

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Элементарные преобразования</b>	<b>9</b>
1	Вычислить выражение . . . . .	10
2	Упростить . . . . .	11
3	Упростить . . . . .	12
4	Упростить . . . . .	13
5	Упростить . . . . .	14
6	Решить уравнение . . . . .	15
7	Решить уравнение . . . . .	16
8	Упростить . . . . .	17
9	Упростить . . . . .	18
10	Упростить . . . . .	19
<b>II</b>	<b>Алгебра и теория чисел</b>	<b>20</b>
11	НОД двух чисел . . . . .	21
12	НОД двух многочленов . . . . .	22
13	Рациональные корни многочленов . . . . .	23
14	Разложение на множители многочлена 4 степени . . . . .	24
15	Интерполяционный полином Лагранжа степени 3 . . . . .	26
16	Интерполяционный полином степени 4 . . . . .	27
17	Разложение правильной рациональной дроби степени 3 на простейшие дроби 1 . . . . .	28
18	Разложение правильной рациональной дроби степени 3 на простейшие дроби 2 . . . . .	29
19	Разложение рациональной дроби степени 3 на простейшие дроби . . . . .	30
<b>III</b>	<b>Комплексные числа</b>	<b>32</b>
20	Вычисление комплексного выражения . . . . .	33
21	Произведение и частное комплексных чисел . . . . .	34
22	Построение на комплексной плоскости множества точек . . . . .	35
23	Решение комплексного уравнения . . . . .	37
24	Возведение комплексного числа в степень и нахождение корня 3-й степени . . . . .	38
25	Возведение комплексного числа в степень и нахождение корня 4-ой степени . . . . .	39
<b>IV</b>	<b>Линейная алгебра</b>	<b>43</b>
26	Линейная комбинация матриц . . . . .	44
27	Произведение матриц $2 \times 2$ , $2 \times 1$ и $1 \times 2$ . . . . .	46
28	Разность матриц $2 \times 2$ и $2 \times 2$ . . . . .	47
29	Произведение матриц . . . . .	48
30	Произведение матрицы и вектора . . . . .	50
31	Произведения матриц $AB$ и $BA$ , размер $2 \times 2$ . . . . .	52
32	Произведения матриц $AB$ и $BA$ , размер $3 \times 3$ . . . . .	53
33	Произведение трёх матриц размера $2 \times 2$ . . . . .	55

34	Произведение трёх матриц размера $3 \times 3$	56
35	Матричный многочлен размера $2 \times 2$	58
36	Матричный многочлен размера $3 \times 3$	59
37	Произведение матрицы на её транспонированную	61
38	След произведения матриц	62
39	Определитель $2 \times 2$	63
40	Определитель $3 \times 3$	64
41	Простой определитель $4 \times 4$	65
42	Определитель $4 \times 4$	66
43	Разность определителей	67
44	Система $2 \times 2$	68
45	Простая система $3 \times 3$	69
46	Система $3 \times 3$ в экономике	70
47	Система $3 \times 3$	71
48	Несовместная система $3 \times 3$	72
49	Неопределенная система $3 \times 3$	73
50	Однородная система $3 \times 3$ с бесконечным множеством решением	74
51	Однородная система $3 \times 3$ с нулевым решением	75
52	Фундаментальная система решений однородной системы	76
53	Система $4 \times 3$	77
54	Система $4 \times 4$ с единственным решением	78
55	Общее и частное решение системы, ранг 1	80
56	Общее и частное решение системы, ранг 2	82
57	Общее и частное решение системы, ранг 3	87
58	Общее и частное решение системы, ранг 4	92
59	Однородная система, ранг 2	96
60	Однородная система, ранг 3	100
61	Однородная система, ранг 4	103
62	Модель Леонтьева $2 \times 2$	106
63	Модель Леонтьева $3 \times 3$	107
64	Модель Леонтьева $4 \times 4$	108
65	Простая обратная матрица $3 \times 3$	109
66	Обратная матрица $2 \times 2$	110
67	Обратная матрица $3 \times 3$	111
68	Обратная матрица $4 \times 4$	113
69	Обратная матрица $4 \times 4$ с помощью союзной	116
70	Вычисление матричного многочлена	118
71	Матричное уравнение $2 \times 2$ простое	119
72	Матричное уравнение $2 \times 2$	120
73	Матричное уравнение $3 \times 3$	121
74	Ранг матрицы из 2 строк	124
75	Ранг матрицы из 3 строк	126
76	Ранг матрицы из 4 строк	130
77	Проверка линейной зависимости векторов, 2 вектора	136
78	Проверка линейной зависимости векторов, 3 вектора	138
79	Проверка линейной зависимости векторов, 4 вектора	141
80	Определение линейной зависимости системы матриц $2 \times 2$	146
81	Нахождение координат вектора в базисе, размерность $2 \times 2$	150
82	Нахождение координат вектора в базисе, размерность $3 \times 3$	151
83	Нахождение координат вектора в базисе, размерность $4 \times 4$	152
84	Матрица перехода и координаты вектора в базисе, размерность $2 \times 2$	154
85	Матрица перехода и координаты вектора в базисе, размерность $3 \times 3$	155

86	Матрица перехода и координаты вектора в базисе, размерность $4 \times 4$	156
87	Дополнение системы векторов до базиса, 3 вектора	158
88	Поиск какого-то базиса и ранга системы векторов, размер 3	160
89	Поиск ранга и какого-либо базиса системы многочленов, степень 3	164
90	Базис ядра и базис образа линейного оператора	170
91	Вычисление матрицы оператора в новом базисе, $2 \times 2$	172
92	Вычисление матрицы оператора в новом базисе, $3 \times 3$	173
93	Вычисление матрицы оператора в новом базисе, $4 \times 4$	176
94	Приведение матрицы к диагональному виду, $2 \times 2$	180
95	Приведение матрицы к диагональному виду, $3 \times 3$	183
96	Приведение матрицы к диагональному виду, $4 \times 4$	186
97	Жорданова нормальная форма, $2 \times 2$	190
98	Жорданова нормальная форма, $3 \times 3$	191
99	Жорданова нормальная форма, $4 \times 4$	194
100	Собственные значения и векторы, $2 \times 2$	203
101	Собственные значения и векторы, $3 \times 3$	206
102	Собственные значения и векторы, $4 \times 4$	214
103	Собственные значения $2 \times 2$	240
104	Спектр матрицы 1	241
105	Спектр матрицы 2	242
106	Спектр комплексной матрицы $3 \times 3$	243
107	Спектр матрицы $4 \times 4$	244
108	Собственные векторы матрицы $4 \times 4$	246
109	Собственные векторы матрицы	249
110	Приведение квадратичной формы к каноническому виду	250

## V    Прямая на плоскости 252

111	Область	253
112	Уравнение прямой, проходящей через две точки	254
113	Уравнение параллельной прямой через 3 точки	255
114	Уравнение перпендикулярной прямой через 3 точки	256
115	Угол между двумя прямыми	257
116	Точка пересечения диагоналей четырёхугольника с плохим ответом	258
117	Точка пересечения диагоналей четырёхугольника	259
118	Высота в треугольнике	260
119	Прямая через точку	261
120	Периметр и площадь треугольника по вершинам	262
121	Уравнения сторон треугольника	263
122	Внутренние углы треугольника	264
123	Периметр и площадь треугольника по сторонам	265
124	Уравнение биссектрисы в треугольнике	266
125	Точка на прямой, равноудалённая от двух данных точек	267
126	Уравнение прямой, проходящей через точку и делящей отрезок в заданном соотношении	268
127	Прямая, проходящая через точку и параллельная/перпендикулярная заданной прямой	269
128	Площадь, отсекаемая прямой от координатного угла	270
129	Расстояние от начала координат до прямой	271

<b>VI</b>	<b>Прямая и плоскость в пространстве</b>	<b>272</b>
130	Уравнение плоскости Простая	273
131	Уравнение плоскости	274
132	Уравнение плоскости	275
133	Расстояние от точки до плоскости	276
134	Угол между плоскостями	277
135	Уравнение прямой	278
136	параллельность/ортогональность прямых	279
137	Проекция точки на плоскость	280
<b>VII</b>	<b>Векторы</b>	<b>281</b>
138	Коллинеарность/ортогональность векторов	282
139	Значения параметров, обеспечивающие коллинеарность/ортогональность	283
140	Нахождение коллинеарного вектора	284
141	Нахождение ортогонального вектора	285
142	Длина суммы двух векторов	286
143	Нахождение вектора по его скалярным произведениям простая	287
144	Нахождение вектора по его скалярным произведениям	288
145	Работа силы	289
146	Момент равнодействующей	290
147	Скалярное произведение	291
148	Угол между диагоналями параллелограмма	292
149	Площадь параллелограмма	293
150	Нахождение вектора по скалярному и векторному произведению	294
151	Смешанное произведение	295
152	Высота пирамиды	297
153	Координаты вектора в базисе	298
154	Базис и ранг системы векторов	299
<b>VIII</b>	<b>Кривые второго порядка</b>	<b>300</b>
155	Координаты центра и радиус окружности	301
156	Определения вида кривой второго порядка	302
157	Уравнение окружности с заданной касательной	303
158	Уравнение эллипса	304
159	Уравнение гиперболы	305
160	Уравнение параболы	307
161	Полуоси, фокусы, эксцентриситет	308
162	Уравнение эллипса и окружности	309
163	Уравнения эллипса гиперболы и параболы	310
164	Площадь ромба	311
165	Прямые параллельные асимптотами	312
<b>IX</b>	<b>Теория пределов</b>	<b>313</b>
166	Предел отношения полиномов при $n \rightarrow \infty$	314
167	Предел последовательности отношения полиномов	315
168	Предел отношения корней при $n \rightarrow \infty$	316
169	Предел разности квадратных корней	317
170	Предел разности кубических корней	319
171	Предел отношения полиномов при $x \rightarrow \infty$	320

172	Простой предел отношения полиномов степени 2	321
173	Предел отношения полиномов	322
174	Предел отношения полиномов	323
175	Предел разность отношений полиномов	324
176	Предел корня на полином степени 2	325
177	Простой второй замечательный предел	326
178	Второй замечательный предел	327
179	Простой первый замечательный предел	328
180	Первый замечательный предел	329
181	Эквивалентности простые	330
182	Эквивалентность с полиномом	331
183	Эквивалентности	332
184	Непрерывность функции	334
185	Непрерывность функции 2	336

## **X Теория дифференцирования 337**

186	Производная со степенями	338
187	Производная произведения. Простая	339
188	Производная произведения	340
189	Производная частного. Простая	341
190	Логарифмическое дифференцирование	342
191	Производная произведения	343
192	Производная частного	344
193	Производная сложной функции	345
194	Приближённые вычисления с помощью дифференциалов	346
195	Угловой коэффициент	348
196	Касательная	349
197	Первая производная в точке	352
198	Вторая производная в точке	353
199	Третья производная в точке	354
200	Правило Лопиталья. Простой пример	355
201	Правило Лопиталья	356
202	Монотонность	360
203	Экстремум	361
204	Сумма значений в точках экстремума	362
205	Интервалы монотонности и точки экстремума	363
206	Монотонность, экстремум, выпуклость и точки перегиба	364
207	Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке	365
208	Экономическая задача на глобальный экстремум: общая	366
209	Экономическая задача на глобальный экстремум	367
210	Физическая задача на глобальный экстремум	368
211	График	369

## **XI Неопределённый интеграл 370**

212	Интеграл со степенями	371
213	Непосредственное интегрирование	372
214	Линейная замена переменных в неопределённом интеграле	373
215	Интеграл от сложной функции	374
216	Интеграл от сложной функции с обратными тригонометрическими	375
217	Интегрирование по частям в неопределённом интеграле простой	376

218	Интегрирование по частям в неопределенном интеграле сложный	377
219	Неопределенный интеграл от рациональной функции	378
220	Неопределенный интеграл от рациональной функции	379
221	Неопределенные интегралы, содержащие тригонометрические функции	380
222	Интегралы на универсальную тригонометрическую подстановку	381
223	Интеграл от рациональной функции с одним корнем	382
224	Интеграл от рациональной функции с разными корнями	383
225	Интеграл от дробно-линейной иррациональности	384
<b>XII</b>	<b>Определённый интеграл</b>	<b>386</b>
226	Разные определённые интегралы	387
227	Определённый интеграл на линейную замену	389
228	Определённый интеграл от степеней тангенса	391
229	Замена в определённом интеграле	392
230	Определённый интеграл на разные замены	394
231	Определённый интеграл по частям	396
232	Определённый интеграл от правильной рациональной дроби	398
233	Площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой простая	399
234	Площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой	400
235	Площадь фигуры, ограниченной двумя параболой	401
236	Длина дуги кривой	402
237	Объём тела вращения	403
238	Сила давления на вертикальную пластину	404
239	Сила давления на вертикальную пластину	405
240	Несобственный интеграл первого рода	406
241	Несобственный интеграл второго рода	407
<b>XIII</b>	<b>Интегралы с параметром</b>	<b>408</b>
242	Применение эйлеровых интегралов для вычисления обычных интегралов	409
<b>XIV</b>	<b>Дифференцирование функций многих переменных</b>	<b>410</b>
243	Линии уровня функции двух переменных	411
244	Частные производные и область определения	412
245	Частные производные	414
246	Вторые производные	415
247	Проверка того, что функция удовлетворяет ДУ в частных производных	416
248	Производная сложной функции. Две переменные	417
249	Касательная к неявно заданной кривой	418
250	Касательная плоскость к неявно заданной поверхности	419
251	Третья производная в точке для неявно заданной функции	420
252	Исследование на экстремум функции 2 переменных простая	421
253	Исследование на экстремум функции 2 переменных	422
254	Исследование на экстремум полинома 3-й степени 2-х переменных	423
255	Исследование на экстремум функции 2 переменных с логарифмом	424
256	Минимум и максимум в области. На условный экстремум	425
257	Метод наименьших квадратов (хороший ответ)	426
258	Метод наименьших квадратов (зависимость веса от роста)	427
259	Текстовая задача на глобальный экстремум	429

<b>XV</b>	<b>Кратные интегралы</b>	<b>430</b>
260	Двойной интеграл по прямоугольной области . . . . .	431
261	Двойной интеграл по треугольнику . . . . .	432
262	Двойной интеграл . . . . .	433
263	Двойной интеграл в полярных координатах. Сложный . . . . .	434
264	Нахождение площади с помощью двойного интеграла . . . . .	435
265	Площадь через двойной интеграл в эллиптических координатах (надо доработать) . . . . .	436
266	Центр масс фигуры, ограниченной параболой и прямой . . . . .	437
267	Тройной интеграл в прямоугольной области . . . . .	438
268	Вычисление объёма тела через тройной интеграл . . . . .	439
269	Вычисление объёма тела через тройной интеграл. Сложный . . . . .	440
270	Кри I по отрезку прямой . . . . .	441
271	Кри II в пространственном потенциальном поле . . . . .	443
272	Поверхностный интеграл II рода . . . . .	445
<b>XVI</b>	<b>Ряды</b>	<b>446</b>
273	Сумма рядов . . . . .	447
274	Сравнение рядов . . . . .	448
275	Признаки Даламбера и Коши. Простые . . . . .	449
276	Признаки Даламбера и Коши . . . . .	451
277	Интегральный признак . . . . .	453
278	Знакопеременные ряды . . . . .	454
279	Сходимость функциональных рядов . . . . .	457
280	Радиус сходимости степенного ряда . . . . .	459
281	Область сходимости степенного ряда. Сложный . . . . .	461
282	Приближённых вычисления с помощью рядов Тейлора . . . . .	462
<b>XVII</b>	<b>Дифференциальные уравнения</b>	<b>464</b>
283	Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	465
284	Линейное неоднородное ДУ . . . . .	466
285	Однородное ДУ I порядка . . . . .	468
286	Однородное уравнение первого порядка . . . . .	469
287	Линейное неоднородное ДУ . . . . .	471
288	Линейные дифференциальные уравнения1 . . . . .	472
289	Линейные дифференциальные уравнения2 . . . . .	473
290	Линейные дифференциальные уравнения3 . . . . .	474
291	ДУ 2-го порядка 2 действительных корня . . . . .	475
292	ДУ 2-го порядка комплексные корни . . . . .	476
293	ДУ 2-го порядка кратный корень . . . . .	477
294	Неоднородное ДУ 2-го порядка I . . . . .	478
295	Неоднородное ДУ 2-го порядка II . . . . .	479
296	Неоднородное ДУ 2-го порядка III . . . . .	480
297	Неоднородное ДУ 2-го порядка IV . . . . .	482
298	Задача Коши для неоднородного ДУ 2-го порядка . . . . .	484
299	Дифференциальные уравнения второго порядка1 . . . . .	486
300	Дифференциальные уравнения второго порядка2 . . . . .	487
301	Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах . . . . .	488
302	Уравнение кривой, определяемое ДУ . . . . .	490
303	ДУ с «интегрирующим множителем» . . . . .	491

<b>XVIII</b>	<b>Уравнения математической физики</b>	<b>492</b>
304	Приведение к каноническому виду . . . . .	493
305	Задача Коши для ур колеб струны . . . . .	494
306	Смешанная задача для ур колеб струны . . . . .	495
<b>XIX</b>	<b>Теория вероятностей</b>	<b>496</b>
307	Элементарная вероятность . . . . .	497
308	Элементарная вероятность . . . . .	498
309	Формула полной вероятности . . . . .	499
310	Закон Пуассона . . . . .	500
311	Дискретные случайные величины . . . . .	501
312	Непрерывные случайные величины . . . . .	502
313	Оценка параметров . . . . .	503
314	Статистика . . . . .	504
<b>XX</b>	<b>ЭМММ</b>	<b>505</b>
315	Потребитель и его поведение . . . . .	506
<b>XXI</b>	<b>Экзаменационные вопросы</b>	<b>507</b>
316	ИСИТ 1 I . . . . .	508
317	ИСИТ 1 II . . . . .	510
318	ИСИТ 4. Коллоквиум I . . . . .	511
319	ИСИТ 4. Коллоквиум II . . . . .	512
320	ИСИТ 3. Экзамен I . . . . .	513
321	ИСИТ 3. Экзамен II . . . . .	515
322	Рациональные приближения для магистрантов. Экзамен I . . . . .	516
323	Рациональные приближения для магистрантов. Экзамен II . . . . .	517
324	Введение в теорию аппроксимации. Экзамен I . . . . .	518
325	Введение в теорию аппроксимации. Экзамен II . . . . .	519
326	Физтех. Вероятность I . . . . .	520
327	Физтех. Вероятность II . . . . .	521



# Часть I

## Элементарные преобразования

**Вычислить выражение**

1. Вычислить выражение.

$$1) \frac{a+b+c}{d \cdot h + f \cdot k} \cdot l + m \cdot n$$

$$\checkmark \frac{a+b+c}{dh + fk} l + mn$$

$$\rightarrow a = 3 + \frac{1}{5}; \quad 3 - \frac{1}{5}; \quad 4 + \frac{1}{2}; \quad 4 - \frac{1}{2}; \quad 6 + \frac{1}{5}; \quad 6 - \frac{1}{5}; \quad 3 + \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow b = 1 + \frac{7}{10}; \quad 2 + \frac{1}{10}; \quad 2 + \frac{1}{2}; \quad 3 + \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow c = \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow d = \frac{29}{5}; \quad \frac{16}{5}$$

$$\rightarrow f = 1; \quad 2$$

$$\rightarrow h = \frac{1}{5}; \quad \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow k = 1 + \frac{13}{20}; \quad 1 + \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow l = 3 + \frac{1}{5}; \quad 1 + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow m = 1 + \frac{1}{2}; \quad 2 + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow n = \frac{11}{20}; \quad 1 + \frac{1}{5}$$

## Упростить

2. Упростить.

$$1) \sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}} : \sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$$

$$\sqrt[n]{y}$$

$$\rightarrow m = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 32; 34; 36$$

$$\rightarrow n = 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23$$

**Упростить**

**3.** Упростить.

$$1) \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{c+d-2\sqrt{cd}}$$

$$\checkmark \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 2; 5; 7; 9; 11$$

$$\rightarrow c = 10; 12; 14; 16; 32$$

$$\rightarrow d = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

**Упростить**

4. Упростить.

$$1) \frac{(a^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{1}{n}})^2 + 4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{\frac{2}{m}} - a^{\frac{2}{n}})(\sqrt[m]{a^{m+1}} + \sqrt[n]{a^{n+1}})}$$

$$\checkmark \frac{1}{a(\sqrt[m]{a} - \sqrt[n]{a})}$$

→  $m = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24$

→  $n = 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23$

**Упростить**

5. Упростить.

$$1) \frac{(x^{\frac{2}{m}} - 9x^{\frac{2}{n}}) \cdot (\sqrt[m]{x^{1-m}} - 3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{\frac{1}{m}} + 3x^{\frac{1}{n}})^2 - 12x^{\frac{m+n}{mn}}}$$

$$\checkmark \frac{x^{\frac{1}{m}} + 3x^{\frac{1}{n}}}{x}$$

→  $m = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24$

→  $n = 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23$

6. Решить уравнение.

$$1) \frac{5(a+b)}{y+(a+b)} + \frac{4(a+b)}{y+2(a+b)} + \frac{3(a+b)}{y+3(a+b)} = 8$$

$$\checkmark \quad y_1 = 0, \quad y_{2,3} = \frac{(a+b)}{4}(-9 \pm \sqrt{5})$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13$$

Решить уравнение

7. Решить уравнение.

$$1) \frac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a-b$$

$$\checkmark \quad x_1 = a, \quad x_2 = \frac{1}{4}(4a-b)$$

$$\rightarrow a = 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$



**Упростить**

8. Упростить.

$$1) a^{\frac{2}{\log_b a}+1} b - 2a^{\log_a b} b^{\log_b a} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b}+1}$$

$$\checkmark ab(a-b)^2$$

$$\rightarrow a = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24$$

$$\rightarrow b = 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23$$

**Упростить**

9. Упростить.

$$1) \frac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \cdot \log_a \frac{a}{b}}$$

$$\checkmark \log_a b$$

$$\rightarrow a = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24$$

$$\rightarrow b = 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23$$

Упростить

10. Упростить.

$$1) \frac{\log_a b - \log_{\sqrt{a}/b^3} \sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b - \log_{a/b^6} b} : \log_b(a^3 b^{-12})$$

$$\checkmark \log_a b$$

$$\rightarrow a = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22$$

$$\rightarrow b = 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23$$

## Часть II

### Алгебра и теория чисел

11. Найдите  $d = \text{НОД}(a, b)$  и представте его в виде  $d = ak + bs$ , где  $k, s \in \mathbb{Z}$ .

$$1) \quad a = r_5(q_1q_2q_3q_4q_5q_6 + q_1q_2q_5q_6 + q_1q_4q_5q_6 + q_1q_2q_3q_6 + q_1q_2q_3q_4 + q_1q_2 + q_1q_4 + q_1q_6 + q_3q_4q_5q_6 + q_5q_6)$$

$$\checkmark \quad d = r_5, \quad k = 1 + q_2q_3 + q_2q_5 + q_4q_5 + q_2q_3q_4q_5, \quad s = -(q_1 + q_3 + q_5 + q_1q_2q_3 + q_1q_2q_5 + q_1q_4q_5 + q_3q_4q_5q_6)$$

$$\rightarrow r_5 = 2; 3; 6; 13$$

$$\rightarrow q_1 = 3; 2$$

$$\rightarrow q_2 = 1; 2$$

$$\rightarrow q_3 = 2; 3$$

$$\rightarrow q_4 = 1; 3$$

$$\rightarrow q_5 = 2; 1$$

$$\rightarrow q_6 = 2; 3$$

12. Найдите НОД двух многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ .

$$1) \quad f(x) = a_3 A_1 A_2 A_3 A_4 x^6 + (a_3(A_1 A_2 A_3 B_4 + A_1 A_2 A_4 B_3 + A_1 A_3 A_4 B_2 + A_2 A_3 A_4 B_1) + b_3 A_1 A_2 A_3 A_4)$$

$$\checkmark \quad d = \text{НОД}(f(x), g(x)) = a_3 x + b_3$$

$$\rightarrow a_3 = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_3 = 1; -1; 2; -3$$

$$\rightarrow A_4 = 1; 2$$

$$\rightarrow A_3 = 1; -3$$

$$\rightarrow A_2 = 1; 2; -2$$

$$\rightarrow A_1 = 0; 1; 2$$

$$\rightarrow B_4 = 1; -2$$

$$\rightarrow B_3 = 1; -3$$

$$\rightarrow B_2 = 1; 2; -1$$

$$\rightarrow B_1 = 1; -1; 2; -2$$

$$\rightarrow C_1 = 1; 2; -1$$

13. Найдите рациональные корни многочлена  $f(x)$ .

1)  $f(x) = akmx^5 + (bmk - alm - akn)x^4 + (ckm - blm - bkn + aln)x^3 + (bln - clm - ckn + dkm)$

✓  $x_1 = \frac{l}{k}, x_2 = \frac{n}{m}$

→  $a = 2; 3; 4$

→  $b = 2; -3; -5$

→  $c = 2; 3; -2$

→  $d = -3; 2; 6$

→  $k = 1; 7; 6$

→  $l = 2; -3; 5$

→  $m = 1; 7; 3$

→  $n = 2; 5; 4$

14. Разложить многочлен на неприводимые над полем  $\mathbb{R}$  множители.

1)  $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

✓  $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$

→  $a_3 = -(a + b + c + d)$

→  $a_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd$

→  $a_1 = -(bcd + acd + abd + abc)$

→  $a_0 = abcd$

→  $d = c + 1; \quad c + 2$

→  $c = b + 1; \quad b + 2$

→  $b = a + 1; \quad a + 2$

→  $a = -3; \quad -2$

2)  $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

✓  $(x - a)^2(x - b)(x - c)$

→  $a_3 = -(a + b + c + d)$

→  $a_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd$

→  $a_1 = -(bcd + acd + abd + abc)$

→  $a_0 = abcd$

→  $d = a$

→  $c = b + 1; \quad b + 2$

→  $b = a + 1; \quad a + 2; \quad a + 3$

→  $a = -3; \quad -2$

3)  $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

✓  $(x - a)^3(x - b)$

→  $a_3 = -(a + b + c + d)$

→  $a_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd$

→  $a_1 = -(bcd + acd + abd + abc)$

→  $a_0 = abcd$

→  $d = a$

→  $c = a$

→  $b = -2; \quad -1; \quad 3$

→  $a = -3; \quad 1; \quad 2$

4)  $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

✓  $(x - a)^2(x - b)^2$

→  $a_3 = -(a + b + c + d)$



$$\rightarrow a_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$\rightarrow a_1 = -(bcd + acd + abd + abc)$$

$$\rightarrow a_0 = abcd$$

$$\rightarrow d = a$$

$$\rightarrow c = b$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 3$$

$$\rightarrow a = -3; 1; 2$$

$$5) \quad x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\checkmark (x-a)(x-b)(x^2+cx+d)$$

$$\rightarrow a_3 = c - a - b$$

$$\rightarrow a_2 = d + ab - ca - cb$$

$$\rightarrow a_1 = abc - da - db$$

$$\rightarrow a_0 = abd$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 3$$

$$\rightarrow a = -3; 1; 2$$

$$\rightarrow d = c^2 + 1; c^2 + 2; c^2 + 3; c^2 + 4$$

$$\rightarrow c = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$6) \quad x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\checkmark (x-a)^2(x^2+cx+d)$$

$$\rightarrow a_3 = c - a - b$$

$$\rightarrow a_2 = d + ab - ca - cb$$

$$\rightarrow a_1 = abc - da - db$$

$$\rightarrow a_0 = abd$$

$$\rightarrow b = a$$

$$\rightarrow a = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow d = c^2 + 1; c^2 + 2; c^2 + 3; c^2 + 4$$

$$\rightarrow c = -2; -1; 0; 1; 2$$

15. Построить интерполяционный полином Лагранжа по данной таблице

1) 

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$f(x)$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$

✓  $ax^3 + bx^2 + cx + d$

→  $f_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$

→  $f_2 = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$

→  $f_3 = ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d$

→  $f_4 = ax_4^3 + bx_4^2 + cx_4 + d$

→  $a = -2; -1; 1; 2$

→  $b = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$

→  $c = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $d = -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $x_4 = x_3 + 1; x_3 + 2$

→  $x_3 = x_2 + 1; x_2 + 2$

→  $x_2 = x_1 + 1; x_1 + 2$

→  $x_1 = -3; -2$

16. Построить интерполяционный полином наименьшей степени по данной таблице.

1)

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$f(x)$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$

✓  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

→  $f_1 = ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e$

→  $f_2 = ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e$

→  $f_3 = ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e$

→  $f_4 = ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e$

→  $f_5 = ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e$

→  $a = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $b = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

→  $c = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $d = -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$

→  $e = -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$

→  $x_5 = 2$

→  $x_4 = 1$

→  $x_3 = 0$

→  $x_2 = -1$

→  $x_1 = -2$

17. Представить правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей.

$$\Rightarrow a = -1; 2; 3; -4$$

$$\Rightarrow A = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow B = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow C = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \frac{(A+B+C)x^2 - (A(b+c) + B(a+c) + C(a+b))x + (Abc + Bac + Cab)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\checkmark \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$$\rightarrow b = -2; -3; 5$$

$$\rightarrow c = 1; 4; -5$$

$$2) \frac{(B+C)x^2 + (A - B(a+b) - 2aC)x + (-Ab + Bab + Ca^2)}{(x-a)^2(x-b)}$$

$$\checkmark \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}$$

$$\rightarrow b = 1; 4; -2; -3; 5$$

$$3) \frac{Ax^2 + (B - 2aA)x + (Aa^2 - Ba + C)}{(x-a)^3}$$

$$\checkmark \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3}$$

$$4) \frac{(B+A)x^2 + (C - Ba + 2bA)x + (-Ca + Ac)}{(x-a)(x^2 + 2bx + c)}$$

$$\checkmark \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+2bx+c}$$

$$\rightarrow c = b^2 + 1; b^2 + 2; b^2 + 3; b^2 + 4$$

$$\rightarrow b = 0; -1; 1; -2; 2$$

18. Представить правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей.

$$\Rightarrow a = -1; 2; 3; -4$$

$$\Rightarrow A = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow B = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow C = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \frac{(A+B+C)x^2 - (A(b+c) + B(a+c) + C(a+b))x + (Abc + Bac + Cab)}{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc}$$

$$\checkmark \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$$\rightarrow b = -2; -3; 5$$

$$\rightarrow c = 1; 4; -5$$

$$2) \frac{(B+C)x^2 + (A-B(a+b) - 2aC)x + (-Ab + Bab + Ca^2)}{x^3 - (2a+b)x^2 + (2ab+a^2)x - a^2b}$$

$$\checkmark \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}$$

$$\rightarrow b = 1; 4; -2; -3; 5$$

$$3) \frac{Ax^2 + (B-2aA)x + (Aa^2 - Ba + C)}{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}$$

$$\checkmark \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3}$$

$$4) \frac{(B+A)x^2 + (C-Ba+2bA)x + (-Ca+Ac)}{x^3 + (2b-a)x^2 + (c-2ba)x - ac}$$

$$\checkmark \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+2bx+c}$$

$$\rightarrow c = b^2+1; b^2+2; b^2+3; b^2+4$$

$$\rightarrow b = 0; -1; 1; -2; 2$$

19. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших дробей.

$$\Rightarrow a = -1; 2; 3; -4$$

$$\Rightarrow A = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow B = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow C = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow p = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow q = -2; -1; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow r = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$1) \frac{px^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

$$\checkmark \quad px^2 + qx + r + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$$\rightarrow c_4 = q + b_2p$$

$$\rightarrow c_3 = r + b_2q + b_1p$$

$$\rightarrow c_2 = a_2 + b_2r + b_1q + b_0p$$

$$\rightarrow c_1 = a_1 + b_1r + b_0q$$

$$\rightarrow c_0 = a_0 + b_0r$$

$$\rightarrow a_2 = A + B + C$$

$$\rightarrow a_1 = -A(b+c) - B(a+c) - C(a+b)$$

$$\rightarrow a_0 = Abc + Bac + Cab$$

$$\rightarrow b_2 = -a - b - c$$

$$\rightarrow b_1 = ab + ac + bc$$

$$\rightarrow b_0 = -abc$$

$$\rightarrow b = -2; -3; 5$$

$$\rightarrow c = 1; 4; -5$$

$$2) \frac{px^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

$$\checkmark \quad px^2 + qx + r + \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}$$

$$\rightarrow c_4 = q + b_2p$$

$$\rightarrow c_3 = r + b_2q + b_1p$$

$$\rightarrow c_2 = a_2 + b_2r + b_1q + b_0p$$

$$\rightarrow c_1 = a_1 + b_1r + b_0q$$

$$\rightarrow c_0 = a_0 + b_0r$$

$$\rightarrow a_2 = B + C$$

$$\rightarrow a_1 = A - B(a+b) - 2aC$$

$$\rightarrow a_0 = -Ab + Bab + Ca^2$$

$$\rightarrow b_2 = -(2a + b)$$

$$\rightarrow b_1 = 2ab + a^2$$

$$\rightarrow b_0 = -a^2b$$

$$\rightarrow b = 1; 4; -2; -3; 5$$

$$3) \frac{px^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

$$\checkmark \quad px^2 + qx + r + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3}$$

$$\rightarrow c_4 = q + b_2p$$

$$\rightarrow c_3 = r + b_2q + b_1p$$

$$\rightarrow c_2 = a_2 + b_2r + b_1q + b_0p$$

$$\rightarrow c_1 = a_1 + b_1r + b_0q$$

$$\rightarrow c_0 = a_0 + b_0r$$

$$\rightarrow a_2 = A$$

$$\rightarrow a_1 = B - 2aA$$

$$\rightarrow a_0 = Aa^2 - Ba + C$$

$$\rightarrow b_2 = -3a$$

$$\rightarrow b_1 = 3a^2$$

$$\rightarrow b_0 = -a^3$$

$$4) \frac{px^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

$$\checkmark \quad px^2 + qx + r + \frac{A}{x-a} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2bx + c}$$

$$\rightarrow c_4 = q + b_2p$$

$$\rightarrow c_3 = r + b_2q + b_1p$$

$$\rightarrow c_2 = a_2 + b_2r + b_1q + b_0p$$

$$\rightarrow c_1 = a_1 + b_1r + b_0q$$

$$\rightarrow c_0 = a_0 + b_0r$$

$$\rightarrow a_2 = B + A$$

$$\rightarrow a_1 = C - Ba + 2bA$$

$$\rightarrow a_0 = -Ca + Ac$$

$$\rightarrow b_2 = 2b - a$$

$$\rightarrow b_1 = c - 2ba$$

$$\rightarrow b_0 = -ac$$

$$\rightarrow c = b^2 + 1; b^2 + 2; b^2 + 3; b^2 + 4$$

$$\rightarrow b = 0; -1; 1; -2; 2$$

# Часть III

## Комплексные числа



20. Вычислить  $\frac{z_1(z_2 + z_3)}{z_2}$ .

1)  $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, z_3 = a_3a_2 - b_3b_2 + i(a_3b_2 + b_3a_2)$

✓  $a_1 + a_1a_3 - b_1b_3 + i(b_1 + a_1b_3 + b_1a_3)$

→  $a_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $b_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $a_2 = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b_2 = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_3 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $b_3 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

21. Найти произведение и частное  $z_1 z_2$  и  $z_1/z_2$  в алгебраической форме. Затем записать комплексные числа в тригонометрической форме и проверить полученный результат.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$1) \quad z_1 = a + ai, \quad z_2 = b + bi$$

$$z_1 z_2 = 2abi, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{b},$$

$$\checkmark \quad z_1 = a\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2) \quad z_1 = a - ai, \quad z_2 = b + bi$$

$$z_1 z_2 = 2ab, \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{a}{b}i,$$

$$\checkmark \quad z_1 = a\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$3) \quad z_1 = -a + ai, \quad z_2 = b + bi$$

$$z_1 z_2 = -2ab, \quad \frac{z_1}{z_2} = 2\frac{a}{b}i,$$

$$\checkmark \quad z_1 = a\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$4) \quad z_1 = -a - ai, \quad z_2 = b + bi$$

$$z_1 z_2 = -2abi, \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{a}{b},$$

$$\checkmark \quad z_1 = a\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$5) \quad z_1 = a - ai, \quad z_2 = -b - bi$$

$$z_1 z_2 = -2ab, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{b}i,$$

$$\checkmark \quad z_1 = a\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$z_2 = b\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

**22.** Построить на комплексной плоскости следующие множества точек

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$1) |z|^2 + 2a\Re z \leq a^2$$

$$\checkmark (x+a)^2 + y^2 \leq 2a^2 \text{ внутренность круга с центром в т. } (-a; 0), R = a\sqrt{2}$$

$$2) \Im z^2 = 2a, z = x + iy$$

$$\checkmark y = \frac{a}{x}, \text{ ветви в I и III четвертях гиперболы}$$

$$3) \Re z^2 = 2a, z = x + iy$$

$$\checkmark \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a} = 1, \text{ гипербола равнобокая}$$

$$4) \Im \frac{1}{z} = \frac{1}{2a}$$

$$\checkmark x^2 + (y-a)^2 = a^2 \text{ окружность с центром в т. } (0; a), R = a$$

$$5) \Re \frac{1}{z} = \frac{1}{2a}$$

$$\checkmark (x-2)^2 + y^2 = a^2 \text{ окружность с центром в т. } (a; 0), R = a$$

$$6) \Im \frac{z-a}{z+a} \leq 0$$

$$\checkmark y \leq 0 \text{ нижняя полуокружность, включая действительную полуось}$$

$$7) \Re \frac{z-a}{z+a} > 0$$

$$\checkmark x^2 + y^2 > a^2 \text{ внешность круга с центром в т. } (0; 0), R = a$$

$$8) \left| \frac{z-a}{z+a} \right| \leq 1$$

$$\checkmark x \geq 0 \text{ правая полуокружность, включая мнимую ось}$$

$$9) |z| = \Re(a+z)$$

$$\checkmark y^2 = 2a \left( x + \frac{a}{2} \right) \text{ парабола, ветви вправо, с вершиной в т. } \left( -\frac{a}{2}; 0 \right)$$

$$10) |\bar{z}| = \Im(a+z)$$

$$\checkmark x^2 = 2a \left( y + \frac{a}{2} \right) \text{ парабола, ветви вверх, с вершиной в т. } \left( 0; -\frac{a}{2} \right)$$

$$11) 0 \leq \Re ai\bar{z} \leq a$$

$$\checkmark 0 \leq y \leq a \text{ полоса, ограниченная прямыми } y = 0, y = 1$$

$$12) \quad 0 \leq \Re a i \bar{z} \leq 1$$

✓  $0 \leq x \leq 1$  полоса, ограниченная прямыми  $x = 0, x = 1$

**23.** Решить уравнение

$$\Rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6$$

$$1) |z| - z = a + ai$$

$$\checkmark \quad z = -ai$$

$$2) |z| + z = a + ai$$

$$\checkmark \quad z = ai$$

$$3) |z| - z = a + a\sqrt{3}i$$

$$\checkmark \quad z = a - \sqrt{3}ai$$

$$4) |z| + z = a + a\sqrt{3}i$$

$$\checkmark \quad z = -a + \sqrt{3}ai$$

$$5) |z| - az = -\sqrt{a^2 - 1}i$$

$$\checkmark \quad z = \pm 1 - \sqrt{a^2 - 1}i$$

24. Возвести комплексное число в 200 степень и найти корень 3-ей степени. Построить корни на комплексной плоскости.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

1)  $z = ai$

$$z^{200} = a^{200}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{a} \left( \cos \frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} \right), k = \overline{0, 2}$$

✓  $\alpha_0 = \sqrt[3]{a} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{a} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{a} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{a} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[3]{a} \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{a} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i\sqrt[3]{a}$$

2)  $z = -ai$

$$z^{200} = a^{200}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{a} \left( \cos \frac{-\pi/2 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-\pi/2 + 2\pi k}{3} \right), k = \overline{0, 2}$$

✓  $\alpha_0 = \sqrt[3]{a} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt[3]{a} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{a} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \sqrt[3]{a} i$$

$$\alpha_2 = \sqrt[3]{a} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{a} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

**25.** Возвести комплексное число в 200 степень и найти корни 4-ой степени.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

1)  $z = a + ai$

$$z^{200} = a^{200} 2^{100}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{\pi/4 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi/4 + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0, 3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right)$$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right)$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \alpha_2 &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right) = \\ &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( -\frac{15\pi}{16} \right) + i \sin \left( -\frac{15\pi}{16} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right) = \\ &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( -\frac{7\pi}{16} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{16} \right) \right) \end{aligned}$$

2)  $z = a - ai$

$$z^{200} = a^{200} 2^{100}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{-\pi/4 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{-\pi/4 + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0, 3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{16} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{16} \right) \right)$$

$$\checkmark \quad \alpha_1 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{16} + i \sin \frac{7\pi}{16} \right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{15\pi}{16} + i \sin \frac{15\pi}{16} \right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} i$$

3)  $z = -a + ai$

$$z^{200} = a^{200} 2^{100}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0, 3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16} \right)$$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16} \right)$$

✓

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16} \right) = \\ &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( -\frac{13\pi}{16} \right) + i \sin \left( -\frac{13\pi}{16} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{27\pi}{16} + i \sin \frac{27\pi}{16} \right) = \\ &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{16} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{16} \right) \right) \end{aligned}$$

4)  $z = -a - ai$

$$z^{200} = a^{200} 2^{100}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{-3\pi/4 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{-3\pi/4 + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0, 3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{16} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{16} \right) \right)$$

✓

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{16} + i \sin \frac{5\pi}{16} \right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{15\pi}{16} + i \sin \frac{15\pi}{16} \right)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{21\pi}{16} + i \sin \frac{21\pi}{16} \right) = \\ &= \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( -\frac{11\pi}{16} \right) + i \sin \left( -\frac{11\pi}{16} \right) \right) \end{aligned}$$



5)  $z = a + i\sqrt{3}a$

$$z^{200} = 2a^{200} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{\pi/3 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi/3 + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0, 3}$$

✓  $\alpha_0 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \left( -\frac{11\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{11\pi}{12} \right) \right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

6)  $z = a - i\sqrt{3}a$

$$z^{200} = 2a^{200} \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{-\pi/3 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{-\pi/3 + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0, 3}$$

✓  $\alpha_0 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \right)$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \left( -\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

7)  $z = -a + i\sqrt{3}a$

$$z^{200} = (2a)^{200} \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{2\pi/3 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi/3 + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0, 3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)$$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{8\pi}{12} + i \sin \frac{8\pi}{12} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$\checkmark = \sqrt[4]{2a} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{14\pi}{12} + i \sin \frac{14\pi}{12} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) =$$

$$= \sqrt[4]{2a} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{20\pi}{12} + i \sin \frac{20\pi}{12} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) =$$

$$= \sqrt[4]{2a} \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

8)  $z = -a - i\sqrt{3}a$

$$z^{200} = (2a)^{200} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{-2\pi/3 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{-2\pi/3 + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0, 3}$$

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right)$$

$$\checkmark \alpha_1 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)$$

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{2a} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2a} \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Часть IV

Линейная алгебра

**26.** Найти линейные комбинации заданных матриц:

$$\Rightarrow k = -2; -3; 2; 5$$

$$\Rightarrow l = -5; -4; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_{11} = -7; -4; -1; 2; 5$$

$$\Rightarrow a_{12} = -6; -3; 0; 3; 6$$

$$\Rightarrow a_{21} = -5; -2; 1; 4; 7$$

$$\Rightarrow a_{22} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow b_{11} = -7; -4; -1; 2; 5$$

$$\Rightarrow b_{12} = -6; -3; 0; 3; 6$$

$$\Rightarrow b_{21} = -5; -2; 1; 4; 7$$

$$\Rightarrow b_{22} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$1) \quad kA + lB, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} ka_{11} + lb_{11} & ka_{12} + lb_{12} \\ ka_{21} + lb_{21} & ka_{22} + lb_{22} \\ ka_{31} + lb_{31} & ka_{32} + lb_{32} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{31} = -5; -2; 1; 4; 7$$

$$\rightarrow a_{32} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_{31} = -5; -2; 1; 4; 7$$

$$\rightarrow b_{32} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$2) \quad kA + lB, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} ka_{11} + lb_{11} & ka_{12} + lb_{12} & ka_{13} + lb_{13} \\ ka_{21} + lb_{21} & ka_{22} + lb_{22} & ka_{23} + lb_{23} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -2; 1; 4; 7$$

$$\rightarrow a_{23} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_{13} = -5; -2; 1; 4; 7$$

$$\rightarrow b_{23} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$3) \quad kA + lB, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} ka_{11} + lb_{11} & ka_{12} + lb_{12} & ka_{13} + lb_{13} \\ ka_{21} + lb_{21} & ka_{22} + lb_{22} & ka_{23} + lb_{23} \\ ka_{31} + lb_{31} & ka_{32} + lb_{32} & ka_{33} + lb_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -2; 1; 4; 7$$

$$\rightarrow a_{23} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_{13} = -5; -2; 1; 4; 7$$

- $b_{23} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$
- $a_{31} = -5; -2; 1; 4; 7$
- $a_{32} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$
- $b_{31} = -5; -2; 1; 4; 7$
- $b_{32} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$
- $a_{33} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$
- $b_{33} = -5; -2; 1; 4; 7$

27. Вычислить произведение

$$1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} m(ae + bf) & n(ae + bf) \\ m(ce + df) & n(ce + df) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a = 2; 4$$

$$\rightarrow b = -5; 0$$

$$\rightarrow c = -3; 2$$

$$\rightarrow d = 1; 3$$

$$\rightarrow e = 0; -2$$

$$\rightarrow f = -1; 1$$

$$\rightarrow m = -4; 4$$

$$\rightarrow n = -1; 3$$

28. Вычислить

$$1) \begin{pmatrix} 1+la & a \\ k+l+ka & 1+ka \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^T$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} 1+ka-e & -a-g \\ -k-l-lka-f & 1+la-h \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = -5; 1$$

$$\rightarrow l = -3; 2$$

$$\rightarrow e = 0; 6$$

$$\rightarrow f = -1; 1$$

$$\rightarrow g = -4; 5$$

$$\rightarrow h = -1; 2$$

29. Найти произведение  $AB$ .

$$\Rightarrow a_{11} = -3; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_{12} = -5; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_{13} = -4; 1; 3$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; 0; 5$$

$$\Rightarrow a_{22} = -1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_{23} = -2; -3; -4; 1; 5$$

$$\Rightarrow b_{11} = -3; 0; 2$$

$$\Rightarrow b_{12} = -5; 3; 4$$

$$\Rightarrow b_{21} = -4; 1; 3$$

$$\Rightarrow b_{22} = -2; 0; 5$$

$$\Rightarrow b_{31} = -1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow b_{32} = -2; -3; -4; 1; 5$$

$$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$\rightarrow p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$\rightarrow p_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$

$$\rightarrow p_{14} = a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34}$$

$$\rightarrow p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

$$\rightarrow p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$

$$\rightarrow p_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$

$$\rightarrow p_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34}$$

$$\rightarrow b_{13} = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b_{14} = -5; -4; -2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b_{23} = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b_{24} = -3; -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b_{34} = -5; -4; -2; 3; 4; 5$$



$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

- $p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$
- $p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$
- $p_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$
- $p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$
- $p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$
- $p_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$
- $p_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$
- $p_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$
- $p_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$
- $a_{31} = -3; -1; 0; 1; 2$
- $a_{32} = -5; -4; -2; 3; 4; 5$
- $a_{33} = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$
- $b_{13} = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$
- $b_{23} = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$
- $b_{33} = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{pmatrix}$$

- $p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$
- $p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$
- $p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$
- $p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$
- $p_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$
- $p_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$
- $a_{31} = -3; -1; 0; 1; 2$
- $a_{32} = -5; -4; -2; 3; 4; 5$
- $a_{33} = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

30. Найти  $AB$ .

$$\Rightarrow a_{11} = -3; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_{12} = -5; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_{13} = -4; 1; 3$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; 0; 5$$

$$\Rightarrow a_{22} = -1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_{23} = -2; -3; -4; 1; 5$$

$$1) A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad B = (b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4)$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 \\ a_4 b_1 & a_4 b_2 & a_4 b_3 & a_4 b_4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_1 = -3; 0; 2$$

$$\rightarrow a_2 = -5; 3; 4$$

$$\rightarrow a_3 = -4; 1; 3$$

$$\rightarrow a_4 = -2; 0; 5$$

$$\rightarrow b_1 = -1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_2 = -2; -3; -4; 1; 5$$

$$\rightarrow b_3 = -5; 3; 4$$

$$\rightarrow b_4 = -2; 0; 5$$

$$2) A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)$$

$$\rightarrow a_1 = -3; 0; 2$$

$$\rightarrow a_2 = -5; 3; 4$$

$$\rightarrow a_3 = -4; 1; 3$$

$$\rightarrow a_4 = -2; 0; 5$$

$$\rightarrow b_1 = -1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_2 = -2; -3; -4; 1; 5$$

$$\rightarrow b_3 = -5; 3; 4$$

$$\rightarrow b_4 = -2; 0; 5$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; 0; 2$$

$$\rightarrow a_{12} = -5; 3; 4$$

$$\rightarrow a_{13} = -4; 1; 3$$

$$\rightarrow a_{21} = -2; 0; 5$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; 3; 4$$

$$\rightarrow a_{23} = -4; 1; 3$$

$$\rightarrow b_1 = -1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_2 = -2; -3; -4; 1; 5$$

$$\rightarrow b_3 = -5; 3; 4$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} a_1b_{11} + a_2b_{21} & a_1b_{12} + a_2b_{22} & a_1b_{13} + a_2b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_1 = -3; 0; 2$$

$$\rightarrow a_2 = -5; 3; 4$$

$$\rightarrow b_{11} = -4; 1; 3$$

$$\rightarrow b_{12} = -2; 0; 5$$

$$\rightarrow b_{13} = -1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_{21} = -2; -3; -4; 1; 5$$

$$\rightarrow b_{22} = -5; 3; 4$$

$$\rightarrow b_{23} = -2; 0; 5$$

31. Найти  $AB$  и  $BA$ .

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = -9; -6; -4; -2; -1; 3; 4; 5; 7; 9$$

$$\rightarrow a_{22} = -8; -7; -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6; 8$$

$$\rightarrow b_{22} = -9; -6; -4; -2; -1; 3; 4; 5; 7; 9$$

$$\rightarrow b_{11} = -8; -7; -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6; 8$$

$$\rightarrow a_{12} = -3; 0; 1; 4$$

$$\rightarrow a_{21} = -2; -1; 0; 2$$

$$\rightarrow b_{21} = -3; 0; 1; 4$$

$$\rightarrow b_{12} = -2; -1; 0; 2$$

**32.** Найти  $AB$  и  $BA$ .

$$\Rightarrow a_{11} = -4; -1; 3$$

$$\Rightarrow a_{12} = -5; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_{13} = -3; 0; 1$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; 0; 3$$

$$\Rightarrow a_{22} = -3; 1; 4$$

$$\Rightarrow a_{23} = -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_{31} = -4; 0; 3$$

$$\Rightarrow a_{32} = -2; 0; 1$$

$$\Rightarrow a_{33} = -2; 1; 5$$

$$\Rightarrow b_{11} = -4; -1; 3$$

$$\Rightarrow b_{12} = -5; 0; 2$$

$$\Rightarrow b_{13} = -3; 0; 1$$

$$\Rightarrow b_{21} = -2; 0; 3$$

$$\Rightarrow b_{22} = -3; 1; 4$$

$$\Rightarrow b_{23} = -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow b_{31} = -4; 0; 3$$

$$\Rightarrow b_{32} = -2; 0; 1$$

$$\Rightarrow b_{33} = -2; 1; 5$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad AB = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$\rightarrow p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$\rightarrow p_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$

$$\rightarrow p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

$$\rightarrow p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$

$$\rightarrow p_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$

$$\rightarrow p_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$$

$$\rightarrow p_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$$

$$\rightarrow p_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$$

$$\rightarrow q_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}$$

$$\rightarrow q_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32}$$

$$\rightarrow q_{13} = b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33}$$

$$\rightarrow q_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31}$$

$$\rightarrow q_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}$$

$$\rightarrow q_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33}$$

$$\rightarrow q_{31} = b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31}$$

$$\rightarrow q_{32} = b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32}$$

$$\rightarrow q_{33} = b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33}$$

**33.** Найти произведение трёх матриц.

$$\Rightarrow a_{11} = -4; -2; -1; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{22} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a_{12} = -3; 0; 1; 4$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow b_{22} = -4; -2; -1; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow b_{11} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b_{21} = -3; 0; 1; 4$$

$$\Rightarrow b_{12} = -2; -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow c_{11} = -4; -2; -1; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow c_{22} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{12} = -3; 0; 1; 4$$

$$\Rightarrow c_{21} = -2; -1; 0; 2$$

$$1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow q_{11} = p_{11}c_{11} + p_{12}c_{21}$$

$$\rightarrow q_{12} = p_{11}c_{12} + p_{12}c_{22}$$

$$\rightarrow q_{21} = p_{21}c_{11} + p_{22}c_{21}$$

$$\rightarrow q_{22} = p_{21}c_{12} + p_{22}c_{22}$$

$$\rightarrow p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$\rightarrow p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$\rightarrow p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$$

$$\rightarrow p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

34. Найти произведение трёх матриц.

$$\Rightarrow a_{11} = -4; -1; 3$$

$$\Rightarrow a_{12} = -5; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_{13} = -3; 0; 1$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; 0; 3$$

$$\Rightarrow a_{22} = -3; 1; 4$$

$$\Rightarrow a_{23} = -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_{31} = -4; 0; 3$$

$$\Rightarrow a_{32} = -2; 0; 1$$

$$\Rightarrow a_{33} = -2; 1; 5$$

$$\Rightarrow b_{11} = -4; -1; 3$$

$$\Rightarrow b_{12} = -5; 0; 2$$

$$\Rightarrow b_{13} = -3; 0; 1$$

$$\Rightarrow b_{21} = -2; 0; 3$$

$$\Rightarrow b_{22} = -3; 1; 4$$

$$\Rightarrow b_{23} = -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow b_{31} = -4; 0; 3$$

$$\Rightarrow b_{32} = -2; 0; 1$$

$$\Rightarrow b_{33} = -2; 1; 5$$

$$\Rightarrow c_{11} = -4; -1; 3$$

$$\Rightarrow c_{12} = -5; 0; 2$$

$$\Rightarrow c_{13} = -3; 0; 1$$

$$\Rightarrow c_{21} = -2; 0; 3$$

$$\Rightarrow c_{22} = -3; 1; 4$$

$$\Rightarrow c_{23} = -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow c_{31} = -4; 0; 3$$

$$\Rightarrow c_{32} = -2; 0; 1$$

$$\Rightarrow c_{33} = -2; 1; 5$$

$$1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow q_{11} = p_{11}c_{11} + p_{12}c_{21} + p_{13}c_{31}$$

$$\rightarrow q_{12} = p_{11}c_{12} + p_{12}c_{22} + p_{13}c_{32}$$

$$\rightarrow q_{13} = p_{11}c_{13} + p_{12}c_{23} + p_{13}c_{33}$$

$$\rightarrow q_{21} = p_{21}c_{11} + p_{22}c_{21} + p_{23}c_{31}$$



$$\begin{aligned}
\rightarrow q_{22} &= p_{21}c_{12} + p_{22}c_{22} + p_{23}c_{32} \\
\rightarrow q_{23} &= p_{21}c_{13} + p_{22}c_{23} + p_{23}c_{33} \\
\rightarrow q_{31} &= p_{31}c_{11} + p_{32}c_{21} + p_{33}c_{31} \\
\rightarrow q_{32} &= p_{31}c_{12} + p_{32}c_{22} + p_{33}c_{32} \\
\rightarrow q_{33} &= p_{31}c_{13} + p_{32}c_{23} + p_{33}c_{33} \\
\rightarrow p_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\
\rightarrow p_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\
\rightarrow p_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\
\rightarrow p_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\
\rightarrow p_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\
\rightarrow p_{23} &= a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\
\rightarrow p_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \\
\rightarrow p_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\
\rightarrow p_{33} &= a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}
\end{aligned}$$

35. Найти  $f(A)$ , если:

$$\Rightarrow a_{11} = -4; -2; -1; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{22} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a_{12} = -3; 0; 1; 4$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow a = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow b = -2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = -5; -4; -3; -1; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow d = -7; -6; -5; -4; -3; -1; 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$1) f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_{11} = aq_{11} + bp_{11} + ca_{11} + de_{11}$$

$$\rightarrow x_{12} = aq_{12} + bp_{12} + ca_{12} + de_{12}$$

$$\rightarrow x_{21} = aq_{21} + bp_{21} + ca_{21} + de_{21}$$

$$\rightarrow x_{22} = aq_{22} + bp_{22} + ca_{22} + de_{22}$$

$$\rightarrow q_{11} = p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21}$$

$$\rightarrow q_{12} = p_{11}a_{12} + p_{12}a_{22}$$

$$\rightarrow q_{21} = p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21}$$

$$\rightarrow q_{22} = p_{21}a_{12} + p_{22}a_{22}$$

$$\rightarrow p_{11} = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}$$

$$\rightarrow p_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}$$

$$\rightarrow p_{21} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}$$

$$\rightarrow p_{22} = a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}$$

$$\rightarrow e_{11} = 1$$

$$\rightarrow e_{12} = 0$$

$$\rightarrow e_{21} = 0$$

$$\rightarrow e_{22} = 1$$

36. Найти  $f(A)$ , если:

$$\Rightarrow a_{11} = -4; -1; 3$$

$$\Rightarrow a_{12} = -5; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_{13} = -3; 0; 1$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; 0; 3$$

$$\Rightarrow a_{22} = -3; 1; 4$$

$$\Rightarrow a_{23} = -1; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_{31} = -4; 0; 3$$

$$\Rightarrow a_{32} = -2; 0; 1$$

$$\Rightarrow a_{33} = -2; 1; 5$$

$$\Rightarrow a = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow b = -2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = -5; -4; -3; -1; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow d = -7; -6; -5; -4; -3; -1; 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\Rightarrow e_{11} = 1$$

$$\Rightarrow e_{12} = 0$$

$$\Rightarrow e_{13} = 0$$

$$\Rightarrow e_{21} = 0$$

$$\Rightarrow e_{22} = 1$$

$$\Rightarrow e_{23} = 0$$

$$\Rightarrow e_{31} = 0$$

$$\Rightarrow e_{32} = 0$$

$$\Rightarrow e_{33} = 1$$

$$1) f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_{11} = aq_{11} + bp_{11} + ca_{11} + de_{11}$$

$$\rightarrow x_{12} = aq_{12} + bp_{12} + ca_{12} + de_{12}$$

$$\rightarrow x_{13} = aq_{13} + bp_{13} + ca_{13} + de_{13}$$

$$\rightarrow x_{21} = aq_{21} + bp_{21} + ca_{21} + de_{21}$$

$$\rightarrow x_{22} = aq_{22} + bp_{22} + ca_{22} + de_{22}$$

$$\rightarrow x_{23} = aq_{23} + bp_{23} + ca_{23} + de_{23}$$

$$\rightarrow x_{31} = aq_{31} + bp_{31} + ca_{31} + de_{31}$$

$$\rightarrow x_{32} = aq_{32} + bp_{32} + ca_{32} + de_{32}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow x_{33} = aq_{33} + bp_{33} + ca_{33} + de_{33} \\
&\rightarrow q_{11} = p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21} + p_{13}a_{31} \\
&\rightarrow q_{12} = p_{11}a_{12} + p_{12}a_{22} + p_{13}a_{32} \\
&\rightarrow q_{13} = p_{11}a_{13} + p_{12}a_{23} + p_{13}a_{33} \\
&\rightarrow q_{21} = p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21} + p_{23}a_{31} \\
&\rightarrow q_{22} = p_{21}a_{12} + p_{22}a_{22} + p_{23}a_{32} \\
&\rightarrow q_{23} = p_{21}a_{13} + p_{22}a_{23} + p_{23}a_{33} \\
&\rightarrow q_{31} = p_{31}a_{11} + p_{32}a_{21} + p_{33}a_{31} \\
&\rightarrow q_{32} = p_{31}a_{12} + p_{32}a_{22} + p_{33}a_{32} \\
&\rightarrow q_{33} = p_{31}a_{13} + p_{32}a_{23} + p_{33}a_{33} \\
&\rightarrow p_{11} = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} \\
&\rightarrow p_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} \\
&\rightarrow p_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} \\
&\rightarrow p_{21} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31} \\
&\rightarrow p_{22} = a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{32} \\
&\rightarrow p_{23} = a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} \\
&\rightarrow p_{31} = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31} \\
&\rightarrow p_{32} = a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32} \\
&\rightarrow p_{33} = a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}a_{33}
\end{aligned}$$

37. Вычислить произведения  $AA^T$  и  $A^T A$ , если:

1)  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$

✓  $AA^T = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2), \quad A^T A = \begin{pmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 & a_1 a_5 \\ a_2 a_1 & a_2 a_2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 & a_2 a_5 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3 a_3 & a_3 a_4 & a_3 a_5 \\ a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 & a_4 a_4 & a_4 a_5 \\ a_5 a_1 & a_5 a_2 & a_5 a_3 & a_5 a_4 & a_5 a_5 \end{pmatrix}$

→  $a_1 = -4; -1; 3$

→  $a_2 = -5; -2; 2$

→  $a_3 = -3; 4; 1$

→  $a_4 = -2; 0; 3$

→  $a_5 = -3; 1; 4$

2)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$

✓  $AA^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} + a_{14}a_{14} & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} + a_{14}a_{24} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} + a_{24}a_{14} & a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{23} + a_{24}a_{24} \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} \\ a_{14}a_{11} + a_{24}a_{21} & a_{14}a_{12} + a_{24}a_{22} \end{pmatrix}$

→  $a_{11} = -4; -1; 3$

→  $a_{12} = -5; 0; 2$

→  $a_{13} = -3; 3; 1$

→  $a_{14} = -2; -1; 3$

→  $a_{21} = -3; 1; 4$

→  $a_{22} = -5; -1; 2$

→  $a_{23} = -3; 2; 1$

→  $a_{24} = -2; 0; 3$

3)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

✓  $AA^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} & a_{31}a_{31} + a_{32}a_{32} \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} & a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} \end{pmatrix}$

→  $a_{11} = -4; -1; 3$

→  $a_{12} = -5; 0; 2$

→  $a_{21} = -3; 1; 4$

→  $a_{22} = -5; -1; 2$

→  $a_{31} = -3; 3; 1$

→  $a_{32} = -2; -1; 3$

**38.** Найти след матриц  $AB$  и  $BA$  (сумму диагональных элементов), если

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ a & c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & c \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad tr(AB) = tr(BA) = b + a + c^2 - 2$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4$$

39. Вычислить определитель.

$$1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\checkmark \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = -7; -5; -3; -2; -1; 2; 3; 5; 8$$

$$\rightarrow a_{12} = -8; -6; -5; -3; 0; 1; 4; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{21} = -7; -5; -4; -3; -1; 2; 5; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -2; -1; 1; 3; 4; 7$$

40. Вычислить определитель.

$$1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\checkmark a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\rightarrow a_{11} = -5; -3; -2; -1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{12} = -3; 0; 1; 4$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -4; -1; 1; 3; 4$$

$$\rightarrow a_{21} = -3; -1; 0; 1; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{22} = -3; -2; 1; 4$$

$$\rightarrow a_{23} = -4; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{31} = -4; -3; -1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{32} = -3; -2; 1; 4$$

$$\rightarrow a_{33} = -5; -3; -2; 3; 4$$



41. Вычислить определитель.

$$1) \begin{vmatrix} ap+d & a & ar+B & as+dk+e \\ amp+bp+dm+C & am+b & amr+br+Bm & ams+bs+dkm+em+Ck \\ Ap & A & Ar & As \\ anp+cp+dn+f & an+c & anr+cr+Bn & ans+cs+dkn+en+fk+D \end{vmatrix}$$

✓  $ABCD$

$$\rightarrow A = -3; 4; 2; 3; -2$$

$$\rightarrow B = 1; -1; 3; -2$$

$$\rightarrow C = 2; 4; -2$$

$$\rightarrow D = 5; -3$$

$$\rightarrow a = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b = 3; 4$$

$$\rightarrow c = -2; 5$$

$$\rightarrow d = 7$$

$$\rightarrow e = 3$$

$$\rightarrow f = -2$$

$$\rightarrow k = -3; -2; -1; 2; 5$$

$$\rightarrow m = 2$$

$$\rightarrow n = -3$$

$$\rightarrow p = 2$$

$$\rightarrow r = -2$$

$$\rightarrow s = 5$$

42. Вычислить определитель.

$$1) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \\ o & p & q & r \end{vmatrix}$$

$$\checkmark \quad aA - bB + cC - dD$$

$$\rightarrow A = f(mr - nq) - g(lr - pn) + h(lq - pm)$$

$$\rightarrow B = e(mr - nq) - g(kr - on) + h(kq - om)$$

$$\rightarrow C = e(lr - pn) - f(kr - on) + h(kp - ol)$$

$$\rightarrow D = e(lq - pm) - f(kq - om) + g(kp - ol)$$

$$\rightarrow a = -2; \quad 1$$

$$\rightarrow b = 0; \quad 2; \quad 3$$

$$\rightarrow c = -2; \quad -1$$

$$\rightarrow d = -3; \quad 2; \quad 1$$

$$\rightarrow e = -2; \quad 4$$

$$\rightarrow f = -1; \quad 0; \quad 3$$

$$\rightarrow g = -2; \quad 1; \quad 2$$

$$\rightarrow h = -1; \quad 3$$

$$\rightarrow k = -2; \quad 0; \quad 3$$

$$\rightarrow l = -2; \quad 1$$

$$\rightarrow m = 0; \quad 1; \quad 2$$

$$\rightarrow n = -2; \quad 3$$

$$\rightarrow o = -1; \quad 2$$

$$\rightarrow p = -3; \quad 0; \quad 1$$

$$\rightarrow q = 1; \quad 2; \quad 3$$

$$\rightarrow r = -2; \quad -1$$

43. Вычислить  $\det A - \det B$ , если

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

✓ 0

→  $a = 2; 3; 4; 5$

→  $b = 2; 3; 4; 5$

→  $c = 2; 3; 4; 5$

44. Решить систему уравнений

$$1) \begin{cases} ax + by = aX + bY, \\ cx + dy = cX + dY \end{cases}$$

$$\checkmark \quad x = X; \quad y = Y$$

$$\rightarrow X = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow Y = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a = k_b k_c$$

$$\rightarrow b = k_b l_b$$

$$\rightarrow c = k_c l_c$$

$$\rightarrow d = k + l_b l_c$$

$$\rightarrow k = -1; 1; -2; 2; -3; 3; -4; 4; -5; 5$$

$$\rightarrow k_b = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_b = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k_c = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_c = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

45. Решить систему уравнений.

$$1) \begin{cases} ax + by + cz = aX + bY + cZ, \\ amx + (bm + e)y + (cm + f)z = amX + (bm + e)Y + (cm + f)Z, \\ anx + (bn + le)y + (cn + fl + h)z = anX + (bn + le)Y + (cn + fl + h)Z \end{cases}$$

$$\checkmark \quad x = X; \quad y = Y; \quad z = Z$$

$$\rightarrow a = -1; \quad 2; \quad 1$$

$$\rightarrow e = -1; \quad 1$$

$$\rightarrow h = -1; \quad 1; \quad 2$$

$$\rightarrow X = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4$$

$$\rightarrow Y = -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4$$

$$\rightarrow Z = -1; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4$$

$$\rightarrow m = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2$$

$$\rightarrow n = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2$$

$$\rightarrow l = -1; \quad 1$$

$$\rightarrow b = -3; \quad -2; \quad 2; \quad 3$$

$$\rightarrow c = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2$$

$$\rightarrow f = -3; \quad -2; \quad 0; \quad 2; \quad 3$$

46.

$$\Rightarrow a_{11} = a$$

$$\Rightarrow a_{12} = b$$

$$\Rightarrow a_{13} = c$$

$$\Rightarrow b_1 = aX + bY + cZ$$

$$\Rightarrow a_{21} = am$$

$$\Rightarrow a_{22} = bm + e$$

$$\Rightarrow a_{23} = cm + f$$

$$\Rightarrow b_2 = amX + (bm + e)Y + (cm + f)Z$$

$$\Rightarrow a_{31} = an$$

$$\Rightarrow a_{32} = bn + le$$

$$\Rightarrow a_{33} = cn + fl + h$$

$$\Rightarrow b_3 = anX + (bn + le)Y + (cn + fl + h)Z$$

$$\Rightarrow a = 2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow e = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow h = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow X = 200; 250; 300; 350; 400; 450; 500$$

$$\Rightarrow Y = 200; 250; 300; 350; 400; 450; 500$$

$$\Rightarrow Z = 200; 250; 300; 350; 400; 450; 500$$

$$\Rightarrow m = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow n = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow l = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow c = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow f = 2; 3$$

1)

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, усл. ед.			Расход сырья за 1 день, усл. ед
	1	2	3	
1	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$b_1$
2	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$b_2$
3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$b_3$

✓  $X, Y, Z$

47. Решить систему уравнений.

$$1) \begin{cases} (a + en)x + fny + (b + gn)z = (a + en)X + fnY + (b + gn)Z, \\ (c + em)x + fmy + (d + gm)z = (c + em)X + fmY + (d + gm)Z, \\ ex + fy + gz = eX + fY + gZ \end{cases}$$

$$\checkmark \quad x = X; \quad y = Y; \quad z = Z$$

$$\rightarrow n = -2; \quad 3$$

$$\rightarrow m = -1; \quad 5$$

$$\rightarrow X = -1; \quad 1; \quad 0$$

$$\rightarrow Y = -2; \quad 1$$

$$\rightarrow Z = 0; \quad -1$$

$$\rightarrow a = 2; \quad -2; \quad 1; \quad -1$$

$$\rightarrow b = 2; \quad -2$$

$$\rightarrow c = 3; \quad -3$$

$$\rightarrow d = -4; \quad 4$$

$$\rightarrow e = -4; \quad 2; \quad 3$$

$$\rightarrow f = 3; \quad -2$$

$$\rightarrow g = -2; \quad 1; \quad 0$$

48. Решить систему уравнений

$$1) \begin{cases} ax + by + cz = A, \\ ex + fy + gz = B, \\ (an + el)x + (bn + fl)y + (cn + gl)z = An + Bl + C \end{cases}$$

✓  $\emptyset$

$$\rightarrow a = -1; 2; 1$$

$$\rightarrow b = -3; 2$$

$$\rightarrow c = 2; 3$$

$$\rightarrow e = 1; 2$$

$$\rightarrow f = -1; -2; 0$$

$$\rightarrow g = -3; 1$$

$$\rightarrow n = 1; -3$$

$$\rightarrow l = 2; 3$$

$$\rightarrow A = 3; -2$$

$$\rightarrow B = -1; -3$$

$$\rightarrow C = -1; -2; 1; 2; 3$$



49. Решить систему уравнений

$$1) \begin{cases} ax + by + (-aA_1 - bA_2)z = aB_1 + bB_2, \\ ex + fy + (-eA_1 - fA_2)z = eB_1 + fB_2, \\ (ka + le)x + (kb + lf)y + (k(-aA_1 - bA_2) + l(-eA_1 - fA_2))z = k(aB_1 + bB_2) + l(eB_1 + fB_2) \end{cases}$$

$$\checkmark \quad x = A_1\alpha + B_1, \quad y = A_2\alpha + B_2, \quad z = \alpha$$

$$\rightarrow a = -1; \quad 2; \quad 1$$

$$\rightarrow b = -3; \quad 2$$

$$\rightarrow e = 1; \quad 2$$

$$\rightarrow f = -1; \quad 0$$

$$\rightarrow k = 1; \quad -3$$

$$\rightarrow l = 2; \quad 3$$

$$\rightarrow A_1 = 3; \quad -2$$

$$\rightarrow A_2 = 2; \quad -1$$

$$\rightarrow B_1 = -1; \quad -3$$

$$\rightarrow B_2 = 1; \quad 1$$

50. Решить систему уравнений

$$1) \begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ ex + fy + gz = 0, \\ (an + el)x + (bn + fl)y + (cn + gl)z = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad x = -\frac{ag + cbe - cfa}{abe - afa}z, y = \frac{ag}{be - fa}z, z \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow n = -2; 3$$

$$\rightarrow a = -1; 2; 1$$

$$\rightarrow b = -3; 2$$

$$\rightarrow c = 2; 3$$

$$\rightarrow e = 1; 2$$

$$\rightarrow f = -1; 0$$

$$\rightarrow g = -3; 1$$

$$\rightarrow n = 1; -3$$

$$\rightarrow l = 2; 3$$

51. Решить систему уравнений

$$1) \begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ ex + fy + gz = 0, \\ (an + el)x + (bn + fl)y + cnz = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \{(0, 0, 0)\}$$

$$\rightarrow a = -1; 2; 1$$

$$\rightarrow b = -3; 2$$

$$\rightarrow c = 2; 3$$

$$\rightarrow e = 1; 2$$

$$\rightarrow f = -1; 0$$

$$\rightarrow g = -3; 1$$

$$\rightarrow n = 1; -3$$

$$\rightarrow l = 2; 3$$

52. Найти фундаментальную систему решений однородной системы ЛАУ

$$1) \begin{cases} ax_1 + bx_2 + ax_3 + 2ax_4 = 0 \\ cx_1 + \frac{1+bc}{2}x_2 + gx_3 + hx_4 = 0 \end{cases}$$

$$(b(g-c)-1; a(c-g); 1; 0);$$

$$(b(h-2c)-2; a(2c-h); 0; 1)$$

$$\rightarrow a = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 3; -3$$

$$\rightarrow c = 1; -1; 3; -3$$

$$\rightarrow g = 2; 4$$

$$\rightarrow h = 1; 3$$

53. Решить систему уравнений.

$$1) \begin{cases} (a + en)x + fny + (b + gn)z = (a + en)X + fnY + (b + gn)Z, \\ Ax + By + Cz = AX + BY + CZ, \\ (c + em)x + fmy + (d + gm)z = (c + em)X + fmY + (d + gm)Z, \\ ex + fy + gz = eX + fY + gZ \end{cases}$$

$$\checkmark \quad x = X; \quad y = Y; \quad z = Z$$

$$\rightarrow n = -2; \quad 3$$

$$\rightarrow m = -1; \quad 2$$

$$\rightarrow X = 1; \quad 0; \quad 3$$

$$\rightarrow Y = 1; \quad -2; \quad -3$$

$$\rightarrow Z = -3; \quad -1; \quad 0; \quad 1$$

$$\rightarrow a = 2; \quad -2; \quad 4; \quad -4$$

$$\rightarrow b = 7; \quad -7$$

$$\rightarrow c = 3; \quad -3$$

$$\rightarrow d = -5; \quad 5$$

$$\rightarrow e = -4; \quad 2; \quad 3$$

$$\rightarrow f = 3; \quad -2; \quad 5$$

$$\rightarrow g = -2; \quad 1; \quad 0$$

$$\rightarrow A = -5; \quad 2$$

$$\rightarrow B = 7; \quad -5$$

$$\rightarrow C = 3; \quad -2$$

54. Решить систему уравнений.

- $\Rightarrow b_{44} = a_{44} + k_{34}a_{34} + k_{24}a_{24} + k_{14}a_{14}$
- $\Rightarrow b_{43} = k_{34}a_{33} + k_{24}a_{23} + k_{14}a_{13}$
- $\Rightarrow b_{42} = k_{24}a_{22} + k_{14}a_{12}$
- $\Rightarrow b_{41} = k_{14}a_{11}$
- $\Rightarrow b_{34} = a_{34} + k_{23}a_{24} + k_{13}a_{14}$
- $\Rightarrow b_{33} = a_{33} + k_{23}a_{23} + k_{13}a_{13}$
- $\Rightarrow b_{32} = k_{23}a_{22} + k_{13}a_{12}$
- $\Rightarrow b_{31} = k_{13}a_{11}$
- $\Rightarrow b_{24} = a_{24} + k_{12}a_{14}$
- $\Rightarrow b_{23} = a_{23} + k_{12}a_{13}$
- $\Rightarrow b_{22} = a_{22} + k_{12}a_{12}$
- $\Rightarrow b_{21} = k_{12}a_{11}$
- $\Rightarrow b_{14} = a_{14}$
- $\Rightarrow b_{13} = a_{13}$
- $\Rightarrow b_{12} = a_{12}$
- $\Rightarrow b_{11} = a_{11}$
- $\Rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $\Rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $\Rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2$
- $\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $\Rightarrow a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $\Rightarrow a_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $\Rightarrow a_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $\Rightarrow a_{44} = -1; 1$
- $\Rightarrow a_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $\Rightarrow a_{13} = -2; -1; 1$
- $\Rightarrow a_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $\Rightarrow a_{23} = -1; 1; 2$
- $\Rightarrow a_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $\Rightarrow a_{34} = -2; -1; 1$
- $\Rightarrow X_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $\Rightarrow X_2 = -1; 1; 2; 3; 4; 5$
- $\Rightarrow X_3 = -5; -3; -2; -1; 1; 2$
- $\Rightarrow X_4 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

$$1) \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 + b_{14}X_4, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}X_4, \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 = b_{31}X_1 + b_{32}X_2 + b_{33}X_3 + b_{34}X_4, \\ b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 = b_{41}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}X_4 \end{cases}$$

✓  $x_1 = X_1; x_2 = X_2; x_3 = X_3; x_4 = X_4$

$$2) \begin{cases} b_{23}x_1 + b_{24}x_2 + b_{21}x_3 + b_{22}x_4 = b_{23}X_1 + b_{24}X_2 + b_{21}X_3 + b_{22}X_4, \\ b_{43}x_1 + b_{44}x_2 + b_{41}x_3 + b_{42}x_4 = b_{43}X_1 + b_{44}X_2 + b_{41}X_3 + b_{42}X_4, \\ b_{33}x_1 + b_{34}x_2 + b_{31}x_3 + b_{32}x_4 = b_{33}X_1 + b_{34}X_2 + b_{31}X_3 + b_{32}X_4, \\ b_{13}x_1 + b_{14}x_2 + b_{11}x_3 + b_{12}x_4 = b_{13}X_1 + b_{14}X_2 + b_{11}X_3 + b_{12}X_4 \end{cases}$$

✓  $x_1 = X_1; x_2 = X_2; x_3 = X_3; x_4 = X_4$

$$3) \begin{cases} b_{24}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{21}x_4 = b_{24}X_1 + b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{21}X_4, \\ b_{34}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{31}x_4 = b_{34}X_1 + b_{32}X_2 + b_{33}X_3 + b_{31}X_4, \\ b_{14}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{11}x_4 = b_{14}X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 + b_{11}X_4, \\ b_{44}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{41}x_4 = b_{44}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{41}X_4 \end{cases}$$

✓  $x_1 = X_1; x_2 = X_2; x_3 = X_3; x_4 = X_4$

55. Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha$ ,  $x_2 = \alpha$ , частное решение:  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = 0$

$$\rightarrow a_{21} = ka_{11}$$

$$\rightarrow a_{22} = ka_{12}$$

$$\rightarrow A_2 = kA_1$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow A_1 = a_{11}X_1$$

$$\rightarrow X_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{12} = -a_{11}z_{11}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{11} = -1; 1$$

$$2) \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1 \end{cases}$$

✓ система несовместна

$$\rightarrow a_{21} = ka_{11}$$

$$\rightarrow a_{22} = ka_{12}$$

$$\rightarrow A_2 = kA_1 + d$$

$$\rightarrow d = -3; -1; 1; 5$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow A_1 = a_{11}X_1$$

$$\rightarrow X_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{12} = -a_{11}z_{11}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{11} = -1; 1$$

$$3) \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = \beta$ , частное решение:  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$

$$\rightarrow a_{21} = ka_{11}$$

$$\rightarrow a_{22} = ka_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = ka_{13}$$

$$\rightarrow A_2 = kA_1$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$



- $A_1 = a_{11}X_1$
- $X_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$
- $a_{13} = -a_{11}z_{21}$
- $z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{12} = -a_{11}z_{11}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{11} = -1; 1$

$$4) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2 \end{cases}$$

✓ система несовместна

- $a_{21} = ka_{11}$
- $a_{22} = ka_{12}$
- $a_{23} = ka_{13}$
- $A_2 = kA_1 + d$
- $d = -3; -1; 1; 5$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $A_1 = a_{11}X_1$
- $X_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$
- $a_{13} = -a_{11}z_{21}$
- $z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{12} = -a_{11}z_{11}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{11} = -1; 1$

**56.** Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$\Rightarrow A_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$

$$\Rightarrow A_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$

$$\Rightarrow X_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow X_2 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\Rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2 \end{cases}$$

✓ система имеет единственное решение:  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = X_2$

$$2) \begin{cases} a_{13}x_1 + a_{12}x_2 + a_{11}x_3 = A_1, \\ a_{23}x_1 + a_{22}x_2 + a_{21}x_3 = A_2 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = X_2 + z_{12}\alpha$ ,  $x_3 = X_1 + z_{11}\alpha$ , частное решение:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = X_2$ ,  $x_3 = X_1$

$$\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$3) \begin{cases} a_{12}x_1 + a_{14}x_2 + a_{11}x_3 + a_{13}x_4 = A_1, \\ a_{22}x_1 + a_{24}x_2 + a_{21}x_3 + a_{23}x_4 = A_2 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_4 = \alpha$ , частное решение:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$

$$\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$4) \begin{cases} a_{14}x_1 + a_{15}x_2 + a_{11}x_3 + a_{13}x_4 + a_{12}x_5 = A_1, \\ a_{24}x_1 + a_{25}x_2 + a_{21}x_3 + a_{23}x_4 + a_{22}x_5 = A_2 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = \beta$ ,  $x_2 = \gamma$ ,  $x_3 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma$ ,  $x_4 = \alpha$ ,  $x_5 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta + z_{32}\gamma$

$$\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$$

- $a_{25} = -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$
- $z_{31} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{32} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$
- $a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$
- $z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$
- $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$

$$5) \begin{cases} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = A_3, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2 \end{cases}$$

✓ система имеет единственное решение:  $x_1 = X_1, x_2 = X_2$

- $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$
- $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$
- $A_3 = kA_1 + lA_2$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$

$$6) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = A_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2 \end{cases}$$

✓ система несовместна

- $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$
- $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$
- $A_3 = kA_1 + lA_2 + d$
- $d = -3; -1; 1; 5$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$

$$7) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha, x_2 = X_2 + z_{12}\alpha, x_3 = \alpha$ , частное решение:  $x_1 = X_1, x_2 = X_2, x_3 = 0$

- $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$
- $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$
- $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

- $A_3 = kA_1 + lA_2$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$
- $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$
- $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$

$$8) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3 \end{cases}$$

✓ система несовместна

- $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$
- $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$
- $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$
- $A_3 = kA_1 + lA_2 + d$
- $d = -3; -1; 1; 5$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$
- $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$
- $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$

$$9) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{13}x_2 + a_{12}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_2 + a_{22}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_2 + a_{32}x_3 + a_{34}x_4 = A_3 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_4 = \beta$ , частное решение

- $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$
- $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$
- $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$
- $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$
- $A_3 = kA_1 + lA_2$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$
- $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$
- $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$
- $a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$
- $a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3
\end{aligned}$$

$$10) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3 \end{cases}$$

✓ СИСТЕМА НЕСОВМЕСТИНА

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21} \\
&\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22} \\
&\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23} \\
&\rightarrow a_{34} = ka_{14} + la_{24} \\
&\rightarrow A_3 = kA_1 + lA_2 + d \\
&\rightarrow d = -3; -1; 1; 5 \\
&\rightarrow k = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow l = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} \\
&\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} \\
&\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} \\
&\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} \\
&\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3
\end{aligned}$$

$$11) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{14}x_2 + a_{13}x_3 + a_{15}x_4 + a_{12}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{24}x_2 + a_{23}x_3 + a_{25}x_4 + a_{22}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{34}x_2 + a_{33}x_3 + a_{35}x_4 + a_{32}x_5 = A_3 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = \gamma$ ,  $x_5 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta +$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21} \\
&\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22} \\
&\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23} \\
&\rightarrow a_{34} = ka_{14} + la_{24} \\
&\rightarrow a_{35} = ka_{15} + la_{25} \\
&\rightarrow A_3 = kA_1 + lA_2 \\
&\rightarrow k = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow l = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32} \\
&\rightarrow z_{31} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{32} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} \\
&\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} \\
&\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} \\
&\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} \\
&\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3
\end{aligned}$$

$$12) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3 \end{cases}$$

✓ СИСТЕМА НЕСОВМЕСТИНА

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21} \\
&\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22} \\
&\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23} \\
&\rightarrow a_{34} = ka_{14} + la_{24} \\
&\rightarrow a_{35} = ka_{15} + la_{25} \\
&\rightarrow A_3 = kA_1 + lA_2 + d \\
&\rightarrow d = -3; -1; 1; 5 \\
&\rightarrow k = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow l = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32} \\
&\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32} \\
&\rightarrow z_{31} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{32} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} \\
&\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} \\
&\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} \\
&\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} \\
&\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3
\end{aligned}$$

57. Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$\Rightarrow A_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3$$

$$\Rightarrow A_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3$$

$$\Rightarrow A_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3$$

$$\Rightarrow X_1 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow X_2 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow X_3 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} =$$

$$\bullet b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33};$$

$$\bullet b_{22}, b_{21}, b_{23}, b_{12}, b_{11}, b_{13}, b_{32}, b_{31}, b_{33};$$

$$\bullet b_{32}, b_{31}, b_{33}, b_{12}, b_{11}, b_{13}, b_{22}, b_{21}, b_{23}$$

$$\Rightarrow b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{13}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{12}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{13} = c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{12} = c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{11} = c_{11}$$

$$\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{13} = -2; -1; 1$$

$$\Rightarrow c_{23} = -1; 1; 2$$

$$1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3 \end{cases}$$

✓ система имеет единственное решение:  $x_1 = X_1, x_2 = X_2, x_3 = X_3$

$$2) \begin{cases} a_{14}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{11}x_4 = A_1, \\ a_{24}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{21}x_4 = A_2, \\ a_{34}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{31}x_4 = A_3 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = X_2 + z_{12}\alpha$ ,  $x_3 = X_3 + z_{13}\alpha$ ,  $x_4 = X_1 + z_{11}\alpha$ , частное решение:  $x_1 =$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$3) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_3 + a_{15}x_4 + a_{13}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_3 + a_{25}x_4 + a_{23}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_3 + a_{35}x_4 + a_{33}x_5 = A_3 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = \beta$ ,  $x_5 = X_3 + z_{13}\alpha$

$$\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$$

$$\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$$

$$\rightarrow a_{35} = -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$$

$$\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{23} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$4) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = A_4, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3 \end{cases}$$

✓ система имеет единственное решение:  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = X_2$ ,  $x_3 = X_3$

$$\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$$

$$\rightarrow A_4 = kA_1 + lA_2 + mA_3$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 1; 2$$



$$5) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = A_4 \end{cases}$$

✓ СИСТЕМА НЕСОВМЕСТИНА

$$\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$$

$$\rightarrow A_4 = kA_1 + lA_2 + mA_3 + d$$

$$\rightarrow d = -3; -1; 1; 5$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 1; 2$$

$$6) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_3 + a_{13}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_3 + a_{23}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_3 + a_{33}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{44}x_3 + a_{43}x_4 = A_4 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha$ ,  $x_2 = X_2 + z_{12}\alpha$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = X_3 + z_{13}\alpha$ , частное решение:  $x_1$

$$\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$$

$$\rightarrow a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$$

$$\rightarrow A_4 = kA_1 + lA_2 + mA_3$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$7) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4 \end{cases}$$

✓ СИСТЕМА НЕСОВМЕСТИНА

- $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$
- $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$
- $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$
- $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$
- $A_4 = kA_1 + lA_2 + mA_3 + d$
- $d = -3; -1; 1; 5$
- $k = -2; -1; 1; 2$
- $l = -2; -1; 1; 2$
- $m = -2; -1; 1; 2$
- $a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$
- $a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$
- $a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3$

$$8) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = X_2 + z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_3 = X_3 + z_{13}\alpha + z_{23}\beta$ ,  $x_4 = \alpha$ ,

- $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$
- $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$
- $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$
- $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$
- $a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$
- $A_4 = kA_1 + lA_2 + mA_3$
- $k = -2; -1; 1; 2$
- $l = -2; -1; 1; 2$
- $m = -2; -1; 1; 2$
- $a_{15} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$
- $a_{25} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$
- $a_{35} = -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$
- $z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{23} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$
- $a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$
- $a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$9) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3 \end{cases}$$

✓ система несовместна

$$\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$$

$$\rightarrow a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$$

$$\rightarrow a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$$

$$\rightarrow A_4 = kA_1 + lA_2 + mA_3 + d$$

$$\rightarrow d = -3; -1; 1; 5$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$$

$$\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$$

$$\rightarrow a_{35} = -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$$

$$\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{23} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3$$

58. Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$\Rightarrow A_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4$$

$$\Rightarrow A_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4$$

$$\Rightarrow A_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4$$

$$\Rightarrow A_4 = a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4$$

$$\Rightarrow X_1 = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow X_2 = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow X_3 = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow X_4 = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} =$$

$$\bullet b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44};$$

$$\bullet b_{32}, b_{31}, b_{34}, b_{33}, b_{12}, b_{11}, b_{14}, b_{13}, b_{22}, b_{21}, b_{24}, b_{23}, b_{42}, b_{41}, b_{44}, b_{43};$$

$$\bullet b_{43}, b_{42}, b_{41}, b_{44}, b_{13}, b_{12}, b_{11}, b_{14}, b_{33}, b_{32}, b_{31}, b_{34}, b_{23}, b_{22}, b_{21}, b_{24}$$

$$\Rightarrow b_{44} = c_{44} + k_{34}c_{34} + k_{24}c_{24} + k_{14}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{43} = k_{34}c_{33} + k_{24}c_{23} + k_{14}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{42} = k_{24}c_{22} + k_{14}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{41} = k_{14}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{34} = c_{34} + k_{23}c_{24} + k_{13}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{13}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{24} = c_{24} + k_{12}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{12}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{14} = c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{13} = c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{12} = c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{11} = c_{11}$$

$$\Rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\Rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\Rightarrow c_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\Rightarrow c_{22} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{33} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{44} = -1; 1 \\
&\Rightarrow c_{12} = -1; 0; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{13} = -2; -1; 1 \\
&\Rightarrow c_{14} = -2; -1; 0; 1 \\
&\Rightarrow c_{23} = -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{24} = -1; 0; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{34} = -2; -1; 1
\end{aligned}$$

$$1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4 \end{cases}$$

✓ система имеет единственное решение:  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = X_2$ ,  $x_3 = X_3$ ,  $x_4 = X_3$

$$2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{15}x_3 + a_{14}x_4 + a_{13}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{25}x_3 + a_{24}x_4 + a_{23}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{35}x_3 + a_{34}x_4 + a_{33}x_5 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{45}x_3 + a_{44}x_4 + a_{43}x_5 = A_4 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha$ ,  $x_2 = X_2 + z_{12}\alpha$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = X_4 + z_{14}\alpha$ ,  $x_5 = X_3 + z_{13}\alpha$ , частн

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14} \\
&\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14} \\
&\rightarrow a_{35} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14} \\
&\rightarrow a_{45} = -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14} \\
&\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow z_{14} = -2; -1; 1; 2
\end{aligned}$$

$$3) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 = A_5 \end{cases}$$

✓ система имеет единственное решение:  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = X_2$ ,  $x_3 = X_3$ ,  $x_4 = X_3$

$$\rightarrow a_{51} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$$

$$\rightarrow a_{52} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$$

$$\rightarrow a_{53} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$$

$$\rightarrow a_{54} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$$

$$\rightarrow A_5 = kA_1 + lA_2 + mA_3 + nA_4$$

$$\rightarrow k = -1; 1$$

$$\rightarrow l = -1; 1$$

$$\rightarrow m = -1; 1$$

$$\rightarrow n = -1; 1$$

$$4) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = A_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 = A_5 \end{cases}$$

✓ система несовместна

$$\rightarrow a_{51} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$$

$$\rightarrow a_{52} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$$

$$\rightarrow a_{53} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$$

$$\rightarrow a_{54} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$$

$$\rightarrow A_5 = kA_1 + lA_2 + mA_3 + nA_4 + d$$

$$\rightarrow d = -3; -1; 1; 5$$

$$\rightarrow k = -1; 1$$

$$\rightarrow l = -1; 1$$

$$\rightarrow m = -1; 1$$

$$\rightarrow n = -1; 1$$

$$5) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = A_5 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = X_1 + z_{11}\alpha$ ,  $x_2 = X_2 + z_{12}\alpha$ ,  $x_3 = X_3 + z_{13}\alpha$ ,  $x_4 = X_4 + z_{14}\alpha$ ,  $x_5 = \alpha$ , частн

$$\rightarrow a_{51} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$$

$$\rightarrow a_{52} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$$

$$\rightarrow a_{53} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$$

$$\rightarrow a_{54} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$$

$$\rightarrow a_{55} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35} + na_{45}$$

$$\rightarrow A_5 = kA_1 + lA_2 + mA_3 + nA_4$$

$$\rightarrow k = -1; 1$$

- $l = -1; 1$
- $m = -1; 1$
- $n = -1; 1$
- $a_{15} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$
- $a_{25} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$
- $a_{35} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$
- $a_{45} = -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2$
- $z_{12} = -2; -1; 1; 2$
- $z_{13} = -2; -1; 1; 2$
- $z_{14} = -2; -1; 1; 2$

$$6) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = A_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = A_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = A_5 \end{cases}$$

✓ СИСТЕМА НЕСОВМЕСТИНА

- $a_{51} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$
- $a_{52} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$
- $a_{53} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$
- $a_{54} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$
- $a_{55} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35} + na_{45}$
- $A_5 = kA_1 + lA_2 + mA_3 + nA_4 + d$
- $d = -3; -1; 1; 5$
- $k = -1; 1$
- $l = -1; 1$
- $m = -1; 1$
- $n = -1; 1$
- $a_{15} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$
- $a_{25} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$
- $a_{35} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$
- $a_{45} = -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2$
- $z_{12} = -2; -1; 1; 2$
- $z_{13} = -2; -1; 1; 2$
- $z_{14} = -2; -1; 1; 2$

59. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$\Rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\Rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$1) \begin{cases} a_{12}x_1 + a_{14}x_2 + a_{11}x_3 + a_{13}x_4 = 0, \\ a_{22}x_1 + a_{24}x_2 + a_{21}x_3 + a_{23}x_4 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_4 = \alpha$ , базис подпространства решений

$$\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$2) \begin{cases} a_{14}x_1 + a_{15}x_2 + a_{11}x_3 + a_{13}x_4 + a_{12}x_5 = 0, \\ a_{24}x_1 + a_{25}x_2 + a_{21}x_3 + a_{23}x_4 + a_{22}x_5 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = \beta$ ,  $x_2 = \gamma$ ,  $x_3 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma$ ,  $x_4 = \alpha$ ,  $x_5 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta + z_{32}\gamma$ , базис

$$\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$$

$$\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$$

$$\rightarrow z_{31} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{32} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$$

$$\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$3) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{13}x_2 + a_{12}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_2 + a_{22}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_2 + a_{32}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_4 = \beta$ , базис подпространства решений



- $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$
- $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$
- $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$
- $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$
- $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$
- $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$
- $a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$
- $a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$

$$4) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{14}x_2 + a_{13}x_3 + a_{15}x_4 + a_{12}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{24}x_2 + a_{23}x_3 + a_{25}x_4 + a_{22}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{34}x_2 + a_{33}x_3 + a_{35}x_4 + a_{32}x_5 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = \gamma$ ,  $x_5 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta + z_{32}\gamma$ , базис

- $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$
- $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$
- $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$
- $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$
- $a_{35} = ka_{15} + la_{25}$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$
- $a_{15} = -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32}$
- $a_{25} = -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32}$
- $z_{31} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{32} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$
- $a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$
- $z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$
- $a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$
- $z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$
- $z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$

$$5) \begin{cases} a_{41}x_1 + a_{43}x_2 + a_{42}x_3 + a_{44}x_4 = 0, \\ a_{11}x_1 + a_{13}x_2 + a_{12}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_2 + a_{22}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_2 + a_{32}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_4 = \beta$ , базис подпространства решений

$$\rightarrow a_{41} = Ka_{11} + La_{21}$$

$$\rightarrow a_{42} = Ka_{12} + La_{22}$$

$$\rightarrow a_{43} = Ka_{13} + La_{23}$$

$$\rightarrow a_{44} = Ka_{14} + La_{24}$$

$$\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23}$$

$$\rightarrow a_{34} = ka_{14} + la_{24}$$

$$\rightarrow k = -2; 1; 3$$

$$\rightarrow l = -1; 2$$

$$\rightarrow L = -2; 1; 3$$

$$\rightarrow K = -1; 2$$

$$\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$6) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{14}x_2 + a_{13}x_3 + a_{15}x_4 + a_{12}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{44}x_2 + a_{43}x_3 + a_{45}x_4 + a_{42}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{24}x_2 + a_{23}x_3 + a_{25}x_4 + a_{22}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{34}x_2 + a_{33}x_3 + a_{35}x_4 + a_{32}x_5 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta + z_{31}\gamma$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = \gamma$ ,  $x_5 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta + z_{32}\gamma$ , базис

$$\rightarrow a_{41} = Ka_{11} + La_{21}$$

$$\rightarrow a_{42} = Ka_{12} + La_{22}$$

$$\rightarrow a_{43} = Ka_{13} + La_{23}$$

$$\rightarrow a_{44} = Ka_{14} + La_{24}$$

$$\rightarrow a_{45} = Ka_{15} + La_{25}$$

$$\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23} \\
&\rightarrow a_{34} = ka_{14} + la_{24} \\
&\rightarrow a_{35} = ka_{15} + la_{25} \\
&\rightarrow k = -2; 1; 3 \\
&\rightarrow l = -1; 2 \\
&\rightarrow L = -2; 1; 3 \\
&\rightarrow K = -1; 2 \\
&\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{31} - a_{12}z_{32} \\
&\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{31} - a_{22}z_{32} \\
&\rightarrow z_{31} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{32} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} \\
&\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} \\
&\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} \\
&\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} \\
&\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3
\end{aligned}$$

60. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$\Rightarrow a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} =$$

$$\bullet b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33};$$

$$\bullet b_{22}, b_{21}, b_{23}, b_{12}, b_{11}, b_{13}, b_{32}, b_{31}, b_{33};$$

$$\bullet b_{32}, b_{31}, b_{33}, b_{12}, b_{11}, b_{13}, b_{22}, b_{21}, b_{23}$$

$$\Rightarrow b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{13}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{12}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{13} = c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{12} = c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{11} = c_{11}$$

$$\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{13} = -2; -1; 1$$

$$\Rightarrow c_{23} = -1; 1; 2$$

$$1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_3 + a_{15}x_4 + a_{13}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_3 + a_{25}x_4 + a_{23}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_3 + a_{35}x_4 + a_{33}x_5 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = \beta$ ,  $x_5 = z_{13}\alpha + z_{23}\beta$ , базис по

$$\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$$

$$\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$$

$$\rightarrow a_{35} = -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$$

$$\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{23} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_3 = z_{13}\alpha + z_{23}\beta$ ,  $x_4 = \alpha$ ,  $x_5 = \beta$ , базис по

$$\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$$

$$\rightarrow a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$$

$$\rightarrow a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23}$$

$$\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23}$$

$$\rightarrow a_{35} = -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23}$$

$$\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{23} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13}$$

$$\rightarrow a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$3) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha + z_{21}\beta$ ,  $x_2 = z_{12}\alpha + z_{22}\beta$ ,  $x_3 = z_{13}\alpha + z_{23}\beta$ ,  $x_4 = \alpha$ ,  $x_5 = \beta$ , базис по

$$\rightarrow a_{51} = Ka_{11} + La_{21} + Ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{52} = Ka_{12} + La_{22} + Ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{53} = Ka_{13} + La_{23} + Ma_{33}$$

$$\rightarrow a_{54} = Ka_{14} + La_{24} + Ma_{34}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{55} = Ka_{15} + La_{25} + Ma_{35} \\
&\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31} \\
&\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32} \\
&\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33} \\
&\rightarrow a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34} \\
&\rightarrow a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35} \\
&\rightarrow k = -2; 1 \\
&\rightarrow l = -1; 1 \\
&\rightarrow m = -1; 2 \\
&\rightarrow K = 2; -1 \\
&\rightarrow L = -2; 2 \\
&\rightarrow M = -2; 1 \\
&\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{21} - a_{12}z_{22} - a_{13}z_{23} \\
&\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{21} - a_{22}z_{22} - a_{23}z_{23} \\
&\rightarrow a_{35} = -a_{31}z_{21} - a_{32}z_{22} - a_{33}z_{23} \\
&\rightarrow z_{21} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{22} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{23} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{14} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} \\
&\rightarrow a_{24} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} \\
&\rightarrow a_{34} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} \\
&\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2; 3
\end{aligned}$$

61. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$\Rightarrow a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, \\ a_{42}, a_{43}, a_{44} =$$

$$\bullet b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, b_{41}, \\ b_{42}, b_{43}, b_{44};$$

$$\bullet b_{32}, b_{31}, b_{34}, b_{33}, b_{12}, b_{11}, b_{14}, b_{13}, b_{22}, b_{21}, b_{24}, b_{23}, b_{42}, \\ b_{41}, b_{44}, b_{43};$$

$$\bullet b_{43}, b_{42}, b_{41}, b_{44}, b_{13}, b_{12}, b_{11}, b_{14}, b_{33}, b_{32}, b_{31}, b_{34}, b_{23}, \\ b_{22}, b_{21}, b_{24}$$

$$\Rightarrow b_{44} = c_{44} + k_{34}c_{34} + k_{24}c_{24} + k_{14}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{43} = k_{34}c_{33} + k_{24}c_{23} + k_{14}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{42} = k_{24}c_{22} + k_{14}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{41} = k_{14}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{34} = c_{34} + k_{23}c_{24} + k_{13}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{13}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{24} = c_{24} + k_{12}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{12}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{14} = c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{13} = c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{12} = c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{11} = c_{11}$$

$$\Rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\Rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{44} = -1; 1$$

$$\Rightarrow c_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{13} = -2; -1; 1$$

$$\Rightarrow c_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\Rightarrow c_{23} = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{34} = -2; -1; 1$$

$$1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{15}x_3 + a_{14}x_4 + a_{13}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{25}x_3 + a_{24}x_4 + a_{23}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{35}x_3 + a_{34}x_4 + a_{33}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{45}x_3 + a_{44}x_4 + a_{43}x_5 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha$ ,  $x_2 = z_{12}\alpha$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = z_{14}\alpha$ ,  $x_5 = z_{13}\alpha$ , базис подпространства решений

$$\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$$

$$\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$$

$$\rightarrow a_{35} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$$

$$\rightarrow a_{45} = -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow z_{14} = -2; -1; 1; 2$$

$$2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = 0 \end{cases}$$

✓ общее решение:  $x_1 = z_{11}\alpha$ ,  $x_2 = z_{12}\alpha$ ,  $x_3 = z_{13}\alpha$ ,  $x_4 = z_{14}\alpha$ ,  $x_5 = \alpha$ , базис подпространства решений

$$\rightarrow a_{51} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31} + na_{41}$$

$$\rightarrow a_{52} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32} + na_{42}$$

$$\rightarrow a_{53} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33} + na_{43}$$

$$\rightarrow a_{54} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34} + na_{44}$$

$$\rightarrow a_{55} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35} + na_{45}$$

$$\rightarrow k = -1; 1$$

$$\rightarrow l = -1; 1$$

$$\rightarrow m = -1; 1$$

$$\rightarrow n = -1; 1$$

$$\rightarrow a_{15} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12} - a_{13}z_{13} - a_{14}z_{14}$$

$$\rightarrow a_{25} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12} - a_{23}z_{13} - a_{24}z_{14}$$

$$\rightarrow a_{35} = -a_{31}z_{11} - a_{32}z_{12} - a_{33}z_{13} - a_{34}z_{14}$$

$$\rightarrow a_{45} = -a_{41}z_{11} - a_{42}z_{12} - a_{43}z_{13} - a_{44}z_{14}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow z_{13} = -2; -1; 1; 2$$



$$\rightarrow z_{14} = -2; -1; 1; 2$$

**62.** Определите вектор  $X$  валового выпуска продукции двух отраслей, если известны матрица прямых затрат  $A$  и вектор конечного продукта  $Y$ .

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{100} & \frac{a_{12}}{100} \\ \frac{a_{21}}{100} & \frac{a_{22}}{100} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 100x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \\ 100x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad X = (100x_1, 100x_2)$$

$$\rightarrow x_1 = 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow x_2 = 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow x_3 = 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow a_{11} = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13$$

$$\rightarrow a_{12} = 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 23; 25$$

$$\rightarrow a_{21} = 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 12; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20$$

$$\rightarrow a_{22} = 3; 4; 6; 7; 8; 11; 12; 13; 15; 16; 17$$

**63.** Определите вектор  $X$  валового выпуска продукции трёх отраслей, если известны матрица прямых затрат  $A$  и вектор конечного продукта  $Y$ .

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{100} & \frac{a_{12}}{100} & \frac{a_{13}}{100} \\ \frac{a_{21}}{100} & \frac{a_{22}}{100} & \frac{a_{23}}{100} \\ \frac{a_{31}}{100} & \frac{a_{32}}{100} & \frac{a_{33}}{100} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 100x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ 100x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \\ 100x_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad X = (100x_1, 100x_2, 100x_3)$$

$$\rightarrow x_1 = 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow x_2 = 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow x_3 = 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow a_{11} = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow a_{12} = 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 15; 16; 17; 18; 19; 20$$

$$\rightarrow a_{13} = 4; 5; 7; 8; 9; 11; 12; 14$$

$$\rightarrow a_{21} = 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 12; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20$$

$$\rightarrow a_{22} = 3; 4; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow a_{23} = 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14$$

$$\rightarrow a_{31} = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 16; 17; 18$$

$$\rightarrow a_{32} = 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$$

$$\rightarrow a_{33} = 4; 5; 6; 8; 10; 11$$

64. Определите вектор  $X$  валового выпуска продукции четырёх отраслей, если известны матрица прямых затрат  $A$  и вектор конечного продукта  $Y$ .

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{100} & \frac{a_{12}}{100} & \frac{a_{13}}{100} & \frac{a_{14}}{100} \\ \frac{a_{21}}{100} & \frac{a_{22}}{100} & \frac{a_{23}}{100} & \frac{a_{24}}{100} \\ \frac{a_{31}}{100} & \frac{a_{32}}{100} & \frac{a_{33}}{100} & \frac{a_{34}}{100} \\ \frac{a_{41}}{100} & \frac{a_{42}}{100} & \frac{a_{43}}{100} & \frac{a_{44}}{100} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 100x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 \\ 100x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 \\ 100x_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4 \\ 100x_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4 \end{pmatrix}$$

✓  $X = (100x_1, 100x_2, 100x_3, 100x_4)$

- $x_1 = 4; 5; 6; 7; 8; 9$
- $x_2 = 5; 6; 7; 8$
- $x_3 = 5; 6; 7; 8$
- $x_4 = 5; 6; 7; 8$
- $a_{11} = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$
- $a_{12} = 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 15$
- $a_{13} = 4; 5; 7; 8; 9; 11; 12; 14$
- $a_{14} = 4; 5; 7; 8; 9; 11; 12; 14; 15; 17$
- $a_{21} = 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 12; 14; 15; 16$
- $a_{22} = 3; 4; 6; 7; 8$
- $a_{23} = 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14$
- $a_{24} = 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11$
- $a_{31} = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$
- $a_{32} = 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$
- $a_{33} = 4; 5; 6; 8; 10; 11$
- $a_{34} = 4; 5; 6; 8; 10; 11; 12; 15; 16$
- $a_{41} = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$
- $a_{42} = 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$
- $a_{43} = 4; 5; 6; 8; 10; 11; 12$
- $a_{44} = 4; 5; 6; 7; 8; 10$

65. Найти матрицу, обратную данной.

$$1) \begin{pmatrix} a + bk & A & b \\ Bk + am + bkm & Am & B + bm \\ C + ck + an + bkn & An & c + bn \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \frac{1}{ABC} \begin{pmatrix} Amc - AnB & -Ac & AB \\ -amc + BC + bmC + Ban & ac - bC & -aB \\ BkAn - CAm - ckAm & AC + Ack & -ABk \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = 2; 3; -3; -2$$

$$\rightarrow B = -1; 1; 2$$

$$\rightarrow C = -2; 1; 3$$

$$\rightarrow a = 3; -1$$

$$\rightarrow b = 2; 2$$

$$\rightarrow c = -2; 3$$

$$\rightarrow k = -2; 4$$

$$\rightarrow m = 1; 3$$

$$\rightarrow n = -3; 1$$

66. Найти матрицу, обратную данной

$$1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = \frac{d}{\Delta}$$

$$\rightarrow B = -\frac{b}{\Delta}$$

$$\rightarrow C = -\frac{c}{\Delta}$$

$$\rightarrow D = \frac{a}{\Delta}$$

$$\rightarrow \Delta = ka$$

$$\rightarrow a = k_b k_c$$

$$\rightarrow b = k_b l_b$$

$$\rightarrow c = k_c l_c$$

$$\rightarrow d = k + l_b l_c$$

$$\rightarrow k = -1; 1; -2; 2; -3; 3; -4; 4; -5; 5$$

$$\rightarrow k_b = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_b = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k_c = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_c = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

67. Найти матрицу, обратную данной

$$\Rightarrow B_{11} = A_{11} - k_{31}B_{13} - k_{21}B_{12}$$

$$\Rightarrow B_{21} = -k_{31}B_{23} - k_{21}B_{22}$$

$$\Rightarrow B_{31} = -k_{31}B_{33} - k_{21}B_{32}$$

$$\Rightarrow B_{12} = A_{12} - k_{32}B_{13}$$

$$\Rightarrow B_{22} = A_{22} - k_{32}B_{23}$$

$$\Rightarrow B_{32} = -k_{32}B_{33}$$

$$\Rightarrow B_{13} = A_{13}$$

$$\Rightarrow B_{23} = A_{23}$$

$$\Rightarrow B_{33} = A_{33}$$

$$\Rightarrow A_{13} = -k_{13}A_{11}$$

$$\Rightarrow A_{23} = -k_{23}A_{22}$$

$$\Rightarrow A_{12} = -k_{12}A_{11}$$

$$\Rightarrow A_{11} = \frac{D}{a_{11}}$$

$$\Rightarrow A_{22} = \frac{D}{a_{22}}$$

$$\Rightarrow A_{33} = \frac{D}{a_{33}}$$

$$\Rightarrow b_{33} = a_{33} + k_{32}a_{23} + k_{31}a_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{32}a_{22} + k_{31}a_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{31}a_{11}$$

$$\Rightarrow b_{23} = a_{23} + k_{21}a_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = a_{22} + k_{21}a_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{21}a_{11}$$

$$\Rightarrow b_{11} = a_{11}$$

$$\Rightarrow b_{12} = a_{12}$$

$$\Rightarrow b_{13} = a_{13}$$

$$\Rightarrow a_{13} = k_{13}a_{33} + k_{12}a_{23}$$

$$\Rightarrow a_{12} = k_{12}a_{22}$$

$$\Rightarrow a_{23} = k_{23}a_{33}$$

$$\Rightarrow a_{11} = d_1s_1$$

$$\Rightarrow a_{22} = d_2s_2$$

$$\Rightarrow a_{33} = d_3s_3$$

$$\Rightarrow s_1 = -1; 1$$

$$\Rightarrow s_2 = -1; 1$$

$$\Rightarrow s_3 = -1; 1$$

$$\Rightarrow d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad D =$$

$$\bullet 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1;$$

$$\bullet 1, \quad 2, \quad 1, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 1, \quad 3, \quad 3;$$

$$\bullet 3, \quad 1, \quad 2, \quad 6;$$

$$\bullet 3, \quad 2, \quad 2, \quad 6;$$

$$\bullet 1, \quad 4, \quad 1, \quad 4;$$

$$\bullet 1, \quad 4, \quad 2, \quad 4;$$

$$\bullet 1, \quad 1, \quad 5, \quad 5;$$

$$\bullet 2, \quad 5, \quad 2, \quad 10;$$

$$\bullet 5, \quad 3, \quad 3, \quad 15;$$

$$\bullet 7, \quad 1, \quad 1, \quad 7$$

$$\Rightarrow k_{12} = -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2$$

$$\Rightarrow k_{13} = -4; \quad -3; \quad -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2$$

$$\Rightarrow k_{31} = -4; \quad -3; \quad -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4$$

$$\Rightarrow k_{32} = -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2$$

$$\Rightarrow k_{21} = -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2$$

$$1) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \frac{1}{D} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \frac{1}{D} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$



68. Найти матрицу, обратную данной

$$\Rightarrow B_{11} = -k_{41}B_{14} - k_{31}B_{13} - k_{21}B_{12} + A_{11}$$

$$\Rightarrow B_{21} = -k_{41}B_{24} - k_{31}B_{23} - k_{21}B_{22}$$

$$\Rightarrow B_{31} = -k_{41}B_{34} - k_{31}B_{33} - k_{21}B_{32}$$

$$\Rightarrow B_{41} = -k_{41}B_{44} - k_{31}B_{43} - k_{21}B_{42}$$

$$\Rightarrow B_{12} = -k_{42}B_{14} - k_{32}B_{13} + A_{12}$$

$$\Rightarrow B_{22} = -k_{42}B_{24} - k_{32}B_{23} + A_{22}$$

$$\Rightarrow B_{32} = -k_{42}B_{34} - k_{32}B_{33}$$

$$\Rightarrow B_{42} = -k_{42}B_{44} - k_{32}B_{43}$$

$$\Rightarrow B_{13} = -k_{43}B_{14} + A_{13}$$

$$\Rightarrow B_{23} = -k_{43}B_{24} + A_{23}$$

$$\Rightarrow B_{33} = -k_{43}B_{34} + A_{33}$$

$$\Rightarrow B_{43} = -k_{43}B_{44}$$

$$\Rightarrow B_{14} = A_{14}$$

$$\Rightarrow B_{24} = A_{24}$$

$$\Rightarrow B_{34} = A_{34}$$

$$\Rightarrow B_{44} = A_{44}$$

$$\Rightarrow A_{14} = -k_{14}A_{11}$$

$$\Rightarrow A_{24} = -k_{24}A_{22}$$

$$\Rightarrow A_{34} = -k_{34}A_{33}$$

$$\Rightarrow A_{13} = -k_{13}A_{11}$$

$$\Rightarrow A_{23} = -k_{23}A_{22}$$

$$\Rightarrow A_{12} = -k_{12}A_{11}$$

$$\Rightarrow A_{11} = \frac{D}{a_{11}}$$

$$\Rightarrow A_{22} = \frac{D}{a_{22}}$$

$$\Rightarrow A_{33} = \frac{D}{a_{33}}$$

$$\Rightarrow A_{44} = \frac{D}{a_{44}}$$

$$\Rightarrow b_{44} = k_{41}a_{14} + k_{42}a_{24} + k_{43}a_{34} + a_{44}$$

$$\Rightarrow b_{43} = k_{41}a_{13} + k_{42}a_{23} + k_{43}a_{33}$$

$$\Rightarrow b_{42} = k_{41}a_{12} + k_{42}a_{22}$$

$$\Rightarrow b_{41} = k_{41}a_{11}$$

$$\Rightarrow b_{34} = k_{31}a_{14} + k_{32}a_{24} + a_{34}$$

$$\Rightarrow b_{33} = k_{31}a_{13} + k_{32}a_{23} + a_{33}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{31}a_{12} + k_{32}a_{22}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow b_{31} = k_{31}a_{11} \\
&\Rightarrow b_{24} = k_{21}a_{14} + a_{24} \\
&\Rightarrow b_{23} = k_{21}a_{13} + a_{23} \\
&\Rightarrow b_{22} = k_{21}a_{12} + a_{22} \\
&\Rightarrow b_{21} = k_{21}a_{11} \\
&\Rightarrow b_{11} = a_{11} \\
&\Rightarrow b_{12} = a_{12} \\
&\Rightarrow b_{13} = a_{13} \\
&\Rightarrow b_{14} = a_{14} \\
&\Rightarrow a_{14} = k_{12}a_{24} + k_{13}a_{34} + k_{14}a_{44} \\
&\Rightarrow a_{13} = k_{12}a_{23} + k_{13}a_{33} \\
&\Rightarrow a_{12} = k_{12}a_{22} \\
&\Rightarrow a_{24} = k_{23}a_{34} + k_{24}a_{44} \\
&\Rightarrow a_{23} = k_{23}a_{33} \\
&\Rightarrow a_{34} = k_{34}a_{44} \\
&\Rightarrow a_{11} = d_1s_1 \\
&\Rightarrow a_{22} = d_2s_2 \\
&\Rightarrow a_{33} = d_3s_3 \\
&\Rightarrow a_{44} = d_4s_4 \\
&\Rightarrow s_1 = -1; 1 \\
&\Rightarrow s_2 = -1; 1 \\
&\Rightarrow s_3 = -1; 1 \\
&\Rightarrow s_4 = -1; 1 \\
&\Rightarrow d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad d_4, \quad D = \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 1, \quad 3, \quad 1, \quad 3; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 3, \quad 3, \quad 1, \quad 3; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 4, \quad 4; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 4, \quad 4, \quad 1, \quad 4; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 4, \quad 2, \quad 1, \quad 4; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad 4, \quad 2, \quad 1, \quad 4; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 5, \quad 5; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 5, \quad 5, \quad 1, \quad 5; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 2, \quad 6; \\
&\quad \bullet \quad 3, \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 6 \\
&\Rightarrow k_{12} = -1; 0; 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow k_{13} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{14} = -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\Rightarrow k_{23} = -1; 0; 1 \\
&\Rightarrow k_{24} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{34} = -1; 0; 1 \\
&\Rightarrow k_{21} = -1; 0; 1 \\
&\Rightarrow k_{31} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{41} = -3; -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{32} = -1; 0; 1 \\
&\Rightarrow k_{42} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{43} = -1; 0; 1
\end{aligned}$$

$$1) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \frac{1}{D} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \frac{1}{D} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

69. Найти матрицу, обратную данной.

$$1) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} & s_{41} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} & s_{42} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{43} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow s_{11} = +b_{22}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) - b_{23}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) + b_{24}(b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42})$$

$$\rightarrow s_{12} = -b_{21}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) + b_{23}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) - b_{24}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{13} = +b_{21}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) - b_{22}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) + b_{24}(b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{14} = -b_{21}(b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42}) + b_{22}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41}) - b_{23}(b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{21} = -b_{12}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) + b_{13}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) - b_{14}(b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42})$$

$$\rightarrow s_{22} = +b_{11}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) - b_{13}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) + b_{14}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{23} = -b_{11}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) + b_{12}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) - b_{14}(b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{24} = +b_{11}(b_{32}b_{43} - b_{33}b_{42}) - b_{12}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41}) + b_{13}(b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{31} = +b_{12}(b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43}) - b_{13}(b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}) + b_{14}(b_{22}b_{43} - b_{23}b_{42})$$

$$\rightarrow s_{32} = -b_{11}(b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43}) + b_{13}(b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41}) - b_{14}(b_{21}b_{43} - b_{23}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{33} = +b_{11}(b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}) - b_{12}(b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41}) + b_{14}(b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{34} = -b_{11}(b_{22}b_{43} - b_{23}b_{42}) + b_{12}(b_{21}b_{43} - b_{23}b_{41}) - b_{13}(b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41})$$

$$\rightarrow s_{41} = -b_{12}(b_{23}b_{34} - b_{24}b_{33}) + b_{13}(b_{22}b_{34} - b_{24}b_{32}) - b_{14}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})$$

$$\rightarrow s_{42} = +b_{11}(b_{23}b_{34} - b_{24}b_{33}) - b_{13}(b_{21}b_{34} - b_{24}b_{31}) + b_{14}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31})$$

$$\rightarrow s_{43} = -b_{11}(b_{22}b_{34} - b_{24}b_{32}) + b_{12}(b_{21}b_{34} - b_{24}b_{31}) - b_{14}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})$$

$$\rightarrow s_{44} = +b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + b_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})$$

$$\rightarrow b_{44} = a_{44} + k_{34}a_{34} + k_{24}a_{24} + k_{14}a_{14}$$

$$\rightarrow b_{43} = k_{34}a_{33} + k_{24}a_{23} + k_{14}a_{13}$$

$$\rightarrow b_{42} = k_{24}a_{22} + k_{14}a_{12}$$

$$\rightarrow b_{41} = k_{14}a_{11}$$

$$\rightarrow b_{34} = a_{34} + k_{23}a_{24} + k_{13}a_{14}$$

$$\rightarrow b_{33} = a_{33} + k_{23}a_{23} + k_{13}a_{13}$$

$$\rightarrow b_{32} = k_{23}a_{22} + k_{13}a_{12}$$

$$\rightarrow b_{31} = k_{13}a_{11}$$

$$\rightarrow b_{24} = a_{24} + k_{12}a_{14}$$

$$\rightarrow b_{23} = a_{23} + k_{12}a_{13}$$

$$\rightarrow b_{22} = a_{22} + k_{12}a_{12}$$

$$\rightarrow b_{21} = k_{12}a_{11}$$

- $b_{14} = a_{14}$
- $b_{13} = a_{13}$
- $b_{12} = a_{12}$
- $b_{11} = a_{11}$
- $k_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $k_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{34} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $a_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $a_{44} = -1; 1$
- $a_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $a_{13} = -2; -1; 1$
- $a_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $a_{23} = -1; 1; 2$
- $a_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $a_{34} = -2; -1; 1$

70. Найти значение матричного многочлена  $f(A)$ .

$$\Rightarrow K = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow B = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow D = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$f(x) = Kx^3 - Bx^2 + D;$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} n & m \\ l & 0 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad f(A) = \begin{pmatrix} n^2(Kn - B) + ml(2Kn - B) + D & m(Kn^2 + Klm - Bn) \\ l(Kn^2 + Kml - Bn) & lm(Kn - B) + D \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow n = -3; -2; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow m = -3; -2; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow l = -3; -2; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$f(x) = Kx^3 - Bx^2 + D;$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad f(A) = \begin{pmatrix} a^2(Ka - B) + D & 0 & b(Ka^2 + Kaf + Kf^2 - Ba - Bf) \\ c(Ka^2 + Kad + Kd^2 - Ba - Bd) & d^2(Kd - B) + D & bc(Ka + Kf + Kd - B) \\ 0 & 0 & f^2(Kf - B) + D \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a = -3; -2; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = -3; -2; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow c = -3; -2; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow d = -3; -2; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow f = -3; -2; 1; 2; 3; 4; 5$$

71. Решить матричное уравнение.

$$\Rightarrow u = -3; -2; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow v = -2; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow x = -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow y = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a = -1; 1; 3; 5$$

$$\Rightarrow d = -3; -1; 1; 3$$

$$\Rightarrow b = -2; 0; 2; 4$$

$$\Rightarrow c = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} au + bx & av + by \\ cu + dx & cv + dy \end{pmatrix}$$

$$\checkmark X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

$$2) X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua + vc & ub + vd \\ xa + yc & xb + yd \end{pmatrix}$$

$$\checkmark X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

72. Решить матричное уравнение.

$$1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(au + bx) + r(av + by) & q(au + bx) + s(av + by) \\ p(cu + dx) + r(cv + dy) & q(cu + dx) + s(cv + dy) \end{pmatrix}$$

$$\checkmark X = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow u = -3; -2; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow v = -2; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow x = -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow y = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a = -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow d = -3; -1; 1; 3$$

$$\rightarrow b = -2; 0; 2; 4$$

$$\rightarrow c = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow r = -3; -1; 1; 3$$

$$\rightarrow q = -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow p = -2; 0; 2; 4$$

$$\rightarrow s = -2; 0; 1; 2; 3; 4$$



**73.** Решить матричное уравнение.

$$\Rightarrow x_{11} = -2; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow x_{12} = -1; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow x_{13} = -2; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow x_{21} = -2; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow x_{22} = -3; -2; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow x_{23} = -3; -2; 1; 2$$

$$\Rightarrow x_{31} = -2; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow x_{32} = -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow x_{33} = -3; -2; 1; 2$$

$$\Rightarrow b_{33} = a_{33} + k_{32}a_{23} + k_{31}a_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{32}a_{22} + k_{31}a_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{31}a_{11}$$

$$\Rightarrow b_{23} = a_{23} + k_{21}a_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = a_{22} + k_{21}a_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{21}a_{11}$$

$$\Rightarrow b_{11} = a_{11}$$

$$\Rightarrow b_{12} = a_{12}$$

$$\Rightarrow b_{13} = a_{13}$$

$$\Rightarrow a_{13} = k_{13}a_{33} + k_{12}a_{23}$$

$$\Rightarrow a_{12} = k_{12}a_{22}$$

$$\Rightarrow a_{23} = k_{23}a_{33}$$

$$\Rightarrow a_{11} = d_1s_1$$

$$\Rightarrow a_{22} = d_2s_2$$

$$\Rightarrow a_{33} = d_3s_3$$

$$\Rightarrow s_1 = -1; 1$$

$$\Rightarrow s_2 = -1; 1$$

$$\Rightarrow s_3 = -1; 1$$

$$\Rightarrow d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad D =$$

$$\bullet 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1;$$

$$\bullet 1, \quad 2, \quad 1, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 1, \quad 3, \quad 3;$$

$$\bullet 3, \quad 1, \quad 2, \quad 6;$$

$$\bullet 3, \quad 2, \quad 2, \quad 6;$$

$$\bullet 1, \quad 4, \quad 1, \quad 4;$$

$$\bullet 1, \quad 4, \quad 2, \quad 4;$$

$$\bullet 1, \quad 1, \quad 5, \quad 5;$$

$$\bullet 2, \quad 5, \quad 2, \quad 10$$

$$\Rightarrow k_{12} = -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2$$

$$\Rightarrow k_{13} = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2; \quad 3$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1$$

$$\Rightarrow k_{31} = -3; \quad -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2$$

$$\Rightarrow k_{32} = -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2$$

$$\Rightarrow k_{21} = -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1$$

$$1) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y_{11} = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{21} + b_{13}x_{31}$$

$$\rightarrow y_{12} = b_{11}x_{12} + b_{12}x_{22} + b_{13}x_{32}$$

$$\rightarrow y_{13} = b_{11}x_{13} + b_{12}x_{23} + b_{13}x_{33}$$

$$\rightarrow y_{21} = b_{21}x_{11} + b_{22}x_{21} + b_{23}x_{31}$$

$$\rightarrow y_{22} = b_{21}x_{12} + b_{22}x_{22} + b_{23}x_{32}$$

$$\rightarrow y_{23} = b_{21}x_{13} + b_{22}x_{23} + b_{23}x_{33}$$

$$\rightarrow y_{31} = b_{31}x_{11} + b_{32}x_{21} + b_{33}x_{31}$$

$$\rightarrow y_{32} = b_{31}x_{12} + b_{32}x_{22} + b_{33}x_{32}$$

$$\rightarrow y_{33} = b_{31}x_{13} + b_{32}x_{23} + b_{33}x_{33}$$

$$2) X \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y_{11} = x_{11}b_{11} + x_{12}b_{21} + x_{13}b_{31}$$

$$\rightarrow y_{12} = x_{11}b_{12} + x_{12}b_{22} + x_{13}b_{32}$$

$$\rightarrow y_{13} = x_{11}b_{13} + x_{12}b_{23} + x_{13}b_{33}$$

$$\rightarrow y_{21} = x_{21}b_{11} + x_{22}b_{21} + x_{23}b_{31}$$

$$\rightarrow y_{22} = x_{21}b_{12} + x_{22}b_{22} + x_{23}b_{32}$$

$$\rightarrow y_{23} = x_{21}b_{13} + x_{22}b_{23} + x_{23}b_{33}$$

$$\rightarrow y_{31} = x_{31}b_{11} + x_{32}b_{21} + x_{33}b_{31}$$

$$\rightarrow y_{32} = x_{31}b_{12} + x_{32}b_{22} + x_{33}b_{32}$$

$$\rightarrow y_{33} = x_{31}b_{13} + x_{32}b_{23} + x_{33}b_{33}$$

74. Найти ранг матрицы.

$$1) \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$$

✓ 1

$$\rightarrow a_{21} = ka_{11}$$

$$\rightarrow a_{22} = ka_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$2) \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \end{pmatrix}$$

✓ 1

$$\rightarrow a_{21} = ka_{11}$$

$$\rightarrow a_{22} = ka_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = ka_{13}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$3) \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{24} & a_{23} & a_{21} \end{pmatrix}$$

✓ 1

$$\rightarrow a_{21} = ka_{11}$$

$$\rightarrow a_{22} = ka_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = ka_{13}$$

$$\rightarrow a_{24} = ka_{14}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$4) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

✓ 2

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$5) \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad 2$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$6) \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad 2$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

75. Найти ранг матрицы.

$$1) \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

✓ 2

$$\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 2; 3$$

$$2) \begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}$$

✓ 2

$$\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23}$$

$$\rightarrow a_{34} = ka_{14} + la_{24}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 2; 3$$

$$3) \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{13} & a_{11} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{23} & a_{21} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{33} & a_{31} & a_{35} \end{pmatrix}$$

✓ 2

- $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$
- $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$
- $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$
- $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$
- $a_{35} = ka_{15} + la_{25}$
- $a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$
- $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$
- $a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$
- $a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$
- $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$

$$4) \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \end{pmatrix}$$

✓ 3

- $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$
- $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$
- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$5) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}$$

✓ 3

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = b_{11}$$

$$\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$6) \begin{pmatrix} a_{24} & a_{21} & a_{25} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{31} & a_{35} & a_{32} & a_{33} \\ a_{14} & a_{11} & a_{15} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

✓ 3

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$



- $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$
- $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$
- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$

76. Найти ранг матрицы.

$$1) \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

✓ 2

$$\rightarrow a_{31} = k_3 a_{11} + l_3 a_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_3 a_{12} + l_3 a_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = k_3 a_{13} + l_3 a_{23}$$

$$\rightarrow a_{34} = k_3 a_{14} + l_3 a_{24}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_4 a_{11} + l_4 a_{21}$$

$$\rightarrow a_{42} = k_4 a_{12} + l_4 a_{22}$$

$$\rightarrow a_{43} = k_4 a_{13} + l_4 a_{23}$$

$$\rightarrow a_{44} = k_4 a_{14} + l_4 a_{24}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow k_3 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_3 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow k_4 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_4 = -2; -1; 2; 3$$

$$2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{32} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{42} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{22} \end{pmatrix}$$

✓ 2

$$\rightarrow a_{31} = k_3 a_{11} + l_3 a_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_3 a_{12} + l_3 a_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = k_3 a_{13} + l_3 a_{23}$$

$$\rightarrow a_{34} = k_3 a_{14} + l_3 a_{24}$$

$$\rightarrow a_{35} = k_3 a_{15} + l_3 a_{25}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_4 a_{11} + l_4 a_{21}$$

- $a_{42} = k_4 a_{12} + l_4 a_{22}$
- $a_{43} = k_4 a_{13} + l_4 a_{23}$
- $a_{44} = k_4 a_{14} + l_4 a_{24}$
- $a_{45} = k_4 a_{15} + l_4 a_{25}$
- $a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$
- $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$
- $a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$
- $a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$
- $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $k_3 = -2; -1; 2; 3$
- $l_3 = -2; -1; 2; 3$
- $k_4 = -2; -1; 2; 3$
- $l_4 = -2; -1; 2; 3$

$$3) \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \end{pmatrix}$$

✓ 3

- $a_{41} = k a_{11} + l a_{21} + m a_{31}$
- $a_{42} = k a_{12} + l a_{22} + m a_{32}$
- $a_{43} = k a_{13} + l a_{23} + m a_{33}$
- $a_{44} = k a_{14} + l a_{24} + m a_{34}$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$
- $m = -2; -1; 2; 3$
- $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{33} = b_{33} + k_{23} b_{23} + k_{13} b_{13}$
- $a_{32} = k_{23} b_{22} + k_{13} b_{12}$
- $a_{31} = k_{13} b_{11}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12} b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12} b_{12}$

- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$

$$4) \begin{pmatrix} a_{31} & a_{34} & a_{35} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{14} & a_{15} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

✓ 3

- $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$
- $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$
- $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$
- $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$
- $a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$
- $m = -2; -1; 2; 3$
- $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$
- $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$
- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$

- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$

5) 
$$\begin{pmatrix} a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} \end{pmatrix}$$

✓ 4

- $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$
- $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$
- $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$
- $a_{41} = k_{14}b_{11}$
- $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$
- $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$
- $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$
- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{14} = b_{14}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $k_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{34} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{44} = -1; 1$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{34} = -2; -1; 1$$

$$6) \begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{22} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{42} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark 4$$

$$\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{45} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_{14}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{14} = b_{14}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = b_{11}$$

$$\rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$$

- $k_{34} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{44} = -1; 1$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$
- $b_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{34} = -2; -1; 1$

77. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

1)  $(a_{12}, a_{11}), (a_{22}, a_{21})$

✓ да

→  $a_{21} = ka_{11}$

→  $a_{22} = ka_{12}$

→  $a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $k = -2; -1; 2; 3$

2)  $(a_{22}, a_{21}, a_{23}), (a_{12}, a_{11}, a_{13})$

✓ да

→  $a_{21} = ka_{11}$

→  $a_{22} = ka_{12}$

→  $a_{23} = ka_{13}$

→  $a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $k = -2; -1; 2; 3$

3)  $(a_{12}, a_{14}, a_{13}, a_{11}), (a_{22}, a_{24}, a_{23}, a_{21})$

✓ да

→  $a_{21} = ka_{11}$

→  $a_{22} = ka_{12}$

→  $a_{23} = ka_{13}$

→  $a_{24} = ka_{14}$

→  $a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $k = -2; -1; 2; 3$

4)  $(a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})$

✓ нет

→  $a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$

→  $a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$



5)  $(a_{22}, a_{23}, a_{21}), (a_{12}, a_{13}, a_{11})$

✓ HET

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

6)  $(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$

✓ HET

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

78. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

1)  $(a_{22}, a_{21}, a_{23}), (a_{12}, a_{11}, a_{13}), (a_{32}, a_{31}, a_{33})$

✓ да

$$\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 2; 3$$

2)  $(a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{32}), (a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{12}), (a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{22})$

✓ да

$$\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23}$$

$$\rightarrow a_{34} = ka_{14} + la_{24}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 2; 3$$

3)  $(a_{22}, a_{21}, a_{23}), (a_{32}, a_{31}, a_{33}), (a_{12}, a_{11}, a_{13})$

✓ нет

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$

4)  $(a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{12}), (a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{32}), (a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{22})$

✓ нет

- $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$
- $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$
- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

79. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

1)  $(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}), (a_{41}, a_{42}, a_{43})$

✓ да

$$\rightarrow a_{11} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{22} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{23} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{31} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{32} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{33} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{41} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{42} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{43} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

2)  $(a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{22}), (a_{41}, a_{43}, a_{44}, a_{42}), (a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{32}), (a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{12})$

✓ да

$$\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$$

$$\rightarrow a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{11} = b_{11} \\
&\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1 \\
&\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2
\end{aligned}$$

$$3) (a_{31}, a_{34}, a_{35}, a_{32}, a_{33}), (a_{21}, a_{24}, a_{25}, a_{22}, a_{23}), (a_{11}, a_{14}, a_{15}, a_{12}, a_{13}), (a_{41}, a_{44}, a_{45}, a_{42}, a_{43})$$

✓ да

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31} \\
&\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32} \\
&\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33} \\
&\rightarrow a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34} \\
&\rightarrow a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35} \\
&\rightarrow k = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow l = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow m = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13} \\
&\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12} \\
&\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11} \\
&\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13} \\
&\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12} \\
&\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11} \\
&\rightarrow a_{13} = b_{13} \\
&\rightarrow a_{12} = b_{12} \\
&\rightarrow a_{11} = b_{11} \\
&\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2
\end{aligned}$$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$4) (a_{42}, a_{43}, a_{41}, a_{44}), (a_{22}, a_{23}, a_{21}, a_{24}), (a_{12}, a_{13}, a_{11}, a_{14}), (a_{32}, a_{33}, a_{31}, a_{34})$$

✓ HET

$$\rightarrow a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_{14}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{14} = b_{14}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = b_{11}$$

$$\rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{44} = -1; 1$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{34} = -2; -1; 1$$

$$5) (a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, a_{32}), (a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{22}), (a_{41}, a_{43}, a_{44}, a_{45}, a_{42}), (a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{12})$$

✓ HET

$$\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{45} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_{14}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{14} = b_{14}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = b_{11}$$

$$\rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{44} = -1; 1$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$



- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$
- $b_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{34} = -2; -1; 1$

80. Выяснить, является ли линейно зависимой каждая из систем векторов в пространстве  $\mathbb{R}_{n,m}$ .

1)  $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{23} & a_{21} \end{pmatrix}$

✓ да

→  $a_{21} = ka_{11}$

→  $a_{22} = ka_{12}$

→  $a_{23} = ka_{13}$

→  $a_{24} = ka_{14}$

→  $a_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $k = -2; -1; 2; 3$

2)  $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$

✓ нет

→  $a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$

→  $a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$

→  $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

3)  $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{34} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{14} & a_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}$

✓ да

→  $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→  $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→  $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

→  $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$

→  $a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$

→  $a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$

- $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$

4)  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{14} & a_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{34} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}$

✓ НЕТ

- $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$
- $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$
- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$

5)  $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{24} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{41} & a_{43} \\ a_{44} & a_{42} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{34} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{14} & a_{12} \end{pmatrix}$

✓ Да

- $a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$
- $a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$
- $a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$
- $a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$

- $k = -2; -1; 2; 3$
- $l = -2; -1; 2; 3$
- $m = -2; -1; 2; 3$
- $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$
- $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$
- $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$
- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$

6)  $\begin{pmatrix} a_{42} & a_{43} \\ a_{41} & a_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{34} \end{pmatrix}$

✓ НЕТ

- $a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$
- $a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$
- $a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$
- $a_{41} = k_{14}b_{11}$
- $a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$
- $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$
- $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$
- $a_{31} = k_{13}b_{11}$
- $a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$
- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{14} = b_{14}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $k_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{34} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{44} = -1; 1$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{14} = -2; -1; 0; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$
- $b_{24} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{34} = -2; -1; 1$

81. В арифметическом векторном пространстве  $\mathbb{R}_{1,2}$  заданы векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{x}$ . Показать, что  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  есть базис пространства  $\mathbb{R}_{1,2}$  и найти координаты вектора  $\mathbf{x}$  в этом базисе, если:

$$\Rightarrow x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$\Rightarrow x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

$$\Rightarrow y_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_2 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\Rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$1) \mathbf{e}_1 = (a_{11}, a_{21}), \mathbf{e}_2 = (a_{12}, a_{22}), \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

$$\checkmark (y_1, y_2)$$

82. В арифметическом векторном пространстве  $\mathbb{R}_{1,3}$  заданы векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{x}$ . Показать, что  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  есть базис пространства  $\mathbb{R}_{1,3}$  и найти координаты вектора  $\mathbf{x}$  в этом базисе, если:

$$\Rightarrow x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$\Rightarrow x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$

$$\Rightarrow x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$$

$$\Rightarrow y_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_2 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_3 = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} =$$

$$\bullet b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33};$$

$$\bullet b_{22}, b_{21}, b_{23}, b_{12}, b_{11}, b_{13}, b_{32}, b_{31}, b_{33};$$

$$\bullet b_{32}, b_{31}, b_{33}, b_{12}, b_{11}, b_{13}, b_{22}, b_{21}, b_{23}$$

$$\Rightarrow b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{13}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{12}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{13} = c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{12} = c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{11} = c_{11}$$

$$\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{13} = -2; -1; 1$$

$$\Rightarrow c_{23} = -1; 1; 2$$

$$1) \mathbf{e}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), \mathbf{e}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}), \mathbf{e}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\checkmark (y_1, y_2, y_3)$$

**83.** В арифметическом векторном пространстве  $\mathbb{R}_{1,4}$  заданы векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{x}$ . Показать, что  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  есть базис пространства  $\mathbb{R}_{1,4}$  и найти координаты вектора  $\mathbf{x}$  в этом базисе, если:

$$\Rightarrow x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4$$

$$\Rightarrow x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4$$

$$\Rightarrow x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4$$

$$\Rightarrow x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4$$

$$\Rightarrow y_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_2 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_3 = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow y_4 = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} =$$

$$\bullet b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44};$$

$$\bullet b_{32}, b_{31}, b_{34}, b_{33}, b_{12}, b_{11}, b_{14}, b_{13}, b_{22}, b_{21}, b_{24}, b_{23}, b_{42}, b_{41}, b_{44}, b_{43};$$

$$\bullet b_{43}, b_{42}, b_{41}, b_{44}, b_{13}, b_{12}, b_{11}, b_{14}, b_{33}, b_{32}, b_{31}, b_{34}, b_{23}, b_{22}, b_{21}, b_{24}$$

$$\Rightarrow b_{44} = c_{44} + k_{34}c_{34} + k_{24}c_{24} + k_{14}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{43} = k_{34}c_{33} + k_{24}c_{23} + k_{14}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{42} = k_{24}c_{22} + k_{14}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{41} = k_{14}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{34} = c_{34} + k_{23}c_{24} + k_{13}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{13}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{24} = c_{24} + k_{12}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{12}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{14} = c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{13} = c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{12} = c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{11} = c_{11}$$

$$\Rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\Rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2$$



$$\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{44} = -1; 1$$

$$\Rightarrow c_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{13} = -2; -1; 1$$

$$\Rightarrow c_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\Rightarrow c_{23} = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{34} = -2; -1; 1$$

$$1) \mathbf{e}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}), \mathbf{e}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}), \mathbf{e}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}), \mathbf{e}_4 = (a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}), \mathbf{x} =$$

$$\checkmark (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

84. Записать матрицу перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  к базису  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  и найти координаты вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ , если:

$$\Rightarrow x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$\Rightarrow x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

$$\Rightarrow y_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_2 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\Rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$1) \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2, \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, (y_1, y_2)$$

85. Записать матрицу перехода от базиса

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (1, x, x^2)$$

к базису  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  и найти координаты вектора  $\mathbf{a}$  в этих базисах если:

$$\Rightarrow x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$\Rightarrow x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$

$$\Rightarrow x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$$

$$\Rightarrow y_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_2 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_3 = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} =$$

$$\bullet b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33};$$

$$\bullet b_{22}, b_{21}, b_{23}, b_{12}, b_{11}, b_{13}, b_{32}, b_{31}, b_{33};$$

$$\bullet b_{32}, b_{31}, b_{33}, b_{12}, b_{11}, b_{13}, b_{22}, b_{21}, b_{23}$$

$$\Rightarrow b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{13}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{12}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{13} = c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{12} = c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{11} = c_{11}$$

$$\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow c_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_{13} = -2; -1; 1$$

$$\Rightarrow c_{23} = -1; 1; 2$$

$$1) \mathbf{e}'_1 = a_{31}x^2 + a_{21}x + a_{11}, \mathbf{e}'_2 = a_{32}x^2 + a_{22}x + a_{12}, \mathbf{e}'_3 = a_{33}x^2 + a_{23}x + a_{13}, \mathbf{a} = x_3x^2 + x_2x + x_1$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a} = y_1\mathbf{e}'_1 + y_2\mathbf{e}'_2 + y_3\mathbf{e}'_3$$

86. Записать матрицу перехода от базиса

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

к базису  $(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  и найти координаты вектора  $a$  в этих базисах если:

$$\Rightarrow x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4$$

$$\Rightarrow x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4$$

$$\Rightarrow x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4$$

$$\Rightarrow x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4$$

$$\Rightarrow y_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_2 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_3 = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow y_4 = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} =$$

$$\bullet b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44};$$

$$\bullet b_{32}, b_{31}, b_{34}, b_{33}, b_{12}, b_{11}, b_{14}, b_{13}, b_{22}, b_{21}, b_{24}, b_{23}, b_{42}, b_{41}, b_{44}, b_{43};$$

$$\bullet b_{43}, b_{42}, b_{41}, b_{44}, b_{13}, b_{12}, b_{11}, b_{14}, b_{33}, b_{32}, b_{31}, b_{34}, b_{23}, b_{22}, b_{21}, b_{24}$$

$$\Rightarrow b_{44} = c_{44} + k_{34}c_{34} + k_{24}c_{24} + k_{14}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{43} = k_{34}c_{33} + k_{24}c_{23} + k_{14}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{42} = k_{24}c_{22} + k_{14}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{41} = k_{14}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{34} = c_{34} + k_{23}c_{24} + k_{13}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{33} = c_{33} + k_{23}c_{23} + k_{13}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{32} = k_{23}c_{22} + k_{13}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{31} = k_{13}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{24} = c_{24} + k_{12}c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{23} = c_{23} + k_{12}c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{22} = c_{22} + k_{12}c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{21} = k_{12}c_{11}$$

$$\Rightarrow b_{14} = c_{14}$$

$$\Rightarrow b_{13} = c_{13}$$

$$\Rightarrow b_{12} = c_{12}$$

$$\Rightarrow b_{11} = c_{11}$$

$$\Rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\Rightarrow c_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\Rightarrow c_{22} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{33} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{44} = -1; 1 \\
&\Rightarrow c_{12} = -1; 0; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{13} = -2; -1; 1 \\
&\Rightarrow c_{14} = -2; -1; 0; 1 \\
&\Rightarrow c_{23} = -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{24} = -1; 0; 1; 2 \\
&\Rightarrow c_{34} = -2; -1; 1
\end{aligned}$$

$$1) \quad e'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{31} & a_{41} \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{32} & a_{42} \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}, \quad e'_4 = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} \\ a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \\ a &= y_1 e'_1 + y_2 e'_2 + y_3 e'_3 + y_4 e'_4 \end{aligned}$$

87. Показать что система векторов  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  пространства  $\mathbb{R}_{1,4}$  или  $\mathbb{R}_{1,5}$  линейно независима, и дополнить ее до базиса всего пространства:

1)  $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{12})$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{32})$ ,  $\mathbf{a}_3 = (a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{22})$

✓  $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$

→  $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

→  $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

→  $a_{31} = k_{13}b_{11}$

→  $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$

→  $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$

→  $a_{21} = k_{12}b_{11}$

→  $a_{13} = b_{13}$

→  $a_{12} = b_{12}$

→  $a_{11} = b_{11}$

→  $k_{13} = -1; 0; 1; 2$

→  $k_{23} = -2; -1; 1; 2$

→  $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $b_{22} = -2; -1; 1; 2$

→  $b_{33} = -2; -1; 1; 2$

→  $b_{12} = -1; 0; 1; 2$

→  $b_{13} = -2; -1; 1$

→  $b_{23} = -1; 1; 2$

2)  $\mathbf{a}_1 = (a_{24}, a_{21}, a_{25}, a_{22}, a_{23})$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a_{24}, a_{31}, a_{35}, a_{32}, a_{33})$ ,  $\mathbf{a}_3 = (a_{14}, a_{11}, a_{15}, a_{12}, a_{13})$

✓  $\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0)$

→  $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$

→  $a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$

→  $a_{31} = k_{13}b_{11}$

- $a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$
- $a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$
- $a_{21} = k_{12}b_{11}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{11} = b_{11}$
- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$

88. Найти ранг и какой-либо базис системы векторов:

1)  $\mathbf{a}_1 = (a_{22}, a_{12}, a_{32})$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{11}, a_{31})$ ,  $\mathbf{a}_3 = (a_{23}, a_{13}, a_{33})$

✓ 2,  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$

→  $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→  $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→  $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

→  $a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$

→  $a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$

→  $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $k = -2; -1; 2; 3$

→  $l = -2; -1; 2; 3$

2)  $\mathbf{a}_1 = (a_{31}, a_{11}, a_{21})$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a_{33}, a_{13}, a_{23})$ ,  $\mathbf{a}_3 = (a_{34}, a_{14}, a_{24})$ ,  $\mathbf{a}_4 = (a_{32}, a_{12}, a_{22})$

✓ 2,  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$

→  $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→  $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→  $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$

→  $a_{34} = ka_{14} + la_{24}$

→  $a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$

→  $a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$

→  $a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$

→  $a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$

→  $k = -2; -1; 2; 3$

→  $l = -2; -1; 2; 3$

3)  $\mathbf{a}_1 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a_{14}, a_{24}, a_{34})$ ,  $\mathbf{a}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ ,  $\mathbf{a}_4 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ ,  $\mathbf{a}_5 = (a_{15}, a_{25}, a_{35})$

✓ 2,  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$

→  $a_{31} = ka_{11} + la_{21}$

→  $a_{32} = ka_{12} + la_{22}$

→  $a_{33} = ka_{13} + la_{23}$



$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{34} = ka_{14} + la_{24} \\
&\rightarrow a_{35} = ka_{15} + la_{25} \\
&\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7 \\
&\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5 \\
&\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6 \\
&\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow k = -2; -1; 2; 3 \\
&\rightarrow l = -2; -1; 2; 3
\end{aligned}$$

$$4) \mathbf{a}_1 = (a_{22}, a_{32}, a_{12}), \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{31}, a_{11}), \mathbf{a}_3 = (a_{23}, a_{33}, a_{13})$$

$$\checkmark 3, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13} \\
&\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12} \\
&\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11} \\
&\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13} \\
&\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12} \\
&\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11} \\
&\rightarrow a_{13} = b_{13} \\
&\rightarrow a_{12} = b_{12} \\
&\rightarrow a_{11} = b_{11} \\
&\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1 \\
&\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2
\end{aligned}$$

$$5) \mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{31}, a_{21}), \mathbf{a}_2 = (a_{13}, a_{33}, a_{23}), \mathbf{a}_3 = (a_{14}, a_{34}, a_{24}), \mathbf{a}_4 = (a_{12}, a_{32}, a_{22}),$$

$$\checkmark 3, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13} \\
&\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12} \\
&\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11} \\
&\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13} \\
&\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12} \\
&\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11} \\
&\rightarrow a_{13} = b_{13} \\
&\rightarrow a_{12} = b_{12} \\
&\rightarrow a_{11} = b_{11} \\
&\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1 \\
&\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2
\end{aligned}$$

$$6) \mathbf{a}_1 = (a_{24}, a_{34}, a_{14}), \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{31}, a_{11}), \mathbf{a}_3 = (a_{25}, a_{35}, a_{15}), \mathbf{a}_4 = (a_{22}, a_{32}, a_{12}), \mathbf{a}_5 = (a_{23}, a_{33}, a_{13})$$

$$\checkmark 3, (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5 \\
&\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13} \\
&\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12} \\
&\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11} \\
&\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13} \\
&\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12} \\
&\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11} \\
&\rightarrow a_{13} = b_{13} \\
&\rightarrow a_{12} = b_{12} \\
&\rightarrow a_{11} = b_{11}
\end{aligned}$$

- $k_{13} = -1; 0; 1; 2$
- $k_{23} = -2; -1; 1; 2$
- $k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $b_{22} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{33} = -2; -1; 1; 2$
- $b_{12} = -1; 0; 1; 2$
- $b_{13} = -2; -1; 1$
- $b_{23} = -1; 1; 2$

89. Найти ранг и какой-либо базис системы векторов:

$$1) \quad f_1 = a_{22}x^3 + a_{32}x^2 + a_{12}x + a_{42}, \quad f_2 = a_{21}x^3 + a_{31}x^2 + a_{11}x + a_{41}, \quad f_3 = a_{23}x^3 + a_{33}x^2 + a_{13}x + a_{43},$$

$$\checkmark \quad 2, (f_1, f_2)$$

$$\rightarrow a_{31} = k_3a_{11} + l_3a_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_3a_{12} + l_3a_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = k_3a_{13} + l_3a_{23}$$

$$\rightarrow a_{34} = k_3a_{14} + l_3a_{24}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_4a_{11} + l_4a_{21}$$

$$\rightarrow a_{42} = k_4a_{12} + l_4a_{22}$$

$$\rightarrow a_{43} = k_4a_{13} + l_4a_{23}$$

$$\rightarrow a_{44} = k_4a_{14} + l_4a_{24}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow k_3 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_3 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow k_4 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_4 = -2; -1; 2; 3$$

$$2) \quad f_1 = a_{11}x^3 + a_{31}x^2 + a_{41}x + a_{21}, \quad f_2 = a_{13}x^3 + a_{33}x^2 + a_{43}x + a_{23}, \quad f_3 = a_{14}x^3 + a_{34}x^2 + a_{44}x + a_{24},$$

$$\checkmark \quad 2, (f_1, f_5)$$

$$\rightarrow a_{31} = k_3a_{11} + l_3a_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_3a_{12} + l_3a_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = k_3a_{13} + l_3a_{23}$$

$$\rightarrow a_{34} = k_3a_{14} + l_3a_{24}$$

$$\rightarrow a_{35} = k_3a_{15} + l_3a_{25}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_4a_{11} + l_4a_{21}$$

$$\rightarrow a_{42} = k_4a_{12} + l_4a_{22}$$

$$\rightarrow a_{43} = k_4a_{13} + l_4a_{23}$$

$$\rightarrow a_{44} = k_4a_{14} + l_4a_{24}$$

$$\rightarrow a_{45} = k_4a_{15} + l_4a_{25}$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{13} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{23} = -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow k_3 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_3 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow k_4 = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l_4 = -2; -1; 2; 3$$

$$3) f_1 = a_{21}x^3 + a_{41}x^2 + a_{31}x + a_{11}, f_2 = a_{23}x^3 + a_{43}x^2 + a_{33}x + a_{13}, f_3 = a_{24}x^3 + a_{44}x^2 + a_{34}x + a_{14},$$

$$\checkmark 3, (f_1, f_2, f_4)$$

$$\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$$

$$\rightarrow a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = b_{11}$$

$$\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$4) f_1 = a_{31}x^3 + a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{41}, f_2 = a_{34}x^3 + a_{24}x^2 + a_{14}x + a_{44}, f_3 = a_{35}x^3 + a_{25}x^2 + a_{15}x + a_{45},$$

$$\checkmark 3, (f_1, f_4, f_5)$$

$$\rightarrow a_{41} = ka_{11} + la_{21} + ma_{31}$$

$$\rightarrow a_{42} = ka_{12} + la_{22} + ma_{32}$$

$$\rightarrow a_{43} = ka_{13} + la_{23} + ma_{33}$$

$$\rightarrow a_{44} = ka_{14} + la_{24} + ma_{34}$$

$$\rightarrow a_{45} = ka_{15} + la_{25} + ma_{35}$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{14} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{24} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{34} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = b_{11}$$

$$\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$5) f_1 = a_{42}x^3 + a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{32}, f_2 = a_{43}x^3 + a_{23}x^2 + a_{13}x + a_{33}, f_3 = a_{41}x^3 + a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{31},$$

$$\checkmark 4, (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

$$\rightarrow a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_{14}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{14} = b_{14}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = b_{11}$$

$$\rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{44} = -1; 1$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{34} = -2; -1; 1$$

$$6) \quad f_1 = a_{31}x^3 + a_{21}x^2 + a_{41}x + a_{11}, \quad f_2 = a_{33}x^3 + a_{23}x^2 + a_{43}x + a_{13}, \quad f_3 = a_{34}x^3 + a_{24}x^2 + a_{44}x + a_{14},$$

$$\checkmark \quad 4, (f_1, f_2, f_3, f_5)$$

$$\rightarrow a_{15} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{25} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{35} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{45} = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5$$

$$\rightarrow a_{44} = b_{44} + k_{34}b_{34} + k_{24}b_{24} + k_{14}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{43} = k_{34}b_{33} + k_{24}b_{23} + k_{14}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{42} = k_{24}b_{22} + k_{14}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{41} = k_{14}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{34} = b_{34} + k_{23}b_{24} + k_{13}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{33} = b_{33} + k_{23}b_{23} + k_{13}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{32} = k_{23}b_{22} + k_{13}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{31} = k_{13}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{24} = b_{24} + k_{12}b_{14}$$

$$\rightarrow a_{23} = b_{23} + k_{12}b_{13}$$

$$\rightarrow a_{22} = b_{22} + k_{12}b_{12}$$

$$\rightarrow a_{21} = k_{12}b_{11}$$

$$\rightarrow a_{14} = b_{14}$$

$$\rightarrow a_{13} = b_{13}$$

$$\rightarrow a_{12} = b_{12}$$

$$\rightarrow a_{11} = b_{11}$$

$$\rightarrow k_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow k_{24} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{34} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{13} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_{12} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b_{22} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{33} = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{44} = -1; 1$$

$$\rightarrow b_{12} = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{13} = -2; -1; 1$$

$$\rightarrow b_{14} = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow b_{23} = -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b_{24} = -1; 0; 1; 2$$



$$\rightarrow b_{34} = -2; -1; 1$$

90. Найти базис ядра и базис образа линейного оператора, заданного матрицей  $A$ :

$$1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

✓ базис ядра:  $\left( \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ , базис образа:  $\left( \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \right)$

$$\rightarrow a_{31} = ka_{11} + la_{21}$$

$$\rightarrow a_{32} = ka_{12} + la_{22}$$

$$\rightarrow a_{33} = ka_{13} + la_{23}$$

$$\rightarrow k = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow l = -2; -1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{13} = -a_{11}z_{11} - a_{12}z_{12}$$

$$\rightarrow a_{23} = -a_{21}z_{11} - a_{22}z_{12}$$

$$\rightarrow z_{11} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow z_{12} = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a_{11} = -3; -1; 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow a_{12} = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a_{21} = -4; -2; 2; 4; 6$$

$$\rightarrow a_{22} = -5; -3; -1; 1; 3; 5$$

$$2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

✓ базис ядра:  $\left( \begin{bmatrix} -l \\ k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ m \\ -l \end{bmatrix} \right)$ , базис образа:  $\left( \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right)$

$$\rightarrow a_{11} = kb_1$$

$$\rightarrow a_{21} = kb_2$$

$$\rightarrow a_{31} = kb_3$$

$$\rightarrow a_{12} = lb_1$$

$$\rightarrow a_{22} = lb_2$$

$$\rightarrow a_{32} = lb_3$$

$$\rightarrow a_{13} = mb_1$$

$$\rightarrow a_{23} = mb_2$$

$$\rightarrow a_{33} = mb_3$$

$$\rightarrow k = -4; -2; 2; 4$$

$$\rightarrow l = -9; -3; 3; 9$$

$$\rightarrow m = -7; -5; 5; 7$$

$$\rightarrow b_1 = -2; -1; 4$$

$$\rightarrow b_2 = -3; 1; 3$$

$$\rightarrow b_3 = -5; 2; 3$$

91. Дана матрица  $A$  линейного оператора  $\varphi$  векторного пространства  $U_n$  в базисе  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Найти матрицу этого оператора в базисе  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ :

$$\Rightarrow c_{11} = Ab_{11} + Bb_{21}$$

$$\Rightarrow c_{12} = Ab_{12} + Bb_{22}$$

$$\Rightarrow c_{21} = Cb_{11} + Db_{21}$$

$$\Rightarrow c_{22} = Cb_{12} + Db_{22}$$

$$\Rightarrow b_{11} = a_{11}a + a_{12}c$$

$$\Rightarrow b_{12} = a_{11}b + a_{12}d$$

$$\Rightarrow b_{21} = a_{21}a + a_{22}c$$

$$\Rightarrow b_{22} = a_{21}b + a_{22}d$$

$$\Rightarrow a_{11} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_{12} = -3; -1; 1; 3$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_{22} = 3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow A = \frac{d}{\Delta}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{b}{\Delta}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{c}{\Delta}$$

$$\Rightarrow D = \frac{a}{\Delta}$$

$$\Rightarrow a = d(bc + \Delta)$$

$$\Rightarrow \Delta = -1; 1$$

$$\Rightarrow d = -1; 1$$

$$\Rightarrow b = -3; -2; 2; 3$$

$$\Rightarrow c = -2; -1; 1; 2$$

$$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} e'_1 = ae_1 + ce_2 \\ e'_2 = be_1 + de_2 \end{matrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} e_1 = ae'_1 + ce'_2 \\ e_2 = be'_1 + de'_2 \end{matrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

**92.** Дана матрица  $A$  линейного оператора  $\varphi$  векторного пространства  $U_n$  в базисе  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Найти матрицу этого оператора в базисе  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ :

$$\Rightarrow c_{11} = S_{11}b_{11} + S_{12}b_{21} + S_{13}b_{31}$$

$$\Rightarrow c_{12} = S_{11}b_{12} + S_{12}b_{22} + S_{13}b_{32}$$

$$\Rightarrow c_{13} = S_{11}b_{13} + S_{12}b_{23} + S_{13}b_{33}$$

$$\Rightarrow c_{21} = S_{21}b_{11} + S_{22}b_{21} + S_{23}b_{31}$$

$$\Rightarrow c_{22} = S_{21}b_{12} + S_{22}b_{22} + S_{23}b_{32}$$

$$\Rightarrow c_{23} = S_{21}b_{13} + S_{22}b_{23} + S_{23}b_{33}$$

$$\Rightarrow c_{31} = S_{31}b_{11} + S_{32}b_{21} + S_{33}b_{31}$$

$$\Rightarrow c_{32} = S_{31}b_{12} + S_{32}b_{22} + S_{33}b_{32}$$

$$\Rightarrow c_{33} = S_{31}b_{13} + S_{32}b_{23} + S_{33}b_{33}$$

$$\Rightarrow b_{11} = a_{11}s_{11} + a_{12}s_{21} + a_{13}s_{31}$$

$$\Rightarrow b_{12} = a_{11}s_{12} + a_{12}s_{22} + a_{13}s_{32}$$

$$\Rightarrow b_{13} = a_{11}s_{13} + a_{12}s_{23} + a_{13}s_{33}$$

$$\Rightarrow b_{21} = a_{21}s_{11} + a_{22}s_{21} + a_{23}s_{31}$$

$$\Rightarrow b_{22} = a_{21}s_{12} + a_{22}s_{22} + a_{23}s_{32}$$

$$\Rightarrow b_{23} = a_{21}s_{13} + a_{22}s_{23} + a_{23}s_{33}$$

$$\Rightarrow b_{31} = a_{31}s_{11} + a_{32}s_{21} + a_{33}s_{31}$$

$$\Rightarrow b_{32} = a_{31}s_{12} + a_{32}s_{22} + a_{33}s_{32}$$

$$\Rightarrow b_{33} = a_{31}s_{13} + a_{32}s_{23} + a_{33}s_{33}$$

$$\Rightarrow a_{11} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_{12} = -3; -1; 1; 3$$

$$\Rightarrow a_{13} = -3; -1; 1; 3$$

$$\Rightarrow a_{21} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_{22} = 3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_{31} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_{32} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_{33} = -3; -1; 1; 3$$

$$\Rightarrow S_{11} = R_{11} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12}$$

$$\Rightarrow S_{21} = -k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$$

$$\Rightarrow S_{31} = -k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$$

$$\Rightarrow S_{12} = R_{12} - k_{32}S_{13}$$

$$\Rightarrow S_{22} = R_{22} - k_{32}S_{23}$$

$$\Rightarrow S_{32} = -k_{32}S_{33}$$

$$\Rightarrow S_{13} = R_{13}$$

$$\Rightarrow S_{23} = R_{23}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow S_{33} = R_{33} \\
&\Rightarrow R_{13} = -k_{13}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{23} = -k_{23}R_{22} \\
&\Rightarrow R_{12} = -k_{12}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r_{11}} \\
&\Rightarrow R_{22} = \frac{1}{r_{22}} \\
&\Rightarrow R_{33} = \frac{1}{r_{33}} \\
&\Rightarrow s_{33} = r_{33} + k_{32}r_{23} + k_{31}r_{13} \\
&\Rightarrow s_{32} = k_{32}r_{22} + k_{31}r_{12} \\
&\Rightarrow s_{31} = k_{31}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{23} = r_{23} + k_{21}r_{13} \\
&\Rightarrow s_{22} = r_{22} + k_{21}r_{12} \\
&\Rightarrow s_{21} = k_{21}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{11} = r_{11} \\
&\Rightarrow s_{12} = r_{12} \\
&\Rightarrow s_{13} = r_{13} \\
&\Rightarrow r_{13} = k_{13}r_{33} + k_{12}r_{23} \\
&\Rightarrow r_{12} = k_{12}r_{22} \\
&\Rightarrow r_{23} = k_{23}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{11} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{22} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{33} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{12} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{13} = -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 \\
&\Rightarrow k_{23} = -2 ; -1 ; 1 ; 2 \\
&\Rightarrow k_{31} = -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 \\
&\Rightarrow k_{32} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{21} = -1 ; 1
\end{aligned}$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + s_{31}e_3 \\ e'_2 &= s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + s_{32}e_3 \\ e'_3 &= s_{13}e_1 + s_{23}e_2 + s_{33}e_3 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1 &= s_{11}e'_1 + s_{21}e'_2 + s_{31}e'_3 \\ e_2 &= s_{12}e'_1 + s_{22}e'_2 + s_{32}e'_3 \\ e_3 &= s_{13}e'_1 + s_{23}e'_2 + s_{33}e'_3 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**93.** Дана матрица  $A$  линейного оператора  $\varphi$  векторного пространства  $U_n$  в базисе  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Найти матрицу этого оператора в базисе  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ :

$$\Rightarrow c_{11} = S_{11}b_{11} + S_{12}b_{21} + S_{13}b_{31} + S_{14}b_{41}$$

$$\Rightarrow c_{12} = S_{11}b_{12} + S_{12}b_{22} + S_{13}b_{32} + S_{14}b_{42}$$

$$\Rightarrow c_{13} = S_{11}b_{13} + S_{12}b_{23} + S_{13}b_{33} + S_{14}b_{43}$$

$$\Rightarrow c_{14} = S_{11}b_{14} + S_{12}b_{24} + S_{13}b_{34} + S_{14}b_{44}$$

$$\Rightarrow c_{21} = S_{21}b_{11} + S_{22}b_{21} + S_{23}b_{31} + S_{24}b_{41}$$

$$\Rightarrow c_{22} = S_{21}b_{12} + S_{22}b_{22} + S_{23}b_{32} + S_{24}b_{42}$$

$$\Rightarrow c_{23} = S_{21}b_{13} + S_{22}b_{23} + S_{23}b_{33} + S_{24}b_{43}$$

$$\Rightarrow c_{24} = S_{21}b_{14} + S_{22}b_{24} + S_{23}b_{34} + S_{24}b_{44}$$

$$\Rightarrow c_{31} = S_{31}b_{11} + S_{32}b_{21} + S_{33}b_{31} + S_{34}b_{41}$$

$$\Rightarrow c_{32} = S_{31}b_{12} + S_{32}b_{22} + S_{33}b_{32} + S_{34}b_{42}$$

$$\Rightarrow c_{33} = S_{31}b_{13} + S_{32}b_{23} + S_{33}b_{33} + S_{34}b_{43}$$

$$\Rightarrow c_{34} = S_{31}b_{14} + S_{32}b_{24} + S_{33}b_{34} + S_{34}b_{44}$$

$$\Rightarrow c_{41} = S_{41}b_{11} + S_{42}b_{21} + S_{43}b_{31} + S_{44}b_{41}$$

$$\Rightarrow c_{42} = S_{41}b_{12} + S_{42}b_{22} + S_{43}b_{32} + S_{44}b_{42}$$

$$\Rightarrow c_{43} = S_{41}b_{13} + S_{42}b_{23} + S_{43}b_{33} + S_{44}b_{43}$$

$$\Rightarrow c_{44} = S_{41}b_{14} + S_{42}b_{24} + S_{43}b_{34} + S_{44}b_{44}$$

$$\Rightarrow b_{11} = a_{11}s_{11} + a_{12}s_{21} + a_{13}s_{31} + a_{14}s_{41}$$

$$\Rightarrow b_{12} = a_{11}s_{12} + a_{12}s_{22} + a_{13}s_{32} + a_{14}s_{42}$$

$$\Rightarrow b_{13} = a_{11}s_{13} + a_{12}s_{23} + a_{13}s_{33} + a_{14}s_{43}$$

$$\Rightarrow b_{14} = a_{11}s_{14} + a_{12}s_{24} + a_{13}s_{34} + a_{14}s_{44}$$

$$\Rightarrow b_{21} = a_{21}s_{11} + a_{22}s_{21} + a_{23}s_{31} + a_{24}s_{41}$$

$$\Rightarrow b_{22} = a_{21}s_{12} + a_{22}s_{22} + a_{23}s_{32} + a_{24}s_{42}$$

$$\Rightarrow b_{23} = a_{21}s_{13} + a_{22}s_{23} + a_{23}s_{33} + a_{24}s_{43}$$

$$\Rightarrow b_{24} = a_{21}s_{14} + a_{22}s_{24} + a_{23}s_{34} + a_{24}s_{44}$$

$$\Rightarrow b_{31} = a_{31}s_{11} + a_{32}s_{21} + a_{33}s_{31} + a_{34}s_{41}$$

$$\Rightarrow b_{32} = a_{31}s_{12} + a_{32}s_{22} + a_{33}s_{32} + a_{34}s_{42}$$

$$\Rightarrow b_{33} = a_{31}s_{13} + a_{32}s_{23} + a_{33}s_{33} + a_{34}s_{43}$$

$$\Rightarrow b_{34} = a_{31}s_{14} + a_{32}s_{24} + a_{33}s_{34} + a_{34}s_{44}$$

$$\Rightarrow b_{41} = a_{41}s_{11} + a_{42}s_{21} + a_{43}s_{31} + a_{44}s_{41}$$

$$\Rightarrow b_{42} = a_{41}s_{12} + a_{42}s_{22} + a_{43}s_{32} + a_{44}s_{42}$$

$$\Rightarrow b_{43} = a_{41}s_{13} + a_{42}s_{23} + a_{43}s_{33} + a_{44}s_{43}$$

$$\Rightarrow b_{44} = a_{41}s_{14} + a_{42}s_{24} + a_{43}s_{34} + a_{44}s_{44}$$

$$\Rightarrow a_{11} = 1; 2$$

$$\Rightarrow a_{12} = -1; 3$$

$$\Rightarrow a_{13} = -1; 1$$



$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a_{14} = -2; -1; 1 \\
&\Rightarrow a_{21} = -2; -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow a_{22} = -5; -1; 0; 1 \\
&\Rightarrow a_{23} = -1; 1; 2 \\
&\Rightarrow a_{24} = -2; -1; 1 \\
&\Rightarrow a_{31} = -3; -1; 1 \\
&\Rightarrow a_{32} = -1; 1; 3 \\
&\Rightarrow a_{33} = -3; -1; 1 \\
&\Rightarrow a_{34} = -1; 1; 0; 5 \\
&\Rightarrow a_{31} = -3; -1; 1 \\
&\Rightarrow a_{32} = -2; 2 \\
&\Rightarrow a_{33} = -4; -2; 0; 1 \\
&\Rightarrow a_{34} = -1; 2; 4 \\
&\Rightarrow a_{41} = -4; -1; 0; 2 \\
&\Rightarrow a_{42} = -1; 1 \\
&\Rightarrow a_{43} = -3; -2; 0; 1 \\
&\Rightarrow a_{44} = -1; 2 \\
&\Rightarrow S_{11} = -k_{41}S_{14} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} + R_{11} \\
&\Rightarrow S_{21} = -k_{41}S_{24} - k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22} \\
&\Rightarrow S_{31} = -k_{41}S_{34} - k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32} \\
&\Rightarrow S_{41} = -k_{41}S_{44} - k_{31}S_{43} - k_{21}S_{42} \\
&\Rightarrow S_{12} = -k_{42}S_{14} - k_{32}S_{13} + R_{12} \\
&\Rightarrow S_{22} = -k_{42}S_{24} - k_{32}S_{23} + R_{22} \\
&\Rightarrow S_{32} = -k_{42}S_{34} - k_{32}S_{33} \\
&\Rightarrow S_{42} = -k_{42}S_{44} - k_{32}S_{43} \\
&\Rightarrow S_{13} = -k_{43}S_{14} + R_{13} \\
&\Rightarrow S_{23} = -k_{43}S_{24} + R_{23} \\
&\Rightarrow S_{33} = -k_{43}S_{34} + R_{33} \\
&\Rightarrow S_{43} = -k_{43}S_{44} \\
&\Rightarrow S_{14} = R_{14} \\
&\Rightarrow S_{24} = R_{24} \\
&\Rightarrow S_{34} = R_{34} \\
&\Rightarrow S_{44} = R_{44} \\
&\Rightarrow R_{14} = -k_{14}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{24} = -k_{24}R_{22} \\
&\Rightarrow R_{34} = -k_{34}R_{33} \\
&\Rightarrow R_{13} = -k_{13}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{23} = -k_{23}R_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow R_{12} = -k_{12}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r_{11}} \\
&\Rightarrow R_{22} = \frac{1}{r_{22}} \\
&\Rightarrow R_{33} = \frac{1}{r_{33}} \\
&\Rightarrow R_{44} = \frac{1}{r_{44}} \\
&\Rightarrow s_{44} = k_{41}r_{14} + k_{42}r_{24} + k_{43}r_{34} + r_{44} \\
&\Rightarrow s_{43} = k_{41}r_{13} + k_{42}r_{23} + k_{43}r_{33} \\
&\Rightarrow s_{42} = k_{41}r_{12} + k_{42}r_{22} \\
&\Rightarrow s_{41} = k_{41}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{34} = k_{31}r_{14} + k_{32}r_{24} + r_{34} \\
&\Rightarrow s_{33} = k_{31}r_{13} + k_{32}r_{23} + r_{33} \\
&\Rightarrow s_{32} = k_{31}r_{12} + k_{32}r_{22} \\
&\Rightarrow s_{31} = k_{31}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{24} = k_{21}r_{14} + r_{24} \\
&\Rightarrow s_{23} = k_{21}r_{13} + r_{23} \\
&\Rightarrow s_{22} = k_{21}r_{12} + r_{22} \\
&\Rightarrow s_{21} = k_{21}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{11} = r_{11} \\
&\Rightarrow s_{12} = r_{12} \\
&\Rightarrow s_{13} = r_{13} \\
&\Rightarrow s_{14} = r_{14} \\
&\Rightarrow r_{14} = k_{12}r_{24} + k_{13}r_{34} + k_{14}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{13} = k_{12}r_{23} + k_{13}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{12} = k_{12}r_{22} \\
&\Rightarrow r_{24} = k_{23}r_{34} + k_{24}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{23} = k_{23}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{34} = k_{34}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{11} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{22} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{33} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{44} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{12} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{13} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{14} = -1 ; 0 ; 1 ; 2 \\
&\Rightarrow k_{23} = -1 ; 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_{24} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{34} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{21} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{31} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{41} = -2; -1; 0; 1$$

$$\Rightarrow k_{32} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{42} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{43} = -1; 1$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + s_{31}e_3 + s_{41}e_4 \\ e'_2 &= s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + s_{32}e_3 + s_{42}e_4 \\ e'_3 &= s_{13}e_1 + s_{23}e_2 + s_{33}e_3 + s_{43}e_4 \\ e'_4 &= s_{14}e_1 + s_{24}e_2 + s_{34}e_3 + s_{44}e_4 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1 &= s_{11}e'_1 + s_{21}e'_2 + s_{31}e'_3 + s_{41}e'_4 \\ e_2 &= s_{12}e'_1 + s_{22}e'_2 + s_{32}e'_3 + s_{42}e'_4 \\ e_3 &= s_{13}e'_1 + s_{23}e'_2 + s_{33}e'_3 + s_{43}e'_4 \\ e_4 &= s_{14}e'_1 + s_{24}e'_2 + s_{34}e'_3 + s_{44}e'_4 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

**94.** Найти матрицу  $S$ , трансформирующую матрицу  $A$  к диагональному виду  $D$ , и найти этот вид:

$$\Rightarrow a_{11} = ab_{11} + bb_{21}$$

$$\Rightarrow a_{12} = ab_{12} + bb_{22}$$

$$\Rightarrow a_{21} = cb_{11} + db_{21}$$

$$\Rightarrow a_{22} = cb_{12} + db_{22}$$

$$\Rightarrow b_{11} = d_{11}A + d_{12}C$$

$$\Rightarrow b_{12} = d_{11}B + d_{12}D$$

$$\Rightarrow b_{21} = d_{21}A + d_{22}C$$

$$\Rightarrow b_{22} = d_{21}B + d_{22}D$$

$$\Rightarrow d_{11}, \quad d_{22} =$$

- $-5, \quad -3;$
- $-5, \quad -2;$
- $-5, \quad -1;$
- $-5, \quad 1;$
- $-5, \quad 2;$
- $-5, \quad 3;$
- $-5, \quad 5;$
- $-3, \quad -2;$
- $-3, \quad -1;$
- $-3, \quad 0;$
- $-3, \quad 1;$
- $-3, \quad 2;$
- $-3, \quad 3;$
- $-3, \quad 5;$
- $-2, \quad -1;$
- $-2, \quad 1;$
- $-2, \quad 2;$
- $-2, \quad 3;$
- $-2, \quad 4;$
- $-2, \quad 5;$
- $-1, \quad 0;$
- $-1, \quad 1;$
- $-1, \quad 2;$
- $-1, \quad 3;$
- $-1, \quad 4;$
- $-1, \quad 5;$
- $0, \quad 3;$
- $0, \quad 5;$
- $1, \quad 2;$
- $1, \quad 3;$
- $1, \quad 4;$
- $1, \quad 5;$
- $2, \quad 3;$
- $2, \quad 4;$
- $2, \quad 5;$
- $3, \quad 5$

$$\Rightarrow d_{12} = 0$$

$$\Rightarrow d_{21} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{d}{\Delta}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{b}{\Delta}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{c}{\Delta}$$

$$\Rightarrow D = \frac{a}{\Delta}$$

$$\Rightarrow a = d(bc + \Delta)$$

$$\Rightarrow \Delta = -1; 1$$

$$\Rightarrow d = -1; 1$$

$$\Rightarrow b = -3; -2; 2; 3$$

$$\Rightarrow c = -2; -1; 1; 2$$

$$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$$

**95.** Найти матрицу  $S$ , трансформирующую матрицу  $A$  к диагональному виду  $D$ , и найти этот вид:

$$\Rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$$

$$\Rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$$

$$\Rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$$

$$\Rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$$

$$\Rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$$

$$\Rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$$

$$\Rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$$

$$\Rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$$

$$\Rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$$

$$\Rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$$

$$\Rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$$

$$\Rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$$

$$\Rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$$

$$\Rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$$

$$\Rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$$

$$\Rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$$

$$\Rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$$

$$\Rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$$

$$\Rightarrow d_{33} = d_{22} + l$$

$$\Rightarrow d_{22} = d_{11} + k$$

$$\Rightarrow d_{11} = -3; -2; -1$$

$$\Rightarrow k, \quad l =$$

$$\bullet 0, \quad 1;$$

$$\bullet 0, \quad 2;$$

$$\bullet 0, \quad 3;$$

$$\bullet 1, \quad 0;$$

$$\bullet 1, \quad 1;$$

$$\bullet 1, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 3;$$

$$\bullet 2, \quad 0;$$

$$\bullet 2, \quad 1;$$

$$\bullet 2, \quad 2;$$

$$\bullet 3, \quad 0;$$

$$\bullet 3, \quad 1$$

$$\Rightarrow d_{12} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d_{13} = 0 \\
&\Rightarrow d_{21} = 0 \\
&\Rightarrow d_{23} = 0 \\
&\Rightarrow d_{31} = 0 \\
&\Rightarrow d_{32} = 0 \\
&\Rightarrow S_{11} = R_{11} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} \\
&\Rightarrow S_{21} = -k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22} \\
&\Rightarrow S_{31} = -k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32} \\
&\Rightarrow S_{12} = R_{12} - k_{32}S_{13} \\
&\Rightarrow S_{22} = R_{22} - k_{32}S_{23} \\
&\Rightarrow S_{32} = -k_{32}S_{33} \\
&\Rightarrow S_{13} = R_{13} \\
&\Rightarrow S_{23} = R_{23} \\
&\Rightarrow S_{33} = R_{33} \\
&\Rightarrow R_{13} = -k_{13}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{23} = -k_{23}R_{22} \\
&\Rightarrow R_{12} = -k_{12}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r_{11}} \\
&\Rightarrow R_{22} = \frac{1}{r_{22}} \\
&\Rightarrow R_{33} = \frac{1}{r_{33}} \\
&\Rightarrow s_{33} = r_{33} + k_{32}r_{23} + k_{31}r_{13} \\
&\Rightarrow s_{32} = k_{32}r_{22} + k_{31}r_{12} \\
&\Rightarrow s_{31} = k_{31}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{23} = r_{23} + k_{21}r_{13} \\
&\Rightarrow s_{22} = r_{22} + k_{21}r_{12} \\
&\Rightarrow s_{21} = k_{21}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{11} = r_{11} \\
&\Rightarrow s_{12} = r_{12} \\
&\Rightarrow s_{13} = r_{13} \\
&\Rightarrow r_{13} = k_{13}r_{33} + k_{12}r_{23} \\
&\Rightarrow r_{12} = k_{12}r_{22} \\
&\Rightarrow r_{23} = k_{23}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{11} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{22} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{33} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{12} = -1 ; 1
\end{aligned}$$



$$\Rightarrow k_{13} = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{31} = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{32} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{21} = -1; 1$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

**96.** Найти матрицу  $S$ , трансформирующую матрицу  $A$  к диагональному виду  $D$ , и найти этот вид:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\
 \Rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\
 \Rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\
 \Rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\
 \Rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\
 \Rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\
 \Rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\
 \Rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\
 \Rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\
 \Rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\
 \Rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\
 \Rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\
 \Rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\
 \Rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\
 \Rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\
 \Rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\
 \Rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\
 \Rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\
 \Rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\
 \Rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\
 \Rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\
 \Rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\
 \Rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
 \Rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
 \Rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
 \Rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
 \Rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
 \Rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
 \Rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
 \Rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
 \Rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
 \Rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d_{11}, \quad d_{22}, \quad d_{33}, \quad d_{44} = \\
& \bullet -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1; \\
& \bullet -2, \quad -1, \quad 0, \quad 2; \\
& \bullet -2, \quad -1, \quad 1, \quad 2; \\
& \bullet -2, \quad 0, \quad 1, \quad 2; \\
& \bullet -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2; \\
& \bullet -1, \quad -1, \quad 1, \quad 2; \\
& \bullet -2, \quad 1, \quad 1, \quad 2; \\
& \bullet -1, \quad 0, \quad 1, \quad 1; \\
& \bullet -1, \quad -1, \quad 1, \quad 1; \\
& \bullet 1, \quad 1, \quad 2, \quad 2; \\
& \bullet -1, \quad -1, \quad -1, \quad 2; \\
& \bullet -2, \quad 1, \quad 1, \quad 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d_{12} = 0$$

$$\Rightarrow d_{13} = 0$$

$$\Rightarrow d_{14} = 0$$

$$\Rightarrow d_{21} = 0$$

$$\Rightarrow d_{23} = 0$$

$$\Rightarrow d_{24} = 0$$

$$\Rightarrow d_{31} = 0$$

$$\Rightarrow d_{32} = 0$$

$$\Rightarrow d_{34} = 0$$

$$\Rightarrow d_{41} = 0$$

$$\Rightarrow d_{42} = 0$$

$$\Rightarrow d_{43} = 0$$

$$\Rightarrow S_{11} = -k_{41}S_{14} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} + R_{11}$$

$$\Rightarrow S_{21} = -k_{41}S_{24} - k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$$

$$\Rightarrow S_{31} = -k_{41}S_{34} - k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$$

$$\Rightarrow S_{41} = -k_{41}S_{44} - k_{31}S_{43} - k_{21}S_{42}$$

$$\Rightarrow S_{12} = -k_{42}S_{14} - k_{32}S_{13} + R_{12}$$

$$\Rightarrow S_{22} = -k_{42}S_{24} - k_{32}S_{23} + R_{22}$$

$$\Rightarrow S_{32} = -k_{42}S_{34} - k_{32}S_{33}$$

$$\Rightarrow S_{42} = -k_{42}S_{44} - k_{32}S_{43}$$

$$\Rightarrow S_{13} = -k_{43}S_{14} + R_{13}$$

$$\Rightarrow S_{23} = -k_{43}S_{24} + R_{23}$$

$$\Rightarrow S_{33} = -k_{43}S_{34} + R_{33}$$

$$\Rightarrow S_{43} = -k_{43}S_{44}$$

$$\Rightarrow S_{14} = R_{14}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow S_{24} = R_{24} \\
&\Rightarrow S_{34} = R_{34} \\
&\Rightarrow S_{44} = R_{44} \\
&\Rightarrow R_{14} = -k_{14}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{24} = -k_{24}R_{22} \\
&\Rightarrow R_{34} = -k_{34}R_{33} \\
&\Rightarrow R_{13} = -k_{13}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{23} = -k_{23}R_{22} \\
&\Rightarrow R_{12} = -k_{12}R_{11} \\
&\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r_{11}} \\
&\Rightarrow R_{22} = \frac{1}{r_{22}} \\
&\Rightarrow R_{33} = \frac{1}{r_{33}} \\
&\Rightarrow R_{44} = \frac{1}{r_{44}} \\
&\Rightarrow s_{44} = k_{41}r_{14} + k_{42}r_{24} + k_{43}r_{34} + r_{44} \\
&\Rightarrow s_{43} = k_{41}r_{13} + k_{42}r_{23} + k_{43}r_{33} \\
&\Rightarrow s_{42} = k_{41}r_{12} + k_{42}r_{22} \\
&\Rightarrow s_{41} = k_{41}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{34} = k_{31}r_{14} + k_{32}r_{24} + r_{34} \\
&\Rightarrow s_{33} = k_{31}r_{13} + k_{32}r_{23} + r_{33} \\
&\Rightarrow s_{32} = k_{31}r_{12} + k_{32}r_{22} \\
&\Rightarrow s_{31} = k_{31}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{24} = k_{21}r_{14} + r_{24} \\
&\Rightarrow s_{23} = k_{21}r_{13} + r_{23} \\
&\Rightarrow s_{22} = k_{21}r_{12} + r_{22} \\
&\Rightarrow s_{21} = k_{21}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{11} = r_{11} \\
&\Rightarrow s_{12} = r_{12} \\
&\Rightarrow s_{13} = r_{13} \\
&\Rightarrow s_{14} = r_{14} \\
&\Rightarrow r_{14} = k_{12}r_{24} + k_{13}r_{34} + k_{14}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{13} = k_{12}r_{23} + k_{13}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{12} = k_{12}r_{22} \\
&\Rightarrow r_{24} = k_{23}r_{34} + k_{24}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{23} = k_{23}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{34} = k_{34}r_{44}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_{11} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow r_{22} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow r_{33} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow r_{44} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{12} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{13} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{14} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{23} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{24} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{34} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{21} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{31} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{41} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{32} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{42} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{43} = -1 ; 1$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

97. Найти матрицу  $S$ , трансформирующую матрицу  $A$  к жордановой нормальной форме  $J$ , и найти эту форму:

$$\Rightarrow a_{11} = ab_{11} + bb_{21}$$

$$\Rightarrow a_{12} = ab_{12} + bb_{22}$$

$$\Rightarrow a_{21} = cb_{11} + db_{21}$$

$$\Rightarrow a_{22} = cb_{12} + db_{22}$$

$$\Rightarrow b_{11} = d_{11}A + d_{12}C$$

$$\Rightarrow b_{12} = d_{11}B + d_{12}D$$

$$\Rightarrow b_{21} = d_{21}A + d_{22}C$$

$$\Rightarrow b_{22} = d_{21}B + d_{22}D$$

$$\Rightarrow d_{22} = d_{11}$$

$$\Rightarrow d_{11} = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow d_{12} = 1$$

$$\Rightarrow d_{21} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{d}{\Delta}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{b}{\Delta}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{c}{\Delta}$$

$$\Rightarrow D = \frac{a}{\Delta}$$

$$\Rightarrow a = d(bc + \Delta)$$

$$\Rightarrow \Delta = -1; 1$$

$$\Rightarrow d = -1; 1$$

$$\Rightarrow b = -3; -2; 2; 3$$

$$\Rightarrow c = -2; -1; 1; 2$$

$$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$$

98. Найти матрицу  $S$ , трансформирующую матрицу  $A$  к жордановой нормальной форме  $J$ , и найти эту форму:

$$\Rightarrow S_{11} = R_{11} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12}$$

$$\Rightarrow S_{21} = -k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$$

$$\Rightarrow S_{31} = -k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$$

$$\Rightarrow S_{12} = R_{12} - k_{32}S_{13}$$

$$\Rightarrow S_{22} = R_{22} - k_{32}S_{23}$$

$$\Rightarrow S_{32} = -k_{32}S_{33}$$

$$\Rightarrow S_{13} = R_{13}$$

$$\Rightarrow S_{23} = R_{23}$$

$$\Rightarrow S_{33} = R_{33}$$

$$\Rightarrow R_{13} = -k_{13}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{23} = -k_{23}R_{22}$$

$$\Rightarrow R_{12} = -k_{12}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r_{11}}$$

$$\Rightarrow R_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

$$\Rightarrow R_{33} = \frac{1}{r_{33}}$$

$$\Rightarrow s_{33} = r_{33} + k_{32}r_{23} + k_{31}r_{13}$$

$$\Rightarrow s_{32} = k_{32}r_{22} + k_{31}r_{12}$$

$$\Rightarrow s_{31} = k_{31}r_{11}$$

$$\Rightarrow s_{23} = r_{23} + k_{21}r_{13}$$

$$\Rightarrow s_{22} = r_{22} + k_{21}r_{12}$$

$$\Rightarrow s_{21} = k_{21}r_{11}$$

$$\Rightarrow s_{11} = r_{11}$$

$$\Rightarrow s_{12} = r_{12}$$

$$\Rightarrow s_{13} = r_{13}$$

$$\Rightarrow r_{13} = k_{13}r_{33} + k_{12}r_{23}$$

$$\Rightarrow r_{12} = k_{12}r_{22}$$

$$\Rightarrow r_{23} = k_{23}r_{33}$$

$$\Rightarrow r_{11} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow r_{22} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow r_{33} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{12} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{13} = -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2 ; -1 ; 1 ; 2$$

$$\Rightarrow k_{31} = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{32} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{21} = -1; 1$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$$

$$\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$$

$$\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$$

$$\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$$

$$\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$$

$$\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$$

$$\rightarrow d_{33} = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow d_{22} = d_{11}$$

$$\rightarrow d_{11} = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$



$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 \\ 0 & d_{22} & 1 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$$

$$\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$$

$$\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$$

$$\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$$

$$\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$$

$$\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$$

$$\rightarrow d_{33} = d_{11}$$

$$\rightarrow d_{22} = d_{11}$$

$$\rightarrow d_{11} = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 1$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

99. Найти матрицу  $S$ , трансформирующую матрицу  $A$  к жордановой нормальной форме  $J$ , и найти эту форму:

$$\Rightarrow S_{11} = -k_{41}S_{14} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} + R_{11}$$

$$\Rightarrow S_{21} = -k_{41}S_{24} - k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$$

$$\Rightarrow S_{31} = -k_{41}S_{34} - k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$$

$$\Rightarrow S_{41} = -k_{41}S_{44} - k_{31}S_{43} - k_{21}S_{42}$$

$$\Rightarrow S_{12} = -k_{42}S_{14} - k_{32}S_{13} + R_{12}$$

$$\Rightarrow S_{22} = -k_{42}S_{24} - k_{32}S_{23} + R_{22}$$

$$\Rightarrow S_{32} = -k_{42}S_{34} - k_{32}S_{33}$$

$$\Rightarrow S_{42} = -k_{42}S_{44} - k_{32}S_{43}$$

$$\Rightarrow S_{13} = -k_{43}S_{14} + R_{13}$$

$$\Rightarrow S_{23} = -k_{43}S_{24} + R_{23}$$

$$\Rightarrow S_{33} = -k_{43}S_{34} + R_{33}$$

$$\Rightarrow S_{43} = -k_{43}S_{44}$$

$$\Rightarrow S_{14} = R_{14}$$

$$\Rightarrow S_{24} = R_{24}$$

$$\Rightarrow S_{34} = R_{34}$$

$$\Rightarrow S_{44} = R_{44}$$

$$\Rightarrow R_{14} = -k_{14}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{24} = -k_{24}R_{22}$$

$$\Rightarrow R_{34} = -k_{34}R_{33}$$

$$\Rightarrow R_{13} = -k_{13}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{23} = -k_{23}R_{22}$$

$$\Rightarrow R_{12} = -k_{12}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r_{11}}$$

$$\Rightarrow R_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

$$\Rightarrow R_{33} = \frac{1}{r_{33}}$$

$$\Rightarrow R_{44} = \frac{1}{r_{44}}$$

$$\Rightarrow s_{44} = k_{41}r_{14} + k_{42}r_{24} + k_{43}r_{34} + r_{44}$$

$$\Rightarrow s_{43} = k_{41}r_{13} + k_{42}r_{23} + k_{43}r_{33}$$

$$\Rightarrow s_{42} = k_{41}r_{12} + k_{42}r_{22}$$

$$\Rightarrow s_{41} = k_{41}r_{11}$$

$$\Rightarrow s_{34} = k_{31}r_{14} + k_{32}r_{24} + r_{34}$$

$$\Rightarrow s_{33} = k_{31}r_{13} + k_{32}r_{23} + r_{33}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow s_{32} = k_{31}r_{12} + k_{32}r_{22} \\
&\Rightarrow s_{31} = k_{31}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{24} = k_{21}r_{14} + r_{24} \\
&\Rightarrow s_{23} = k_{21}r_{13} + r_{23} \\
&\Rightarrow s_{22} = k_{21}r_{12} + r_{22} \\
&\Rightarrow s_{21} = k_{21}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{11} = r_{11} \\
&\Rightarrow s_{12} = r_{12} \\
&\Rightarrow s_{13} = r_{13} \\
&\Rightarrow s_{14} = r_{14} \\
&\Rightarrow r_{14} = k_{12}r_{24} + k_{13}r_{34} + k_{14}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{13} = k_{12}r_{23} + k_{13}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{12} = k_{12}r_{22} \\
&\Rightarrow r_{24} = k_{23}r_{34} + k_{24}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{23} = k_{23}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{34} = k_{34}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{11} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{22} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{33} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{44} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{12} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{13} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{14} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{23} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{24} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{34} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{21} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{31} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{41} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{32} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{42} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{43} = -1 ; 1
\end{aligned}$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\ \rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\ \rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\ \rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\ \rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\ \rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\ \rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\ \rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\ \rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\ \rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\ \rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\ \rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\ \rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\ \rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\ \rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\ \rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\ \rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\ \rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\ \rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\ \rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\ \rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\ \rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\ \rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\ \rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\ \rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\ \rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\ \rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\ \rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\ \rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\ \rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\ \rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\ \rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{33}, \quad d_{44} =$$

$$\bullet -2, \quad -2;$$

$$\bullet -2, \quad -1;$$

$$\bullet -2, \quad 0;$$

$$\bullet -2, \quad 1;$$

$$\bullet -2, \quad 2;$$

$$\bullet -1, \quad -1;$$

$$\bullet -1, \quad 0;$$

$$\bullet -1, \quad 1;$$

$$\bullet -1, \quad 2;$$

$$\bullet 0, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad 1;$$

$$\bullet 0, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 1;$$

$$\bullet 1, \quad 2;$$

$$\bullet 2, \quad 2$$

$$\rightarrow d_{22} = d_{11}$$

$$\rightarrow d_{11} = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\
\rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\
\rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\
\rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\
\rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\
\rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\
\rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\
\rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\
\rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\
\rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\
\rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\
\rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\
\rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\
\rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\
\rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\
\rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\
\rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\
\rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\
\rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\
\rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\
\rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\
\rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
\rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
\rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
\rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
\rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
\rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
\rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
\rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
\rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
\rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
\rightarrow d_{44} &= d_{33} \\
\rightarrow d_{22} &= d_{11}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{11}, \quad d_{33} =$$

- $-2, \quad -2;$
- $-2, \quad -1;$
- $-2, \quad 0;$
- $-2, \quad 1;$
- $-2, \quad 2;$
- $-1, \quad -1;$
- $-1, \quad 0;$
- $-1, \quad 1;$
- $-1, \quad 2;$
- $0, \quad 0;$
- $0, \quad 1;$
- $0, \quad 2;$
- $1, \quad 1;$
- $1, \quad 2;$
- $2, \quad 2$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 1$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\
&\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\
&\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\
&\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\
&\rightarrow a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\
&\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\
&\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\
&\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\
&\rightarrow a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\
&\rightarrow a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\
&\rightarrow a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\
&\rightarrow a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\
&\rightarrow a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\
&\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\
&\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\
&\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\
&\rightarrow b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\
&\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\
&\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\
&\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
&\rightarrow b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
&\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
&\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
&\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
&\rightarrow b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
&\rightarrow b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
&\rightarrow b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
&\rightarrow b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
&\rightarrow b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
&\rightarrow d_{44} = -2; -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow d_{33} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{11} = -2; -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow d_{12} = 1 \\
&\rightarrow d_{13} = 0 \\
&\rightarrow d_{14} = 0 \\
&\rightarrow d_{21} = 0 \\
&\rightarrow d_{23} = 1
\end{aligned}$$



$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} d_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$$

$$\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$$

$$\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$$

$$\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$$

$$\rightarrow b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$$

$$\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$$

$$\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$$

$$\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43}$$

$$\rightarrow b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
&\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
&\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
&\rightarrow b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
&\rightarrow b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
&\rightarrow b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
&\rightarrow b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
&\rightarrow b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
&\rightarrow d_{44} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{33} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{11} = -2; -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow d_{12} = 1 \\
&\rightarrow d_{13} = 0 \\
&\rightarrow d_{14} = 0 \\
&\rightarrow d_{21} = 0 \\
&\rightarrow d_{23} = 1 \\
&\rightarrow d_{24} = 0 \\
&\rightarrow d_{31} = 0 \\
&\rightarrow d_{32} = 0 \\
&\rightarrow d_{34} = 1 \\
&\rightarrow d_{41} = 0 \\
&\rightarrow d_{42} = 0 \\
&\rightarrow d_{43} = 0
\end{aligned}$$

100. Найти собственные значения  $\lambda_i$  и соответствующие им базисы собственных векторов  $L_i$  линейного оператора, заданного в каноническом базисе пространства  $\mathbb{R}_{3,1}$  матрицей  $A$ :

$$\Rightarrow A = \frac{d}{\Delta}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{b}{\Delta}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{c}{\Delta}$$

$$\Rightarrow D = \frac{a}{\Delta}$$

$$\Rightarrow a = d(bc + \Delta)$$

$$\Rightarrow \Delta = -1; 1$$

$$\Rightarrow d = -1; 1$$

$$\Rightarrow b = -3; -2; 2; 3$$

$$\Rightarrow c = -2; -1; 1; 2$$

$$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \lambda_1 = d_{11}, L_1 = \left( \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{22}, L_2 = \left( \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow a_{11} = ab_{11} + bb_{21}$$

$$\rightarrow a_{12} = ab_{12} + bb_{22}$$

$$\rightarrow a_{21} = cb_{11} + db_{21}$$

$$\rightarrow a_{22} = cb_{12} + db_{22}$$

$$\rightarrow b_{11} = d_{11}A + d_{12}C$$

$$\rightarrow b_{12} = d_{11}B + d_{12}D$$

$$\rightarrow b_{21} = d_{21}A + d_{22}C$$

$$\rightarrow b_{22} = d_{21}B + d_{22}D$$

$$\rightarrow d_{11}, \quad d_{22} =$$

- $-5, \quad -3;$
- $-5, \quad -2;$
- $-5, \quad -1;$
- $-5, \quad 1;$
- $-5, \quad 2;$
- $-5, \quad 3;$
- $-5, \quad 5;$
- $-3, \quad -2;$
- $-3, \quad -1;$
- $-3, \quad 0;$
- $-3, \quad 1;$
- $-3, \quad 2;$
- $-3, \quad 3;$
- $-3, \quad 5;$
- $-2, \quad -1;$
- $-2, \quad 1;$
- $-2, \quad 2;$
- $-2, \quad 3;$
- $-2, \quad 4;$
- $-2, \quad 5;$
- $-1, \quad 0;$
- $-1, \quad 1;$
- $-1, \quad 2;$
- $-1, \quad 3;$
- $-1, \quad 4;$
- $-1, \quad 5;$
- $0, \quad 3;$
- $0, \quad 5;$
- $1, \quad 2;$
- $1, \quad 3;$
- $1, \quad 4;$
- $1, \quad 5;$
- $2, \quad 3;$
- $2, \quad 4;$
- $2, \quad 5;$
- $3, \quad 5$

$$\rightarrow d_{12} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = ab_{11} + bb_{21}$$

$$\rightarrow a_{12} = ab_{12} + bb_{22}$$

$$\rightarrow a_{21} = cb_{11} + db_{21}$$

$$\rightarrow a_{22} = cb_{12} + db_{22}$$

$$\rightarrow b_{11} = d_{11}A + d_{12}C$$

$$\rightarrow b_{12} = d_{11}B + d_{12}D$$

$$\rightarrow b_{21} = d_{21}A + d_{22}C$$

$$\rightarrow b_{22} = d_{21}B + d_{22}D$$

$$\rightarrow d_{22} = d_{11}$$

$$\rightarrow d_{11} = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

**101.** Найти собственные значения  $\lambda_i$  и соответствующие им базисы собственных векторов  $L_i$  линейного оператора, заданного в каноническом базисе пространства  $\mathbb{R}_{3,1}$  матрицей  $A$ :

$$\Rightarrow S_{11} = R_{11} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12}$$

$$\Rightarrow S_{21} = -k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$$

$$\Rightarrow S_{31} = -k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$$

$$\Rightarrow S_{12} = R_{12} - k_{32}S_{13}$$

$$\Rightarrow S_{22} = R_{22} - k_{32}S_{23}$$

$$\Rightarrow S_{32} = -k_{32}S_{33}$$

$$\Rightarrow S_{13} = R_{13}$$

$$\Rightarrow S_{23} = R_{23}$$

$$\Rightarrow S_{33} = R_{33}$$

$$\Rightarrow R_{13} = -k_{13}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{23} = -k_{23}R_{22}$$

$$\Rightarrow R_{12} = -k_{12}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r_{11}}$$

$$\Rightarrow R_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

$$\Rightarrow R_{33} = \frac{1}{r_{33}}$$

$$\Rightarrow s_{33} = r_{33} + k_{32}r_{23} + k_{31}r_{13}$$

$$\Rightarrow s_{32} = k_{32}r_{22} + k_{31}r_{12}$$

$$\Rightarrow s_{31} = k_{31}r_{11}$$

$$\Rightarrow s_{23} = r_{23} + k_{21}r_{13}$$

$$\Rightarrow s_{22} = r_{22} + k_{21}r_{12}$$

$$\Rightarrow s_{21} = k_{21}r_{11}$$

$$\Rightarrow s_{11} = r_{11}$$

$$\Rightarrow s_{12} = r_{12}$$

$$\Rightarrow s_{13} = r_{13}$$

$$\Rightarrow r_{13} = k_{13}r_{33} + k_{12}r_{23}$$

$$\Rightarrow r_{12} = k_{12}r_{22}$$

$$\Rightarrow r_{23} = k_{23}r_{33}$$

$$\Rightarrow r_{11} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow r_{22} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow r_{33} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{12} = -1 ; 1$$

$$\Rightarrow k_{13} = -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2$$

$$\Rightarrow k_{23} = -2 ; -1 ; 1 ; 2$$

$$\Rightarrow k_{31} = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_{32} = -1; 1$$

$$\Rightarrow k_{21} = -1; 1$$

$$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \lambda_1 = d_{11}, L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = d_{22}, L_2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = d_{33}, L_3 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$$

$$\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$$

$$\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$$

$$\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$$

$$\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$$

$$\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$$

$$\rightarrow d_{33} = d_{22} + l$$

$$\rightarrow d_{22} = d_{11} + k$$

$$\rightarrow k, \quad l =$$

$$\bullet 1, \quad 1;$$

$$\bullet 1, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 3;$$

$$\bullet 2, \quad 1;$$

$$\bullet 2, \quad 2;$$

$$\bullet 3, \quad 1$$

$$\rightarrow d_{11} = -3; -2; -1$$

$$\rightarrow d_{12} = 0$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$2) \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \ \lambda_1 = d_{11}, \ L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \end{bmatrix} \right), \ \lambda_2 = d_{33}, \ L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33}$$

$$\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33}$$

$$\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}$$

$$\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33}$$

$$\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33}$$

$$\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33}$$

$$\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31}$$

$$\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32}$$

$$\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33}$$

$$\rightarrow d_{22} = d_{11}$$



$$\rightarrow d_{11}, \quad d_{33} =$$

$$\bullet -2, \quad -3;$$

$$\bullet -2, \quad -1;$$

$$\bullet -2, \quad 0;$$

$$\bullet -2, \quad 1;$$

$$\bullet -2, \quad 2;$$

$$\bullet -2, \quad 3;$$

$$\bullet -1, \quad -3;$$

$$\bullet -1, \quad -2;$$

$$\bullet -1, \quad 0;$$

$$\bullet -1, \quad 1;$$

$$\bullet -1, \quad 2;$$

$$\bullet -1, \quad 3;$$

$$\bullet 1, \quad -3;$$

$$\bullet 1, \quad -2;$$

$$\bullet 1, \quad -1;$$

$$\bullet 1, \quad 0;$$

$$\bullet 1, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 3;$$

$$\bullet 2, \quad -3;$$

$$\bullet 2, \quad -2;$$

$$\bullet 2, \quad -1;$$

$$\bullet 2, \quad 0;$$

$$\bullet 2, \quad 1;$$

$$\bullet 2, \quad 3;$$

$$\bullet$$

$$\rightarrow d_{12} = 0$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = d_{33}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} \\
\rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} \\
\rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} \\
\rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} \\
\rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} \\
\rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} \\
\rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} \\
\rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} \\
\rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} \\
\rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} \\
\rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} \\
\rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} \\
\rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} \\
\rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} \\
\rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} \\
\rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} \\
\rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} \\
\rightarrow d_{22} &= d_{11}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{11}, \quad d_{33} =$$

$$\bullet -2, \quad -3;$$

$$\bullet -2, \quad -1;$$

$$\bullet -2, \quad 0;$$

$$\bullet -2, \quad 1;$$

$$\bullet -2, \quad 2;$$

$$\bullet -2, \quad 3;$$

$$\bullet -1, \quad -3;$$

$$\bullet -1, \quad -2;$$

$$\bullet -1, \quad 0;$$

$$\bullet -1, \quad 1;$$

$$\bullet -1, \quad 2;$$

$$\bullet -1, \quad 3;$$

$$\bullet 1, \quad -3;$$

$$\bullet 1, \quad -2;$$

$$\bullet 1, \quad -1;$$

$$\bullet 1, \quad 0;$$

$$\bullet 1, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 3;$$

$$\bullet 2, \quad -3;$$

$$\bullet 2, \quad -2;$$

$$\bullet 2, \quad -1;$$

$$\bullet 2, \quad 0;$$

$$\bullet 2, \quad 1;$$

$$\bullet 2, \quad 3$$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} \\
&\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} \\
&\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} \\
&\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} \\
&\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} \\
&\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} \\
&\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} \\
&\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} \\
&\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} \\
&\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} \\
&\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} \\
&\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} \\
&\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} \\
&\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} \\
&\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} \\
&\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} \\
&\rightarrow d_{33} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow d_{12} = 1 \\
&\rightarrow d_{13} = 0 \\
&\rightarrow d_{21} = 0 \\
&\rightarrow d_{23} = 0 \\
&\rightarrow d_{31} = 0 \\
&\rightarrow d_{32} = 0
\end{aligned}$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} \\
&\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} \\
&\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} \\
&\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} \\
&\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} \\
&\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} \\
&\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} \\
&\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} \\
&\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} \\
&\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} \\
&\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} \\
&\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} \\
&\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} \\
&\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} \\
&\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} \\
&\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} \\
&\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} \\
&\rightarrow d_{33} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{11} = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow d_{12} = 1 \\
&\rightarrow d_{13} = 0 \\
&\rightarrow d_{21} = 0 \\
&\rightarrow d_{23} = 1 \\
&\rightarrow d_{31} = 0 \\
&\rightarrow d_{32} = 0
\end{aligned}$$

**102.** Найти собственные значения  $\lambda_i$  и соответствующие им базисы собственных векторов  $L_i$  линейного оператора, заданного в каноническом базисе пространства  $\mathbb{R}_{3,1}$  матрицей  $A$ :

$$\Rightarrow S_{11} = -k_{41}S_{14} - k_{31}S_{13} - k_{21}S_{12} + R_{11}$$

$$\Rightarrow S_{21} = -k_{41}S_{24} - k_{31}S_{23} - k_{21}S_{22}$$

$$\Rightarrow S_{31} = -k_{41}S_{34} - k_{31}S_{33} - k_{21}S_{32}$$

$$\Rightarrow S_{41} = -k_{41}S_{44} - k_{31}S_{43} - k_{21}S_{42}$$

$$\Rightarrow S_{12} = -k_{42}S_{14} - k_{32}S_{13} + R_{12}$$

$$\Rightarrow S_{22} = -k_{42}S_{24} - k_{32}S_{23} + R_{22}$$

$$\Rightarrow S_{32} = -k_{42}S_{34} - k_{32}S_{33}$$

$$\Rightarrow S_{42} = -k_{42}S_{44} - k_{32}S_{43}$$

$$\Rightarrow S_{13} = -k_{43}S_{14} + R_{13}$$

$$\Rightarrow S_{23} = -k_{43}S_{24} + R_{23}$$

$$\Rightarrow S_{33} = -k_{43}S_{34} + R_{33}$$

$$\Rightarrow S_{43} = -k_{43}S_{44}$$

$$\Rightarrow S_{14} = R_{14}$$

$$\Rightarrow S_{24} = R_{24}$$

$$\Rightarrow S_{34} = R_{34}$$

$$\Rightarrow S_{44} = R_{44}$$

$$\Rightarrow R_{14} = -k_{14}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{24} = -k_{24}R_{22}$$

$$\Rightarrow R_{34} = -k_{34}R_{33}$$

$$\Rightarrow R_{13} = -k_{13}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{23} = -k_{23}R_{22}$$

$$\Rightarrow R_{12} = -k_{12}R_{11}$$

$$\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r_{11}}$$

$$\Rightarrow R_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

$$\Rightarrow R_{33} = \frac{1}{r_{33}}$$

$$\Rightarrow R_{44} = \frac{1}{r_{44}}$$

$$\Rightarrow s_{44} = k_{41}r_{14} + k_{42}r_{24} + k_{43}r_{34} + r_{44}$$

$$\Rightarrow s_{43} = k_{41}r_{13} + k_{42}r_{23} + k_{43}r_{33}$$

$$\Rightarrow s_{42} = k_{41}r_{12} + k_{42}r_{22}$$

$$\Rightarrow s_{41} = k_{41}r_{11}$$

$$\Rightarrow s_{34} = k_{31}r_{14} + k_{32}r_{24} + r_{34}$$

$$\Rightarrow s_{33} = k_{31}r_{13} + k_{32}r_{23} + r_{33}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow s_{32} = k_{31}r_{12} + k_{32}r_{22} \\
&\Rightarrow s_{31} = k_{31}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{24} = k_{21}r_{14} + r_{24} \\
&\Rightarrow s_{23} = k_{21}r_{13} + r_{23} \\
&\Rightarrow s_{22} = k_{21}r_{12} + r_{22} \\
&\Rightarrow s_{21} = k_{21}r_{11} \\
&\Rightarrow s_{11} = r_{11} \\
&\Rightarrow s_{12} = r_{12} \\
&\Rightarrow s_{13} = r_{13} \\
&\Rightarrow s_{14} = r_{14} \\
&\Rightarrow r_{14} = k_{12}r_{24} + k_{13}r_{34} + k_{14}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{13} = k_{12}r_{23} + k_{13}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{12} = k_{12}r_{22} \\
&\Rightarrow r_{24} = k_{23}r_{34} + k_{24}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{23} = k_{23}r_{33} \\
&\Rightarrow r_{34} = k_{34}r_{44} \\
&\Rightarrow r_{11} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{22} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{33} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow r_{44} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{12} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{13} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{14} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{23} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{24} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{34} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{21} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{31} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{41} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{32} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{42} = -1 ; 1 \\
&\Rightarrow k_{43} = -1 ; 1
\end{aligned}$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = d_{22}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{42} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = d_{33}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = d_{44},$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\ \rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\ \rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\ \rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\ \rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\ \rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\ \rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\ \rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\ \rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\ \rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\ \rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\ \rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\ \rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\ \rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\ \rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\ \rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\ \rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\ \rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\ \rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\ \rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\ \rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\ \rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\ \rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\ \rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\ \rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\ \rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\ \rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\ \rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\ \rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\ \rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\ \rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\ \rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \end{aligned}$$



$$\rightarrow d_{11}, \quad d_{22}, \quad d_{33}, \quad d_{44} =$$

$$\bullet -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1;$$

$$\bullet -2, \quad -1, \quad 0, \quad 2;$$

$$\bullet -2, \quad -1, \quad 1, \quad 2;$$

$$\bullet -2, \quad 0, \quad 1, \quad 2;$$

$$\bullet -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2$$

$$\rightarrow d_{12} = 0$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{42} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{33}, \quad L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_3 = d_{44}, \quad L_3 = \left( \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\
\rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\
\rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\
\rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\
\rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\
\rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\
\rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\
\rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\
\rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\
\rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
\rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
\rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
\rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
\rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
\rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
\rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
\rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
\rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
\rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
\rightarrow d_{22} &= d_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow d_{11}, \quad d_{33}, \quad d_{44} = \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad -1, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad -1, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad -1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 0, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 0, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad -2, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad -2, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad -2, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 0, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 0, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -2, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -2, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -2, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -1, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 0, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -2, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -2, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -2, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -1, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -1, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad 0, \quad 1
\end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{12} = 0$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{42} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = d_{33}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\ \rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\ \rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\ \rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\ \rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\ \rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\ \rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\ \rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\ \rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\ \rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\ \rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\ \rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\ \rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\ \rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\ \rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\ \rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\ \rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\ \rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\ \rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\ \rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\ \rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\ \rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\ \rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\ \rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\ \rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\ \rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\ \rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\ \rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\ \rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\ \rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\ \rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\ \rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{44} = d_{33}$$

$$\rightarrow d_{22} = d_{11}$$

$$\rightarrow d_{11}, \quad d_{33} =$$

$$\bullet -2, \quad -1;$$

$$\bullet -2, \quad 0;$$

$$\bullet -2, \quad 1;$$

$$\bullet -2, \quad 2;$$

$$\bullet -1, \quad 0;$$

$$\bullet -1, \quad 1;$$

$$\bullet -1, \quad 2;$$

$$\bullet 0, \quad 1;$$

$$\bullet 0, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 2$$

$$\rightarrow d_{12} = 0$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ s_{42} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right), \quad \lambda_2 = d_{44}, \quad L_2 = \left( \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\
&\rightarrow a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\
&\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\
&\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\
&\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\
&\rightarrow a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\
&\rightarrow a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\
&\rightarrow a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\
&\rightarrow a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\
&\rightarrow a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\
&\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\
&\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\
&\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\
&\rightarrow b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\
&\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\
&\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\
&\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
&\rightarrow b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
&\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
&\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
&\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
&\rightarrow b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
&\rightarrow b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
&\rightarrow b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
&\rightarrow b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
&\rightarrow b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
&\rightarrow d_{33} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow d_{11}, \quad d_{44} = \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad -2; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 0, \quad -2; \\
&\quad \bullet \quad 0, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad 0, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad 0, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -2; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -2; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad 1
\end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{12} = 0$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = d_{33}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = d_{44}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\ \rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\ \rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\ \rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\ \rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\ \rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\ \rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\ \rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\ \rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\ \rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\ \rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\ \rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\ \rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\ \rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\ \rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\ \rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\ \rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\ \rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\ \rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\ \rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\ \rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\ \rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\ \rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\ \rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\ \rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\ \rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\ \rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\ \rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\ \rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\ \rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\ \rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\ \rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \end{aligned}$$



$$\rightarrow d_{22} = d_{11}$$

$$\rightarrow d_{11}, \quad d_{33}, \quad d_{44} =$$

$$\bullet -2, \quad -1, \quad 0;$$

$$\bullet -2, \quad -1, \quad 1;$$

$$\bullet -2, \quad -1, \quad 2;$$

$$\bullet -2, \quad 0, \quad 1;$$

$$\bullet -2, \quad 0, \quad 2;$$

$$\bullet -2, \quad 1, \quad 2;$$

$$\bullet -1, \quad -2, \quad 0;$$

$$\bullet -1, \quad -2, \quad 1;$$

$$\bullet -1, \quad -2, \quad 2;$$

$$\bullet -1, \quad 0, \quad 1;$$

$$\bullet -1, \quad 0, \quad 2;$$

$$\bullet -1, \quad 1, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad -2, \quad -1;$$

$$\bullet 1, \quad -2, \quad 0;$$

$$\bullet 1, \quad -2, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad -1, \quad 0;$$

$$\bullet 1, \quad -1, \quad 2;$$

$$\bullet 1, \quad 0, \quad 2;$$

$$\bullet 2, \quad -2, \quad -1;$$

$$\bullet 2, \quad -2, \quad 0;$$

$$\bullet 2, \quad -2, \quad 1;$$

$$\bullet 2, \quad -1, \quad 0;$$

$$\bullet 2, \quad -1, \quad 1;$$

$$\bullet 2, \quad 0, \quad 1$$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = d_{33}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\ \rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\ \rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\ \rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\ \rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\ \rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\ \rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\ \rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\ \rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\ \rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\ \rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\ \rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\ \rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\ \rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\ \rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\ \rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\ \rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\ \rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\ \rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\ \rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\ \rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\ \rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\ \rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\ \rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\ \rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\ \rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\ \rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\ \rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\ \rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\ \rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\ \rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\ \rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{44} = d_{33}$$

$$\rightarrow d_{22} = d_{11}$$

$$\rightarrow d_{11}, \quad d_{33} =$$

$$\bullet \quad -2, \quad -1;$$

$$\bullet \quad -2, \quad 0;$$

$$\bullet \quad -2, \quad 1;$$

$$\bullet \quad -2, \quad 2;$$

$$\bullet \quad -1, \quad -2;$$

$$\bullet \quad -1, \quad 0;$$

$$\bullet \quad -1, \quad 1;$$

$$\bullet \quad -1, \quad 2;$$

$$\bullet \quad 0, \quad -2;$$

$$\bullet \quad 0, \quad -1;$$

$$\bullet \quad 0, \quad 1;$$

$$\bullet \quad 0, \quad 2;$$

$$\bullet \quad 1, \quad -2;$$

$$\bullet \quad 1, \quad -1;$$

$$\bullet \quad 1, \quad 0;$$

$$\bullet \quad 1, \quad 2;$$

$$\bullet \quad 2, \quad -2;$$

$$\bullet \quad 2, \quad -1;$$

$$\bullet \quad 2, \quad 0;$$

$$\bullet \quad 2, \quad 1$$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = d_{44}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\ \rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\ \rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\ \rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\ \rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\ \rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\ \rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\ \rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\ \rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\ \rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\ \rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\ \rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\ \rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\ \rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\ \rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\ \rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\ \rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\ \rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\ \rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\ \rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\ \rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\ \rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\ \rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\ \rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\ \rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\ \rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\ \rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\ \rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\ \rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\ \rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\ \rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\ \rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \end{aligned}$$

- $d_{33} = d_{11}$
- $d_{22} = d_{11}$
- $d_{11}, d_{44} =$ 
  - $-2, -1;$
  - $-2, 0;$
  - $-2, 1;$
  - $-2, 2;$
  - $-1, -2;$
  - $-1, 0;$
  - $-1, 1;$
  - $-1, 2;$
  - $0, -2;$
  - $0, -1;$
  - $0, 1;$
  - $0, 2;$
  - $1, -2;$
  - $1, -1;$
  - $1, 0;$
  - $1, 2;$
  - $2, -2;$
  - $2, -1;$
  - $2, 0;$
  - $2, 1$
- $d_{12} = 1$
- $d_{13} = 0$
- $d_{14} = 0$
- $d_{21} = 0$
- $d_{23} = 0$
- $d_{24} = 0$
- $d_{31} = 0$
- $d_{32} = 0$
- $d_{34} = 0$
- $d_{41} = 0$
- $d_{42} = 0$
- $d_{43} = 0$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\ \rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\ \rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\ \rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\ \rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\ \rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\ \rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\ \rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\ \rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\ \rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\ \rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\ \rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\ \rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\ \rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\ \rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\ \rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\ \rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\ \rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\ \rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\ \rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\ \rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\ \rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\ \rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\ \rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\ \rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\ \rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\ \rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\ \rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\ \rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\ \rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\ \rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\ \rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \end{aligned}$$

- $d_{44} = d_{11}$
- $d_{33} = d_{11}$
- $d_{22} = d_{11}$
- $d_{11}, d_{44} =$ 
  - $-2;$
  - $-1;$
  - $0;$
  - $1;$
  - $2$
- $d_{12} = 1$
- $d_{13} = 0$
- $d_{14} = 0$
- $d_{21} = 0$
- $d_{23} = 0$
- $d_{24} = 0$
- $d_{31} = 0$
- $d_{32} = 0$
- $d_{34} = 0$
- $d_{41} = 0$
- $d_{42} = 0$
- $d_{43} = 0$

9)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

✓  $\lambda_1 = d_{11}, L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \lambda_2 = d_{33}, L_2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$

- $a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$
- $a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$
- $a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$
- $a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$
- $a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$
- $a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$
- $a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$
- $a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$
- $a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$
- $a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\
&\rightarrow a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\
&\rightarrow a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\
&\rightarrow a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\
&\rightarrow a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\
&\rightarrow a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\
&\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\
&\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\
&\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\
&\rightarrow b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\
&\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\
&\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\
&\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
&\rightarrow b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
&\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
&\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
&\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
&\rightarrow b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
&\rightarrow b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
&\rightarrow b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
&\rightarrow b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
&\rightarrow b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
&\rightarrow d_{44} = d_{33} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{11}, \quad d_{33} = \\
&\quad \bullet -2, \quad -1; \\
&\quad \bullet -2, \quad 0; \\
&\quad \bullet -2, \quad 1; \\
&\quad \bullet -2, \quad 2; \\
&\quad \bullet -1, \quad 0; \\
&\quad \bullet -1, \quad 1; \\
&\quad \bullet -1, \quad 2; \\
&\quad \bullet 0, \quad 1; \\
&\quad \bullet 0, \quad 2; \\
&\quad \bullet 1, \quad 2 \\
&\rightarrow d_{12} = 1 \\
&\rightarrow d_{13} = 0 \\
&\rightarrow d_{14} = 0
\end{aligned}$$



$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 0$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 1$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$10) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \\ s_{43} \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44}$$

$$\rightarrow a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41}$$

$$\rightarrow a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42}$$

$$\rightarrow a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}$$

$$\rightarrow a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44}$$

$$\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41}$$

$$\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42}$$

$$\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43}$$

$$\rightarrow b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44}$$

$$\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41}$$

$$\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
&\rightarrow b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
&\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
&\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
&\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
&\rightarrow b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
&\rightarrow b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
&\rightarrow b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
&\rightarrow b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
&\rightarrow b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
&\rightarrow d_{44} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{33} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{11} = -2; -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow d_{12} = 1 \\
&\rightarrow d_{13} = 0 \\
&\rightarrow d_{14} = 0 \\
&\rightarrow d_{21} = 0 \\
&\rightarrow d_{23} = 0 \\
&\rightarrow d_{24} = 0 \\
&\rightarrow d_{31} = 0 \\
&\rightarrow d_{32} = 0 \\
&\rightarrow d_{34} = 1 \\
&\rightarrow d_{41} = 0 \\
&\rightarrow d_{42} = 0 \\
&\rightarrow d_{43} = 0
\end{aligned}$$

$$11) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = d_{44}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\
&\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\
&\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\
&\rightarrow a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\
&\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\
\rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\
\rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\
\rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\
\rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\
\rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\
\rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\
\rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\
\rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\
\rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\
\rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\
\rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\
\rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\
\rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\
\rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\
\rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\
\rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\
\rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
\rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
\rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
\rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
\rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
\rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
\rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
\rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
\rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
\rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
\rightarrow d_{33} &= d_{11} \\
\rightarrow d_{22} &= d_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow d_{11}, \quad d_{44} = \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad -2, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad -2; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad -1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 0, \quad -2; \\
&\quad \bullet \quad 0, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad 0, \quad 1; \\
&\quad \bullet \quad 0, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -2; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad 1, \quad 2; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -2; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad -1; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad 0; \\
&\quad \bullet \quad 2, \quad 1
\end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{12} = 1$$

$$\rightarrow d_{13} = 0$$

$$\rightarrow d_{14} = 0$$

$$\rightarrow d_{21} = 0$$

$$\rightarrow d_{23} = 1$$

$$\rightarrow d_{24} = 0$$

$$\rightarrow d_{31} = 0$$

$$\rightarrow d_{32} = 0$$

$$\rightarrow d_{34} = 0$$

$$\rightarrow d_{41} = 0$$

$$\rightarrow d_{42} = 0$$

$$\rightarrow d_{43} = 0$$

$$12) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \left( \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{11} &= s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\ \rightarrow a_{12} &= s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\ \rightarrow a_{13} &= s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\ \rightarrow a_{14} &= s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\ \rightarrow a_{21} &= s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\ \rightarrow a_{22} &= s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\ \rightarrow a_{23} &= s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\ \rightarrow a_{24} &= s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\ \rightarrow a_{31} &= s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\ \rightarrow a_{32} &= s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\ \rightarrow a_{33} &= s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\ \rightarrow a_{34} &= s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\ \rightarrow a_{41} &= s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\ \rightarrow a_{42} &= s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\ \rightarrow a_{43} &= s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43} \\ \rightarrow a_{44} &= s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\ \rightarrow b_{11} &= d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\ \rightarrow b_{12} &= d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\ \rightarrow b_{13} &= d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\ \rightarrow b_{14} &= d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\ \rightarrow b_{21} &= d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\ \rightarrow b_{22} &= d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\ \rightarrow b_{23} &= d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\ \rightarrow b_{24} &= d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\ \rightarrow b_{31} &= d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\ \rightarrow b_{32} &= d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\ \rightarrow b_{33} &= d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\ \rightarrow b_{34} &= d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\ \rightarrow b_{41} &= d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\ \rightarrow b_{42} &= d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\ \rightarrow b_{43} &= d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\ \rightarrow b_{44} &= d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow d_{44} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{33} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{11} = -2; -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow d_{12} = 1 \\
&\rightarrow d_{13} = 0 \\
&\rightarrow d_{14} = 0 \\
&\rightarrow d_{21} = 0 \\
&\rightarrow d_{23} = 1 \\
&\rightarrow d_{24} = 0 \\
&\rightarrow d_{31} = 0 \\
&\rightarrow d_{32} = 0 \\
&\rightarrow d_{34} = 0 \\
&\rightarrow d_{41} = 0 \\
&\rightarrow d_{42} = 0 \\
&\rightarrow d_{43} = 0
\end{aligned}$$

$$13) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \lambda_1 = d_{11}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{11} = s_{11}b_{11} + s_{12}b_{21} + s_{13}b_{31} + s_{14}b_{41} \\
&\rightarrow a_{12} = s_{11}b_{12} + s_{12}b_{22} + s_{13}b_{32} + s_{14}b_{42} \\
&\rightarrow a_{13} = s_{11}b_{13} + s_{12}b_{23} + s_{13}b_{33} + s_{14}b_{43} \\
&\rightarrow a_{14} = s_{11}b_{14} + s_{12}b_{24} + s_{13}b_{34} + s_{14}b_{44} \\
&\rightarrow a_{21} = s_{21}b_{11} + s_{22}b_{21} + s_{23}b_{31} + s_{24}b_{41} \\
&\rightarrow a_{22} = s_{21}b_{12} + s_{22}b_{22} + s_{23}b_{32} + s_{24}b_{42} \\
&\rightarrow a_{23} = s_{21}b_{13} + s_{22}b_{23} + s_{23}b_{33} + s_{24}b_{43} \\
&\rightarrow a_{24} = s_{21}b_{14} + s_{22}b_{24} + s_{23}b_{34} + s_{24}b_{44} \\
&\rightarrow a_{31} = s_{31}b_{11} + s_{32}b_{21} + s_{33}b_{31} + s_{34}b_{41} \\
&\rightarrow a_{32} = s_{31}b_{12} + s_{32}b_{22} + s_{33}b_{32} + s_{34}b_{42} \\
&\rightarrow a_{33} = s_{31}b_{13} + s_{32}b_{23} + s_{33}b_{33} + s_{34}b_{43} \\
&\rightarrow a_{34} = s_{31}b_{14} + s_{32}b_{24} + s_{33}b_{34} + s_{34}b_{44} \\
&\rightarrow a_{41} = s_{41}b_{11} + s_{42}b_{21} + s_{43}b_{31} + s_{44}b_{41} \\
&\rightarrow a_{42} = s_{41}b_{12} + s_{42}b_{22} + s_{43}b_{32} + s_{44}b_{42} \\
&\rightarrow a_{43} = s_{41}b_{13} + s_{42}b_{23} + s_{43}b_{33} + s_{44}b_{43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{44} = s_{41}b_{14} + s_{42}b_{24} + s_{43}b_{34} + s_{44}b_{44} \\
&\rightarrow b_{11} = d_{11}S_{11} + d_{12}S_{21} + d_{13}S_{31} + d_{14}S_{41} \\
&\rightarrow b_{12} = d_{11}S_{12} + d_{12}S_{22} + d_{13}S_{32} + d_{14}S_{42} \\
&\rightarrow b_{13} = d_{11}S_{13} + d_{12}S_{23} + d_{13}S_{33} + d_{14}S_{43} \\
&\rightarrow b_{14} = d_{11}S_{14} + d_{12}S_{24} + d_{13}S_{34} + d_{14}S_{44} \\
&\rightarrow b_{21} = d_{21}S_{11} + d_{22}S_{21} + d_{23}S_{31} + d_{24}S_{41} \\
&\rightarrow b_{22} = d_{21}S_{12} + d_{22}S_{22} + d_{23}S_{32} + d_{24}S_{42} \\
&\rightarrow b_{23} = d_{21}S_{13} + d_{22}S_{23} + d_{23}S_{33} + d_{24}S_{43} \\
&\rightarrow b_{24} = d_{21}S_{14} + d_{22}S_{24} + d_{23}S_{34} + d_{24}S_{44} \\
&\rightarrow b_{31} = d_{31}S_{11} + d_{32}S_{21} + d_{33}S_{31} + d_{34}S_{41} \\
&\rightarrow b_{32} = d_{31}S_{12} + d_{32}S_{22} + d_{33}S_{32} + d_{34}S_{42} \\
&\rightarrow b_{33} = d_{31}S_{13} + d_{32}S_{23} + d_{33}S_{33} + d_{34}S_{43} \\
&\rightarrow b_{34} = d_{31}S_{14} + d_{32}S_{24} + d_{33}S_{34} + d_{34}S_{44} \\
&\rightarrow b_{41} = d_{41}S_{11} + d_{42}S_{21} + d_{43}S_{31} + d_{44}S_{41} \\
&\rightarrow b_{42} = d_{41}S_{12} + d_{42}S_{22} + d_{43}S_{32} + d_{44}S_{42} \\
&\rightarrow b_{43} = d_{41}S_{13} + d_{42}S_{23} + d_{43}S_{33} + d_{44}S_{43} \\
&\rightarrow b_{44} = d_{41}S_{14} + d_{42}S_{24} + d_{43}S_{34} + d_{44}S_{44} \\
&\rightarrow d_{44} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{33} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{22} = d_{11} \\
&\rightarrow d_{11} = -2; -1; 0; 1; 2 \\
&\rightarrow d_{12} = 1 \\
&\rightarrow d_{13} = 0 \\
&\rightarrow d_{14} = 0 \\
&\rightarrow d_{21} = 0 \\
&\rightarrow d_{23} = 1 \\
&\rightarrow d_{24} = 0 \\
&\rightarrow d_{31} = 0 \\
&\rightarrow d_{32} = 0 \\
&\rightarrow d_{34} = 1 \\
&\rightarrow d_{41} = 0 \\
&\rightarrow d_{42} = 0 \\
&\rightarrow d_{43} = 0
\end{aligned}$$

**103.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. Привести матрицу к диагональному виду. Указать диагонализирующую матрицу.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & 2b + \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \left\{ a + 2b; \frac{a}{2} \right\}; \quad \vec{x}_1 = (x_1; 2x_1); \quad \vec{x}_2 = \left( -\frac{2b}{a}x_2; x_2 \right)$$

$$\rightarrow a = 2; 4; 6; -2; -4; -6$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; -1; -2; -3; -4$$



104. Найти спектр матрицы  $A$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ b & -c & a \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{a; a; a\}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5$$

$$\rightarrow b = 6; 7; 8; 9; 10; -6; -7; -8; -9; -10$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -8; -9; -10$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & c & a \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{a; a - c; a + c\}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -10$$

$$\rightarrow c = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; -2; -4; -6; -8; -10; -12; -14$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & a & a \\ a & \frac{c}{2} & c \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{0; a; a + c\}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -10$$

$$\rightarrow c = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; -2; -4; -6; -8; -10; -12; -14$$

105. Найти спектр матрицы  $A$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{s_1; s_2; s_3\}$$

$$\rightarrow k = \sqrt{K}; \quad -\sqrt{K}$$

$$\rightarrow K, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 =$$

- 2, 2, 5, 5;
- 6, 1, 5, 6;
- 20, -1, 5, 8;
- 30, -2, 5, 9;
- 42, -3, 5, 10;
- 56, -4, 5, 11;
- 72, -5, 5, 12;
- 12, 0, 5, 7

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & k & 4 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{s_1; s_2; s_3\}$$

$$\rightarrow k = \sqrt{K}; \quad -\sqrt{K}$$

$$\rightarrow K, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 =$$

- 2, 3, 3, 6;
- 6, 2, 3, 7;
- 12, 1, 3, 8;
- 20, 0, 3, 9;
- 30, -1, 3, 10;
- 42, -2, 3, 11;
- 56, -3, 3, 12;
- 72, -4, 3, 13

106. Найти спектр матрицы.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a - bi & 0 \\ a + bi & 0 & c + di \\ 0 & 0 & k + mi \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{k + mi; \sqrt{a^2 + b^2}; -\sqrt{a^2 + b^2}\}$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a + bi & 0 \\ a + bi & 0 & c + di \\ 0 & 0 & k + mi \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{k + mi; a + bi; -a + bi\}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow d = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4; 5$$

107. Найти спектр матрицы  $A$ .

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & c \\ n & 0 & k & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{0; 0; 0; b\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow c = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow k = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & n \\ k & m & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{0; 0; 0; b\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow c = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow k = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & n & k \\ k & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{0; 0; a; b\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow c = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow k = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & k \\ k & n & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{0; 0; a; b\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow c = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow k = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} b & 0 & a & c \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & n & b \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{0; 0; b - c; b + c\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow c = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & m & 0 & n \\ c & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{0; 0; b - c; b + c\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow c = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad \sigma(A) = \{bi; -bi; b; -b\}$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 5; -5; 6; -6; 7; -7; 8; -8; 9; -9$$

108. Найти собственные векторы матрицы  $A$ .

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & c \\ n & 0 & k & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, (0; x_2; 0; 0), x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\checkmark \quad \lambda = b, \left( \frac{c}{b} x_4; \left( \frac{nc}{b^2} + \frac{m}{b} \right) x_4; 0; x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2$$

$$\rightarrow c = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow k = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & n \\ k & m & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, (0; 0; x_3; 0), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\checkmark \quad \lambda = b, \left( 0; 0; \frac{n}{b} x_4; x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2$$

$$\rightarrow c = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow k = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & -a & n & k \\ k & 0 & -a & c \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, (0; x_2; 0; 0), x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\checkmark \quad \lambda = a, \left( \frac{a}{k} x_3; \left( \frac{m}{k} + \frac{n}{a} \right) x_3; x_3; 0 \right), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda = b, \left( 0; \left( \frac{nc}{b^2} + \frac{k}{b} \right) x_4; \frac{c}{b} x_4; x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 3; -3$$

$$\rightarrow b = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow c = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow k = 2; -2$$

$$4) A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & k \\ k & n & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, (0; 0; x_3; 0), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\checkmark \lambda = a, \left( \frac{a}{m} x_2; x_2; \left( \frac{k}{m} + \frac{n}{a} \right) x_2; 0 \right), x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda = b, \left( 0; \frac{k}{b} x_4; \left( \frac{kn}{b^2} + \frac{c}{b} \right) x_4; x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 3; -3$$

$$\rightarrow b = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow c = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2$$

$$\rightarrow n = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow k = 2; -2; 4; -4$$

$$5) A = \begin{pmatrix} b & 0 & a & c \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & n & b \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, (0; x_2; 0; 0), x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\checkmark \lambda = b - c, (-x_4; 0; 0; x_4), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda = b + c, (x_4; 0; 0; x_4), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 3; -3$$

$$\rightarrow c = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$6) A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & m & 0 & n \\ c & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, (0; 0; x_3; 0), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\checkmark \lambda = b - c, \left( -x_4; 0; \frac{n - a}{b - c} x_4; x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda = b + c, \left( x_4; 0; \frac{a + n}{b + c} x_4; x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow a = 1; -1$$

$$\rightarrow b = c + 2; c - 2; c + 4$$

$$\rightarrow c = 2; 4$$

$$\rightarrow m = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

$$\rightarrow n = 3; -3; 5; -5$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = b, (x_4; x_4; x_4; x_4), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda = -b, (-x_4; x_4; -x_4; x_4), x_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

✓

$$\lambda = bi, (-x_3; -ix_3; x_3; ix_3), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda = -bi, (-x_3; ix_3; x_3; -ix_3), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 5; -5; 6; -6; 7; -7; 8; -8; 9; -9$$



109. Найти собственные векторы матрицы  $A$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -5; -6; -7; -8; -9$$

$$\Rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = 5; 6; 7; 8; -5; -6; -7; -8$$

$$\Rightarrow d = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -1; -2; -3; -4-5; -6; -7; -8; -9$$

$$1) A = \begin{pmatrix} b+k & d & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & b+k \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \lambda_1 = b, \left( -\frac{k}{c}x_3; \frac{k^2 - c^2}{cd}x_3; x_3 \right), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lambda_2 = b + k - c, (-x_3; 0; x_3), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lambda_3 = b + k + c, (x_3; 0; x_3), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} b+k & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & d & b+k \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \lambda_1 = b, \left( -\frac{c}{k}x_3; \frac{c^2 - k^2}{kd}x_3; x_3 \right), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lambda_2 = b + k - c, (-x_3; 0; x_3), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\lambda_3 = b + k + c, (x_3; 0; x_3), x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

110. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду

1)  $L(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + ax_3^2 - 2ax_1x_2$

✓  $S = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$L(y_1, y_2, y_3) = by_1^2 + 2ay_3^2$$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 6$

→  $b = 5; -5; 7; -7; 9; -9$

2)  $L(x_1, x_2, x_3) = bx_1^2 + ax_2^2 - 2ax_2x_3 + ax_3^2$

✓  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$L(y_1, y_2, y_3) = by_1^2 + 2ay_3^2$$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 6$

→  $b = 5; -5; 7; -7; 9; -9$

3)  $L(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 - 2ax_1x_2$

✓  $S = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$L(y_1, y_2, y_3) = by_1^2 + 2ay_3^2$$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 6$

→  $b = 5; -5; 7; -7; 9; -9$

4)  $L(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + cx_2^2 + ax_3^2 - 2bx_1x_3$

✓  $S = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$L(y_1, y_2, y_3) = cy_1^2 + (a-b)y_2^2 + (a+b)y_3^2$$

→  $a = 3; 4; 5$

→  $b = 1; 2$

→  $c = 8; 9; 10$

5)  $L(x_1, x_2, x_3) = cx_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 - 2bx_2x_3$

✓  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$L(y_1, y_2, y_3) = cy_1^2 + (a-b)y_2^2 + (a+b)y_3^2$$

$$\rightarrow a = 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2$$

$$\rightarrow c = 8; 9; 10$$

$$6) \quad L(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + cx_3^2 - 2bx_1x_2$$

$$\checkmark \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L(y_1, y_2, y_3) = cy_1^2 + (a - b)y_2^2 + (a + b)y_3^2$$

$$\rightarrow a = 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2$$

$$\rightarrow c = 8; 9; 10$$

## Часть V

### Прямая на плоскости

111. Построить область решений следующих систем неравенств.

$$1) \begin{cases} Bx - ay + aA \geq 0, \\ Cx + by \leq aC + b(A + B), \\ (A + B - C)x + cy \leq (a + b + c)(A + B - C), \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

✓  $(0, 0), (0, A), (a, A + B), (a + b, A + B - C), (a + b + c, 0)$

→  $A = 3; 4; 5; 6; 7$

→  $B = 2; 3; 4; 5$

→  $C = 0; 1; 2; 3; 4$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6$

→  $c = b - 1; b + 1; b + 2$

→  $b = 1; 2; 3$

112. Написать уравнение прямой, проходящей через точки

1)  $A(A, B), B(A + ka, B + kb)$

✓  $bx - ay + aB - bA = 0$

→  $A = -3; 5; 7$

→  $B = -4; -2; 4$

→  $a = -5; -3; -1; 1; 3; 5$

→  $b = -2; -4; -1; 1; 2; 4$

→  $k = 1; -1; 3; -2$

**113.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A$ , и параллельной прямой, соединяющей точки  $M$  и  $N$ .

1)  $A(A, B), M(C, D), N(C + kc, D + kd)$

✓  $dx - cy + cB - dA = 0$

→  $c = -5; -3; -1; 1; 3; 5$

→  $d = -2; -4; -1; 1; 2; 4$

→  $A = -1; 2; 3$

→  $B = 1; 2; -3$

→  $C = -3; 5; 7$

→  $D = -4; -2; 4$

→  $k = 1; -1; 3; -2$

114. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A$ , и перпендикулярной прямой, соединяющей точки  $M$  и  $N$ .

1)  $A(A, B), M(C, D), N(C + kc, D + kd)$

✓  $cx + dy - cA - dB = 0$

→  $c = -5; -3; -1; 1; 3; 5$

→  $d = -2; -4; -1; 1; 2; 4$

→  $A = -1; 2; 3$

→  $B = 1; 2; -3$

→  $C = -3; 5; 7$

→  $D = -4; -2; 4$

→  $k = 1; -1; 3; -2$



115. Найти угол между прямыми:

1)  $ax + by - aA - bB = 0$ ,  $cx + dy - cC - dD = 0$

✓  $\arctg \left| \frac{ad - bc}{ac + bd} \right|$

→  $a = -1; 1; 2; -2$

→  $b = 1; -1; 3; -3; 5; -5$

→  $c = 1; -1; 3; -3; 5; -5$

→  $d = 2; -2; 1; -1$

→  $A = 2; -3$

→  $B = 3; -4$

→  $C = 1; -5$

→  $D = 6; -3$

116. Найти точку пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ .

1)  $A(a, A), B(b, B), C(c, C), D(d, D)$

$$\checkmark \left( \frac{lb - ka + A - B}{l - k}, k \frac{lb - la + A - B}{l - k} + A \right)$$

$$\rightarrow k = \frac{C - A}{c - a}$$

$$\rightarrow l = \frac{D - B}{d - b}$$

$$\rightarrow a = -4; -5; -6; -7$$

$$\rightarrow b = 9; 10; 11; 12$$

$$\rightarrow c = 9; 10; 11; 12$$

$$\rightarrow d = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow A = 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow B = 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow C = -2; -1; 0; 1$$

$$\rightarrow D = -5; -4; -3; -2$$

117. Найти точку пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ .

1)  $A(A + ka, B + kb), B(A + mc, B + md), C(A + la, B + lb), D(A + nc, B + nd)$

✓  $(A, B)$

→  $A = -5; 3; -1$

→  $B = -2; 4; 6$

→  $a = 1; -1; 3; -3$

→  $b = 1; -1; 2; -2; 4; -4$

→  $c = 5; -5$

→  $d = 1; -1; 2; -2; 4; -4; 3; -3$

→  $k = 3; 5$

→  $l = -2; -4$

→  $m = 3; 2$

→  $n = -1; -5$

118. В треугольнике  $ABC$  найти длину высоты  $AD$ .

1)  $A(A + cl, B + dl), B(A, B), C(A + ak, B + bk)$

$$\checkmark \left| \frac{-bcl + adl}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$\rightarrow a = 2; -3; 3; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 1; -4; 4; 3; -3$$

$$\rightarrow A = 3; -2$$

$$\rightarrow B = -4; 5$$

$$\rightarrow c = 1; 2; -2; -3; 3$$

$$\rightarrow d = -5; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2; -3$$

$$\rightarrow l = 3; -2$$

119.

- 1) Написать уравнения прямых, проходящих через точку  $M(a, b)$  и отсекающих на координатных осях отрезки равной длины.

✓  $y = x - a + b; \quad y = -x + a + b$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5$

120.

- 1) Дан треугольник с вершинами  $A(a, b)$ ,  $B(a + 3, b + 3)$ ,  $C(a + 4, b - 4)$ . Найти его периметр и площадь.

✓  $P = 12$ ,  $S = 6$

→  $a = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

121.

- 1) Дан треугольник с вершинами  $A(a, b)$ ,  $B(a + 3, b + 3)$ ,  $C(a + 4, b - 4)$ . Найти уравнения сторон.

$$AB: x - y - a + b = 0;$$

$$\checkmark AC: x + y - a - b = 0;$$

$$BC: 7x + y - b - 7a - 24 = 0$$

$$\rightarrow a = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

122.

- 1) Дан треугольник с вершинами  $A(a, b)$ ,  $B(a + 3, b + 3)$ ,  $C(a + 4, b - 4)$ . Найти его внутренние углы.

$$\angle A = 90^\circ,$$

$$\checkmark \quad \angle C = \arctg 3/4,$$

$$\angle B = \arctg 4/3$$

$$\rightarrow a = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$



123.

- 1) Известны уравнения сторон треугольника  $ABC$ :  $x - y - a + b = 0$  ( $AB$ ),  $x + y - a - b = 0$  ( $AC$ ),  $7x + y - b - 7a - 24 = 0$  ( $BC$ ). Найти его периметр и площадь.

✓  $P = 12$ ,  $S = 6$

→  $a = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

124.

- 1) Известны уравнения сторон треугольника  $ABC$ :  $x - y - a + b = 0$  ( $AB$ ),  $x + y - a - b = 0$  ( $AC$ ),  $7x + y - b - 7a - 24 = 0$  ( $BC$ ). Составить уравнение биссектрисы, проведённой из вершины  $A$  и найти её длину.

✓  $y = b$ ,  $d = 3\frac{3}{7}$

→  $a = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

125.

- 1) На прямой  $y - x - 2c = 0$  найти точку, равноудалённую от точек  $A(a; a)$  и  $B(a + 2b; a + 2b)$ .

✓  $M(a + b - c; a + b + c)$

→  $a = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $c = 1; 2; 3; 4; 5$

126.

- 1) Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $x + y - a - b = 0$  и  $7x + y - b - 7a - 24 = 0$  и делящей отрезок  $AB$  между точками  $A(a + 5, b + 1)$  и  $B(a + 8, b - 2)$  в отношении  $2 : 1$ .

✓  $y = x - a + b - 8$

→  $a = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

127.

$$\Rightarrow a = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow b = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow C = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

- 1) Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(a; b)$  параллельно прямой  $y = kx + C$ .

$$\checkmark y = kx - ka + b$$

- 2) Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(a; b)$  параллельно прямой  $kAx - Ay + C = 0$ .

$$\checkmark y = kx - ka + b$$

$$\rightarrow A = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

- 3) Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(a; b)$  перпендикулярно прямой  $y = -\frac{1}{k}x + C$ .

$$\checkmark y = kx - ka + b$$

- 4) Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(a; b)$  параллельно прямой  $Ax + Aky + C = 0$ .

$$\checkmark y = kx - ka + b$$

$$\rightarrow A = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

128.

- 1) Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой  $bx + ay - ab = 0$  от координатного угла.

✓  $\frac{1}{2}ab$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5$

129.

1) Найти расстояние от начала координат до прямой  $Ax - Ay + C = 0$

$$\checkmark \quad d = \frac{C}{A\sqrt{2}}$$

→  $A = -5; -4; -3; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $C = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$

## Часть VI

### Прямая и плоскость в пространстве



130. Составить уравнение плоскости.

$$\Rightarrow a = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = -4; -2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

$$\Rightarrow A = -3; -2; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow B = -4; -2; 1; 3$$

$$\Rightarrow C = -5; -1; 2; 3$$

- 1) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку  $M_0(a; b; c)$  и имеет нормальный вектор  $\vec{N} = (A; B; C)$ .

$$\checkmark \quad Ax + By + Cz - aA - bB - cC = 0$$

- 2) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку  $M_0(a; b; c)$  и параллельна плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

$$\checkmark \quad Ax + By + Cz - aA - bB - cC = 0$$

$$\rightarrow D = -11; -9; -7; 3; 5; 8$$

**131.** Составить уравнение плоскости.

$$\Rightarrow a = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = -4; -2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

$$\Rightarrow l_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow l_2 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow l_3 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow k_1 = 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_2 = 1; 3$$

$$\Rightarrow k_3 = 0; 2$$

- 1) Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(a; b; c)$ ,  $M_2(a + l_1; b + l_2; c + l_3)$ , и перпендикулярной плоскости  $k_1 l_1 x + k_2 l_2 y + k_3 l_3 z + D = 0$ .

$$\checkmark (k_3 - k_2) l_2 l_3 (x - a) + (k_1 - k_3) l_1 l_3 (y - b) + (k_2 - k_1) l_1 l_2 (z - c) = 0$$

$$\rightarrow D = -11; -9; -7; 3; 5; 8$$

- 2) Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки  $M_1(a; b; c)$ ,  $M_2(a + l_1; b + l_2; c + l_3)$ ,  $M_3(a + k_1 l_1; b + k_2 l_2; c + k_3 l_3)$ .

$$\checkmark (k_3 - k_2) l_2 l_3 (x - a) + (k_1 - k_3) l_1 l_3 (y - b) + (k_2 - k_1) l_1 l_2 (z - c) = 0$$

132. Составить уравнение плоскости.

$$\Rightarrow a = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = -4; -2; 1; 3; 4$$

1) Написать уравнение плоскости, проходящей через ось  $Ox$  и точку  $M(0; a; b)$ .

$$\checkmark by - az = 0$$

2) Написать уравнение плоскости, проходящей через ось  $Oy$  и точку  $M(a; 0; b)$ .

$$\checkmark bx - az = 0$$

3) Написать уравнение плоскости, проходящей через ось  $Oz$  и точку  $M(a; b; 0)$ .

$$\checkmark bx - ay = 0$$

4) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(a; b; c)$  и отсекающей равные отрезки на осях координат.

$$\checkmark x + y + z - a - b - c = 0$$

$$\rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(a; b; c)$  и отсекающей на осях  $Oy$  и  $Oz$  в  $k$  раз большие отрезки, чем на оси  $Ox$ .

$$\checkmark kx + y + z - ka - b - c = 0$$

$$\rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3$$

6) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(a; b; c)$  и отсекающей на осях  $Ox$  и  $Oz$  в  $k$  раз большие отрезки, чем на оси  $Oy$ .

$$\checkmark x + ky + z - a - kb - c = 0$$

$$\rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3$$

7) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(a; b; c)$  и отсекающей на осях  $Ox$  и  $Oy$  в  $k$  раз большие отрезки, чем на оси  $Oz$ .

$$\checkmark x + y + kz - a - b - kc = 0$$

$$\rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3$$

**133.** Найти расстояние.

$$\Rightarrow a = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = -4; -2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

$$\Rightarrow A = -3; -2; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow B = -4; -2; 1; 3$$

$$\Rightarrow C = -5; -1; 2; 3$$

$$\Rightarrow D = -11; -9; -7; 3; 5; 8$$

1) Найти расстояние от точки  $M_0(a; b; c)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

$$\checkmark \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

134. Найти угол между плоскостями.

$$\Rightarrow A_1 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow B_1 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow C_1 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow D_1 = -6; -4; -2; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow D_2 = -5; -3; -1; 2; 4; 6$$

$$\Rightarrow k_1 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_2 = 1; 2$$

$$\Rightarrow k_3 = -2; -1$$

$$1) A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\checkmark \cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{((A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2)((A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2)}}$$

$$\rightarrow A_2 = k_1A_1$$

$$\rightarrow B_2 = k_2B_1$$

$$\rightarrow C_2 = k_3C_1$$

135. Составить уравнение прямой.

$$\Rightarrow a = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = -4; -2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

$$\Rightarrow l_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow l_2 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow l_3 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

- 1) Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(a; b; c)$ ,  $M_2(a + l_1; b + l_2; c + l_3)$ .

$$\checkmark \quad \frac{x - a}{l_1} = \frac{y - b}{l_2} = \frac{z - c}{l_3}$$

- 2) Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M(a; b; c)$ , параллельно прямой  $\frac{x - a_2}{l_1} = \frac{y - b_2}{l_2} = \frac{z - c_2}{l_3}$ .

$$\checkmark \quad \frac{x - a}{l_1} = \frac{y - b}{l_2} = \frac{z - c}{l_3}$$

$$\rightarrow a_2 = -1; 4; 5$$

$$\rightarrow b_2 = -3; -1; 0; 2$$

$$\rightarrow c_2 = -4; -3; 1; 4; 5$$

**136.** Проверить, будут ли прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны, ортогональными либо не обладают ни одним из этих свойств.

$$\Rightarrow A = -2; -1; 2; 4$$

$$\Rightarrow B = -3; 1; 2; 5$$

$$\Rightarrow C = -2; -1; 2; 3$$

$$\Rightarrow D_1 = -2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow D_2 = -3; -1; 2; 5$$

$$\Rightarrow a = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow b = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow k_1 = 1; 2$$

$$\Rightarrow k_2 = -1; 0$$

$$\Rightarrow k_3 = -2; 3$$

$$1) \quad \begin{aligned} l_1 : & \begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0; \\ k_1 Ax + k_2 By + k_3 Cz + D_2 = 0; \end{cases} \\ l_2 : & \frac{x-a}{k(k_3-k_2)BC} = \frac{y-b}{k(k_1-k_3)AC} = \frac{z-c}{k(k_2-k_1)AB}. \end{aligned}$$

✓ коллинеарны

$$\rightarrow k = -1; 1; 2; 3$$

$$2) \quad \begin{aligned} l_1 : & \begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0; \\ k_1 Ax + k_2 By + k_3 Cz + D_2 = 0; \end{cases} \\ l_2 : & \frac{x-a}{k(k_2-k_1)AB} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{k(k_2-k_3)BC}. \end{aligned}$$

✓ ортогональны

$$\rightarrow k = -1; 1; 2; 3$$

$$3) \quad \begin{aligned} l_1 : & \begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0; \\ k_1 Ax + k_2 By + k_3 Cz + D_2 = 0; \end{cases} \\ l_2 : & \frac{x-a}{l_1(k_3-k_2)BC} = \frac{y-b}{l_2(k_1-k_3)AC} = \frac{z-c}{l_3(k_2-k_1)AB}. \end{aligned}$$

$$\rightarrow l_1 = 1; 2$$

$$\rightarrow l_2 = 1; 3$$

$$\rightarrow l_3 = 2; 4$$

✓ не обладают

137. Найти проекцию.

$$\Rightarrow a = -3; -2; 0; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = -4; -2; 1; 3; 4$$

$$\Rightarrow c = -5; -1; 0; 2; 3; 7$$

$$\Rightarrow A = -3; -2; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow B = -4; -2; 1; 3$$

$$\Rightarrow C = 0; -1; 2; 3$$

$$\Rightarrow D = -11; -9; -7; 3; 5; 8$$

1) Найти ортогональную проекцию точки  $M_0(a; b; c)$  на плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

$$\checkmark \left( a - A \frac{Aa + Bb + Cc + D}{A^2 + B^2 + C^2}, b - B \frac{Aa + Bb + Cc + D}{A^2 + B^2 + C^2}, c - C \frac{Aa + Bb + Cc + D}{A^2 + B^2 + C^2} \right)$$



## Часть VII

### Векторы

138. Проверить, будут ли векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  коллинеарными, ортогональными либо не обладают ни одним из этих свойств.

$$\Rightarrow a_1 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_2 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_3 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow c_1 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow c_2 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow c_3 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow l_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow l_2 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow l_3 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$1) \quad A(a_1, a_2, a_3), \quad B(a_1 + l_1, a_2 + l_2, a_3 + l_3), \\ C(c_1, c_2, c_3), \quad D(c_1 + kl_1, c_2 + kl_2, c_3 + kl_3)$$

✓ коллинеарны

$$\rightarrow k = -1; 1; 2; 3$$

$$2) \quad A(a_1, a_2, a_3), \quad B(a_1 + l_1, a_2 + l_2, a_3 + l_3), \\ C(c_1, c_2, c_3), \quad D(c_1 + kl_3, c_2, c_3 - kl_1)$$

✓ ортогональны

$$\rightarrow k = -1; 1; 2; 3$$

$$3) \quad A(a_1, a_2, a_3), \quad B(a_1 + l_1, a_2 + l_2, a_3 + l_3), \\ C(c_1, c_2, c_3), \quad D(c_1 + k_1l_1, c_2 + k_2l_2, c_3 + k_3l_3)$$

✓ не обладают

$$\rightarrow k_1 = 0; 1; 2$$

$$\rightarrow k_2 = 1; 3$$

$$\rightarrow k_3 = 0; 2$$

139. При каких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  векторы коллинеарны/ортогональны

1) Даны векторы

$$\vec{a} = n\vec{i} + \vec{j} + \alpha\vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - \beta\vec{j} + m\vec{k}$$

При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны?

$$\checkmark \quad \beta = -\frac{1}{n}, \quad \alpha = m$$

$$\rightarrow n = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

2) Даны векторы

$$\vec{a} = n\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = \alpha\vec{i} + l\vec{j} + m\vec{k}$$

При каких значениях  $\alpha$  они ортогональны?

$$\checkmark \quad \alpha = -\frac{m}{n+l}$$

$$\rightarrow n = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow n = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow m = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

140. Решить задачу

- 1) Найти вектор  $\vec{b}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  и удовлетворяющий условию  $\vec{a} \cdot \vec{b} = k(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$ .

✓  $\vec{b} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

→  $a_1 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

→  $a_2 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $a_3 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

→  $k = -2; -1; 2; 3; 4$

141. Решить задачу

- 1) Найти вектор  $\vec{c}$ , ортогональный векторам  $\vec{a} = (3; -2; 1)$  и  $\vec{b} = (3b_3 - 1; b_2; b_3)$ , если его длина равна  $\sqrt{(b_2 + 2b_3)^2 + 1 + (6b_3 - 2 + 3b_2)^2}$ , а проекция вектора  $\vec{c}$  на ось  $OY$  положительна.

$$\checkmark \quad \vec{c} = (b_2 + 2b_3; 1; -(6b_3 - 2 + 3b_2))$$

$$\rightarrow b_2 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b_3 = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

142.

- 1) Вычислить длину вектора  $\vec{c} = k\vec{a} + n\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = n$ ,  $|\vec{b}| = k$ ,  $\varphi = 120^\circ$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

✓  $|\vec{c}| = kn$

→  $k = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $n = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

**143.** Найти вектор, удовлетворяющий условиям

$$\Rightarrow n = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow l = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow m = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow f = -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow d = -2; -1; 1; 2; 3$$

- 1) Найти вектор  $\vec{b}$ , ортогональный вектору  $\vec{a} = n\vec{i} + l\vec{j} + m\vec{k}$  и удовлетворяющий условиям:  
 $\vec{b} \cdot \vec{i} = fm$  и  $\vec{b} \cdot \vec{j} = dm$ .

$$\checkmark \quad \vec{b} = (mf; dm; -(nf + ld))$$

- 2) Найти вектор  $\vec{b}$ , удовлетворяющий условиям  $\vec{b} \cdot \vec{i} = f$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{k} = d$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = l$ , где  $\vec{a} = n\vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ .

$$\checkmark \quad \vec{b} = (f; l - nf - md; d)$$

144. Найти вектор  $\vec{q}$

1) Даны три вектора

$$\vec{u} = (a + en)\vec{i} + fn\vec{j} + (b + gn)\vec{k};$$

$$\vec{v} = (c + em)\vec{i} + fm\vec{j} + (d + gm)\vec{k};$$

$$\vec{w} = e\vec{i} + f\vec{j} + g\vec{k}$$

Найти вектор  $\vec{q}$ , удовлетворяющий условиям  $\vec{u} \cdot \vec{q} = (a + en)X + fnY + (b + gn)Z$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{q} = (c + em)X + fmY + (d + gm)Z$  и  $\vec{w} \cdot \vec{q} = eX + fY + gZ$ .

✓  $\vec{q} = (X; Y; Z)$

→  $n = -2; 3$

→  $m = -1; 5$

→  $X = 1; 7$

→  $Y = -2; -3$

→  $Z = 4; -1$

→  $a = 2; -2; 4; -4$

→  $b = 7; -7$

→  $c = 3; -3$

→  $d = -5; 5$

→  $e = -4; 2; 3$

→  $f = 3; -2; 5$

→  $g = -2; 1; 0$



145. Сила  $\vec{F}$  приложена к точке  $A$ . Вычислить

- а) работу силы  $\vec{F}$  в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $A$  в положение  $B$ ;  
 б) модуль момента силы  $\vec{F}$  относительно точки  $B$ .

$$\Rightarrow f_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow f_2 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow f_3 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_1 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow a_2 = -2; 0; 2; 4$$

$$\Rightarrow a_3 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow b_1 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow b_2 = -1; 1; 3$$

$$\Rightarrow b_3 = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$1) \vec{F} = (f_1, f_2, f_3), A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3),$$

$$\checkmark A = A, |\vec{M}| = V$$

$$\rightarrow A = f_1(b_1 - a_1) + f_2(b_2 - a_2) + f_3(b_3 - a_3)$$

$$\rightarrow V = \sqrt{(f_3(a_2 - b_2) - f_2(a_3 - b_3))^2 + (f_3(a_1 - b_1) - f_1(a_3 - b_3))^2 + (f_2(a_1 - b_1) - f_1(a_2 - b_2))^2}$$

146. Даны три силы  $\vec{F}$ ,  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$ , приложенные к точке  $C$ . Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки  $A$ .

$$\Rightarrow f_1 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow f_2 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow f_3 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow p_1 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow p_2 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow p_3 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow q_1 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow q_2 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow q_3 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_1 = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_2 = -2; 0; 2$$

$$\Rightarrow a_3 = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_1 = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\Rightarrow c_2 = -1; 1$$

$$\Rightarrow c_3 = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$1) \quad \vec{F} = (f_1, f_2, f_3), \quad \vec{P} = (p_1, p_2, p_3), \quad \vec{Q} = (q_1, q_2, q_3), \\ A(a_1, a_2, a_3), \quad C(c_1, c_2, c_3)$$

$$\vec{M} = ni - lj + mk,$$

✓

$$\cos \alpha = \frac{n}{M}, \quad \cos \beta = \frac{l}{M}, \quad \cos \gamma = \frac{m}{M},$$

$$\rightarrow M = \sqrt{n^2 + l^2 + m^2}$$

$$\rightarrow n = (c_2 - a_2)(f_3 + p_3 + q_3) - (c_3 - a_3)(f_2 + p_2 + q_2)$$

$$\rightarrow l = (c_1 - a_1)(f_3 + p_3 + q_3) - (c_3 - a_3)(f_1 + p_1 + q_1)$$

$$\rightarrow m = (c_1 - a_1)(f_2 + p_2 + q_2) - (c_2 - a_2)(f_1 + p_1 + q_1)$$

147. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найти  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

$$\Rightarrow k = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow l = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow p = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow f = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow d = 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow q = 1; 2; 3; 4$$

$$\begin{aligned} & \vec{a} = k\vec{m} + l\vec{n}, \vec{b} = p\vec{m} + f\vec{n} \\ 1) \quad & |\vec{m}| = 2d, |\vec{n}| = q, (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad 4kpd^2 - (kf + lp)dq + lfq^2$$

$$\begin{aligned} & \vec{a} = k\vec{m} + l\vec{n}, \vec{b} = p\vec{m} + f\vec{n} \\ 2) \quad & |\vec{m}| = 2d, |\vec{n}| = q, (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad 4kpd^2 + (kf + lp)dq + lfq^2$$

148. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

$$\Rightarrow a_1 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_2 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_3 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_1 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_2 = 1; 2$$

$$\Rightarrow k_3 = -2; -1$$

$$1) \vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

$$\checkmark \cos \varphi = \frac{a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 - b_3^2}{\sqrt{((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2)((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2)}}$$

$$\rightarrow b_1 = k_1 a_1$$

$$\rightarrow b_2 = k_2 a_2$$

$$\rightarrow b_3 = k_3 a_3$$

149. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

$$\Rightarrow b_1 = k_1 a_1$$

$$\Rightarrow b_2 = k_2 a_2$$

$$\Rightarrow b_3 = k_3 a_3$$

$$\Rightarrow a_1 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_2 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow a_3 = -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_1 = -2; -1; 1; 2$$

$$\Rightarrow k_2 = 1; 2$$

$$\Rightarrow k_3 = -2; -1$$

$$1) \vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

$$\checkmark \sqrt{(a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 + (a_1 b_3 - b_1 a_3)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}$$

150. Найти вектор  $\vec{x}$ , зная что

$$\Rightarrow a = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow b = -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$1) \vec{x} \cdot \vec{i} = a, \vec{x} \times \vec{i} = -b\vec{k}$$

$$\checkmark \vec{x} = (a; b; 0)$$

$$2) \vec{x} \cdot \vec{k} = a, \vec{x} \times \vec{k} = b\vec{i}$$

$$\checkmark \vec{x} = (0; b; a)$$

$$3) \vec{x} \cdot \vec{j} = a, \vec{x} \times \vec{j} = -b\vec{i}$$

$$\checkmark \vec{x} = (0; a; b)$$

$$4) \vec{x} \cdot \vec{k} = -a, \vec{x} \times \vec{k} = b\vec{j}$$

$$\checkmark \vec{x} = (-b; 0; -a)$$

151. Решить задачу на тему «Смешанное произведение векторов»

1) Вычислить смешанное произведение векторов  $\vec{a} = (1; k; lm)$ ,  $\vec{b} = (1; l; km)$  и  $\vec{c} = (1; m; kl)$ .

✓  $(l - k)(m - k)(m - l)$

→  $l = -4; -1; 2; 4$

→  $k = -3; 1; 3$

→  $m = -5; -2; 5$

2) Будут ли векторы  $\vec{a} = (k + l; m; 1)$ ,  $\vec{b} = (l + m; k; 1)$  и  $\vec{c} = (m + k; l; 1)$  компланарны?

✓ да

→  $l = -4; -1; 2; 4$

→  $k = -3; 1; 3$

→  $m = -5; -2; 5$

3) Лежат ли векторы  $\vec{a} = (x_1; x_2; \alpha x_1 + \beta x_2)$ ,  $\vec{b} = (y_1; y_2; \alpha y_1 + \beta y_2)$  и  $\vec{c} = (z_1; z_2; \alpha z_1 + \beta z_2)$  в одной плоскости?

✓ да

→  $x_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $x_2 = 3; 4$

→  $y_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $y_2 = -2; -1$

→  $z_1 = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $z_2 = 1; 2$

→  $\alpha = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $\beta = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

4) Лежат ли точки  $A(a_1; a_2; 0)$ ,  $B = (b_1; b_2; \alpha(b_1 - a_1) + \beta(b_2 - a_2))$ ,  $C = (c_1; c_2; \alpha(c_1 - a_1) + \beta(c_2 - a_2))$  и  $D = (d_1; d_2; \alpha(d_1 - a_1) + \beta(d_2 - a_2))$  в одной плоскости?

✓ да

→  $a_1 = 1; 2; 3; 4$

→  $a_2 = 1; 2; 3; 4$

→  $b_1 = 1; 2; 3; 4$

→  $b_2 = -2; -1$

→  $c_1 = -2; -1$

→  $c_2 = 1; 2; 3; 4$

→  $d_1 = -2; -1$

→  $d_2 = -2; -1$

→  $\alpha = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $\beta = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

- 5) Вычислить объём треугольной пирамиды, построенной на векторах  $\vec{a} = (x^2 + 36; 6x; 1)$ ,  $\vec{b} = (y^2 + 36; 6y; 1)$  и  $\vec{c} = (z^2 + 36; 6z; 1)$ .

✓  $|(x - y)(y - z)(x - z)|$

→  $x = -4; -1; 2; 4$

→  $y = -3; 1; 3$

→  $z = -5; -2; 5$

- 6) Вычислить, правой или левой будет тройка векторов  $\vec{a} = (1; x; x^2)$ ,  $\vec{b} = (1; y; y^2)$  и  $\vec{c} = (1; z; z^2)$ .

✓  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (y - x)(z - x)(z - y)$

→  $x = -4; -1; 2; 4$

→  $y = -3; 1; 3$

→  $z = -5; -2; 5$

- 7) Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = (m + k; m - k; k)$ ,  $\vec{b} = (n + k; 2n - k; k)$  и  $\vec{c} = (k; -k; k)$ .

✓  $|kmn|$

→  $k = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $m = -2; -1; 1; 2; 3; 4$

→  $n = -2; -1; 1; 2; 3; 4$



152. На векторах  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AS}$  построена треугольная пирамида. Найти длину высоты, опущенной из вершины  $S$  на грань  $ABC$ .

$$1) \quad \overrightarrow{AB} = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; 1 \right), \quad \overrightarrow{AC} = \left( \frac{x_1 - x_2}{2}; \frac{y_1 - y_2}{2}; 1 \right), \quad \overrightarrow{AS} = (x_1; y_1; 1)$$

$$\checkmark \quad \frac{3|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{y_2^2 + x_2^2 + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)^2}{4}}}$$

$$\rightarrow x_2 = x_1 + a$$

$$\rightarrow y_2 = y_1 + b$$

$$\rightarrow x_1 = 0; 1; 2$$

$$\rightarrow y_1 = 3; 4$$

$$\rightarrow a = 4; 6$$

$$\rightarrow b = 2; 4$$

**153.** Доказать, что векторы  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{q}$  в этом базисе, если

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (a + en; c + em; e) \\ \vec{v} &= (fn; fm; f) \\ 1) \quad \vec{w} &= (b + gn; d + gm; g) \\ \vec{q} &= ((a + en)X + fnY + (b + gn)Z; (c + em)X + fmY + (d + gm)Z; eX + fY + gZ) \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \vec{q} = (X; Y; Z)$$

$$\rightarrow n = -2; 3$$

$$\rightarrow m = -1; 5$$

$$\rightarrow X = 1; 7$$

$$\rightarrow Y = -2; -3$$

$$\rightarrow Z = 4; -1$$

$$\rightarrow a = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 7; -7$$

$$\rightarrow c = 3; -3$$

$$\rightarrow d = -5; 5$$

$$\rightarrow e = -4; 2; 3$$

$$\rightarrow f = 3; -2; 5$$

$$\rightarrow g = -2; 1; 0$$

154. Вычислить ранг системы векторов, найти какой-либо базис, выразить небазисные векторы через базис.

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (a + en; c + em; e) \\ 1) \quad \vec{x}_2 &= (fn; fm; f) \\ \vec{x}_3 &= (b + gn; d + gm; g) \\ \vec{x}_4 &= ((a + en)X + fnY + (b + gn)Z; (c + em)X + fmY + (d + gm)Z; eX + fY + gZ) \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \vec{x}_4 = (X; Y; Z)$$

$$\rightarrow n = -2; 3$$

$$\rightarrow m = -1; 5$$

$$\rightarrow X = 1; 7$$

$$\rightarrow Y = -2; -3$$

$$\rightarrow Z = 4; -1$$

$$\rightarrow a = 2; -2; 4; -4$$

$$\rightarrow b = 7; -7$$

$$\rightarrow c = 3; -3$$

$$\rightarrow d = -5; 5$$

$$\rightarrow e = -4; 2; 3$$

$$\rightarrow f = 3; -2; 5$$

$$\rightarrow g = -2; 1; 0$$

## Часть VIII

### Кривые второго порядка

**155.** Найти координаты центра и радиус окружности

1)  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2ab = 0$

✓  $O(-a; -b), R = a + b$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5$

**156.** Определить вид кривой второго порядка, привести к каноническому виду и изобразить.

$$\Rightarrow n = 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\Rightarrow m = 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\Rightarrow l = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \quad nx^2 + my^2 + 2mnx + 2lmy + ml^2 = 0$$

$$\checkmark \quad \text{Эллипс: } \frac{(x+m)^2}{m^2} + \frac{(y+l)^2}{mn} = 1, \quad O(-m; -l)$$

$$2) \quad nx^2 - my^2 + 2mnx - 2lmy - ml^2 = 0$$

$$\checkmark \quad \text{Гипербола: } \frac{(x+m)^2}{m^2} - \frac{(y+l)^2}{mn} = 1, \quad O(-m; -l)$$

**157.** Составить уравнение окружности с центром в начале координат, если прямая является касательной к окружности.

1)  $Ax - Ay + 2C = 0$

✓  $x^2 + y^2 = 2\frac{C^2}{A^2}$

→  $A = 1; 3; 5; 7; 9$

→  $C = 1; 2; 3; 4; 5$

## 158. Составить уравнение эллипса

- 1) Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно  $2c$  и большая ось равна  $2c + 2$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{(c+1)^2} + \frac{y^2}{2c+1} = 1$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

- 2) Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если кривая проходит через точки  $M_1(0; b)$  и  $M_2(b-1; \frac{2b}{b+1}\sqrt{b})$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{(b+1)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 5; 7$$

- 3) Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если малая ось равна  $2b$  и эксцентриситет равен  $\varepsilon = \frac{\sqrt{2b+1}}{b+1}$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{(b+1)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

- 4) Найти длину хорды эллипса  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , лежащей на биссектрисе координатных углов.

$$\checkmark \quad \sqrt{\frac{8a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

- 5) Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами в  $k$  раз больше расстояния между концами большой и малой полуосей.

$$\checkmark \quad \sqrt{\frac{2k^2}{4+k^2}}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

- 6) Записать каноническое уравнение эллипса с центром симметрии в начале координат, у которого расстояния от одного из фокусов до концов большей оси равны  $k$  и  $m$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{\left(\frac{k+m}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{km} = 1$$

$$\rightarrow k = 1; 3; 5$$

$$\rightarrow m = 7; 9; 11$$



## 159. Составить уравнение гиперболы

- 1) Написать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси  $Ox$  симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно  $2c$ , а расстояние между вершинами равно  $2c - 2$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{(c-1)^2} - \frac{y^2}{2c-1} = 1$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5; 6$$

- 2) Написать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси  $Ox$  симметрично относительно начала координат, если кривая проходит через точки  $M_1(b; 0)$  и  $M_2(\sqrt{2b^2 + 2b + 1}; b + 1)$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

- 3) Написать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси  $Ox$  симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно  $2c$ , а эксцентриситет равен  $\varepsilon = \frac{c}{c-1}$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{(c-1)^2} - \frac{y^2}{(2c-1)^2} = 1$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5; 6$$

- 4) Написать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси  $Ox$  симметрично относительно начала координат, если уравнения асимптот гиперболы  $y = \pm \frac{b}{b+1}x$  и эксцентриситет равен  $\varepsilon = \frac{\sqrt{2b^2 + 2b + 1}}{b+1}$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{(b+1)^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

- 5) Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса  $b^2x^2 + (b+1)^2y^2 = (b+1)^2b^2$ . Составить уравнение гиперболы, если эксцентриситет  $\varepsilon = \sqrt{2b+1}$ .

$$\checkmark \quad x^2 - \frac{y^2}{2b} = 1$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

- 6) Составить уравнение гиперболы, если известны уравнения её асимптот  $y = \pm \frac{1}{m}x$ , а расстояние между фокусами равно  $2k$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{\frac{m^2k^2}{m^2+1}} - \frac{y^2}{\frac{k^2}{m^2+1}} = 1$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5$$

- 7) Записать каноническое уравнение гиперболы с центром симметрии в начале координат, зная, что расстояния от одной из её вершин до фокусов равны  $k$  и  $m$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{\left(\frac{m-k}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{mk} = 1$$

$$\rightarrow k = 1; 3; 5$$

$$\rightarrow m = 7; 9; 11$$

- 8) Записать каноническое уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет  $\sqrt{2}$ , проходящей через точку  $M(dk; k\sqrt{k^2 - 1})$  и симметричной относительно осей координат.

$$\checkmark \quad x^2 - y^2 = d^2$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow d = 1; 2; 3; 4$$

- 9) Записать уравнение гиперболы, симметричной относительно начала координат, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightarrow a = 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

- 10) Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . Составить каноническое уравнение гиперболы, если её эксцентриситет  $\varepsilon = k$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{\frac{a^2 - b^2}{k^2}} - \frac{y^2}{\frac{(a^2 - b^2)(k^2 - 1)}{k^2}} = 1$$

$$\rightarrow a = 4; 5; 6$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = 2; 3$$

## 160. Составить уравнение параболы

- 1) Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если кривая симметрична относительно оси  $Ox$  и проходит через точку  $M(p; p\sqrt{2})$ .

✓  $y^2 = 2px$

→  $p = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

- 2) Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус в точке  $A(\frac{p}{2}; 0)$ .

✓  $y^2 = 2px$

→  $p = -10; -8; -6; -4; -2; 2; 4; 6; 8; 10$

- 3) Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а уравнение директрисы  $x = \frac{p}{2}$ .

✓  $y^2 = -2px$

→  $p = -10; -8; -6; -4; -2; 2; 4; 6; 8; 10$

- 4) Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точки пересечения прямой  $x + y = 0$  и окружности  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ , симметричной относительно оси  $Ox$ .

✓  $y^2 = ax$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

- 5) Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точки пересечения прямой  $x + y = 0$  и окружности  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ , симметричной относительно оси  $Oy$ .

✓  $x^2 = -ay$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

161. Решите задачу

- 1) Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет эллипса  $b^2x^2 + (b+k)^2y^2 = b^2(b+k)^2$  и изобразить его.

✓  $a = b + k, c^2 = 2kb + k^2$

→  $b = 2; 3; 4; 5$

→  $k = 1; 2; 3$

- 2) Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот гиперболы  $b^2x^2 - (b+k)^2y^2 = b^2(b+k)^2$  и изобразить ее.

✓  $a = b + k, c^2 = 2b^2 + 2kb + k^2$

→  $b = 2; 3; 4; 5$

→  $k = 1; 2; 3$

162. Решить задачу

- 1) Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек  $F_1(-c; 0)$  и  $F_2(c; 0)$  равна  $2c + 2$ .

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{(c+1)^2} + \frac{y^2}{(2c+1)^2} = 1$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

- 2) Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до точек  $A(-a; 0)$  и  $B(a; 0)$  равна  $4a^2$ .

$$\checkmark \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

163. Решить задачу

$$\Rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

- 1) Дана точка  $A(1; 0)$  и прямая  $x = a$ . Составить уравнение линии, каждая точка которой в  $a$  раз ближе к точке  $A$ , чем к данной прямой. Привести уравнение к каноническому виду и изобразить линию.

$$\checkmark \quad \frac{\left(x - \frac{a}{a+1}\right)^2}{\frac{a^2}{(a+1)^2}} + \frac{y^2}{\frac{a-1}{a+1}} = 1$$

- 2) Дана точка  $A(1; 0)$  и прямая  $x = a$ . Составить уравнение линии, каждая точка которой в  $a$  раз дальше от точки  $A$ , чем от данной прямой. Привести уравнение к каноническому виду и изобразить линию.

$$\checkmark \quad \frac{\left(x - \frac{a^2+a+1}{a+1}\right)^2}{\frac{a^2}{(a+1)^2}} - \frac{y^2}{\frac{a^2(a-1)}{a+1}} = 1$$

- 3) Дана точка  $A(1; 0)$  и прямая  $x = a$ . Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки  $A$  и от прямой. Привести уравнение к каноническому виду и изобразить линию.

$$\checkmark \quad y^2 = -2(a-1) \left(x - \frac{a+1}{2}\right)$$

164. Решите задачу

- 1) Вычислить площадь четырехугольника две вершины которого лежат в фокусах эллипса  $x^2 + ay^2 = a(a-1)$ , а две другие совпадают с концами его малой оси.

✓  $S = 2(a-1)\sqrt{a-1}$

→  $a = 3; 4; 5; 6; 7$

165. Решите задачу

- 1) Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $M(2a; c)$  параллельно асимптотам гиперболы  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ .

✓  $bx - ay + a(c - 2b) = 0,$

$bx + ay - a(2b + c) = 0$

→  $a = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $b = 1; 2; 3; 4$

→  $c = 1; 2; 3; 4; 5$



# Часть IX

## Теория пределов

166. Найти предел.

$$\Rightarrow A = -5; -8; 1; -6; 3; 5; 6; 8; 12$$

$$\Rightarrow D = -3; -2; -1; 2; 3; 5$$

$$\Rightarrow B = -9; -6; -2; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow C = -9; -6; -2; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow E = -9; -6; -2; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow F = -9; -6; -2; 3; 5; 7$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{An^a + Bn + C}{Dn^a + En + F}$$

$$\checkmark \frac{A}{D}$$

$$\rightarrow a = 2; 3$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{An^a + Bn + C}{Dn^2 + En + F}$$

$$\checkmark \infty$$

$$\rightarrow a = 3; 4$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{An^2 + Bn + C}{Dn^a + En + F}$$

$$\checkmark 0$$

$$\rightarrow a = 3; 4$$

167. Найти предел

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow m = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{an^3}{bn^2 - c} - \frac{an^2}{bn + m} \right)$$

$$\checkmark \frac{am}{b^2}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(a+1)n^3}{bn^2 - c} - \frac{an^2}{bn + m} \right)$$

$$\checkmark \infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{an^3}{bn^2 + mn - c} - \frac{an^2}{bn + m} \right)$$

$$\checkmark 0$$

168. Найти предел

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\Rightarrow c = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow e = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\Rightarrow f = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a^2 n^2 + bn + c}}{en + f}$$

$$\checkmark \frac{a}{e}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{en + f}{\sqrt[a+2]{n^{a+1} + bn + c}}$$

$$\checkmark \infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[a+2]{n^{a+1} + bn + c}}{\sqrt[a+3]{n^{a+2} + en + f}}$$

$$\checkmark 0$$

169. Найти предел

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\Rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 5; -5; 6; -6; 7; -7$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2an + b} - n)$$

$$\checkmark a$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 2an + b})$$

$$\checkmark -a$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{b + a^2 n^2} - an)$$

$$\checkmark 0$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (an - \sqrt{a^2 n^2 + b})$$

$$\checkmark \infty$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} n (an - \sqrt{a^2 n^2 + b})$$

$$\checkmark -\frac{b}{2}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 - an + c})$$

$$\checkmark a$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + b} - \sqrt{n^2 - 2an + c})$$

$$\checkmark a$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(a+1)n + b} - \sqrt{an - c})$$

$$\checkmark \infty$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2an + b} - nc)$$

$$\checkmark \infty$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{an^2 + bn} - \sqrt{an^2 + c}$$

$$\checkmark \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$11) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(a+1)n^2 + bn} - \sqrt{an^2 + c}$$

$$\checkmark \infty$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$12) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{an^2 + bn} - \sqrt{an^2 + bn + c}$$

$$\checkmark 0$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

170. Найти предел

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\Rightarrow c = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{a^3 n^3 + b n^2 + c} - a n \right)$$

$$\checkmark \quad \frac{b}{3a^2}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{a n^3 + b n^2} - \sqrt[3]{b n^2 - c n} \right)$$

$$\checkmark \quad \infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{a^3 n^3 + b n^2 + c} - \sqrt[3]{a^3 n^3 - b n^2 - 2c} \right)$$

$$\checkmark \quad \frac{2b}{3a^2}$$

171. Найти предел.

$$\Rightarrow A = -5; -8; 1; -6; 3; 5; 6; 8; 12$$

$$\Rightarrow D = -3; -2; -1; 2; 3; 5$$

$$\Rightarrow B = -9; -6; -2; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow C = -9; -6; -2; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow E = -9; -6; -2; 3; 5; 7$$

$$\Rightarrow F = -9; -6; -2; 3; 5; 7$$

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^a + Bx + C}{Dx^a + Ex + F}$$

$$\checkmark \frac{A}{D}$$

$$\rightarrow a = 2; 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^a + Bx + C}{Dx^2 + Ex + F}$$

$$\checkmark \infty$$

$$\rightarrow a = 3; 4$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^2 + Bx + C}{Dx^a + Ex + F}$$

$$\checkmark 0$$

$$\rightarrow a = 3; 4$$



172. Найти предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+b)x + ab}{x^2 - (a+c)x + ac}$$

$$\checkmark \frac{a-b}{a-c}$$

$$\rightarrow b = a+2; \ a-3; \ a-1; \ a+4; \ a-4$$

$$\rightarrow c = a+3; \ a-2; \ a+1; \ a+5; \ a-5$$

$$\rightarrow a = 2; \ 3; \ -3; \ -2; \ -1; \ 1; \ 4; \ 5; \ -4; \ -5$$

173. Найти предел.

$$\Rightarrow a = 2; 3; -3; -2; -1; 1; 4; 5; -4; -5$$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{cx^2 + (d - ac)x - ad}{ex^2 + (f - ae)x - af}$$

$$\checkmark \frac{ac + d}{ae + f}$$

$$\rightarrow c = -2; 2; -4; 4; -8; 8$$

$$\rightarrow e = -5; 5; -7; 7$$

$$\rightarrow d = -1; 1; -3; 3$$

$$\rightarrow f = -1; 1; -3; 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{cx^2 + (d - ac)x - ad}{x^3 - a^3}$$

$$\checkmark \frac{ac + d}{3a^2}$$

$$\rightarrow c = -2; 2; -1; 1; -3; 3; -4; 4; -6; 6; -8; 8$$

$$\rightarrow d = -1; 1; -5; 5; -7; 7$$

174. Найти предел.

$$\Rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 5; -5$$

$$\Rightarrow c = 2; -2; 4; -4; 5; -5; 6; -6$$

$$\Rightarrow d = 1; -1; 3; -3; 7; -7$$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{cx^2 + (d - ac)x - ad}$$

$$\checkmark \frac{3a^2}{ac + d}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{cx^2 + (d - ac)x - ad}{x^3 - a^3}$$

$$\checkmark \frac{ac + d}{3a^2}$$

175. Найти предел

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{3a^2}{x^3 - a^3} \right)$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow a = -6; -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{2a}{x^2 - a^2} \right)$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{2a}$$

$$\rightarrow a = -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \\ 7; 8; 9; 10$$

176. Найти предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{bx + d - ab} - \sqrt{cx + d - ac}}{ex^2 - (f + ae)x + af}$$

$$\checkmark \quad \frac{b - c}{2(ea - f)\sqrt{d}}$$

$$\times \quad \frac{b - c}{(ea - f)\sqrt{d}}$$

$$\times \quad 0$$

$$\times \quad \infty$$

$$\rightarrow f = ae - 1; \quad ae + 1$$

$$\rightarrow a = -2; \quad 1; \quad 3$$

$$\rightarrow b = c - 4; \quad c - 2; \quad c + 1; \quad c + 2$$

$$\rightarrow c = 0; \quad 1$$

$$\rightarrow d = 2; \quad 3; \quad 4; \quad 8; \quad 9; \quad 16; \quad 5$$

$$\rightarrow e = 1; \quad 2$$

177. Найти предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{ax + b + c}{ax + b} \right)^{kx+l}$$

$$\checkmark e^{\frac{ck}{a}}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3$$

$$\rightarrow b = 3; 4; 5; -1; -2; -3$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 5; -1; -2$$

$$\rightarrow k = 1; 3; 4; -2; -3$$

$$\rightarrow l = 4; 5; -1; -2$$

178. Найти предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax)^{\frac{b}{f}}$$

$$\checkmark e^{-\frac{ba^2}{2c^2}}$$

$$\rightarrow f = \sin^2 cx; \operatorname{tg}^2 cx; \arcsin^2 cx; \operatorname{arctg}^2 cx$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{m}{x} \right)^{ax^2}$$

$$\checkmark e^{-\frac{m^2 a}{2}}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}$$

179. Найти предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{\operatorname{tg} cx}$$

$$\checkmark \frac{a - b}{c}$$

$$\rightarrow a = b + 1; b + 2; b + 3; b + 4; b + 5; b - 1; b - 2; b + 6; b + 7$$

$$\rightarrow b = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos^3 ax}{x^2}$$

$$\checkmark a^2$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13$$



180. Найти предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi n}{x^a}}{\operatorname{ctg}^a bx}$$

$$\checkmark \quad \pi n b^a$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos ax^k) \operatorname{ctg} bx^{2k}$$

$$\checkmark \quad \frac{a^2}{2b}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{cx \sin dx}$$

$$\checkmark \quad \frac{b^2 - a^2}{2cd}$$

$$\rightarrow a = b + 1; b + 2; b + 3; b + 4; b + 5; b - 1; b - 2; b + 6; b + 7$$

$$\rightarrow b = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow d = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax - \sin ax}{x^3}$$

$$\checkmark \quad \frac{a^3}{2}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10$$

181. Найти предел.

$$\Rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; -1; -2; -3; -4$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F}{\cos ax - \cos^3 ax}$$

$$\checkmark \frac{b}{a^2}$$

$$\rightarrow F = \ln(1 + bx^2); e^{bx^2} - 1; \sqrt{1 + 2bx^2} - 1; \sqrt[3]{1 + 3bx^2} - 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{F}$$

$$\checkmark \frac{a^2}{2b}$$

$$\rightarrow F = \ln(1 + bx^2); e^{bx^2} - 1; \sqrt{1 + 2bx^2} - 1; \sqrt[3]{1 + 3bx^2} - 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F}{1 - \cos ax}$$

$$\checkmark \frac{2b}{a^2}$$

$$\rightarrow F = \log_c(1 + bx^2) \ln c; \frac{1}{\ln c}(c^{bx^2} - 1)$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos^3 ax}{F}$$

$$\checkmark \frac{a^2}{b}$$

$$\rightarrow F = \log_c(1 + bx^2) \ln c; \frac{1}{\ln c}(c^{bx^2} - 1)$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

182. Найти предел.

$$\Rightarrow a = 2; 3; -3; -2; -1; 1; 4; 5; -4; -5$$

$$\Rightarrow c = -2; 2; -4; 4; -8; 8$$

$$\Rightarrow d = -1; 1; -3; 3$$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{cx^2 + (d - ac)x - ad}$$

$$\checkmark \frac{e^a}{ac + d}$$

183. Найти предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( a^{\frac{b}{x^k}} - 1 \right) x^k$$

$$\checkmark \quad b \ln a$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow k = 1; 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{k \sqrt[n]{x}} - 1}{\sqrt[n]{\sin bx}}$$

$$\checkmark \quad \frac{k \ln a}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 1; 2$$

$$\rightarrow k = 1; 2$$

$$\rightarrow n = 2; 3; 4$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - a^{bx^n}) \operatorname{ctg} cx^n$$

$$\checkmark \quad -\frac{b \ln a}{c}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow n = 1; 2; 3; 4$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{a}{b}} \arcsin^k \frac{bx - a}{a} \operatorname{ctg}^k (bx - a)$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{a^k}$$

$$\rightarrow a = 2; 4; 5; 8$$

$$\rightarrow b = 1; 3; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos ax)^b}{\operatorname{tg}^{2b-2} cx - \sin^{2b-2} cx}$$

$$\checkmark \quad \frac{a^{2b}}{2^b c^{2b} (b-1)}$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow a, \quad c =$$

$$\bullet 1, \quad 2;$$

$$\bullet 2, \quad 1;$$

$$\bullet 2, \quad 4;$$

$$\bullet 3, \quad 1;$$

$$\bullet 3, \quad 2;$$

$$\bullet 3, \quad 6;$$

$$\bullet 4, \quad 1;$$

$$\bullet 4, \quad 2;$$

$$\bullet 4, \quad 8;$$

$$\bullet 6, \quad 2;$$

$$\bullet 6, \quad 3;$$

$$\bullet 6, \quad 4;$$

$$\bullet 8, \quad 2;$$

$$\bullet 8, \quad 4;$$

$$\bullet 9, \quad 3;$$

$$\bullet 9, \quad 6$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + ax \sin bx} - \sqrt{\cos 2bx}}{\operatorname{tg}^2 cx}$$

$$\checkmark \quad \frac{b(a + 2b)}{2c^2}$$

$$\rightarrow a = 8; \quad 5; \quad 7$$

$$\rightarrow b = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}; \quad 3; \quad 4; \quad 5$$

$$\rightarrow c = \frac{1}{5}; \quad \frac{2}{5}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$$

$$\checkmark \quad a^a(\ln a - 1)$$

$$\rightarrow a = 2; \quad 3; \quad 4$$

184. Исследовать на непрерывность и нарисовать эскиз графика функции

1)  $f(x) = \frac{a}{x-b}$

✓  $x = b$  — точка разрыва 2 рода

→  $a = -7; -5; 2; 5; 7$

→  $b = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

2)  $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2}$

✓  $x = b$  — точка разрыва 2 рода

→  $a = -7; -5; 2; 5; 7$

→  $b = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

3)  $f(x) = \frac{a}{x^2 - b^2}$

✓  $x = \pm b$  — точки разрыва 2 рода

→  $a = 2; 3; 4; 5$

→  $b = 1; 2; 3; 4$

4)  $f(x) = a^{\frac{1}{x-b}}$

✓  $x = b$  — точка разрыва 2 рода

→  $a = 2; 3; 4; 5$

→  $b = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

5)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \neq a, \\ 2a, & x = a. \end{cases}$

✓ Функция непрерывна на  $\mathbb{R}$

→  $a = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

6)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - a^3}{x - a}, & x \neq a, \\ 3a^2, & x = a. \end{cases}$

✓ Функция непрерывна на  $\mathbb{R}$

→  $a = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

7)  $f(x) = \begin{cases} x^a, & x \leq 1, \\ 2 - x, & x > 1. \end{cases}$

✓ Функция непрерывна на  $\mathbb{R}$

→  $a = 2; 3; 4; 5$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$$

✓  $x = 0$  — точка разрыва 1 рода

→  $a = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $b = -3; -2; -1; 2; 3$

$$9) \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ |a - x|, & |x| > 1. \end{cases}$$

✓  $x = \pm 1$  — точки разрыва 1 рода

→  $a = 2; 3; 4; 5$

$$10) \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, & x \leq 1, \\ a(x - 1), & x > 1. \end{cases}$$

✓  $x = 1$  — точка разрыва 1 рода

→  $a = 1; 2; 3; 4$

**185.** Построить график функции, провести классификацию точек разрыва, указать, есть ли хотя бы односторонняя непрерывность функции в точках разрыва.

$$1) f(x) = \begin{cases} F, & x < -1, \\ G, & -1 \leq x \leq 0, \\ E, & x > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow F = ax + b; \quad ax^2 + b; \quad \sqrt[3]{x}; \quad c^x$$

$$\rightarrow G = \arcsin x; \quad \arccos x; \quad \operatorname{arctg} x; \quad \operatorname{arccotg} x$$

$$\rightarrow E = \frac{k}{x}; \quad \frac{k}{x^2}; \quad \log_c x$$

$$\rightarrow a = 0; \quad 1; \quad 2; \quad -1; \quad -2$$

$$\rightarrow b = 1; \quad 2; \quad 3; \quad -1; \quad -2; \quad -3$$

$$\rightarrow k = 1; \quad 2; \quad 3; \quad -1; \quad -2; \quad -3$$

$$\rightarrow c = 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5; \quad e; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{5}$$

✓  $x = -1$  точка разрыва первого рода,  $x = 0$  точка разрыва второго рода

$$2) f(x) = \begin{cases} F, & |x| < \pi, \\ G, & |x| \geq \pi \end{cases}$$

$$\rightarrow F = \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg} x; \quad \frac{k}{x}; \quad \frac{k}{x^2}$$

$$\rightarrow G = \sin x; \quad \cos x; \quad kx + b; \quad x^2 + b; \quad (x - \pi)^2 + b; \quad (x + \pi)^2 + b$$

$$\rightarrow k = 1; \quad 2; \quad 3; \quad -1; \quad -2; \quad -3$$

$$\rightarrow b = 0; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad -1; \quad -2; \quad -3; \quad -4$$



## Часть X

# Теория дифференцирования

186. Вычислить производную функции.

1)  $Ax^a + \frac{B}{x^b} + C\sqrt[c]{x^d} + \frac{D}{\sqrt[e]{x^f}}$

→  $a = 2; 3; 4; 5$

→  $b = 2; 3; 4$

→  $c = d+1; d+2; d+3$

→  $d = 2; 3; 4$

→  $e = f+1; f+2; f+3$

→  $f = 2; 3; 4$

→  $A = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $B = C; C-1; C+1$

→  $C = -3; -2; 2; 3; 4$

→  $D = -3; -2; 2; 3; 4$

187. Вычислить производную функции.

1)  $(bx + c)^a \cdot g$

→  $g = \sin x; \cos x; \arcsin x; \arccos x; \operatorname{tg} x; \ln x$

→  $b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $c = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $a = 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

188. Вычислить производную функции.

1)  $(bx + c)^a \cdot g$

→  $g = \sin X; \cos X; \arcsin X; \arccos X; \operatorname{tg} X; \ln X$

→  $X = mx^k + n$

→  $b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $c = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $a = 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

→  $m = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $n = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $k = 2; 3; 4; 5$

189. Вычислить производную функции.

1)  $\frac{f}{g}$

→  $f = \sin X; \cos X; \arcsin X; \arccos X; \operatorname{tg} X; \ln X$

→  $g = \sin x; \cos x; \arcsin x; \arccos x; \operatorname{tg} x; \ln x$

→  $X = ax + b$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $b = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

190. Вычислить производную функции.

1)  $f^g$

→  $f = \sin X; \cos X; \arcsin X; \arccos X; \operatorname{tg} X; \ln X$

→  $g = \sin x; \cos x; \arcsin x; \arccos x; \operatorname{tg} x; \ln x$

→  $X = ax + b$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $b = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

191. Вычислить производную функции.

1)  $f^a \cdot g$

→  $f = \sin x; \cos x; \arcsin x; \arccos x; \operatorname{tg} x; \ln x$

→  $g = \sin y; \cos y; \arcsin y; \arccos y; \operatorname{tg} y; \ln y$

→  $y = cx + d$

→  $a = 3; 4; 5; 6; 7$

→  $c = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $d = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

192. Вычислить производную функции.

1)  $\frac{f}{g}$

→  $f = \sin X; \cos X; \arcsin X; \arccos X; \operatorname{tg} X; \ln X$

→  $g = \sin y; \cos y; \arcsin y; \arccos y; \operatorname{tg} y; \ln y$

→  $X = ax + b$

→  $y = cx^d$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $b = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $c = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $d = 2; 3; 4; 5; 6; 7$



**193.** Вычислить производную функции.

$$1) \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} f$$

$$\rightarrow f = \log_m(ex + f); \sin X; \cos X; \arcsin X; \arccos X; \operatorname{tg} X; \ln X$$

$$\rightarrow X = mx^2 + ex + f$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow c = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow d = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow e = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow f = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow n = 3; 4; 5$$

194. Вычислить приближённо

$$\Rightarrow k = 1; 2; 3; 4; -1; -2; -3$$

$$1) \operatorname{arctg} \left( a + \frac{k}{100} \right)$$

$$\checkmark A_1 \frac{k}{100} + A_0$$

$$\rightarrow a, \quad A_0, \quad A_1 =$$

$$\bullet 0, \quad 0, \quad 1;$$

$$\bullet 1, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{1}{2}$$

$$2) \operatorname{arctg} \sqrt{3 + \frac{k}{10}}$$

$$\checkmark \frac{1}{8\sqrt{3}} \frac{k}{10} + \frac{\pi}{3}$$

$$3) \arcsin \left( \frac{k}{100} \right)$$

$$\checkmark \frac{k}{100}$$

$$4) \lg \left( 10 + \frac{k}{10} \right)$$

$$\checkmark \frac{1}{10 \ln 10} \frac{k}{100} + 1$$

$$5) \sqrt[p]{a^p + \frac{k}{10}}$$

$$\checkmark \frac{1}{pa^{p-1}} \frac{k}{10} + a$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow p = 2; 3; 4$$

$$6) \left( a + \frac{k}{100} \right)^b$$

$$\checkmark ba^{b-1} \frac{k}{100} + a^b$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 3; 4; 5$$

$$7) \sin(30 + k)^\circ$$

$$\checkmark \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} k + \frac{1}{2}$$

$$8) \operatorname{tg}(45 + k)^\circ$$

$$\checkmark \quad 2\frac{\pi}{180}k + 1$$

**195.** Найти угловой коэффициент касательной к графику функции  $y$  в точке  $x = x_0$ .

$$\Rightarrow X = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 5; 6$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$1) y = \frac{x^2 - 2ax + 2b}{ax - b}, x_0 = X$$

$$\checkmark \frac{aX^2 - 2bX}{(aX - b)^2}$$

$$2) y = \frac{\sqrt{ax^2 + b^2}}{b^2x}, x_0 = X$$

$$\checkmark -\frac{1}{X^2\sqrt{aX^2 + b^2}}$$

$$3) y = \frac{x}{\sqrt{ax^2 + b^2}}, x_0 = X$$

$$\checkmark \frac{b^2}{\sqrt{(aX^2 + b^2)^3}}$$

196. Решить задачу на тему «Касательная».

- 1) К графику функции  $y = b - \sin ax$  в точке  $x_0 = 0$  проведена касательная. Найти площадь треугольника, который отсекает эта касательная от координатного угла.

$$\checkmark \quad \frac{b^2}{2a}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow b = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

- 2) Найти тангенс угла между касательными, проведёнными к графикам функций  $f_1(x) = ax^3 + bx + d + a + b - k$  и  $f_2(x) = dx^2 + kx$  в точке их пересечения  $x_0 = -1$ .

$$\checkmark \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k - 2d - (3a + b)}{1 + (k - 2d)(3a + b)}$$

$$\rightarrow a = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow b = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow d = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow k = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

- 3) Найти точку графика функции  $y_1 = ax^2 + bx + c$ , в которой касательная параллельна (перпендикулярна) прямой  $y_2 = kx + d$ .

$$\checkmark \quad M_1 \left( \frac{k-b}{2a}; \frac{(k-b)^2}{4a} + \frac{b}{2a}(k-b) + c \right), \quad M_2 \left( -\frac{1+bk}{2ak}; \frac{(1+bk)^2}{4k^2a} - \frac{b}{2ka}(1+bk) + c \right)$$

$$\rightarrow a = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow b = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow c = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow d = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow k = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

- 4) К графику функции  $y = kx(ax^2 + bx + c)$  проведена касательная в точке с абсциссой  $x_0 = f$ . Найти ординату точки пересечения этой касательной с прямой  $x = d$ .

$$\checkmark \quad y = (akf^3 + bkf^2 + kcf) + (3akf^2 + 2bkf + ck)(d - f)$$

$$\rightarrow a = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow b = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow c = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow d = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow k = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow f = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

- 5) Найти на графике функции  $y = \frac{x-a}{x-b}$  все точки, касательные в которых параллельны прямой  $y = (a-b)x + c$ .

$$\checkmark \quad M_1(1+b; 1+b-a), \quad M_2(b-1; a+1-b)$$

$$\rightarrow a = 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5$$

- 6) Найти на графике функции  $y = \frac{x-a}{x-b}$  все точки, касательные в которых перпендикулярны прямой  $(a-b)y + x - c = 0$ .

$$\checkmark M_1(1+b; 1+b-a), M_2(b-1; a+1-b)$$

$$\rightarrow a = 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5$$

- 7) Найти абсциссу точки графика функции  $y = \frac{1}{b \ln a} a^{bx+c} + f$ , если касательная, проведенная к графику данной функции в этой точке, образует с осью  $OX$  угол  $45^\circ$ .

$$\checkmark x = -\frac{c}{b}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; e$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10$$

$$\rightarrow f = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8$$

- 8) Найти абсциссу точки графика функции  $y = \frac{1}{ax+b}$ , если касательная, проведенная к графику данной функции в этой точке, проходит через начало координат.

$$\checkmark x = -\frac{b}{2a}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -10$$

- 9) Найти на графике функции  $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 - \frac{1}{3}a^3$  точку, касательная в которой параллельна прямой  $y = -a^2x + b$ .

$$\checkmark M(a; -a^3)$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

- 10) Найти на графике функции  $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 - \frac{1}{3}a^3$  точку, касательная в которой перпендикулярна прямой  $b + x - a^2y = 0$ .

$$\checkmark M(a; -a^3)$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

11) К графику функции  $y = \frac{a^3}{x^2} + bx + c$  проведена касательная, составляющая с осью  $OX$  угол, равный  $\arctg(b + 2)$ . Найти абсциссу точки пересечения этой касательной с осью  $OX$ .

✓  $x = -3a - c$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

→  $c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -10$

197. Вычислить  $y'(x_0)$ , если

$$1) \quad y = \ln \sqrt{(x-b)^a} + \frac{a}{k}(x-b)^k, \\ x_0 = b+1.$$

$$\checkmark \quad \frac{3a}{2}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a = 3; 5; 7; 9$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$2) \quad y = \sqrt[k]{b - (b-1)x^k} + a^x \frac{c}{\ln a}, \\ x_0 = 1.$$

$$\checkmark \quad 1 - b + ca$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 3; 4; 5; 6; 7$$

$$3) \quad y = \ln \sin ax + \frac{bx^2}{\pi} - \frac{b}{a} \\ x_0 = \frac{\pi}{2a}$$

$$\checkmark \quad \frac{b}{a}$$

$$\rightarrow a = 3; 5; 7; 9$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; -2; -3; -4; -5; -6$$



198. Вычислить  $y''(0)$ .

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\Rightarrow b = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) y = e^{ax^2+bx}$$

$$\checkmark b^2 + 2a$$

$$2) y = \cos(ax^2 + bx)$$

$$\checkmark -b^2$$

$$3) y = \sin(ax^2 + bx)$$

$$\checkmark 2a$$

$$4) y = (ax^2 + bx + c)^n$$

$$\checkmark n(n-1)c^{n-2}b + 2anc^{n-1}$$

$$\rightarrow n = 2; 3$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3$$

199. Вычислить  $y'''(0)$ .

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\Rightarrow b = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

1)  $y = e^{ax^2+bx}$

$$\checkmark 6ab + b^3$$

2)  $y = \cos(ax^2 + bx)$

$$\checkmark -6ab$$

3)  $y = \sin(ax^2 + bx)$

$$\checkmark -b^3$$

200. Найти предел, используя правило Лопиталя.

$$\Rightarrow a = b + 1; \quad b + 2; \quad b + 3$$

$$\Rightarrow b = 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5; \quad 6; \quad 7$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$$

$$\checkmark \quad \frac{a^2}{b^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}$$

$$\checkmark \quad \log_b a$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$$

$$\checkmark \quad a - b$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{1 - b^x}$$

$$\checkmark \quad \frac{a}{-\ln b}$$

201. Найти предел, используя правило Лопиталья.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2k}} (\operatorname{tg} kx)^{2kx-\pi}$$

$$\checkmark 1$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} K^N$$

$$\checkmark e^0 = 1$$

$$\rightarrow N = \operatorname{tg} bx; \sin bx; \arcsin bx; \operatorname{arctg} bx$$

$$\rightarrow K = \operatorname{tg} ax; \sin ax; \arcsin ax; \operatorname{arctg} ax$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}} (ax - b)^{ax-b}$$

$$\checkmark \frac{1}{e} (1)$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 6$$

$$\rightarrow b = 1; 5; 7$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2k}} \frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg}(1 + 4(n-1))kx}$$

$$\checkmark \frac{1}{1 + 4(n-1)}$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow n = 2; 3; 4$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin mx}{\ln \sin nx}$$

$$\checkmark 1$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow n = 1; 2; 3; 4$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

$$\checkmark \frac{m}{n} a^{m-n}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow m = 3; 5; 7$$

$$\rightarrow n = 4; 6; 8$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x^k}{x^n - 1}$$

$$\checkmark \quad \frac{\ln a - k}{n}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow n = 1; 2; 3$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x - 1)$$

$$\checkmark \quad 0$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$$

$$\checkmark \quad \frac{a}{\sqrt{b}}$$

$$\rightarrow a = b + 1; b + 2; b + 3$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(kx + b)}{\sqrt[n]{cx + d}}$$

$$\checkmark \quad 0$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow n = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow d = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{kx} - b^{dx}}{\sin cx}$$

$$\checkmark \quad \frac{k \ln a - d \ln b}{c}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow d = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{kx} - b^{nx}}{x\sqrt{1 - dx^2}}$$

$$\checkmark \quad k \ln a - n \ln b$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

- $b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $k = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $n = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $d = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{kx} - \cos^n dx}{c^{bx} - \cos^m fx}$

✓  $\frac{k \ln a}{b \ln c}$

- $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $c = 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $m = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $d = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $f = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $k = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $b = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

14)  $\lim_{x \rightarrow a} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^k$

✓ 1

- $k = \operatorname{tg} b\pi(x-a); \sin b\pi(x-a); \operatorname{arctg} b\pi(a-x); \operatorname{arcsin} b\pi(a-x)$
- $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

15)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x} + \lambda \sin \frac{m}{x}\right)^{kx}$

✓  $e^{k\lambda m}$

- $m = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $\lambda = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $k = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

16)  $\lim_{x \rightarrow \frac{ak}{2}} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{ka}}$

✓ 1

- $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
- $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

17)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{\sqrt[k]{x}}\right)^{nx^a}$

✓  $e^{-\frac{m^2}{ka}}$

$$\rightarrow a = 2 + \frac{2}{k}$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax^{3m}}{x^{2m} - \frac{1}{b} \sin bx^{2m}}$$

$$\checkmark \frac{a^2 m}{b^2}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos kx)^{\frac{a}{x^2}}$$

$$\checkmark e^{-\frac{k^2 a}{2}}$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow a = -3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

202.

1) Найти длину интервала убывания функции  $y = \frac{(x-a)^b}{x^b}$ .

✓  $|a|$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = 2; 4; 6; 8$

2) Найти длину промежутка возрастания функции  $y = \frac{x-a}{x^2+b}$ .

✓  $2\sqrt{a^2+b}$

→  $b = a^2 - 1; a^2 - 2; a^2 - 3; a^2 - 4; a^2 - 5; a^2 - 6; a^2 - 7; a^2 - 8$

→  $a = 3; 4; 5; 6; 7$



**203.** Найти сумму значений функции в точках экстремума

$$\Rightarrow n = 1; 2$$

$$1) y = (x^2 - a^2)^{2n+1}$$

$$\checkmark y(0) = (-a^2)^{2n+1}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$2) y = (x - a)^{2n+1}(x - b)^{2n+1}$$

$$\checkmark y\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\left(\frac{a+b}{2}\right)^{4n+2}$$

$$\rightarrow a = 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow b = 1; 3; 5; -1; -3; -5$$

204. Найти сумму значений функции  $y$  в точках экстремума.

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\Rightarrow c = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \quad y = x + \frac{b^2}{x + c}$$

$$\checkmark \quad -2c$$

$$2) \quad y = kax^5 - kbx^3 + c$$

$$\checkmark \quad 2c$$

$$\rightarrow k = -1; 1$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

**205.** Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$$\Rightarrow F = ax^2 + bx + 2a$$

$$\Rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \quad y = \ln F$$

$$\checkmark \quad y' = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + 2a}, \quad x_{\min} = -\frac{b}{2a}$$

$$2) \quad y = \frac{1}{F}$$

$$\checkmark \quad y' = -\frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + 2a)^2}, \quad x_{\max} = -\frac{b}{2a}$$

$$3) \quad y = \frac{ax + b}{F}$$

$$\checkmark \quad y' = \frac{2a^2 - (ax + b)^2}{(ax^2 + bx + 2a)^2}, \quad x_{\min} = \frac{-b - \sqrt{2a}}{a}, \quad x_{\max} = \frac{\sqrt{2a} - b}{a},$$

$$4) \quad y = \sqrt{F}$$

$$\checkmark \quad y' = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 2a}}, \quad x_{\min} = -\frac{b}{2a}$$

**206.** Найти интервалы монотонности, точки экстремума, интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции

$$\Rightarrow F = a^2 + x^2$$

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$$

1)  $y = \ln F$

$$y' = \frac{2x}{a^2 + x^2}, \quad x_{\min} = 0;$$

✓  $y'' = \frac{2(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}, \quad x = \pm a$  точки перегиба

2)  $y = x - \ln F$

$$y' = \frac{x^2 - 2x + a^2}{a^2 + x^2}, \quad y' > 0 \quad \forall x;$$

✓  $y'' = \frac{2(x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2)^2}, \quad x = \pm a$  точки перегиба

3)  $y = \frac{1}{F}$

$$y' = \frac{-2x}{(a^2 + x^2)^2}, \quad x_{\max} = 0;$$

✓  $y'' = \frac{2(3x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2)^3}, \quad x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$  точки перегиба

4)  $y = \frac{x}{F}$

$$y' = \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2}, \quad x_{\min} = -a, \quad x_{\max} = a;$$

✓  $y'' = \frac{2x(x^2 - 3a^2)}{(a^2 + x^2)^3}, \quad x = 0, \quad x = \pm a\sqrt{3}$  точки перегиба

5)  $y = \sqrt{F}$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad x_{\min} = 0;$$

✓  $y'' = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}, \quad y'' > 0 \quad \forall x$

207. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}$$

$$1) \ y = x^a \ln bx, \quad \left[ \frac{1}{3b}; \frac{1}{b} \right]$$

$$\checkmark \ y_{\min} = -\frac{1}{b^a a e}; \ y_{\max} = 0$$

$$2) \ y = \frac{\ln bx}{x^a}, \quad \left[ \frac{1}{b}; \frac{3}{b} \right]$$

$$\checkmark \ y_{\min} = 0; \ y_{\max} = \frac{b^a}{a e}$$

**208.** Издержки производства некоторого товара равны  $C$ , спрос на товар определяется функцией  $P_{\text{спр}}$ . Найти максимальное значение прибыли.

$$P_{\text{спр}} = -Q^2 + aQ + b,$$

$$1) \quad C = cQ + d,$$

$$Q_1 \leq Q \leq Q_2$$

$$\checkmark \quad 4A^3 + 3A^2 + A$$

$$\rightarrow a = 3A + 2$$

$$\rightarrow c = 2A + 1 + b$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow d = A^2$$

$$\rightarrow Q_2 = 2A + 1 + B$$

$$\rightarrow q = 2A + 1$$

$$\rightarrow Q_1 = 2A$$

$$\rightarrow A = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow B = 1; 2; 3$$

209.

- 1) Завод  $A$  отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город  $B$  на  $a$  км (считается по кратчайшему расстоянию). Под каким углом  $\varphi$  к железной дороге следует построить подъездной путь, чтобы транспортировка грузов из  $A$  в  $B$  была наиболее экономичной, если стоимость провоза 1 т груза на расстояние 1 км составляет по подъездному пути  $p$  ден. ед., по железной дороге  $q$  ден. ед. и город  $B$  расположен на  $b$  км севернее завода  $A$ ?

$$\checkmark \quad Q(\varphi) = \frac{ap}{\cos \varphi} + (b - \operatorname{arctg} \varphi)q, \quad \cos \varphi = \frac{q}{p}$$

$$\rightarrow q = k; \quad \sqrt{3}k; \quad \sqrt{2}k$$

$$\rightarrow p = 2k$$

$$\rightarrow k = 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5$$

$$\rightarrow a = 5; \quad 6; \quad 7; \quad 8$$

$$\rightarrow b = 15; \quad 16; \quad 17; \quad 18$$

210.

- 1) Известна зависимость суточных расходов  $C = 2kv_0^3 + kv^3$  при плавании судна от скорости судна  $v$ , выраженной в километрах в час. При какой скорости плавание судна будет наиболее экономичным, если максимальная развиваемая им скорость составляет 70 км/ч.

✓  $v_0$

→  $v_0 = 20; 24; 27; 29; 33; 36; 38; 41; 43; 47; 49$

→  $k = 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19$

- 2) Турист идёт из пункта  $A$  на дороге, проходящей с севера на юг, в пункт  $B$ , расположенный на  $kv_2 + d$  км южнее  $A$  и отстоящий от дороги, считая по кратчайшему расстоянию, на  $ku$  км. На каком расстоянии от пункта  $A$  туристу следует свернуть с дороги, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт  $B$ , если скорость по дороге равна  $v_1$  км/ч, а по бездорожью —  $v_2$  км/ч.

✓  $d$

→  $v_2 = \sqrt{v_1^2 - u^2}$

→  $v_1 = 5$

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $u = 3; 4$

→  $d = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$



211. Провести полное исследование функции и построить её график

$$1) \ y = \frac{(x-a)^2}{x-b}$$

$$\checkmark \ x = b, \ y = x + b - 2a, \ x_{\max} = a, \ f_{\max} = 0, \ x_{\min} = 2b - a, \ f_{\min} = 4(b - a)$$

$$\rightarrow a = b - 1; \ b - 2; \ b - 3; \ b - 4; \ b - 5; \ b - 6; \ b - 7; \ b - 8$$

$$\rightarrow b = -3; \ -2; \ -1; \ 1; \ 2; \ 3; \ 4; \ 5; \ 6; \ 7; \ 8; \ 9; \ 10; \ 11; \ 12$$

$$2) \ y = a^2x + \frac{b^2}{x+c}$$

$$\checkmark \ x = -c, \ y = a^2x, \ x_{\max} = \frac{-b-ac}{a}, \ f_{\max} = -2ab - a^2c, \ x_{\min} = \frac{b-ac}{a}, \ f_{\min} = 2ab - a^2c, \ x_p = -c$$

$$\rightarrow a = 2; \ 3; \ 4$$

$$\rightarrow b = 5; \ 7; \ 9; \ 10$$

$$\rightarrow c = 1; \ 2; \ -1; \ -2$$

$$3) \ y = \frac{2x^3 + a^3}{x^2}$$

$$\checkmark \ x = 0, \ y = 2x, \ x_{\min} = a, \ f_{\min} = 3a, \ f \uparrow, \ x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty), \ f''(x) > 0$$

$$\rightarrow a = 1; \ 2; \ 3; \ 4; \ 5$$

## Часть XI

### Неопределённый интеграл

212. Вычислить интеграл.

$$1) \int \frac{A \sqrt[a+b]{x^b} + Bx^{a+b+1} + Cx^a}{x^{a+1}} dx$$

$$\checkmark \frac{A(a+b)}{b-a^2-ab} \frac{1}{\sqrt[a+b]{x^{a^2+ab-b}}} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + C \ln|x|$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow A = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow B = C; C-1; C+1$$

$$\rightarrow C = -3; -2; 2; 3$$

**213.** Вычислить интеграл.

$$\Rightarrow a = b - 1; \quad b + 1; \quad b + 2; \quad b + 3; \quad b + 4$$

$$\Rightarrow b = 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5$$

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{b - ax^2}}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{ax}{\sqrt{ab}}$$

$$2) \int \frac{dx}{b + ax^2}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{ax}{\sqrt{ab}}$$

$$3) \int \frac{dx}{ax^2 - b}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax} + \sqrt{b}} \right|$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( \sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + b} \right)$$

**214.** Найти неопределённый интеграл

$$\Rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\Rightarrow b = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$1) \int (ax + b)^n dx$$

$$\checkmark \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1}$$

$$\rightarrow n = 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$$

$$2) \int \frac{dx}{ax + b}$$

$$\checkmark \frac{1}{a} \ln |ax + b|$$

$$3) \int \cos(ax + b) dx$$

$$\checkmark \frac{1}{a} \sin(ax + b)$$

$$4) \int \sin(ax + b) dx$$

$$\checkmark -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$$

$$5) \int e^{ax+b} dx$$

$$\checkmark \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

215. Найти неопределённый интеграл

$$\Rightarrow G, \quad g, \quad c =$$

$$\bullet \quad ax^2 + b, \quad x, \quad 2a;$$

$$\bullet \quad ax^3 + b, \quad x^2, \quad 3a;$$

$$\bullet \quad \sin ax + b, \quad \cos ax, \quad a;$$

$$\bullet \quad \cos ax + b, \quad \sin ax, \quad -a$$

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\Rightarrow b = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$1) \int e^G g dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} e^G$$

$$2) \int \frac{g}{e^G} dx$$

$$\checkmark \quad -\frac{1}{c} e^{-G}$$

$$3) \int G^n g dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} \frac{G^{n+1}}{n+1}$$

$$\rightarrow n = 5; 6; 7; 8; 9$$

$$4) \int \frac{g}{G^n} dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} \frac{G^{-n+1}}{-n+1}$$

$$\rightarrow n = 5; 6; 7; 8; 9$$

$$5) \int \sqrt[n]{G} g dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} \frac{\sqrt[n]{G^{n+1}}}{\frac{1}{n} + 1}$$

$$\rightarrow n = 2; 3; 4; 5$$

$$6) \int \frac{g}{G} dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} \ln |G|$$

216. Найти неопределённый интеграл

$$\Rightarrow G, \quad g, \quad c =$$

- $\arcsin ax, \quad \sqrt{1 - a^2 x^2}, \quad a;$
- $\arccos ax, \quad \sqrt{1 - a^2 x^2}, \quad -a;$
- $\operatorname{arctg} ax, \quad 1 + a^2 x^2, \quad a;$
- $\operatorname{arcctg} ax, \quad 1 + a^2 x^2, \quad -a$

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$1) \int \frac{e^G}{g} dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} e^G$$

$$2) \int \frac{dx}{e^G g}$$

$$\checkmark \quad -\frac{1}{c} e^{-G}$$

$$3) \int \frac{G^n}{g} dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} \frac{G^{n+1}}{n+1}$$

$$\rightarrow n = 5; 6; 7; 8; 9$$

$$4) \int \frac{dx}{G^n g}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} \frac{G^{-n+1}}{-n+1}$$

$$\rightarrow n = 5; 6; 7; 8; 9$$

$$5) \int \frac{\sqrt[n]{G}}{g} dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} \frac{\sqrt[n]{G^{n+1}}}{\frac{1}{n} + 1}$$

$$\rightarrow n = 2; 3; 4; 5$$

$$6) \int \frac{dx}{Gg}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{c} \ln |G|$$

217. Вычислить интеграл.

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \int (x + a)e^{bx} dx$$

$$\checkmark \left( \frac{x+a}{b} - \frac{1}{b^2} \right) e^{bx}$$

$$\rightarrow a = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$2) \int (x + a) \sin bx dx$$

$$\checkmark -\frac{x+a}{b} \cos bx + \frac{1}{b^2} \sin bx$$

$$\rightarrow a = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$3) \int (x + a) \cos bx dx$$

$$\checkmark \frac{x+a}{b} \sin bx + \frac{1}{b^2} \cos bx$$

$$\rightarrow a = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$4) \int (x + a) \ln bx dx$$

$$\checkmark \left( \frac{1}{2}x^2 + ax \right) \ln bx - \frac{1}{4}x^2 - ax$$

$$\rightarrow a = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$$

$$5) \int \operatorname{arctg} bx dx$$

$$\checkmark x \operatorname{arctg} bx - \frac{1}{2b} \ln |1 + b^2 x^2|$$

$$6) \int \operatorname{arccotg} bx dx$$

$$\checkmark x \operatorname{arccotg} bx + \frac{1}{2b} \ln |1 + b^2 x^2|$$

$$7) \int \arcsin bx dx$$

$$\checkmark x \arcsin bx + \frac{\sqrt{1 - b^2 x^2}}{b}$$

$$8) \int \arccos bx dx$$

$$\checkmark x \arccos bx - \frac{\sqrt{1 - b^2 x^2}}{b}$$



218. Вычислить интеграл.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \int (ax + b) \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$\checkmark \frac{(ax + b)^2}{2a} \operatorname{arctg} x - \frac{a}{2}x - \frac{b}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{a^2 - b^2}{2a} \operatorname{arctg} x$$

$$\rightarrow b = -7; -6; -5; 5; 6; 7$$

$$2) \int (ax + b) \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$\checkmark \frac{(ax + b)^2}{2a} \operatorname{arctg} x + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{b^2 - a^2}{2a} \operatorname{arctg} x$$

$$\rightarrow b = -7; -6; -5; 5; 6; 7$$

$$3) \int \ln(a^2x^2 + b^2) \, dx$$

$$\checkmark x \ln(a^2x^2 + b^2) - 2x + 2\frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b}$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

219. Вычислить интеграл.

$$1) \int \frac{Mx^2 + Nx + K}{Df} dx$$

$$\checkmark \frac{1}{D} F$$

$$\rightarrow f, \quad F, \quad M, \quad N, \quad K =$$

- $(x-a)(x-b)(x-c), \quad A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + C \ln|x-c|, \quad A+B+C, \quad -A(b+c) - B(a+c) - C(a+b), \quad Abc + Bac + Cab;$
- $(x-a)^2(x-b), \quad \frac{-A}{x-a} + B \ln|x-a| + C \ln|x-b|, \quad B+C, \quad A - B(a+b) - 2aC, \quad -Ab + Bab + Ca^2;$
- $(x^2+2bx+c)(x-a), \quad \frac{B}{2} \ln(x^2+2bx+c) + A \ln|x-a| + \frac{C-bB}{\sqrt{c-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}, \quad B+A, \quad C - Ba + 2bA, \quad -Ca + Ac$

$$\rightarrow D = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow C = -3; -1; 1; 3$$

$$\rightarrow B = -2; 2$$

$$\rightarrow A = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow c = b^2 + 1; b^2 + 2$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow a = -4; -3; 3; 4$$

220. Вычислить интеграл.

$$\Rightarrow a = -1; 2; 3; -4$$

$$\Rightarrow C = -3; -1; 1; 3$$

$$\Rightarrow B = -2; 2$$

$$\Rightarrow A = -2; -1; 1; 2$$

$$1) \int \frac{(A + B + C)x^2 - (A(b + c) + B(a + c) + C(a + b))x + (Abc + Bac + Cab)}{(x - a)(x - b)(x - c)} dx$$

$$\checkmark A \ln |x - a| + B \ln |x - b| + C \ln |x - c|$$

$$\rightarrow b = -2; -3; 5$$

$$\rightarrow c = 1; 4; -5$$

$$2) \int \frac{(B + C)x^2 + (A - B(a + b) - 2aC)x + (-Ab + Bab + Ca^2)}{(x - a)^2(x - b)} dx$$

$$\checkmark \frac{-A}{x - a} + B \ln |x - a| + C \ln |x - b|$$

$$\rightarrow b = 1; 4; -2; -3; 5$$

$$3) \int \frac{(B + A)x^2 + (C - Ba + 2bA)x + (-Ca + Ac)}{(x^2 + 2bx + c)(x - a)} dx$$

$$\checkmark \frac{B}{2} \ln(x^2 + 2bx + c) + A \ln |x - a| + \frac{C - bB}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}}$$

$$\rightarrow c = b^2 + 1; b^2 + 4$$

$$\rightarrow b = 0; -1; 1; -2; 2$$

**221.** Найти неопределённый интеграл

$$\Rightarrow a = b + 1; b + 2; b + 3; b + 4; b + 5; b + 6; b + 7; b + 8$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$1) \int \cos ax \cos bx \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x$$

$$2) \int \cos bx \sin ax \, dx$$

$$\checkmark -\frac{1}{2(a-b)} \cos(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \cos(a+b)x$$

$$3) \int \sin ax \sin bx \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x$$

**222.** Вычислить интеграл.

$$1) \int \frac{dx}{a + b \sin x}$$

$$\checkmark \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\rightarrow a = 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; -2; -3; -4$$

$$2) \int \frac{dx}{a \sin x - (b + 1) \cos x - b}$$

$$\checkmark \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2b + 1}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{a^2 + 2b + 1}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{a^2 + 2b + 1}} \right|$$

$$\rightarrow a, \quad b =$$

$$\bullet 2, \quad 0;$$

$$\bullet 2, \quad 2;$$

$$\bullet 2, \quad 5;$$

$$\bullet 2, \quad 22;$$

$$\bullet 3, \quad 0;$$

$$\bullet 3, \quad 3;$$

$$\bullet 3, \quad 13;$$

$$\bullet 3, \quad 27$$

$$3) \int \frac{dx}{\frac{b(a^2+1)}{a^2-1} - b \cos x}$$

$$\checkmark \frac{a^2 - 1}{ab} \operatorname{arctg} \left( a \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3$$

**223.** Вычислить интеграл.

$$\Rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow b = 1; 5; 6; 7$$

$$1) \int \frac{dx}{k + \sqrt{ax+b}}$$

$$\checkmark \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} - \frac{2k}{a} \ln |\sqrt{ax+b} + k|$$

$$2) \int \frac{dx}{k + \sqrt[3]{ax+b}}$$

$$\checkmark \frac{3(\sqrt[3]{ax+b} - k)^2}{2a} + \frac{3k^2}{a} \ln |\sqrt[3]{ax+b} + k|$$

$$3) \int \frac{dx}{k + \sqrt[4]{ax+b}}$$

$$\checkmark \frac{4}{3a} \sqrt[4]{(ax+b)^3} - \frac{2k}{a} \sqrt{ax+b} + \frac{4k^2}{a} \sqrt[4]{ax+b} - \frac{4k^3}{a} \ln |\sqrt[4]{ax+b} + k|$$

$$4) \int \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ax+b} + k} dx$$

$$\checkmark \frac{\sqrt{ax+b} - k}{a} + \frac{2k^2}{a} \ln |\sqrt{ax+b} + k|$$

$$5) \int \frac{\sqrt[3]{ax+b}}{\sqrt[3]{ax+b} + k} dx$$

$$\checkmark \frac{ax+b}{a} - \frac{3k}{2a} \sqrt{(ax+b)^2} + \frac{3k^2}{a} \sqrt[3]{ax+b} - \frac{3k^3}{a} \ln |\sqrt[3]{ax+b} + k|$$

$$6) \int \frac{\sqrt{ax+b^2}}{x} dx$$

$$\checkmark 2\sqrt{ax+b^2} + b \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b^2} - b}{\sqrt{ax+b^2} + b} \right|$$

224. Вычислить интеграл.

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b} + k\sqrt[4]{ax+b}}$$

$$\checkmark \frac{2(\sqrt[4]{ax+b} - k)^2}{a} + \frac{4k^2}{a} \ln \left| \sqrt[4]{ax+b} + k \right|$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 1; 5; 6; 7$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(ax+b)^2} - k\sqrt{ax+b}}$$

$$\checkmark \frac{3(\sqrt[6]{ax+b} + k)^2}{a} + \frac{6k^2}{a} \ln \left| \sqrt[6]{ax+b} - k \right|$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 1; 5; 6; 7$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x+b}}{x - k^2\sqrt[3]{(x+b)^2} + b} dx$$

$$\checkmark 2\sqrt{x+b} + 6k^2\sqrt[6]{x+b} + 3k^2 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x+b} - k}{\sqrt[6]{x+b} + k} \right|$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4$$

225. Вычислить интеграл.

$$1) \int \sqrt{\frac{ax}{c-ax}} dx$$

$$\checkmark \frac{c}{a} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax}{c-ax}} - \sqrt{\frac{ax(c-ax)}{c^2}} \right)$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4$$

$$2) \int \frac{\sqrt{\left(\frac{ax}{c-ax}\right)^3}}{ax + \sqrt{\frac{ax}{c-ax}}} dx$$

$$\checkmark -\frac{2}{a} \operatorname{arctg} t + \frac{c}{a} \ln |t^2 + ct + 1| + \frac{4-2c^2}{a\sqrt{4-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{4-c^2}}, \quad t = \sqrt{\frac{ax}{c-ax}}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow c = \frac{6}{5}; \frac{8}{5}$$

$$3) \int \frac{m}{(a+cx)^2} \sqrt[b]{\frac{a-cx}{a+cx}} dx$$

$$\checkmark \frac{-mb}{2ac(b+1)} \sqrt[b]{\left(\frac{a-cx}{a+cx}\right)^{b+1}}$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; -1; -2; -3$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4$$

$$4) \int \frac{dx}{(a^2 - c^2 x^2) + (a+cx)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{a-cx}{a+cx}\right)^4}}$$

$$\checkmark \frac{3}{2ac} \ln \left| \sqrt[3]{\frac{a-cx}{a+cx}} + 1 \right|$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$5) \int \frac{a + \sqrt{\frac{a^2 x - b}{x}}}{a - \sqrt{\frac{a^2 x - b}{x}}} dx$$

$$\checkmark \frac{-b}{4a^2} \ln |a^2 - t^2| - \frac{b}{2a(a-t)} + \frac{b}{2(a-t)^2}, \quad t = \sqrt{\frac{a^2 x - b}{x}}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$



→  $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6$

$$6) \int \sqrt{\frac{k^2 cx + b}{cx + f}} \frac{dx}{cx + f}$$

$$\checkmark -\frac{2}{c} \sqrt{\frac{k^2 cx + b}{cx + f}} - \frac{k}{c^2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{k^2 cx + b}{cx + f}} - k}{\sqrt{\frac{k^2 cx + b}{cx + f}} + k} \right|$$

→  $k = 1; 2; 3; 4$

→  $f = 4; 5$

→  $b = 1; 2; 3$

→  $c = 1; 2$

## Часть XII

### Определённый интеграл

226. Вычислить интеграл.

$$1) \int_0^{\log_{ab} c} a^x \cdot b^x dx$$

$$\checkmark \frac{c-1}{\ln ab}$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 5; 6; 7$$

$$2) \int_{-1}^0 \frac{a^x - b^x}{(ab)^x} dx$$

$$\checkmark \frac{1-a}{\ln a} + \frac{b-1}{\ln b}$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a = 6; 7; 8; 9$$

$$3) \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{e}{m}} \frac{\sin(\ln mx)}{x} dx$$

$$\checkmark 1 - \cos 1$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$$

$$4) \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{e}{m}} \frac{\cos(\ln mx)}{x} dx$$

$$\checkmark \sin 1$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$$

$$5) \int_a^b \operatorname{tg} mx dx$$

$$\checkmark -\frac{1}{m} \ln \left| \frac{\cos b}{\cos a} \right|$$

$$\rightarrow a = -\frac{\pi}{4m}; -\frac{\pi}{3m}$$

$$\rightarrow b = 0; \frac{\pi}{6m}; \frac{\pi}{3m}$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5$$

$$6) \int_a^b \operatorname{tg}^2 mx \, dx$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{m} (\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a - b + a)$$

$$\rightarrow a = -\frac{\pi}{4m}; \quad -\frac{\pi}{3m}$$

$$\rightarrow b = 0; \quad \frac{\pi}{6m}; \quad \frac{\pi}{3m}$$

$$\rightarrow m = 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5$$

227. Вычислить интеграл.

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos ax \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \sin ax \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$3) \int_0^{\frac{b}{a}} c^{ax+b} \, dx$$

$$\checkmark \frac{c^b(c^b - 1)}{a \ln a}$$

$$\rightarrow a = 2; 4$$

$$\rightarrow b = 2; 4$$

$$\rightarrow c = 2; 3$$

$$4) \int_a^b (cx + f)^k \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{c(k+1)} ((cb + f)^{k+1} - (ca + f)^{k+1})$$

$$\rightarrow a = 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3$$

$$\rightarrow b = 4; 5$$

$$\rightarrow c = 2; 3$$

$$\rightarrow f = 1; 2; 3; -1; -2; -3$$

$$\rightarrow k = 2$$

$$5) \int_a^b \frac{dx}{(cx + f)^k}$$

$$\checkmark \frac{1}{c(k-1)} \left( \frac{1}{(cb + f)^{k-1}} - \frac{1}{(ca + f)^{k-1}} \right)$$

$$\rightarrow a = 0; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b = 4; 5$$

$$\rightarrow c = 2; 3$$

$$\rightarrow f = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = 2$$

$$6) \int_a^b \frac{dx}{cx + f}$$

$$\checkmark \frac{1}{c} \ln \left| \frac{cb + f}{ac + f} \right|$$

$$\rightarrow a = 0; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b = 4; 5; 6$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow f = 1; 2; 3$$

$$7) \int_a^{a+1} \sqrt{(x-a)^k} dx$$

$$\checkmark \frac{2}{k+2}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 3; 5; 7; 9; 11$$

$$8) \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{cx + f^2}}$$

$$\checkmark \frac{2}{c} \left( \sqrt{cb + f^2} - f \right)$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow f = 1; 2; 3; 4$$

$$9) \int_0^{\frac{\pi}{4a}} \frac{dx}{\cos^2 ax}$$

$$\checkmark \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$10) \int_{\frac{\pi}{4a}}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{dx}{\sin^2 ax}$$

$$\checkmark \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

228. Вычислить интеграл.

$$\Rightarrow a = -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow b = 0; \frac{\pi}{6}$$

$$1) \int_a^b \operatorname{tg}^3 x \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{2 \cos^2 b} - \frac{1}{2 \cos^2 a} + \ln \left| \frac{\cos b}{\cos a} \right|$$

$$2) \int_a^b \operatorname{tg}^4 x \, dx$$

$$\checkmark \frac{\operatorname{tg}^3 b - \operatorname{tg}^3 a}{3} - \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a + b - a$$

$$3) \int_a^b \operatorname{tg}^5 x \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{4 \cos^4 b} - \frac{1}{4 \cos^4 a} - \frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 a} - \ln \left| \frac{\cos a}{\cos b} \right|$$

$$4) \int_a^b \operatorname{tg}^6 x \, dx$$

$$\checkmark \frac{\operatorname{tg}^5 b - \operatorname{tg}^5 a}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 b - \operatorname{tg}^3 a}{3} + \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a - b + a$$

$$5) \int_a^b \operatorname{tg}^8 x \, dx$$

$$\checkmark \frac{\operatorname{tg}^7 b - \operatorname{tg}^7 a}{7} - \frac{\operatorname{tg}^5 b - \operatorname{tg}^5 a}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 b - \operatorname{tg}^3 a}{3} - \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + b - a$$

229. Вычислить интеграл.

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{4a}} \operatorname{tg} ax \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{2a} \ln 2$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{4a}}^{\frac{\pi}{2a}} \operatorname{ctg} ax \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{2a} \ln 2$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$3) \int_1^{e^a} \frac{(\ln x)^{b-1}}{x} \, dx$$

$$\checkmark \frac{a^b}{b}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 2; 3$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^b ax \sin ax \, dx$$

$$\checkmark -\frac{1}{a(b+1)}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^b ax \cos ax \, dx$$

$$\checkmark \frac{1}{a(b+1)}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$



$$6) \int_0^{\frac{\pi a}{4}} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{a} dx$$

$$\checkmark \quad \frac{a(4 - \pi)}{4}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$7) \int_{\frac{\pi}{4}a + \pi a}^{\frac{\pi}{2}a + \pi a} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{a} dx$$

$$\checkmark \quad -\frac{a(4 + \pi)}{4}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$8) \int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dx}{1 - \cos ax}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$9) \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{dx}{1 + \cos ax}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$10) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sin^2 \left( \frac{2\pi x}{b} + a \right) dx$$

$$\checkmark \quad \frac{b}{2}$$

$$\rightarrow a = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 5; -5; 6; -6$$

$$\rightarrow b = 2; 4; 6; 8; 10$$

$$11) \int_{-\frac{1}{a}}^0 a^2 x \sqrt[k]{1 + ax} dx$$

$$\checkmark \quad -\frac{1}{(k+2)(k+1)}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6$$

230. Вычислить определённый интеграл

$$1) \int_0^{\frac{k^2-b^2}{a}} \frac{x \, dx}{\sqrt{ax+b^2}}$$

$$\checkmark \frac{2k(k^2-b^2)}{a^2}$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = 4; 5; 6$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$2) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

$$\checkmark \frac{a^4}{16} \pi$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$3) \int_{e^a}^{e^b} \frac{(\ln x)^{k-1} \, dx}{x(m + (\ln x)^k)}$$

$$\checkmark \frac{1}{k} \ln \left| \frac{m + b^k}{m + a^k} \right|$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow b = 4; 5; 6$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \frac{\cos kx \, dx}{\sqrt[3]{(m^3 + (a^3 - m^3) \sin kx)^2}}$$

$$\checkmark \frac{3}{(a^2 + am + m^2)k}$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a = 6; 7$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{b^2 - 1 + \sin^2 x}$$

$$\checkmark \frac{1}{b\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{b^2-1}}$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$6) \int_{\frac{\ln a}{k}}^{\frac{\ln(b^2+1)}{k}} \frac{e^{kx} \sqrt{e^{kx} - a}}{e^{kx} + b^2 - a} dx$$

$$\checkmark \quad \frac{b}{k} \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 2; 3$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

231. Вычислить определённый интеграл

$$1) \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \arcsin kx \, dx$$

$$\checkmark \quad 0$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$2) \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \operatorname{arctg} kx \, dx$$

$$\checkmark \quad 0$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$3) \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \arccos kx \, dx$$

$$\checkmark \quad \frac{\pi}{k}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$4) \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \operatorname{arctg} kx \, dx$$

$$\checkmark \quad \frac{\pi}{k}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$5) \int_0^{\frac{\pi}{a^2}} \frac{x \, dx}{\cos^2 ax}$$

$$\checkmark \quad \frac{\pi}{a^3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \cos \frac{\pi}{a} \right|$$

$$\rightarrow a = 3; 4; 6$$

$$6) \int_{\frac{\pi}{a^2}}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{x \, dx}{\sin^2 ax}$$

$$\checkmark \quad \frac{\pi}{a^3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \sin \frac{\pi}{a} \right|$$

$$\rightarrow a = 3; 4; 6$$

$$7) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\checkmark \frac{a^2 \pi}{4}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx$$

$$\checkmark \frac{b(e^{\frac{a\pi}{b}} + 1)}{a^2 + b^2}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$9) \int_0^{\ln b} x e^{-ax} dx$$

$$\checkmark -\frac{\ln b}{ab^a} - \frac{1}{a^2 b^a} + 1$$

$$\rightarrow a = 1; 2$$

$$\rightarrow b = 2; 3; e; 4; 5$$

$$10) \int_{-a}^0 x \cos \frac{b\pi x}{a} dx$$

$$\checkmark \frac{a^2}{\pi^2 b^2} (1 - (-1)^b)$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$11) \int_a^b \ln(cx + f) dx$$

$$\checkmark b \ln(cb + f) - a \ln(ca + f) - b + a + \frac{f}{c} \ln(cb + f) - \frac{f}{c} \ln(ca + f)$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 6$$

$$\rightarrow f = 12; 24; 36$$

232. Вычислить интеграл

$$1) \int_{a+2}^{a+3} \frac{dx}{(x+a)(x-(a+1))}$$

$$\checkmark \frac{1}{2a+1} \ln \left| \frac{4(a+1)}{2a+3} \right|$$

$$\rightarrow a = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$2) \int_a^b \frac{dx}{x^2(x-c)}$$

$$\checkmark -\frac{2}{c^2} \ln \frac{b}{a} + \frac{a-b}{abc} + \frac{1}{c^2} \ln \left| \frac{b-c}{a-c} \right|$$

$$\rightarrow a = 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 8; 9; 10; 11$$

$$\rightarrow c = 1; 2$$

$$3) \int_a^b \frac{dx}{x(x^2+c)}$$

$$\checkmark \frac{1}{c} \ln \frac{b}{a} - \frac{1}{2c} \ln \frac{b^2+c}{a^2+c}$$

$$\rightarrow a = 1; 2$$

$$\rightarrow b = 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$4) \int_0^b \frac{dx}{(x^2+b^2) \left( x^2 + \frac{1+ab^2}{a} \right)}$$

$$\checkmark \frac{\sqrt{a}\pi}{4b} - \frac{a}{\sqrt{1+ab^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a}b}{\sqrt{1+ab^2}}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3$$

**233.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$\begin{aligned} 1) \quad & y = x^2, \\ & y = (a+b)x - ab \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{6}(b-a)^3$$

$$\rightarrow b = a+1; \quad a+2; \quad a+3$$

$$\rightarrow a = -3; \quad -2; \quad -1; \quad 0$$

**234.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$1) \quad \begin{aligned} y &= Bx^2 - 2aBx + Ba^2 + A, \\ y &= B(d-c)x + B(-ad + ac + dc) + A \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \left| \frac{B(c+d)^3}{6} \right|$$

$$\rightarrow a = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow c = d-1; d; d+1; d+2$$

$$\rightarrow d = 1; 2$$

$$\rightarrow A = B; B-1; B+1$$

$$\rightarrow B = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$



**235.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$1) \quad \begin{aligned} y &= Bx^2 - 2B(a+b)x + B(a+b)^2 + A, \\ y &= -Bx^2 + 2B(a+2b)x - B(a+2b)^2 + A + 5Bb^2 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad |9Bb^3|$$

$$\rightarrow A = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow B = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow a = b-1; b-2; b-3$$

$$\rightarrow b = 1; 2$$

236. Найти длину дуги кривой.

$$1) \quad y = \frac{2}{3} \sqrt{\left(ax + \frac{c^2 - 1}{a^2}\right)^3}, \quad 0 \leq x \leq \frac{c^2}{a^3}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{a^3} \left( \sqrt{(a^3 + c^2)^3} - c^3 \right)$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$2) \quad y = ax^2 + b, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{2a} \ln \left| 2a + \sqrt{1 + 4a^2} \right| \right)$$

$$\rightarrow a = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$$

$$3) \quad y = \frac{2}{a} \sqrt{ax + b}, \quad -\frac{1}{a} \leq x \leq 0$$

$$\checkmark \quad ab \sqrt{\frac{b+1}{b}} - \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{b+1}{b}} - 1}{\sqrt{\frac{b+1}{b}} + 1} \right| - \sqrt{\frac{b}{b-1}} + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{b}{b-1}} - 1}{\sqrt{\frac{b}{b-1}} + 1} \right|$$

$$\rightarrow a = 3; 5; 7; 9; 11$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4$$

$$4) \quad y = a \ln(a^2 - x^2), \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

$$\checkmark \quad 2a \ln 3 - a$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$5) \quad y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad -a \leq x \leq a$$

$$\checkmark \quad a \left( e - \frac{1}{e} \right)$$

$$\rightarrow a = 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15$$

**237.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями.

1)  $xy = a$ ,  $x = 1$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $Ox$

✓  $\pi a(a - 1)$

→  $a = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$

2)  $y = a - \frac{x^2}{a}$ ,  $x + y = a$ ,  $Oy$

✓  $\frac{\pi a^3}{6}$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

3)  $y = x^3$ ,  $x = 0$ ,  $y = a^3$ ,  $Oy$

✓  $\frac{3}{5}\pi a^5$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

4)  $y^2 = a^2 - x$ ,  $x = 0$ ,  $Oy$

✓  $\frac{16}{15}\pi a^5$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

5)  $y^2 = a - x$ ,  $x = 0$ ,  $Ox$

✓  $\frac{\pi a^2}{2}$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

6)  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x + y = a$ ,  $Ox$

✓  $\frac{\pi a^3}{3}$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

7)  $y = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a}$ ,  $y = \pm \frac{\pi}{2a}$ ,  $x = 0$ ,  $Oy$

✓  $\frac{\pi^2}{2a}$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

8)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $y = \pm b$ ,  $Oy$

✓  $\frac{8}{3}\pi a^3 b$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = 1; 2; 3$

**238.** Вычислить силу, с которой вода давит на пластину, имеющую форму равнобокой трапеции с нижним основанием  $a$ , верхним основанием  $b$  и высотой  $h$ .

1)  $a = a_{\text{м}}, b = b_{\text{м}}, h = h_{\text{м}},$

✓  $\frac{\rho g h^2}{1000} \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{6} \right) \text{ кН}$

→  $\rho = 1000$

→  $g = 10$

→  $h = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $b = 6c - 2a$

→  $a = 3; 4; 5; 6; 7$

→  $c = 4; 5$

**239.** Задача по теме «Сила давления на вертикальную пластину».

- 1) Вычислить силу, с которой вода давит на пластину, имеющую форму равнобокой трапеции с нижним основанием  $a$  м, верхним основанием  $b$  м и высотой  $h$  м.

$$\checkmark \quad \frac{\rho g h^2}{1000} \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{6} \right) \text{ кН}$$

$$\rightarrow \rho = 1000$$

$$\rightarrow g = 10$$

$$\rightarrow h = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 6c - 2a$$

$$\rightarrow a = 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow c = 4; 5$$

**240.** Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$1) \int_{e^n}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^k x}$$

$$\checkmark \frac{1}{(k-1)n^{k-1}}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow n = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$2) \int_a^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt[k]{\ln x}}$$

$$\checkmark \infty$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^k} dx$$

$$\checkmark \frac{1}{(k-1)^2}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$4) \int_a^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[k]{x}} dx$$

$$\checkmark \infty$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

**241.** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\Rightarrow b = a + 1; a + 2; a + 3; a + 4; a + 5; a + 6; a + 7$$

$$\Rightarrow a = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$$

$$1) \int_a^b \frac{dx}{-x^2 + x(a+b) - ab}$$

$$\checkmark \quad \infty$$

$$2) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x(a+b) - ab}}$$

$$\checkmark \quad \pi$$

## Часть XIII

### Интегралы с параметром



**242.** С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы

$$1) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[n]{a^n - x^n}}$$

$$\checkmark \quad \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\rightarrow a = 1; 2$$

$$\rightarrow n = 2; 3; 4; 5; 6$$

$$2) \int_0^a \left( \ln \frac{a}{x} \right)^p dx$$

$$\checkmark \quad a \Gamma(p+1)$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow p = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

## Часть XIV

# Дифференцирование функций многих переменных

**243.** Построить линии уровня функции

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$1) \quad z = \frac{1}{b^2x^2 + a^2y^2} \text{ при } c = \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2) \quad z = \frac{1}{b^2x^2 - a^2y^2} \text{ при } c = \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\checkmark \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**244.** Найти частные производные первого порядка и изобразить область определения функции двух переменных.

$$\Rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\Rightarrow b = 2; 3; 4; 5$$

$$1) z = F$$

$$\rightarrow F = \arcsin(a - x^2 - y^2); \arccos(a - x^2 - y^2)$$

✓ кольцо с внутренним радиусом  $\sqrt{a-1}$ , внешним:  $\sqrt{a+1}$

$$2) z = F$$

$$\rightarrow F = \arcsin(ax + by); \arccos(ax + by)$$

✓ полоса, ограниченная параллельными прямыми  $ax + by + 1 = 0$  и  $ax + by - 1 = 0$

$$3) z = F$$

$$\rightarrow F = \log_b(a - x^2 - y^2); \frac{1}{\sqrt{a - x^2 - y^2}}$$

✓ внутренность круга с центром в начале координат, радиуса  $a$

$$4) z = F$$

$$\rightarrow F = \log_b(ax - by); \frac{1}{\sqrt{ax - by}}$$

✓ множество точек плоскости над прямой  $y = \frac{a}{b}x$

$$5) z = \sqrt{ax - by}$$

$$\checkmark y \geq \frac{a}{b}x$$

$$6) z = F$$

$$\rightarrow F = \log_b(x^2 - ay + b); \frac{1}{\sqrt{x^2 - ay + b}}$$

$$\checkmark y > \frac{1}{a}x^2 + \frac{b}{a}$$

$$7) z = x^2 - ay + b$$

$$\checkmark y \geq \frac{1}{a}x^2 + \frac{b}{a}$$

$$8) z = F$$

$$\rightarrow F = \log_b(x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2ab); \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2ab}}$$

✓ внешность круга  $(x+a)^2 + (y+b)^2 > (a+b)^2$

$$9) \quad z = \frac{1}{ax + by}$$

$$\checkmark \quad y \neq -\frac{a}{b}x$$

$$10) \quad z = \frac{1}{x^2 - ay + b}$$

$$\checkmark \quad y \neq \frac{1}{a}x^2 + \frac{b}{a}$$

$$11) \quad z = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2ab}$$

$$\checkmark \quad \text{вся плоскость, из которой выброшена окружность } (x + a)^2 + (y + b)^2 = (a + b)^2$$

$$12) \quad z = \frac{\sqrt{x}}{F}$$

$$\checkmark \quad y \neq G, \quad x > 0$$

$$\rightarrow F, \quad G =$$

$$\bullet \quad ax + by, \quad -\frac{a}{b}x;$$

$$\bullet \quad x^2 - ay + b, \quad \frac{1}{a}x^2 + \frac{b}{a}$$

$$13) \quad z = \frac{\sqrt{y}}{F}$$

$$\checkmark \quad y \neq G, \quad y > 0$$

$$\rightarrow F, \quad G =$$

$$\bullet \quad ax + by, \quad -\frac{a}{b}x;$$

$$\bullet \quad x^2 - ay + b, \quad \frac{1}{a}x^2 + \frac{b}{a}$$

**245.** Найти частные производные и выписать полный дифференциал данной функции.

$$\Rightarrow u = ax^n + y^k; \quad ax^ny^k; \quad \frac{ax^n}{y^{k+1}}$$

$$\Rightarrow a = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow n = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\Rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

1)  $z = \operatorname{arctg} u$

2)  $z = \arcsin u$

3)  $z = \operatorname{tg} u$

4)  $z = \operatorname{ctg} u$

5)  $z = \cos u$

6)  $z = \sin u$

7)  $z = e^u$

**246.** Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

1)  $F$

$$\rightarrow F = e^E; \sin E; \cos E; \operatorname{tg} E; \operatorname{ctg} E; \ln E; \arcsin E; \arccos E; \operatorname{arctg} E; \operatorname{arcctg} E$$

$$\rightarrow E = ax + by$$

$$\rightarrow a = -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

247. Удовлетворяет ли функция  $z = f(x, y)$  уравнению:

$\Rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

$$1) \quad z = \sin^2(x - ay), \quad a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

✓ да

$$2) \quad z = e^{-\cos(x+ay)}, \quad a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

✓ да

$$3) \quad z = e^{-(x+ay)} \sin(x + ay), \quad a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

✓ да

$$4) \quad z = \cos^2(ax + y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

✓ да

$$5) \quad z = \ln \frac{x}{y} + x^a - y^a, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = a(x^a - y^a)$$

✓ да



248. Для заданных  $z = f(x, y)$ ,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  найти  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

1)  $z = F$ ,  $x = X$ ,  $y = Y$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = F_x A_x X_u + F_x A_y Y_u$$

✓

$$\frac{\partial z}{\partial v} = F_x A_x X_v + F_x A_y Y_v$$

→  $F$ ,  $F_x =$

•  $\cos A$ ,  $-\sin A$ ;

•  $\sin A$ ,  $\cos A$ ;

•  $\sqrt{A}$ ,  $\frac{1}{2\sqrt{A}}$ ;

•  $A^2$ ,  $2A$

→  $A$ ,  $A_x$ ,  $A_y =$

•  $ax^k y^l$ ,  $akx^{k-1}y^l$ ,  $alx^k y^{l-1}$ ;

•  $ax^k + y^l$ ,  $kax^{k-1}$ ,  $ly^{l-1}$

→  $X$ ,  $X_u$ ,  $X_v =$

•  $uv$ ,  $v$ ,  $u$ ;

•  $u^v$ ,  $vu^{v-1}$ ,  $u^v \ln u$ ;

•  $ue^v$ ,  $e^v$ ,  $ue^v$

→  $Y$ ,  $Y_u$ ,  $Y_v =$

•  $\frac{u}{v}$ ,  $\frac{1}{v}$ ,  $-\frac{u}{v^2}$ ;

•  $u \ln v$ ,  $\ln v$ ,  $\frac{u}{v}$ ;

•  $u \sin v$ ,  $\sin v$ ,  $u \cos v$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $k = 2; 3; 4; 5$

→  $l = 2; 3; 4; 5$

**249.** Составить уравнение касательной в точке  $M_0$  к данной кривой.

$$1) \quad \begin{matrix} x^a + kx^b y^c + y^d + mx + ny = x_0^a + kx_0^b y_0^c + y_0^d + mx_0 + ny_0, \\ M_0(x_0, y_0) \end{matrix}$$

$$\checkmark \quad Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

$$\rightarrow m = A - ax_0^{a-1} - kbx_0^{b-1}y_0^c$$

$$\rightarrow n = B - dy_0^{d-1} - kcx_0^b y_0^{c-1}$$

$$\rightarrow A = 1; 3; 5$$

$$\rightarrow B = -2; -1; 1; 2; 4$$

$$\rightarrow a = 2; 3$$

$$\rightarrow b = 1; 2$$

$$\rightarrow c = 1; 2$$

$$\rightarrow d = 2; 3$$

$$\rightarrow k = -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow x_0 = -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow y_0 = -1; 1; 2$$

**250.** К данной поверхности провести касательные плоскости, параллельные данной плоскости.

$$1) \quad \begin{aligned} ax^2 + by^2 + cz^2 &= ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2; \\ Ax + By + Cz &= 0 \end{aligned}$$

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0;$$

$$\checkmark \quad Ax + By + Cz + Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$$

$$\rightarrow x_0 = kk_a$$

$$\rightarrow y_0 = kk_b$$

$$\rightarrow z_0 = kk_c$$

$$\rightarrow A = ak_a$$

$$\rightarrow B = bk_b$$

$$\rightarrow C = ck_c$$

$$\rightarrow a = 1; 3; 5$$

$$\rightarrow c = 1; 2; 4$$

$$\rightarrow k_a = 1; 3$$

$$\rightarrow k_c = 1; 2; 4$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow k_b = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = 1; 2$$

**251.** Найти  $y'(x_0)$ ,  $y''(x_0)$  и  $y'''(x_0)$  для неявно заданной функции  $y = y(x)$ , если известно, что  $y(x_0) = y_0$ .

$$1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0;$$

$$x_0 = x_0, \quad y_0 = y_0$$

$$\checkmark \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = 2ky_3, \quad y'''(x_0) = y_3$$

$$\rightarrow d = -2ax_0 - by_0 - bx_0y_1 - 2cy_0y_1 - ey_1$$

$$\rightarrow a = -by_1 - bx_0ky_3 - cy_1^2 - 2cy_0ky_3 - eky_3$$

$$\rightarrow e = -6kb - bx_0 - 12cy_1k - 2cy_0$$

$$\rightarrow b = -1; \quad 1$$

$$\rightarrow c = -1; \quad 1$$

$$\rightarrow x_0 = -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2$$

$$\rightarrow y_0 = -1; \quad 0; \quad 1$$

$$\rightarrow y_1 = 2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2$$

$$\rightarrow y_3 = -1; \quad 1$$

$$\rightarrow k = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2$$

**252.** Исследовать на экстремум функцию

$$\Rightarrow x_0 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow y_0 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow f = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$1) z = ax^2 + by^2 - 2ax_0x - 2by_0y - f$$

$$\checkmark z_{\min}(x_0, y_0) = -ax_0^2 - by_0^2 - f$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$2) z = ax^2 + by^2 - 2ax_0x - 2by_0y - f$$

$$\checkmark z_{\max}(x_0, y_0) = -ax_0^2 - by_0^2 - f$$

$$\rightarrow a = -1; -2; -3; -4; -5$$

$$\rightarrow b = -1; -2; -3; -4; -5$$

**253.** Исследовать на экстремум функцию

$$\Rightarrow x_0 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Rightarrow y_0 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$1) z = ax^2 + bxy + cy^2 - (2ax_0 + by_0)x - (2cy_0 + bx_0)y$$

$$\checkmark z_{\min}(x_0, y_0) = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 - (2ax_0 + by_0)x_0 - (2cy_0 + bx_0)y_0$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow c = 2; 3$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 1; 2$$

$$2) z = ax^2 + bxy + cy^2 - (2ax_0 + by_0)x - (2cy_0 + bx_0)y$$

$$\checkmark z_{\max}(x_0, y_0) = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 - (2ax_0 + by_0)x_0 - (2cy_0 + bx_0)y_0$$

$$\rightarrow a = -1; -2; -3$$

$$\rightarrow c = -2; -3$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 1; 2$$

$$3) z = ax^2 + bxy + cy^2 - (2ax_0 + by_0)x - (2cy_0 + bx_0)y$$

$$\checkmark \text{ Экстремума нет}$$

$$\rightarrow a = 0; 1; 2$$

$$\rightarrow c = 0; -1; -2$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 1; 2$$

**254.** Исследовать функцию двух переменных на экстремум

$$1) \quad z = x^2 y - \frac{n^2 + 2b}{3} y^3 - x^2 + by^2$$

$$\checkmark \quad z_{\max}(0, 0) = 0$$

$$\rightarrow n = 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow b = -1; -2; -3; -\frac{1}{2}; -4; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}$$

$$2) \quad z = ax^3 + xy^2 + \frac{n^2 + 3a}{2} x^2 + y^2$$

$$\checkmark \quad z_{\min}(0, 0) = 0$$

$$\rightarrow n = 4; 5; 6$$

$$\rightarrow a = -1; -2; -3; -4; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}$$

**255.** Исследовать на экстремум функцию

$$\Rightarrow x_0 = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow y_0 = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) z = ax^2 + by^2 - 2ax_0^2 \ln x - 2by_0^2 \ln y$$

$$\checkmark z_{\min}(x_0, y_0) = ax_0^2 + by_0^2 - 2ax_0^2 \ln x_0 - 2by_0^2 \ln y_0$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$



**256.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = f(x, y)$  в указанном круге.

$$1) \quad z = x^2 + y^2 + 2ax + 2by, \quad x^2 + y^2 \leq k^2(a^2 + b^2)$$

$$\checkmark \quad z_{\min} = z(-a, -b) = -a^2 - b^2, \quad z_{\max} = z(ka, kb) = (a^2 + b^2)(k^2 + 2k)$$

$$\rightarrow a = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

$$2) \quad z = -x^2 - y^2 - 2ax - 2by, \quad x^2 + y^2 \leq k^2(a^2 + b^2)$$

$$\checkmark \quad z_{\min} = z(ka, kb) = -(a^2 + b^2)(k^2 + 2k), \quad z_{\max} = z(-a, -b) = a^2 + b^2$$

$$\rightarrow a = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow b = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

**257.** Дана система точек, координаты которых указаны в таблице. По методу наименьших квадратов построить аппроксимирующую прямую.

1)

$k$	1	2	3	4	5
$x_k$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$y_k$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$

✓  $y = ax + b$

→  $y_1 = Bx_2 - A$

→  $y_2 = A - Bx_1$

→  $A = aA_1 + bB_1 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5$

→  $B = A_2a + bB_2 - y_3 - y_4 - y_5$

→  $A_2 = B_1$

→  $B_2 = 5$

→  $A_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$

→  $B_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

→  $y_3 = ax_3 + b - 3; \quad ax_3 + b - 2; \quad ax_3 + b - 1$

→  $y_4 = ax_4 + b - 3; \quad ax_4 + b - 2; \quad ax_4 + b - 1; \quad ax_4 + b + 1; \quad ax_4 + b + 2; \quad ax_4 + b + 3$

→  $y_5 = ax_5 + b + 1; \quad ax_5 + b + 2; \quad ax_5 + b + 3$

→  $x_5 = x_4 + 1; \quad x_4 + 2; \quad x_4 + 3$

→  $x_4 = x_3 + 1; \quad x_3 + 2; \quad x_3 + 3$

→  $x_3 = x_2 + 1; \quad x_2 + 2; \quad x_2 + 3$

→  $x_2 = x_1 + 1$

→  $x_1 = -5; \quad -4; \quad -3; \quad -2$

→  $a = 1; \quad 2; \quad -1; \quad -2$

→  $b = -5; \quad -4; \quad -3; \quad -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5$

**258.** В группе студентов-первокурсников у 12 студентов были измерены длина тела ( $h$ ) и масса тела ( $m$ ). С помощью метода наименьших квадратов построить линейную зависимость массы тела от длины тела.

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1) $h$ , см	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
$m$ , кг	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$	$y_{12}$

✓  $m = ah + b$

→  $a = \frac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$

→  $b = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$

→  $A_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_{10}^2 + x_{11}^2 + x_{12}^2$

→  $B_1 = A_2$

→  $A_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$

→  $B_2 = 12$

→  $C_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 + x_6 y_6 + x_7 y_7 + x_8 y_8 + x_9 y_9 + x_{10} y_{10} + x_{11} y_{11} + x_{12} y_{12}$

→  $C_2 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12}$

→  $y_1 = kx_1 + d - 2; kx_1 + d - 1; kx_1 + d; kx_1 + d + 1; kx_1 + d + 2$

→  $y_2 = kx_2 + d - 4; kx_2 + d - 3; kx_2 + d - 1; kx_2 + d + 4; kx_2 + d + 5$

→  $y_3 = kx_3 + d - 3; kx_3 + d - 1; kx_3 + d; kx_3 + d + 2; kx_3 + d + 4$

→  $y_4 = kx_4 + d - 2; kx_4 + d - 1; kx_4 + d; kx_4 + d + 1; kx_4 + d + 2$

→  $y_5 = kx_5 + d - 2; kx_5 + d - 1; kx_5 + d; kx_5 + d + 1; kx_5 + d + 2$

→  $y_6 = kx_6 + d - 5; kx_6 + d - 3; kx_6 + d + 1; kx_6 + d + 2; kx_6 + d + 3$

→  $y_7 = kx_7 + d - 2; kx_7 + d - 1; kx_7 + d; kx_7 + d + 1; kx_7 + d + 2$

→  $y_8 = kx_8 + d - 6; kx_8 + d - 3; kx_8 + d; kx_8 + d + 2; kx_8 + d + 7$

→  $y_9 = kx_9 + d - 2; kx_9 + d - 1; kx_9 + d; kx_9 + d + 1; kx_9 + d + 2$

→  $y_{10} = kx_{10} + d - 7; kx_{10} + d - 6; kx_{10} + d; kx_{10} + d + 5; kx_{10} + d + 10$

→  $y_{11} = kx_{11} + d - 8; kx_{11} + d - 4; kx_{11} + d; kx_{11} + d + 6; kx_{11} + d + 9$

→  $y_{12} = kx_{12} + d - 9; kx_{12} + d - 5; kx_{12} + d; kx_{12} + d + 7; kx_{12} + d + 8$

$$\rightarrow x_{10}, \quad x_{11}, \quad x_{12} =$$

- 180, 184, 188;
- 180, 186, 190;
- 180, 182, 186;
- 180, 182, 188;
- 182, 184, 186;
- 182, 184, 188;
- 182, 186, 188;
- 182, 186, 190

$$\rightarrow x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad x_7, \quad x_8, \quad x_9 =$$

- 170, 172, 174, 176, 176, 178;
- 170, 172, 174, 174, 176, 178;
- 170, 172, 172, 174, 176, 178;
- 170, 170, 172, 174, 176, 178;
- 170, 172, 174, 176, 178, 178

$$\rightarrow x_1, \quad x_2, \quad x_3 =$$

- 160, 164, 168;
- 160, 166, 168;
- 160, 164, 166;
- 162, 166, 168;
- 164, 166, 168

$$\rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow d = -25$$

**259.** Решить задачу.

- 1) Найти максимальный объём вписанного в эллипсоид с полуосями  $a = a$ ,  $b = b$  и  $c = c$  прямоугольного параллелепипеда.

✓  $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 6$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 6$

→  $c = 1; 2; 3; 4; 6$

## Часть XV

### Кратные интегралы

260. Вычислить двойной интеграл

$$1) \iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} \frac{dx dy}{(ex + fy + g)^2}$$

$$\checkmark \frac{1}{ef} \ln \frac{(eb + fc + g)(ea + fd + g)}{(eb + fd + g)(ea + fc + g)}$$

$$\rightarrow b = a + 1; \quad a + 2$$

$$\rightarrow a = A; \quad A + 1; \quad A + 2$$

$$\rightarrow d = c + 1; \quad c + 2$$

$$\rightarrow c = A; \quad A + 1; \quad A + 2$$

$$\rightarrow e = 1; \quad 2; \quad 3$$

$$\rightarrow f = 1; \quad 2; \quad 3$$

$$\rightarrow g = G; \quad G + 1; \quad G + 2$$

$$\rightarrow A, \quad G =$$

$$\bullet 0, \quad 1;$$

$$\bullet 1, \quad 0$$

**261.** Вычислить двойной интеграл.

$$1) \iint_{\triangle ABC} \left( 2xy + n \frac{y}{x} \right) dx dy,$$

$$A(0, 0), B(a, y_0), C(a, y_0 + 2d).$$

$$\checkmark \quad d(y_0 + d)(a^2 + n)$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow n = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$$

$$\rightarrow d = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow y_0 = 1; 2; 3; 4$$



**262.** Найти двойной интеграл по области  $D$ , ограниченной указанными линиями

$$1) \quad \iint_D \frac{x^a}{y^2} dx dy$$

$$D : y = kx, y = \frac{ks^2}{x}, x = X$$

$$\checkmark \quad \frac{X^{a+2}}{(a+2)ks^2} - \frac{X^a}{ak} - \frac{s^a}{(a+2)k} + \frac{s^a}{ak}$$

$$\rightarrow X = s+1; s+2$$

$$\rightarrow s = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow a = 1; 2$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

**263.** Найти двойной интеграл по области  $D$ , ограниченной указанными линиями

$$1) \quad \iint_D \sqrt{A^2 - x^2 - y^2} xy \, dx \, dy$$

$$D : y = kx, \, y = lx, \, x^2 + y^2 = A^2$$

$$\checkmark \quad \frac{A^5}{15} \left( \frac{l^2}{1+l^2} - \frac{k^2}{1+k^2} \right)$$

$$\rightarrow A = 1; 2; a$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{2}; 1$$

$$\rightarrow l = \frac{3}{2}; 2; 3$$

**264.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= ax, \quad x^2 + y^2 = bx, \\ y &\geq 0, \quad y = kx \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \frac{b^2 - a^2}{4} \left( \operatorname{arctg} k + \frac{k}{1 + k^2} \right)$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad 1; \quad \frac{3}{2}; \quad 2; \quad 3$$

$$\rightarrow b = a + 1; \quad a + 2; \quad a + 3$$

$$\rightarrow a = 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5$$

265.

- 1) Найти площадь меньшей из частей, на которые делит правую половину линии

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

прямая  $y = kx$ .

$$\checkmark \quad \frac{ab}{4} \frac{(1-k)^2}{1+k^2}$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$$

$$\rightarrow b = a-1; a-2; a-3$$

$$\rightarrow a = 4; 5; 6; 7$$

**266.** Найти центр масс фигуры, ограниченной линиями

$$1) \quad \begin{aligned} y &= Bx^2 - 2aBx + Ba^2 + A, \\ y &= B(d+c)x - B(d+c)a - Bdc + A. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \left( a + \frac{d+c}{2}; A + \frac{B}{5} (2d^2 + dc + 2c^2) \right)$$

$$\rightarrow a = -1; 0; 1$$

$$\rightarrow A = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow B = -5; -2; -1; 1; 2; 5$$

$$\rightarrow c, \quad d =$$

- $-2, -1;$
- $-2, 0;$
- $-2, 1;$
- $-1, 0;$
- $-1, 2;$
- $0, 1;$
- $0, 2;$
- $1, 2$

267. Найти тройной интеграл.

$$1) \iiint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ e \leq z \leq f}} (k(m+1)y^m + l(n+1)(p+1)x^n z^p) dx dy dz$$

$$\checkmark \quad k(b-a)(f-e)(d^{m+1} - c^{m+1}) + l(d-c)(b^{n+1} - a^{n+1})(f^{p+1} - e^{p+1})$$

$$\rightarrow b = a + 1; \quad a + 2$$

$$\rightarrow a = -1; \quad 0$$

$$\rightarrow d = c + 1; \quad c + 2$$

$$\rightarrow c = -1; \quad 0$$

$$\rightarrow f = e + 1; \quad e + 2$$

$$\rightarrow e = -1; \quad 0$$

$$\rightarrow k = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4$$

$$\rightarrow l = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4$$

$$\rightarrow n = 1; \quad 2$$

$$\rightarrow m = 1; \quad 2$$

$$\rightarrow p = 1; \quad 2$$

**268.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$1) \quad \begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 &\leq 2az, \\ x^2 + y^2 &\leq kz^2 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \frac{2ka\pi}{3(1+k)}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3$$

$$2) \quad \begin{aligned} z &= a - x^2 - y^2, \\ z &= 2b\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \left( as^2 - \frac{s^4}{2} - \frac{4bs^3}{3} \right) \pi$$

$$\rightarrow a = s(s + 2b)$$

$$\rightarrow s = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3; 4$$

**269.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$1) \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a(x^2 + y^2 - z^2)$$

$$\checkmark \quad \frac{\pi^2}{8} \sqrt{2a^3}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$



**270.** Вычислить криволинейный интеграл первого рода по отрезку прямой от точки  $A$  до точки  $B$ :

$$1) \int_{AB} (I) dl, \quad A(A_1, A_2, A_3), \quad B(A_1 + a_1, A_2 + a_2, A_3 + a_3).$$

$$\checkmark \quad d \left( l_0 + \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{3} \right)$$

$$\rightarrow I = k_{11}x^2 + k_{22}y^2 + k_{33}z^2 + k_{12}xy + k_{13}xz + k_{23}yz + k_1x + k_2y + k_3z + k$$

$$\rightarrow l_0 = k_{11}A_1^2 + k_{22}A_2^2 + k_{33}A_3^2 + k_{12}A_1A_2 + k_{13}A_1A_3 + k_{23}A_2A_3 + k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k$$

$$\rightarrow l_1 = l_{11} + l_{12} + l_{13}$$

$$\rightarrow l_{11} = 2k_{11}a_1A_1 + 2k_{22}a_2A_2 + 2k_{33}a_3A_3$$

$$\rightarrow l_{12} = k_{12}(A_1a_2 + A_2a_1) + k_{13}(A_1a_3 + A_3a_1) + k_{23}(A_2a_3 + A_3a_2)$$

$$\rightarrow l_{13} = k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$$

$$\rightarrow l_2 = k_{11}a_1^2 + k_{22}a_2^2 + k_{33}a_3^2 + k_{12}a_1a_2 + k_{13}a_1a_3 + k_{23}a_2a_3$$

$$\rightarrow A_1 = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow A_2 = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow A_3 = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\rightarrow a_1, \quad a_2, \quad a_3 =$$

$$\bullet \quad s_1n_1, \quad s_3n_3, \quad s_2n_2;$$

$$\bullet \quad s_2n_2, \quad s_1n_1, \quad s_3n_3;$$

$$\bullet \quad s_2n_2, \quad s_3n_3, \quad s_1n_1$$

$$\rightarrow n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad d =$$

$$\bullet \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 3;$$

$$\bullet \quad 2, \quad 4, \quad 4, \quad 6;$$

$$\bullet \quad 3, \quad 6, \quad 6, \quad 9;$$

$$\bullet \quad 0, \quad 3, \quad 4, \quad 5;$$

$$\bullet \quad 0, \quad 6, \quad 8, \quad 10;$$

$$\bullet \quad 2, \quad 3, \quad 6, \quad 7;$$

$$\bullet \quad 1, \quad 4, \quad 8, \quad 9;$$

$$\bullet \quad 7, \quad 4, \quad 4, \quad 9$$

$$\rightarrow s_1 = -1; 1$$

$$\rightarrow s_2 = -1; 1$$

$$\rightarrow s_3 = -1; 1$$

$$\rightarrow k_{11}, \quad k_{22}, \quad k_{33} =$$

$$\bullet \quad 1, \quad 0, \quad 0;$$

$$\bullet \quad 0, \quad 1, \quad 0;$$

$$\bullet \quad 0, \quad 0, \quad 1$$

- $k_{12}, \quad k_{13}, \quad k_{23} =$ 
  - $K_1, \quad 0, \quad 0;$
  - $0, \quad K_1, \quad 0;$
  - $0, \quad 0, \quad K_1$
- $K_1 = -2; -1; 1; 2$
- $k_1, \quad k_2, \quad k_3 =$ 
  - $K_2, \quad 0, \quad 0;$
  - $0, \quad K_2, \quad 0;$
  - $0, \quad 0, \quad K_2$
- $K_2 = -3; -2; -1; 1; 2; 3$
- $k = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

271. Доказать, что интеграл не зависит от пути интегрирования, и вычислить его:

$$1) \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} U_x dx + U_y dy + U_z dz$$

$$\checkmark U_{1B} + U_{2B} + U_{3B} + U_{4B} - U_{1A} - U_{2A} - U_{3A} - U_{4A}$$

$$\rightarrow U_x = 3a_{111}x^2 + a_{123}yz + 2a_{112}xy + 2a_{113}xz + a_{122}y^2 + a_{133}z^2 + 2a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1$$

$$\rightarrow U_y = 3a_{222}y^2 + a_{123}xz + 2a_{122}xy + 2a_{223}yz + a_{112}x^2 + a_{233}z^2 + 2a_{22}y + a_{12}x + a_{23}z + a_2$$

$$\rightarrow U_z = 3a_{333}z^2 + a_{123}xy + 2a_{133}xz + 2a_{233}yz + a_{113}x^2 + a_{223}y^2 + 2a_{33}z + a_{13}x + a_{23}y + a_3$$

$$\rightarrow U_{1A} = a_{111}x_1^3 + a_{222}y_1^3 + a_{333}z_1^3 + a_{123}x_1y_1z_1$$

$$\rightarrow U_{1B} = a_{111}x_2^3 + a_{222}y_2^3 + a_{333}z_2^3 + a_{123}x_2y_2z_2$$

$$\rightarrow U_{2A} = a_{112}x_1^2y_1 + a_{113}x_1^2z_1 + a_{122}x_1y_1^2 + a_{223}y_1^2z_1 + a_{133}x_1z_1^2 + a_{233}y_1z_1^2$$

$$\rightarrow U_{2B} = a_{112}x_2^2y_2 + a_{113}x_2^2z_2 + a_{122}x_2y_2^2 + a_{223}y_2^2z_2 + a_{133}x_2z_2^2 + a_{233}y_2z_2^2$$

$$\rightarrow U_{3A} = a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + a_{12}x_1y_1 + a_{13}x_1z_1 + a_{23}y_1z_1$$

$$\rightarrow U_{3B} = a_{11}x_2^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}z_2^2 + a_{12}x_2y_2 + a_{13}x_2z_2 + a_{23}y_2z_2$$

$$\rightarrow U_{4A} = a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1$$

$$\rightarrow U_{4B} = a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2$$

$$\rightarrow a_{111}, \quad a_{222}, \quad a_{333}, \quad a_{123} =$$

$$\bullet 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1$$

$$\rightarrow a_{112}, \quad a_{113}, \quad a_{122}, \quad a_{223}, \quad a_{133}, \quad a_{233} =$$

$$\bullet k_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad k_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad 0, \quad k_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad 0, \quad 0, \quad k_1, \quad 0, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad k_1, \quad 0;$$

$$\bullet 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad k_1$$

$$\rightarrow k_1 = -2; -1; 1; 2$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a_{11}, \quad a_{22}, \quad a_{33}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \quad a_{23} = \\
&\quad \bullet k_2, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0; \\
&\quad \bullet 0, \quad k_2, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0; \\
&\quad \bullet 0, \quad 0, \quad k_2, \quad 0, \quad 0, \quad 0; \\
&\quad \bullet 0, \quad 0, \quad 0, \quad k_2, \quad 0, \quad 0; \\
&\quad \bullet 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad k_2, \quad 0; \\
&\quad \bullet 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad k_2 \\
&\rightarrow k_2 = -3; -2; -1; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow a_1, \quad a_2, \quad a_3 = \\
&\quad \bullet k_3, \quad 0, \quad 0; \\
&\quad \bullet 0, \quad k_3, \quad 0; \\
&\quad \bullet 0, \quad 0, \quad k_3 \\
&\rightarrow k_3 = -5; -4-3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5 \\
&\rightarrow x_1 = s_1 A_1 \\
&\rightarrow x_2 = s_1(A_1 - l_1) \\
&\rightarrow y_1 = s_2 A_2 \\
&\rightarrow y_2 = s_2(A_2 - l_2) \\
&\rightarrow z_1 = s_3 A_3 \\
&\rightarrow z_2 = s_3(A_3 - l_3) \\
&\rightarrow A_1 = 0; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow A_2 = 0; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow A_3 = 0; 1; 2; 3 \\
&\rightarrow l_1 = 1; 2; 3 \\
&\rightarrow l_2 = 1; 2; 3 \\
&\rightarrow l_3 = 1; 2; 3 \\
&\rightarrow s_1 = -1; 1 \\
&\rightarrow s_2 = -1; 1 \\
&\rightarrow s_3 = -1; 1
\end{aligned}$$

**272.** Найти поток векторного поля  $\vec{F}$  через (незамкнутую) часть цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$ , расположенную между плоскостью  $z = 0$  и данной плоскостью, в направлении внешней нормали:

1)  $\vec{F}(a_1x + b_1y + c_1z + d_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2, a_3x + b_3y + c_3z + d_3),$   
 $Ax + By + z = AB$

✓  $(AB(a_1 + b_2 - Ac_1 - Bc_2) - Ad_1 - Bd_2)\pi$

→  $A = 2; 3; 4$

→  $B = 2; 3; 5$

→  $a_1 = -2; -1; 0; 1; 2$

→  $b_1 = -7; -4; -3; 2; 5; 8$

→  $c_1 = -1; 0; 1$

→  $d_1 = -8; -5; -2; 0; 1; 3; 4; 7$

→  $a_2 = -8; -6; -1; 0; 1; 3; 7$

→  $b_2 = -2; -1; 0; 1; 2$

→  $c_2 = -1; 0; 1$

→  $d_2 = -7; -4; -3; -1; 0; 2; 5; 6; 9$

→  $a_3 = -5; -3; -2; 0; 1; 3; 4$

→  $b_3 = -6; -4; -1; 0; 2; 5; 7$

→  $c_3 = -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$

→  $d_3 = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

## Часть XVI

### Ряды

**273.** Исследовать сходимость ряда и найти его сумму.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{(ab)^n}$$

$$\checkmark \frac{a - b}{(b - 1)(a - 1)}$$

$$\rightarrow a = 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow b = 2; 4; 6; 8$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{(ab)^n}$$

$$\checkmark \frac{a + b - 2}{(b - 1)(a - 1)}$$

$$\rightarrow a = 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow b = 2; 4; 6; 8$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(kn + a)(kn + k + a)}$$

$$\checkmark \frac{1}{k(k + a)}$$

$$\rightarrow a = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

274. Исследовать сходимость ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^k + b}{cn^l + d}$$

$$\checkmark \frac{1}{n^{l-k}} \text{ (Cp.)}$$

$$\rightarrow a = 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow c = 2; 4; 8$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow d = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2$$

$$\rightarrow l = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^k n}$$

$$\checkmark \text{ Расходится}$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^m}$$

$$\checkmark \text{ Сходится}$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^k n}{\sqrt[m]{n}}$$

$$\checkmark \text{ Расходится}$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b}{c^n + d}$$

$$\checkmark \left(\frac{a}{c}\right)^n \text{ (Cp.)}$$

$$\rightarrow a = 3; 5; 7$$

$$\rightarrow c = 2; 4; 6; 8; 9$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow d = 1; 2; 3; 4; 5$$



275. Исследовать сходимость ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^k + b}{n!}$$

$$\checkmark D = 0$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^k + b}{c^n}$$

$$\checkmark D = \frac{1}{c}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{an^k + b}$$

$$\checkmark D = c$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k a^n}{n!}$$

$$\checkmark D = 0$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^k n!}$$

$$\checkmark D = 0$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k n!}{a^n}$$

$$\checkmark \quad D = \infty$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^k a^n}$$

$$\checkmark \quad D = \infty$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{an^k + 1}{cn^k + d} \right)^n$$

$$\checkmark \quad K = \frac{a}{c}$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow c = a - 2; a - 1; a + 1; a + 2; a + 3; a + 4$$

$$\rightarrow a = 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow d = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

276. Исследовать сходимость ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{kn}}{a^n (kn)!}$$

$$\checkmark \quad D = \frac{e^k}{ak^k}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{kn} a^n}{(kn)!}$$

$$\checkmark \quad D = \frac{ae^k}{k^k}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (kn)!}{n^{kn}}$$

$$\checkmark \quad D = \frac{ak^k}{e^k}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)!}{n^{kn} a^n}$$

$$\checkmark \quad D = \frac{k^k}{ae^k}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$\rightarrow k = 1$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn+1)!}$$

$$\checkmark \quad D = \frac{1}{k^k}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{n!}}{a^n}$$

$$\checkmark \quad D = \infty$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[k]{n!}}$$

$$\checkmark \quad D = 0$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{an + b + ka}{an + b} \right)^{n^2}$$

$$\checkmark \quad K = e^k$$

$$\rightarrow k = -1; -2; -3; -4; -5; 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow a = 1; 3; 5; 7$$

$$\rightarrow b = 2; 4; 8$$

277. Исследовать сходимость ряда.

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^k n}$$

✓ Сходится

→  $k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[k]{\ln n}}$$

✓ Расходится

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^k}$$

✓ Сходится

→  $k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[k]{n}}$$

✓ Расходится

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

278. Исследовать знакопеременные ряды на абсолютную и условную сходимость

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(bn+c)a^n}$$

✓ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✗ Расходится

→  $a = 2; 3; 4; 5$

→  $b = 0; 1; 2$

→  $c = 1$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{an^k + b}$$

✓ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✗ Расходится

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $k = 2; 3; 4; 5$

→  $b = 0; 1; 2; 3; 4; 5$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{an^k + b}}$$

✓ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✗ Расходится

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $k = 3; 4; 5; 6$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+k)!}$$

✓ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✗ Расходится

→  $k = 0; 1; 2; 3; 4; 5$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^k n}$$

✓ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✗ Расходится

→  $k = 2; 3; 4; 5; 6; 7$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

✓ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✗ Расходится

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{an + b}$$

✗ Сходится абсолютно

✓ Сходится условно

✗ Расходится

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = 0; 1; 2; 3; 4; 5$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[k+l]{an^k + b}}$$

✗ Сходится абсолютно

✓ Сходится условно

✗ Расходится

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $k = 2; 3; 4; 5$

→  $l = 1; 2; 3; 4$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^k n}$$

✗ Сходится абсолютно

✓ Сходится условно

✗ Расходится

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{an^k + b}{cn^k + 1}$$

✗ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✓ Расходится

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $c = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = 0; 1; 2; 3; 4; 5$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n^a}$$

✗ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✓ Расходится

→  $a = 2; 3; 4; 5$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

✗ Сходится абсолютно

✗ Сходится условно

✓ Расходится

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5$



279. Найти область сходимости функционального ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{(kn+m)(x+a)^n}$$

$$\checkmark \quad (-\infty; -a-1] \cup (-a+1; +\infty]$$

$$\rightarrow l = 1; 3; 5$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 4$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \log_a^n x$$

$$\checkmark \quad \left(\frac{1}{a}; a\right)$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_a^n x}{n}$$

$$\checkmark \quad \left[\frac{1}{a}; a\right)$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} F$$

$$\checkmark \quad (-\infty; +\infty)$$

$$\rightarrow F = \sin X; \operatorname{tg} X; \arcsin X; \operatorname{arctg} X$$

$$\rightarrow X = \frac{b^n x}{(b+a)^n}$$

$$\rightarrow b = 2; 4; 5$$

$$\rightarrow a = 1; 3$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} x^n F$$

$$\checkmark \quad (-b; b)$$

$$\rightarrow F = \sin X; \operatorname{tg} X; \arcsin X; \operatorname{arctg} X$$

$$\rightarrow X = \frac{x}{b^n}$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{x \log_a^n x}$$

$$\checkmark \left(0; \frac{1}{a}\right) \cup \left(a; +\infty\right)$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 10$$

$$\rightarrow l = 1; 2; 3; 4; 5$$

**280.** Найти радиус сходимости и область сходимости степенного ряда.

$$\Rightarrow x_0 = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{a^n}$$

$$\checkmark R = a; (x_0 - a; x_0 + a)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{(an + b)c^n}$$

$$\checkmark R = c; [x_0 - c; x_0 + c]$$

$$\rightarrow b = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an + b}{c^n} (x - x_0)^n$$

$$\checkmark R = c; (x_0 - c; x_0 + c)$$

$$\rightarrow b = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{an^k + bn}$$

$$\checkmark R = 1; [x_0 - 1; x_0 + 1]$$

$$\rightarrow b = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{(an^k + b)(c + 1)^n} (x - x_0)^n$$

$$\checkmark R = \frac{c+1}{c}; \left[ x_0 - \frac{c+1}{c}; x_0 + \frac{c+1}{c} \right]$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c+1)^n}{(an+b)c^n} (x - x_0)^n$$

$$\checkmark R = \frac{c}{c+1}; \left[ x_0 - \frac{c}{c+1}; x_0 + \frac{c}{c+1} \right)$$

$$\rightarrow b = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow c = 2; 3; 4; 5$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+a)!}$$

$$\checkmark \quad R = \infty; \quad (-\infty; +\infty)$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^k + b}{n!} (x-x_0)^n$$

$$\checkmark \quad R = \infty; \quad (-\infty; +\infty)$$

$$\rightarrow b = 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5$$

$$\rightarrow k = 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} (x-x_0)^n$$

$$\checkmark \quad R = \infty; \quad (-\infty; +\infty)$$

281. Найти область сходимости степенного ряда.

$$\Rightarrow a = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (x-a)^n F$$

$$\checkmark (a-b; a+b)$$

$$\rightarrow F = \sin X; \operatorname{tg} X; \arcsin X; \operatorname{arctg} X$$

$$\rightarrow X = \frac{\pi}{b^n}$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (x-a)^n F$$

$$\checkmark [a-1; a+1]$$

$$\rightarrow F = \sin X; \operatorname{tg} X; \arcsin X; \operatorname{arctg} X$$

$$\rightarrow X = \frac{\pi}{\sqrt[m]{n^{m+1}}}$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} F(x-a)^n$$

$$\checkmark (a-1; a+1]$$

$$\rightarrow F = \frac{(-1)^n}{(n+m) \ln(n+1)}; (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+m}}{n+1}; \frac{(-1)^n}{\sqrt[m]{n+1}}$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{b^n \ln(n+1)}$$

$$\checkmark [a-b; a+b)$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{(n+1) \ln(n+1)} (x-a)^n$$

$$\checkmark \left[ a - \frac{1}{b}; a + \frac{1}{b} \right)$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

**282.** Вычислить  $a$  с точностью  $\Delta$ .

1)  $a = \sqrt[3]{e}, \Delta = 10^{-5}$

✓ 1,39561

2)  $a = \sqrt{e}, \Delta = 10^{-4}$

✓ 1,6487

3)  $a = e, \Delta = 10^{-4}$

✓ 2,7183

4)  $a = e^2, \Delta = 10^{-1}$

✓ 7,4

5)  $a = \sqrt[3]{e^2}, \Delta = 10^{-3}$

✓ 1,948

6)  $a = \sqrt[3]{e^4}, \Delta = 10^{-2}$

✓ 3,79

7)  $a = \sqrt[3]{e^5}, \Delta = 10^{-1}$

✓ 5,3

8)  $a = \sqrt{e^3}, \Delta = 10^{-1}$

✓ 4,5

9)  $a = \sin 1, \Delta = 10^{-6}$

✓ 0,841471

10)  $a = \sin 2, \Delta = 10^{-4}$

✓ 0,9093

11)  $a = \sin \frac{1}{2}, \Delta = 10^{-8}$

✓ 0,47942554

12)  $a = \sin \frac{3}{2}, \Delta = 10^{-5}$

✓ 0,99749

13)  $a = \cos 1, \Delta = 10^{-6}$

✓ 0,540302

14)  $a = \cos \frac{1}{2}, \Delta = 10^{-9}$

✓ 0,877582562

15)  $a = \cos \frac{3}{2}, \Delta = 10^{-4}$

✓ 0,0707

## Часть XVII

### Дифференциальные уравнения



283. Проинтегрировать уравнение.

$$1) \quad dx + fg \, dy = 0$$

$$\checkmark \quad F + G = C$$

$$\rightarrow f, \quad F =$$

- $\sqrt{b - ax^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{ax}{\sqrt{ab}};$
- $b + ax^2, \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{ax}{\sqrt{ab}};$
- $ax^2 - b, \quad \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax} + \sqrt{b}} \right|;$
- $\sqrt{ax^2 + b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( \sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + b} \right)$

$$\rightarrow g, \quad G =$$

- $\frac{1}{cy + d}, \quad \frac{1}{c} \ln |cy + d|;$
- $\cos(cy + d), \quad \frac{1}{c} \sin(cy + d);$
- $\sin(cy + d), \quad -\frac{1}{c} \cos(cy + d);$
- $e^{cy+d}, \quad \frac{1}{c} e^{cy+d}$

$$\rightarrow a = b - 1; \quad b + 1; \quad b + 2; \quad b + 3; \quad b + 4$$

$$\rightarrow b = 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5$$

$$\rightarrow c = 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5; \quad 6; \quad 7$$

$$\rightarrow d = -3; \quad -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5; \quad 6; \quad 7$$

284. Решить уравнение.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) y' + ay = e^{bx}$$

$$\checkmark y = \frac{1}{a+b} e^{bx} + C e^{-ax}$$

$$\rightarrow b = -a-2; -a-1; a+1; a+2$$

$$2) y' + ay = bx + d$$

$$\checkmark y = \frac{bx+d}{a} - \frac{b}{a^2} + C e^{-ax}$$

$$\rightarrow d = b-1; b-2; b; b+1; b+2$$

$$\rightarrow b = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$3) y' + ay = bx^2 + d$$

$$\checkmark y = \frac{bx^2+d}{a} - \frac{2bx}{a^2} + \frac{2b}{a^3} + C e^{-ax}$$

$$\rightarrow d = b-1; b-2; b; b+1; b+2$$

$$\rightarrow b = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$4) y' + ay = \frac{e^{-ax}}{b^2 + x^2}$$

$$\checkmark y = e^{-ax} \left( \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} + C \right)$$

$$\rightarrow b = -a-2; -a-1; a+1; a+2$$

$$5) y' + ay = \frac{e^{-ax}}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$\checkmark y = e^{-ax} \left( \arcsin \frac{x}{b} + C \right)$$

$$\rightarrow b = -a-2; -a-1; a+1; a+2$$

$$6) y' + x^b y = ax^b$$

$$\checkmark y = a + C e^{-\frac{x^{b+1}}{b+1}}$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6$$

$$7) xy' + y = e^{ax} + x^b$$

$$\checkmark y = \frac{e^{ax}}{ax} + \frac{x^b}{b+1} + \frac{C}{x}$$

$$\rightarrow b = -5; -2; 1; 2; 3$$

$$8) \quad y' + \frac{2kxy}{x^2 + a^2} = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{k+1}}$$

$$\checkmark \quad y = \frac{1}{a(x^2 + a^2)^k} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{C}{(x^2 + a^2)^k}$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

285. Решить уравнение.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \quad y' = \frac{ax + (b+1)y}{bx}$$

$$\checkmark \quad y = Cx^{\frac{1+b}{b}} - ax$$

$$\rightarrow b = -5; -2; 1; 2; 3$$

$$2) \quad y' = \frac{a^2x^2 + byx + y^2}{bx^2}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{y}{ax} = \frac{1}{b} \ln |x| + C$$

$$\rightarrow b = -5; -2; 1; 2; 3$$

286. Решить уравнение.

1)  $y = xy' - xa^{k\frac{y}{x}}$

✓  $\frac{1}{k} \frac{a^{-k\frac{y}{x}}}{\ln a} = \ln|x| + C$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; e$

→  $k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$

2)  $axy' = ay + bx^F$

✓  $G = \frac{b}{a} \ln|x| + H$

→  $F, G, H =$

•  $\sin^2 k\frac{y}{x}, -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} k\frac{y}{x}, C;$

•  $\cos^2 k\frac{y}{x}, \frac{1}{k} \operatorname{tg} k\frac{y}{x}, C;$

•  $\operatorname{tg} k\frac{y}{x}, \frac{1}{k} \ln \left| \sin k\frac{y}{x} \right|, \ln|C|;$

•  $\operatorname{ctg} k\frac{y}{x}, -\frac{1}{k} \ln \left| \cos k\frac{y}{x} \right|, \ln|C|;$

•  $\operatorname{tg}^2 k\frac{y}{x}, -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} k\frac{y}{x} - \frac{y}{x}, C;$

•  $\operatorname{ctg}^2 k\frac{y}{x}, \frac{1}{k} \operatorname{tg} k\frac{y}{x} - \frac{y}{x}, C$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5$

→  $k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$

3)  $yy' - ay + a^2x = 0$

✓  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y^2}{x^2} + a\frac{y}{x} + a^2 \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y - ax}{a\sqrt{3}x} = \ln \left| \frac{C}{x} \right|$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$

4)  $y'F - \frac{y}{x}F + b = 0$

✓  $G = -b \ln|x| + C$

→  $F$ ,  $G =$

- $\cos k \frac{y}{x}, \quad \frac{1}{k} \sin k \frac{y}{x};$
- $\sin k \frac{y}{x}, \quad -\frac{1}{k} \cos k \frac{y}{x};$
- $\operatorname{tg} k \frac{y}{x}, \quad -\frac{1}{k} \ln \left| \cos k \frac{y}{x} \right|;$
- $\operatorname{ctg} k \frac{y}{x}, \quad \frac{1}{k} \ln \left| \sin k \frac{y}{x} \right|;$
- $e^{k \frac{y}{x}}, \quad \frac{1}{k} e^{k \frac{y}{x}};$
- $(b+1)^{k \frac{y}{x}}, \quad \frac{1}{k} \frac{(b+1)^{k \frac{y}{x}}}{\ln(b+1)};$
- $\sin^2 \frac{k y}{2 x}, \quad \frac{1}{2} \frac{y}{x} - \frac{1}{2k} \sin k \frac{y}{x}$

→  $k = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$

287. Решить уравнение.

$$1) \quad y' - k \frac{y}{x} = (3 - k)x^2 + (2 - k)x + (1 - k)$$

$$\checkmark \quad y = x^3 + x^2 + x + Cx^k$$

$$\rightarrow k = 4; 5; 6; 7$$

$$2) \quad y' + k \frac{y}{x} = \frac{3}{x^{k-2}} + \frac{2}{x^{k-1}}$$

$$\checkmark \quad y = \frac{1}{x^{k-3}} + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{C}{x^k}$$

$$\rightarrow k = 4; 5; 6; 7$$

$$3) \quad y' + k \frac{y}{x} = (k + 1)^2 \ln x$$

$$\checkmark \quad y = (k + 1)x \ln x - x + \frac{(k + 1)C}{x^k}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

$$4) \quad y' + k \frac{y}{x} = \frac{a^2 e^{ax+b}}{x^{k-1}}$$

$$\checkmark \quad y = (axe^{ax+b} - e^{ax+b} + a^2 C) x^{-k}$$

$$\rightarrow b = a - 2; a - 1; a; a + 1; a + 2$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

$$5) \quad y' - k \frac{y}{x} = a^2 x^{k+1} \cos(ax + b)$$

$$\checkmark \quad y = ax^{k+1} \sin(ax + b) + x^k \cos(ax + b) + a^2 C x^k$$

$$\rightarrow b = a - 2; a - 1; a; a + 1; a + 2$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

$$6) \quad y' + k \frac{y}{x} = (k + 1)e^{x^{k+1}}$$

$$\checkmark \quad y = \frac{e^{x^{k+1}} + C}{x^k}$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$7) \quad y' - k \frac{y}{x} = (a + 1)x^{k-1} \ln^a x$$

$$\checkmark \quad y = (\ln^{a+1} x + (a + 1)C) x^k$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

288. Найти общее решение уравнения.

1)  $y' + py = fe^P$

✓  $y(x) = (F + C)e^{-P}$

→  $f, \quad F =$

- $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \arcsin \frac{x}{a};$
- $\frac{1}{a^2 + x^2}, \quad \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a};$
- $\frac{1}{\cos^2(x + a)}, \quad \operatorname{tg}(x + a);$
- $\frac{1}{\sin^2(x + a)}, \quad -\operatorname{ctg}(x + a)$

→  $p, \quad P =$

- $\cos(x + b), \quad \sin(x + b);$
- $\sin(x + b), \quad -\cos(x + b);$
- $3(x + b)^2, \quad (x + b)^3;$
- $4(x + b)^3, \quad (x + b)^4$

→  $a = 1; 2; 3; 4$

→  $b = -3; -2; -1; 0; 5; 6$



289. Найти общее решение уравнения.

1)  $L = R$

✓  $y = F$

→  $L, \quad R, \quad F =$

- $y' + ay, \quad e^{bx}, \quad \frac{e^{bx}}{a+b} + Ce^{-ax};$

- $y' + x^b y, \quad ax^b, \quad a + Ce^{-\frac{x^{b+1}}{b+1}};$

- $xy' + y, \quad e^{ax} + x^b, \quad \frac{e^{ax}}{ax} + \frac{x^b}{b+1} + \frac{C}{x}$

→  $a = -6; -5; -4; -1; 1; 3; 4$

→  $b = -5; -2; 1; 2; 3$

**290.** Найти общее и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1)  $L = 0, y(c) = C$

✓  $y = F$

→  $L, F, c =$

•  $x^a y' + x^{a-1} y + b, \quad \frac{b}{(a-2)x^{a-1}} + \frac{C - \frac{b}{a-2}}{x}, \quad 1;$

•  $y' + ay \operatorname{tg} ax - \frac{b}{\cos ax}, \quad \frac{b}{a} \sin ax - C \cos ax, \quad \frac{\pi}{a};$

•  $y' - ay \operatorname{ctg} ax - \frac{b}{\sin ax}, \quad \frac{b}{a} \cos ax + C \sin ax, \quad \frac{\pi}{2a}$

→  $a = 3; 4; 5$

→  $b = -3; -2; 2; 3$

→  $C = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

291. Найти общее решение уравнения.

1)  $y'' + ay' + by = 0$

✓  $F$

→  $a, \quad b, \quad F =$

•  $-k_1 - k_2, \quad k_1 k_2, \quad C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

→  $k_1 = k_2 - 2; \quad k_2 - 1; \quad k_2 + 1; \quad k_2 + 2$

→  $k_2 = -5; \quad -4; \quad -3; \quad -2; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5; \quad 6$

**292.** Найти общее решение уравнения.

1)  $y'' + ay' + by = 0$

✓  $F$

→  $a, \quad b, \quad F =$

•  $-2k_1, \quad k_1^2 + k_2^2, \quad e^{k_1x} (C_1 \sin k_2x + C_2 \cos k_2x)$

→  $k_1 = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

→  $k_2 = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

**293.** Найти общее решение уравнения.

1)  $y'' + ay' + by = 0$

✓  $F$

→  $a, \quad b, \quad F =$

•  $-2k, \quad k^2, \quad C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

→  $k = -8 - 7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

**294.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$1) \quad y'' + a^2 y = k(a^2 + m^2)e^{mx}$$

$$\checkmark \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + ke^{mx}$$

$$\rightarrow m = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$2) \quad y'' + a^2 y = a^2 kx^2 + a^2 x + 2k$$

$$\checkmark \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + kx^2 + x$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$3) \quad y'' + a^2 y = (k(a^2 + m^2)x + 2km)e^{mx}$$

$$\checkmark \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + kxe^{mx}$$

$$\rightarrow m = -3; -2; -1; 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

**295.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$1) \quad y'' - a^2 y = k(m^2 - a^2)e^{mx}$$

$$\checkmark \quad y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + k e^{mx}$$

$$\rightarrow m = a + 1; a + 2$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$2) \quad y'' - a^2 y = 4kae^{ax}$$

$$\checkmark \quad y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + 2ke^{ax}$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

$$3) \quad y'' - a^2 y = a^2 kx^2 + a^2 x - 2k$$

$$\checkmark \quad y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} - kx^2 - x$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

**296.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$1) \quad y'' + 2ay' + a^2y = \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{-ax}$$

$$\checkmark \quad y = C_1 e^{-ax} + C_2 x e^{-ax} + \frac{x^3}{6} e^{-ax} - x e^{-ax} + x e^{-ax} \ln |x|$$

$$2) \quad y'' + 2ay' + a^2y = x e^{ax} + \frac{1}{x e^{ax}}$$

$$\checkmark \quad y = C_1 e^{-ax} + C_2 x e^{-ax} + \frac{x}{4a^2} e^{ax} - \frac{1}{4a^3} e^{ax} - x e^{-ax} + x e^{-ax} \ln |x|$$

$$3) \quad y'' + 2ay' + a^2y = \frac{e^{-ax}}{x}$$

$$\checkmark \quad y = (-x + C_1) e^{-ax} + (\ln |x| + C_2) x e^{-ax}$$

$$4) \quad y'' + 2ay' + a^2y = \frac{e^{-ax}}{x^2}$$

$$\checkmark \quad y = (-\ln |x| + C_1) e^{-ax} + \left(-\frac{1}{x} + C_2\right) x e^{-ax}$$

$$5) \quad y'' + 2ay' + a^2y = \frac{e^{-ax}}{x^k}$$

$$\checkmark \quad y = \left(\frac{1}{(k-2)x^{k-2}} + C_1\right) e^{-ax} + \left(\frac{-1}{(k-1)x^{k-1}} + C_2\right) x e^{-ax}$$

$$\rightarrow k = 3; 4; 5$$

$$6) \quad y'' + 2ay' + a^2y = \frac{e^{-ax}}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$\checkmark \quad y = \left(\sqrt{b^2 - x^2} + C_1\right) e^{-ax} + \left(\arcsin \frac{x}{b} + C_2\right) x e^{-ax}$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$7) \quad y'' + 2ay' + a^2y = \frac{e^{-ax}}{b^2 + x^2}$$

$$\checkmark \quad y = \left(-\frac{1}{2} \ln |b^2 + x^2| + C_1\right) e^{-ax} + \left(\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} + C_2\right) x e^{-ax}$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$8) \quad y'' + 2ay' + a^2y = e^{-ax} \ln |x|$$

$$\checkmark \quad y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} \ln |x| - \frac{3}{4} x^2\right) e^{-ax}$$



$$9) \quad y'' + 2ay' + a^2y = \sqrt{x^k}e^{-ax}$$

$$\checkmark \quad y = \left( -\frac{2}{k+4}\sqrt{x^{k+4}} + C_1 \right) e^{-ax} + \left( \frac{2}{k+2}\sqrt{x^{k+2}} + C_2 \right) x e^{-ax}$$

$$\rightarrow k = 1; 3; 5$$

$$10) \quad y'' + 2ay' + a^2y = \frac{e^{-ax}}{b^2 - x^2}$$

$$\checkmark \quad y = \left( \frac{1}{2} \ln |b^2 - x^2| + C_1 \right) e^{-ax} + \left( \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{x+b}{x-b} \right| + C_2 \right) x e^{-ax}$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

297. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) \quad y'' + a^2 y = \frac{1}{\sin ax}$$

$$\checkmark \quad y = \left( \frac{1}{a^2} \ln |\sin ax| + C_1 \right) \cos ax + \left( -\frac{1}{a} x + C_2 \right) \sin ax$$

$$2) \quad y'' + a^2 y = \operatorname{ctg} ax$$

$$\checkmark \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2} \sin ax \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right|$$

$$3) \quad y'' + a^2 y = \frac{1}{\cos ax}$$

$$\checkmark \quad y = \left( \frac{1}{a^2} \ln |\cos ax| + C_1 \right) \cos ax + \left( \frac{1}{a} x + C_2 \right) \sin ax$$

$$4) \quad y'' + a^2 y = \operatorname{tg} ax$$

$$\checkmark \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{1}{a^2} \cos ax \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$5) \quad y'' + a^2 y = \operatorname{tg}^2 ax$$

$$\checkmark \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \sin ax \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$6) \quad y'' + a^2 y = -\operatorname{ctg}^2 ax$$

$$\checkmark \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \sin ax \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right|$$

$$7) \quad y'' + a^2 y = \frac{1}{\sin^2 ax}$$

$$\checkmark \quad y = \left( -\frac{1}{a^2 \sin ax} + C_1 \right) \cos ax + \left( -\frac{1}{a^2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right| + C_2 \right) \sin ax$$

$$8) \quad y'' + a^2 y = \frac{1}{\cos^2 ax}$$

$$\checkmark \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \sin ax \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$9) \quad y'' + a^2 y = \frac{1}{\cos^3 ax}$$

$$\checkmark \quad y = \left( -\frac{1}{2a^2 \cos^2 ax} + C_1 \right) \cos ax + \left( \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} ax + C_2 \right) \sin ax$$

$$10) \quad y'' + a^2 y = \frac{2 + \cos^3 ax}{\cos^2 ax}$$

$$\checkmark \quad y = \left( -\frac{2}{a^2 \cos^2 ax} + \frac{\cos^2 ax}{2a^2} + C_1 \right) \cos ax + \left( \frac{2}{a^2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \frac{1}{2a} x + \frac{1}{4a^2} \sin 2ax + C_2 \right) \sin ax$$

$$11) \quad y'' + a^2 y = \frac{1}{\cos 2ax}$$

$$\checkmark \quad y = \left( \frac{1}{4a^2} \ln \left| \frac{4 \cos ax - 1}{4 \cos ax + 1} \right| + C_1 \right) \cos ax + \left( \frac{1}{4a^2} \ln \left| \frac{4 \cos ax + 1}{4 \cos ax - 1} \right| + C_2 \right) \sin ax$$

$$12) \quad y'' + a^2 y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2ax}}$$

$$\checkmark \quad y = \left( \frac{1}{a^2 \sqrt{2}} \ln \left| \cos ax + \sqrt{\cos^2 ax - \frac{1}{2}} \right| + C_1 \right) \cos ax + \left( \frac{1}{a^2 \sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin ax) + C_2 \right) \sin ax$$

298. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

1)  $y'' - k^2 y = e^{-kx}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = \frac{2k^2 - 1}{2k}$ .

✓  $y = e^{kx} - \frac{x}{2k} e^{-kx}$

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

2)  $y'' + k^2 y = 2k \sin kx$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2k}\right) = 1$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{2k}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

✓  $y = \sin kx - x \cos kx$

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

3)  $y'' + a^2 y = 2a^2 k e^{ax}$ ,  $y(0) = -k$ ,  $y'(0) = a$ .

✓  $y = -2k \cos ax + (1 - k) \sin ax + k e^{ax}$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6$

→  $k = -1; -2; -3; 2; 3$

4)  $y'' + a^2 y = 2a^3 x e^{ax}$ ,  $y(0) = m$ ,  $y'(0) = ma$ .

✓  $y = (m + 1) \cos ax + m \sin ax + (ax - 1) e^{ax}$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6$

→  $m = 2; 3; 4; 5; 6$

5)  $y'' + a^2 y = a^2 k x^2 + a^2 m x + 2k$ ,  $y(0) = m$ ,  $y'(0) = ka + m$ .

✓  $y = m \cos ax + k \sin ax + kx^2 + mx$

→  $a = 2; 3; 4$

→  $k = -1; -2; -3; 2; 3$

→  $m = -1; -2; -3; 1; 2; 3$

6)  $y'' + a^2 y = (a^2 - m^2)k \cos mx + (a^2 - m^2)n \sin mx$ ,  $y(0) = 2k$ ,  $y'(0) = mn + ka$ .

✓  $y = k \cos ax + k \sin ax + k \cos mx + n \sin mx$

→  $a = 2; 3; 4; 5$

→  $k = -1; -2; -3; 2; 3$

→  $n = -1; -2; -3; 1; 2; 3$

→  $m = 1; 6; 7$

7)  $y'' + 2ky' + 2k^2 y = 5k^2 \sin kx$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

✓  $y = \sin kx (e^{-kx} + 1) + 2 \cos kx (e^{-kx} - 1)$

→  $k = 1; 2; 3$

$$8) \quad y'' - 2ky' + k^2y = \sin kx, \quad y(0) = \frac{1}{2k^2}, \quad y'(0) = 1.$$

$$\checkmark \quad y = xe^{kx} + \frac{\cos kx}{2k^2}$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$9) \quad y'' - ky' = e^{kx}(2kx + k^2 + 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$\checkmark \quad y = e^{kx}(x^2 + kx - 1) + 1$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$10) \quad y'' - ay' = 2akx + a^2 - 2k, \quad y(0) = a + k, \quad y'(0) = a^2.$$

$$\checkmark \quad y = (k - 1) + (a + 1)e^{ax} - kx^2 - ax$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = -1; -2; -3; 2; 3$$

$$11) \quad y'' - ay' = ame^{ax}, \quad y(0) = m + 2, \quad y'(0) = m + 2a.$$

$$\checkmark \quad y = m + 2e^{ax} + mxe^{ax}$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow m = -4; -2; -3; 2; 3; 4$$

$$12) \quad y'' - ay' = 4a^2x^3 + a^2 - \frac{24}{a}, \quad y(0) = a + k, \quad y'(0) = ka.$$

$$\checkmark \quad y = (a - 1) + (k + 1)e^{ax} - ax^4 - 4x^3 - \frac{12}{a}x^2 - ax$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 1; -2; -3; 2; 3$$

$$13) \quad y'' - ay' = 3akx^2 + (2ma - 6k)x + (a^2 - 2m), \quad y(0) = a + m, \quad y'(0) = ma.$$

$$\checkmark \quad y = (a - 1) + (m + 1)e^{ax} - kx^3 - mx^2 - ax$$

$$\rightarrow a = 2; 4; 5; 7$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow m = 1; 3$$

299. Найти общее решение уравнения.

$$1) \quad y'' + ay' + by = cx^2 + dx + e$$

✓  $F$

$$\rightarrow c = bC$$

$$\rightarrow d = 2aC + bD$$

$$\rightarrow e = 2C + aD + bE$$

$$\rightarrow a, \quad b, \quad F =$$

$$\bullet \quad -k_1 - k_2, \quad k_1 k_2, \quad C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + Cx^2 + Dx + E;$$

$$\bullet \quad -2k_1, \quad k_1^2 + k_2^2, \quad e^{k_1 x} (C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x) + Cx^2 + Dx + E$$

$$\rightarrow k_1 = -2; -1; 1; 2$$

$$\rightarrow k_2 = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow C = -3; -1; 1; 3$$

$$\rightarrow D = -4; -2; 0; 2; 4$$

$$\rightarrow E = -2; -1; 0; 1; 2$$

300. Найти общее решение уравнения.

1)  $y'' + ay' + by = cx^2 + dx + e$

✓  $F$

→  $c, \quad d, \quad e, \quad a, \quad b, \quad F =$

•  $bC, \quad 2aC + bD, \quad 2C + aD + bE, \quad -2k, \quad k^2, \quad C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} + Cx^2 + Dx + E;$

•  $3aC, \quad 6C + 2aD, \quad 2D + aE, \quad -k, \quad 0, \quad C_1 + C_2 e^{kx} + Cx^2 + Dx + E$

→  $k = -3; -2; -1; 1; 2; 3$

→  $C = -3; -1; 1; 3$

→  $D = -4; -2; 0; 2; 4$

→  $E = -2; -1; 0; 1; 2$

301. Решить дифференциальное уравнение.

1)  $e^{-kx} dx + (a - kxe^{-ky}) dy = 0$

✓  $xe^{-ky} + ax = C$

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$

2)  $(x^{a-1} \cos ay - b) dx - x^a \sin ay dy = 0$

✓  $\frac{x^a}{a} \cos ay - bx = C$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$

3)  $(2ax + ye^{xy}) dx + (b + xe^{xy}) dy = 0$

✓  $ax^2 + e^{xy} + by = C$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$

4)  $(x^a + bx^{b-1}y + f) dx + (x^b + y^a + d) dy = 0$

✓  $x^{a+1} + (a+1)x^by + (a+1)fx + y^{a+1} + (a+1)dy = C$

→  $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6$

→  $b = 3; 4; 5; 6; 7$

→  $f = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$

→  $d = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9$

5)  $((b+1)x^b + ax^{a-1} \ln y) dx - \left( (m+1)y^m - \frac{x^a}{y} \right) dy = 0$

✓  $x^{b+1} + x^a \ln y - y^{m+1} = C$

→  $a = 3; 4; 5; 6$

→  $m = 2; 3; 4; 5$

→  $b = 2; 3; 4; 5$

6)  $(ax^{a-1}y + \sin mx) dx + (x^a - \cos ny) dy = 0$

✓  $mnx^ay - n \cos mx - m \sin ny = C$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6$



$$\rightarrow m = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow n = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$7) (f^{nx} + y^a + ky) dx + (ay^{a-1}x + kx + e^{by}) dy = 0$$

$$\checkmark \quad bf^{nx} + nby^ax \ln f + nbk yx \ln f + ne^{by} \ln f = C$$

$$\rightarrow f = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow b = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

$$\rightarrow n = 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

## 302. Составить уравнение кривой.

- 1) Записать уравнение кривой, проходящей через точку  $M(a, a^{k+1})$ , для которой угловой коэффициент касательной в любой точке в  $k$  раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту точку с началом координат.

$$\checkmark \quad y' = k \frac{y}{x}; \quad y = ax^k$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

- 2) Записать уравнение кривой, проходящей через точку  $M(a, b)$ , для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, в  $k$  раз больше абсциссы точки касания.

$$\checkmark \quad y' = \frac{y - kx}{x}; \quad y = \frac{ba^{k-1}}{x^{k-1}}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; -1; -2; -3; -4; -5; -6$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

- 3) Записать уравнение кривой, проходящей через точку  $M(0, \frac{k-1}{k})$ , если угловой коэффициент в любой её точке в  $k$  раз больше суммы координат этой точки.

$$\checkmark \quad y' = k(x + y); \quad y = e^{kx} - x - \frac{1}{k}$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

- 4) Записать уравнение кривой, проходящей через точку  $M(a, ma)$ , касательная которой в произвольной её точке отсекает на оси ординат отрезок в  $k$  раз больший квадрата ординаты точки касания.

$$\checkmark \quad y' = \frac{y - ky^2}{x}; \quad y = \frac{mx}{1 - kma + mkx}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; -4; -5$$

$$\rightarrow m = 2; 3; 4$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4; 5$$

- 5) Записать уравнение кривой, проходящей через точку  $M(a, b)$ , для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, в  $k$  раз больше ординаты точки касания.

$$\checkmark \quad y' = \frac{y - ky}{x}; \quad y = \frac{ba^{k-1}}{x^{k-1}}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; -1; -2; -3; -4; -5; -6$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

**303.** Решить дифференциальное уравнение.

1)  $(x^a - (b-1)y)dx + (x^b y^d + x)dy = 0$

✓  $\frac{x^{a-b+1}}{a-b+1} + \frac{y}{x^{b-1}} + \frac{y^{d+1}}{d+1} = C, \quad \mu(x) = \frac{1}{x^b}$

→  $a = 8; 9; 10; 11; 12; 13$

→  $b = 3; 4; 5; 6$

→  $d = 2; 3; 4; 5; 6$

2)  $\left(e^{ay} - \frac{k}{a} \sin kx\right)dx - \cos kx dy = 0$

✓  $x + \frac{1}{a}e^{-ay} \cos kx = C, \quad \mu(y) = e^{-ay}$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

→  $k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14$

3)  $(x^a - kby)dx + bxy dy = 0$

✓  $\frac{x^{a-k}}{a-k} + \frac{by}{x^k} = C, \quad \mu(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$

→  $a = 6; 7; 8; 9; 10$

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5$

→  $b = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

4)  $(ay + (x+b)\ln(x+b))dx - a(x+b)dy = 0$

✓  $\frac{-ay}{x+b} + \ln^2(x+b) = C, \quad \mu(x) = \frac{1}{(x+b)^2}$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -10$

5)  $ay\sqrt{b-y^2}dx + (ax\sqrt{b-y^2} + y)dy = 0$

✓  $axy - \sqrt{b-y^2} = C, \quad \mu(y) = \frac{1}{\sqrt{b-y^2}}$

→  $a = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -10$

→  $b = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

6)  $(x^a - \sin^2 ky)dx + x \sin 2ky dy = 0$

✓  $\frac{x^{a-k}}{a-k} + \frac{\sin^2 ky}{kx^k} = C, \quad \mu(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$

→  $a = 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$

→  $k = 1; 2; 3; 4; 5$

## Часть XVIII

### Уравнения математической физики

304. Привести к каноническому виду уравнение

$$\Rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\Rightarrow b = 4; 5; 6$$

$$\Rightarrow c = -1; 7; -3$$

$$\Rightarrow d = 10; -2; 3$$

$$1) au_{xx} + a(k_1 + k_2)u_{xy} + ak_1k_2u_{yy} + bu_x + cu_y + du = 0$$

$$\checkmark a(k_1 - k_2)^2 u_{\xi\eta} = (c - bk_1)u_\xi + (c - bk_2)u_\eta + du, \xi = -k_1x + y, \eta = -k_2x + y$$

$$\rightarrow k_1 = k_2 - 2; k_2 - 1; k_2 + 1; k_2 + 2$$

$$\rightarrow k_2 = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$2) au_{xx} - 2ak_1u_{xy} + a(k_1^2 + k_2^2)u_{yy} + bu_x + cu_y + du = 0$$

$$\checkmark ak_2^2 u_{\xi\xi} + ak_2^2 u_{\eta\eta} = (-c - bk_1)u_\xi - bk_2u_\eta - du, \xi = k_1x + y, \eta = k_2x$$

$$\rightarrow k_1 = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\rightarrow k_2 = 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$3) au_{xx} - 2ak_1u_{xy} + ak_1^2u_{yy} + bu_x + cu_y + du = 0$$

$$\checkmark au_{\eta\eta} = (-c - bk_1)u_\xi - bu_\eta - du, \xi = k_1x + y, \eta = x$$

$$\rightarrow k_1 = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

305. Решить задачу Коши

1)  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $u|_{t=0} = F$ ,  $u_t|_{t=0} = G$

✓

→  $F = cx + b$ ;  $cx^2 + b$ ;  $\sin bx$ ;  $\cos bx$

→  $G = bx + c$ ;  $cx^2 + bx$ ;  $\sin bx$ ;  $\cos bx$

→  $a = 1$ ;  $2$ ;  $3$

→  $b = 1$ ;  $2$ ;  $3$ ;  $4$ ;  $5$ ;  $6$

→  $c = -3$ ;  $-2$ ;  $-1$ ;  $1$ ;  $2$ ;  $3$

306. Решить смешанную задачу

$$1) \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad u|_{t=0} = F, \quad u_t|_{t=0} = G, \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$$

✓

$$\rightarrow F = \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\rightarrow G = \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3$$

$$\rightarrow k = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

$$\rightarrow l = 1; 2; 3; 4$$

Часть XIX

Теория вероятностей



307.

$$\Rightarrow p_1 = \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow p_3 = \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

1) 3 студента сдают экзамен. Вероятность успешной сдачи для 1-го  $p_1$ , для второго —  $p_2$ , для третьего —  $p_3$ . Найти вероятность того, что

- а) все трое сдали экзамен;
- б) двое сдали экзамен;
- в) хотя бы 1 студент сдал экзамен.

✓ а)  $p_1 p_2 p_3$ ; б)  $p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 (1 - p_2) p_3 + (1 - p_1) p_2 p_3$ ; в)  $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$

2) 3 стрелка стреляют в цель. Вероятность попадания для 1-го  $p_1$ , для второго —  $p_2$ , для третьего —  $p_3$ . Найти вероятность того, что

- а) все трое попали в цель;
- б) двое попали в цель;
- в) хотя бы 1 стрелок попал в цель.

✓ а)  $p_1 p_2 p_3$ ; б)  $p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 (1 - p_2) p_3 + (1 - p_1) p_2 p_3$ ; в)  $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$

3) 3 станка производят детали. Вероятность производства детали первого сорта для 1-го станка  $p_1$ , для второго —  $p_2$ , для третьего —  $p_3$ . Найти вероятность того, что

- а) произведены 3 детали первого сорта;
- б) две детали первого сорта;
- в) хотя бы 1 деталь первого сорта.

✓ а)  $p_1 p_2 p_3$ ; б)  $p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 (1 - p_2) p_3 + (1 - p_1) p_2 p_3$ ; в)  $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$

308.

$$\Rightarrow p_1 = \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow p_3 = \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}$$

- 1) 3 студента сдают экзамен. Вероятность успешной сдачи для 1-го —  $p_1$ , для второго —  $p_2$ , для третьего —  $p_3$ . Найти вероятность того, что двое сдали экзамен.

$$\checkmark p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 (1 - p_2) p_3 + (1 - p_1) p_2 p_3$$

- 2) 3 стрелка стреляют в цель. Вероятность попадания для 1-го —  $p_1$ , для второго —  $p_2$ , для третьего —  $p_3$ . Найти вероятность того, что хотя бы 1 стрелок попал в цель.

$$\checkmark 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$$

- 3) 3 станка производят детали. Вероятность производства детали первого сорта для 1-го станка —  $p_1$ , для второго —  $p_2$ , для третьего —  $p_3$ . Найти вероятность того, что произведены 3 детали первого сорта.

$$\checkmark p_1 p_2 p_3$$

**309.** Решить задачу по теме «Формула полной вероятности».

$$\Rightarrow n_1 = 7; 10; 13; 16; 19$$

$$\Rightarrow n_2 = 8; 11; 14; 17; 20$$

$$\Rightarrow n_3 = 9; 12; 15; 18; 21$$

- 1) На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве:  $n_1$  с первого завода,  $n_2$  со второго,  $n_3$  с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе  $p_1$ , на втором  $p_2$ , на третьем  $p_3$ . Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

$$\checkmark \quad \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

$$\rightarrow p_1 = \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow p_3 = \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

- 2) Покупатель может приобрести нужный ему товар в одной из  $n_1$  секций первого магазина, или в одной из  $n_2$  секций второго, или в одной из  $n_3$  секций третьего. Вероятность того, что к моменту прихода покупателя в секциях первого магазина в продаже имеется нужный товар равна  $p_1$ , в секциях второго магазина  $p_2$ , в секциях третьего магазина  $p_3$ . Какова вероятность того, что в наугад выбранной секции имеется в продаже нужный товар?

$$\checkmark \quad \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

$$\rightarrow p_1 = \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{4}{10}; \frac{5}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow p_3 = \frac{3}{10}; \frac{6}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}$$

- 3) Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил  $n_1$  изделий, второй –  $n_2$ , третий –  $n_3$ . Вероятность брака у первого рабочего  $p_1$ , у второго –  $p_2$ , у третьего –  $p_3$ . Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет бракованным?

$$\checkmark \quad \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

$$\rightarrow p_1 = \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}$$

$$\rightarrow p_3 = \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}$$

310. Решить задачу по теме «Закон Пуассона».

- 1) Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час  $60a$  вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получает не более двух вызовов?

$$\checkmark \quad (1 + a + \frac{a}{2})e^{-a};$$

$$\rightarrow a = \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}; 2; 3; 4; 5; 6$$

- 2) Книга в  $n$  страниц имеет  $an$  опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не более двух опечаток?

$$\checkmark \quad (1 + a + \frac{a}{2})e^{-a};$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}$$

$$\rightarrow n = 50; 60; 70; 80; 90; 100$$

- 3) Среди семян ржи  $m\%$  семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе  $n$  семян обнаружить не более двух семян сорняков?

$$\checkmark \quad (1 + a + \frac{a}{2})e^{-a};$$

$$\rightarrow a = \frac{mn}{100}$$

$$\rightarrow n = 100; 110; 120; 130; 140; 150$$

$$\rightarrow m = 1; 2; 3; 4; 5$$

**311.** Решить задачу по теме «Дискретные случайные величины».

- 1) Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна  $p$ . Составить закон распределения дискретной случайной величины  $X$  – числа отказавших элементов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$ .

$$\checkmark \quad 3p; \quad 3p(1-p); \quad \sqrt{3p(1-p)};$$

$$\rightarrow p = \frac{1}{10}; \quad \frac{2}{10}; \quad \frac{3}{10}; \quad \frac{4}{10}; \quad \frac{5}{10}; \quad \frac{6}{10}$$

- 2) Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна  $p$ . Составить закон распределения дискретной случайной величины  $X$  – числа попаданий мяча в корзину. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$ .

$$\checkmark \quad 3p; \quad 3p(1-p); \quad \sqrt{3p(1-p)};$$

$$\rightarrow p = \frac{5}{10}; \quad \frac{6}{10}; \quad \frac{7}{10}; \quad \frac{8}{10}; \quad \frac{9}{10}$$

- 3) Вероятность сбоя в работе АТС равна  $p$ . Составить закон распределения дискретной случайной величины  $X$  – числа сбоев, если в данный момент поступило три вызова. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$ .

$$\checkmark \quad 3p; \quad 3p(1-p); \quad \sqrt{3p(1-p)};$$

$$\rightarrow p = \frac{1}{10}; \quad \frac{2}{10}; \quad \frac{3}{10}; \quad \frac{4}{10}; \quad \frac{5}{10}$$

**312.** Случайная величина  $X$  задана функцией распределения вероятностей  $F(x)$ . Найти плотность вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$ .

$$\Rightarrow a = -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5$$

$$1) F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ (x - a)^2, & a < x \leq a + 1, \\ 1, & x > a + 1. \end{cases}$$

$$\checkmark a + \frac{2}{3}; \frac{1}{18}; \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$2) F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b}, & a < x \leq a + b, \\ 1, & x > a + b. \end{cases}$$

$$\checkmark a + \frac{b}{2}; \frac{b^2}{12}; \frac{b\sqrt{3}}{6}$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4; 5$$

**313.** Решить задачу по теме «Оценка параметров».

- 1) Методом моментов по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  найти точечную оценку неизвестного параметра  $\lambda$  распределения случайной величины  $X$ , зная что плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \geq 0).$$

✓  $1/x_{\text{в}}$

- 2) Случайная величина  $X$  распределена по закону Пуассона

$$P_m(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

где  $m$  – число испытаний, произведенных в одном опыте;  $x_i$  – число появлений события в  $i$ -том опыте. Найти методом моментов по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точечную оценку неизвестного параметра  $\lambda$ , определяющего распределение Пуассона.

✓  $x_{\text{в}}$

- 3) Найти методом моментов по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точечную оценку неизвестного параметра  $p$  биномиального распределения

$$P_m(X = x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1 - p)^{m - x_i},$$

где  $x_i$  – число появлений события в  $i$ -м опыте ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $m$  – количество испытаний в одном опыте.

✓  $\frac{1}{nm} \sum x_i$

- 4) Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точечную оценку неизвестного параметра  $\lambda$  показательного распределения, плотность которого

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \geq 0).$$

✓  $1/x_{\text{в}}$

- 5) Методом наибольшего правдоподобия найти по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точечную оценку неизвестного параметра  $p$  геометрического распределения

$$P(X = x_i) = (1 - p)^{x_i} p,$$

где  $p$  – вероятность появления события в отдельном испытании.

✓  $1/x_{\text{в}}$

314. Решить задачу по теме «Статистика».

$$\Rightarrow a = 2; 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow x = 0; 5; 10; 15$$

$$\Rightarrow n = 3; 4; 5$$

$$\Rightarrow m = 9; 10; 11$$

$$\Rightarrow k = 19; 20; 21$$

1) Выборка задана интервальным вариационным рядом

$i$	$x_i; x_{i+1}$	$n_i$
1	$x; x + a$	$n$
2	$x + a; x + 2a$	$m$
3	$x + 2a; x + 3a$	$k$
4	$x + 3a; x + 4a$	$42 - k - m$
5	$x + 4a; x + 5a$	$8 - n$

Построить полигон частот. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

$$\checkmark \quad x_{\text{в}} = x + \frac{a(183 - 4n - 2n - k)}{50}, \quad D_{\text{в}} = \frac{a^2}{100}(1353 - 40n - 20m - 12k) - \frac{a^2}{2500}(183 - 4n - 2m - k)$$

2) Выборка задана интервальным вариационным рядом

$i$	$x_i; x_{i+1}$	$n_i$
1	$x; x + a$	$n$
2	$x + a; x + 2a$	$m$
3	$x + 2a; x + 3a$	$k$
4	$x + 3a; x + 4a$	$42 - k - m$
5	$x + 4a; x + 5a$	$8 - n$

Построить гистограмму частот. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

$$\checkmark \quad x_{\text{в}} = x + \frac{a(183 - 4n - 2n - k)}{50}, \quad D_{\text{в}} = \frac{a^2}{100}(1353 - 40n - 20m - 12k) - \frac{a^2}{2500}(183 - 4n - 2m - k)$$

3) Выборка задана интервальным вариационным рядом

$i$	$x_i; x_{i+1}$	$n_i$
1	$x; x + a$	$n$
2	$x + a; x + 2a$	$m$
3	$x + 2a; x + 3a$	$k$
4	$x + 3a; x + 4a$	$42 - k - m$
5	$x + 4a; x + 5a$	$8 - n$

Построить график эмпирической функции распределения частот. Найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при надежности  $\gamma = 0,95$ .

$$\checkmark \quad x_{\text{в}} = x + \frac{a(183 - 4n - 2n - k)}{50}, \quad D_{\text{в}} = \frac{a^2}{100}(1353 - 40n - 20m - 12k) - \frac{a^2}{2500}(183 - 4n - 2m - k)$$



Часть XX

ЭМММ

315. Решить задачу

- 1) Для потребителя с функцией полезности  $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_1x_2$ 
  1. Записать математическую модель оптимального выбора потребителя.
  2. Найти функции спроса на оба товара.
  3. Найти точку спроса для цен  $P_0 = (P_1, P_2)$  и дохода  $Q_0 = Q_0$  и дать содержательный ответ.
  4. Пусть цена на первый товар увеличится в  $k$  раз. Найти компенсацию дохода потребителя. Какой набор товаров является теперь оптимальным? Сколько нужно средств, чтобы купить старый оптимальный набор по новой цене? Сравнить потребительские наборы.
  5. Определить, на сколько процентов измениться спрос на первый товар, если цена на второй товар увеличится на 1%?

✓

$$x_1^* = \frac{bQ + ap_2}{2p_1b}; x_2^* = \frac{bQ - ap_2}{2p_2b};$$

$$\text{Точ. спроса} \left( \frac{bQ_0 + aP_2}{2P_1b}; \frac{bQ_0 - aP_2}{2P_2b} \right);$$

$$dQ = Q_1;$$

$$\text{Н. точ. спроса} \left( \frac{b(Q_0 + Q_1) + aP_2}{2kP_1b}; \frac{b(Q_0 + Q_1) - aP_2}{2P_2b} \right);$$

Увелич. на 0.5%

$$\rightarrow Q_1 = \frac{(\sqrt{k} - 1)(bQ_0 + aP_2)}{b}$$

$$\rightarrow a = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow b = 1; 2; 3; 4$$

$$\rightarrow P_1 = 1; 2$$

$$\rightarrow P_2 = 2; 3; 4; 5$$

$$\rightarrow Q_0 = 15; 20; 25; 30$$

$$\rightarrow k = 2; 3; 4$$

## Часть ХХІ

### Экзаменационные вопросы

316.

- 1) Числовые множества. Доказательство того, что нет рационального числа, квадрат которого равен 2.
- 2) Функции и их характеристики. Сложная функция. Обратная функция. Основные элементарные функции и их графики.
- 3) Числовая последовательность. Предел последовательности. Предельный переход в неравенствах.
- 4) Предел монотонной ограниченной последовательности. Число  $e$ .
- 5) Предел функции по Коши и по Гейне. Исследование существования предела функции  $\frac{\sin x}{x}$ .
- 6) Односторонние пределы. Предел при  $x$  стремящемся к бесконечности. ББВ.
- 7) Бесконечно малые функции
- 8) Пределы и арифметические операции.
- 9) Признаки существования пределов.
- 10) Первый замечательный предел.
- 11) Второй замечательный предел.
- 12) Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые функции.
- 13) Вывод важнейших эквивалентностей.
- 14) Непрерывность функций. Доказательство непрерывности косинуса. Точки разрыва и их классификация.
- 15) Теоремы о непрерывных функциях. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
- 16) Производная функции. Геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали.
- 17) Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Производная суммы, произведения и частного.
- 18) Производная сложной и обратной функции.
- 19) Производные основных элементарных функций.
- 20) Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.
- 21) Производные высших порядков. Производные высших порядков от неявных и параметрически заданных функций.
- 22) Дифференциал функции. Основные теоремы. Инвариантность формы первого дифференциала.

- 23) Применение дифференциала. Дифференциалы высших порядков.
- 24) Теоремы Ферма и Роля.
- 25) Теоремы Лагранжа и Коши.
- 26) Правила Лопиталя.

317.

- 1) Вывод формулы Тейлора.
- 2) Формулы Тейлора и Маклорена. Разложение экспоненты.
- 3) Монотонность. Необходимое условие экстремума. Минимум и максимум функции на отрезке.
- 4) Первое и второе достаточные условия экстремума.
- 5) Выпуклость и точки перегиба.
- 6) Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.
- 7) Неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла.
- 8) Таблица основных неопределённых интегралов.
- 9) Основные методы интегрирования. Методы интегрирования заменой переменной и по частям.
- 10) Интегрирование рациональных функций.
- 11) Интегрирование тригонометрических функций.
- 12) Интегрирование иррациональных функций.
- 13) Определённый интеграл. Его геометрический и физический смысл.
- 14) Формула Ньютона-Лейбница.
- 15) Свойства определённого интеграла.
- 16) Вычисление определённого интеграла. Замена переменной. Интегрирование по частям.
- 17) Формула Валлиса.
- 18) Вычисление площадей плоских фигур.
- 19) Вычисление дуги плоской кривой. Вычисление объёма тела.
- 20) Работа переменной силы. Работа при выкачивании жидкостей. Путь, пройденный телом. Давление жидкости на вертикальную пластинку.
- 21) Формулы прямоугольников и трапеций для приближённого вычисления определённого интеграла.
- 22) Формула парабол (Симпсона) для приближённого вычисления определённого интеграла.

318.

- 1) Понятие ФМП. Предел. Пример функции, у которой есть повторные пределы, но нет двойного.
- 2) Непрерывность. Открытые, замкнутые, ограниченные, неограниченные, связные, несвязные области. Свойства непрерывных функций.
- 3) Частные производные первого порядка, их геометрический смысл. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца, пример её подтверждающий.
- 4) Дифференцируемость и полный дифференциал. Теорема о необходимом и достаточном условиях дифференцируемости. Применение к приближённым вычислениям.
- 5) Производная сложной функции. Полная производная. Пример, показывающий, что условие дифференцируемости нельзя отбросить.
- 6) Дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы первого дифференциала.
- 7) Дифференцирование неявной функции. Теорема существования неявной функции. Случай одной переменной.
- 8) Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
- 9) Экстремум ФМП. Наибольшее и наименьшее значения ФМП в ограниченной замкнутой области.
- 10) Достаточные условия экстремума.
- 11) Эйлеров интеграл второго рода. Свойства.
- 12) Эйлеров интеграл первого рода. Свойства.
- 13) Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл.
- 14) Свойства двойного интеграла.
- 15) Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
- 16) Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
- 17) Геометрические и физические приложения двойного интеграла.
- 18) Определение и свойства тройного интеграла.
- 19) Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
- 20) Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.
- 21) Геометрические и механические приложения тройного интеграла.

**319.**

- 1) Доказательство необходимой части теоремы о необходимом и достаточном условиях дифференцируемости.
- 2) Доказательство теоремы о сложной функции.
- 3) Доказательство формулы для производной неявной функции.
- 4) Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Вывод уравнений.
- 5) Доказательство необходимого условия экстремума ФМП.
- 6) Нахождение области определения эйлерова интеграла второго рода.
- 7) Вывод соотношения между гамма-функцией и факториалом.
- 8) Нахождение области определения эйлерова интеграла первого рода.
- 9) Вывод формулы для перехода от двойного интеграла к повторному.
- 10) Вычисление якобиана для цилиндрических и сферических координат.



320.

- 1) Несобственные интегралы первого рода. Примеры. Признаки сходимости. Интеграл Пуассона.
- 2) Несобственные интегралы второго рода. Примеры. Признаки сходимости.
- 3) Эйлеров интеграл второго рода. Нахождение области определения.
- 4) Свойства гамма-функции. Вывод соотношения между гамма-функцией и факториалом. Вычисление интеграла Пуассона.
- 5) Эйлеров интеграл первого рода. Нахождение области определения.
- 6) Свойства бета-функции. Приложения при вычислении интегралов.
- 7) Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл.
- 8) Свойства двойного интеграла.
- 9) Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Вывод формулы для перехода от двойного интеграла к повторному. Пример.
- 10) Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
- 11) Определение и свойства тройного интеграла.
- 12) Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Пример.
- 13) Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
- 14) Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.
- 15) Геометрические и механические приложения двойного и тройного интеграла.
- 16) Криволинейный интеграл первого рода. Его свойства.
- 17) Вычисление криволинейного интеграла первого рода в случае кривой, заданной параметрически, явно и в полярных координатах.
- 18) Геометрические и механические приложения криволинейного интеграла первого рода. Закон Био-Савара.
- 19) Криволинейный интеграл второго рода. Свойства. Вычисление.
- 20) Работа и циркуляция силового поля. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода.
- 21) Формула Грина. Вычисление площадей плоских фигур.
- 22) Понятия градиента и потенциала. Оператор Гамильтона. Потенциальное двумерное векторное поле.
- 23) Нахождение потенциала. Работа потенциального поля. Поле силы тяжести.

- 24) Поверхностный интеграл первого рода. Свойства. Вычисление.
- 25) Геометрические и физические приложения поверхностного интеграла первого рода.
- 26) Поверхностный интеграл второго рода. Свойства. Вычисление.
- 27) Поток. Дивергенция. Формула Остроградского-Гаусса. Соленоидальное поле. Вычисление объёмов.
- 28) Ротор. Формула Стокса.
- 29) Потенциальные и гармонические поля.

321.

- 1) Числовые ряды. Основные понятия. Геометрическая прогрессия.
- 2) Свойства числовых рядов.
- 3) Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд.
- 4) Первый и второй признаки сравнения рядов.
- 5) Признак Даламбера. Радикальный признак Коши.
- 6) Интегральный признак Коши. Обобщённый гармонический ряд.
- 7) Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Примеры рядов лейбницевского типа. Оценка остатка ряда лейбницевского типа.
- 8) Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
- 9) Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана. Пример условно сходящегося ряда.
- 10) Функциональные и степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
- 11) Вывод двух формул для радиуса сходимости. Свойства степенных рядов.
- 12) Формула Тейлора. Ряды Тейлора и Маклорена.
- 13) Достаточные условия сходимости рядов Тейлора и Маклорена. Пример Коши.
- 14) Алгоритм разложения функции в ряд Тейлора. Ряд Тейлора для экспоненты. Вычисление экспонент.
- 15) Разложение в ряд Тейлора синуса, косинуса, синуса гиперболического и косинуса гиперболического. Вычисление синусов и косинусов.
- 16) Биномиальный ряд. Основные частные случаи. Вычисление корней.
- 17) Разложение в ряд Тейлора логарифма. Вычисление логарифмов.
- 18) Разложение в ряд Тейлора арктангенса и арксинуса. Вычисление числа  $\pi$ .

322.

- 1) Основные определения. Рациональные дроби Чебышева — Маркова.
- 2) Рациональные операторы Русака — Фейера.
- 3) Рациональные приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица.
- 4) Рациональные операторы Русака — Валле-Пуссена.
- 5) Рациональные операторы Русака — Джексона.
- 6) Рациональные приближения со свободными полюсами. Лемма Ньюмена и её следствия.
- 7) Результаты Ньюмена, Вячеславова и Шталя о приближении функции  $|x|$ .

323.

- 1) Приближение выпуклых функций.
- 2) Теорема Пекарского о наилучшем рациональном приближении функций ограниченной вариации с заданным модулем непрерывности.
- 3) Результаты Попова по рациональному приближению абсолютно непрерывных функций с производной из  $L_p$ .
- 4) Леммы о выборе полюсов и основанных на этом выборе свойствах ядер рациональных интегральных операторов.
- 5) Оценки уклонений рациональных операторов Русака — Валле-Пуссена на классах функций с производной ограниченной вариации и с производной из  $L_p$ .
- 6) Результаты Ровбы о приближении Гёльдеровских функций ограниченной вариации положительными операторами Русака — Фейера и Русака — Джексона.
- 7) Сумматорные рациональные операторы как аппарат приближения со свободными полюсами.

324.

- 1) Линейные положительные операторы и их свойства.
- 2) Теорема Коровкина.
- 3) Полиномы Бернштейна. Теорема Бернштейна.
- 4) Первая теорема Вейерштрасса.
- 5) Вторая теорема Вейерштрасса.
- 6) Полиномы наилучшего приближения. Теорема Бореля.
- 7) Число корней алгебраических и тригонометрических полиномов.
- 8) Понятие  $(\epsilon)$ -точки. Существование  $(+)$ -точек и  $(-)$ -точек.
- 9) Теорема Чебышева об альтернансе в алгебраическом случае.
- 10) Единственность полинома наилучшего приближения.
- 11) Наличие альтернанса как достаточное условие полинома наилучшего приближения.
- 12) Полиномы Чебышева.
- 13) Теорема Чебышева об альтернансе в тригонометрическом случае.
- 14) Конечные разности первого порядка. Их свойства.
- 15) Модуль непрерывности первого порядка. Его свойства.
- 16) Свойства, характеризующие модуль непрерывности.
- 17) Конечные разности второго порядка. Их свойства.
- 18) Модуль непрерывности второго порядка. Его свойства.
- 19) Теорема Маршо.
- 20) Классы функций, определяемые первым модулем непрерывности.
- 21) Классы функций, определяемые вторым модулем непрерывности.

325.

- 1) Ядро Джексона. Вычисление интеграла от ядра Джексона.
- 2) Верхние оценки некоторых интегралов от произведения ядра Джексона и степенной функции.
- 3) Оператор Джексона. Образ оператора Джексона.
- 4) Представление оператора Джексона в виде интеграла по половине периода. Точность для константы.
- 5) Оценка уклонения оператора Джексона через модуль непрерывности первого порядка.
- 6) Оценка уклонения оператора Джексона через модуль непрерывности второго порядка.
- 7) Первая теорема Джексона и её следствия.
- 8) Вторая теорема Джексона и её следствия.
- 9) Неравенство Бернштейна.
- 10) Оценка второго модуля непрерывности через наилучшие приближения функции.
- 11) Понятие обратных теорем теории приближения. Критерий принадлежности функции классу Гёльдера и его следствия.
- 12) Критерий существования производной определённого порядка от заданной функции и принадлежности этой производной классу Гёльдера. Следствия.
- 13) Наилучшие приближения на отрезке. Равенство наилучших приближений функции и её индуцированной функции.
- 14) Теоремы Джексона в алгебраическом случае.
- 15) Обратные теоремы в алгебраическом случае.
- 16) Второе неравенство Бернштейна. Обратные теоремы для дифференцируемых функций в алгебраическом случае.
- 17) Неравенство Маркова.
- 18) Оценка уклонения оператора Джексона от индуцированной функции.
- 19) Поточечные аналоги прямых и обратных теорем в алгебраическом случае.
- 20) Аппроксимация аналитических функций: случай круга.
- 21) Аппроксимация аналитических функций: случай отрезка.

326.

- 1) Классическая формула расчета вероятности.
- 2) Элементы комбинаторики. Формулы для расчета числа сочетаний, размещений и перестановок.
- 3) Геометрическая формула расчета вероятности.
- 4) Формула полной вероятности.
- 5) Формула Байеса.
- 6) Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли.
- 7) Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Пуассона.
- 8) Схема независимых испытаний Бернулли. Локальная формула Муавра–Лапласа.
- 9) Схема независимых испытаний Бернулли. Интегральная формула Муавра Лапласа.
- 10) Определение дискретной СВ.
- 11) Примеры дискретных СВ.
- 12) Функция распределения дискретной СВ.
- 13) Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение дискретной СВ.
- 14) Определение непрерывной СВ.
- 15) Примеры непрерывных СВ.
- 16) Функция распределения непрерывной СВ. Связь между функцией распределения и плотностью распределения непрерывной СВ.
- 17) Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение непрерывной СВ.
- 18) Определение коэффициента корреляции.
- 19) Определение характеристической функции.



327.

- 1) Определение вариационного ряда. Дискретные и непрерывные ВР.
- 2) Графическое представление ВР. Гистограмма, полигон частот, кумулянта.
- 3) Числовые характеристики ВР.
- 4) Определения несмещенной, смещенной оценки.
- 5) Понятие вариации оценки.
- 6) Суть метода моментов.
- 7) Суть метода наименьших квадратов.
- 8) Суть метода максимального правдоподобия.
- 9) Примеры распределений, применяемых в статистике.
- 10) Постановка задачи проверки статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы.
- 11) Понятие ошибок первого и второго рода, мощности критерия.
- 12) Проверка гипотезы о нормальном распределении по критерию.
- 13) Проверка гипотезы о распределении Пуассона по критерию.
- 14) Доверительный интервал для математического ожидания.
- 15) Доверительный интервал для дисперсии.
- 16) Критерий согласия Колмогорова.
- 17) Критерий согласия Колмогорова–Смирнова.
- 18) Постановка задачи регрессионного анализа.
- 19) Постановка задачи дисперсионного анализа.