ИДЗ по математическому анализу

Кичанова Кристина Денисовна

Задача 1.

Исследовать на равномерную сходимость семейство функций

$$f(x, y) = y \ln(x^2 + y^2)$$

на множестве $X = (0, 1)$ при $y \to 0$.

Решение.

$$|f(x, y)| = |y| \, |\ln(x^2 + y^2)|.$$

Для всех $x \in (0, 1)$ справедливо

$$x^2 + y^2 \geq y^2.$$

Отсюда следует оценка:

$$|\ln(x^2 + y^2)| \leq |\ln y^2| = 2|\ln |y||.$$

$$|f(x, y)| \leq 2|y| \, |\ln |y||.$$

$$\sup_{x \in (0,1)} |f(x, y)| \leq 2|y| \, |\ln |y||.$$

$$\lim_{y \to 0} y \ln |y| = 0.$$

Следовательно

$$\lim_{y \to 0} \sup_{x \in (0,1)} |f(x, y)| = 0.$$

По определению равномерной сходимости => сходится равномерно к нулевой функции.

Ответ

$$\boxed{\text{Сходится равномерно на } (0;1)}$$

Задача 2.

Исследовать на равномерную сходимость семейство функций

$$f(x,y) = x^2\cos(xy)$$

на множестве $X = (0,3)$ при $y \to 0$.

Решение.

Найдём предел:

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = x^2.$$

Разность:

$$|f(x,y) - f_0(x)| = |x^2\cos(xy) - x^2| = x^2|\cos(xy) - 1|.$$

$$|\cos t - 1| \le \frac{t^2}{2}.$$

Тогда

$$|f(x,y) - x^2| \le \frac{x^4y^2}{2}.$$

Для $x \in (0,3)$:

$$|f(x,y) - x^2| \le \frac{81}{2}y^2.$$

Следовательно

$$\sup_{x\in(0,3)} |f(x,y) - x^2| \le \frac{81}{2}y^2 \to 0.$$

Ответ

$$\boxed{\text{Сходится равномерно на } (0;3)}$$

Задача 3.

Вычислить с помощью дифференцирования по параметру интеграл:

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + a\sin x)}{\sin x}\,dx.$$

Решение.

$$F(x,a) = \frac{\ln(1 + a\sin x)}{\sin x}.$$

При $|a| < 1$ и $x \in (0, \pi)$ функция $F(x, a)$ непрерывна по x и дифференцируема по параметру a.

Найдём частную производную по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln(1 + a \sin x) = \frac{\sin x}{1 + a \sin x}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}(x, a) = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{1 + a \sin x} = \frac{1}{1 + a \sin x}.$$

$$I'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + a \sin x}.$$

Известно, что при $|a| < 1$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + a \sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Следовательно

$$I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

$$I(a) = \pi \int \frac{da}{\sqrt{1 - a^2}} = \pi \arcsin a + C.$$

$$I(0) = \int_0^\pi \frac{\ln 1}{\sin x} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Ответ

$$\boxed{I(a) = \pi \arcsin a}, \quad |a| < 1.$$

Задача 4.

Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить:

$$I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx.$$

Решение.

Рассмотрим интеграл, зависящий от параметра t:

$$F(t) = \int_0^1 x^t\, dx, \quad t > -1.$$

$$F(t) = \left. \frac{x^{t+1}}{t+1} \right|_0^1 = \frac{1}{t+1}.$$

Найдём производную по параметру:

$$F'(t) = \int_0^1 x^t \ln x \, dx.$$

Представим разность степеней в виде интеграла:

$$x^b - x^a = \int_a^b \frac{d}{dt} x^t \, dt = \int_a^b x^t \ln x \, dt.$$

$$I(a, b) = \int_0^1 \frac{1}{\ln x} \left(\int_a^b x^t \ln x \, dt \right) dx.$$

Сокращая $\ln x$ и меняя порядок интегрирования:

$$I(a, b) = \int_a^b \left(\int_0^1 x^t \, dx \right) dt.$$

Используя найденную формулу для $F(t)$:

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{dt}{t+1}.$$

Вычисляя интеграл:

$$I(a, b) = \ln(t+1) \Big|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Ответ

$$\boxed{\ln \frac{b+1}{a+1}}$$

Задача 5.

Найти область сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^\infty e^{-px} \cos 3x \, dx.$$

Решение.

Рассмотрим абсолютную сходимость интеграла:

$$\int_0^\infty |e^{-px}\cos 3x| dx.$$

Так как $|\cos 3x| \leq 1$ => оценка:

$$|e^{-px}\cos 3x| \leq e^{-px}.$$

$$\int_0^\infty |e^{-px}\cos 3x| dx \leq \int_0^\infty e^{-px} dx.$$

$$\int_0^\infty e^{-px} dx = \frac{-1}{p} e^{-px}\Big|_0^\infty.$$

При $p > 0$:

$$e^{-px} \to 0, \quad x \to \infty,$$

$$\int_0^\infty e^{-px} dx = \frac{1}{p} < \infty.$$

При $p = 0$:

$$\int_0^\infty \cos 3x \, dx$$

не существует.

При $p < 0$:

$$e^{-px} \to \infty, \quad x \to \infty,$$

и интеграл расходится.

Интеграл сходится только при $p > 0$.

Ответ

$$\boxed{p > 0}$$

Задача 6.

Найти область сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(4x\cos x - \pi \sin x)^a} \, dx.$$

Решение.

При $x \to 0$

$$\tan x \sim x, \quad x \to 0,$$

$$\ln \tan x \sim \ln x.$$

Знаменатель:

$$4x \cos x - \pi \sin x.$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Подставляем:

$$4x(1 - \tfrac{x^2}{2}) - \pi(x - \tfrac{x^3}{6}) = (4 - \pi)x + O(x^3).$$

$$4x \cos x - \pi \sin x \sim (4 - \pi)x.$$

$$(4x \cos x - \pi \sin x)^a \sim Cx^a, \quad C = (4 - \pi)^a.$$

Функция под нтегралом эквивалентна

$$\frac{\ln x}{x^a}.$$

Исследуем сходимость интеграла

$$\int_0 \frac{\ln x}{x^a} dx.$$

Интеграл сходится, если $a < 1$ (степень знаменателя < 1). При $a = 1$: $\int_0^\varepsilon \frac{\ln x}{x} dx$ расходится. При $a > 1$ расходится.

Ответ

$$\boxed{a < 1}$$

Задача 7.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра.

$$\int_0^\infty \sqrt[3]{x} \sin x^a \, dx.$$

Решение.

Рассмотрим абсолютную сходимость:

$$\int_0^\infty x^{1/3}|\sin x^a|dx \leq \int_0^\infty x^{1/3}dx.$$

Интеграл расходится, следовательно, абсолютной сходимости нет ни при каком a.

Исследуем условную сходимость. Замена:

$$t = x^a, \quad x = t^{1/a}, \quad dx = \frac{1}{a}t^{\frac{1}{a}-1}dt.$$

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{3a}} \sin t \cdot \frac{1}{a} t^{\frac{1}{a}-1}dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty t^{\frac{4}{3a}-1}\sin t\, dt.$$

$$\int_0^\infty t^\beta \sin t\, dt$$

сходится при

$$-1 < \beta < 0.$$

Получаем условие:

$$-1 < \frac{4}{3a} - 1 < 0.$$

$$\frac{4}{3a} > 0 \Rightarrow a > 0, \quad \frac{4}{3a} < 1 \Rightarrow a > \frac{4}{3}.$$

Ответ

$$\boxed{\begin{cases} \text{абсолютно не сходится ни при каком } a, \\ \text{условно сходится при } a > \frac{4}{3}. \end{cases}}$$

Задача 8.

Исследовать на равномерную сходимость на $E = (0, 2)$:

$$\int_0^\infty \frac{x^a \operatorname{arctg} x}{4 + x^3}dx.$$

Решение.

$$\left|\frac{x^a \operatorname{arctg} x}{4 + x^3}\right| \leq \frac{x^a \cdot \frac{\pi}{2}}{4 + x^3}.$$

Для $x \to \infty$:

$$\frac{x^a}{x^3} = x^{a-3}.$$

$$\int_1^\infty x^{a-3} dx$$

сходится равномерно по $a \in (0, 2)$, так как

$$a - 3 < -1.$$

При $x \to 0$:

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad \frac{x^{a+1}}{4 + x^3} \sim x^{a+1}.$$

Так как $a > 0$, интеграл сходится равномерно.

По признаку Вейерштрасса интеграл сходится равномерно на E.

Ответ

$$\boxed{\text{Интеграл сходится равномерно на } (0, 2)}$$

Задача 9.

Исследовать на равномерную сходимость на $E = (0, \infty)$:

$$\int_0^\infty \frac{x \cos \pi x}{(x-a)^2 + 1} dx.$$

Решение.

$$\left| \frac{x \cos \pi x}{(x-a)^2 + 1} \right| \leq \frac{x}{(x-a)^2 + 1}.$$

Для больших x:

$$\frac{x}{(x-a)^2 + 1} \sim \frac{1}{x}.$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

расходится, следовательно, равномерной сходимости нет.

Ответ

$$\boxed{\text{Равномерной сходимости нет}}$$

Задача 10.

Доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}dx = 1.$$

Решение.

Предел:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Следовательно

$$\frac{1+x^n}{1+x^{2n}} \to 1 \quad \text{при } x \in [0,1).$$

Оценим:

$$1 \le \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} \le 2.$$

аункция ограничена и сходится почти всюду.

По теореме Лебега о предельном переходе:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

Ответ

$$\boxed{1}$$

Задача 11.

Исследовать на непрерывность на множестве $E = (0, +\infty)$:

$$f(y) = \int_0^\infty ye^{-xy}\,dx.$$

Решение.

Вычислим интеграл при фиксированном $y > 0$:

$$\int_0^\infty ye^{-xy}\,dx = y\int_0^\infty e^{-xy}\,dx.$$

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dx = -\frac{1}{y}e^{-xy}\Big|_0^\infty = \frac{1}{y}.$$

Следовательно

$$f(y) = y \cdot \frac{1}{y} = 1, \quad y > 0.$$

Функция постоянна на E, следовательно, непрерывна.

Ответ

$$\boxed{f(y) \equiv 1 \text{ — непрерывна на } (0, +\infty)}$$

Задача 12.

Считая известным значение интеграла Дирихле, вычислить:

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3} \, dx.$$

Решение.

Рассмотрим параметрический интеграл:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \, dx.$$

(интеграл Дирихле):

$$I(a) = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0.$$

Дифференцируем по параметру a:

$$I'(a) = \int_0^\infty \cos(ax) \, dx.$$

$$I''(a) = -\int_0^\infty x \sin(ax) \, dx.$$

Интегрируем по частям:

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3} \, dx = \int_0^\infty \int_0^1 (1 - \cos tx) \, dt \, dx.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1 - \cos tx}{x^2} dx \right) dt.$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx = \frac{\pi a}{2}.$$

Следовательно

$$\int_0^1 \frac{\pi t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ

$$\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Задача 13. Используя значение интеграла Пуассона, вычислить

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx \, dx, \quad a > 0.$$

Решение.

$$\operatorname{ch} bx = \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}.$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-ax^2+bx} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-ax^2-bx} \, dx.$$

Рассмотрим общий интеграл вида

$$\int_0^\infty e^{-ax^2 \pm bx} \, dx, \quad a > 0.$$

Приведём показатель степени к квадрату

$$-ax^2 \pm bx = -a\left(x^2 \mp \frac{b}{a}x\right) = -a\left(x \mp \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}.$$

$$e^{-ax^2 \pm bx} = e^{\frac{b^2}{4a}} \, e^{-a\left(x \mp \frac{b}{2a}\right)^2}.$$

$$J_\pm = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_0^\infty e^{-a\left(x \mp \frac{b}{2a}\right)^2} \, dx.$$

Замена:

$$t = x \mp \frac{b}{2a}, \quad dt = dx.$$

Тогда пределы:

$$x = 0 \Rightarrow t = -\frac{b}{2a}, \quad x \to \infty \Rightarrow t \to \infty.$$

В итоге

$$J_\pm = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\frac{b}{2a}}^\infty e^{-at^2} \, dt.$$

Разобьём:

$$\int_{-\frac{b}{2a}}^{\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt - \int_{-\infty}^{-\frac{b}{2a}} e^{-at^2} dt.$$

При сложении $J_+ + J_-$ вторые интегралы взаимно уничтожаются, и остаётся полный гауссов интеграл.

формула Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$$

$$J_+ + J_- = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

В итоге

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx \, dx = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

Ответ

$$\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad a > 0}$$

Задача 14.

Используя интегралы Лапласа, вычислить:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{a^2 + x^2} dx, \quad a > 0.$$

Решение.

Интегралы Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}, \quad b > 0.$$

Выразим $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{a^2 + x^2} \, dx.$$

Первый интеграл: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}$. Второй интеграл: по формуле Лапласа при $b = 2$: $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-2a}$.

В итоге

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2a} e^{-2a} = \frac{\pi}{4a} \left(1 - e^{-2a}\right).$$

Ответ

$$\boxed{\frac{\pi}{4a}\left(1 - e^{-2a}\right)}$$

Задача 15.

Используя интегралы Френеля, вычислить:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 \sin 2ax \, dx$$

Решение.

Используем формулу для произведения:

$$\cos x^2 \sin 2ax = \frac{1}{2}\Big(\sin(2ax + x^2) + \sin(2ax - x^2)\Big)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2ax + x^2) \, dx$$

Замена $y = x + a => x = y - a$, $dx = dy$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin((y-a)^2 + 2a(y-a)) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(y^2 - a^2) \, dy$$

Так как интеграл от $\sin y^2$ по всей оси равен нулю, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2ax + x^2) dx = 0$$

Для второго слагаемого:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2ax - x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(-(x^2 - 2ax)) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2 - 2ax) dx$$

Используя интеграл Френеля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2 - 2ax) dx = \sqrt{\pi} \sin(a^2)$$

в итоге:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 \sin 2ax \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin(a^2)$$

Ответ

$$\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin a^2}$$

Задача 16.

Используя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Решение.

$$I(a)=\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Дифференцируем по параметру a:

$$I'(a)=\int_0^1 \frac{-2ax^2}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=-2a\int_0^1 \frac{x^2}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$$

Разложим $x^2=1-(1-x^2)$:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{1}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx-\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Первая часть через подстановку $x=\sin t$:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1-a^2\sin^2 t}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}$$

Вторая часть:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$$

В итоге

$$I'(a)=-2a\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi a\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}-1\right)$$

$$I(a)=\pi\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)$$

Ответ

$$\boxed{\pi\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}$$

Задача 17.
С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$$

Решение.

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx$$

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0)$$

Интегрируем по a:

$$I(a) = \frac{\pi}{2} a + C$$

Так как $I(0) = 0$, получаем $C = 0$, тогда $I(a) = \frac{\pi}{2} a$.
Следовательно

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = I(b) - I(a) = \frac{\pi}{2}(b - a)$$

Ответ

$$\boxed{\frac{\pi}{2}(b - a)}$$

Задача 18.
С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

$$\int_0^1 \frac{\ln(a^2 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Решение.

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(a^2 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{2a}{a^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$x = \sin t$, $dx/\sqrt{1 - x^2} = dt$:

$$I'(a) = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a^2 + \sin^2 t}$$

Используем стандартную формулу:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a^2+\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2(a^2+1)}}$$

$$I'(a) = 2a \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{a^2(a^2+1)}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}$$

Интегрируем по a:

$$I(a) = \pi \ln(a+\sqrt{a^2+1})$$

Ответ

$$\boxed{\pi \ln(a+\sqrt{a^2+1})}$$

Задача 19.

С помощью B и Γ функций Эйлера вычислить:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} x \cos^{1/2} x \, dx$$

Решение.

Используем формулу через B-функцию:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx = \frac{1}{2} B\Big(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\Big)$$

Здесь $p = 5/2$, $q = 3/2$, тогда

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} x \cos^{1/2} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Через Γ-функцию:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

В итоге

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} x \cos^{1/2} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{2}$$

Ответ

$$\boxed{\frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{2}}$$

Задача 20.

Используя эйлеровы интегралы, вычислить:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

Решение.

Используем подстановку $x^4 = t$, $x = t^{1/4}$, $dx = \frac{1}{4}t^{-3/4}dt$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{t^{-3/4}}{1+t}dt$$

Это бета-функция через интеграл Эйлера:

$$\int_0^\infty \frac{t^{c-1}}{(1+t)^{c+d}}dt = B(c,d)$$

Берем $c = 1/4$, $d = 3/4$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}B(1/4,3/4) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{4}$$

Используем тождество $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$:

$$\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \pi\sqrt{2}$$

Итого:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Ответ

$$\boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$$