

A1-利用光學槓桿原理測定微小重力常數

劉弘祥 106022103

Lab Group 5 (Friday) , Lab Partner: 李巧柔

Date of the experiment : 2018.10.19 Date of the report: 2018.10.26

萬有引力 G 值為物理上一非常重要之常數，它出現在牛頓的萬有引力定律和愛因斯坦的廣義相對論中。由於重力在日常尺度之下影響非常小，因此十分難進行觀察。最早的相關實驗是在一座大山旁邊，藉由擺的擺角變化以推算地球密度。這種實驗方法牛頓 **Isaac Newton** 曾經考慮過，卻因為測量的困難而放棄，後來由 **Nevil Maskelyne** 為首的一群科學家於 1774 實際操作進行，雖然這項實驗也能用於測量 G 值，但因為這並非當時的實驗目標，而一直到 1873 年才開始有 G 值出現於文獻中。爾後在 1797 年由 **Cavendish** 重新以扭擺設計實驗而得到 $6.754 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 的 G 值，而此實驗在當時的工藝技術下為一歷史性的精準。而此精準度過了一百多年之後才在 1985 被 **Charles Vernon Boys** 的實驗所超過。根據科學技術數據委員會 **Committee on Data for Science and Technology (CODATA)** 於 2014 年所提出的 G 值為 $6.674 08 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ，本次我們實驗的結果為：

$$G = 1.35329 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

1. Introduction

西元 1666 年，Newton 由自由落體與天體運動發現了萬有引力：

$$F = G \frac{Mm}{d^2} \dots\dots (1)$$

其中 m 與 M 為兩物體的質量， G 為重力常數。

Cavendish 的實驗裝置如下圖一所示，由兩個質量為 m 的小球固定在一根細棒的兩端，細棒中央處再固定一個反射鏡。當兩個質量為 M 的大球放在 $A_1 A_2$ 位置時，小球被大球吸引而使得石英線逆時針旋轉，將小球換到 $B_1 B_2$ 位置時，石英線則順時針方向旋轉。

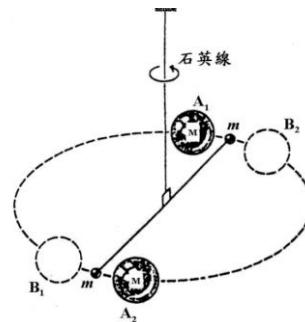


圖 1 Cavendish 測量重力常數實驗裝置

而在此裝置中，小球會因為受到來自大球的重力吸引而改變位置，其中一小球之受力矩為：

$$\tau_1 = r_1 \times F \dots\dots (2)$$

經過化簡

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= r_1 \times F_1 + r_1 \times F_2 \\
&= (r \times \frac{GMm}{d^2} - r \times \frac{GMm}{\sqrt{(2r)^2 + d^2}^2} \times \frac{d}{\sqrt{(2r)^2 + d^2}})Z \\
&= (\frac{GMmr}{d^2} \times (1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4r^2}{d^2}}}))Z \\
&= \frac{GMmr}{d^2} \times (1 - (1 + \frac{4r^2}{d^2})^{-\frac{3}{2}})
\end{aligned}$$

得到

$$\tau_1 = \frac{\alpha GMmr}{d^2} Z \dots\dots(3)$$

其中 $\alpha \equiv 1 - (1 + \frac{4r^2}{d^2})^{-\frac{3}{2}}$ 為小球對兩個大球的力矩修正項。

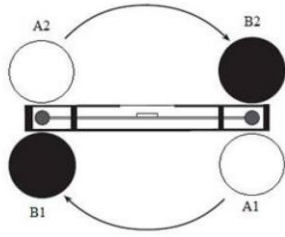


圖 2 兩組大小球位置示意圖

小球會因為受到石英線的扭力而呈現以振幅隨時間增加而減少的來回震蕩。若我們投射一光源至平面鏡時，當鏡子轉動 θ 角時，反射光將會轉動 2θ 角。因此將大球從 A1A2 位置移動到 B1B2 位置時，小球的平衡角位置從 $-\theta$ 到 $+\theta$ ，反射光線改變總角度為 4θ ，而得到以下關係式：

$$4\theta = \frac{\Delta x}{L} \dots\dots(4)$$

擺線受到的總力矩為

$$\tau = 2\tau_1 = \kappa\theta = I(\frac{2\pi}{T})^2 \theta = 2mr^2(\frac{2\pi}{T})^2 \theta \dots\dots(5)$$

由(3)(4)(5)式整理可得到 G 值：

$$G = \frac{\pi^2 r d^2 \Delta x}{\alpha M L T^2} \dots\dots(6)$$

2. Method

在這次的實驗中，我們採用以一固定雷射光源射向一中心處裝有反射鏡之扭擺，使得光線經反射鏡反射之後投射在一標有刻度之直尺上。

因為本次實驗對於震動非常敏感，極易因為非常小的干擾而收到影響，因此我們將觀察數據的直尺以及其他記錄活動均設置於與扭擺所在桌不同的第二桌，以便減少干擾。

將大球放置至 A1A2 或 B1B2 位置後，小球受到大球的吸引力而帶動扭擺呈週期性旋轉，而投影在觀察尺上的雷射光點亦會成週期性來回移動。

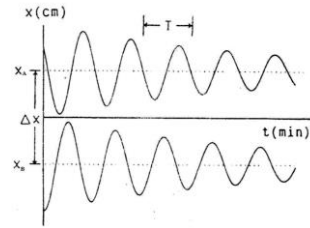


圖 3 雷射光點在直尺上投影隨時間變化示意圖

扭擺在自由擺動時的平衡角度 θ 對時間 t 關係為：

$$\theta(t) = \theta_0 + A \cos(\omega t + \delta) \dots\dots(7)$$

其中 θ_0 為平衡時角度， A 為開始時偏離平衡之角度， δ 為相位差。又因為扭擺之運動會受到諸如摩擦力等阻力所影響，故設一阻尼 β ，則 θ 會有以下微分方程：

$$m\ddot{\theta} = \kappa\theta - \beta\dot{\theta} \dots\dots(8)$$

代入求解後，其解為：

$$\theta(t) = \theta_0 + A e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \delta) \dots\dots(9)$$

$$\text{其中 } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{\beta}{2m})^2} = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\beta}{2m})^2}$$

把角度換算成位置變化後，(9)式可

得：

$$x(t) = x_0 + A'e^{-\frac{\beta t}{2m}} \sin(\omega't + \delta) \dots\dots(10)$$

即可透過作圖得到平衡位置差 Δx

$$\Delta x = |x_{A0} - x_{B0}| \dots\dots(11)$$

及自然擺動週期 T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega'^2 + (\frac{\beta}{2m})^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega'} \dots\dots(12)$$

分別將小球放置至 A1A2 及 B1B2 處，每隔 30 秒記錄雷射光點位置，過程中儘量保持系統不要被干擾。

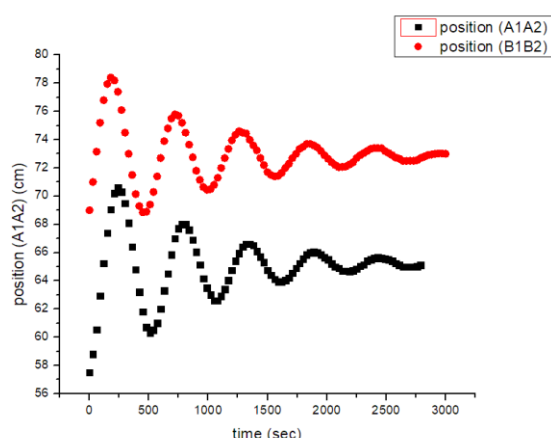
之後將資料輸入至 Origin 進行 curve fitting，以內建 Waveform 中 SineDamp 作 fitting steady solution，其公式為：

$$y = y_0 + A \cdot \exp(-x/t_0) \cdot \sin(\pi \cdot (x - x_c)/w) \dots\dots(13)$$

對應式(10)我們可以得出各變數值，代入式(6)即可得到 G 值。

3. Results

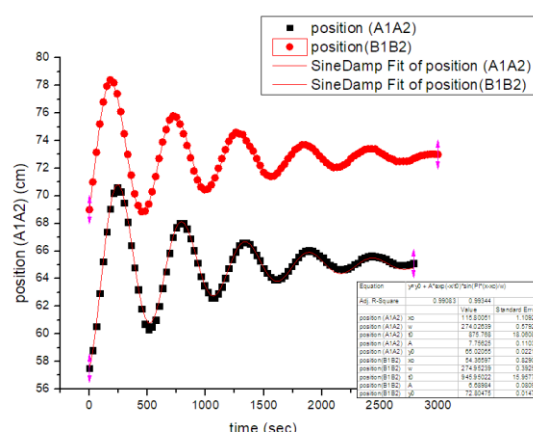
每隔 30 秒進行記錄，以手機固定時間拍照後放大讀取讀數以減少人為誤差，並分別對 A1A2 位置及 B1B2 位置記錄了 94 及 101 個點的數據，詳見 Appendix。將位置對時間作圖後得：



圖表 1 位置對時間作圖

我們發現是符合我們預期內一隨時間衰減的震蕩函數，以 Origin 去進行

curve fitting:



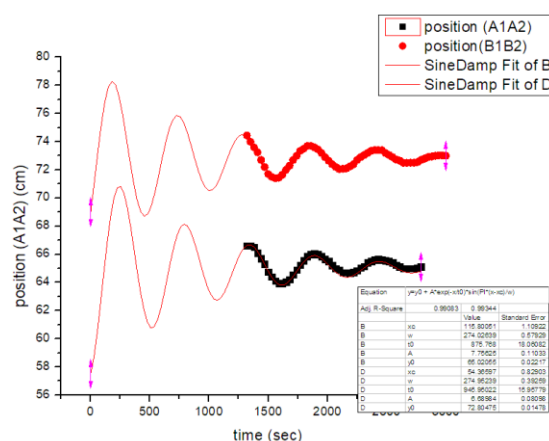
圖表 2 第一次 curve fitting

以下是以 (13) 式進行 fitting 後所得之常數：

Equation	$y = y_0 + A \cdot \exp(-x/t_0) \cdot \sin(\pi \cdot (x - x_c)/w)$		
Adj. R-Square	0.99083	0.99344	
		Value	Standard Error
position (A1A2) xc		115.80051	1.10922
position (A1A2) w		274.02639	0.57929
position (A1A2) t0		875.768	18.06082
position (A1A2) A		7.75625	0.11033
position (A1A2) y0		65.02055	0.02217
position(B1B2) xc		54.36597	0.82903
position(B1B2) w		274.95239	0.39259
position(B1B2) t0		945.95022	15.95779
position(B1B2) A		6.68984	0.08098
position(B1B2) y0		72.80475	0.01478

圖表 3 第一次 curve fitting 所得數據

而因為考慮到扭擺震蕩的前一兩個週期可能並未達到平衡，故我們又再刪去前兩個週期後進行 curve fitting:



圖表 4 第二次 curve fitting (去除前兩個週期)

Equation	$y=y_0 + A*\exp(-x/t_0)*\sin(\pi*(x-x_c)/w)$		
Adj. R-Square	0.99083	0.99344	
		Value	Standard Error
B	xc	115.80051	1.10922
B	w	274.02639	0.57929
B	t0	875.768	18.06082
B	A	7.75625	0.11033
B	y0	65.02055	0.02217
D	xc	54.36597	0.82903
D	w	274.95239	0.39259
D	t0	945.95022	15.95779
D	A	6.68984	0.08098
D	y0	72.80475	0.01478

圖表 5 第二次 fitting 之常數

分別比較兩次 fitting 完之後所得之 G 值，發現第一次 fitting 之 G 值為 $1.4712 \times 10^{-10} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ，而第二次去除前二週期後 fitting 的 G 值結果為 $1.36777 \times 10^{-10} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ，發現第二次會較為接近，但誤差仍然接近一倍，於是我們把原本(12)式中近似忽略掉的部分重新帶回正確關係會得到 G 值為 $1.35329 \times 10^{-10} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ，有較為修正但影響不大。

4. Discussion

本次實驗我們最後得到的 G 值為 $1.30496 \times 10^{-10} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ，與理論值 $6.67408 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ 相比較所得誤差 102.8%，以下為可能發生誤差的原因及影響：

- (1) 雷射光源非單一原點：我們這組的雷射光投射在直尺上的部分為一寬約 2.0cm 高約 1.0cm 的條狀光源。雖然已經在每次取點的時候都取對於條狀光源同樣位置的點，但仍不確定點狀光源和條狀光源是否會產生其他部分的影響。

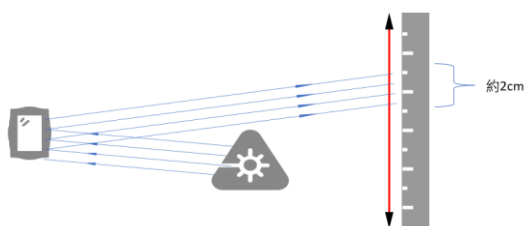


圖 4 條狀光源可能誤差示意圖

影響範圍估計：若雷射光中心為條狀光源中某處不確定，則由原本視為固定位置再多加上光源內中心點之不確定範圍最大約 2cm，推算至 Δx 則為 4cm，最多影響誤差為：-110%~0%

可能解決方式：改以使用光線路徑較為集中的雷射光源，或先使用一凸透鏡使得光線集中與同樣的路徑上。

- (2) 測量 L 時之誤差：測量扭擺至觀察尺時為用捲尺，為避免觸碰影響扭擺，故我們使用將其距離目視平移至上方一段距離，且捲尺亦難以確認為直線，故實際 L 可能與我們所當下所讀出之數值有所差異。

影響範圍估計：

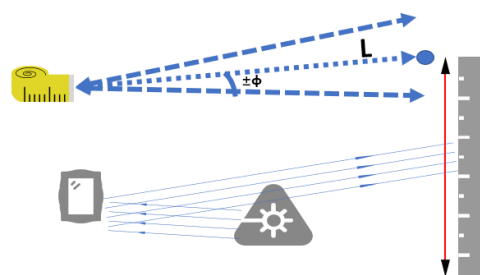


圖 5 捲尺測量 L 誤差示意圖

- 垂直角度誤差：雖若是讓雷射光源與直尺成水平，則使得垂直部分呈水平不需考慮修正項，但在架設儀器時發現若角度太低則反射回來的雷射光會被架子擋住。而考慮目視所造成之垂直角度偏差在 $\pm 5^\circ$ 內，則在 135cm 處造成影響為 $\pm 12\text{cm}$ ，則誤差影響範圍最大約為 $\pm 20\%$ 。
- 水平角度偏差：因以目視和直線比較，故偏差會較垂直角度小，估計在 $\pm 3^\circ$ 內，則在 135cm 處造成影響為 $\pm 7\text{cm}$ ，則誤差影響範圍最大約為 $\pm 10\%$ 。

- iii、捲尺非直線之鬆弛：因為使用的是軟性的捲尺，故在拉長後中心會受到重力作用而向下垂，故所得讀數應該會較實際距離長約 3cm 內，造成誤差影響最多約為 4%。

可能解決方式：以含有角度測量或是水平儀的雷射光測距儀器進行測量應可避免上述問題。

(3) 儀器非理想模型考慮情況：

- i、由 A1A2 至 B1B2 時，並非二球皆觸碰容器器壁，且有一小段距離，如圖 6 所示。可能影響範圍：因並未測量其間隔差距，故難以估計。可能解決方式：(a)事先校正轉盤，使得兩球可近乎同時接觸器壁。(b)將其中一顆球拿掉，修正模型後改以單顆球進行實驗。

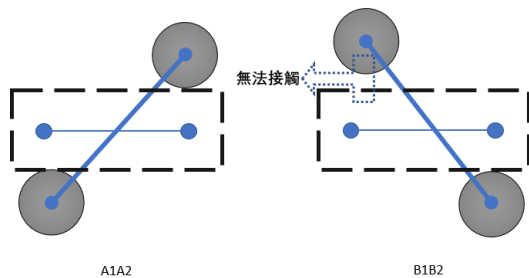


圖 6 大球於 A1A2 位 (左) 及 B1B2 位 (右) 時之於小球位置差異

- ii、大球質量與是否為完美球體：
實驗當下並未對大球質量進行測量，且不確定大球是否會因非完美球體而造成實際重心偏移。
可能解決方式：額外測量大

球質量，並在大球上標記出數點作為大球方向的記號，反復以不同方向測量實驗後可反推大球重心並進行修正。

5. References

- [1] Cornu, A.; Baille, J. B. Détermination nouvelle de la constante de l'attraction et de la densité moyenne de la Terre [New Determination of the Constant of Attraction and the Average Density of Earth]. C. R. Acad. Sci. (Paris)., 76: 954–958 (1873)
- [2] Sir Isaac Newton, The Laws of Gravitation: Memoirs by Newton, Bouguer and Cavendish, Together with Abstracts of Other Important Memoirs, (2007)
- [3] John Henry Poynting, The Mean Density of the Earth: An Essay to which the Adams Prize was Adjudged in 1893 in the University of Cambridge (1894)

Appendix

實驗數據：

A1A2		B1B2	
時間(s)	位置 (cm)	時間(s)	位置 (cm)
0	57.50	0	69.00
30	58.80	30	71.00
60	60.55	60	73.15
90	62.95	90	75.20
120	65.25	120	76.80
150	67.40	150	77.95
180	69.05	180	78.40
210	70.20	210	78.20
240	70.60	240	77.40
270	70.30	270	76.10
300	69.50	300	74.50
330	68.10	330	73.00
360	66.40	360	71.50
390	64.80	390	70.15
420	63.20	420	69.30
450	61.80	450	68.85
480	60.70	480	68.90
510	60.30	510	69.40
540	60.50	540	70.30
570	61.00	570	71.40
600	62.00	600	72.70
630	63.30	630	73.90
660	64.50	660	74.80
690	65.85	690	75.50
720	67.00	720	75.80
750	67.70	750	75.70
780	68.00	780	75.20
810	68.00	810	74.50
840	67.60	840	73.65
870	66.90	870	72.75
900	66.05	900	71.80
930	65.15	930	71.15

960	64.15	960	70.65
990	63.50	990	70.45
1020	63.00	1020	70.50
1050	62.60	1050	70.80
1080	62.60	1080	71.30
1110	62.90	1110	72.00
1140	63.40	1140	72.70
1170	64.05	1170	73.35
1200	64.75	1200	73.95
1230	65.40	1230	74.35
1260	65.95	1260	74.60
1290	66.40	1290	74.50
1320	66.60	1320	74.45
1350	66.60	1350	74.00
1380	66.50	1380	73.60
1410	66.10	1410	73.25
1440	65.70	1440	72.70
1470	65.30	1470	72.20
1500	64.75	1500	71.70
1530	64.40	1530	71.50
1560	64.10	1560	71.40
1590	63.95	1590	71.45
1620	63.95	1620	71.65
1650	64.05	1650	72.00
1680	64.20	1680	72.30
1710	64.55	1710	72.70
1740	64.90	1740	73.00
1770	65.25	1770	73.35
1800	65.55	1800	73.50
1830	65.85	1830	73.70
1860	66.00	1860	73.70
1890	66.05	1890	73.60
1920	66.00	1920	73.45
1950	65.85	1950	73.20
1980	65.65	1980	72.90
2010	65.50	2010	72.65
2040	65.20	2040	72.40

2070	65.00	2070	72.20
2100	64.90	2100	72.05
2130	64.70	2130	72.07
2160	64.70	2160	72.10
2190	64.68	2190	72.25
2220	64.72	2220	72.40
2250	64.85	2250	72.70
2280	65.03	2280	72.90
2310	65.15	2310	73.05
2340	65.40	2340	73.20
2370	65.50	2370	73.35
2400	65.60	2400	73.40
2430	65.65	2430	73.40
2460	65.60	2460	73.40
2490	65.55	2490	73.20
2520	65.50	2520	73.05
2550	65.40	2550	72.90
2580	65.25	2580	72.73
2610	65.10	2610	72.65
2640	65.00	2640	72.50
2670	65.00	2670	72.50
2700	65.00	2700	72.50
2730	65.00	2730	72.50
2760	65.02	2760	72.55
2790	65.10	2790	72.70
		2820	72.80
		2850	72.90
		2880	72.95
		2910	73.00
		2940	73.03
		2970	73.03
		3000	73.00