Задача 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	8	6	12	14	18	11	6	13	7

a) $H_0: \xi \sim R$ $\quad H_1: \overline{H_0}$

$p = \frac{1}{10}$

$$\tilde{\Delta} = \frac{\left(5 - 100 \cdot \frac{1}{10}\right)^2}{100 \cdot \frac{1}{10}} + \frac{\left(8 - 100 \cdot \frac{1}{10}\right)^2}{100 \cdot \frac{1}{10}} + \ldots + \frac{\left(7 - 100 \cdot \frac{1}{10}\right)^2}{100 \cdot \frac{1}{10}} = 16,4$$

$\Delta \sim \chi^2(9)$

$$\text{p-val} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{16,4}^{+\infty} \frac{1}{2^{9/2} \cdot \underbrace{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}_{= \frac{105\sqrt{\pi}}{16}}} x^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx = 0,059 > 0,05$$

нет веских оснований отвергнуть H_0

По Колмогорову:

$$\tilde{\Delta} = \sqrt{n} \sup_{R} |\tilde{F}(x) - F(x)| = \sqrt{100} \cdot 0.143 = 1,43$$

($\tilde{F}$ — эмпир.)

$\Delta \sim K(x)$

$$K(x) = P(\Delta < x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}$$

$$P(\Delta \geq x) = 1 - P(\Delta < x) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}$$

$$\text{p-val} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta}) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \tilde{\Delta}^2} = 0,033485 < 0,05$$

H_0 отвергаем

б) $H_0: \xi \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$ $\quad H_1: \overline{H_0}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	8	12	-	-	-	-	-	-	7
$(-\infty; 0,5)$	$(0,5; 1,5)$	$(1,5; 2,5)$							$(8,5; +\infty)$

$\not{\mathcal{E}}$ $P(A_1) = p_1(\overline{\theta})$

$L = (p_1(\overline{\theta}))^{m_1} \cdot \ldots \cdot (p_m(\overline{\theta}))^{m_m}$

$\tilde{\theta}_1 = 4,78(78)$

$\tilde{\theta}_2 = 2,6818$

$p_1 = 0{,}055$ $p_2 = 0{,}055$ $p_3 = 0{,}086$ $p_4 = 0{,}118$ $p_5 = 0{,}141$, $p_6 = 0{,}147$,
$p_7 = 0{,}133$, $p_8 = 0.105$, $p_9 = 0{,}072$, $p_{10} = 0{,}083$

$\tilde{U} = \sum \frac{m_i - np_i}{np_i} = 9{,}8$ $\quad U \sim \chi^2(10-1-2) \sim \chi^2(7)$

$\text{p-val} = P(U \geq \tilde{U} \mid H_0) = \int_{9{,}8}^{+\infty} \frac{1}{2^{7/2}\underbrace{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}_{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}}} x^{5/2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 0{,}2 > 0{,}05$

нет весских оснований отвергнуть H_0

Колмогоров:

ОММ: $\tilde{\theta}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum x_i$

$\tilde{\theta}_2 = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \overline{X}^2}$

Парамет. bootstrap

$U^*_1, \ldots, U^*_N$

$U^*_{(k-1)} < \tilde{U} \leq U^*_k$ $\quad \left(\frac{\tilde{k}}{N}\right) = 0{,}1238$

$\text{p-value} = 1 - \left(\frac{\tilde{k}}{N}\right) = \cancel{0{,}92}$ 0,88 ~~0,025~~ ~~нет оснований отвергнуть H_0 не верно~~ нет оснований отвергнуть H_0

~~0,98 > 0,976~~ ~~отвергаем H_0~~

с) всё из в) + графики

~~θ = bootstrap + histogram~~