Лекция
18 марта 2020г

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лектор: Лазарева Галина Геннадьевна

Метод Зейделя

$$Ax = b$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \dots & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \dots & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & +a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Метод Зейделя

Ax = b

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ . \quad . & . \quad . & . & .. & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & 0 & .. & 0 \\ . \quad . & . \quad . & .. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & 0 \end{pmatrix},$$

Метод Зейделя

$$Ax = b$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & .. & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & 0 \end{pmatrix},$$

$$Ax = b$$

$$\boxed{(D + L)}x = \boxed{(D + L}\,- A)x + b$$

Итерационный процесс Зейделя

$$(D + L)\underline{x_{k+1}} = (D + L - A)\underline{x_k} + b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$(D + L)\underline{x_{k+1}} = c$$

$$\boxed{x_1 = c_1, \quad x_i = \frac{c_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j, \quad i = 2, 3, \ldots, n.}$$

Домашнее задание:

Решить систему уравнений $Ax = b$ методом Зейделя:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Вручную просчитать по известному алгоритму 4 итерации.

$$(D + L)x_{k+1} = (D + L - A)x_k + b, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Сравнить полученные вектора x1, x2, x3, x4 с известным точным решением (1,2).
Какими свойствами, гарантирующими сходимость метода, обладает матрица A?

Задать вопросы по теме лекции.
Выслать решение и вопросы к лекции на эл. почту lazareva-gg@rudn.ru

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

Теорема.

Пусть матрица A самосопряженная и положительная, т.е.

$$A^* = A, \ \ A > 0$$

Тогда метод Зейделя **сходится при любом начальном приближении**.

Замечание (вычислительная сложность стационарного метода Зейделя).

Если каждая итерация метода Зейделя требует n^2 операций,
тогда в целом количество арифметических операций,
необходимых для решения СЛАУ методом Зейделя,
определиться как k*n^2,
где k - это количество итераций,
затраченных в методе Зейделя для достижения заданной точности решения .

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

Теорема.

Пусть матрица A самосопряженная и положительная, т.е.

$$A^* = A, \;\; A > 0$$

Тогда метод Зейделя **сходится при любом начальном приближении**.

Замечание

Если матрица A не удовлетворяет условиям, не самосопряженная и не положительная,
То вместо системы   Ax=b   можно решать систему уравнений:

$$A^* A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$$

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

Доказательство. Так как метод Зейделя соответствует неявному методу простой итерации при $C = D + L$ и $\tau = 1$, то по теореме Самарского нужно доказать, что $D + L > \frac{1}{2}A$.

Метод простой итерации:

$$\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k + DA\mathbf{x}_k = D\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Умножая слева на D^{-1}, получим

$$D^{-1}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

или, для любого числа $\tau > 0$

$$\tau D^{-1}\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau} + A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Обозначим $\tau D^{-1} = C$, тогда получим

$$C\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau} + A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

Доказательство. Так как метод Зейделя соответствует неявному методу простой итерации при $C = D + L$ и $\tau = 1$, то по теореме Самарского нужно доказать, что $D + L > \frac{1}{2}A$.

Метод Зейделя

$$(D + L)\mathbf{x}_{k+1} = (D + L - A)\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Метод простой итерации:

$$C\,\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau} + A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Теорема (А.А.Самарский).

Пусть $A^* = A$, $A > 0$.

Тогда для сходимости метода простой итерации

$$C\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau} + A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

К решению системы Ax = b при любом начальном приближении, достаточно чтобы

$$C > \frac{\tau}{2}A, \quad \tau > 0.$$

Это же условие является необходимым при выполнении

$C > 0, C^* = C$ и $CA = AC$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

Докажем достаточность условия $C > \frac{\tau}{2}A, \quad \tau > 0.$

Обозначим $\mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*$, где $\mathbf{x}^*$ – решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Тогда из (2.20), заменяя $\mathbf{b}$ на $A\mathbf{x}^*$, получаем

$$C\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k}{\tau} + A\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

или

$$C\frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{\tau} + A\mathbf{r}_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

Докажем достаточность условия $C > \frac{\tau}{2}A, \quad \tau > 0.$

Обозначим $\mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*$, где $\mathbf{x}^*$ – решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Тогда из (2.20), заменяя $\mathbf{b}$ на $A\mathbf{x}^*$, получаем

$$C\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k}{\tau} + A\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

или

$$C\frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{\tau} + A\mathbf{r}_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$C\frac{\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k}{\tau}+A\mathbf{r}_k=0,\quad k=0,1,2,\dots.$$

Умножим это равенство скалярно на $2(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)$

$$\Big(\frac{2}{\tau}C(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\Big)+(A\,2\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)=0,\quad k=0,1,2,\dots.$$

Учитывая, что $2\mathbf{r}_k=\mathbf{r}_{k+1}+\mathbf{r}_k-(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)$, получим

$$\Big(\frac{2}{\tau}C(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\Big)-(A(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)+$$
$$+(A(\mathbf{r}_{k+1}+\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)=0,\quad k=0,1,2,\dots.$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$C\frac{\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k}{\tau}+A\mathbf{r}_k=0,\quad k=0,1,2,\dots.$$

Умножим это равенство скалярно на $2(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)$

$$\left(\frac{2}{\tau}C(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)+\underline{(A\,2\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)}=0,\quad k=0,1,2,\dots.$$

Учитывая, что $2\mathbf{r}_k=\mathbf{r}_{k+1}+\mathbf{r}_k-(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)$, получим

$$\left(\frac{2}{\tau}C(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)-\underline{(A(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)}+$$
$$+\underline{(A(\mathbf{r}_{k+1}+\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k)}=0,\quad k=0,1,2,\dots.$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$\left(\frac{2}{\tau}C(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)-\left(A(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)+$$
$$+\left(A(\mathbf{r}_{k+1}+\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)=0,\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Группируя два первых слагаемых и перемножая вектора в третьем, получаем

$$\left(\left(\frac{2}{\tau}C-A\right)(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)+(A\mathbf{r}_{k+1},\mathbf{r}_{k+1})+(A\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_{k+1})-$$
$$-(A\mathbf{r}_{k+1},\mathbf{r}_k)-(A\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_k)=0,\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\right) + (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}) + \underline{(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k+1})} -$$

$$- \underline{(A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_k)} - (A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Так как матрица A самосопряженная в $\mathbb{E}^n$, третье и четвертое слагаемые равны

$$(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k+1}) = (\mathbf{r}_{k+1}, A\mathbf{r}_k) = (A^*\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_k) = (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_k),$$

а их разность равна нулю.

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\right) + (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}) + \underline{(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k+1})} -$$
$$\underline{- (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_k)} - (A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

$$\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\right) =$$
$$= (A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) - (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\right) =$$
$$= (A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) - (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и в силу условия $C > \dfrac{\tau}{2} A$ теоремы

$$(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) - (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}) =$$
$$= \left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\right) > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) - (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}) > 0.$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) - (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}) > 0.$$

Отсюда получаем

$$(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) > (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}) > 0,$$

в силу положительности матрицы A. Таким образом, числовая последовательность $(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем, следовательно, является сходящейся.

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\right) =$$
$$= (A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) - (A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

к пределу при $k \to \infty$ и учитывая сходимость последовательности $(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)$, получаем

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) - \lim_{k\to\infty}(A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}) = 0,$$

так как $\lim\limits_{k\to\infty}(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) = \lim\limits_{k\to\infty}(A\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1})$.

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

Заметим, что если $\frac{2}{\tau}C - A > 0$, то существует такое число $\delta > 0$, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$

$$((\frac{2}{\tau}C - A)\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant \delta \|\mathbf{x}\|^2.$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

Заметим, что если $\frac{2}{\tau}C - A > 0$, то существует такое число $\delta > 0$, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$

$$((\frac{2}{\tau}C - A)\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant \delta \|\mathbf{x}\|^2.$$

В самом деле, для любой положительной матрицы B на сфере $\|\xi\| = 1$ (замкнутом множестве в $\mathbb{E}^n$) непрерывная по ξ величина $(B\xi, \xi) > 0$ достигает точной нижней грани δ на некотором векторе ξ_0, то есть $(B\xi_0, \xi_0) = \delta$. Очевидно $\delta \neq 0$, так как в противном случае на векторе $(B\xi_0, \xi_0) = 0$, что противоречит условию $B > 0$. По той же причине δ не может быть меньше нуля. Таким образом, на сфере $\|\xi\| = 1$

$$((\frac{2}{\tau}C - A)\xi, \xi) \geqslant \delta > 0.$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

Заметим, что если $\frac{2}{\tau}C - A > 0$, то существует такое число $\delta > 0$, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$

Отсюда следует, что для $B = \frac{2}{\tau}C - A > 0$ и $\xi = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, где $\mathbf{x}$ – любой ненулевой вектор из $\mathbb{E}^n$,

$$\boxed{\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)\xi, \xi\right) \geqslant \delta > 0.}$$

$$\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \geqslant \delta,$$

или

$$\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)\mathbf{x}, \mathbf{x}\right) \geqslant \delta\|\mathbf{x}\|^2.$$

Отсюда при $\mathbf{x} = \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k$ получаем

$$\|\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}\left(\left(\frac{2}{\tau}C - A\right)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\right).$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$\|\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}((\frac{2}{\tau}C - A)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k).$$

$$C\frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{\tau} + A\mathbf{r}_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$\mathbf{r}_k = -A^{-1}\frac{C}{\tau}(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k).$$

$$\|\mathbf{r}_k\|^2 \leqslant \|A^{-1}\|^2\frac{\|C\|^2}{\tau^2}\|\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|A^{-1}\|^2\frac{\|C\|^2}{\tau^2}\frac{1}{\delta}((\frac{2}{\tau}C - A)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k), \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k)$$

Теорема (А.А.Самарский).

Доказательство.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{2}{\tau}C-A\right)(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(A\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_k)-\lim_{k\to\infty}(A\mathbf{r}_{k+1},\mathbf{r}_{k+1})=0,$$

$$\|\mathbf{r}_k\|^2\leqslant\|A^{-1}\|^2\frac{\|C\|^2}{\tau^2}\|\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\|A^{-1}\|^2\frac{\|C\|^2}{\tau^2}\frac{1}{\delta}\left(\left(\frac{2}{\tau}C-A\right)(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k),\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)$$

Извлекая квадратный корень и переходя здесь к пределу по k,

для погрешности итерации $\mathbf{x}_k$ получаем

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}^*\|=\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{r}_k\|=0.$$

Достаточность доказана!

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

Доказательство. Так как метод Зейделя соответствует неявному методу простой итерации при $C = D + L$ и $\tau = 1$, то по теореме Самарского нужно доказать, что $D + L > \frac{1}{2}A$.

$$C > \frac{\tau}{2}A, \quad \tau > 0.$$

Метод Зейделя

$$(D + L)\mathbf{x}_{k+1} = (D + L - A)\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Метод простой итерации:

$$C\,\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau} + A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

Докажем, что если $A > 0$, то $D > 0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{x}^k$, координаты которого имеют вид $x_i^k = \delta_{ik}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда координаты вектора $(A\mathbf{x}^k)_i = a_{ik}$, $i = 1, 2, ..., n$, а скалярное произведение $(A\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k) = a_{kk}$. Так как $A > 0$, то $(A\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k) > 0$ и, следовательно, $a_{kk} > 0$, $k = 1, 2, ..., n$. Тогда для любого $\mathbf{x} \neq 0$

$$(D\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 > 0,$$

то есть $D > 0$ – матрица D положительна.

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

$$D + L > \frac{1}{2}A.$$

Рассмотрим матрицу $D + L$. Для любого $\mathbf{x}$, используя
ство симметрии скалярного произведения, получим

$$(2(D+L)\mathbf{x},\mathbf{x}) = (2D\mathbf{x},\mathbf{x}) + (L\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, L\mathbf{x}).$$

Отсюда, учитывая, что $L^* = L^T$, следует

$$\begin{aligned}(2(D+L)\mathbf{x},\mathbf{x}) &= (2D\mathbf{x},\mathbf{x}) + (L\mathbf{x},\mathbf{x}) + (L^*\mathbf{x},\mathbf{x}) = \\ &= (2D\mathbf{x},\mathbf{x}) + (L\mathbf{x},\mathbf{x}) + (L^T\mathbf{x},\mathbf{x}) = \\ &= (D\mathbf{x},\mathbf{x}) + ((D+L+L^T)\mathbf{x},\mathbf{x}) = (D\mathbf{x},\mathbf{x}) + (A\mathbf{x},\mathbf{x})\end{aligned}$$

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

Докажем, что если $A > 0$, то $D > 0$.

$$A^* = A, \;\; A > 0$$

$$(2(D+L)\mathbf{x}, \mathbf{x}) =$$

$$= (D\mathbf{x}, \mathbf{x}) + ((D + L + L^T)\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (D\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (A\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

Перенося $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в левую часть равенства и используя положительность матрицы D, т.е. $(D\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, получаем

$$(2(D+L)\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (D\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0,$$

или

$$((2(D+L) - A)\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0,$$

что означает $2(D+L) - A > 0$, или $D + L > \frac{1}{2}A$.

Теорема доказана.

Достаточные условия сходимости метода Зейделя

Доказательство. Так как метод Зейделя соответствует неявному методу простой итерации при $C = D + L$ и $\tau = 1$, то по теореме Самарского нужно доказать, что $D + L > \frac{1}{2}A$.

$$C > \frac{\tau}{2}A, \quad \tau > 0.$$

Метод Зейделя

$$(D+L)\mathbf{x}_{k+1} = (D+L-A)\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Метод простой итерации:

$$C\,\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau} + A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Домашнее задание:

Решить систему уравнений Ax = b методом Зейделя:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Вручную просчитать по известному алгоритму 4 итерации.

$$(D + L)x_{k+1} = (D + L - A)x_k + b, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Сравнить полученные вектора x1, x2, x3, x4 с известным точным решением (1,2).
Какими свойствами, гарантирующими сходимость метода, обладает матрица A?

Задать вопросы по теме лекции.
Выслать решение и вопросы к лекции на эл. почту lazareva-gg@rudn.ru