежат ли векторы $\vec{a} = (x_1; x_2; \alpha x_1 + \beta x_2)$, $\vec{b} = (y_1; y_2; \alpha y_1 + \beta y_2)$ и $\vec{c} = (z_1; z_2; \alpha z_1 + \beta z_2)$ в одной плоскости?

$\checkmark$ да

$\to$ $x_1 =\ -2\ ;\ \ -1\ ;\ \ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $x_2 =\ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $y_1 =\ -2\ ;\ \ -1\ ;\ \ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $y_2 =\ -2\ ;\ \ -1$

$\to$ $z_1 =\ -2\ ;\ \ -1\ ;\ \ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $z_2 =\ 1\ ;\ \ 2$

$\to$ $\alpha =\ -2\ ;\ \ -1\ ;\ \ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $\beta =\ -2\ ;\ \ -1\ ;\ \ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

4) Лежат ли точки $A(a_1; a_2; 0)$, $B = (b_1; b_2; \alpha(b_1 - a_1) + \beta(b_2 - a_2))$, $C = (c_1; c_2; \alpha(c_1 - a_1) + \beta(c_2 - a_2))$ и $D = (d_1; d_2; \alpha(d_1 - a_1) + \beta(d_2 - a_2))$ в одной плоскости?

$\checkmark$ да

$\to$ $a_1 =\ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $a_2 =\ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $b_1 =\ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $b_2 =\ -2\ ;\ \ -1$

$\to$ $c_1 =\ -2\ ;\ \ -1$

$\to$ $c_2 =\ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\to$ $d_1 =\ -2\ ;\ \ -1$

$\to$ $d_2 =\ -2\ ;\ \ -1$

$\to$ $\alpha =\ -2\ ;\ \ -1\ ;\ \ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4$

$\rightarrow$ $\beta =$ $-2$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$

5) Вычислить объём треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = (x^2 + 36; 6x; 1)$, $\vec{b} = (y^2 + 36; 6y; 1)$ и $\vec{c} = (z^2 + 36; 6z; 1)$.

$\surd$ $|(x - y)(y - z)(x - z)|$

$\rightarrow$ $x =$ $-4$ ; $-1$ ; $2$ ; $4$

$\rightarrow$ $y =$ $-3$ ; $1$ ; $3$

$\rightarrow$ $z =$ $-5$ ; $-2$ ; $5$

6) Вычислить, правой или левой будет тройка векторов $\vec{a} = (1; x; x^2)$, $\vec{b} = (1; y; y^2)$ и $\vec{c} = (1; z; z^2)$.

$\surd$ $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (y - x)(z - x)(z - y)$

$\rightarrow$ $x =$ $-4$ ; $-1$ ; $2$ ; $4$

$\rightarrow$ $y =$ $-3$ ; $1$ ; $3$

$\rightarrow$ $z =$ $-5$ ; $-2$ ; $5$

7) Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (m + k; m - k; k)$, $\vec{b} = (n + k; 2n - k; k)$ и $\vec{c} = (k; -k; k)$.

$\surd$ $|kmn|$

$\rightarrow$ $k =$ $-2$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$

$\rightarrow$ $m =$ $-2$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$

$\rightarrow$ $n =$ $-2$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$

**152.** На векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS}$ построена треугольная пирамида. Найти длину высоты, опущенной из вершины $S$ на грань $ABC$.

1) $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; \dfrac{y_1+y_2}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{x_1-x_2}{2}; \dfrac{y_1-y_2}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{AS} = (x_1; y_1; 1)$

√ $\dfrac{3|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{y_2^2 + x_2^2 + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)^2}{4}}}$

→ $x_2 = x_1 + a$

→ $y_2 = y_1 + b$

→ $x_1 =$ 0; 1; 2

→ $y_1 =$ 3; 4

→ $a =$ 4; 6

→ $b =$ 2; 4

**153.** Доказать, что векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{q}$ в этом базисе, если

$$1)\quad \begin{array}{l} \vec{u} = (a + en; c + em; e) \\ \vec{v} = (fn; fm; f) \\ \vec{w} = (b + gn; d + gm; g) \\ \vec{q} = ((a + en)X + fnY + (b + gn)Z; (c + em)X + fmY + (d + gm)Z; eX + fY + gZ) \end{array}$$

$\surd$ $\vec{q} = (X; Y; Z)$

$\rightarrow$ $n = -2; \ 3$

$\rightarrow$ $m = -1; \ 5$

$\rightarrow$ $X = 1; \ 7$

$\rightarrow$ $Y = -2; \ -3$

$\rightarrow$ $Z = 4; \ -1$

$\rightarrow$ $a = 2; \ -2; \ 4; \ -4$

$\rightarrow$ $b = 7; \ -7$

$\rightarrow$ $c = 3; \ -3$

$\rightarrow$ $d = -5; \ 5$

$\rightarrow$ $e = -4; \ 2; \ 3$

$\rightarrow$ $f = 3; \ -2; \ 5$

$\rightarrow$ $g = -2; \ 1; \ 0$

**154.** Вычислить ранг системы векторов, найти какой-либо базис, выразить небазисные векторы через базис.

1) $$\begin{aligned}&\vec{x}_1 = (a+en; c+em; e)\\ &\vec{x}_2 = (fn; fm; f)\\ &\vec{x}_3 = (b+gn; d+gm; g)\\ &\vec{x}_4 = ((a+en)X + fnY + (b+gn)Z; (c+em)X + fmY + (d+gm)Z; eX + fY + gZ)\end{aligned}$$

√ $\vec{x}_4 = (X; Y; Z)$

→ $n =\ -2\,;\ \ 3$

→ $m =\ -1\,;\ \ 5$

→ $X =\ 1\,;\ \ 7$

→ $Y =\ -2\,;\ \ -3$

→ $Z =\ 4\,;\ \ -1$

→ $a =\ 2\,;\ \ -2\,;\ \ 4\,;\ \ -4$

→ $b =\ 7\,;\ \ -7$

→ $c =\ 3\,;\ \ -3$

→ $d =\ -5\,;\ \ 5$

→ $e =\ -4\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

→ $f =\ 3\,;\ \ -2\,;\ \ 5$

→ $g =\ -2\,;\ \ 1\,;\ \ 0$

# Часть VIII

# Кривые второго порядка

**155.** Найти координаты центра и радиус окружности

1) $x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2ab = 0$

√ $O(-a; -b),\ R = a + b$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

**156.** Определить вид кривой второго порядка, привести к каноническому виду и изобразить.

$\Rightarrow$ $n =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6$

$\Rightarrow$ $m =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6$

$\Rightarrow$ $l =\ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

1) $nx^2 + my^2 + 2mnx + 2lmy + ml^2 = 0$

$\checkmark$ Эллипс: $\dfrac{(x+m)^2}{m^2} + \dfrac{(y+l)^2}{mn} = 1,\ O(-m;-l)$

2) $nx^2 - my^2 + 2mnx - 2lmy - ml^2 = 0$

$\checkmark$ Гипербола: $\dfrac{(x+m)^2}{m^2} - \dfrac{(y+l)^2}{mn} = 1,\ O(-m;-l)$

Уравнение окружности с заданной касательной

**157.** Составить уравнение окружности с центром в начале координат, если прямая является касательной к окружности.

1) $Ax - Ay + 2C = 0$

✓ $x^2 + y^2 = 2\dfrac{C^2}{A^2}$

$\rightarrow$ $A =$ 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9

$\rightarrow$ $C =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

Уравнение эллипса

**158.** Составить уравнение эллипса

1) Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно $2c$ и большая ось равна $2c+2$.

√ $$\frac{x^2}{(c+1)^2}+\frac{y^2}{2c+1}=1$$

→ $c=$ 1; 2; 3; 4; 5; 6

2) Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если кривая проходит через точки $M_1(0;b)$ и $M_2(b-1;\frac{2b}{b+1}\sqrt{b})$.

√ $$\frac{x^2}{(b+1)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

→ $b=$ 1; 2; 3; 5; 7

3) Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если малая ось равна $2b$ и эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{\sqrt{2b+1}}{b+1}$.

√ $$\frac{x^2}{(b+1)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

→ $b=$ 1; 2; 3; 4; 5

4) Найти длину хорды эллипса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, лежащей на биссектрисе координатных углов.

√ $$\sqrt{\frac{8a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

→ $a=$ 2; 3; 4; 5

→ $b=$ 1; 2; 3; 4; 5

5) Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами в $k$ раз больше расстояния между концами большой и малой полуосей.

√ $$\sqrt{\frac{2k^2}{4+k^2}}$$

→ $k=$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

6) Записать каноническое уравнение эллипса с центром симметрии в начале координат, у которого расстояния от одного из фокусов до концов большей оси равны $k$ и $m$.

√ $$\frac{x^2}{\left(\frac{k+m}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{km}=1$$

→ $k=$ 1; 3; 5

→ $m=$ 7; 9; 11

Уравнение гиперболы

**159.** Составить уравнение гиперболы

1) Написать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси $Ox$ симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно $2c$, а расстояние между вершинами равно $2c-2$.

√ $$\frac{x^2}{(c-1)^2}-\frac{y^2}{2c-1}=1$$

→ $c=$ 2; 3; 4; 5; 6

2) Написать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси $Ox$ симметрично относительно начала координат, если кривая проходит через точки $M_1(b;0)$ и $M_2(\sqrt{2b^2+2b+1};b+1)$.

√ $$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

→ $b=$ 1; 2; 3; 4; 5

3) Написать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси $Ox$ симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно $2c$, а эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{c}{c-1}$.

√ $$\frac{x^2}{(c-1)^2}-\frac{y^2}{(2c-1)^2}=1$$

→ $c=$ 2; 3; 4; 5; 6

4) Написать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси $Ox$ симметрично относительно начала координат, если уравнения асимптот гиперболы $y=\pm\frac{b}{b+1}x$ и эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{\sqrt{2b^2+2b+1}}{b+1}$.

√ $$\frac{x^2}{(b+1)^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

→ $b=$ 1; 2; 3; 4; 5

5) Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $b^2x^2+(b+1)^2y^2=(b+1)^2b^2$. Составить уравнение гиперболы, если эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2b+1}$.

√ $$x^2-\frac{y^2}{2b}=1$$

→ $b=$ 1; 2; 3; 4

6) Составить уравнение гиперболы, если известны уравнения её асимптот $y=\pm\frac{1}{m}x$, а расстояние между фокусами равно $2k$.

√ $$\frac{x^2}{\frac{m^2k^2}{m^2+1}}-\frac{y^2}{\frac{k^2}{m^2+1}}=1$$

→ $k=$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $m=$ 2; 3; 4; 5

7) Записать каноническое уравнение гиперболы с центром симметрии в начале координат, зная, что расстояния от одной из её вершин до фокусов равны $k$ и $m$.

✓ $\dfrac{x^2}{\left(\frac{m-k}{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{mk} = 1$

→ $k =$ 1 ; 3 ; 5

→ $m =$ 7 ; 9 ; 11

8) Записать каноническое уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\sqrt{2}$, проходящей через точку $M\left(dk; k\sqrt{k^2-1}\right)$ и симметричной относительно осей координат.

✓ $x^2 - y^2 = d^2$

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4

→ $d =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

9) Записать уравнение гиперболы, симметричной относительно начала координат, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

✓ $\dfrac{x^2}{a^2-b^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

→ $a =$ 5 ; 6 ; 7

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

10) Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Составить каноническое уравнение гиперболы, если её эксцентриситет $\varepsilon = k$.

✓ $\dfrac{x^2}{\frac{a^2-b^2}{k^2}} - \dfrac{y^2}{\frac{(a^2-b^2)(k^2-1)}{k^2}} = 1$

→ $a =$ 4 ; 5 ; 6

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3

→ $k =$ 2 ; 3

Уравнение параболы

**160.** Составить уравнение параболы

1) Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если кривая симметрична относительно оси $Ox$ и проходит через точку $M(p; p\sqrt{2})$.

√ $y^2 = 2px$

→ $p =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

2) Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус в точке $A(\frac{p}{2}; 0)$.

√ $y^2 = 2px$

→ $p =$ −10; −8; −6; −4; −2; 2; 4; 6; 8; 10

3) Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а уравнение директрисы $x = \frac{p}{2}$.

√ $y^2 = -2px$

→ $p =$ −10; −8; −6; −4; −2; 2; 4; 6; 8; 10

4) Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, симметричной относительно оси $Ox$.

√ $y^2 = ax$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

5) Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, симметричной относительно оси $Oy$.

√ $x^2 = -ay$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

Полуоси, фокусы, эксцентриситет

**161.** Решите задачу

1) Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет эллипса $b^2x^2 + (b+k)^2y^2 = b^2(b+k)^2$ и изобразить его.

√ $a = b + k,\ c^2 = 2kb + k^2$

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3

2) Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот гиперболы $b^2x^2 - (b+k)^2y^2 = b^2(b+k)^2$ и изобразить ее.

√ $a = b + k,\ c^2 = 2b^2 + 2kb + k^2$

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3

**162.** Решить задачу

1) Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ равна $2c+2$.

√ $\dfrac{x^2}{(c+1)^2} + \dfrac{y^2}{(2c+1)^2} = 1$

→ $c =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

2) Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до точек $A(-a;0)$ и $B(a;0)$ равна $4a^2$.

√ $x^2 + y^2 = a^2$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

**163.** Решить задачу

$\Rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

1) Дана точка $A(1;0)$ и прямая $x = a$. Составить уравнение линии, каждая точка которой в $a$ раз ближе к точке $A$, чем к данной прямой. Привести уравнение к каноническому виду и изобразить линию.

$\surd$ $$\frac{(x-\frac{a}{a+1})^2}{\frac{a^2}{(a+1)^2}} + \frac{y^2}{\frac{a-1}{a+1}} = 1$$

2) Дана точка $A(1;0)$ и прямая $x = a$. Составить уравнение линии, каждая точка которой в $a$ раз дальше от точки $A$, чем от данной прямой. Привести уравнение к каноническому виду и изобразить линию.

$\surd$ $$\frac{(x-\frac{a^2+a+1}{a+1})^2}{\frac{a^2}{(a+1)^2}} - \frac{y^2}{\frac{a^2(a-1)}{a+1}} = 1$$

3) Дана точка $A(1;0)$ и прямая $x = a$. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A$ и от прямой. Привести уравнение к каноническому виду и изобразить линию.

$\surd$ $$y^2 = -2(a-1)\left(x - \frac{a+1}{2}\right)$$

Площадь ромба

**164.** Решите задачу

1) Вычислить площадь четырехугольника две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + ay^2 = a(a-1)$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

✓ $S = 2(a-1)\sqrt{a-1}$

$\rightarrow$ $a =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

Прямые параллельные асимптотами

**165.** Решите задачу

1) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(2a; c)$ параллельно асимптотам гиперболы $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

√ $bx - ay + a(c - 2b) = 0,$

$bx + ay - a(2b + c) = 0$

→ $a = -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3$

→ $b = 1;\ 2;\ 3;\ 4$

→ $c = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

# Часть IX

# Теория пределов

**166.** Найти предел.

$\Rightarrow$ $A = \ -5\,; \ \ -8\,; \ \ 1\,; \ \ -6\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 8\,; \ \ 12$

$\Rightarrow$ $D = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 5$

$\Rightarrow$ $B = \ -9\,; \ \ -6\,; \ \ -2\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 7$

$\Rightarrow$ $C = \ -9\,; \ \ -6\,; \ \ -2\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 7$

$\Rightarrow$ $E = \ -9\,; \ \ -6\,; \ \ -2\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 7$

$\Rightarrow$ $F = \ -9\,; \ \ -6\,; \ \ -2\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 7$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{An^a + Bn + C}{Dn^a + En + F}$

$\surd$ $\dfrac{A}{D}$

$\rightarrow$ $a = \ 2\,; \ \ 3$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{An^a + Bn + C}{Dn^2 + En + F}$

$\surd$ $\infty$

$\rightarrow$ $a = \ 3\,; \ \ 4$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{An^2 + Bn + C}{Dn^a + En + F}$

$\surd$ $0$

$\rightarrow$ $a = \ 3\,; \ \ 4$

**167.** Найти предел

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6

$\Rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5

$\Rightarrow$ $m =$ 1; 2; 3; 4; 5

$\Rightarrow$ $c =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^3}{bn^2-c}-\dfrac{an^2}{bn+m}\right)$

√ $\dfrac{am}{b^2}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(a+1)n^3}{bn^2-c}-\dfrac{an^2}{bn+m}\right)$

√ $\infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^3}{bn^2+mn-c}-\dfrac{an^2}{bn+m}\right)$

√ $0$

Предел отношения корней при n к бесконечности

**168.** Найти предел

$\Rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3

$\Rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

$\Rightarrow$ $c =$ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\Rightarrow$ $e =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

$\Rightarrow$ $f =$ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{a^2n^2+bn+c}}{en+f}$

✓ $\dfrac{a}{e}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{en+f}{\sqrt[a+2]{n^{a+1}+bn+c}}$

✓ $\infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[a+2]{n^{a+1}+bn+c}}{\sqrt[a+3]{n^{a+2}+en+f}}$

✓ 0

**169.** Найти предел

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

$\Rightarrow$ $b =$ 1; −1; 2; −2; 3; −3; 4; −4; 5; −5; 6; −6; 7; −7

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2an+b}-n\right)$

√ $a$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+2an+b}\right)$

√ $-a$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{b+a^2n^2}-an\right)$

√ $0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(an-\sqrt{a^2n^2+b}\right)$

√ $\infty$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(an-\sqrt{a^2n^2+b}\right)$

√ $-\dfrac{b}{2}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2-an+c}\right)$

√ $a$

$\rightarrow$ $c =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+b}-\sqrt{n^2-2an+c}\right)$

√ $a$

$\rightarrow$ $c =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(a+1)n+b}-\sqrt{an-c}\right)$

√ $\infty$

$\rightarrow$ $c =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2an+b}-nc\right)$

√ $\infty$

$\rightarrow$ $c =$ 2; 3; 4

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{an^2+bn}-\sqrt{an^2+c}$

$\surd$ $\dfrac{b}{2\sqrt{a}}$

$\rightarrow$ $c=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(a+1)n^2+bn}-\sqrt{an^2+c}$

$\surd$ $\infty$

$\rightarrow$ $c=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{an^2+bn}-\sqrt{an^2+bn+c}$

$\surd$ 0

$\rightarrow$ $c=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

**170.** Найти предел

$\Rightarrow$ $a = 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $b = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8$

$\Rightarrow$ $c = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8$

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{a^3n^3+bn^2+c}-an\right)$

√ $\dfrac{b}{3a^2}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{an^3+bn^2}-\sqrt[3]{bn^2-cn}\right)$

√ $\infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{a^3n^3+bn^2+c}-\sqrt[3]{a^3n^3-bn^2-2c}\right)$

√ $\dfrac{2b}{3a^2}$

Предел отношения полиномов при x к бесконечности

**171.** Найти предел.

$\Rightarrow$ $A =\ -5\,;\ \ -8\,;\ \ 1\,;\ \ -6\,;\ \ 3\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 8\,;\ \ 12$

$\Rightarrow$ $D =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 5$

$\Rightarrow$ $B =\ -9\,;\ \ -6\,;\ \ -2\,;\ \ 3\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

$\Rightarrow$ $C =\ -9\,;\ \ -6\,;\ \ -2\,;\ \ 3\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

$\Rightarrow$ $E =\ -9\,;\ \ -6\,;\ \ -2\,;\ \ 3\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

$\Rightarrow$ $F =\ -9\,;\ \ -6\,;\ \ -2\,;\ \ 3\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{Ax^a + Bx + C}{Dx^a + Ex + F}$

√ $\dfrac{A}{D}$

$\rightarrow$ $a =\ 2\,;\ \ 3$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{Ax^a + Bx + C}{Dx^2 + Ex + F}$

√ $\infty$

$\rightarrow$ $a =\ 3\,;\ \ 4$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{Ax^2 + Bx + C}{Dx^a + Ex + F}$

√ $0$

$\rightarrow$ $a =\ 3\,;\ \ 4$

Простой предел отношения полиномов степени 2

**172.** Найти предел.

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac}$

$\checkmark$ $\dfrac{a-b}{a-c}$

$\rightarrow$ $b=$ $a+2$; $a-3$; $a-1$; $a+4$; $a-4$

$\rightarrow$ $c=$ $a+3$; $a-2$; $a+1$; $a+5$; $a-5$

$\rightarrow$ $a=$ $2$; $3$; $-3$; $-2$; $-1$; $1$; $4$; $5$; $-4$; $-5$

**173.** Найти предел.

$\Rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 4 ; 5 ; −4 ; −5

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{cx^2 + (d - ac)x - ad}{ex^2 + (f - ae)x - af}$

$\surd$ $\dfrac{ac + d}{ae + f}$

$\rightarrow$ $c =$ −2 ; 2 ; −4 ; 4 ; −8 ; 8

$\rightarrow$ $e =$ −5 ; 5 ; −7 ; 7

$\rightarrow$ $d =$ −1 ; 1 ; −3 ; 3

$\rightarrow$ $f =$ −1 ; 1 ; −3 ; 3

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{cx^2 + (d - ac)x - ad}{x^3 - a^3}$

$\surd$ $\dfrac{ac + d}{3a^2}$

$\rightarrow$ $c =$ −2 ; 2 ; −1 ; 1 ; −3 ; 3 ; −4 ; 4 ; −6 ; 6 ; −8 ; 8

$\rightarrow$ $d =$ −1 ; 1 ; −5 ; 5 ; −7 ; 7

**174.** Найти предел.

$\Rightarrow$ $a =$ 1; −1; 2; −2; 3; −3; 4; −4; 5; −5

$\Rightarrow$ $c =$ 2; −2; 4; −4; 5; −5; 6; −6

$\Rightarrow$ $d =$ 1; −1; 3; −3; 7; −7

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3 - a^3}{cx^2 + (d - ac)x - ad}$

√ $\dfrac{3a^2}{ac + d}$

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{cx^2 + (d - ac)x - ad}{x^3 - a^3}$

√ $\dfrac{ac + d}{3a^2}$

Предел разность отношений полиномов

**175.** Найти предел

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{3a^2}{x^3-a^3}\right)$

$\surd$ $\dfrac{1}{a}$

$\to$ $a =$ $-6$; $-5$; $-4$; $-3$; $-2$; $-1$; $1$; $2$; $3$; $4$; $5$; $6$

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{2a}{x^2-a^2}\right)$

$\surd$ $\dfrac{1}{2a}$

$\to$ $a =$ $-10$; $-9$; $-8$; $-7$; $-6$; $-5$; $-4$; $-3$; $-2$; $-1$; $1$; $2$; $3$; $4$; $5$; $6$; $7$; $8$; $9$; $10$

Предел корня на полином степени 2

**176.** Найти предел.

1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{bx+d-ab}-\sqrt{cx+d-ac}}{ex^2-(f+ae)x+af}$

√ $\dfrac{b-c}{2(ea-f)\sqrt{d}}$

× $\dfrac{b-c}{(ea-f)\sqrt{d}}$

× $0$

× $\infty$

→ $f =$ $ae-1$ ; $ae+1$

→ $a =$ $-2$ ; $1$ ; $3$

→ $b =$ $c-4$ ; $c-2$ ; $c+1$ ; $c+2$

→ $c =$ $0$ ; $1$

→ $d =$ $2$ ; $3$ ; $4$ ; $8$ ; $9$ ; $16$ ; $5$

→ $e =$ $1$ ; $2$

**177.** Найти предел.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b+c}{ax+b}\right)^{kx+l}$

√ $e^{\frac{ck}{a}}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; −1 ; −2 ; −3

$\rightarrow$ $b =$ 3 ; 4 ; 5 ; −1 ; −2 ; −3

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; −1 ; −2

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 3 ; 4 ; −2 ; −3

$\rightarrow$ $l =$ 4 ; 5 ; −1 ; −2

**178.** Найти предел.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{b}{f}}$

√ $e^{-\frac{ba^2}{2c^2}}$

→ $f = \ \sin^2 cx\,; \ \ \operatorname{tg}^2 cx\,; \ \ \arcsin^2 cx\,; \ \ \operatorname{arctg}^2 cx$

→ $a = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

→ $b = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

→ $c = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^{ax^2}$

√ $e^{-\frac{m^2 a}{2}}$

→ $a = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

→ $m = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ \dfrac{1}{2}\,; \ \ \dfrac{2}{3}\,; \ \ \dfrac{3}{2}$

**179.** Найти предел.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax-\sin bx}{\operatorname{tg} cx}$

√ $\dfrac{a-b}{c}$

→ $a=$ $b+1$; $b+2$; $b+3$; $b+4$; $b+5$; $b-1$; $b-2$; $b+6$; $b+7$

→ $b=$ 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13

→ $c=$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos^3 ax}{x^2}$

√ $a^2$

→ $a=$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13

**180.** Найти предел.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi n}{x^a}}{\operatorname{ctg}^a bx}$

$\checkmark$ $\pi n b^a$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{3}$ ; $\frac{2}{3}$ ; $\frac{3}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos ax^k) \operatorname{ctg} bx^{2k}$

$\checkmark$ $\dfrac{a^2}{2b}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{cx \sin dx}$

$\checkmark$ $\dfrac{b^2 - a^2}{2cd}$

$\rightarrow$ $a =$ $b+1$ ; $b+2$ ; $b+3$ ; $b+4$ ; $b+5$ ; $b-1$ ; $b-2$ ; $b+6$ ; $b+7$

$\rightarrow$ $b =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $d =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax - \sin ax}{x^3}$

$\checkmark$ $\dfrac{a^3}{2}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10

**181.** Найти предел.

$\Rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

$\Rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F}{\cos ax - \cos^3 ax}$

✓ $\dfrac{b}{a^2}$

$\rightarrow$ $F =$ $\ln(1+bx^2)$ ; $e^{bx^2}-1$ ; $\sqrt{1+2bx^2}-1$ ; $\sqrt[3]{1+3bx^2}-1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{F}$

✓ $\dfrac{a^2}{2b}$

$\rightarrow$ $F =$ $\ln(1+bx^2)$ ; $e^{bx^2}-1$ ; $\sqrt{1+2bx^2}-1$ ; $\sqrt[3]{1+3bx^2}-1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F}{1-\cos ax}$

✓ $\dfrac{2b}{a^2}$

$\rightarrow$ $F =$ $\log_c(1+bx^2)\ln c$ ; $\dfrac{1}{\ln c}(c^{bx^2}-1)$

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax - \cos^3 ax}{F}$

✓ $\dfrac{a^2}{b}$

$\rightarrow$ $F =$ $\log_c(1+bx^2)\ln c$ ; $\dfrac{1}{\ln c}(c^{bx^2}-1)$

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

Эквивалентность с полиномом

**182.** Найти предел.

$\Rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 4 ; 5 ; −4 ; −5

$\Rightarrow$ $c =$ −2 ; 2 ; −4 ; 4 ; −8 ; 8

$\Rightarrow$ $d =$ −1 ; 1 ; −3 ; 3

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x - e^a}{cx^2 + (d - ac)x - ad}$

√ $\dfrac{e^a}{ac + d}$

Эквивалентности

**183.** Найти предел.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{b}{x^k}}-1\right)x^k$

√ $b\ln a$

→ $a=$ 2 ; 3 ; 4

→ $b=$ 1 ; 2 ; 3 ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{3}$ ; $\frac{2}{3}$ ; $\frac{3}{2}$

→ $k=$ 1 ; 2

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{k\sqrt[n]{x}}-1}{\sqrt[n]{\sin bx}}$

√ $\dfrac{k\ln a}{\sqrt[n]{b}}$

→ $a=$ 2 ; 3 ; 4

→ $b=$ 1 ; 2

→ $k=$ 1 ; 2

→ $n=$ 2 ; 3 ; 4

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-a^{bx^n}\right)\operatorname{ctg} cx^n$

√ $-\dfrac{b\ln a}{c}$

→ $a=$ 2 ; 3 ; 4

→ $b=$ 2 ; 3 ; 4

→ $c=$ 2 ; 3 ; 4

→ $n=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

4) $\lim\limits_{x\to\frac{a}{b}}\arcsin^k\dfrac{bx-a}{a}\operatorname{ctg}^k(bx-a)$

√ $\dfrac{1}{a^k}$

→ $a=$ 2 ; 4 ; 5 ; 8

→ $b=$ 1 ; 3 ; 7

→ $k=$ 2 ; 3

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos ax)^b}{\operatorname{tg}^{2b-2}cx-\sin^{2b-2}cx}$

√ $\dfrac{a^{2b}}{2^b c^{2b}(b-1)}$

→ $b=$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $a$ , $c =$

- 1 , 2 ;
- 2 , 1 ;
- 2 , 4 ;
- 3 , 1 ;
- 3 , 2 ;
- 3 , 6 ;
- 4 , 1 ;
- 4 , 2 ;
- 4 , 8 ;
- 6 , 2 ;
- 6 , 3 ;
- 6 , 4 ;
- 8 , 2 ;
- 8 , 4 ;
- 9 , 3 ;
- 9 , 6

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+ax\sin bx} - \sqrt{\cos 2bx}}{\operatorname{tg}^2 cx}$

$\surd$ $\dfrac{b(a+2b)}{2c^2}$

$\rightarrow$ $a =$ 8 ; 5 ; 7

$\rightarrow$ $b = \dfrac{1}{4}$ ; $\dfrac{1}{2}$ ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $c = \dfrac{1}{5}$ ; $\dfrac{2}{5}$ ; $\dfrac{1}{4}$ ; $\dfrac{1}{2}$

7) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$

$\surd$ $a^a(\ln a - 1)$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4

**184.** Исследовать на непрерывность и нарисовать эскиз графика функции

1) $f(x) = \dfrac{a}{x-b}$

$\surd$ $x = b$ – точка разрыва 2 рода

$\to$ $a =\ -7\,;\ \ -5\,;\ \ 2\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

$\to$ $b =\ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

2) $f(x) = \dfrac{a}{(x-b)^2}$

$\surd$ $x = b$ – точка разрыва 2 рода

$\to$ $a =\ -7\,;\ \ -5\,;\ \ 2\,;\ \ 5\,;\ \ 7$

$\to$ $b =\ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

3) $f(x) = \dfrac{a}{x^2-b^2}$

$\surd$ $x = \pm b$ – точки разрыва 2 рода

$\to$ $a =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\to$ $b =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

4) $f(x) = a^{\frac{1}{x-b}}$

$\surd$ $x = b$ – точка разрыва 2 рода

$\to$ $a =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\to$ $b =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

5) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-a^2}{x-a}, & x \neq a, \\ 2a, & x = a. \end{cases}$

$\surd$ Функция непрерывна на $\mathbb{R}$

$\to$ $a =\ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

6) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-a^3}{x-a}, & x \neq a, \\ 3a^2, & x = a. \end{cases}$

$\surd$ Функция непрерывна на $\mathbb{R}$

$\to$ $a =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

7) $f(x) = \begin{cases} x^a, & x \leq 1, \\ 2-x, & x > 1. \end{cases}$

$\surd$ Функция непрерывна на $\mathbb{R}$

$\to$ $a =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

8) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ ax+b, & x\geq 0. \end{cases}$

$\surd$ $x=0$ – точка разрыва 1 рода

$\to$ $a=$ $-3$; $-2$; $-1$; $1$; $2$; $3$

$\to$ $b=$ $-3$; $-2$; $-1$; $2$; $3$

9) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\leq 1, \\ |a-x|, & |x|>1. \end{cases}$

$\surd$ $x=\pm 1$ – точки разрыва 1 рода

$\to$ $a=$ $2$; $3$; $4$; $5$

10) $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{\pi x}{2}, & x\leq 1, \\ a(x-1), & x>1. \end{cases}$

$\surd$ $x=1$ – точка разрыва 1 рода

$\to$ $a=$ $1$; $2$; $3$; $4$

**185.** Построить график функции, провести классификацию точек разрыва, указать, есть ли хотя бы односторонняя непрерывность функции в точках разрыва.

1) $f(x) = \begin{cases} F, & x < -1, \\ G, & -1 \le x \le 0, \\ E, & x > 0 \end{cases}$

$\rightarrow$ $F =\ ax + b\,;\ \ ax^2 + b\,;\ \ \sqrt[3]{x}\,;\ \ c^x$

$\rightarrow$ $G =\ \arcsin x\,;\ \ \arccos x\,;\ \ \operatorname{arctg} x\,;\ \ \operatorname{arcctg} x$

$\rightarrow$ $E =\ \dfrac{k}{x}\,;\ \ \dfrac{k}{x^2}\,;\ \ \log_c x$

$\rightarrow$ $a =\ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ -1\,;\ \ -2$

$\rightarrow$ $b =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3$

$\rightarrow$ $k =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3$

$\rightarrow$ $c =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ e\,;\ \ \dfrac{1}{2}\,;\ \ \dfrac{1}{3}\,;\ \ \dfrac{1}{4}\,;\ \ \dfrac{1}{5}$

$\surd$ $x = -1$ точка разрыва первого рода, $x = 0$ точка разрыва второго рода

2) $f(x) = \begin{cases} F, & |x| < \pi, \\ G, & |x| \ge \pi \end{cases}$

$\rightarrow$ $F =\ \operatorname{tg} x\,;\ \ \operatorname{ctg} x\,;\ \ \dfrac{k}{x}\,;\ \ \dfrac{k}{x^2}$

$\rightarrow$ $G =\ \sin x\,;\ \ \cos x\,;\ \ kx + b\,;\ \ x^2 + b\,;\ \ (x - \pi)^2 + b\,;\ \ (x + \pi)^2 + b$

$\rightarrow$ $k =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3$

$\rightarrow$ $b =\ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ -4$

# Часть X

# Теория дифференцирования

**186.** Вычислить производную функции.

1) $Ax^a + \dfrac{B}{x^b} + C\sqrt[c]{x^d} + \dfrac{D}{\sqrt[e]{x^f}}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $c =$ $d+1$ ; $d+2$ ; $d+3$

$\rightarrow$ $d =$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $e =$ $f+1$ ; $f+2$ ; $f+3$

$\rightarrow$ $f =$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $A =$ $-5$ ; $-4$ ; $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $B =$ $C$ ; $C-1$ ; $C+1$

$\rightarrow$ $C =$ $-3$ ; $-2$ ; 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $D =$ $-3$ ; $-2$ ; 2 ; 3 ; 4

**187.** Вычислить производную функции.

1) $(bx+c)^a \cdot g$

$\rightarrow$ $g =$ $\sin x$ ; $\cos x$ ; $\arcsin x$ ; $\arccos x$ ; $\operatorname{tg} x$ ; $\ln x$

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $c =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $a =$ 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

Производная произведения

**188.** Вычислить производную функции.

1) $(bx+c)^a \cdot g$

$\to$ $g = \ \sin X\,;\ \ \cos X\,;\ \ \arcsin X\,;\ \ \arccos X\,;\ \ \operatorname{tg} X\,;\ \ \ln X$

$\to$ $X = \ mx^k + n$

$\to$ $b = \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\to$ $c = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\to$ $a = \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7\,;\ \ 8\,;\ \ 9\,;\ \ 10$

$\to$ $m = \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\to$ $n = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\to$ $k = \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

`Производная частного. Простая`

**189.** Вычислить производную функции.

1) $\dfrac{f}{g}$

$\rightarrow$ $f = \ \sin X\,;\ \ \cos X\,;\ \ \arcsin X\,;\ \ \arccos X\,;\ \ \operatorname{tg} X\,;\ \ \ln X$

$\rightarrow$ $g = \ \sin x\,;\ \ \cos x\,;\ \ \arcsin x\,;\ \ \arccos x\,;\ \ \operatorname{tg} x\,;\ \ \ln x$

$\rightarrow$ $X = \ ax + b$

$\rightarrow$ $a = \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\rightarrow$ $b = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

**190.** Вычислить производную функции.

1) $f^g$

→ $f =$ $\sin X$ ; $\cos X$ ; $\arcsin X$ ; $\arccos X$ ; $\operatorname{tg} X$ ; $\ln X$

→ $g =$ $\sin x$ ; $\cos x$ ; $\arcsin x$ ; $\arccos x$ ; $\operatorname{tg} x$ ; $\ln x$

→ $X =$ $ax + b$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $b =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

Производная произведения

**191.** Вычислить производную функции.

1) $f^a \cdot g$

$\rightarrow$ $f =$ $\sin x$ ; $\cos x$ ; $\arcsin x$ ; $\arccos x$ ; $\operatorname{tg} x$ ; $\ln x$

$\rightarrow$ $g =$ $\sin y$ ; $\cos y$ ; $\arcsin y$ ; $\arccos y$ ; $\operatorname{tg} y$ ; $\ln y$

$\rightarrow$ $y =$ $cx + d$

$\rightarrow$ $a =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $d =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

Производная частного

**192.** Вычислить производную функции.

1) $\dfrac{f}{g}$

$\rightarrow$ $f =$ $\sin X$ ; $\cos X$ ; $\arcsin X$ ; $\arccos X$ ; $\operatorname{tg} X$ ; $\ln X$

$\rightarrow$ $g =$ $\sin y$ ; $\cos y$ ; $\arcsin y$ ; $\arccos y$ ; $\operatorname{tg} y$ ; $\ln y$

$\rightarrow$ $X =$ $ax + b$

$\rightarrow$ $y =$ $cx^d$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $d =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

**193.** Вычислить производную функции.

1) $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\, f$

$\rightarrow$ $f =\ \log_m(ex+f)\,;\ \ \sin X\,;\ \ \cos X\,;\ \ \arcsin X\,;\ \ \arccos X\,;\ \ \mathrm{tg}\, X\,;\ \ \ln X$

$\rightarrow$ $X =\ mx^2+ex+f$

$\rightarrow$ $a =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\rightarrow$ $b =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\rightarrow$ $c =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\rightarrow$ $d =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\rightarrow$ $m =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\rightarrow$ $e =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\rightarrow$ $f =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\rightarrow$ $n =\ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

**194.** Вычислить приближённо

$\Rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; $-1$ ; $-2$ ; $-3$

1) $\operatorname{arctg}\left(a + \dfrac{k}{100}\right)$

$\checkmark$ $A_1 \dfrac{k}{100} + A_0$

$\rightarrow$ $a$ , $A_0$ , $A_1 =$

- 0 , 0 , 1 ;
- 1 , $\dfrac{\pi}{4}$ , $\dfrac{1}{2}$

2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3 + \dfrac{k}{10}}$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{8\sqrt{3}} \dfrac{k}{10} + \dfrac{\pi}{3}$

3) $\arcsin\left(\dfrac{k}{100}\right)$

$\checkmark$ $\dfrac{k}{100}$

4) $\lg\left(10 + \dfrac{k}{10}\right)$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{10\ln 10} \dfrac{k}{100} + 1$

5) $\sqrt[p]{a^p + \dfrac{k}{10}}$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{pa^{p-1}} \dfrac{k}{10} + a$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $p =$ 2 ; 3 ; 4

6) $\left(a + \dfrac{k}{100}\right)^b$

$\checkmark$ $ba^{b-1} \dfrac{k}{100} + a^b$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 3 ; 4 ; 5

7) $\sin(30 + k)^\circ$

$\checkmark$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{\pi}{180} k + \dfrac{1}{2}$

8) $\operatorname{tg}(45+k)^\circ$

$\checkmark$ $2\frac{\pi}{180}k+1$

Угловой коэффициент

**195.** Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y$ в точке $x = x_0$.

$\Rightarrow$ $X = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\Rightarrow$ $a = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 6$

$\Rightarrow$ $b = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

1) $y = \dfrac{x^2 - 2ax + 2b}{ax - b}, \ x_0 = X$

√ $\dfrac{aX^2 - 2bX}{(aX - b)^2}$

2) $y = \dfrac{\sqrt{ax^2 + b^2}}{b^2 x}, \ x_0 = X$

√ $-\dfrac{1}{X^2\sqrt{aX^2 + b^2}}$

3) $y = \dfrac{x}{\sqrt{ax^2 + b^2}}, \ x_0 = X$

√ $\dfrac{b^2}{\sqrt{(aX^2 + b^2)^3}}$

Касательная

**196.** Решить задачу на тему «Касательная».

1) К графику функции $y = b - \sin ax$ в точке $x_0 = 0$ проведена касательная. Найти площадь треугольника, который отсекает эта касательная от координатного угла.

✓ $\dfrac{b^2}{2a}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $b =$ −4 ; −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

2) Найти тангенс угла между касательными, проведёнными к графикам функций $f_1(x) = ax^3 + bx + d + a + b - k$ и $f_2(x) = dx^2 + kx$ в точке их пересечения $x_0 = -1$.

✓ $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k - 2d - (3a + b)}{1 + (k - 2d)(3a + b)}$

→ $a =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $b =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $d =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $k =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

3) Найти точку графика функции $y_1 = ax^2 + bx + c$, в которой касательная параллельна (перпендикулярна) прямой $y_2 = kx + d$.

✓ $M_1\left(\dfrac{k - b}{2a}; \dfrac{(k - b)^2}{4a} + \dfrac{b}{2a}(k - b) + c\right), \quad M_2\left(-\dfrac{1 + bk}{2ak}; \dfrac{(1 + bk)^2}{4k^2a} - \dfrac{b}{2ka}(1 + bk) + c\right)$

→ $a =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $b =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $c =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $d =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $k =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

4) К графику функции $y = kx(ax^2 + bx + c)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = f$. Найти ординату точки пересечения этой касательной с прямой $x = d$.

✓ $y = (akf^3 + bkf^2 + kcf) + (3akf^2 + 2bkf + ck)(d - f)$

→ $a =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $b =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $c =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $d =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $k =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $f =$ −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

5) Найти на графике функции $y = \frac{x-a}{x-b}$ все точки, касательные в которых параллельны прямой $y = (a - b)x + c$.

✓ $M_1(1 + b; 1 + b - a), \ M_2(b - 1; a + 1 - b)$

$\rightarrow$ $a =$ 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15

$\rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6

$\rightarrow$ $c =$ 1; 2; 3; 4; 5; −1; −2; −3; −4; −5

6) Найти на графике функции $y = \frac{x-a}{x-b}$ все точки, касательные в которых перпендикулярны прямой $(a-b)y + x - c = 0$.

$\checkmark$ $M_1(1+b; 1+b-a)$, $M_2(b-1; a+1-b)$

$\rightarrow$ $a =$ 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15

$\rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6

$\rightarrow$ $c =$ 1; 2; 3; 4; 5; −1; −2; −3; −4; −5

7) Найти абсциссу точки графика функции $y = \frac{1}{b\ln a}a^{bx+c} + f$, если касательная, проведенная к графику данной функции в этой точке, образует с осью $OX$ угол 45°.

$\checkmark$ $x = -\dfrac{c}{b}$

$\rightarrow$ $a =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; $e$

$\rightarrow$ $b =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; −2; −3; −4; −5; −6; −7; −8; −9

$\rightarrow$ $c =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10

$\rightarrow$ $f =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; −1; −2; −3; −4; −5; −6; −7; −8

8) Найти абсциссу точки графика функции $y = \frac{1}{ax+b}$, если касательная, проведенная к графику данной функции в этой точке, проходит через начало координат.

$\checkmark$ $x = -\dfrac{b}{2a}$

$\rightarrow$ $a =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; −2; −3; −4; −5; −6; −7; −8; −9

$\rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; −1; −2; −3; −4; −5; −6; −7; −8; −9; −10

9) Найти на графике функции $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 - \frac{1}{3}a^3$ точку, касательная в которой параллельна прямой $y = -a^2x + b$.

$\checkmark$ $M(a; -a^3)$

$\rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; −1; −2; −3; −4; −5

$\rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

10) Найти на графике функции $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 - \frac{1}{3}a^3$ точку, касательная в которой перпендикулярна прямой $b + x - a^2y = 0$.

$\checkmark$ $M(a; -a^3)$

$\rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; −1; −2; −3; −4; −5

$\rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

11) К графику функции $y = \frac{a^3}{x^2} + bx + c$ проведена касательная, составляющая с осью $OX$ угол, равный $\operatorname{arctg}(b+2)$. Найти абсциссу точки пересечения этой касательной с осью $OX$.

$\checkmark$ $x = -3a - c$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9 ; −10

**197.** Вычислить $y'(x_0)$, если

1) $y = \ln\sqrt{(x-b)^a} + \dfrac{a}{k}(x-b)^k,$
$x_0 = b+1.$

√ $\dfrac{3a}{2}$

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $a =$ 3 ; 5 ; 7 ; 9

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

2) $y = \sqrt[k]{b-(b-1)x^k} + a^x\dfrac{c}{\ln a},$
$x_0 = 1.$

√ $1 - b + ca$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4

→ $c =$ 1 ; 2 ; 3

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $k =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

3) $y = \ln\sin ax + \dfrac{bx^2}{\pi} - \dfrac{b}{a}$
$x_0 = \dfrac{\pi}{2a}$

√ $\dfrac{b}{a}$

→ $a =$ 3 ; 5 ; 7 ; 9

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6

Вторая производная в точке

**198.** Вычислить $y''(0)$.

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

$\Rightarrow$ $b =$ −5; −4; −3; −2; −1; 1; 2; 3; 4; 5

1) $y = e^{ax^2+bx}$

$\surd$ $b^2 + 2a$

2) $y = \cos(ax^2 + bx)$

$\surd$ $-b^2$

3) $y = \sin(ax^2 + bx)$

$\surd$ $2a$

4) $y = (ax^2 + bx + c)^n$

$\surd$ $n(n-1)c^{n-2}b + 2anc^{n-1}$

$\to$ $n =$ 2; 3

$\to$ $c =$ 1; 2; 3

Третья производная в точке

**199.** Вычислить $y'''(0)$.

$\Rightarrow$ $a = \; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5\,; \;\; 6\,; \;\; 7$

$\Rightarrow$ $b = \; -5\,; \;\; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5$

1) $y = e^{ax^2+bx}$

$\surd$ $6ab + b^3$

2) $y = \cos(ax^2 + bx)$

$\surd$ $-6ab$

3) $y = \sin(ax^2 + bx)$

$\surd$ $-b^3$

Правило Лопиталя. Простой пример

**200.** Найти предел, используя правило Лопиталя.

$\Rightarrow$ $a = \; b+1\,; \;\; b+2\,; \;\; b+3$

$\Rightarrow$ $b = \; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5\,; \;\; 6\,; \;\; 7$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$

$\surd$ $\dfrac{a^2}{b^2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{b^x-1}$

$\surd$ $\log_b a$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$

$\surd$ $a-b$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin ax}{1-b^x}$

$\surd$ $\dfrac{a}{-\ln b}$

**201.** Найти предел, используя правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{x}{2k}} (\operatorname{tg} kx)^{2kx-\pi}$

√ 1

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

2) $\lim\limits_{x\to 0} K^N$

√ $e^0 = 1$

→ $N =$ $\operatorname{tg} bx$ ; $\sin bx$ ; $\arcsin bx$ ; $\operatorname{arctg} bx$

→ $K =$ $\operatorname{tg} ax$ ; $\sin ax$ ; $\arcsin ax$ ; $\operatorname{arctg} ax$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3

3) $\lim\limits_{x\to\frac{b}{a}} (ax-b)^{ax-b}$

√ $\frac{1}{e}?(1)$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 6

→ $b =$ 1 ; 5 ; 7

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2k}} \dfrac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg}(1+4(n-1))kx}$

√ $\dfrac{1}{1+4(n-1)}$

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3

→ $n =$ 2 ; 3 ; 4

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}$

√ 1

→ $m =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $n =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

6) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$

√ $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4

→ $m =$ 3 ; 5 ; 7

→ $n =$ 4 ; 6 ; 8

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{a^{\ln x} - x^k}{x^n - 1}$

$\checkmark$ $\dfrac{\ln a - k}{n}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $n =$ 1 ; 2 ; 3

8) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$

$\checkmark$ 0

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$

$\checkmark$ $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$

$\rightarrow$ $a =$ $b+1$ ; $b+2$ ; $b+3$

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

10) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\log_a(kx+b)}{\sqrt[n]{cx+d}}$

$\checkmark$ 0

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $n =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $d =$ $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{kx} - b^{dx}}{\sin cx}$

$\checkmark$ $\dfrac{k\ln a - d\ln b}{c}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $k =$ $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $d =$ $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{kx} - b^{nx}}{x\sqrt{1-dx^2}}$

$\checkmark$ $k\ln a - n\ln b$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $k =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $n =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $d =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{kx} - \cos^n dx}{c^{bx} - \cos^m fx}$

✓ $\dfrac{k \ln a}{b \ln c}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $c =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $n =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $m =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $d =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $f =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $k =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

14) $\lim\limits_{x\to a} \left(1 - \dfrac{x}{a}\right)^k$

✓ 1

$\rightarrow$ $k =$ $\operatorname{tg} b\pi(x-a)$ ; $\sin b\pi(x-a)$ ; $\operatorname{arctg} b\pi(a-x)$ ; $\arcsin b\pi(a-x)$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

15) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\dfrac{m}{x} + \lambda \sin\dfrac{m}{x}\right)^{kx}$

✓ $e^{k\lambda m}$

$\rightarrow$ $m =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $\lambda =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $k =$ −3 ; −2 ; −1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

16) $\lim\limits_{x\to \frac{ak}{2}} \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{ka}}$

✓ 1

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

17) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\dfrac{m}{\sqrt[k]{x}}\right)^{nx^a}$

✓ $e^{-\frac{m^2}{ka}}$

$\rightarrow$ $a = \ 2 + \dfrac{2}{k}$

$\rightarrow$ $m = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $n = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $k = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos ax^{3m}}{x^{2m} - \frac{1}{b}\sin bx^{2m}}$

$\checkmark$ $\dfrac{a^2 m}{b^2}$

$\rightarrow$ $a = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $b = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $m = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

19) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos kx)^{\frac{a}{x^2}}$

$\checkmark$ $e^{-\frac{k^2 a}{2}}$

$\rightarrow$ $k = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $a = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

Монотонность

**202.**

1) Найти длину интервала убывания функции $y = \frac{(x-a)^b}{x^b}$.

$\checkmark$ $|a|$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8

2) Найти длину промежутка возрастания функции $y = \frac{x-a}{x^2+b}$.

$\checkmark$ $2\sqrt{a^2+b}$

$\rightarrow$ $b =$ $a^2-1$ ; $a^2-2$ ; $a^2-3$ ; $a^2-4$ ; $a^2-5$ ; $a^2-6$ ; $a^2-7$ ; $a^2-8$

$\rightarrow$ $a =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

Экстремум

**203.** Найти сумму значений функции в точках экстремума

$\Rightarrow$ $n = \ 1\,; \ \ 2$

1) $y = (x^2 - a^2)^{2n+1}$

$\surd$ $y(0) = (-a^2)^{2n+1}$

$\rightarrow$ $a = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7\,; \ \ 8\,; \ \ 9$

2) $y = (x-a)^{2n+1}(x-b)^{2n+1}$

$\surd$ $y\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = -\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{4n+2}$

$\rightarrow$ $a = \ 1\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ 7$

$\rightarrow$ $b = \ 1\,; \ \ 3\,; \ \ 5\,; \ \ -1\,; \ \ -3\,; \ \ -5$

**204.** Найти сумму значений функции $y$ в точках экстремума.

$\Rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\Rightarrow$ $c =$ −5 ; −4 ; −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

1) $y = x + \dfrac{b^2}{x+c}$

$\surd$ $-2c$

2) $y = kax^5 - kbx^3 + c$

$\surd$ $2c$

$\rightarrow$ $k =$ −1 ; 1

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

**205.** Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$\Rightarrow$ $F = \ ax^2 + bx + 2a$

$\Rightarrow$ $a = \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7\,;\ \ 8\,;\ \ 9\,;\ \ 10$

$\Rightarrow$ $b = \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

1) $y = \ln F$

$\checkmark$ $y' = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + 2a}, \ x_{\min} = -\dfrac{b}{2a}$

2) $y = \dfrac{1}{F}$

$\checkmark$ $y' = -\dfrac{2ax + b}{(ax^2 + bx + 2a)^2}, \ x_{\max} = -\dfrac{b}{2a}$

3) $y = \dfrac{ax + b}{F}$

$\checkmark$ $y' = \dfrac{2a^2 - (ax + b)^2}{(ax^2 + bx + 2a)^2}, \ x_{\min} = \dfrac{-b - \sqrt{2}a}{a}, \ x_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}a - b}{a},$

4) $y = \sqrt{F}$

$\checkmark$ $y' = \dfrac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 2a}}, \ x_{\min} = -\dfrac{b}{2a}$

**206.** Найти интервалы монотонности, точки экстремума, интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции

$\Rightarrow$ $F = a^2 + x^2$

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12

1) $y = \ln F$

$$y' = \frac{2x}{a^2 + x^2}, \; x_{\min} = 0;$$

√

$$y'' = \frac{2(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}, \; x = \pm a \text{ точки перегиба}$$

2) $y = x - \ln F$

$$y' = \frac{x^2 - 2x + a^2}{a^2 + x^2}, \; y' > 0 \; \forall\, x;$$

√

$$y'' = \frac{2(x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2)^2}, \; x = \pm a \text{ точки перегиба}$$

3) $y = \dfrac{1}{F}$

$$y' = \frac{-2x}{(a^2 + x^2)^2}, \; x_{\max} = 0;$$

√

$$y'' = \frac{2(3x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2)^3}, \; x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ точки перегиба}$$

4) $y = \dfrac{x}{F}$

$$y' = \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2}, \; x_{\min} = -a, \; x_{\max} = a;$$

√

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 3a^2)}{(a^2 + x^2)^3}, \; x = 0, \; x = \pm a\sqrt{3} \text{ точки перегиба}$$

5) $y = \sqrt{F}$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \; x_{\min} = 0;$$

√

$$y'' = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}, \; y'' > 0 \; \forall\, x$$

**207.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке.

$\Rightarrow$ $a = 1;\ 2;\ 3$

$\Rightarrow$ $b = 1;\ 2;\ 3;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3}$

1) $y = x^a \ln bx, \quad \left[\frac{1}{3b}; \frac{1}{b}\right]$

$\checkmark$ $y_{\min} = -\frac{1}{b^a ae};\ y_{\max} = 0$

2) $y = \frac{\ln bx}{x^a}, \quad \left[\frac{1}{b}; \frac{3}{b}\right]$

$\checkmark$ $y_{\min} = 0;\ y_{\max} = \frac{b^a}{ae}$

**208.** Издержки производства некоторого товара равны $C$, спрос на товар определяется функцией $P_{\text{спр}}$. Найти максимальное значение прибыли.

1) $P_{\text{спр}} = -Q^2 + aQ + b,$
$C = cQ + d,$
$Q_1 \leq Q \leq Q_2$

√ $4A^3 + 3A^2 + A$

→ $a = \ 3A + 2$

→ $c = \ 2A + 1 + b$

→ $b = \ 1; \ 2; \ 3; \ 4; \ 5; \ 6; \ 7; \ 8$

→ $d = \ A^2$

→ $Q_2 = \ 2A + 1 + B$

→ $q = \ 2A + 1$

→ $Q_1 = \ 2A$

→ $A = \ 1; \ 2; \ 3; \ 4; \ 5$

→ $B = \ 1; \ 2; \ 3$

Экономическая задача на глобальный экстремум

**209.**

1) Завод $A$ отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город $B$ на $a$ км (считается по кратчайшему расстоянию). Под каким углом $\varphi$ к железной дороге следует построить подъездной путь, чтобы транспортировка грузов из $A$ в $B$ была наиболее экономичной, если стоимость провоза 1 т груза на расстояние 1 км составляет по подъездному пути $p$ ден. ед., по железной дороге $q$ ден. ед. и город $B$ расположен на $b$ км севернее завода $A$?

√ $Q(\varphi) = \dfrac{ap}{\cos\varphi} + (b - \operatorname{arctg}\varphi)q, \ \cos\varphi = \dfrac{q}{p}$

→ $q = \ k\,; \ \ \sqrt{3}k\,; \ \ \sqrt{2}k$

→ $p = \ 2k$

→ $k = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5$

→ $a = \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7\,; \ \ 8$

→ $b = \ 15\,; \ \ 16\,; \ \ 17\,; \ \ 18$

**210.**

1) Известна зависимость суточных расходов $C = 2kv_0^3 + kv^3$ при плавании судна от скорости судна $v$, выраженной в километрах в час. При какой скорости плавание судна будет наиболее экономичным, если максимальная развиваемая им скорость составляет 70 км/ч.

$\surd$ $v_0$

$\rightarrow$ $v_0 =$ 20 ; 24 ; 27 ; 29 ; 33 ; 36 ; 38 ; 41 ; 43 ; 47 ; 49

$\rightarrow$ $k =$ 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19

2) Турист идёт из пункта $A$ на дороге, проходящей с севера на юг, в пункт $B$, расположенный на $kv_2 + d$ км южнее $A$ и отстоящий от дороги, считая по кратчайшему расстоянию, на $ku$ км. На каком расстоянии от пункта $A$ туристу следует свернуть с дороги, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт $B$, если скорость по дороге равна $v_1$ км/ч, а по бездорожью — $v_2$ км/ч.

$\surd$ $d$

$\rightarrow$ $v_2 = \sqrt{v_1^2 - u^2}$

$\rightarrow$ $v_1 =$ 5

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $u =$ 3 ; 4

$\rightarrow$ $d =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

График

**211.** Провести полное исследование функции и построить её график

1) $y = \dfrac{(x-a)^2}{x-b}$

√ $x = b,\ y = x + b - 2a,\ x_{\max} = a,\ f_{\max} = 0,\ x_{\min} = 2b - a,\ f_{\min} = 4(b-a)$

→ $a =\ b-1;\ \ b-2;\ \ b-3;\ \ b-4;\ \ b-5;\ \ b-6;\ \ b-7;\ \ b-8$

→ $b =\ -3;\ \ -2;\ \ -1;\ \ 1;\ \ 2;\ \ 3;\ \ 4;\ \ 5;\ \ 6;\ \ 7;\ \ 8;\ \ 9;\ \ 10;\ \ 11;\ \ 12$

2) $y = a^2x + \dfrac{b^2}{x+c}$

√ $x = -c,\ y = a^2x,\ x_{\max} = \dfrac{-b-ac}{a},\ f_{\max} = -2ab - a^2c,\ x_{\min} = \dfrac{b-ac}{a},\ f_{\min} = 2ab - a^2c,\ x_p = -c$

→ $a =\ 2;\ \ 3;\ \ 4$

→ $b =\ 5;\ \ 7;\ \ 9;\ \ 10$

→ $c =\ 1;\ \ 2;\ \ -1;\ \ -2$

3) $y = \dfrac{2x^3 + a^3}{x^2}$

√ $x = 0,\ y = 2x,\ x_{\min} = a,\ f_{\min} = 3a,\ f\uparrow,\ x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty),\ f''(x) > 0$

→ $a =\ 1;\ \ 2;\ \ 3;\ \ 4;\ \ 5$

# Часть XI

# Неопределённый интеграл

Интеграл со степенями

**212.** Вычислить интеграл.

1) $\displaystyle\int \frac{A\sqrt[a+b]{x^b}+Bx^{a+b+1}+Cx^a}{x^{a+1}}\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{A(a+b)}{b-a^2-ab}\frac{1}{\sqrt[a+b]{x^{a^2+ab-b}}}+\frac{Bx^{b+1}}{b+1}+C\ln|x|$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $A=$ $-5$ ; $-4$ ; $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $B=$ $C$ ; $C-1$ ; $C+1$

$\rightarrow$ $C=$ $-3$ ; $-2$ ; 2 ; 3

**213.** Вычислить интеграл.

⇒ $a = \ b-1\,; \quad b+1\,; \quad b+2\,; \quad b+3\,; \quad b+4$

⇒ $b = \ 2\,; \quad 3\,; \quad 4\,; \quad 5$

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{b-ax^2}}$

√ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{ax}{\sqrt{ab}}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{b+ax^2}$

√ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{ax}{\sqrt{ab}}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2-b}$

√ $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a}x-\sqrt{b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{b}} \right|$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$

√ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+b} \right)$

**214.** Найти неопределённый интеграл

$\Rightarrow$ $a = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

$\Rightarrow$ $b = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

1) $\displaystyle\int (ax+b)^n\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$

$\rightarrow$ $n = \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7\,; \ \ 8\,; \ \ 9\,; \ \ 10\,; \ \ 11$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{a}\ln|ax+b|$

3) $\displaystyle\int \cos(ax+b)\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{a}\sin(ax+b)$

4) $\displaystyle\int \sin(ax+b)\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

5) $\displaystyle\int e^{ax+b}\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{a}e^{ax+b}$

**215.** Найти неопределённый интеграл

$\Rightarrow$ $G\,,\quad g\,,\quad c=$

- $ax^2+b\,,\quad x\,,\quad 2a\,;$
- $ax^3+b\,,\quad x^2\,,\quad 3a\,;$
- $\sin ax+b\,,\quad \cos ax\,,\quad a\,;$
- $\cos ax+b\,,\quad \sin ax\,,\quad -a$

$\Rightarrow$ $a=\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 9$

$\Rightarrow$ $b=\ -5\,;\ -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 9$

1) $\displaystyle\int e^G g\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{c}e^G$

2) $\displaystyle\int \frac{g}{e^G}\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle -\frac{1}{c}e^{-G}$

3) $\displaystyle\int G^n g\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{c}\frac{G^{n+1}}{n+1}$

$\rightarrow$ $n=\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 9$

4) $\displaystyle\int \frac{g}{G^n}\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{c}\frac{G^{-n+1}}{-n+1}$

$\rightarrow$ $n=\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 9$

5) $\displaystyle\int \sqrt[n]{G}g\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{c}\frac{\sqrt[n]{G^{n+1}}}{\frac{1}{n}+1}$

$\rightarrow$ $n=\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

6) $\displaystyle\int \frac{g}{G}\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{c}\ln|G|$

**216.** Найти неопределённый интеграл

$\Rightarrow$ $G\,, \quad g\,, \quad c =$

- $\arcsin ax\,, \quad \sqrt{1-a^2x^2}\,, \quad a\,;$
- $\arccos ax\,, \quad \sqrt{1-a^2x^2}\,, \quad -a\,;$
- $\operatorname{arctg} ax\,, \quad 1+a^2x^2\,, \quad a\,;$
- $\operatorname{arcctg} ax\,, \quad 1+a^2x^2\,, \quad -a$

$\Rightarrow$ $a = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7\,; \ \ 8\,; \ \ 9$

1) $\displaystyle\int \frac{e^G}{g}\,dx$

√ $\displaystyle\frac{1}{c}e^G$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^G g}$

√ $\displaystyle-\frac{1}{c}e^{-G}$

3) $\displaystyle\int \frac{G^n}{g}\,dx$

√ $\displaystyle\frac{1}{c}\frac{G^{n+1}}{n+1}$

$\rightarrow$ $n = \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7\,; \ \ 8\,; \ \ 9$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{G^n g}$

√ $\displaystyle\frac{1}{c}\frac{G^{-n+1}}{-n+1}$

$\rightarrow$ $n = \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7\,; \ \ 8\,; \ \ 9$

5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[n]{G}}{g}\,dx$

√ $\displaystyle\frac{1}{c}\frac{\sqrt[n]{G^{n+1}}}{\frac{1}{n}+1}$

$\rightarrow$ $n = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{Gg}$

√ $\displaystyle\frac{1}{c}\ln|G|$

**217.** Вычислить интеграл.

$\Rightarrow$ $b = \; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5$

1) $\displaystyle\int (x+a)e^{bx}\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\left(\frac{x+a}{b}-\frac{1}{b^2}\right)e^{bx}$

$\rightarrow$ $a = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4$

2) $\displaystyle\int (x+a)\sin bx\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle -\frac{x+a}{b}\cos bx+\frac{1}{b^2}\sin bx$

$\rightarrow$ $a = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4$

3) $\displaystyle\int (x+a)\cos bx\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle \frac{x+a}{b}\sin bx+\frac{1}{b^2}\cos bx$

$\rightarrow$ $a = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4$

4) $\displaystyle\int (x+a)\ln bx\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\left(\frac{1}{2}x^2+ax\right)\ln bx-\frac{1}{4}x^2-ax$

$\rightarrow$ $a = \; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4$

5) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} bx\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle x\operatorname{arctg} bx-\frac{1}{2b}\ln|1+b^2x^2|$

6) $\displaystyle\int \operatorname{arcctg} bx\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle x\operatorname{arcctg} bx+\frac{1}{2b}\ln|1+b^2x^2|$

7) $\displaystyle\int \arcsin bx\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle x\arcsin bx+\frac{\sqrt{1-b^2x^2}}{b}$

8) $\displaystyle\int \arccos bx\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle x\arccos bx-\frac{\sqrt{1-b^2x^2}}{b}$

**218.** Вычислить интеграл.

$\Rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

1) $\displaystyle\int (ax+b)\operatorname{arctg} x\,dx$

$\checkmark$ $\dfrac{(ax+b)^2}{2a}\operatorname{arctg} x - \dfrac{a}{2}x - \dfrac{b}{2}\ln(1+x^2) + \dfrac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{arctg} x$

$\rightarrow$ $b =$ −7 ; −6 ; −5 ; 5 ; 6 ; 7

2) $\displaystyle\int (ax+b)\operatorname{arcctg} x\,dx$

$\checkmark$ $\dfrac{(ax+b)^2}{2a}\operatorname{arcctg} x + \dfrac{a}{2}x + \dfrac{b}{2}\ln(1+x^2) + \dfrac{b^2-a^2}{2a}\operatorname{arctg} x$

$\rightarrow$ $b =$ −7 ; −6 ; −5 ; 5 ; 6 ; 7

3) $\displaystyle\int \ln(a^2x^2+b^2)\,dx$

$\checkmark$ $x\ln(a^2x^2+b^2) - 2x + 2\dfrac{b}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b}$

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

**219.** Вычислить интеграл.

1) $\displaystyle\int \frac{Mx^2+Nx+K}{Df}\,dx$

$\surd$ $\dfrac{1}{D}F$

$\rightarrow$ $f$, $F$, $M$, $N$, $K =$

- $(x-a)(x-b)(x-c)$, $A\ln|x-a|+B\ln|x-b|+C\ln|x-c|$, $A+B+C$, $-A(b+c)-B(a+c)-C(a+b)$, $Abc+Bac+Cab$;
- $(x-a)^2(x-b)$, $\dfrac{-A}{x-a}+B\ln|x-a|+C\ln|x-b|$, $B+C$, $A-B(a+b)-2aC$, $-Ab+Bab+Ca^2$;
- $(x^2+2bx+c)(x-a)$, $\dfrac{B}{2}\ln(x^2+2bx+c)+A\ln|x-a|+\dfrac{C-bB}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$, $B+A$, $C-Ba+2bA$, $-Ca+Ac$

$\rightarrow$ $D =$ 1; 2; 3

$\rightarrow$ $C =$ $-3$; $-1$; 1; 3

$\rightarrow$ $B =$ $-2$; 2

$\rightarrow$ $A =$ $-2$; $-1$; 1; 2

$\rightarrow$ $c =$ $b^2+1$; $b^2+2$

$\rightarrow$ $b =$ $-2$; $-1$; 1; 2

$\rightarrow$ $a =$ $-4$; $-3$; 3; 4

**220.** Вычислить интеграл.

$\Rightarrow$ $a = \; -1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; -4$

$\Rightarrow$ $C = \; -3\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 3$

$\Rightarrow$ $B = \; -2\,; \;\; 2$

$\Rightarrow$ $A = \; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2$

1) $$\int \frac{(A+B+C)x^2 - (A(b+c)+B(a+c)+C(a+b))x + (Abc+Bac+Cab)}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,dx$$

$\checkmark$ $A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + C\ln|x-c|$

$\to$ $b = \; -2\,; \;\; -3\,; \;\; 5$

$\to$ $c = \; 1\,; \;\; 4\,; \;\; -5$

2) $$\int \frac{(B+C)x^2 + (A - B(a+b) - 2aC)x + (-Ab + Bab + Ca^2)}{(x-a)^2(x-b)}\,dx$$

$\checkmark$ $\dfrac{-A}{x-a} + B\ln|x-a| + C\ln|x-b|$

$\to$ $b = \; 1\,; \;\; 4\,; \;\; -2\,; \;\; -3\,; \;\; 5$

3) $$\int \frac{(B+A)x^2 + (C - Ba + 2bA)x + (-Ca + Ac)}{(x^2+2bx+c)(x-a)}\,dx$$

$\checkmark$ $\dfrac{B}{2}\ln(x^2+2bx+c) + A\ln|x-a| + \dfrac{C-bB}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$

$\to$ $c = \; b^2+1\,; \;\; b^2+4$

$\to$ $b = \; 0\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; -2\,; \;\; 2$

**221.** Найти неопределённый интеграл

$\Rightarrow$ $a =$ $b+1$ ; $b+2$ ; $b+3$ ; $b+4$ ; $b+5$ ; $b+6$ ; $b+7$ ; $b+8$

$\Rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

1) $\displaystyle\int \cos ax \cos bx \, dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x$

2) $\displaystyle\int \cos bx \sin ax \, dx$

$\checkmark$ $\displaystyle-\frac{1}{2(a-b)} \cos(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \cos(a+b)x$

3) $\displaystyle\int \sin ax \sin bx \, dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x$

**222.** Вычислить интеграл.

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\sin x}$

✓ $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

→ $a =$ 5; 6; 7; 8

→ $b =$ 2; 3; 4; −2; −3; −4

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\sin x-(b+1)\cos x-b}$

✓ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a^2+2b+1}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{a^2+2b+1}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{a^2+2b+1}}\right|$

→ $a$, $b =$

- 2, 0;
- 2, 2;
- 2, 5;
- 2, 22;
- 3, 0;
- 3, 3;
- 3, 13;
- 3, 27

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\frac{b(a^2+1)}{a^2-1}-b\cos x}$

✓ $\displaystyle\frac{a^2-1}{ab}\operatorname{arctg}\left(a\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

→ $a =$ 2; 3; 4; 5; 6

→ $b =$ 1; 2; 3

**223.** Вычислить интеграл.

$\Rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

$\Rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

$\Rightarrow$ $b =$ 1 ; 5 ; 6 ; 7

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{k+\sqrt{ax+b}}$

√ $\displaystyle\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}-\frac{2k}{a}\ln\left|\sqrt{ax+b}+k\right|$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{k+\sqrt[3]{ax+b}}$

√ $\displaystyle\frac{3\left(\sqrt[3]{ax+b}-k\right)^2}{2a}+\frac{3k^2}{a}\ln\left|\sqrt[3]{ax+b}+k\right|$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{k+\sqrt[4]{ax+b}}$

√ $\displaystyle\frac{4}{3a}\sqrt[4]{(ax+b)^3}-\frac{2k}{a}\sqrt{ax+b}+\frac{4k^2}{a}\sqrt[4]{ax+b}-\frac{4k^3}{a}\ln\left|\sqrt[4]{ax+b}+k\right|$

4) $\displaystyle\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ax+b}+k}\,dx$

√ $\displaystyle\frac{\sqrt{ax+b}-k}{a}+\frac{2k^2}{a}\ln\left|\sqrt{ax+b}+k\right|$

5) $\displaystyle\frac{\sqrt[3]{ax+b}}{\sqrt[3]{ax+b}+k}\,dx$

√ $\displaystyle\frac{ax+b}{a}-\frac{3k}{2a}\sqrt[3]{(ax+b)^2}+\frac{3k^2}{a}\sqrt[3]{ax+b}-\frac{3k^3}{a}\ln\left|\sqrt[3]{ax+b}+k\right|$

6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b^2}}{x}\,dx$

√ $\displaystyle 2\sqrt{ax+b^2}+b\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b^2}-b}{\sqrt{ax+b^2}+b}\right|$

**224.** Вычислить интеграл.

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+k\sqrt[4]{ax+b}}$$

√ $$\frac{2\left(\sqrt[4]{ax+b}-k\right)^2}{a}+\frac{4k^2}{a}\ln\left|\sqrt[4]{ax+b}+k\right|$$

→ $k=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $a=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $b=$ 1 ; 5 ; 6 ; 7

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(ax+b)^2}-k\sqrt{ax+b}}$$

√ $$\frac{3\left(\sqrt[6]{ax+b}+k\right)^2}{a}+\frac{6k^2}{a}\ln\left|\sqrt[6]{ax+b}-k\right|$$

→ $k=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $a=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $b=$ 1 ; 5 ; 6 ; 7

3) $$\int \frac{\sqrt{x+b}}{x-k^2\sqrt[3]{(x+b)^2}+b}\,dx$$

√ $$2\sqrt{x+b}+6k^2\sqrt[6]{x+b}+3k^2\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x+b}-k}{\sqrt[6]{x+b}+k}\right|$$

→ $k=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $b=$ 1 ; −1 ; 2 ; −2 ; 3 ; −3 ; 4 ; −4

**225.** Вычислить интеграл.

1) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{ax}{c-ax}}\,dx$

✓ $\displaystyle\frac{c}{a}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax}{c-ax}}-\sqrt{\frac{ax(c-ax)}{c^2}}\right)$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4

→ $c =$ 1; 2; 3; 4

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\left(\frac{ax}{c-ax}\right)^3}}{ax+\sqrt{\frac{ax}{c-ax}}}\,dx$

✓ $\displaystyle -\frac{2}{a}\operatorname{arctg}t+\frac{c}{a}\ln|t^2+ct+1|+\frac{4-2c^2}{a\sqrt{4-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{4-c^2}},\qquad t=\sqrt{\frac{ax}{c-ax}}$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4

→ $c = \dfrac{6}{5}$; $\dfrac{8}{5}$

3) $\displaystyle\int \frac{m}{(a+cx)^2}\sqrt[b]{\frac{a-cx}{a+cx}}\,dx$

✓ $\displaystyle \frac{-mb}{2ac(b+1)}\sqrt[b]{\left(\frac{a-cx}{a+cx}\right)^{b+1}}$

→ $m =$ 1; 2; 3; −1; −2; −3

→ $a =$ 1; 2; 3; 4

→ $b =$ 2; 3; 4; 5

→ $c =$ 1; 2; 3; 4

4) $\displaystyle \frac{dx}{(a^2-c^2x^2)+(a+cx)^2\sqrt[3]{\left(\frac{a-cx}{a+cx}\right)^4}}$

✓ $\displaystyle \frac{3}{2ac}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{a-cx}{a+cx}}+1\right|$

→ $c =$ 1; 2; 3; 4

→ $a =$ 1; 2; 3; 4

→ $b =$ 1; 2; 3; 4

5) $\displaystyle\int \frac{a+\sqrt{\frac{a^2x-b}{x}}}{a-\sqrt{\frac{a^2x-b}{x}}}$

✓ $\displaystyle \frac{-b}{4a^2}\ln|a^2-t^2|-\frac{b}{2a(a-t)}+\frac{b}{2(a-t)^2},\qquad t=\sqrt{\frac{a^2x-b}{x}}$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

6) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{k^2cx+b}{cx+f}}\,\frac{dx}{cx+f}$

$\checkmark$ $\displaystyle -\frac{2}{c}\sqrt{\frac{k^2cx+b}{cx+f}} - \frac{k}{c^2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{k^2cx+b}{cx+f}}-k}{\sqrt{\frac{k^2cx+b}{cx+f}}+k}\right|$

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $f =$ 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; 2

# Часть XII

# Определённый интеграл

**226.** Вычислить интеграл.

1) $$\int\limits_0^{\log_{ab} c} a^x \cdot b^x \, dx$$

√ $$\frac{c-1}{\ln ab}$$

→ $c =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

→ $a =$ 2; 3; 4

→ $b =$ 5; 6; 7

2) $$\int\limits_{-1}^{0} \frac{a^x - b^x}{(ab)^x} \, dx$$

√ $$\frac{1-a}{\ln a} + \frac{b-1}{\ln b}$$

→ $b =$ 2; 3; 4; 5

→ $a =$ 6; 7; 8; 9

3) $$\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\frac{e}{m}} \frac{\sin(\ln mx)}{x} \, dx$$

√ $1 - \cos 1$

→ $m =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12

4) $$\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\frac{e}{m}} \frac{\cos(\ln mx)}{x} \, dx$$

√ $\sin 1$

→ $m =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12

5) $$\int\limits_a^b \operatorname{tg} mx \, dx$$

√ $$-\frac{1}{m} \ln \left| \frac{\cos b}{\cos a} \right|$$

→ $a =$ $-\dfrac{\pi}{4m}$; $-\dfrac{\pi}{3m}$

→ $b =$ 0; $\dfrac{\pi}{6m}$; $\dfrac{\pi}{3m}$

→ $m =$ 2; 3; 4; 5

6) $\displaystyle\int_a^b \operatorname{tg}^2 mx\,dx$

✓ $\dfrac{1}{m}\left(\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a - b + a\right)$

$\rightarrow\ a = -\dfrac{\pi}{4m}\,;\ \ -\dfrac{\pi}{3m}$

$\rightarrow\ b = 0\,;\ \ \dfrac{\pi}{6m}\,;\ \ \dfrac{\pi}{3m}$

$\rightarrow\ m = 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

**227.** Вычислить интеграл.

1) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos ax\,dx$$

√ $\dfrac{1}{a}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

2) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \sin ax\,dx$$

√ $\dfrac{1}{a}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

3) $$\int\limits_0^{\frac{b}{a}} c^{ax+b}\,dx$$

√ $\dfrac{c^b(c^b-1)}{a\ln a}$

→ $a =$ 2 ; 4

→ $b =$ 2 ; 4

→ $c =$ 2 ; 3

4) $$\int\limits_a^b (cx+f)^k\,dx$$

√ $\dfrac{1}{c(k+1)}\left((cb+f)^{k+1}-(ca+f)^{k+1}\right)$

→ $a =$ 0 ; 1 ; −1 ; 2 ; −2 ; 3 ; −3

→ $b =$ 4 ; 5

→ $c =$ 2 ; 3

→ $f =$ 1 ; 2 ; 3 ; −1 ; −2 ; −3

→ $k =$ 2

5) $$\int\limits_a^b \frac{dx}{(cx+f)^k}$$

√ $\dfrac{1}{c(k-1)}\left(\dfrac{1}{(cb+f)^{k-1}}-\dfrac{1}{(ca+f)^{k-1}}\right)$

→ $a =$ 0 ; 1 ; 2 ; 3

→ $b =$ 4 ; 5

$\rightarrow\ c = 2\,;\ 3$

$\rightarrow\ f = 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow\ k = 2$

6) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{cx+f}$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{c}\ln\left|\frac{cb+f}{ac+f}\right|$

$\rightarrow\ a = 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow\ b = 4\,;\ 5\,;\ 6$

$\rightarrow\ c = 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow\ f = 1\,;\ 2\,;\ 3$

7) $\displaystyle\int_a^{a+1} \sqrt{(x-a)^k}\,dx$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{2}{k+2}$

$\rightarrow\ a = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow\ k = 1\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 7\,;\ 9\,;\ 11$

8) $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{cx+f^2}}$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{2}{c}\left(\sqrt{cb+f^2}-f\right)$

$\rightarrow\ b = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

$\rightarrow\ c = 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

$\rightarrow\ f = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4a}} \frac{dx}{\cos^2 ax}$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{a}$

$\rightarrow\ a = 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 9\,;\ 10$

10) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4a}}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{dx}{\sin^2 ax}$

$\checkmark$ $\displaystyle\frac{1}{a}$

$\rightarrow\ a = 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 9\,;\ 10$

**228.** Вычислить интеграл.

$\Rightarrow$ $a = \; -\dfrac{\pi}{4}\,;\;\; -\dfrac{\pi}{3}\,;\;\; -\dfrac{3\pi}{4}\,;\;\; -\dfrac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ $b = \; 0\,;\;\; \dfrac{\pi}{6}$

1) $\displaystyle\int\limits_a^b \operatorname{tg}^3 x\,dx$

√ $\dfrac{1}{2\cos^2 b} - \dfrac{1}{2\cos^2 a} + \ln\left|\dfrac{\cos b}{\cos a}\right|$

2) $\displaystyle\int\limits_a^b \operatorname{tg}^4 x\,dx$

√ $\dfrac{\operatorname{tg}^3 b - \operatorname{tg}^3 a}{3} - \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a + b - a$

3) $\displaystyle\int\limits_a^b \operatorname{tg}^5 x\,dx$

√ $\dfrac{1}{4\cos^4 b} - \dfrac{1}{4\cos^4 a} - \dfrac{1}{\cos^2 b} + \dfrac{1}{\cos^2 a} - \ln\left|\dfrac{\cos a}{\cos b}\right|$

4) $\displaystyle\int\limits_a^b \operatorname{tg}^6 x\,dx$

√ $\dfrac{\operatorname{tg}^5 b - \operatorname{tg}^5 a}{5} - \dfrac{\operatorname{tg}^3 b - \operatorname{tg}^3 a}{3} + \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a - b + a$

5) $\displaystyle\int\limits_a^b \operatorname{tg}^8 x\,dx$

√ $\dfrac{\operatorname{tg}^7 b - \operatorname{tg}^7 a}{7} - \dfrac{\operatorname{tg}^5 b - \operatorname{tg}^5 a}{5} + \dfrac{\operatorname{tg}^3 b - \operatorname{tg}^3 a}{3} - \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + b - a$

**229.** Вычислить интеграл.

1) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4a}} \operatorname{tg} ax\,dx$$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{2a}\ln 2$

$\to$ $a =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

2) $$\int\limits_{\frac{\pi}{4a}}^{\frac{\pi}{2a}} \operatorname{ctg} ax\,dx$$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{2a}\ln 2$

$\to$ $a =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

3) $$\int\limits_1^{e^a} \frac{(\ln x)^{b-1}}{x}\,dx$$

$\checkmark$ $\dfrac{a^b}{b}$

$\to$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

$\to$ $b =$ 2; 3

4) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^b ax \sin ax\,dx$$

$\checkmark$ $-\dfrac{1}{a(b+1)}$

$\to$ $a =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

$\to$ $b =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7

5) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^b ax \cos ax\,dx$$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{a(b+1)}$

$\to$ $a =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

$\to$ $b =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7

6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi a}{4}} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{a}\, dx$

$\checkmark$ $\dfrac{a(4-\pi)}{4}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

7) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}a+\pi a}^{\frac{\pi}{2}a+\pi a} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{a}\, dx$

$\checkmark$ $-\dfrac{a(4+\pi)}{4}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

8) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dx}{1-\cos ax}$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{a}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{dx}{1+\cos ax}$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{a}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

10) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{b}+a\right) dx$

$\checkmark$ $\dfrac{b}{2}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; $-1$ ; 2 ; $-2$ ; 3 ; $-3$ ; 4 ; $-4$ ; 5 ; $-5$ ; 6 ; $-6$

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10

11) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{a}}^{0} a^2 x \sqrt[k]{1+ax}\, dx$

$\checkmark$ $-\dfrac{1}{(k+2)(k+1)}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

$\rightarrow$ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

**230.** Вычислить определённый интеграл

1) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{k^2-b^2}{a}} \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b^2}}$

✓ $\dfrac{2k(k^2-b^2)}{a^2}$

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3

→ $k =$ 4 ; 5 ; 6

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3

2) $\displaystyle\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

✓ $\dfrac{a^4}{16}\pi$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3

3) $\displaystyle\int\limits_{e^a}^{e^b} \frac{(\ln x)^{k-1}\,dx}{x\,(m+(\ln x)^k)}$

✓ $\dfrac{1}{k}\ln\left|\dfrac{m+b^k}{m+a^k}\right|$

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3

→ $m =$ 1 ; 2 ; 3

→ $b =$ 4 ; 5 ; 6

4) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2k}} \frac{\cos kx\,dx}{\sqrt[3]{(m^3+(a^3-m^3)\sin kx)^2}}$

✓ $\dfrac{3}{(a^2+am+m^2)k}$

→ $m =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $a =$ 6 ; 7

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3

5) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{b^2-1+\sin^2 x}$

✓ $\dfrac{1}{b\sqrt{b^2-1}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{\sqrt{b^2-1}}$

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

6) $$\int\limits_{\frac{\ln a}{k}}^{\frac{\ln(b^2+1)}{k}} \frac{e^{kx}\sqrt{e^{kx}-a}}{e^{kx}+b^2-a}\,dx$$

$\checkmark$ $\dfrac{b}{k}\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

Определённый интеграл по частям

**231.** Вычислить определённый интеграл

1) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \arcsin kx\,dx$

✓ $0$

→ $k =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

2) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \operatorname{arctg} kx\,dx$

✓ $0$

→ $k =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

3) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \arccos kx\,dx$

✓ $\dfrac{\pi}{k}$

→ $k =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

4) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \operatorname{arcctg} kx\,dx$

✓ $\dfrac{\pi}{k}$

→ $k =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

5) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{a^2}} \frac{x\,dx}{\cos^2 ax}$

✓ $\dfrac{\pi}{a^3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{a} + \dfrac{1}{a^2}\ln\left|\cos\dfrac{\pi}{a}\right|$

→ $a =$ 3; 4; 6

6) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{a^2}}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{x\,dx}{\sin^2 ax}$

✓ $\dfrac{\pi}{a^3}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{a} - \dfrac{1}{a^2}\ln\left|\sin\dfrac{\pi}{a}\right|$

→ $a =$ 3; 4; 6

7) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$\checkmark$ $\dfrac{a^2\pi}{4}$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx$

$\checkmark$ $\dfrac{b(e^{\frac{a\pi}{b}}+1)}{a^2+b^2}$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

$\rightarrow$ $b=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

9) $\displaystyle\int_0^{\ln b} xe^{-ax}\,dx$

$\checkmark$ $-\dfrac{\ln b}{ab^a}-\dfrac{1}{a^2b^a}+1$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; 2

$\rightarrow$ $b=$ 2 ; 3 ; $e$ ; 4 ; 5

10) $\displaystyle\int_{-a}^0 x\cos\frac{b\pi x}{a}\,dx$

$\checkmark$ $\dfrac{a^2}{\pi^2b^2}\left(1-(-1)^b\right)$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $b=$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

11) $\displaystyle\int_a^b \ln(cx+f)\,dx$

$\checkmark$ $b\ln(cb+f)-a\ln(ca+f)-b+a+\dfrac{f}{c}\ln(cb+f)-\dfrac{f}{c}\ln(ca+f)$

$\rightarrow$ $a=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b=$ 6 ; 7 ; 8 ; 9

$\rightarrow$ $c=$ 2 ; 3 ; 4 ; 6

$\rightarrow$ $f=$ 12 ; 24 ; 36

**232.** Вычислить интеграл

1) $$\int\limits_{a+2}^{a+3} \frac{dx}{(x+a)(x-(a+1))}$$

√ $\dfrac{1}{2a+1}\ln\left|\dfrac{4(a+1)}{2a+3}\right|$

→ $a =$ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

2) $$\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x^2(x-c)}$$

√ $-\dfrac{2}{c^2}\ln\dfrac{b}{a} + \dfrac{a-b}{abc} + \dfrac{1}{c^2}\ln\left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|$

→ $a =$ 3; 4; 5; 6; 7

→ $b =$ 8; 9; 10; 11

→ $c =$ 1; 2

3) $$\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x(x^2+c)}$$

√ $\dfrac{1}{c}\ln\dfrac{b}{a} - \dfrac{1}{2c}\ln\dfrac{b^2+c}{a^2+c}$

→ $a =$ 1; 2

→ $b =$ 3; 4; 5; 6; 7

→ $c =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

4) $$\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{(x^2+b^2)\left(x^2+\frac{1+ab^2}{a}\right)}$$

√ $\dfrac{\sqrt{a}\pi}{4b} - \dfrac{a}{\sqrt{1+ab^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a}b}{\sqrt{1+ab^2}}$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4

→ $b =$ 1; 2; 3

**233.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2,$
$y = (a+b)x - ab$

$\checkmark$ $\frac{1}{6}(b-a)^3$

$\rightarrow$ $b =$ $a+1$ **;** $a+2$ **;** $a+3$

$\rightarrow$ $a =$ $-3$ **;** $-2$ **;** $-1$ **;** $0$

**234.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $\begin{array}{l} y = Bx^2 - 2aBx + Ba^2 + A, \\ y = B(d-c)x + B(-ad + ac + dc) + A \end{array}$

√ $\left|\dfrac{B(c+d)^3}{6}\right|$

→ $a = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

→ $c = \ d-1\,;\ \ d\,;\ \ d+1\,;\ \ d+2$

→ $d = \ 1\,;\ \ 2$

→ $A = \ B\,;\ \ B-1\,;\ \ B+1$

→ $B = \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

**235.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $$\begin{aligned} y &= Bx^2 - 2B(a+b)x + B(a+b)^2 + A, \\ y &= -Bx^2 + 2B(a+2b)x - B(a+2b)^2 + A + 5Bb^2 \end{aligned}$$

✓ $|9Bb^3|$

→ $A =$ $-4$ ; $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; $0$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$

→ $B =$ $-2$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$

→ $a =$ $b-1$ ; $b-2$ ; $b-3$

→ $b =$ $1$ ; $2$

**236.** Найти длину дуги кривой.

1) $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{\left(ax + \dfrac{c^2-1}{a^2}\right)^3}, \quad 0 \le x \le \dfrac{c^2}{a^3}$

√ $\dfrac{1}{a^3}\left(\sqrt{(a^3+c^2)^3} - c^3\right)$

→ $c =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

2) $y = ax^2 + b, \quad 0 \le x \le 1$

√ $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+4a^2} + \dfrac{1}{2a}\ln\left|2a + \sqrt{1+4a^2}\right|\right)$

→ $a =$ 1 ; $\dfrac{1}{2}$ ; $\dfrac{1}{4}$ ; $-1$ ; $-\dfrac{1}{2}$ ; $-\dfrac{1}{4}$

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; $-2$ ; $-3$ ; $-4$ ; $-5$ ; $-6$ ; $-7$ ; $-8$ ; $-9$

3) $y = \dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b}, \quad -\dfrac{1}{a} \le x \le 0$

√ $ab\sqrt{\dfrac{b+1}{b}} - \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{\frac{b+1}{b}}-1}{\sqrt{\frac{b+1}{b}}+1}\right| - \sqrt{\dfrac{b}{b-1}} + \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{\frac{b}{b-1}}-1}{\sqrt{\frac{b}{b-1}}+1}\right|$

→ $a =$ 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4

4) $y = a\ln(a^2 - x^2), \quad -\dfrac{a}{2} \le x \le \dfrac{a}{2}$

√ $2a\ln 3 - a$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

5) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad -a \le x \le a$

√ $a\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$

→ $a =$ 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15

**237.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями.

1) $xy = a,\ x = 1,\ x = a,\ y = 0, \quad Ox$

√ $\pi a(a-1)$

→ $a =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11

2) $y = a - \dfrac{x^2}{a},\ x + y = a, \quad Oy$

√ $\dfrac{\pi a^3}{6}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

3) $y = x^3,\ x = 0,\ y = a^3, \quad Oy$

√ $\dfrac{3}{5}\pi a^5$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

4) $y^2 = a^2 - x,\ x = 0, \quad Oy$

√ $\dfrac{16}{15}\pi a^5$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

5) $y^2 = a - x,\ x = 0, \quad Ox$

√ $\dfrac{\pi a^2}{2}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

6) $x^2 + y^2 = a^2,\ x + y = a, \quad Ox$

√ $\dfrac{\pi a^3}{3}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

7) $y = \dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{x}{a},\ y = \pm\dfrac{\pi}{2a},\ x = 0, \quad Oy$

√ $\dfrac{\pi^2}{2a}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

8) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ y = \pm b, \quad Oy$

√ $\dfrac{8}{3}\pi a^3 b$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3

**238.** Вычислить силу, с которой вода давит на платину, имеющую форму равнобокой трапеции с нижним основанием $a$, верхним основанием $b$ и высотой $h$.

1) $a = a$ м, $b = b$ м, $h = h$ м,

√ $\dfrac{\rho g h^2}{1000}\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}\right)$ кН

→ $\rho =$ 1000

→ $g =$ 10

→ $h =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $b =$ $6c - 2a$

→ $a =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $c =$ 4 ; 5

**239.** Задача по теме «Сила давления на вертикальную пластину».

1) Вычислить силу, с которой вода давит на платину, имеющую форму равнобокой трапеции с нижним основанием $a$ м, верхним основанием $b$ м и высотой $h$ м.

√ $\dfrac{\rho g h^2}{1000}\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}\right)$ кН

→ $\rho =$ 1000

→ $g =$ 10

→ $h =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $b =$ $6c - 2a$

→ $a =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $c =$ 4 ; 5

**240.** Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

1) $\displaystyle\int\limits_{e^n}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^k x}$

√ $\dfrac{1}{(k-1)n^{k-1}}$

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4

→ $n =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

2) $\displaystyle\int\limits_{a}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt[k]{\ln x}}$

√ $\infty$

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

3) $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^k}\, dx$

√ $\dfrac{1}{(k-1)^2}$

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

4) $\displaystyle\int\limits_{a}^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[k]{x}}\, dx$

√ $\infty$

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

**241.** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$\Rightarrow$ $b = \ a+1\,; \ \ a+2\,; \ \ a+3\,; \ \ a+4\,; \ \ a+5\,; \ \ a+6\,; \ \ a+7$

$\Rightarrow$ $a = \ -5\,; \ \ -4\,; \ \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

1) $$\int\limits_a^b \frac{dx}{-x^2+x(a+b)-ab}$$

√ $\infty$

2) $$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x(a+b)-ab}}$$

√ $\pi$

# Часть XIII

# Интегралы с параметром

**242.** С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы

1) $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt[n]{a^n - x^n}}$

✓ $\dfrac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$

→ $a =$ 1 ; 2

→ $n =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

2) $\displaystyle\int\limits_0^a \left(\ln \frac{a}{x}\right)^p dx$

✓ $a\Gamma(p+1)$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $p =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

# Часть XIV

# Дифференцирование функций многих переменных

**243.** Построить линии уровня функции

$\Rightarrow$ $a = \; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4$

$\Rightarrow$ $b = \; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4$

1) $z = \dfrac{1}{b^2x^2 + a^2y^2}$ при $c = \dfrac{1}{a^2b^2}$

$\surd$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2) $z = \dfrac{1}{b^2x^2 - a^2y^2}$ при $c = \dfrac{1}{a^2b^2}$

$\surd$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

**244.** Найти частные производные первого порядка и изобразить область определения функции двух переменных.

$\Rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\Rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

1) $z = F$

$\rightarrow$ $F =$ $\arcsin(a - x^2 - y^2)$ ; $\arccos(a - x^2 - y^2)$

$\surd$ кольцо с внутренним радиусом $\sqrt{a-1}$, внешним: $\sqrt{a+1}$

2) $z = F$

$\rightarrow$ $F =$ $\arcsin(ax + by)$ ; $\arccos(ax + by)$

$\surd$ полоса, ограниченная параллельными прямыми $ax + by + 1 = 0$ и $ax + by - 1 = 0$

3) $z = F$

$\rightarrow$ $F =$ $\log_b(a - x^2 - y^2)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{a - x^2 - y^2}}$

$\surd$ внутренность круга с центром в начале координат, радиуса $a$

4) $z = F$

$\rightarrow$ $F =$ $\log_b(ax - by)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{ax - by}}$

$\surd$ множество точек плоскости над прямой $y = \dfrac{a}{b}x$

5) $z = \sqrt{ax - by}$

$\surd$ $y \geq \dfrac{a}{b}x$

6) $z = F$

$\rightarrow$ $F =$ $\log_b(x^2 - ay + b)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - ay + b}}$

$\surd$ $y > \dfrac{1}{a}x^2 + \dfrac{b}{a}$

7) $z = x^2 - ay + b$

$\surd$ $y \geq \dfrac{1}{a}x^2 + \dfrac{b}{a}$

8) $z = F$

$\rightarrow$ $F =$ $\log_b(x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2ab)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2ab}}$

$\surd$ внешность круга $(x + a)^2 + (y + b)^2 > (a + b)^2$

9) $z = \dfrac{1}{ax+by}$

$\surd$ $y \neq -\dfrac{a}{b}x$

10) $z = \dfrac{1}{x^2-ay+b}$

$\surd$ $y \neq \dfrac{1}{a}x^2 + \dfrac{b}{a}$

11) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2+2ax+2by-2ab}$

$\surd$ вся плоскость, из которой выброшена окружность $(x+a)^2+(y+b)^2=(a+b)^2$

12) $z = \dfrac{\sqrt{x}}{F}$

$\surd$ $y \neq G,\ x > 0$

$\rightarrow$ $F$ **,** $\quad G =$

- $ax+by$ **,** $\quad -\dfrac{a}{b}x$ **;**
- $x^2-ay+b$ **,** $\quad \dfrac{1}{a}x^2+\dfrac{b}{a}$

13) $z = \dfrac{\sqrt{y}}{F}$

$\surd$ $y \neq G,\ y > 0$

$\rightarrow$ $F$ **,** $\quad G =$

- $ax+by$ **,** $\quad -\dfrac{a}{b}x$ **;**
- $x^2-ay+b$ **,** $\quad \dfrac{1}{a}x^2+\dfrac{b}{a}$

**245.** Найти частные производные и выписать полный дифференциал данной функции.

$\Rightarrow$ $u = \; ax^n + y^k \,; \;\; ax^n y^k \,; \;\; \dfrac{ax^n}{y^{k+1}}$

$\Rightarrow$ $a = \; -5\,; \;\; -4\,; \;\; -3\,; \;\; -2\,; \;\; -1\,; \;\; 1\,; \;\; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5$

$\Rightarrow$ $n = \; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5\,; \;\; 6\,; \;\; 7$

$\Rightarrow$ $k = \; 2\,; \;\; 3\,; \;\; 4\,; \;\; 5\,; \;\; 6\,; \;\; 7$

1) $z = \operatorname{arctg} u$

2) $z = \arcsin u$

3) $z = \operatorname{tg} u$

4) $z = \operatorname{ctg} u$

5) $z = \cos u$

6) $z = \sin u$

7) $z = e^u$

**246.** Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

1) $F$

$\to$ $F = e^E$ ; $\sin E$ ; $\cos E$ ; $\operatorname{tg} E$ ; $\operatorname{ctg} E$ ; $\ln E$ ; $\arcsin E$ ; $\arccos E$ ; $\operatorname{arctg} E$ ; $\operatorname{arcctg} E$

$\to$ $E = ax + by$

$\to$ $a = -2$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$

$\to$ $b = -2$ ; $-1$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$

**247.** Удовлетворяет ли функция $z = f(x,y)$ уравнению:

$\Rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

1) $z = \sin^2(x - ay), \quad a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$\surd$ да

2) $z = e^{-\cos(x+ay)}, \quad a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$\surd$ да

3) $z = e^{-(x+ay)}\sin(x + ay), \quad a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$\surd$ да

4) $z = \cos^2(ax + y), \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$\surd$ да

5) $z = \ln\dfrac{x}{y} + x^a - y^a, \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = a(x^a - y^a)$

$\surd$ да

**248.** Для заданных $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

1) $z = F, \quad x = X, \; y = Y$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = F_x A_x X_u + F_x A_y Y_u$$

√

$$\frac{\partial z}{\partial v} = F_x A_x X_v + F_x A_y Y_v$$

→ $F\,, \quad F_x =$

- $\cos A\,, \quad -\sin A\,;$
- $\sin A\,, \quad \cos A\,;$
- $\sqrt{A}\,, \quad \dfrac{1}{2\sqrt{A}}\,;$
- $A^2\,, \quad 2A$

→ $A\,, \quad A_x\,, \quad A_y =$

- $ax^k y^l\,, \quad akx^{k-1}y^l\,, \quad alx^k y^{l-1}\,;$
- $ax^k + y^l\,, \quad kax^{k-1}\,, \quad ly^{l-1}$

→ $X\,, \quad X_u\,, \quad X_v =$

- $uv\,, \quad v\,, \quad u\,;$
- $u^v\,, \quad vu^{v-1}\,, \quad u^v \ln u\,;$
- $ue^v\,, \quad e^v\,, \quad ue^v$

→ $Y\,, \quad Y_u\,, \quad Y_v =$

- $\dfrac{u}{v}\,, \quad \dfrac{1}{v}\,, \quad -\dfrac{u}{v^2}\,;$
- $u\ln v\,, \quad \ln v\,, \quad \dfrac{u}{v}\,;$
- $u\sin v\,, \quad \sin v\,, \quad u\cos v$

→ $a = \; 1\,; \; 2\,; \; 3\,; \; 4\,; \; 5$

→ $k = \; 2\,; \; 3\,; \; 4\,; \; 5$

→ $l = \; 2\,; \; 3\,; \; 4\,; \; 5$

Касательная к неявно заданной кривой

**249.** Составить уравнение касательной в точке $M_0$ к данной кривой.

1) $$x^a + kx^by^c + y^d + mx + ny = x_0^a + kx_0^by_0^c + y_0^d + mx_0 + ny_0,$$
$$M_0(x_0, y_0)$$

$\checkmark$ $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$

$\to$ $m = \ A - ax_0^{a-1} - kbx_0^{b-1}y_0^c$

$\to$ $n = \ B - dy_0^{d-1} - kcx_0^by_0^{c-1}$

$\to$ $A = \ 1\,; \ \ 3\,; \ \ 5$

$\to$ $B = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 4$

$\to$ $a = \ 2\,; \ \ 3$

$\to$ $b = \ 1\,; \ \ 2$

$\to$ $c = \ 1\,; \ \ 2$

$\to$ $d = \ 2\,; \ \ 3$

$\to$ $k = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5$

$\to$ $x_0 = \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\to$ $y_0 = \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

**250.** К данной поверхности провести касательные плоскости, параллельные данной плоскости.

1) $ax^2 + by^2 + cz^2 = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2;$
$Ax + By + Cz = 0$

√ $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0;$
$Ax + By + Cz + Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$

$\rightarrow$ $x_0 = \ kk_a$

$\rightarrow$ $y_0 = \ kk_b$

$\rightarrow$ $z_0 = \ kk_c$

$\rightarrow$ $A = \ ak_a$

$\rightarrow$ $B = \ bk_b$

$\rightarrow$ $C = \ ck_c$

$\rightarrow$ $a = \ 1;\ \ 3;\ \ 5$

$\rightarrow$ $c = \ 1;\ \ 2;\ \ 4$

$\rightarrow$ $k_a = \ 1;\ \ 3$

$\rightarrow$ $k_c = \ 1;\ \ 2;\ \ 4$

$\rightarrow$ $b = \ 1;\ \ 2;\ \ 3;\ \ 4$

$\rightarrow$ $k_b = \ 1;\ \ 2;\ \ 3$

$\rightarrow$ $k = \ 1;\ \ 2$

**251.** Найти $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ и $y'''(x_0)$ для неявно заданной функции $y = y(x)$, если известно, что $y(x_0) = y_0$.

1) $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0;$$
$$x_0 = x_0, \quad y_0 = y_0$$

√ $y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = 2ky_3,\ y'''(x_0) = y_3$

→ $d = \ -2ax_0 - by_0 - bx_0y_1 - 2cy_0y_1 - ey_1$

→ $a = \ -by_1 - bx_0ky_3 - cy_1^2 - 2cy_0ky_3 - eky_3$

→ $e = \ -6kb - bx_0 - 12cy_1k - 2cy_0$

→ $b = \ -1\,;\ \ 1$

→ $c = \ -1\,;\ \ 1$

→ $x_0 = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

→ $y_0 = \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1$

→ $y_1 = \ 2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

→ $y_3 = \ -1\,;\ \ 1$

→ $k = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

**252.** Исследовать на экстремум функцию

$\Rightarrow$ $x_0 =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $y_0 =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $f =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

1) $z = ax^2 + by^2 - 2ax_0x - 2by_0y - f$

$\surd$ $z_{\min}(x_0, y_0) = -ax_0^2 - by_0^2 - f$

$\rightarrow$ $a =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\rightarrow$ $b =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

2) $z = ax^2 + by^2 - 2ax_0x - 2by_0y - f$

$\surd$ $z_{\max}(x_0, y_0) = -ax_0^2 - by_0^2 - f$

$\rightarrow$ $a =\ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ -4\,;\ \ -5$

$\rightarrow$ $b =\ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ -4\,;\ \ -5$

**253.** Исследовать на экстремум функцию

$\Rightarrow$ $x_0 =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\Rightarrow$ $y_0 =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

1) $z = ax^2 + bxy + cy^2 - (2ax_0 + by_0)x - (2cy_0 + bx_0)y$

$\surd$ $z_{\min}(x_0, y_0) = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 - (2ax_0 + by_0)x_0 - (2cy_0 + bx_0)y_0$

$\to$ $a =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $c =\ 2\,;\ \ 3$

$\to$ $b =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

2) $z = ax^2 + bxy + cy^2 - (2ax_0 + by_0)x - (2cy_0 + bx_0)y$

$\surd$ $z_{\max}(x_0, y_0) = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 - (2ax_0 + by_0)x_0 - (2cy_0 + bx_0)y_0$

$\to$ $a =\ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3$

$\to$ $c =\ -2\,;\ \ -3$

$\to$ $b =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

3) $z = ax^2 + bxy + cy^2 - (2ax_0 + by_0)x - (2cy_0 + bx_0)y$

$\surd$ Экстремума нет

$\to$ $a =\ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\to$ $c =\ 0\,;\ \ -1\,;\ \ -2$

$\to$ $b =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

**254.** Исследовать функцию двух переменных на экстремум

1) $z = x^2y - \dfrac{n^2+2b}{3}y^3 - x^2 + by^2$

√ $z_{\max}(0,0) = 0$

→ $n = \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6$

→ $b = \ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ -\dfrac{1}{2}\,;\ \ -4\,;\ \ -\dfrac{3}{2}\,;\ \ -\dfrac{5}{2}$

2) $z = ax^3 + xy^2 + \dfrac{n^2+3a}{2}x^2 + y^2$

√ $z_{\min}(0,0) = 0$

→ $n = \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6$

→ $a = \ -1\,;\ \ -2\,;\ \ -3\,;\ \ -4\,;\ \ -\dfrac{1}{3}\,;\ \ -\dfrac{2}{3}\,;\ \ -\dfrac{4}{3}$

**255.** Исследовать на экстремум функцию

$\Rightarrow$ $x_0 =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\Rightarrow$ $y_0 =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

1) $z = ax^2 + by^2 - 2ax_0^2 \ln x - 2by_0^2 \ln y$

$\surd$ $z_{\min}(x_0, y_0) = ax_0^2 + by_0^2 - 2ax_0^2 \ln x_0 - 2by_0^2 \ln y_0$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

**256.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в указанном круге.

1) $z = x^2 + y^2 + 2ax + 2by, \quad x^2 + y^2 \le k^2(a^2 + b^2)$

√ $z_{\min} = z(-a, -b) = -a^2 - b^2, \ z_{\max} = z(ka, kb) = (a^2 + b^2)(k^2 + 2k)$

→ $a = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

→ $b = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

→ $k = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

2) $z = -x^2 - y^2 - 2ax - 2by, \quad x^2 + y^2 \le k^2(a^2 + b^2)$

√ $z_{\min} = z(ka, kb) = -(a^2 + b^2)(k^2 + 2k), \ z_{\max} = z(-a, -b) = a^2 + b^2$

→ $a = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

→ $b = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

→ $k = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4$

**257.** Дана система точек, координаты которых указаны в таблице. По методу наименьших квадратов построить аппроксимирующую прямую.

1)

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $y_k$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |

√ $y = ax + b$

→ $y_1 = \ Bx_2 - A$

→ $y_2 = \ A - Bx_1$

→ $A = \ aA_1 + bB_1 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5$

→ $B = \ A_2a + bB_2 - y_3 - y_4 - y_5$

→ $A_2 = \ B_1$

→ $B_2 = \ 5$

→ $A_1 = \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$

→ $B_1 = \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

→ $y_3 = \ ax_3 + b - 3\,; \quad ax_3 + b - 2\,; \quad ax_3 + b - 1$

→ $y_4 = \ ax_4 + b - 3\,; \quad ax_4 + b - 2\,; \quad ax_4 + b - 1\,; \quad ax_4 + b + 1\,; \quad ax_4 + b + 2\,; \quad ax_4 + b + 3$

→ $y_5 = \ ax_5 + b + 1\,; \quad ax_5 + b + 2\,; \quad ax_5 + b + 3$

→ $x_5 = \ x_4 + 1\,; \quad x_4 + 2\,; \quad x_4 + 3$

→ $x_4 = \ x_3 + 1\,; \quad x_3 + 2\,; \quad x_3 + 3$

→ $x_3 = \ x_2 + 1\,; \quad x_2 + 2\,; \quad x_2 + 3$

→ $x_2 = \ x_1 + 1$

→ $x_1 = \ -5\,; \quad -4\,; \quad -3\,; \quad -2$

→ $a = \ 1\,; \quad 2\,; \quad -1\,; \quad -2$

→ $b = \ -5\,; \quad -4\,; \quad -3\,; \quad -2\,; \quad -1\,; \quad 0\,; \quad 1\,; \quad 2\,; \quad 3\,; \quad 4\,; \quad 5$

**258.** В группе студентов-первокурсников у 12 студентов были измерены длина тела $(h)$ и масса тела $(m)$. С помощью метода наименьших квадратов построить линейную зависимость массы тела от длины тела.

1)

| Номер | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$, см | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ |
| $m$, кг | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{10}$ | $y_{11}$ | $y_{12}$ |

√ $m = ah + b$

$\rightarrow$ $a = \dfrac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$

$\rightarrow$ $b = \dfrac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$

$\rightarrow$ $A_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_{10}^2 + x_{11}^2 + x_{12}^2$

$\rightarrow$ $B_1 = A_2$

$\rightarrow$ $A_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$

$\rightarrow$ $B_2 = 12$

$\rightarrow$ $C_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 + x_6y_6 + x_7y_7 + x_8y_8 + x_9y_9 + x_{10}y_{10} + x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12}$

$\rightarrow$ $C_2 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12}$

$\rightarrow$ $y_1 = kx_1 + d - 2\,;\;\; kx_1 + d - 1\,;\;\; kx_1 + d\,;\;\; kx_1 + d + 1\,;\;\; kx_1 + d + 2$

$\rightarrow$ $y_2 = kx_2 + d - 4\,;\;\; kx_2 + d - 3\,;\;\; kx_2 + d - 1\,;\;\; kx_2 + d + 4\,;\;\; kx_2 + d + 5$

$\rightarrow$ $y_3 = kx_3 + d - 3\,;\;\; kx_3 + d - 1\,;\;\; kx_3 + d\,;\;\; kx_3 + d + 2\,;\;\; kx_3 + d + 4$

$\rightarrow$ $y_4 = kx_4 + d - 2\,;\;\; kx_4 + d - 1\,;\;\; kx_4 + d\,;\;\; kx_4 + d + 1\,;\;\; kx_4 + d + 2$

$\rightarrow$ $y_5 = kx_5 + d - 2\,;\;\; kx_5 + d - 1\,;\;\; kx_5 + d\,;\;\; kx_5 + d + 1\,;\;\; kx_5 + d + 2$

$\rightarrow$ $y_6 = kx_6 + d - 5\,;\;\; kx_6 + d - 3\,;\;\; kx_6 + d + 1\,;\;\; kx_6 + d + 2\,;\;\; kx_6 + d + 3$

$\rightarrow$ $y_7 = kx_7 + d - 2\,;\;\; kx_7 + d - 1\,;\;\; kx_7 + d\,;\;\; kx_7 + d + 1\,;\;\; kx_7 + d + 2$

$\rightarrow$ $y_8 = kx_8 + d - 6\,;\;\; kx_8 + d - 3\,;\;\; kx_8 + d\,;\;\; kx_8 + d + 2\,;\;\; kx_8 + d + 7$

$\rightarrow$ $y_9 = kx_9 + d - 2\,;\;\; kx_9 + d - 1\,;\;\; kx_9 + d\,;\;\; kx_9 + d + 1\,;\;\; kx_9 + d + 2$

$\rightarrow$ $y_{10} = kx_{10} + d - 7\,;\;\; kx_{10} + d - 6\,;\;\; kx_{10} + d\,;\;\; kx_{10} + d + 5\,;\;\; kx_{10} + d + 10$

$\rightarrow$ $y_{11} = kx_{11} + d - 8\,;\;\; kx_{11} + d - 4\,;\;\; kx_{11} + d\,;\;\; kx_{11} + d + 6\,;\;\; kx_{11} + d + 9$

$\rightarrow$ $y_{12} = kx_{12} + d - 9\,;\;\; kx_{12} + d - 5\,;\;\; kx_{12} + d\,;\;\; kx_{12} + d + 7\,;\;\; kx_{12} + d + 8$

$\rightarrow$ $x_{10}\,,\quad x_{11}\,,\quad x_{12} =$

- $180\,,\quad 184\,,\quad 188\,;$
- $180\,,\quad 186\,,\quad 190\,;$
- $180\,,\quad 182\,,\quad 186\,;$
- $180\,,\quad 182\,,\quad 188\,;$
- $182\,,\quad 184\,,\quad 186\,;$
- $182\,,\quad 184\,,\quad 188\,;$
- $182\,,\quad 186\,,\quad 188\,;$
- $182\,,\quad 186\,,\quad 190$

$\rightarrow$ $x_4\,,\quad x_5\,,\quad x_6\,,\quad x_7\,,\quad x_8\,,\quad x_9 =$

- $170\,,\quad 172\,,\quad 174\,,\quad 176\,,\quad 176\,,\quad 178\,;$
- $170\,,\quad 172\,,\quad 174\,,\quad 174\,,\quad 176\,,\quad 178\,;$
- $170\,,\quad 172\,,\quad 172\,,\quad 174\,,\quad 176\,,\quad 178\,;$
- $170\,,\quad 170\,,\quad 172\,,\quad 174\,,\quad 176\,,\quad 178\,;$
- $170\,,\quad 172\,,\quad 174\,,\quad 176\,,\quad 178\,,\quad 178$

$\rightarrow$ $x_1\,,\quad x_2\,,\quad x_3 =$

- $160\,,\quad 164\,,\quad 168\,;$
- $160\,,\quad 166\,,\quad 168\,;$
- $160\,,\quad 164\,,\quad 166\,;$
- $162\,,\quad 166\,,\quad 168\,;$
- $164\,,\quad 166\,,\quad 168$

$\rightarrow$ $k = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow$ $d = -25$

Текстовая задача на глобальный экстремум

**259.** Решить задачу.

1) Найти максимальный объём вписанного в эллипсоид с полуосями $a = a$, $b = b$ и $c = c$ прямоугольного параллелепипеда.

✓ $\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6

# Часть XV

# Кратные интегралы

**260.** Вычислить двойной интеграл

1) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant x\leqslant d}} \frac{dx\,dy}{(ex+fy+g)^2}$

✓ $\displaystyle\frac{1}{ef}\ln\frac{(eb+fc+g)(ea+fd+g)}{(eb+fd+g)(ea+fc+g)}$

→ $b = \ a+1\,; \ \ a+2$

→ $a = \ A\,; \ \ A+1\,; \ \ A+2$

→ $d = \ c+1\,; \ \ c+2$

→ $c = \ A\,; \ \ A+1\,; \ \ A+2$

→ $e = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

→ $f = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

→ $g = \ G\,; \ \ G+1\,; \ \ G+2$

→ $A\,, \quad G =$

- $0\,, \quad 1\,;$
- $1\,, \quad 0$

**261.** Вычислить двойной интеграл.

1) $$\iint\limits_{\triangle ABC} \left(2xy + n\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy,$$

$A(0,0),\ B(a,y_0),\ C(a,y_0+2d).$

✓ $d(y_0+d)(a^2+n)$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $n =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9

→ $d =$ 1 ; 2 ; 3

→ $y_0 =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

**262.** Найти двойной интеграл по области $D$, ограниченной указанными линиями

1) $$\iint\limits_D \frac{x^a}{y^2}\,dx\,dy$$

$$D:\ y = kx,\ y = \frac{ks^2}{x},\ x = X$$

$\checkmark$ $$\frac{X^{a+2}}{(a+2)ks^2} - \frac{X^a}{ak} - \frac{s^a}{(a+2)k} + \frac{s^a}{ak}$$

$\rightarrow$ $X =$ $s+1$ ; $s+2$

$\rightarrow$ $s =$ 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

**263.** Найти двойной интеграл по области $D$, ограниченной указанными линиями

1) $$\iint\limits_D \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}\, xy\, dx\, dy$$

$D:\ y = kx,\ y = lx,\ x^2 + y^2 = A^2$

✓ $\dfrac{A^5}{15}\left(\dfrac{l^2}{1+l^2} - \dfrac{k^2}{1+k^2}\right)$

→ $A =\ 1;\ \ 2;\ \ a$

→ $k =\ \dfrac{1}{2};\ \ 1$

→ $l =\ \dfrac{3}{2};\ \ 2;\ \ 3$

**264.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $$\begin{gathered} x^2+y^2=ax,\ x^2+y^2=bx, \\ y\geqslant 0,\ y=kx \end{gathered}$$

√ $$\frac{b^2-a^2}{4}\left(\operatorname{arctg} k+\frac{k}{1+k^2}\right)$$

→ $k=\ \frac{1}{3}\,;\ \ \frac{1}{2}\,;\ \ \frac{2}{3}\,;\ \ 1\,;\ \ \frac{3}{2}\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

→ $b=\ a+1\,;\ \ a+2\,;\ \ a+3$

→ $a=\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

**265.**

1) Найти площадь меньшей из частей, на которые делит правую половину линии

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

прямая $y = kx$.

√ $\dfrac{ab}{4}\dfrac{(1-k)^2}{1+k^2}$

→ $k = \ \frac{1}{2}\,;\ \ \frac{1}{3}\,;\ \ \frac{2}{3}\,;\ \ \frac{1}{4}\,;\ \ \frac{3}{4}\,;\ \ \frac{1}{5}\,;\ \ \frac{2}{5}\,;\ \ \frac{3}{5}\,;\ \ \frac{4}{5}$

→ $b = \ a-1\,;\ \ a-2\,;\ \ a-3$

→ $a = \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

**266.** Найти центр масс фигуры, ограниченной линиями

1) $y = Bx^2 - 2aBx + Ba^2 + A,$
$y = B(d+c)x - B(d+c)a - Bdc + A.$

√ $\left(a + \dfrac{d+c}{2}; A + \dfrac{B}{5}\left(2d^2 + dc + 2c^2\right)\right)$

→ $a =$ −1 ; 0 ; 1

→ $A =$ −3 ; −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $B =$ −5 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 5

→ $c$ , $d =$

- −2 , −1 ;
- −2 , 0 ;
- −2 , 1 ;
- −1 , 0 ;
- −1 , 2 ;
- 0 , 1 ;
- 0 , 2 ;
- 1 , 2

**267.** Найти тройной интеграл.

1) $$\iiint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d\\ e\leqslant z\leqslant f}} \Big(k(m+1)y^m + l(n+1)(p+1)x^n z^p\Big)\,dx\,dy\,dz$$

√ $k(b-a)(f-e)(d^{m+1}-c^{m+1}) + l(d-c)(b^{n+1}-a^{n+1})(f^{p+1}-e^{p+1})$

→ $b =\ a+1\,;\ \ a+2$

→ $a =\ -1\,;\ \ 0$

→ $d =\ c+1\,;\ \ c+2$

→ $c =\ -1\,;\ \ 0$

→ $f =\ e+1\,;\ \ e+2$

→ $e =\ -1\,;\ \ 0$

→ $k =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

→ $l =\ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

→ $n =\ 1\,;\ \ 2$

→ $m =\ 1\,;\ \ 2$

→ $p =\ 1\,;\ \ 2$

**268.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

1) $$\begin{gathered}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \leqslant 2az,\\ x^2+y^2 \leqslant kz^2\end{gathered}$$

√ $\dfrac{2ka\pi}{3(1+k)}$

→ $a = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\,;\ 7$

→ $k = \dfrac{1}{3}\,;\ \dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{2}{3}\,;\ 1\,;\ \dfrac{3}{2}\,;\ 2\,;\ 3$

2) $$\begin{aligned}&z = a - x^2 - y^2,\\ &z = 2b\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

√ $\left(as^2 - \dfrac{s^4}{2} - \dfrac{4bs^3}{3}\right)\pi$

→ $a = s(s+2b)$

→ $s = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

→ $b = \dfrac{1}{2}\,;\ 1\,;\ \dfrac{3}{2}\,;\ 2\,;\ \dfrac{5}{2}\,;\ 3\,;\ 4$

**269.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

1) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a\left(x^2+y^2-z^2\right)$

$\checkmark$ $\dfrac{\pi^2}{8}\sqrt{2a^3}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

`Кри I по отрезку прямой`

**270.** Вычислить криволинейный интеграл первого рода по отрезку прямой от точки $A$ до точки $B$:

1) $\displaystyle\int\limits_{AB} \Big(I\Big)\, dl,\ A(A_1, A_2, A_3),\ B(A_1 + a_1, A_2 + a_2, A_3 + a_3).$

✓ $d\left(l_0 + \dfrac{l_1}{2} + \dfrac{l_2}{3}\right)$

→ $I = \ k_{11}x^2 + k_{22}y^2 + k_{33}z^2 + k_{12}xy + k_{13}xz + k_{23}yz + k_1x + k_2y + k_3z + k$

→ $l_0 = \ k_{11}A_1^2 + k_{22}A_2^2 + k_{33}A_3^2 + k_{12}A_1A_2 + k_{13}A_1A_3 + k_{23}A_2A_3 + k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k$

→ $l_1 = \ l_{11} + l_{12} + l_{13}$

→ $l_{11} = \ 2k_{11}a_1A_1 + 2k_{22}a_2A_2 + 2k_{33}a_3A_3$

→ $l_{12} = \ k_{12}(A_1a_2 + A_2a_1) + k_{13}(A_1a_3 + A_3a_1) + k_{23}(A_2a_3 + A_3a_2)$

→ $l_{13} = \ k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$

→ $l_2 = \ k_{11}a_1^2 + k_{22}a_2^2 + k_{33}a_3^2 + k_{12}a_1a_2 + k_{13}a_1a_3 + k_{23}a_2a_3$

→ $A_1 = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

→ $A_2 = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

→ $A_3 = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

→ $a_1\,,\quad a_2\,,\quad a_3 =$

- $s_1n_1\,,\quad s_3n_3\,,\quad s_2n_2\,;$
- $s_2n_2\,,\quad s_1n_1\,,\quad s_3n_3\,;$
- $s_2n_2\,,\quad s_3n_3\,,\quad s_1n_1$

→ $n_1\,,\quad n_2\,,\quad n_3\,,\quad d =$

- $1\,,\quad 2\,,\quad 2\,,\quad 3\,;$
- $2\,,\quad 4\,,\quad 4\,,\quad 6\,;$
- $3\,,\quad 6\,,\quad 6\,,\quad 9\,;$
- $0\,,\quad 3\,,\quad 4\,,\quad 5\,;$
- $0\,,\quad 6\,,\quad 8\,,\quad 10\,;$
- $2\,,\quad 3\,,\quad 6\,,\quad 7\,;$
- $1\,,\quad 4\,,\quad 8\,,\quad 9\,;$
- $7\,,\quad 4\,,\quad 4\,,\quad 9$

→ $s_1 = \ -1\,;\ \ 1$

→ $s_2 = \ -1\,;\ \ 1$

→ $s_3 = \ -1\,;\ \ 1$

→ $k_{11}\,,\quad k_{22}\,,\quad k_{33} =$

- $1\,,\quad 0\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad 1\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad 0\,,\quad 1$

$\rightarrow$ $k_{12}$ , $k_{13}$ , $k_{23}$ =

- $K_1$ , 0 , 0 ;
- 0 , $K_1$ , 0 ;
- 0 , 0 , $K_1$

$\rightarrow$ $K_1 = -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2$

$\rightarrow$ $k_1$ , $k_2$ , $k_3$ =

- $K_2$ , 0 , 0 ;
- 0 , $K_2$ , 0 ;
- 0 , 0 , $K_2$

$\rightarrow$ $K_2 = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

$\rightarrow$ $k = -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4$

**271.** Доказать, что интеграл не зависит от пути интегрирования, и вычислить его:

1) $\displaystyle\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} U_x\,dx + U_y\,dy + U_z\,dz$

√ $U_{1B} + U_{2B} + U_{3B} + U_{4B} - U_{1A} - U_{2A} - U_{3A} - U_{4A}$

→ $U_x = \ 3a_{111}x^2 + a_{123}yz + 2a_{112}xy + 2a_{113}xz + a_{122}y^2 + a_{133}z^2 + 2a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1$

→ $U_y = \ 3a_{222}y^2 + a_{123}xz + 2a_{122}xy + 2a_{223}yz + a_{112}x^2 + a_{233}z^2 + 2a_{22}y + a_{12}x + a_{23}z + a_2$

→ $U_z = \ 3a_{333}z^2 + a_{123}xy + 2a_{133}xz + 2a_{233}yz + a_{113}x^2 + a_{223}y^2 + 2a_{33}z + a_{13}x + a_{23}y + a_3$

→ $U_{1A} = \ a_{111}x_1^3 + a_{222}y_1^3 + a_{333}z_1^3 + a_{123}x_1y_1z_1$

→ $U_{1B} = \ a_{111}x_2^3 + a_{222}y_2^3 + a_{333}z_2^3 + a_{123}x_2y_2z_2$

→ $U_{2A} = \ a_{112}x_1^2y_1 + a_{113}x_1^2z_1 + a_{122}x_1y_1^2 + a_{223}y_1^2z_1 + a_{133}x_1z_1^2 + a_{233}y_1z_1^2$

→ $U_{2B} = \ a_{112}x_2^2y_2 + a_{113}x_2^2z_2 + a_{122}x_2y_2^2 + a_{223}y_2^2z_2 + a_{133}x_2z_2^2 + a_{233}y_2z_2^2$

→ $U_{3A} = \ a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + a_{12}x_1y_1 + a_{13}x_1z_1 + a_{23}y_1z_1$

→ $U_{3B} = \ a_{11}x_2^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}z_2^2 + a_{12}x_2y_2 + a_{13}x_2z_2 + a_{23}y_2z_2$

→ $U_{4A} = \ a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1$

→ $U_{4B} = \ a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2$

→ $a_{111}\,,\quad a_{222}\,,\quad a_{333}\,,\quad a_{123} =$

- 1 ,  0 ,  0 ,  0 ;
- 0 ,  1 ,  0 ,  0 ;
- 0 ,  0 ,  1 ,  0 ;
- 0 ,  0 ,  0 ,  1

→ $a_{112}\,,\quad a_{113}\,,\quad a_{122}\,,\quad a_{223}\,,\quad a_{133}\,,\quad a_{233} =$

- $k_1$ ,  0 ,  0 ,  0 ,  0 ,  0 ;
- 0 ,  $k_1$ ,  0 ,  0 ,  0 ,  0 ;
- 0 ,  0 ,  $k_1$ ,  0 ,  0 ,  0 ;
- 0 ,  0 ,  0 ,  $k_1$ ,  0 ,  0 ;
- 0 ,  0 ,  0 ,  0 ,  $k_1$ ,  0 ;
- 0 ,  0 ,  0 ,  0 ,  0 ,  $k_1$

→ $k_1 = \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2$

$\rightarrow$ $a_{11}\,,\quad a_{22}\,,\quad a_{33}\,,\quad a_{12}\,,\quad a_{13}\,,\quad a_{23} =$

- $k_2\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad k_2\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad 0\,,\quad k_2\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad k_2\,,\quad 0\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad k_2\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad k_2$

$\rightarrow$ $k_2 = \;-3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $a_1\,,\quad a_2\,,\quad a_3 =$

- $k_3\,,\quad 0\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad k_3\,,\quad 0\,;$
- $0\,,\quad 0\,,\quad k_3$

$\rightarrow$ $k_3 = \;-5\,;\;\; -4 - 3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 4\,;\;\; 5$

$\rightarrow$ $x_1 = \; s_1 A_1$

$\rightarrow$ $x_2 = \; s_1(A_1 - l_1)$

$\rightarrow$ $y_1 = \; s_2 A_2$

$\rightarrow$ $y_2 = \; s_2(A_2 - l_2)$

$\rightarrow$ $z_1 = \; s_3 A_3$

$\rightarrow$ $z_2 = \; s_3(A_3 - l_3)$

$\rightarrow$ $A_1 = \; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $A_2 = \; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $A_3 = \; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $l_1 = \; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $l_2 = \; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $l_3 = \; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3$

$\rightarrow$ $s_1 = \; -1\,;\;\; 1$

$\rightarrow$ $s_2 = \; -1\,;\;\; 1$

$\rightarrow$ $s_3 = \; -1\,;\;\; 1$

**272.** Найти поток векторного поля $\vec{F}$ через (незамкнутую) часть цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, расположенную между плоскостью $z = 0$ и данной плоскостью, в направлении внешней нормали:

1) $\vec{F}(a_1x + b_1y + c_1z + d_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2, a_3x + b_3y + c_3z + d_3)$,
$Ax + By + z = AB$

$\checkmark$ $(AB(a_1 + b_2 - Ac_1 - Bc_2) - Ad_1 - Bd_2)\pi$

$\rightarrow$ $A =$ 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $B =$ 2 ; 3 ; 5

$\rightarrow$ $a_1 =$ −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2

$\rightarrow$ $b_1 =$ −7 ; −4 ; −3 ; 2 ; 5 ; 8

$\rightarrow$ $c_1 =$ −1 ; 0 ; 1

$\rightarrow$ $d_1 =$ −8 ; −5 ; −2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 7

$\rightarrow$ $a_2 =$ −8 ; −6 ; −1 ; 0 ; 1 ; 3 ; 7

$\rightarrow$ $b_2 =$ −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2

$\rightarrow$ $c_2 =$ −1 ; 0 ; 1

$\rightarrow$ $d_2 =$ −7 ; −4 ; −3 ; −1 ; 0 ; 2 ; 5 ; 6 ; 9

$\rightarrow$ $a_3 =$ −5 ; −3 ; −2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $b_3 =$ −6 ; −4 ; −1 ; 0 ; 2 ; 5 ; 7

$\rightarrow$ $c_3 =$ −4 ; −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $d_3 =$ −5 ; −4 ; −3 ; −2 ; −1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

# Часть XVI

# Ряды

**273.** Исследовать сходимость ряда и найти его сумму.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{(ab)^n}$

√ $\displaystyle\frac{a-b}{(b-1)(a-1)}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 3 ; 5 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{(ab)^n}$

√ $\displaystyle\frac{a+b-2}{(b-1)(a-1)}$

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 3 ; 5 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 4 ; 6 ; 8

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(kn+a)(kn+k+a)}$

√ $\displaystyle\frac{1}{k(k+a)}$

$\rightarrow$ $a =$ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

**274.** Исследовать сходимость ряда.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{an^k + b}{cn^l + d}$

√ $\dfrac{1}{n^{l-k}}$ (Ср.)

→ $a =$ 1; 3; 5; 7

→ $c =$ 2; 4; 8

→ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $d =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 1; 2

→ $l =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^k n}$

√ Расходится

→ $k =$ 1; 2; 3; 4; 5

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^k n}{n^m}$

√ Сходится

→ $m =$ 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 1; 2; 3; 4; 5

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^k n}{\sqrt[m]{n}}$

√ Расходится

→ $m =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 1; 2; 3; 4; 5

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n + b}{c^n + d}$

√ $\left(\dfrac{a}{c}\right)^n$ (Ср.)

→ $a =$ 3; 5; 7

→ $c =$ 2; 4; 6; 8; 9

→ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $d =$ 1; 2; 3; 4; 5

**275.** Исследовать сходимость ряда.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{an^k + b}{n!}$

√ $D = 0$

→ $a = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

→ $b = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

→ $k = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{an^k + b}{c^n}$

√ $D = \dfrac{1}{c}$

→ $a = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

→ $b = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

→ $k = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $c = 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c^n}{an^k + b}$

√ $D = c$

→ $a = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

→ $b = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

→ $k = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$

→ $c = 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^k a^n}{n!}$

√ $D = 0$

→ $a = 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

→ $k = 2;\ 3;\ 4$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n^k n!}$

√ $D = 0$

→ $a = 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

→ $k = 2;\ 3;\ 4$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k n!}{a^n}$

$\checkmark$ $D = \infty$

$\to$ $a = 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

$\to$ $k = 2;\ 3;\ 4$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^k a^n}$

$\checkmark$ $D = \infty$

$\to$ $a = 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

$\to$ $k = 2;\ 3;\ 4$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^k + 1}{cn^k + d}\right)^n$

$\checkmark$ $K = \frac{a}{c}$

$\to$ $k = 1;\ 2;\ 3$

$\to$ $c = a-2;\ a-1;\ a+1;\ a+2;\ a+3;\ a+4$

$\to$ $a = 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

$\to$ $d = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

**276.** Исследовать сходимость ряда.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{kn}}{a^n (kn)!}$

√ $D = \dfrac{e^k}{ak^k}$

→ $a =$ 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 1; 2

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{kn} a^n}{(kn)!}$

√ $D = \dfrac{ae^k}{k^k}$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

→ $k =$ 1; 2; 3; 4

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n (kn)!}{n^{kn}}$

√ $D = \dfrac{ak^k}{e^k}$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 1

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(kn)!}{n^{kn} a^n}$

√ $D = \dfrac{k^k}{ae^k}$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

→ $k =$ 1

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^k}{(kn+1)!}$

√ $D = \dfrac{1}{k^k}$

→ $k =$ 2; 3; 4; 5

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[k]{n!}}{a^n}$

√ $D = \infty$

→ $k =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7

→ $a =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[k]{n!}}$

$\checkmark$ $D = 0$

$\rightarrow$ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+b+ka}{an+b}\right)^{n^2}$

$\checkmark$ $K = e^k$

$\rightarrow$ $k =$ $-1$ ; $-2$ ; $-3$ ; $-4$ ; $-5$ ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 3 ; 5 ; 7

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 4 ; 8

Интегральный признак

**277.** Исследовать сходимость ряда.

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^k n}$

√ Сходится

→ $k =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \sqrt[k]{\ln n}}$

√ Расходится

→ $k =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^k}$

√ Сходится

→ $k =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt[k]{n}}$

√ Расходится

→ $k =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

**278.** Исследовать знакопеременные ряды на абсолютную и условную сходимость

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(bn+c)a^n}$

√ Сходится абсолютно

× Сходится условно

× Расходится

→ $a =$ 2; 3; 4; 5

→ $b =$ 0; 1; 2

→ $c =$ 1

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{an^k+b}$

√ Сходится абсолютно

× Сходится условно

× Расходится

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 2; 3; 4; 5

→ $b =$ 0; 1; 2; 3; 4; 5

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{an^k+b}}$

√ Сходится абсолютно

× Сходится условно

× Расходится

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 3; 4; 5; 6

→ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+k)!}$

√ Сходится абсолютно

× Сходится условно

× Расходится

→ $k =$ 0; 1; 2; 3; 4; 5

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \ln^k n}$

$\checkmark$ Сходится абсолютно

$\times$ Сходится условно

$\times$ Расходится

$\to$ $k =$ 2; 3; 4; 5; 6; 7

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

$\checkmark$ Сходится абсолютно

$\times$ Сходится условно

$\times$ Расходится

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{an+b}$

$\times$ Сходится абсолютно

$\checkmark$ Сходится условно

$\times$ Расходится

$\to$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

$\to$ $b =$ 0; 1; 2; 3; 4; 5

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[k+l]{an^k+b}}$

$\times$ Сходится абсолютно

$\checkmark$ Сходится условно

$\times$ Расходится

$\to$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

$\to$ $b =$ 1; 2; 3; 4; 5

$\to$ $k =$ 2; 3; 4; 5

$\to$ $l =$ 1; 2; 3; 4

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln^k n}$

$\times$ Сходится абсолютно

$\checkmark$ Сходится условно

$\times$ Расходится

$\to$ $k =$ 1; 2; 3; 4; 5

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{an^k+b}{cn^k+1}$

$\times$ Сходится абсолютно

$\times$ Сходится условно

$\surd$ Расходится

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $c =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $b =$ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n^a}$

$\times$ Сходится абсолютно

$\times$ Сходится условно

$\surd$ Расходится

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

$\times$ Сходится абсолютно

$\times$ Сходится условно

$\surd$ Расходится

$\rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

**279.** Найти область сходимости функционального ряда.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{l}{(kn+m)(x+a)^n}$

√ $(-\infty; -a-1] \cup (-a+1; +\infty]$

→ $l =$ 1 ; 3 ; 5

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $m =$ 1 ; 2 ; 4

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log_a^n x$

√ $\left(\dfrac{1}{a}; a\right)$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log_a^n x}{n}$

√ $\left[\dfrac{1}{a}; a\right)$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F$

√ $(-\infty; +\infty)$

→ $F =$ $\sin X$ ; $\operatorname{tg} X$ ; $\arcsin X$ ; $\operatorname{arctg} X$

→ $X = \dfrac{b^n x}{(b+a)^n}$

→ $b =$ 2 ; 4 ; 5

→ $a =$ 1 ; 3

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n F$

√ $(-b; b)$

→ $F =$ $\sin X$ ; $\operatorname{tg} X$ ; $\arcsin X$ ; $\operatorname{arctg} X$

→ $X = \dfrac{x}{b^n}$

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{l}{x \log_a^n x}$

$\checkmark$ $\left(0; \frac{1}{a}\right) \cup \left(a; +\infty\right)$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 10

$\rightarrow$ $l =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

**280.** Найти радиус сходимости и область сходимости степенного ряда.

$\Rightarrow$ $x_0 =$ $-3$; $-2$; $-1$; $0$; $1$; $2$; $3$; $4$; $5$

$\Rightarrow$ $a =$ $1$; $2$; $3$; $4$; $5$; $6$; $7$

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{a^n}$

√ $R = a$; $(x_0 - a; x_0 + a)$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(an+b)c^n}$

√ $R = c$; $[x_0 - c; x_0 + c)$

$\to$ $b =$ $0$; $1$; $2$; $3$; $4$; $5$

$\to$ $c =$ $2$; $3$; $4$; $5$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{c^n}(x-x_0)^n$

√ $R = c$; $(x_0 - c; x_0 + c)$

$\to$ $b =$ $0$; $1$; $2$; $3$; $4$; $5$

$\to$ $c =$ $2$; $3$; $4$; $5$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{an^k+bn}$

√ $R = 1$; $[x_0 - 1; x_0 + 1]$

$\to$ $b =$ $0$; $1$; $2$; $3$; $4$; $5$

$\to$ $k =$ $2$; $3$; $4$; $5$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{(an^k+b)(c+1)^n}(x-x_0)^n$

√ $R = \dfrac{c+1}{c}$; $\left[x_0 - \dfrac{c+1}{c}; x_0 + \dfrac{c+1}{c}\right]$

$\to$ $b =$ $1$; $2$; $3$; $4$; $5$

$\to$ $k =$ $2$; $3$; $4$; $5$

$\to$ $c =$ $2$; $3$; $4$; $5$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c+1)^n}{(an+b)c^n}(x-x_0)^n$

√ $R = \dfrac{c}{c+1}$; $\left[x_0 - \dfrac{c}{c+1}; x_0 + \dfrac{c}{c+1}\right)$

$\to$ $b =$ $0$; $1$; $2$; $3$; $4$; $5$

$\to$ $c =$ $2$; $3$; $4$; $5$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+a)!}$

$\checkmark$ $R=\infty;\ (-\infty;+\infty)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^k+b}{n!}(x-x_0)^n$

$\checkmark$ $R=\infty;\ (-\infty;+\infty)$

$\rightarrow$ $b=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $k=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}(x-x_0)^n$

$\checkmark$ $R=\infty;\ (-\infty;+\infty)$

Область сходимости степенного ряда. Сложный

**281.** Найти область сходимости степенного ряда.

$\Rightarrow$ $a = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5$

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x-a)^n F$

$\checkmark$ $(a-b;a+b)$

$\to$ $F = \ \sin X\,; \ \ \operatorname{tg} X\,; \ \ \arcsin X\,; \ \ \operatorname{arctg} X$

$\to$ $X = \ \dfrac{\pi}{b^n}$

$\to$ $b = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x-a)^n F$

$\checkmark$ $[a-1;a+1]$

$\to$ $F = \ \sin X\,; \ \ \operatorname{tg} X\,; \ \ \arcsin X\,; \ \ \operatorname{arctg} X$

$\to$ $X = \ \dfrac{\pi}{\sqrt[m]{n^{m+1}}}$

$\to$ $m = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}F(x-a)^n$

$\checkmark$ $(a-1;a+1]$

$\to$ $F = \ \dfrac{(-1)^n}{(n+m)\ln(n+1)}\,; \ \ (-1)^n\dfrac{\sqrt[3]{n+m}}{n+1}\,; \ \ \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[m]{n+1}}$

$\to$ $m = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{b^n\ln(n+1)}$

$\checkmark$ $[a-b;a+b)$

$\to$ $b = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{(n+1)\ln(n+1)}(x-a)^n$

$\checkmark$ $\left[a-\dfrac{1}{b};a+\dfrac{1}{b}\right)$

$\to$ $b = \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7$

**282.** Вычислить $a$ с точностью $\Delta$.

1) $a = \sqrt[3]{e},\ \ \Delta = 10^{-5}$

$\checkmark$ 1,39561

2) $a = \sqrt{e},\ \ \Delta = 10^{-4}$

$\checkmark$ 1,6487

3) $a = e,\ \ \Delta = 10^{-4}$

$\checkmark$ 2,7183

4) $a = e^2,\ \ \Delta = 10^{-1}$

$\checkmark$ 7,4

5) $a = \sqrt[3]{e^2},\ \ \Delta = 10^{-3}$

$\checkmark$ 1,948

6) $a = \sqrt[3]{e^4},\ \ \Delta = 10^{-2}$

$\checkmark$ 3,79

7) $a = \sqrt[3]{e^5},\ \ \Delta = 10^{-1}$

$\checkmark$ 5,3

8) $a = \sqrt{e^3},\ \ \Delta = 10^{-1}$

$\checkmark$ 4,5

9) $a = \sin 1,\ \ \Delta = 10^{-6}$

$\checkmark$ 0,841471

10) $a = \sin 2,\ \ \Delta = 10^{-4}$

$\checkmark$ 0,9093

11) $a = \sin \dfrac{1}{2},\ \ \Delta = 10^{-8}$

$\checkmark$ 0,47942554

12) $a = \sin \dfrac{3}{2},\ \ \Delta = 10^{-5}$

$\checkmark$ 0,99749

13) $a = \cos 1,\ \ \Delta = 10^{-6}$

$\checkmark$ 0,540302

14) $a = \cos\dfrac{1}{2}$, $\Delta = 10^{-9}$

$\surd$ 0,877582562

15) $a = \cos\dfrac{3}{2}$, $\Delta = 10^{-4}$

$\surd$ 0,0707

# Часть XVII

# Дифференциальные уравнения

**283.** Проинтегрировать уравнение.

1) $dx + f\,g\,dy = 0$

$\surd$ $F + G = C$

$\to$ $f\,,\quad F =$

- $\sqrt{b-ax^2}\,,\quad \dfrac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\dfrac{ax}{\sqrt{ab}}\,;$
- $b+ax^2\,,\quad \dfrac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{\sqrt{ab}}\,;$
- $ax^2-b\,,\quad \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a}x-\sqrt{b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{b}}\right|\,;$
- $\sqrt{ax^2+b}\,,\quad \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+b}\right)$

$\to$ $g\,,\quad G =$

- $\dfrac{1}{cy+d}\,,\quad \dfrac{1}{c}\ln|cy+d|\,;$
- $\cos(cy+d)\,,\quad \dfrac{1}{c}\sin(cy+d)\,;$
- $\sin(cy+d)\,,\quad -\dfrac{1}{c}\cos(cy+d)\,;$
- $e^{cy+d}\,,\quad \dfrac{1}{c}e^{cy+d}$

$\to$ $a =\ b-1\,;\ \ b+1\,;\ \ b+2\,;\ \ b+3\,;\ \ b+4$

$\to$ $b =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

$\to$ $c =\ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\to$ $d =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

**284.** Решить уравнение.

$\Rightarrow$ $a = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5$

1) $y' + ay = e^{bx}$

$\checkmark$ $y = \dfrac{1}{a+b}e^{bx} + Ce^{-ax}$

$\rightarrow$ $b = -a-2\,;\ -a-1\,;\ a+1\,;\ a+2$

2) $y' + ay = bx + d$

$\checkmark$ $y = \dfrac{bx+d}{a} - \dfrac{b}{a^2} + Ce^{-ax}$

$\rightarrow$ $d = b-1\,;\ b-2\,;\ b\,;\ b+1\,;\ b+2$

$\rightarrow$ $b = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

3) $y' + ay = bx^2 + d$

$\checkmark$ $y = \dfrac{bx^2+d}{a} - \dfrac{2bx}{a^2} + \dfrac{2b}{a^3} + Ce^{-ax}$

$\rightarrow$ $d = b-1\,;\ b-2\,;\ b\,;\ b+1\,;\ b+2$

$\rightarrow$ $b = -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

4) $y' + ay = \dfrac{e^{-ax}}{b^2+x^2}$

$\checkmark$ $y = e^{-ax}\left(\dfrac{1}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b} + C\right)$

$\rightarrow$ $b = -a-2\,;\ -a-1\,;\ a+1\,;\ a+2$

5) $y' + ay = \dfrac{e^{-ax}}{\sqrt{b^2-x^2}}$

$\checkmark$ $y = e^{-ax}\left(\arcsin\dfrac{x}{b} + C\right)$

$\rightarrow$ $b = -a-2\,;\ -a-1\,;\ a+1\,;\ a+2$

6) $y' + x^b y = ax^b$

$\checkmark$ $y = a + Ce^{-\frac{x^{b+1}}{b+1}}$

$\rightarrow$ $b = 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6$

7) $xy' + y = e^{ax} + x^b$

$\checkmark$ $y = \dfrac{e^{ax}}{ax} + \dfrac{x^b}{b+1} + \dfrac{C}{x}$

$\rightarrow$ $b = -5\,;\ -2\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$

8) $y' + \dfrac{2kxy}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)^{k+1}}$

$\checkmark \quad y = \dfrac{1}{a\,(x^2 + a^2)^k} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + \dfrac{C}{(x^2 + a^2)^k}$

$\rightarrow \quad k = 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

Однородное ДУ I порядка

**285.** Решить уравнение.

$\Rightarrow$ $a = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5$

1) $y' = \dfrac{ax + (b+1)y}{bx}$

$\checkmark$ $y = Cx^{\frac{1+b}{b}} - ax$

$\rightarrow$ $b = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

2) $y' = \dfrac{a^2x^2 + byx + y^2}{bx^2}$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{ax} = \dfrac{1}{b}\ln|x| + C$

$\rightarrow$ $b = \ -5\,; \ \ -2\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

Однородное уравнение первого порядка

**286.** Решить уравнение.

1) $y = xy' - xa^{k\frac{y}{x}}$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{k}\dfrac{a^{-k\frac{y}{x}}}{\ln a} = \ln|x| + C$

$\to$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; $e$

$\to$ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

2) $axy' = ay + bxF$

$\checkmark$ $G = \dfrac{b}{a}\ln|x| + H$

$\to$ $F$ , $G$ , $H =$

- $\sin^2 k\dfrac{y}{x}$ , $-\dfrac{1}{k}\operatorname{ctg} k\dfrac{y}{x}$ , $C$ ;
- $\cos^2 k\dfrac{y}{x}$ , $\dfrac{1}{k}\operatorname{tg} k\dfrac{y}{x}$ , $C$ ;
- $\operatorname{tg} k\dfrac{y}{x}$ , $\dfrac{1}{k}\ln\left|\sin k\dfrac{y}{x}\right|$ , $\ln|C|$ ;
- $\operatorname{ctg} k\dfrac{y}{x}$ , $-\dfrac{1}{k}\ln\left|\cos k\dfrac{y}{x}\right|$ , $\ln|C|$ ;
- $\operatorname{tg}^2 k\dfrac{y}{x}$ , $-\dfrac{1}{k}\operatorname{ctg} k\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x}$ , $C$ ;
- $\operatorname{ctg}^2 k\dfrac{y}{x}$ , $\dfrac{1}{k}\operatorname{tg} k\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x}$ , $C$

$\to$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

$\to$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; $-1$ ; $-2$ ; $-3$ ; $-4$ ; $-5$

$\to$ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

3) $yy' - ay + a^2x = 0$

$\checkmark$ $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y^2}{x^2} + a\dfrac{y}{x} + a^2\right| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2y - ax}{a\sqrt{3}x} = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$

$\to$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12

4) $y'F - \dfrac{y}{x}F + b = 0$

$\checkmark$ $G = -b\ln|x| + C$

$\rightarrow$ $F\,, \quad G =$

- $\cos k\dfrac{y}{x}\,, \quad \dfrac{1}{k}\sin k\dfrac{y}{x}\,;$
- $\sin k\dfrac{y}{x}\,, \quad -\dfrac{1}{k}\cos k\dfrac{y}{x}\,;$
- $\operatorname{tg} k\dfrac{y}{x}\,, \quad -\dfrac{1}{k}\ln\left|\cos k\dfrac{y}{x}\right|\,;$
- $\operatorname{ctg} k\dfrac{y}{x}\,, \quad \dfrac{1}{k}\ln\left|\sin k\dfrac{y}{x}\right|\,;$
- $e^{k\frac{y}{x}}\,, \quad \dfrac{1}{k}e^{k\frac{y}{x}}\,;$
- $(b+1)^{k\frac{y}{x}}\,, \quad \dfrac{1}{k}\dfrac{(b+1)^{k\frac{y}{x}}}{\ln(b+1)}\,;$
- $\sin^2\dfrac{k}{2}\dfrac{y}{x}\,, \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2k}\sin k\dfrac{y}{x}$

$\rightarrow$ $k = \ 2\,; \ \ 4\,; \ \ 6\,; \ \ 8\,; \ \ 10\,; \ \ 12\,; \ \ 14\,; \ \ 16$

$\rightarrow$ $b = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6\,; \ \ 7\,; \ \ 8\,; \ \ 9$

**287.** Решить уравнение.

1) $y' - k\dfrac{y}{x} = (3-k)x^2 + (2-k)x + (1-k)$

√ $y = x^3 + x^2 + x + Cx^k$

→ $k =$ 4; 5; 6; 7

2) $y' + k\dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{x^{k-2}} + \dfrac{2}{x^{k-1}}$

√ $y = \dfrac{1}{x^{k-3}} + \dfrac{1}{x^{k-2}} + \dfrac{C}{x^k}$

→ $k =$ 4; 5; 6; 7

3) $y' + k\dfrac{y}{x} = (k+1)^2 \ln x$

√ $y = (k+1)x\ln x - x + \dfrac{(k+1)C}{x^k}$

→ $k =$ 2; 3; 4; 5

4) $y' + k\dfrac{y}{x} = \dfrac{a^2 e^{ax+b}}{x^{k-1}}$

√ $y = \left(axe^{ax+b} - e^{ax+b} + a^2C\right)x^{-k}$

→ $b =$ $a-2$; $a-1$; $a$; $a+1$; $a+2$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 2; 3; 4; 5

5) $y' - k\dfrac{y}{x} = a^2 x^{k+1}\cos(ax+b)$

√ $y = ax^{k+1}\sin(ax+b) + x^k\cos(ax+b) + a^2Cx^k$

→ $b =$ $a-2$; $a-1$; $a$; $a+1$; $a+2$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 2; 3; 4; 5

6) $y' + k\dfrac{y}{x} = (k+1)e^{x^{k+1}}$

√ $y = \dfrac{e^{x^{k+1}} + C}{x^k}$

→ $k =$ 1; 2; 3; 4; 5

7) $y' - k\dfrac{y}{x} = (a+1)x^{k-1}\ln^a x$

√ $y = \left(\ln^{a+1} x + (a+1)C\right)x^k$

→ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

→ $k =$ 2; 3; 4; 5

**288.** Найти общее решение уравнения.

1) $y' + py = f e^{P}$

√ $y(x) = (F + C)\, e^{-P}$

→ $f\,,\quad F =$

- $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,,\quad \arcsin\dfrac{x}{a}\,;$
- $\dfrac{1}{a^2 + x^2}\,,\quad \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a}\,;$
- $\dfrac{1}{\cos^2(x+a)}\,,\quad \mathrm{tg}(x+a)\,;$
- $\dfrac{1}{\sin^2(x+a)}\,,\quad -\,\mathrm{ctg}(x+a)$

→ $p\,,\quad P =$

- $\cos(x+b)\,,\quad \sin(x+b)\,;$
- $\sin(x+b)\,,\quad -\cos(x+b)\,;$
- $3(x+b)^2\,,\quad (x+b)^3\,;$
- $4(x+b)^3\,,\quad (x+b)^4$

→ $a =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

→ $b =\ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 0\,;\ \ 5\,;\ \ 6$

**289.** Найти общее решение уравнения.

1) $L = R$

√ $y = F$

→ $L$, $R$, $F =$

- $y' + ay$, $e^{bx}$, $\dfrac{e^{bx}}{a+b} + Ce^{-ax}$;
- $y' + x^b y$, $ax^b$, $a + Ce^{-\frac{x^{b+1}}{b+1}}$;
- $xy' + y$, $e^{ax} + x^b$, $\dfrac{e^{ax}}{ax} + \dfrac{x^b}{b+1} + \dfrac{C}{x}$

→ $a =$ $-6$; $-5$; $-4$; $-1$; $1$; $3$; $4$

→ $b =$ $-5$; $-2$; $1$; $2$; $3$

**290.** Найти общее и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1) $L = 0,\; y\,(c) = C$

√ $y = F$

→ $L$ , $F$ , $c =$

- $x^a y' + x^{a-1} y + b$ , $\dfrac{b}{(a-2)x^{a-1}} + \dfrac{C - \frac{b}{a-2}}{x}$ , $1$ ;
- $y' + ay\,\mathrm{tg}\,ax - \dfrac{b}{\cos ax}$ , $\dfrac{b}{a}\sin ax - C\cos ax$ , $\dfrac{\pi}{a}$ ;
- $y' - ay\,\mathrm{ctg}\,ax - \dfrac{b}{\sin ax}$ , $\dfrac{b}{a}\cos ax + C\sin ax$ , $\dfrac{\pi}{2a}$

→ $a =$ 3 ; 4 ; 5

→ $b =$ −3 ; −2 ; 2 ; 3

→ $C =$ −4 ; −3 ; −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

**291.** Найти общее решение уравнения.

1) $y'' + ay' + by = 0$

$\surd$ $F$

$\rightarrow$ $a\,,\quad b\,,\quad F =$

- $-k_1 - k_2\,,\quad k_1k_2\,,\quad C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$

$\rightarrow$ $k_1 =\; k_2 - 2\,;\;\; k_2 - 1\,;\;\; k_2 + 1\,;\;\; k_2 + 2$

$\rightarrow$ $k_2 =\; -5\,;\;\; -4\,;\;\; -3\,;\;\; -2\,;\;\; -1\,;\;\; 0\,;\;\; 1\,;\;\; 2\,;\;\; 3\,;\;\; 4\,;\;\; 5\,;\;\; 6$

ДУ 2-го порядка комплексные корни

**292.** Найти общее решение уравнения.

1) $y'' + ay' + by = 0$

$\surd$ $F$

$\to$ $a$ , $b$ , $F =$

- $-2k_1$ , $k_1^2 + k_2^2$ , $e^{k_1 x}\left(C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x\right)$

$\to$ $k_1 =$ $-4$ ; $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; $0$ ; $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$

$\to$ $k_2 =$ $1$ ; $2$ ; $3$ ; $4$ ; $5$ ; $6$ ; $7$

ДУ 2-го порядка кратный корень

**293.** Найти общее решение уравнения.

1) $y'' + ay' + by = 0$

$\surd$ $F$

$\rightarrow$ $a\,,\quad b\,,\quad F =$

- $-2k\,,\quad k^2\,,\quad C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$

$\rightarrow$ $k = -8 - 7\,;\ -6\,;\ -5\,;\ -4\,;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8$

**294.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

$\Rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

1) $y'' + a^2 y = k(a^2 + m^2)e^{mx}$

$\surd$ $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + ke^{mx}$

$\rightarrow$ $m =$ $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3

2) $y'' + a^2 y = a^2 kx^2 + a^2 x + 2k$

$\surd$ $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + kx^2 + x$

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3

3) $y'' + a^2 y = \big(k(a^2 + m^2)x + 2km\big)\, e^{mx}$

$\surd$ $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + kxe^{mx}$

$\rightarrow$ $m =$ $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3

**295.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

$\Rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

1) $y'' - a^2 y = k(m^2 - a^2)e^{mx}$

$\checkmark$ $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + k e^{mx}$

$\rightarrow$ $m =$ $a+1$ ; $a+2$

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3

2) $y'' - a^2 y = 4kae^{ax}$

$\checkmark$ $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + 2k e^{ax}$

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

3) $y'' - a^2 y = a^2 k x^2 + a^2 x - 2k$

$\checkmark$ $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} - kx^2 - x$

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

**296.** Найти общеее решение дифференциального уравнения.

$\Rightarrow$ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

1) $y'' + 2ay' + a^2y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)e^{-ax}$

$\surd$ $y = C_1e^{-ax} + C_2xe^{-ax} + \dfrac{x^3}{6}e^{-ax} - xe^{-ax} + xe^{-ax}\ln|x|$

2) $y'' + 2ay' + a^2y = xe^{ax} + \dfrac{1}{xe^{ax}}$

$\surd$ $y = C_1e^{-ax} + C_2xe^{-ax} + \dfrac{x}{4a^2}e^{ax} - \dfrac{1}{4a^3}e^{ax} - xe^{-ax} + xe^{-ax}\ln|x|$

3) $y'' + 2ay' + a^2y = \dfrac{e^{-ax}}{x}$

$\surd$ $y = (-x + C_1)e^{-ax} + (\ln|x| + C_2)xe^{-ax}$

4) $y'' + 2ay' + a^2y = \dfrac{e^{-ax}}{x^2}$

$\surd$ $y = (-\ln|x| + C_1)e^{-ax} + \left(-\dfrac{1}{x} + C_2\right)xe^{-ax}$

5) $y'' + 2ay' + a^2y = \dfrac{e^{-ax}}{x^k}$

$\surd$ $y = \left(\dfrac{1}{(k-2)x^{k-2}} + C_1\right)e^{-ax} + \left(\dfrac{-1}{(k-1)x^{k-1}} + C_2\right)xe^{-ax}$

$\rightarrow$ $k =$ 3 ; 4 ; 5

6) $y'' + 2ay' + a^2y = \dfrac{e^{-ax}}{\sqrt{b^2 - x^2}}$

$\surd$ $y = \left(\sqrt{b^2 - x^2} + C_1\right)e^{-ax} + \left(\arcsin\dfrac{x}{b} + C_2\right)xe^{-ax}$

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

7) $y'' + 2ay' + a^2y = \dfrac{e^{-ax}}{b^2 + x^2}$

$\surd$ $y = \left(-\dfrac{1}{2}\ln|b^2 + x^2| + C_1\right)e^{-ax} + \left(\dfrac{1}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b} + C_2\right)xe^{-ax}$

$\rightarrow$ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

8) $y'' + 2ay' + a^2y = e^{-ax}\ln|x|$

$\surd$ $y = \left(C_1 + C_2x + \dfrac{x^2}{2}\ln|x| - \dfrac{3}{4}x^2\right)e^{-ax}$

9) $y'' + 2ay' + a^2y = \sqrt{x^k}e^{-ax}$

$\surd$ $y = \left(-\dfrac{2}{k+4}\sqrt{x^{k+4}} + C_1\right)e^{-ax} + \left(\dfrac{2}{k+2}\sqrt{x^{k+2}} + C_2\right)xe^{-ax}$

$\rightarrow$ $k =$ 1; 3; 5

10) $y'' + 2ay' + a^2y = \dfrac{e^{-ax}}{b^2 - x^2}$

$\surd$ $y = \left(\dfrac{1}{2}\ln|b^2 - x^2| + C_1\right)e^{-ax} + \left(\dfrac{1}{2b}\ln\left|\dfrac{x+b}{x-b}\right| + C_2\right)xe^{-ax}$

$\rightarrow$ $b =$ 1; 2; 3; 4

**297.** Найти общеее решение дифференциального уравнения.

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3; 4; 5

1) $y'' + a^2 y = \dfrac{1}{\sin ax}$

√ $y = \left(\dfrac{1}{a^2}\ln|\sin ax| + C_1\right)\cos ax + \left(-\dfrac{1}{a}x + C_2\right)\sin ax$

2) $y'' + a^2 y = \operatorname{ctg} ax$

√ $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \dfrac{1}{a^2}\sin ax \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{ax}{2}\right|$

3) $y'' + a^2 y = \dfrac{1}{\cos ax}$

√ $y = \left(\dfrac{1}{a^2}\ln|\cos ax| + C_1\right)\cos ax + \left(\dfrac{1}{a}x + C_2\right)\sin ax$

4) $y'' + a^2 y = \operatorname{tg} ax$

√ $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \dfrac{1}{a^2}\cos ax \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

5) $y'' + a^2 y = \operatorname{tg}^2 ax$

√ $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2}\sin ax \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

6) $y'' + a^2 y = -\operatorname{ctg}^2 ax$

√ $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2}\sin ax \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{ax}{2}\right|$

7) $y'' + a^2 y = \dfrac{1}{\sin^2 ax}$

√ $y = \left(-\dfrac{1}{a^2 \sin ax} + C_1\right)\cos ax + \left(-\dfrac{1}{a^2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{ax}{2}\right| + C_2\right)\sin ax$

8) $y'' + a^2 y = \dfrac{1}{\cos^2 ax}$

√ $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2}\sin ax \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

9) $y'' + a^2 y = \dfrac{1}{\cos^3 ax}$

√ $y = \left(-\dfrac{1}{2a^2\cos^2 ax} + C_1\right)\cos ax + \left(\dfrac{1}{a^2}\operatorname{tg} ax + C_2\right)\sin ax$

10) $y'' + a^2 y = \dfrac{2 + cos^3 ax}{\cos^2 ax}$

√ $y = \left(-\dfrac{2}{a^2\cos^2 ax} + \dfrac{\cos^2 ax}{2a^2} + C_1\right)\cos ax + \left(\dfrac{2}{a^2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + \dfrac{1}{2a}x + \dfrac{1}{4a^2}\sin 2ax + C_2\right)\sin a$

11) $y'' + a^2 y = \dfrac{1}{\cos 2ax}$

$\checkmark$ $y = \left( \dfrac{1}{4a^2} \ln \left| \dfrac{4\cos ax - 1}{4\cos ax + 1} \right| + C_1 \right) \cos ax + \left( \dfrac{1}{4a^2} \ln \left| \dfrac{4\cos ax + 1}{4\cos ax - 1} \right| + C_2 \right) \sin ax$

12) $y'' + a^2 y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2ax}}$

$\checkmark$ $y = \left( \dfrac{1}{a^2\sqrt{2}} \ln \left| \cos ax + \sqrt{\cos^2 ax - \dfrac{1}{2}} \right| + C_1 \right) \cos ax + \left( \dfrac{1}{a^2\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}\sin ax) + C_2 \right) \sin ax$

**298.** Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

1) $y'' - k^2 y = e^{-kx},\ y(0) = 1,\ y'(0) = \dfrac{2k^2 - 1}{2k}.$

✓ $y = e^{kx} - \dfrac{x}{2k} e^{-kx}$

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

2) $y'' + k^2 y = 2k \sin kx,\ y\left(\dfrac{\pi}{2k}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2k}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

✓ $y = \sin kx - x \cos kx$

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

3) $y'' + a^2 y = 2a^2 k e^{ax},\ y(0) = -k,\ y'(0) = a.$

✓ $y = -2k \cos ax + (1 - k) \sin ax + k e^{ax}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $k =$ −1 ; −2 ; −3 ; 2 ; 3

4) $y'' + a^2 y = 2a^3 x e^{ax},\ y(0) = m,\ y'(0) = ma.$

✓ $y = (m + 1) \cos ax + m \sin ax + (ax - 1) e^{ax}$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $m =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

5) $y'' + a^2 y = a^2 k x^2 + a^2 m x + 2k,\ y(0) = m,\ y'(0) = ka + m.$

✓ $y = m \cos ax + k \sin ax + k x^2 + m x$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4

→ $k =$ −1 ; −2 ; −3 ; 2 ; 3

→ $m =$ −1 ; −2 ; −3 ; 1 ; 2 ; 3

6) $y'' + a^2 y = (a^2 - m^2) k \cos mx + (a^2 - m^2) n \sin mx,\ y(0) = 2k,\ y'(0) = mn + ka.$

✓ $y = k \cos ax + k \sin ax + k \cos mx + n \sin mx$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $k =$ −1 ; −2 ; −3 ; 2 ; 3

→ $n =$ −1 ; −2 ; −3 ; 1 ; 2 ; 3

→ $m =$ 1 ; 6 ; 7

7) $y'' + 2ky' + 2k^2 y = 5k^2 \sin kx,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

✓ $y = \sin kx \left(e^{-kx} + 1\right) + 2 \cos kx \left(e^{-kx} - 1\right)$

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3

8) $y'' - 2ky' + k^2 y = \sin kx,\ y(0) = \dfrac{1}{2k^2},\ y'(0) = 1.$

$\surd$ $y = xe^{kx} + \dfrac{\cos kx}{2k^2}$

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

9) $y'' - ky' = e^{kx}(2kx + k^2 + 2),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

$\surd$ $y = e^{kx}(x^2 + kx - 1) + 1$

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

10) $y'' - ay' = 2akx + a^2 - 2k,\ y(0) = a + k,\ y'(0) = a^2.$

$\surd$ $y = (k-1) + (a+1)e^{ax} - kx^2 - ax$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $k =$ $-1$ ; $-2$ ; $-3$ ; 2 ; 3

11) $y'' - ay' = ame^{ax},\ y(0) = m + 2,\ y'(0) = m + 2a.$

$\surd$ $y = m + 2e^{ax} + mxe^{ax}$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

$\rightarrow$ $m =$ $-4$ ; $-2$ ; $-3$ ; 2 ; 3 ; 4

12) $y'' - ay' = 4a^2x^3 + a^2 - \dfrac{24}{a},\ y(0) = a + k,\ y'(0) = ka.$

$\surd$ $y = (a-1) + (k+1)e^{ax} - ax^4 - 4x^3 - \dfrac{12}{a}x^2 - ax$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; $-2$ ; $-3$ ; 2 ; 3

13) $y'' - ay' = 3akx^2 + (2ma - 6k)x + (a^2 - 2m),\ y(0) = a + m,\ y'(0) = ma.$

$\surd$ $y = (a-1) + (m+1)e^{ax} - kx^3 - mx^2 - ax$

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 4 ; 5 ; 7

$\rightarrow$ $k =$ 1 ; 2 ; 3

$\rightarrow$ $m =$ 1 ; 3

**299.** Найти общее решение уравнения.

1) $y'' + ay' + by = cx^2 + dx + e$

$\surd$ $F$

$\rightarrow$ $c = \ bC$

$\rightarrow$ $d = \ 2aC + bD$

$\rightarrow$ $e = \ 2C + aD + bE$

$\rightarrow$ $a\,, \quad b\,, \quad F =$

- $-k_1 - k_2\,, \quad k_1k_2\,, \quad C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + Cx^2 + Dx + E\,;$
- $-2k_1\,, \quad k_1^2 + k_2^2\,, \quad e^{k_1x}\,(C_1 \sin k_2x + C_2 \cos k_2x) + Cx^2 + Dx + E$

$\rightarrow$ $k_1 = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

$\rightarrow$ $k_2 = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $C = \ -3\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 3$

$\rightarrow$ $D = \ -4\,; \ \ -2\,; \ \ 0\,; \ \ 2\,; \ \ 4$

$\rightarrow$ $E = \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 0\,; \ \ 1\,; \ \ 2$

**300.** Найти общее решение уравнения.

1) $y'' + ay' + by = cx^2 + dx + e$

$\surd$ $F$

$\rightarrow$ $c\,,\quad d\,,\quad e\,,\quad a\,,\quad b\,,\quad F =$

- $bC\,,\quad 2aC + bD\,,\quad 2C + aD + bE\,,\quad -2k\,,\quad k^2\,,\quad C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} + Cx^2 + Dx + E\,;$
- $3aC\,,\quad 6C + 2aD\,,\quad 2D + aE\,,\quad -k\,,\quad 0\,,\quad C_1 + C_2e^{kx} + Cx^2 + Dx + E$

$\rightarrow$ $k = \;-3\,;\quad -2\,;\quad -1\,;\quad 1\,;\quad 2\,;\quad 3$

$\rightarrow$ $C = \;-3\,;\quad -1\,;\quad 1\,;\quad 3$

$\rightarrow$ $D = \;-4\,;\quad -2\,;\quad 0\,;\quad 2\,;\quad 4$

$\rightarrow$ $E = \;-2\,;\quad -1\,;\quad 0\,;\quad 1\,;\quad 2$

**301.** Решить дифференциальное уравнение.

1) $e^{-kx}\,dx + \left(a - kxe^{-ky}\right)dy = 0$

√ $xe^{-ky} + ax = C$

→ $k =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9

2) $\left(x^{a-1}\cos ay - b\right)dx - x^a \sin ay\,dy = 0$

√ $\dfrac{x^a}{a}\cos ay - bx = C$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9

3) $(2ax + ye^{xy})\,dx + (b + xe^{xy})\,dy = 0$

√ $ax^2 + e^{xy} + by = C$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9

4) $\left(x^a + bx^{b-1}y + f\right)dx + \left(x^b + y^a + d\right)dy = 0$

√ $x^{a+1} + (a+1)x^b y + (a+1)fx + y^{a+1} + (a+1)dy = C$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $b =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

→ $f =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9

→ $d =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9

5) $\left((b+1)x^b + ax^{a-1}\ln y\right)dx - \left((m+1)y^m - \dfrac{x^a}{y}\right)dy = 0$

√ $x^{b+1} + x^a \ln y - y^{m+1} = C$

→ $a =$ 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $m =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

6) $\left(ax^{a-1}y + \sin mx\right)dx + (x^a - \cos ny)\,dy = 0$

√ $mnx^a y - n\cos mx - m\sin ny = C$

→ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

$\rightarrow$ $m =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

$\rightarrow$ $n =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

7) $(f^{nx} + y^a + ky)\, dx + \left(ay^{a-1}x + kx + e^{by}\right) dy = 0$

$\surd$ $bf^{nx} + nby^a x \ln f + nbkyx \ln f + ne^{by} \ln f = C$

$\rightarrow$ $f =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

$\rightarrow$ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

$\rightarrow$ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

$\rightarrow$ $b =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

$\rightarrow$ $n =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

**302.** Составить уравнение кривой.

1) Записать уравнение кривой, проходящей через точку $M(a, a^{k+1})$, для которой угловой коэффициент касательной в любой точке в $k$ раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту точку с началом координат.

√ $y' = k\dfrac{y}{x}$; $y = ax^k$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4

2) Записать уравнение кривой, проходящей через точку $M(a, b)$, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, в $k$ раз больше абсциссы точки касания.

√ $y' = \dfrac{y - kx}{x}$; $y = \dfrac{ba^{k-1}}{x^{k-1}}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4

3) Записать уравнение кривой, проходящей через точку $M(0, \frac{k-1}{k})$, если угловой коэффициент в любой её точке в $k$ раз больше суммы координат этой точки.

√ $y' = k(x + y)$; $y = e^{kx} - x - \dfrac{1}{k}$

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

4) Записать уравнение кривой, проходящей через точку $M(a, ma)$, касательная которой в произвольной её точке отсекает на оси ординат отрезок в $k$ раз больший квадрата ординаты точки касания.

√ $y' = \dfrac{y - ky^2}{x}$; $y = \dfrac{mx}{1 - kma + mkx}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5

→ $m =$ 2 ; 3 ; 4

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

5) Записать уравнение кривой, проходящей через точку $M(a, b)$, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, в $k$ раз больше ординаты точки касания.

√ $y' = \dfrac{y - ky}{x}$; $y = \dfrac{ba^{k-1}}{x^{k-1}}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4

**303.** Решить дифференциальное уравнение.

1) $(x^a-(b-1)y)\,dx+\left(x^by^d+x\right)dy=0$

√ $\dfrac{x^{a-b+1}}{a-b+1}+\dfrac{y}{x^{b-1}}+\dfrac{y^{d+1}}{d+1}=C,\quad \mu(x)=\dfrac{1}{x^b}$

→ $a=$ 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13

→ $b=$ 3 ; 4 ; 5 ; 6

→ $d=$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

2) $\left(e^{ay}-\dfrac{k}{a}\sin kx\right)dx-\cos kx\,dy=0$

√ $x+\dfrac{1}{a}e^{-ay}\cos kx=C,\quad \mu(y)=e^{-ay}$

→ $a=$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

→ $k=$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14

3) $(x^a-kby)\,dx+bx\,dy=0$

√ $\dfrac{x^{a-k}}{a-k}+\dfrac{by}{x^k}=C,\quad \mu(x)=\dfrac{1}{x^{k+1}}$

→ $a=$ 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

→ $k=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $b=$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

4) $(ay+(x+b)\ln(x+b))\,dx-a(x+b)\,dy=0$

√ $\dfrac{-ay}{x+b}+\ln^2(x+b)=C,\quad \mu(x)=\dfrac{1}{(x+b)^2}$

→ $a=$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

→ $b=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; −1 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9 ; −10

5) $ay\sqrt{b-y^2}\,dx+\left(ax\sqrt{b-y^2}+y\right)dy=0$

√ $axy-\sqrt{b-y^2}=C,\quad \mu(y)=\dfrac{1}{\sqrt{b-y^2}}$

→ $a=$ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; −2 ; −3 ; −4 ; −5 ; −6 ; −7 ; −8 ; −9 ; −10

→ $b=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

6) $\left(x^a-\sin^2 ky\right)dx+x\sin 2ky\,dy=0$

√ $\dfrac{x^{a-k}}{a-k}+\dfrac{\sin^2 ky}{kx^k}=C,\quad \mu(x)=\dfrac{1}{x^{k+1}}$

→ $a=$ 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12

→ $k=$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

# Часть XVIII

# Уравнения математической физики

**304.** Привести к каноническому виду уравнение

$\Rightarrow$ $a =$ 1; 2; 3

$\Rightarrow$ $b =$ 4; 5; 6

$\Rightarrow$ $c =$ −1; 7; −3

$\Rightarrow$ $d =$ 10; −2; 3

1) $au_{xx} + a(k_1 + k_2)u_{xy} + ak_1k_2u_{yy} + bu_x + cu_y + du = 0$

$\surd$ $a(k_1 - k_2)^2 u_{\xi\eta} = (c - bk_1)u_\xi + (c - bk_2)u_\eta + du, \xi = -k_1x + y, \eta = -k_2x + y$

$\rightarrow$ $k_1 =$ $k_2 - 2$; $k_2 - 1$; $k_2 + 1$; $k_2 + 2$

$\rightarrow$ $k_2 =$ −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6

2) $au_{xx} - 2ak_1u_{xy} + a(k_1^2 + k_2^2)u_{yy} + bu_x + cu_y + du = 0$

$\surd$ $ak_2^2u_{\xi\xi} + ak_2^2u_{\eta\eta} = (-c - bk_1)u_\xi - bk_2u_\eta - du, \xi = k_1x + y, \eta = k_2x$

$\rightarrow$ $k_1 =$ −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6

$\rightarrow$ $k_2 =$ 1; 2; 3; 4; 5; 6

3) $au_{xx} - 2ak_1u_{xy} + ak_1^2u_{yy} + bu_x + cu_y + du = 0$

$\surd$ $au_{\eta\eta} = (-c - bk_1)u_\xi - bu_\eta - du, \xi = k_1x + y, \eta = x$

$\rightarrow$ $k_1 =$ −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6

Задача Коши для ур колеб струны

**305.** Решить задачу Коши

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ u|_{t=0} = F, \ u_t|_{t=0} = G$

$\surd$

$\to$ $F = \ cx + b\,; \ \ cx^2 + b\,; \ \ \sin bx\,; \ \ \cos bx$

$\to$ $G = \ bx + c\,; \ \ cx^2 + bx\,; \ \ \sin bx\,; \ \ \cos bx$

$\to$ $a = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

$\to$ $b = \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3\,; \ \ 4\,; \ \ 5\,; \ \ 6$

$\to$ $c = \ -3\,; \ \ -2\,; \ \ -1\,; \ \ 1\,; \ \ 2\,; \ \ 3$

**306.** Решить смешанную задачу

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 \le x \le l,\ u|_{t=0} = F,\ u_t|_{t=0} = G,\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

$\surd$

$\to\ F = \ \sin\dfrac{k\pi x}{l}$

$\to\ G = \ \sin\dfrac{m\pi x}{l}$

$\to\ a = \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3$

$\to\ k = \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

$\to\ m = \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5\,;\ \ 6\,;\ \ 7$

$\to\ l = \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4$

# Часть XIX

# Теория вероятностей

**307.**

$\Rightarrow$ $p_1 = \dfrac{6}{10};\ \dfrac{7}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

$\Rightarrow$ $p_2 = \dfrac{6}{10};\ \dfrac{7}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

$\Rightarrow$ $p_3 = \dfrac{6}{10};\ \dfrac{7}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

1) 3 студента сдают экзамен. Вероятность успешной сдачи для 1-го $p_1$, для второго — $p_2$, для третьего — $p_3$. Найти вероятность того, что
   а) все трое сдали экзамен;
   б) двое сдали экзамен;
   в) хотя бы 1 студент сдал экзамен.

✓ а) $p_1p_2p_3$; б) $p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3$; в) $1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

2) 3 стрелка стреляют в цель. Вероятность попадания для 1-го $p_1$, для второго — $p_2$, для третьего — $p_3$. Найти вероятность того, что
   а) все трое попали в цель;
   б) двое попали в цель;
   в) хотя бы 1 стрелок попал в цель.

✓ а) $p_1p_2p_3$; б) $p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3$; в) $1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

3) 3 станка производят детали. Вероятность производства детали перового сорта для 1-го станка $p_1$, для второго — $p_2$, для третьего — $p_3$. Найти вероятность того, что
   а) произведены 3 детали первого сорта;
   б) две детали первого сорта;
   в) хотя бы 1 деталь первого сорта.

✓ а) $p_1p_2p_3$; б) $p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3$; в) $1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

**308.**

$\Rightarrow$ $p_1 = \dfrac{3}{5}$; $\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$ $p_2 = \dfrac{2}{5}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow$ $p_3 = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{3}{4}$

1) 3 студента сдают экзамен. Вероятность успешной сдачи для 1-го — $p_1$, для второго — $p_2$, для третьего — $p_3$. Найти вероятность того, что двое сдали экзамен.

$\surd$ $p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3$

2) 3 стрелка стреляют в цель. Вероятность попадания для 1-го — $p_1$, для второго — $p_2$, для третьего — $p_3$. Найти вероятность того, что хотя бы 1 стрелок попал в цель.

$\surd$ $1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

3) 3 станка производят детали. Вероятность производства детали перового сорта для 1-го станка — $p_1$, для второго — $p_2$, для третьего — $p_3$. Найти вероятность того, что произведены 3 детали первого сорта.

$\surd$ $p_1p_2p_3$

**309.** Решить задачу по теме «Формула полной вероятности».

$\Rightarrow$ $n_1 = 7;\ 10;\ 13;\ 16;\ 19$

$\Rightarrow$ $n_2 = 8;\ 11;\ 14;\ 17;\ 20$

$\Rightarrow$ $n_3 = 9;\ 12;\ 15;\ 18;\ 21$

1) На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: $n_1$ с первого завода, $n_2$ со второго, $n_3$ с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе $p_1$, на втором $p_2$, на третьем $p_3$. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

$\surd$ $\dfrac{n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3}{n_1 + n_2 + n_3}$

$\rightarrow$ $p_1 = \dfrac{6}{10};\ \dfrac{7}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

$\rightarrow$ $p_2 = \dfrac{6}{10};\ \dfrac{7}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

$\rightarrow$ $p_3 = \dfrac{6}{10};\ \dfrac{7}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

2) Покупатель может приобрести нужный ему товар в одной из $n_1$ секций первого магазина, или в одной из $n_2$ секций второго, или в одной из $n_3$ секций третьего. Вероятность того, что к моменту прихода покупателя в секциях первого магазина в продаже имеется нужный товар равна $p_1$, в секциях второго магазина $p_2$, в секциях третьего магазина $p_3$. Какова вероятность того, что в наугад выбранной секции имеется в продаже нужный товар?

$\surd$ $\dfrac{n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3}{n_1 + n_2 + n_3}$

$\rightarrow$ $p_1 = \dfrac{6}{10};\ \dfrac{7}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

$\rightarrow$ $p_2 = \dfrac{4}{10};\ \dfrac{5}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

$\rightarrow$ $p_3 = \dfrac{3}{10};\ \dfrac{6}{10};\ \dfrac{8}{10};\ \dfrac{9}{10}$

3) Трое рабочих изготвливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил $n_1$ изделий, второй – $n_2$, третий – $n_3$. Вероятность брака у первого рабочего $p_1$, у второго – $p_2$, у третьего – $p_3$. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет бракованным?

$\surd$ $\dfrac{n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3}{n_1 + n_2 + n_3}$

$\rightarrow$ $p_1 = \dfrac{1}{10};\ \dfrac{2}{10};\ \dfrac{3}{10}$

$\rightarrow$ $p_2 = \dfrac{1}{10};\ \dfrac{2}{10};\ \dfrac{3}{10}$

$\rightarrow$ $p_3 = \dfrac{1}{10};\ \dfrac{2}{10};\ \dfrac{3}{10}$

**310.** Решить задачу по теме «Закон Пуассона».

1) Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час $60a$ вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получает не более двух вызовов?

√ $(1 + a + \frac{a}{2})e^{-a}$;

→ $a = \frac{3}{2}$ ; $\frac{5}{2}$ ; $\frac{7}{2}$ ; $\frac{9}{2}$ ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

2) Книга в $n$ страниц имеет $an$ опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не более двух опечаток?

√ $(1 + a + \frac{a}{2})e^{-a}$;

→ $a = \frac{1}{10}$ ; $\frac{2}{10}$ ; $\frac{3}{10}$

→ $n =$ 50 ; 60 ; 70 ; 80 ; 90 ; 100

3) Среди семян ржи $m\%$ семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе $n$ семян обнаружить не более двух семян сорняков?

√ $(1 + a + \frac{a}{2})e^{-a}$;

→ $a = \frac{mn}{100}$

→ $n =$ 100 ; 110 ; 120 ; 130 ; 140 ; 150

→ $m =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

**311.** Решить задачу по теме «Дискретные случайные величины».

1) Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Верятность отказа каждого элемента в одном опыте равна $p$. Составить закон распределения дискретной случайной величины $X$ – числа отказавших элементов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.

$\checkmark$ $3p$; $3p(1-p)$; $\sqrt{3p(1-p)}$;

$\rightarrow$ $p = \dfrac{1}{10}$; $\dfrac{2}{10}$; $\dfrac{3}{10}$; $\dfrac{4}{10}$; $\dfrac{5}{10}$; $\dfrac{6}{10}$

2) Баскетболист делает три штрафных броска. Верятность попадания при каждом броске равна $p$. Составить закон распределения дискретной случайной величины $X$ – числа попаданий мяча в корзину. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.

$\checkmark$ $3p$; $3p(1-p)$; $\sqrt{3p(1-p)}$;

$\rightarrow$ $p = \dfrac{5}{10}$; $\dfrac{6}{10}$; $\dfrac{7}{10}$; $\dfrac{8}{10}$; $\dfrac{9}{10}$

3) Верятность сбоя в работе АТС равна $p$. Составить закон распределения дискретной случайной величины $X$ – числа сбоев, если в данный момент поступило три вызова. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.

$\checkmark$ $3p$; $3p(1-p)$; $\sqrt{3p(1-p)}$;

$\rightarrow$ $p = \dfrac{1}{10}$; $\dfrac{2}{10}$; $\dfrac{3}{10}$; $\dfrac{4}{10}$; $\dfrac{5}{10}$

**312.** Случайная величина $X$ задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Найти плотность вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.

$\Rightarrow$ $a =\ -5\,;\ \ -4\,;\ \ -3\,;\ \ -2\,;\ \ -1\,;\ \ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

1) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ (x-a)^2, & a < x \le a+1, \\ 1, & x > a+1. \end{cases}$

$\surd$ $a + \dfrac{2}{3};\ \dfrac{1}{18};\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

2) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b}, & a < x \le a+b, \\ 1, & x > a+b. \end{cases}$

$\surd$ $a + \dfrac{b}{2};\ \dfrac{b^2}{12};\ \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$

$\rightarrow$ $b =\ 1\,;\ \ 2\,;\ \ 3\,;\ \ 4\,;\ \ 5$

Оценка параметров

**313.** Решить задачу по теме «Оценка параметров».

1) Методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ найти точечную оценку неизвестного параметра $\lambda$ распределения случайной величины $X$, зная что плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \geq 0).$$

√ $1/x_{\text{в}}$

2) Случайная величина $X$ распределена по закону Пуассона

$$P_m(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

где $m$ – число испытаний, произведенных в одном опыте; $x_i$ – число появлений события в $i$-том опыте. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку неизвестного параметра $\lambda$, определяющего распределение Пуассона.

√ $x_{\text{в}}$

3) Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку неизвестного параметра $p$ биномиального распределения

$$P_m(X = x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1 - p)^{m - x_i},$$

где $x_i$ – число появлений события в $i$-м опыте $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $m$ – количество испытаний в одном опыте.

√ $\dfrac{1}{nm} \sum x_i$

4) Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку неизвестного параметра $\lambda$ показательного распределения, плотность которого

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \geq 0).$$

√ $1/x_{\text{в}}$

5) Методом наибольшего правдоподобия найти по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку неизвестного параметра $p$ геометрического распределения

$$P(X = x_i) = (1 - p)^{x_i} p,$$

где $p$ – вероятность появления события в отдельном испытании.

√ $1/x_{\text{в}}$

Статистика

**314.** Решить задачу по теме «Статистика».

⇒ $a =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

⇒ $x =$ 0 ; 5 ; 10 ; 15

⇒ $n =$ 3 ; 4 ; 5

⇒ $m =$ 9 ; 10 ; 11

⇒ $k =$ 19 ; 20 ; 21

1) Выборка задана интервальным вариационным рядом

| $i$ | $x_i;\ x_{i+1}$ | $n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | $x; x+a$ | $n$ |
| 2 | $x+a; x+2a$ | $m$ |
| 3 | $x+2a; x+3a$ | $k$ |
| 4 | $x+3a; x+4a$ | $42-k-m$ |
| 5 | $x+4a; x+5a$ | $8-n$ |

Построить полигон частот. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

√ $x_{\text{в}} = x + \dfrac{a(183-4n-2n-k)}{50}$, $D_{\text{в}} = \dfrac{a^2}{100}(1353-40n-20m-12k) - \dfrac{a^2}{2500}(183-4n-2m-k)$

2) Выборка задана интервальным вариационным рядом

| $i$ | $x_i;\ x_{i+1}$ | $n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | $x; x+a$ | $n$ |
| 2 | $x+a; x+2a$ | $m$ |
| 3 | $x+2a; x+3a$ | $k$ |
| 4 | $x+3a; x+4a$ | $42-k-m$ |
| 5 | $x+4a; x+5a$ | $8-n$ |

Построить гистограмму частот. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

√ $x_{\text{в}} = x + \dfrac{a(183-4n-2n-k)}{50}$, $D_{\text{в}} = \dfrac{a^2}{100}(1353-40n-20m-12k) - \dfrac{a^2}{2500}(183-4n-2m-k)$

3) Выборка задана интервальным вариационным рядом

| $i$ | $x_i;\ x_{i+1}$ | $n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | $x; x+a$ | $n$ |
| 2 | $x+a; x+2a$ | $m$ |
| 3 | $x+2a; x+3a$ | $k$ |
| 4 | $x+3a; x+4a$ | $42-k-m$ |
| 5 | $x+4a; x+5a$ | $8-n$ |

Построить график эмпирической функции распределения частот. Найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при надежности $\gamma = 0,95$.

√ $x_{\text{в}} = x + \dfrac{a(183-4n-2n-k)}{50}$, $D_{\text{в}} = \dfrac{a^2}{100}(1353-40n-20m-12k) - \dfrac{a^2}{2500}(183-4n-2m-k)$

# Часть XX

# ЭМММ

**315.** Решить задачу

1) Для потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_1x_2$

   1. Записать математическую модель оптимального выбора потребителя.
   2. Найти функции спроса на оба товара.
   3. Найти точку спроса для цен $P_0 = (P_1, P_2)$ и дохода $Q_0 = Q_0$ и дать содержательный ответ.
   4. Пусть цена на первый товар увеличится в $k$ раз. Найти компенсацию дохода потребителя. Какой набор товаров является теперь оптимальным? Сколько нужно средств, чтобы купить старый оптимальный набор по новой цене? Сравнить потребительские наборы.
   5. Определить, на сколько процентов измениться спрос на первый товар, если цена на второй товар увеличится на 1%?

√
$$x_1^* = \frac{bQ + ap_2}{2p_1b}; x_2^* = \frac{bQ - ap_2}{2p_2b};$$

$$\text{Точ. спроса} \left(\frac{bQ_0 + aP_2}{2P_1b}; \frac{bQ_0 - aP_2}{2P_2b}\right);$$

$$dQ = Q_1;$$

$$\text{Н. точ. спроса} \left(\frac{b(Q_0 + Q_1) + aP_2}{2kP_1b}; \frac{b(Q_0 + Q_1) - aP_2}{2P_2b}\right);$$

Увелич. на 0.5%

→ $Q_1 = \dfrac{(\sqrt{k} - 1)(bQ_0 + aP_2)}{b}$

→ $a =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $b =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4

→ $P_1 =$ 1 ; 2

→ $P_2 =$ 2 ; 3 ; 4 ; 5

→ $Q_0 =$ 15 ; 20 ; 25 ; 30

→ $k =$ 2 ; 3 ; 4

# Часть XXI

# Экзаменационные вопросы

ИСИТ 1 I

**316.**

1) Числовые множества. Доказательство того, что нет рационального числа, квадрат которого равен 2.
2) Функции и их характеристики. Сложная функция. Обратная функция. Основные элементарные функции и их графики.
3) Числовая последовательность. Предел последовательности. Предельный переход в неравенствах.
4) Предел монотонной ограниченной последовательности. Число $e$.
5) Предел функции по Коши и по Гейне. Исследование существование предела функции $\frac{\sin x}{x}$.
6) Односторонние пределы. Предел при $x$ стремящемся к бесконечности. ББВ.
7) Бесконечно малые функции
8) Пределы и арифметические операции.
9) Признаки существования пределов.
10) Первый замечательный предел.
11) Второй замечательный предел.
12) Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые функции.
13) Вывод важнейших эквивалентностей.
14) Непрерывность функций. Доказательство непрерывности косинуса. Точки разрыва и их классификация.
15) Теоремы о непрерывных функциях. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
16) Производная функции. Геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали.
17) Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Производная суммы, произведения и частного.
18) Производная сложной и обратной функции.
19) Производные основных элементарных функций.
20) Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.
21) Производные высших порядков. Производные высших порядков от неявных и параметрически заданных функций.
22) Дифференциал функции. Основные теоремы. Инвариантность формы первого дифференциала.
23) Применение дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

24) Теоремы Ферма и Роля.

25) Теоремы Лагранжа и Коши.

26) Правила Лопиталя.

ИСИТ 1 II

**317.**

1) Вывод формулы Тейлора.

2) Формулы Тейлора и Маклорена. Разложение экспоненты.

3) Монотонность. Необходимое усовие экстремума. Минимум и максимум функции на отрезке.

4) Первое и второе достаточные условия экстремума.

5) Выпуклость и точки перегиба.

6) Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

7) Неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла.

8) Таблица основных неопределённых интегралов.

9) Основные методы интегрирования. Методы интегрирования заменой переменной и по частям.

10) Интегрирование рациональных функций.

11) Интегрирование тригонометрических функций.

12) Интегрирование иррациональных функций.

13) Определённый интеграл. Его геометрический и физический смысл.

14) Формула Ньютона-Лейбница.

15) Свойства определённого интеграла.

16) Вычисление определённого интеграла. Замена переменной. Интегрирование по частям.

17) Формула Валлиса.

18) Вычисление площадей плоских фигур.

19) Вычисление дуги плоской кривой. Вычисление объёма тела.

20) Работа переменной силы. Работа при выкачивании жидкостей. Путь, пройденный телом. Давление жидкости на вертикальную пластинку.

21) Формулы прямоуголоников и трапеций для приближённого вычисления определённого интеграла.

22) Формула парабол (Симпсона) для приближённого вычисления определённого интеграла.

**318.**

1) Понятие ФМП. Предел. Пример функции, у которой есть повторные пределы, но нет двойного.
2) Непрерывность. Открытые, замкнутые, ограниченные, неограниченные, связные, несвязные области. Свойства непрерывных функций.
3) Частные производные первого порядка, их геометрический смысл. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца, пример её подтверждающий.
4) Дифференцируемость и полный дифференциал. Теорема о необходимом и достаточном условиях дифференцируемости. Применение к приближённым вычислениям.
5) Производная сложной функции. Полная производная. Пример, показывающий, что условие диффиренцируемости нельзя отбросить.
6) Дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы первого дифференциала.
7) Дифференцирование неявной функции. Теорема существования неявной функции. Случай одной переменной.
8) Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
9) Экстремум ФМП. Наибольшее и наименьшее значения ФМП в ограниченной замкнутой области.
10) Достаточные условия экстремума.
11) Эйлеров интеграл второго рода. Свойства.
12) Эйлеров интеграл первого рода. Свойства.
13) Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл.
14) Свойства двойного интеграла.
15) Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
16) Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
17) Геометрические и физические приложения двойного интеграла.
18) Определение и свойства тройного интеграла.
19) Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
20) Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.
21) Геометрические и механические приложения тройного интеграла.

**319.**

1) Доказательство необходимой части теоремы о необходимом и достаточном условиях дифференцируемости.
2) Доказательство теоремы о сложой функции.
3) Доказательство формулы для производной неявной функции.
4) Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Вывод уравнений.
5) Доказательство необходимого условия экстремума ФМП.
6) Нахождение области определения эйлерова интеграла второго рода.
7) Вывод соотношения между гамма-функцией и факториалом.
8) Нахождение области определения эйлерова интеграла первого рода.
9) Вывод формулы для перехода от двойного интеграла к повторному.
10) Вычисление якобиана для циллиндрических и сферических координат.

**320.**

1) Несобственные интегралы первого рода. Примеры. Признаки сравнения. Интеграл Пуассона.
2) Несобственные интегралы второго рода. Примеры. Признаки сравнения.
3) Эйлеров интеграл второго рода. Нахождение области определения.
4) Свойства гамма-фукции. Вывод соотношения между гамма-функцией и факториалом. Вычисление интеграла Пуассона.
5) Эйлеров интеграл первого рода. Нахождение области определения.
6) Свойства бета-функции. Приложения при вычислении интегралов.
7) Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл.
8) Свойства двойного интеграла.
9) Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Вывод формулы для перехода от двойного интеграла к повторному. Пример.
10) Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
11) Определение и свойства тройного интеграла.
12) Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Пример.
13) Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
14) Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.
15) Геометрические и механические приложения двойного и тройного интеграла.

**321.**

1) Числовые ряды. Основные понятия. Геометрическая прогрессия.
2) Свойства числовых рядов.
3) Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд.
4) Первый и второй признаки сравнения рядов.
5) Признак Даламбера. Радикальный признак Коши.
6) Интрегральный признак Коши. Обобщённый гармонический ряд.
7) Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Примеры рядов лейбницевского типа. Оценка остатка ряда лейбницевского типа.
8) Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
9) Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана. Пример условно сходящегося ряда.
10) Функциональные и степенные ряды. Теорема Абеля.
11) Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Вывод двух формул для радиуса сходимости.
12) Свойства степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена.
13) Достаточные условия сходимости рядов Тейлора и Маклорена. Пример Коши.
14) Алгоритм разложения функции в ряд Тейлора. Ряд Тейлора для экспоненты. Вычисление экспонент.
15) Разложение в ряд Тейлора синуса, косинуса, синуса гиперболического и косинуса гиперболического. Вычисление синусов и косинусов.
16) Биномиальный ряд. Основные частные случаи. Вычисление корней.
17) Разложение в ряд Тейлора логарифма. Вычисление логарифмов.
18) Разложение в ряд Тейлора арктангенса и арксинуса. Вычисление числа $\pi$.
19) Приближённое вычисление определённых интегралов. Пример.
20) Приближённое решение дифференциальных уравнений. Пример.
21) Ряды Фурье. Основные определения. Ортогональность тригонометрической системы.
22) Разложение в ряд Фурье $2\pi$-периодических функций. Теорема Дирихле.
23) Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций.
24) Разложение в ряд Фурье непериодических функций.
25) Ряд Фурье в комплексной форме.

26) Интеграл Фурье.

**322.**

1) Классическая формула расчета вероятности.
2) Элементы комбинаторики. Формулы для расчета числа сочетаний, размещений и перестановок.
3) Геометрическая формула расчета вероятности.
4) Формула полной вероятности.
5) Формула Байеса.
6) Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли.
7) Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Пуассона.
8) Схема независимых испытаний Бернулли. Локальная формула Муавра–Лапласа.
9) Схема независимых испытаний Бернулли. Интегральная формула Муавра Лапласа.
10) Определение дискретной СВ.
11) Примеры дискретных СВ.
12) Функция распределения дискретной СВ.
13) Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение дискретной СВ.
14) Определение непрерывной СВ.
15) Примеры непрерывных СВ.
16) Функция распределения непрерывной СВ. Связь между функцией распределения и плотностью распределения непрерывной СВ.
17) Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение непрерывной СВ.
18) Определение коэффициента корреляции.
19) Определение характеристической функции.

**323.**

1) Определение вариационного ряда. Дискретные и непрерывные ВР.
2) Графическое представление ВР. Гистограмма, полигон частот, кумулянта.
3) Числовые характеристики ВР.
4) Определения несмещенной, смещенной оценки.
5) Понятие вариации оценки.
6) Суть метода моментов.
7) Суть метода наименьших квадратов.
8) Суть метода максимального правдоподобия.
9) Примеры распределений, применяемых в статистике.
10) Постановка задачи проверки статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы.
11) Понятие ошибок первого и второго рода, мощности критерия.
12) Проверка гипотезы о нормальном распределении по критерию.
13) Проверка гипотезы о распределении Пуассона по критерию.
14) Доверительный интервал для математического ожидания.
15) Доверительный интервал для дисперсии.
16) Критерий согласия Колмогорова.
17) Критерий согласия Колмогорова–Смирнова.
18) Постановка задачи регрессионного анализа.
19) Постановка задачи дисперсионного анализа.