# 磁力、磁矩測量

2009 初稿作者：陳曉婷、陳繹安
2010 修稿：楊維元、游學謙

## Objective

觀察並測量一磁矩 $\mu$ 在一外加磁場中所受之力與力矩之變化情形，並估算出磁矩之 $\mu$ 值。

## Pre-Lab Reading

### Introduction

磁矩 $\mu$，與電偶極矩的觀念相同，為兩靠近而相反的磁極所組成。目前自然界仍無磁單極，故磁矩為磁力之主要來源，日常生活中的磁鐵即為磁矩的一種。
在許多基本粒子中也有磁矩，其產生與粒子之自旋有關(在量子力學會提到)，這些內稟磁矩(intrinsic magnetic)是許多巨觀之下的磁力來源。內稟磁矩是一量子化之物理量，其最小單位稱為「磁子」(magneton)或「磁元」，以電子自旋磁矩之量值與波耳磁子成正比：

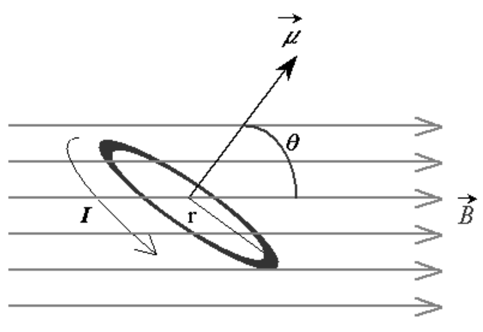
$$\mu_s = -g_s \mu_B S$$

其中 $\mu_s$ 為電子自旋磁矩，$g_s$ 是電子自旋因子為一比例常數，$\mu_B$ 為波耳磁子，大小為一常數 $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24}\ (J \cdot T^{-1})$，S 為電子之自旋角動量。
一、磁矩在外加磁場中之中心位能
磁矩在外電磁場 **B** 中，其中心之位能為：

$$U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\theta \qquad \cdots\cdots (1)$$

由此可發現，當位能抵達最低點時，意指其最穩定狀態，其磁矩 $\mu$ 平行於磁場 **B** 且兩者同向，而最不穩定之狀態為 $\mu$ 與 **B** 之方向相反。
二、磁矩在外加磁場中所受之力矩
一磁矩在外加磁場中所受之力矩 $\tau$：

$$\vec{\tau_B} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad \cdots\cdots (2)$$




圖(一)磁矩受力矩示意圖

參考圖(一)，力矩 $\tau$ 與磁矩 $\mu$ 及磁場 **B** 之方向垂直。當 $\mu$ 與 **B** 平行時力矩為 0，以右手定則試驗可知此力矩會在 $\mu$ 與 **B** 方向相同時達到穩定，也就是說當 $\mu$ 與 **B** 不平行時，力矩之作用為使 $\mu$ 與 **B** 平行且"方向相同"。

三、磁矩在外加磁場中所受之力

磁矩在外加磁場中受力與磁場變化量之大小成正比。若其位於一均勻磁場則其受力為 0，可與電偶極矩置於均勻電場類比。此力：

$$F = -\nabla U = -\nabla(-\mu \cdot B) \qquad \cdots\cdots ③$$

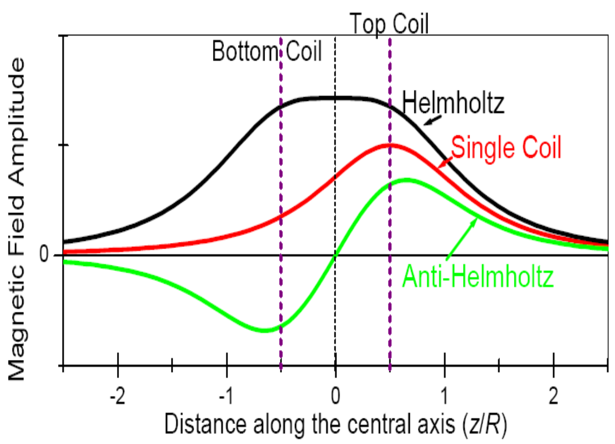
當 $\mu$ 與 **B** 平行時，且磁矩在平行於 **B** 之方向上移動時

$$F = -\frac{dU}{dz} = \frac{d(\mu B)}{dz} = \mu\frac{dB}{dz} \qquad \cdots\cdots ④$$

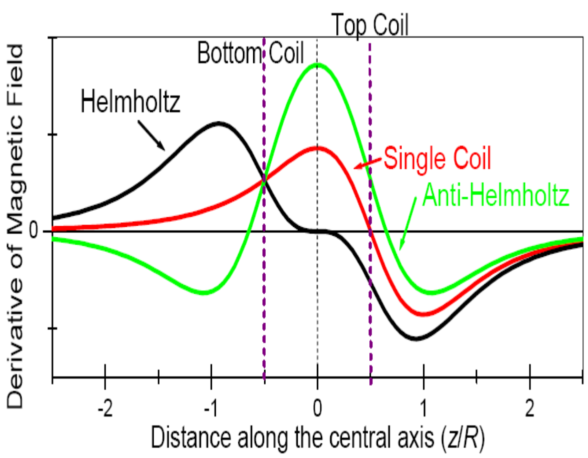
※本實驗中是藉由 Helmholtz Coil 與 Anti-Helmholtz Coil 所產生磁場藉由一個磁矩在無場中所受到的力來測量磁矩($\mu$)的大小。

## Data analysis

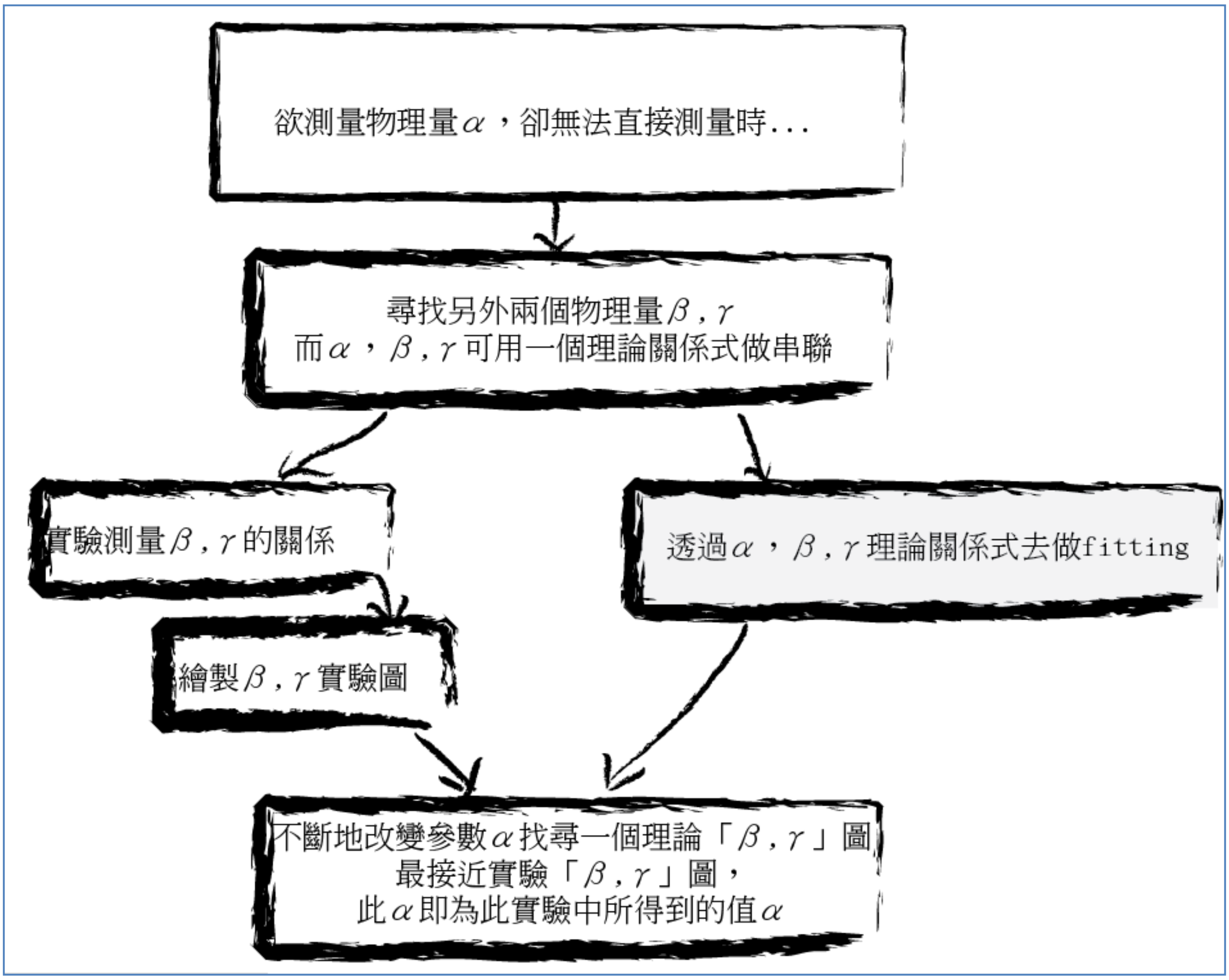
本次實驗的數據處理方式與平常不同，這次使用的方法十分重要，在物理分析上被廣泛運用。在當一物理關係式中有兩個以上的參數，而其中一個無法以實驗直接測量時，即可使用。首先假設該無法測量的物理量 $\alpha$ 為某一確切數值，接著從其他參數中任選兩參數 $\beta,\gamma$ 作圖畫出 $(\beta-\gamma)_\alpha$圖。以實驗測量 $\beta$ 和 $\gamma$，用這兩個參數的實驗值作圖。用理論之關係式帶入不同的 $\alpha$ 值畫出許多張不同的$(\beta-\gamma)_\alpha$圖，再找出最符合實驗圖形的圖，則此張理論圖所假設的 $\alpha$ 值即為該次實驗中無法測量之物理量的實驗值。



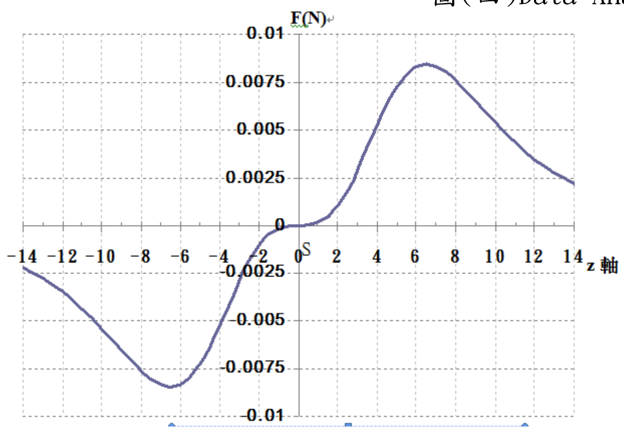

圖(二)Helmholtz Coil 與 Anti-HelmholtzCoil 沿連心軸磁場大小



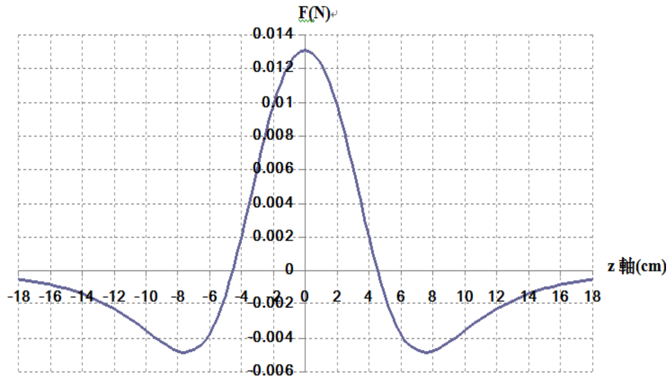

圖(三) Helmholtz Coil 與 Anti-Helmholtz Coil 沿連心軸磁場梯度大小




圖(四)Data Analysis 流程示意圖




圖(五) Helmholtz coil 之 F－z 理論圖




圖(六) Anti-Helmholtz coil 之 F－z 理論圖

$$\left|\overline{B}\right| = \frac{\mu_0 n I a^2}{2}\left(\left(\left(z-\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right)^{-3/2}+\left(\left(z+\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right)^{\cdot}\right.$$

$$\left|\overline{B}\right| = \frac{\mu_0 n I a^2}{2}\left(\left(\left(z-\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right)^{-3/2}-\left(\left(z+\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right)^{-3/2}\right)$$

$$\frac{d\left|\overline{B}\right|}{dz} = -\frac{3\mu_0 n I a^2}{2}\left(\left(z-\frac{a}{2}\right)\left(\left(z-\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right)^{-5/2}+\left(z+\frac{a}{2}\right)\left(\left(z+\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right.\right.$$

$$\frac{d\left|\overline{B}\right|}{dz} = -\frac{3\mu_0 n I a^2}{2}\left(\left(z-\frac{a}{2}\right)\left(\left(z-\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right)^{-5/2}-\left(z+\frac{a}{2}\right)\left(\left(z+\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right)^{-5/2}\right)$$

以本次實驗為例，本實驗所要求之數據處理方式是先畫出實驗所得 F-z 圖形，再畫出理論之 dB/dz –z 之圖形。而後將 dB/dz 乘上某一常數 m 後對 z 作圖（圖形應會放大 m 倍），再將此圖與實驗值之 F–z 圖重疊比較，由式( 5 )可知，當兩者重疊度最高時，此 m 值即為本次實驗所得之$\mu$值（非理論之$\mu$值）。其中 m 對應到上一段之$\alpha$，而 F, z 對應到$\beta,\gamma$。本實驗之 F–z 的理論圖形如下:

※F 單位為牛頓(N) 、$\mu_0$為常數=4$\pi$*$10^{-7}$(m/A)、R 為環形電流半徑(m)，$\mu$為磁矩(A・$m^2$) ，N 為線圈匝數。

※本實驗中$\mu$=0.354(A・$m^2$) ，磁矩測量儀之線圈半徑 R=7 cm，線圈數 N=168 匝。

## After-Class Reading

在本實驗中，這種數據分析方法在許多物理研究上運用相當廣泛，例如估計太陽表面溫度。如下所示：

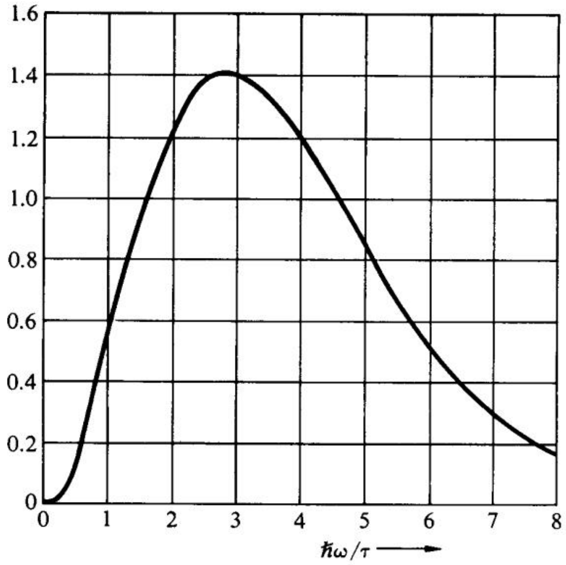
已知當黑體輻射表面溫度為 T 時，其所放出之光滿足：

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} / (e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}} - 1) \quad \cdots\cdots ⑤$$

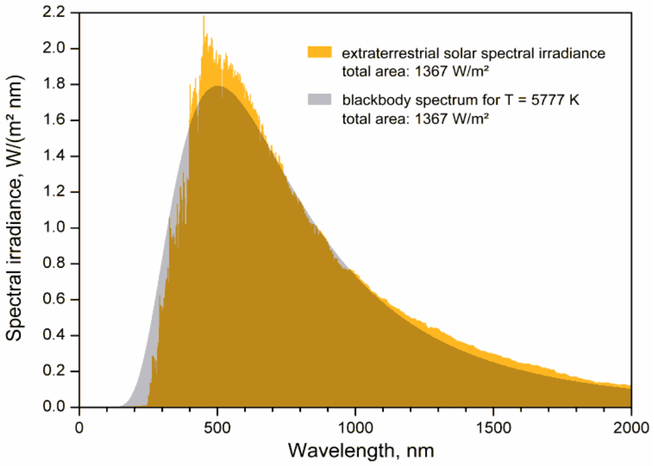
$u_\omega$能量通量密度，$\omega$為光頻率，c 為光速，$\tau$為溫度 T 乘以波茲曼常數 k，ħ 為普朗克常數除以 2$\pi$ ，可畫出 $u_\omega$對 ħω/τ 之圖，如圖(七)：

首先分析大氣外太陽照射能譜，得每一頻率$\omega$之光的能量密度 $u_\omega$，然後畫出 $u_\omega$對$\omega$的圖。接著以不同的溫度 T 帶入黑體輻射之公式畫出另一個 $u_\omega$對$\omega$之曲線並與太陽照射能譜比較。其最吻合之溫度 T 為 5777K。(見圖(八))

以上所示為 curve-fitting 在計算太陽表面溫度時的應用，經過作圖比較後得出太陽表面溫度約等於 5800K。




圖(七)u 對 ħ$\omega$/$\tau$




圖(八)黑體輻射之公式

### Apparatus

1. 電子式電源供應器
2. 小鋼珠(各約 1g)*5
3. 磁矩測量儀(包括彈簧、銅棒、磁鐵如圖(九)所示)

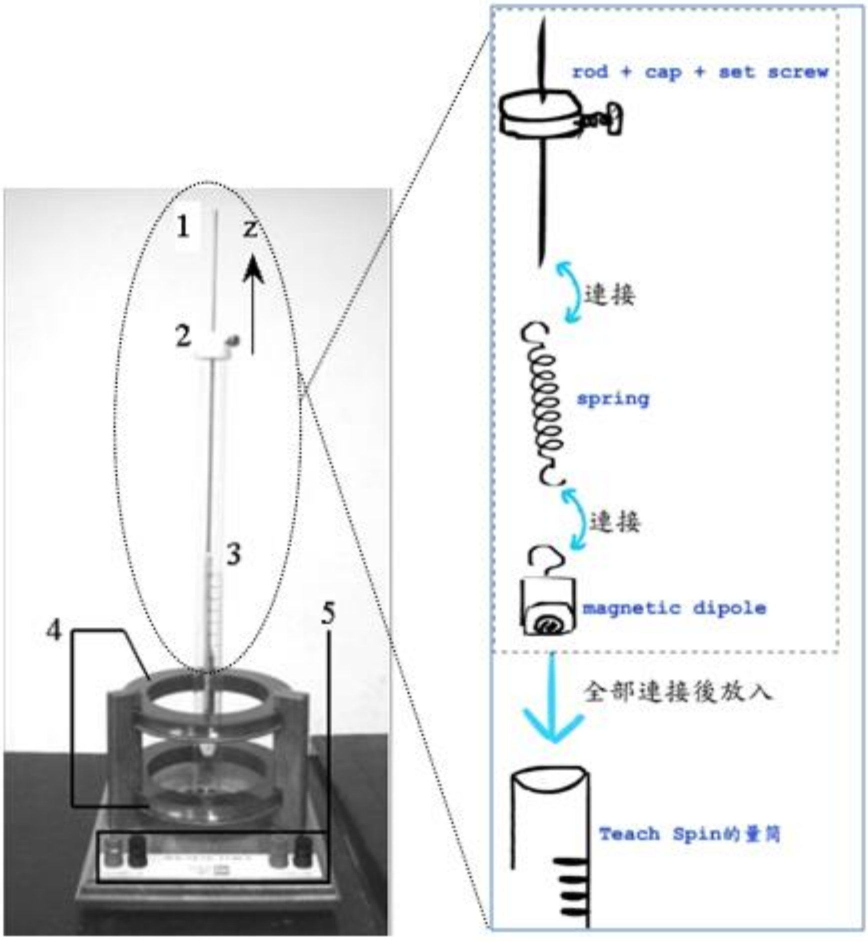
圖(九)磁矩測量儀由兩個半徑及相距皆為 7cm 的 Helmholtz coil 組成，而插座即是線圈的電流輸入處。利用銅棒及彈簧懸吊一磁鐵(紅色箭頭指向 S 極)到管子內觀察磁力或磁力矩。在量測時注意不要讓磁鐵直接掉至管子底端，以免彈簧損壞。方便起見，本實驗訂定沿著管子的方向為 z 軸。

## Generalized procedure

Part 1: 測量彈簧 k 值

Part 2: 觀察在 Helmholtz coil 及 Anti-Helmholtz coil 時，磁鐵的受力與受力矩的狀況。

Part 3: 在 Anti-Helmholtz configuration 下，測量兩線圈中心點處，磁鐵所受磁力與電流大小的關係。並利用此關係求得磁矩大小。




1.銅棒
2.塑膠帽蓋
3.刻度管
4.雙線圈(相距 R)
5.左邊下方線圈供電，右邊上方線圈供電

圖(九)磁矩測量儀

所利用的公式為：

$$F = \frac{3}{2}\mu \cdot \mu_0 NIR^2 \left( \frac{z + \left(\frac{R}{2}\right)}{\left[R^2 + \left(z + \frac{R}{2}\right)^2\right]^{5/2}} - \frac{z - \left(\frac{R}{2}\right)}{\left[R^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2\right]^{5/2}} \right)$$

Part4:在 Helmholtz coil 及 Anti-Helmholtz coil 時，磁鐵沿著兩線圈中心所受之磁力。(採用擬合的方法，先做出 F 與 z 的關係圖，在用理論圖去 fitting 找出一個 m 值使理論圖與實驗圖最為接近，而此 m 值即為這次實驗所的到的 μ 值)

## Pre-Lab Question

1.試著分別從(a)能量 和(b)力矩 的觀點描述磁矩在磁場中的轉動平衡。

2.想想看當磁矩經過 Anti-Helmholtz coil 兩線圈圓心中點後進入反向磁場時彈簧伸長量會如何改變。

3.求出 Anti-Helmholtzcoil 在 z=0 時的 F。

4.請利用環型單線圈的磁場公式，導出 Helmholtz coil 線圈中，線圈半徑＝R，在距離線圈中點 Z 的 $\frac{\partial B}{\partial z}$ 公式。

5.請利用環型單線圈的磁場公式，導出 Anti-Helmholtz coil 線圈中，線圈半徑＝R，在距離線圈中點 Z 的 $\frac{\partial B}{\partial z}$ 公式。

6.請算出線圈匝數=168，線圈半徑=0.07m，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$，線圈中點 $\frac{\partial B}{\partial z}$ 與電流的關係。

* $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$ (m/A) , $\mu$ =0.354(A・$m^2$), R=7 (cm) , N=168 (匝), I=1 (A)

# IN-LAB ACTIVITIES

## EXPERIMENTALsetup

1.將銅棒有孔的一端朝下，由下往上穿過塑膠帽蓋頂端(圖(十))，旋緊螺絲，掛上彈簧及磁鐵(圖(十一))，放入磁矩測量儀之管子中。

2.打開電子式電源供應器，將 CH1,CH2 皆調至 12V,1A。

## MEASUREMENT

**Part 1: 測量彈簧 k 值**

1.先測量小鋼球與磁矩的重量後，將彈簧輕輕垂直放入玻璃管中，當彈簧底端到刻度 15 時把上方拴緊，完成歸零。

2.利用虎克定律，將磁矩與磁矩＋小鋼球的重量做彈簧的拉伸，求出重力與伸長量的關係得到彈力係數（ k ）。

3.作出 F-Δx 圖，取趨勢線斜率得出彈簧之 k 值

**Part 2: 磁矩及磁力的觀察**

《Helmholtz coil》

1.將電源接上磁矩測量儀插座，兩線圈分別接到電源供應器的 Ch1 與 Ch2 並使兩線圈電流方向相同。

2.調整磁鐵的高度，使其對齊刻度 0(以小磁鐵中心為準以對齊)。

3.將電源供應器電壓

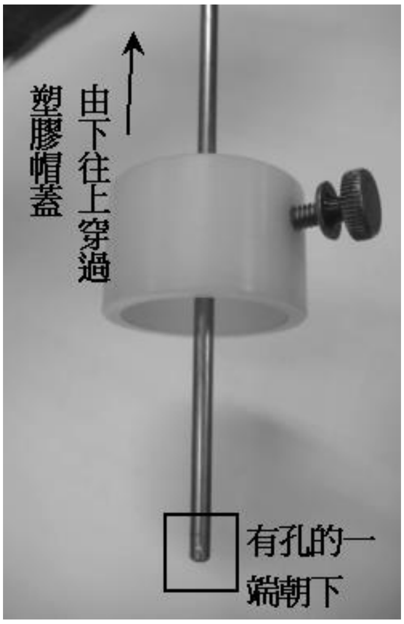
4.將 CH1、CH2 電壓調為 12V,電流 1A 輸出。

5.觀察磁鐵是否有轉動，並觀察彈簧長度是否改變。

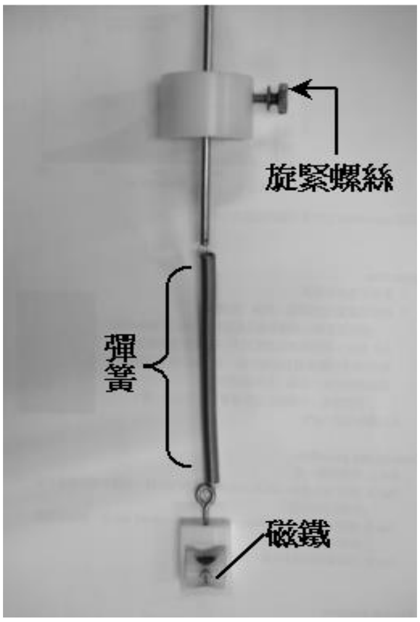
6.將兩邊的電線皆反接(保持兩線圈電流方向相同)，重複步驟 2~4。

7.將其中一邊電流方向接反，重複步驟 2~4，並比較以上結果。

**Question:**若是把兩線圈的電流皆相反，磁矩會如何變化呢？為什麼？《Anti-Helmholtz coil》**Question:**說明在 Helmholtz 與 Anti-Helmholtz configuration 下，步驟 4 中有什麼變化(轉動？彈簧長度改變？可由力或力矩的方向思考)




圖（十）




圖（十一）

**Part 3:磁矩的測量**

1.選擇 anti-helmholtzcoil，將磁矩及彈簧組放入玻璃管後，打開電源使上
下軸線圈皆通過 0.5A 的電流，電壓 12V。

2.在通電流的情形下，將磁矩及彈簧組置於玻璃管刻度為 0 處(以小磁鐵中心為準以對齊)。

3.切斷電流，並記錄下斷磁矩回到的位置。以此計算彈簧伸縮量。(2010 請測試是否可切斷電流，直接量彈簧伸縮量)。**經由 part 1 中測得的彈力係數（K）即可換成磁力。**

4.重複上述步驟，不過要將電流從原先的 0.5A 分別改成 1A,1.5A,2A,2.5A 以及 3A。並同樣記錄下切斷電流後的磁矩位置以計算彈簧伸縮量。

5.利用在 Pre-Lab 中 $\longrightarrow \frac{\partial B}{\partial z}$ 公式，將電流與彈簧伸長量換算成 $F, \frac{\partial B}{\partial z}$，根據 $F = \mu \times \frac{\partial B}{\partial z}$ 利用擬合曲線得出 $\mu$ 值

**Question:**在本實驗中為何使用 anti-helmholtzcoil 在零點的位置測磁矩呢，有什麼優點？

**Part 4: 磁力測量**

1.將電源接上磁矩測量儀插座，使兩線圈電流方向相同(Helmholtz coil)，設定電流大小為 1.0 A，電壓為 12V。

2.按下"Output"鍵，使電流通過線圈產生磁場。

3.將磁矩置於 -5.0 cm 處，待磁矩靜止時，記錄下刻度為 a。
將電流移除，磁矩會有所移動，記錄下靜止時的刻度 b。
b-a 即彈簧的伸長量，經由彈力係數（k）即可換成磁力。

4.重覆步驟 2~3，改變磁矩位置-5.0 cm ~ 5.0 cm，每 0.5 cm 測量一次彈簧伸長量，由彈簧伸長量以及 part 1 測量得到之彈簧 k 值求出磁矩在磁場中不同位置所受的力。

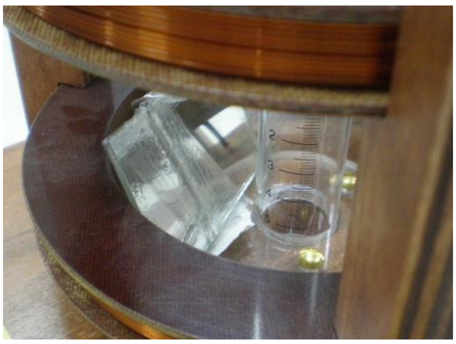
5.重複步驟 2~4，測量磁矩在磁場中不同位置時彈簧電流方向相反(Anti-Helmholtz coil)，設定電流大小為 1.0 A 的伸長量。

**小撇步**

1.觀察磁矩位置時，若位置太低不易觀察，可裝置鏡子幫助觀察，如圖(十二)所示

2.若彈簧上下震盪不停時，可藉由鐵磁性物質(一支小的螺絲起子或有小鐵頭的筆)將他吸附在管壁再放開，可以大幅縮短等待期震盪的時間。

3.在做 Anti-Helmholtz 時會發現在 z 接近 0 時，會比較不穩定(此時受力最大)，建議從兩邊逼近 z=0 會比較好，這樣所得到的數據才不會在接近零的時候有斷點。



圖(十二)，裝置鏡子，方便觀察磁矩位置

**Question:**注意，每次測量時注意磁矩方向，若磁矩方向與磁場方向相反(anti-aligned)，則測得之位移需加負號。(因為磁矩方向與磁場方向平行(aligned)和反平行(anti-aligned)所受到的力方向不同，可由能量觀點去解釋)

**Question:**在 Anti-Helmholtz 組態下，通上電流並使小磁石靠近 z=0 處，將此位置 a 記錄下來，接著將電源輸出關掉，小磁石達平衡後再將電源打開 z"，小磁石再次達到平衡位置 b。為何此兩位置不同(a 不等於 b)，為什麼？

**Question:**在步驟 4 中，理論中的磁矩方向應如何變化？與實驗有何不同?並說明為什麼。

## Lab report

1.以 **Part 4** 的實驗值作 F-z 圖。

2.利用式( 6 )，帶入不同的 $\mu$ 作$(\mu \cdot \frac{dB}{dz}) - z$ 圖，找出一其中一張$(\mu \cdot \frac{dB}{dz}) - z$ 與實驗所得之 F-z 重疊度最高的圖，$\mu$ 值即為本次實驗所求出之磁矩。$\mu$ 值精確至小數點以下第二位。(重疊之方法可參考 **Appendix**)

3.分別求出於 Helmholtz coil 及 Anti-Helmholtz coil 之 $\mu$ 值並比較。

4.比較與 **Part 3** 之 $\mu$ 值有何不同。

理論值請用曲線畫出，而實驗值則用數據點方式呈現。

## Further Question

1.在 Pre-Lab Question 2 中彈簧伸長量改變之原因為何？

2.考慮鐵彈簧在磁場中受到的影響，是否影響實驗結果？

3.磁矩在日常生活中有何應用？

## Appendix (此部分將來應該改為 Origin 說明)

以 Microsoft Excel 為例，說明在本次實驗中如何重疊兩曲線並決定 $\mu$ 值。

注意:為方便起見，以下皆將儲存格 Nn(位於第 N 欄第 n 列)以”$\boxed{\text{Nn}}$”表示。

1.在工作表上的兩欄(A 及 B)數據，分別是 z 及其對應到的 $\dfrac{dB}{dz}$ 值。

2.先找好一儲存格(如: $\boxed{\text{D1}}$)，格內將會輸入不同的 $\mu$ 值。

3.在另外一欄(可取 C 欄)的儲存格 $\boxed{\text{C1}}$ 中輸入算式 (=)B1*$D$1

4.儲存格 $\boxed{\text{C2}}$ 中輸入算式 (=) B2*$D$1。

※在 Excel 中$代表鎖定的意思，$D$1 代表在往下拉的時候永遠都鎖定在 $\boxed{\text{D1}}$ 值。

1.利用滑鼠框取 $\boxed{\text{C1}}$ 和 $\boxed{\text{C2}}$ 後，對準 $\boxed{\text{C2}}$ 的右下角(會出現”十”符號)點兩下完成下拉的動作，則 **C 欄即為** $(\mu \cdot \dfrac{dB}{dz})$ **值。**

因 $\boxed{\text{D1}}$ 還未輸入數值，對應到的值應皆為 0

2.在實驗所得的 F-z 圖(已是一條曲線)上按滑鼠右鍵，選擇「來源資料」。

3.在「選取資料來源」對話框中，點選「新增」以新增數列，點選 X 值後面的「選取範圍」方塊，原來的視窗縮小後，選取 A 欄的數值(作為 F-z 數列的 X 值)，按 Enter 鍵。

4.類似上一步驟，選取 C 欄作為 F-z 數列的 Y 值。

5.按(d)「確定」後，將 F-z(圖中的 F-z)和 $(\mu \cdot \dfrac{dB}{dz}) - z$ (圖中的 $\mu$ fitting)關係圖呈現在同一圖表上。作出 $(\mu \cdot \dfrac{dB}{dz}) - z$ 的趨勢線。

6.在 $\boxed{\text{D1}}$ 中輸入不同的值( $\mu$ )。

7.目測觀察當 $\mu$ 為何值時，兩曲線重疊度最高，

以決定 $\mu$ 的實驗值。

小撇步：

在改變 $\mu$ 值時，由時後悔看不太出來究竟哪一個曲線比較接近，因此我們可以以最小平方法來判斷兩數列是否接近。

1.在 $\boxed{\text{E1}}$ 輸入 abs($\boxed{\text{C1}}$-$\boxed{\text{B1}}$)

2.接這把 E 欄完成下拉的動作並將其加總除以 E 欄總數 ρ。

因此你在改變 $\mu$ 值時，可以藉由觀察 ρ 值變化來決定你的 $\mu$ 值。