

(2-9) قرینه یک نقطه نسبت به یک خط

قرینه نقطه $A(\alpha, \beta)$ نسبت به خط $d: ax + by + c = 0$ نقطه $A'(\alpha + 2a\lambda, \beta + 2b\lambda)$ است که در آن $\lambda = \frac{-(a\alpha + b\beta + c)}{a^2 + b^2}$ می باشد.



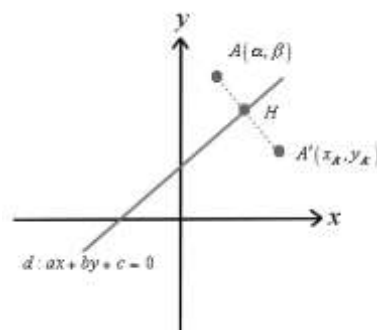
قرینه $A(\alpha, \beta)$ نسبت به خط مزبور، نقطه $A'(x_{A'}, y_{A'})$ بوده و نقطه H روی خط d وسط AA' است.

$$m_d = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_{AA'} = -\frac{1}{m_d} = \frac{b}{a}$$

$$AA': y - y_A = m_{AA'}(x - x_A) \Rightarrow y - \beta = \frac{b}{a}(x - \alpha) \Rightarrow \frac{y - \beta}{b} = \frac{x - \alpha}{a} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_H - \alpha}{a} = \lambda \Rightarrow x_H = \alpha + a\lambda \\ \frac{y_H - \beta}{b} = \lambda \Rightarrow y_H = \beta + b\lambda \end{cases}$$

مختصات $H(x_H, y_H) \in d$ در معادله خط d صادق است:

$$\begin{aligned} d: ax + by + c = 0 &\Rightarrow a(\alpha + a\lambda) + b(\beta + b\lambda) + c = 0 \\ &\Rightarrow a\alpha + a^2\lambda + b\beta + b^2\lambda + c = 0 \\ &\Rightarrow (a\alpha + b\beta + c) = -a^2\lambda - b^2\lambda \\ &\Rightarrow \lambda = -\frac{a\alpha + b\beta + c}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$



$$x_H = \frac{\alpha + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_H - \alpha = 2(\alpha + a\lambda) - \alpha = 2\alpha + 2a\lambda - \alpha = \alpha + 2a\lambda$$

$$y_H = \frac{\beta + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_H - \beta = 2(\beta + b\lambda) - \beta = 2\beta + 2b\lambda - \beta = \beta + 2b\lambda$$



مثال 41) مختصات $A(2, 3)$ را نسبت به خط $y = x + 2$ بیابید.

مثال 42) قرینه نقطه $A(1, 2)$ را نسبت به خط $3x + 2y - 7 = 0$ به دست آورید.