方法二：基于欧拉方程残差最小化的深度学习方法

核心思想

将求解 Krusell-Smith 模型转化为一个**最小化**所有主体在所有状态下欧拉方程（一阶最优性条件）平均平方残差的优化问题。

- 欧拉方程:

$$u'(c_t^i) = \beta R_{t+1} E_\epsilon[u'(c_{t+1}^i)]$$

- 最小化欧拉方程残差（即欧拉方程左右两边的差异）：

$$\min\{\beta R_{t+1} E_\epsilon[u'(c_{t+1}^i)] - u'(c_t^i)\}$$

$$\min\{1 - \frac{\beta R_{t+1} E[u'(c')]}{u'(c)}\}$$

- Fischer-Burmeister (FB) 方程用于处理 KKT 条件:
  - 对于任意 $X \geq 0, Y \geq 0$ 且满足 $XY = 0$ 的条件，可重写为 FB 方程:

$$\Psi^{FB}(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$$

  - 针对 Krusell-Smith 模型的 KKT 条件：$w_t^i - c_t^i \geq 0$ 和 $|u'(c) - \beta R_{t+1} E[u'(c')]| \geq 0$，可重写为:

$$x = 1 - \frac{c_t^i}{w_t^i}; y = 1 - \frac{\beta R_{t+1}^i E[u'(c_{t+1}^i)]}{u'(c_t^i)}$$

方法二：基于欧拉方程残差最小化的深度学习方法

- 神经网络估计
  - 损失函数 (最小化)

$$\Xi(\theta) = E_{\omega}[\xi(\omega;\theta)] = E_{(Y_t, W_t, z_t, \Sigma_1, \Sigma_2, \epsilon_1, \epsilon_2)}\{[\Psi(1-\frac{c_t^i}{w_t^i}, 1-h_t^i)]^2$$

$$+v[\frac{\beta R_{t+1}u'(c_{t+1}^i)|_{\Sigma=\Sigma_1,\epsilon=\epsilon_1}}{u'(c_t^i)} - h_t^i][\frac{\beta R_{t+1}u'(c_{t+1}^i)|_{\Sigma=\Sigma_2,\epsilon=\epsilon_2}}{u'(c_t^i)} - h_t^i]\}$$

  - 其中 v 是权重 $\Psi(\cdot)$ 是 FB 方程
  - 使用神经网络估计 $\frac{c_t^i}{w_t^i} = \psi(\cdot;\theta)$ 和 $h_t^i = h(\cdot;\theta)$