力學耦合振盪

作者 2009: 葉千祥、陳廷維、王林
修訂 2010: 傅弘哲、亓天毅

OBJECTIVES

1.由簡正模式找出耦合震盪之ω_s、ω_a。
2.觀察弱耦合之能量傳遞，並使用 FFT (Fast Fourier Transform) 找出耦合震盪之ω_s、ω_a。
3.觀察強迫耦合震盪之運動模式，外力以及兩滑車間的相位差。

PRE-LAB READING

Introduction

(一)耦合振盪(Coupled Oscillation)

兩物體質量 m，和三條彈簧連接如下圖，由左至右彈性係數分別為 k、k'、k
此裝置運動模式稱為耦合振盪，運動方程為

$$\begin{cases}\text{force on } m_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) \\ \text{force on } m_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)\end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = 0\end{cases} \quad (1)$$

預期作簡諧振盪，拆解為 $x_1(t) = C_1 e^{iwt}$ $x_2(t) = C_2 e^{iwt}$ ，代入上式

$$\begin{cases} -m\omega^2 C_1 e^{iwt} + (k+k')C_1 e^{iwt} - k'C_2 e^{iwt} = 0 \\ -m\omega^2 C_2 e^{iwt} + (k+k')C_2 e^{iwt} - k'C_1 e^{iwt} = 0 \end{cases}$$ ，消去 e^{iwt} 得

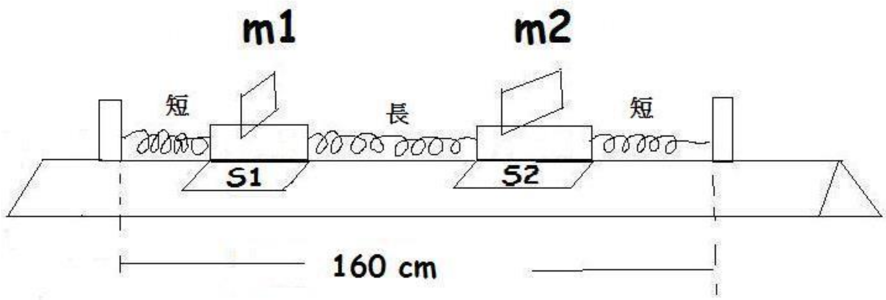
$$\begin{cases} (k+k'-m\omega^2)C_1 - k'C_2 = 0 \\ -k'C_1 + (k+k'-m\omega^2)C_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

若C_1、C_2有解(C_1、C_2不同時 $= 0$)，則 $\begin{vmatrix} k+k'-m\omega^2 & -k' \\ -k' & k+k'-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$

(If the homogeneous equation has solutions other than trivial solution if and only if the determinant is 0)

Thus, $\omega = \pm\sqrt{\frac{k+k'\pm k'}{m}}$ define $\omega_a = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$ ， $\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$

General solution: $$\begin{cases} x_1(t) = A_{1a}e^{i\omega_a t} + B_1 a e^{-i\omega_a t} + A_{1b}e^{i\omega_s t} + B_{2b}e^{-i\omega_s t} \\ x_2(t) = A_{2a}e^{i\omega_a t} + B_{2a}e^{-i\omega_a t} + A_{2b}e^{i\omega_s t} + B_{2b}e^{-i\omega_s t} \end{cases} \quad (3)$$



圖一、耦合振盪裝置

簡正對稱模式:

若$\omega=\omega_s$，帶回方程(2)，得$C_1=C_2$，$x_1(t)=x_2(t)$，兩物體同方向運動，振幅相同，兩物體同步，可視為k' 沒有作用，兩物體分別做相同之簡諧震盪。

簡正反對稱模式:

若$\omega=\omega_a$，帶回方程(2)，得$C_1=-C_2$，$x_1(t)=-x_2(t)$，兩物體反方向運動、振幅相同，且k'-彈簧中心點洽為系統質心，可把k'-彈簧視為兩個 $2k'$-彈簧的串連，兩物體作方向相反之簡諧運動，等效之彈力常數為 $k+2k'$。

弱耦合

若$k'\ll k$，define $\epsilon=k'/2k\ll 1$ ，固定任一物體，另一物體共振自然頻率為$\omega_0=\sqrt{\frac{k+k'}{m}}$

$$\begin{cases}\omega_a=\sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sqrt{1+4\epsilon}\cong\sqrt{\dfrac{k}{m}}(1+2\epsilon)=\omega_0(1-\epsilon)(1+2\epsilon)=\omega_0(1+\epsilon)\\ \omega_s=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cong\omega_0(1-\epsilon)\end{cases}$$

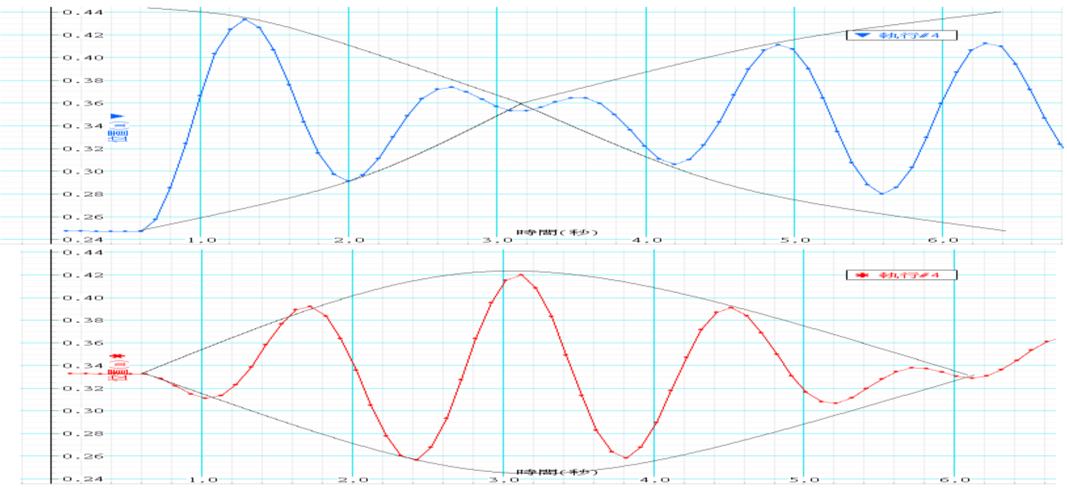
$$\text{運用}\begin{cases}\omega=\omega_s\text{，}x_1(t)=x_2(t)\\ \omega=\omega_a\text{，}x_1(t)=-x_2(t)\\ \text{initial conditions are } x_1(0)=\alpha,\ \dot{x}_1(0)=0,\ x_2(0)=0,\ \dot{x}_2(0)=0\end{cases}$$

將之代入(3)， 得

$$\begin{cases}x_1(t)=\alpha\cos\left(\dfrac{\omega_a t-\omega_s t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\omega_a t+\omega_s t}{2}\right)=\alpha\cos(\epsilon\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)=\alpha'\cos(\omega_0 t)'\\ x_2(t)=\alpha\sin\left(\dfrac{\omega_a t-\omega_s t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\omega_a t+\omega_s t}{2}\right)=\alpha\sin(\epsilon\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)=\alpha''\sin(\omega_0 t)\end{cases}$$

Where $\begin{cases}\alpha'=\alpha\cos(\epsilon\omega_0 t)\\ \alpha''=\alpha\sin(\epsilon\omega_0 t)\end{cases}$

兩物體振幅-時間關係如下，小波形(頻率$=\omega_0$)，大波形 (頻率 $=\epsilon\omega_0$)，能量在兩物體間來回傳遞。我們可知滑車之耦合震盪的任一模式皆是由兩簡正模式組合而成，所以利用快速傳



圖二、弱耦合。上圖為$x_1(t)$，下圖為$x_2(t)$

立葉變換(FFT)我們就可將以上的圖中變為兩個周期函數的組合，這兩個函數即為簡正模式的運動函數，進而求出兩自然頻率ω_s, $\omega_a$$\omega_s$與 ω_a。

(二)強迫振盪

如上圖強迫振盪裝置，在耦合振盪裝置的一端接上一區動力$F_0\cos\omega t$，運動方程為

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = F_0\cos\omega t \\ m\ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = 0 \end{cases} \quad 求X_p，假設\begin{cases} x_1(t) = D_1\cos\omega t \\ x_2(t) = D_2\cos\omega t \end{cases}$$

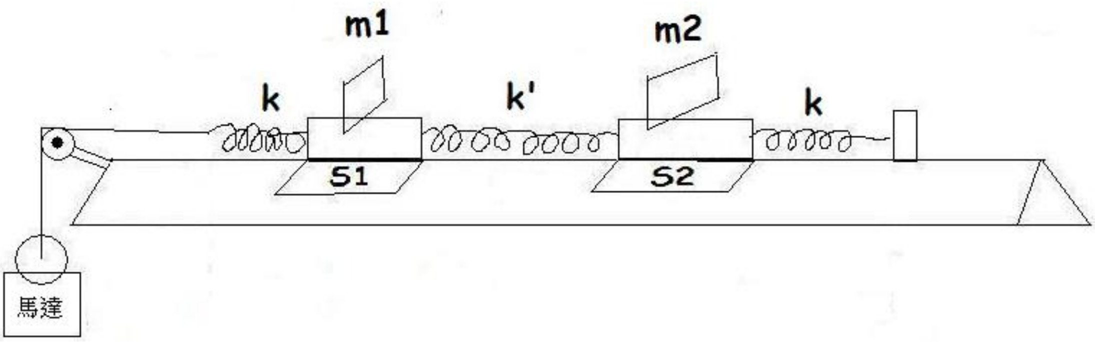
帶回方程，令 $(k+k')/m = \omega_0$，得$\begin{cases} (\omega_0{}^2 - \omega^2)D_1 - \frac{k'}{m}D_2 = F_0 \\ -\frac{k'}{m}D_1 + (\omega_0{}^2 - \omega^2)D_2 = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{F_0/m(\omega_0{}^2-\omega^2)}{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2-\left(\frac{k'}{m}\right)^2} \\ D_2 = \dfrac{F_0/m(\frac{k'}{m})}{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2-\left(\frac{k'}{m}\right)^2} \end{cases} \quad \xrightarrow{\frac{k'}{m} = \omega_a{}^2-\omega_0{}^2，2\omega_0{}^2 = \omega_a{}^2+\omega_s{}^2} \quad \begin{cases} D_1 = \dfrac{F_0/m(\omega_0{}^2-\omega^2)}{(\omega_s{}^2-\omega^2)(\omega_a{}^2-\omega^2)} \\ D_2 = \dfrac{F_0/m(\omega_0{}^2-\omega_s{}^2)}{(\omega_s{}^2-\omega^2)(\omega_a{}^2-\omega^2)} \end{cases}$$

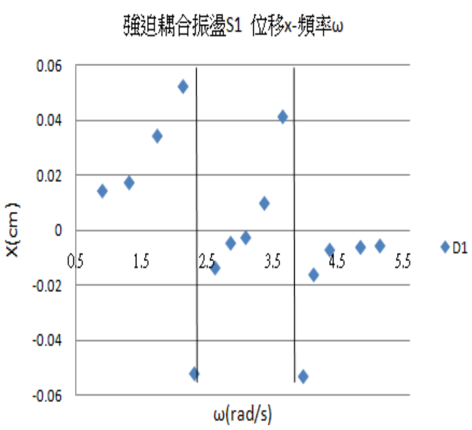
把D_1、D_2對ω作圖，當滑車移動方向和驅動力拉的方向相同時，相位相同(in phase)，振幅為正；反向時，相位相反(out of phase)，振幅為負。

運動頻率$\omega < \omega_0$(ω_s附近)，兩滑車同方向運動；$\omega > \omega_0$(ω_a附近)，兩滑車反方向運動

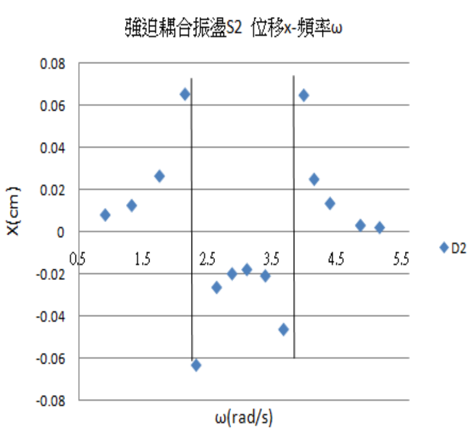
- 實驗用到的公式:(簡諧振盪找 k)$k=4\frac{\pi^2 m}{T^2}$，$\omega_a = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$，$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k+k'}{m}}$



圖三、強迫振盪裝置圖



圖四、強迫耦合振盪滑車 1 位移對頻率關係



圖五、強迫耦合振盪滑車 2 位移對頻率關係圖

Apparatus

Pre-lab Question

1.什麼是簡正模式(normal mode)？對稱模式？反對稱模式？

2.弱耦合條件為？

Generalized procedure

Part 1. 使滑車在簡正模式下做耦合振盪，觀察且找出 ω_s、ω_a。

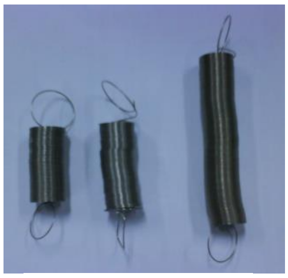
Part 2. 觀察弱耦合震盪時最大位移與時間關係，並利用 FFT 找出ω_s、ω_a。

Part 3. 找出作強迫耦合振盪的滑車其振幅和頻率ω的關係，作振幅 x-頻率ω關係圖，觀察兩滑車之間和各自與驅動力間的相位差。

移動式固定端*2

滑車＋擋板＋磁鐵+彈簧鉤

移動感應器*2
轉動感應器*1

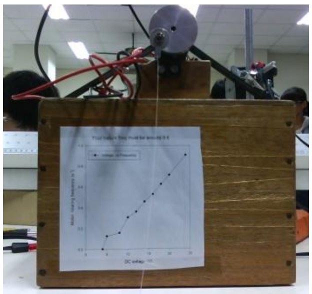


彈簧(1 長 2 短)

4 個磁鐵

黑盒子(連接感應器與電腦)*1

掛勾+數個 10g 砝碼(驗證彈簧 K 值)



馬達(貼輸入電壓 volt-頻率 f 圖)*1

送風機(要開到最大)*1

直流電源供應器(<24V)

IN-LAB ACTIVITES

Experimental Setup

1.測滑車、滑車+磁鐵+加彈簧鉤＋檔板、掛勾及砝碼(1、2 個就夠)的質量。

2.利用掛鉤及砝碼以 F = mg = kΔx 測彈簧 k 值(一長二短)，若彈簧已有標示彈力常數則不需花太多時間在此處。

3.把送風機開最大。把滑車放到滑軌上，測是否水平，若否，調整之，使滑車靜止或作小振幅來回振盪。

4.把兩個移動感應器連接到黑盒子， 1、2 號插孔一組(通道 1、2)，3、4 號一組(通道 3、4)，分別連接一個感應器，並**記住每一移動感應器所對應到的插孔(分別測量不同的滑車)**，接法如圖八。

5.將感應器與電腦連接，依照 Appendix 把 DataStudio 軟體設置好。

注意：

1.小心不要使感應器碰到彈簧、滑車。

2.直流電源供應器不要超過 24V。

MEASUREMENTS

Part.1-1 耦合振盪簡正模式

將兩個雙面加磁鐵的滑車、彈簧組(1 長 2 短)設置如圖九

注意若兩邊的彈簧 k 值誤差超過 5%，請更換彈簧(為 part3 作準備)

對稱；把兩滑車同時右移各 5cm，**同時**放手，紀錄振盪模式，可利用 origin pro 以 sine damping 作擬合找出ω_s。

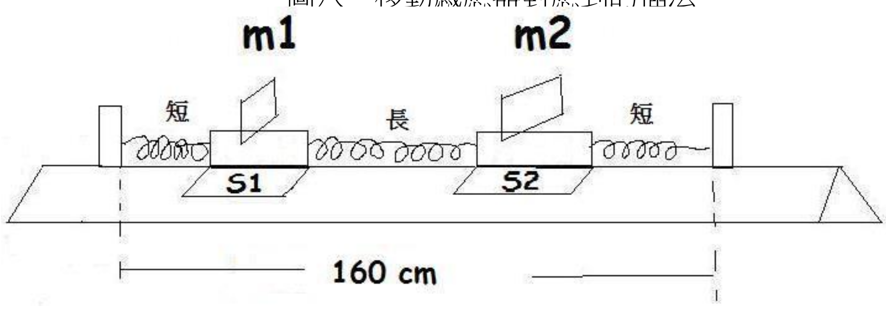
反對稱：把兩滑車往反方向各移 5cm，**同時**放手，以與前項相同方式找出ω_a

Question: 為什麼要同時放手?

Part.1-2 弱耦合

滑車、彈簧組設置如 part.1-1。注意中間彈簧是長的，兩側是短的

圖八、移動感應器對應到的插法



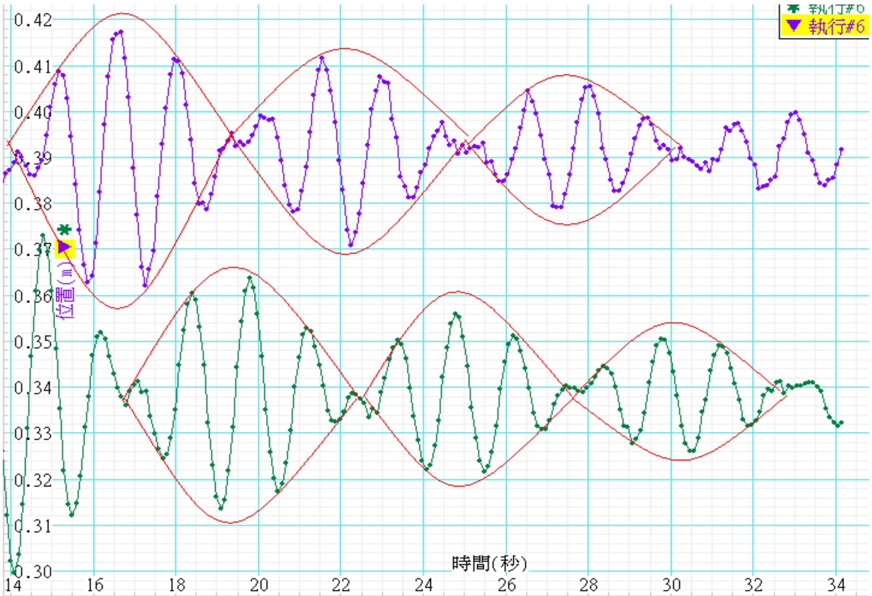
圖九、耦合振盪裝置

Question:

1.是否一個為 sin 函數圖形?另一個為 cos 函數圖形?

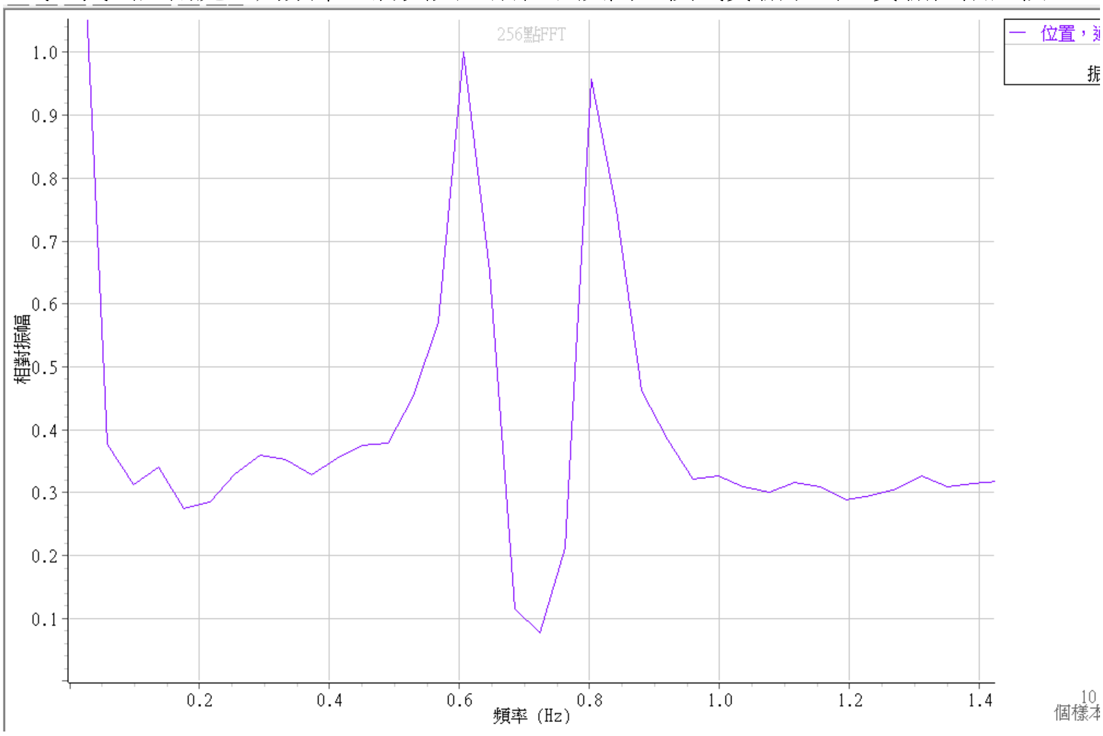
2.是否 FFT 圖有兩個峰值？個別代表什麼？

滑車 1 平移 10cm，滑車 2 保持在原位置不動，將兩者同時釋放。



圖十二、弱耦合之 x-t 圖 ，可畫出包線以易於觀察。

對以上圖形作 FFT(Data Studio 及 origin pro 皆具有此功能)，並找出兩個峰值，這兩個峰值就是在傅立葉變換中對這個周期函數貢獻最大的兩個函數，也就是簡正模式，找出這兩處之角頻率，將其與理論值以及簡正模式實驗求出之實驗值做比較。



圖十三、弱耦合-改變初始條件之 FFT 圖 ，有兩個峰值

Part.2 強迫耦合振盪

加磁鐵的滑車*2、彈簧組(1 長 2 短)如圖十設置，靠桌緣的一端用細線繞過滑輪連接馬達。

1.兩個短彈簧 k 植物差不要超過 5%

2.可視振幅大小增加彈簧滑車組長度；兩個移動感應器要同方向

3.馬達放地下，可使細繩和滑輪間的夾角變小，使驅動力趨近於 sin 函數

馬達接直流電源供應器，由 15V 開始，每 0.5V 測一組振幅 X、週期 T。

注意觀察馬達拉細繩的方向、滑車 1 的移動方向、滑車 2 的移動方向。在振盪穩定情況下，當馬達拉細繩的移動方向和滑車 1 相同時，即為同相(in phase)，此時振幅為正；反之，振幅為負。由此大略可出拉力、滑車 1、滑車 2 之間的相位關係。另外找出兩滑車間相位差並對頻率作圖。

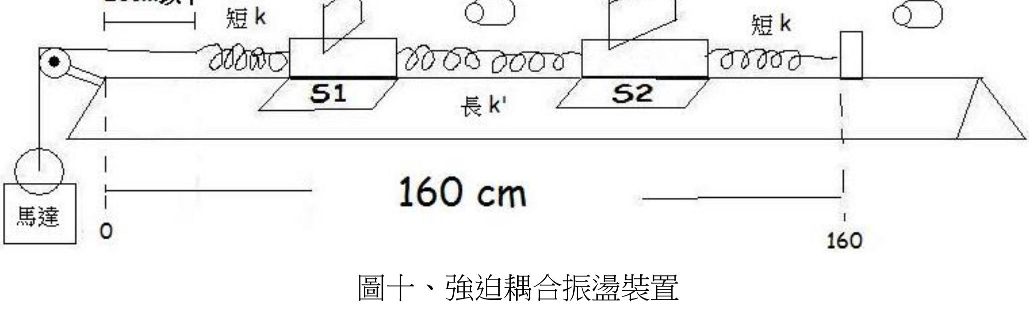
接著將其中一組移動感應器換成偵測馬達之轉動感應器，精細測量兩者間之相位差，依此結果和前段找出之兩滑車間之相位差即可算出另一滑車與外力間的相位差，將兩滑吃和外力間的相位差分別對頻率作圖。

1.請先算出ω_a、ω_s理論值或由 part2 找出的ω_a、ω_s，參照馬達上的
V-f 圖判斷合理的 V 值範圍

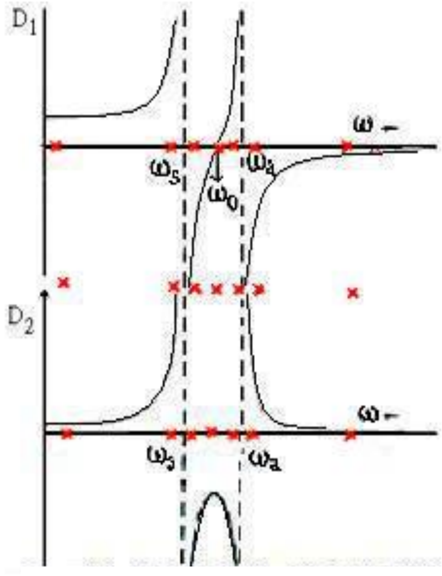
2.用 origin pro 對每個電壓下穩定之區段作 fitting，找出頻率及振幅，再將圖形重疊找出相位差(見 Appendix)

3.也可用 dadastudio 把 S1 及 S2 的圖疊在一起，若為波峰對波峰，
則為同相；波峰對波谷，為反相。(sensor 同方向時)

4.要注意得刪掉剛開始振盪不穩定的部分。



圖十、強迫耦合振盪裝置



圖十一、強迫耦合振盪兩滑車振幅(D)對頻率(ω)關係圖

相位差找法

相位差 $= 2\pi\frac{t_1-t_2}{T(\text{週期})}$(定義域定為$-\pi \sim \pi$)

若結果 $> 2\pi$ 或 $< -2\pi$ ，加減2π使結果在定義域內

最後取絕對值使定義域為 $0 \sim \pi$

由週期 or f(Hz)求$\omega = 2\pi/T(=2\pi f)$，運用觀察到的相位關係作$x-\omega$圖。由圖找出ω_s及ω_a

事實上，要作$x-\omega$圖，只要知道何時滑車 1 和滑車 2 振動方向由相同變成相反時即可，的伏特值 or $x-\omega$值標記即可

Question:

1.為何兩個移動感應器要同方向? 反方向可以嗎? 有需如何修正?

2.如何確定系統達振盪平衡狀態?

3.相位差的正負號的物理意義? 為何可以取絕對值?

Further Question

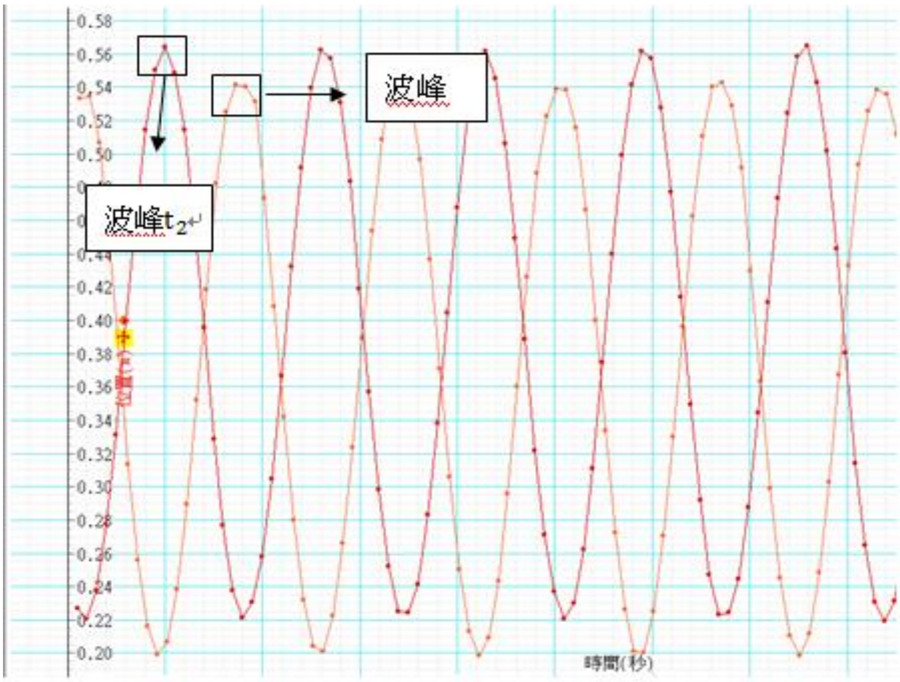
1..滑軌的水平會影響實驗嗎？討論之。

2.為什麼 part.1 耦合振盪的滑車要加磁鐵？

3.為什麼 part.2 強迫耦合振盪要加磁鐵？

4.弱耦合圖形大波形和小波形的物理意義?

5.若耦合振盪有三個物體質量 m、四個 k-彈簧，如下圖，試找出簡正模式。

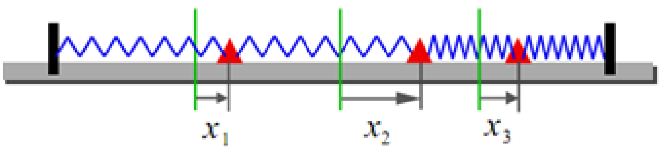


Hint:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}(2x_1 - x_2)$$

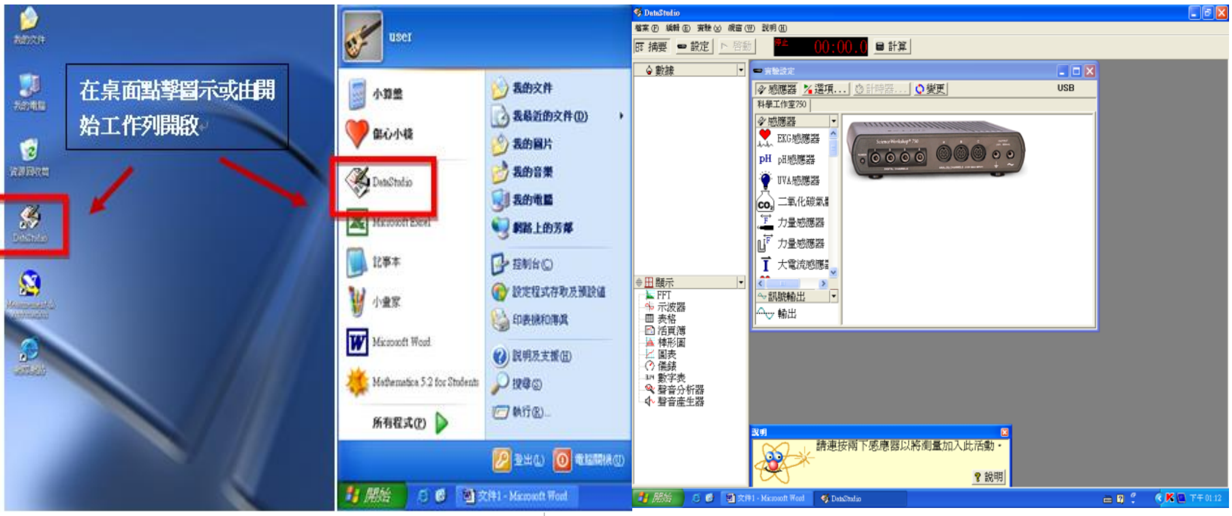
$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m}(-x_1 + 2x_2 - x_3)$$ find eigenvalues and eigenvectors $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{k}{m}(-x_2 + 2x_3)$$

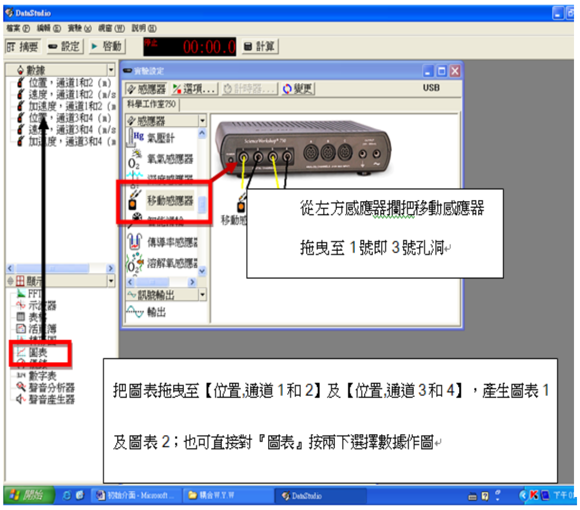


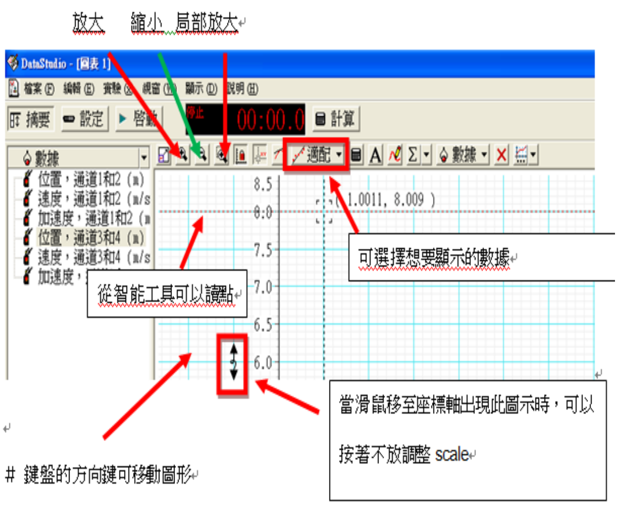
Appendix：DataStudio 操作及讀圖方法

DataStudio 軟體可在 goole 搜尋『pasco datastudio』下載之(90 天試用)，另外搜尋『dadastudio 實驗』可找到軟體中文說明

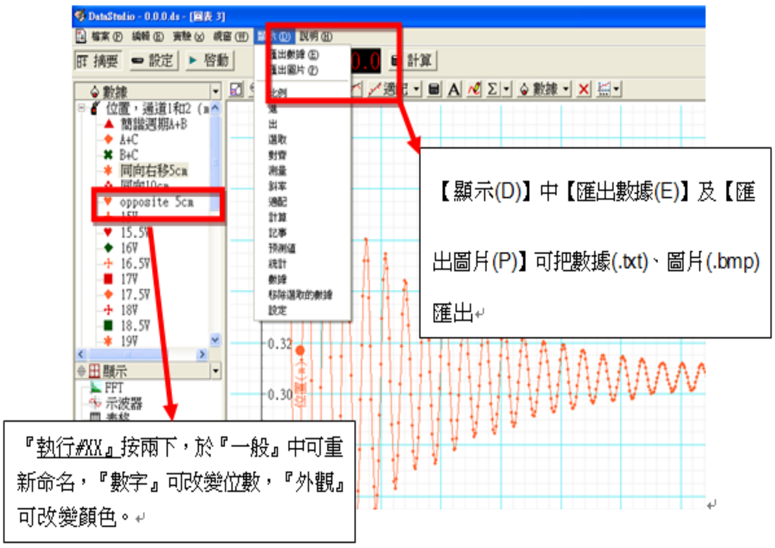


設置與基本操作

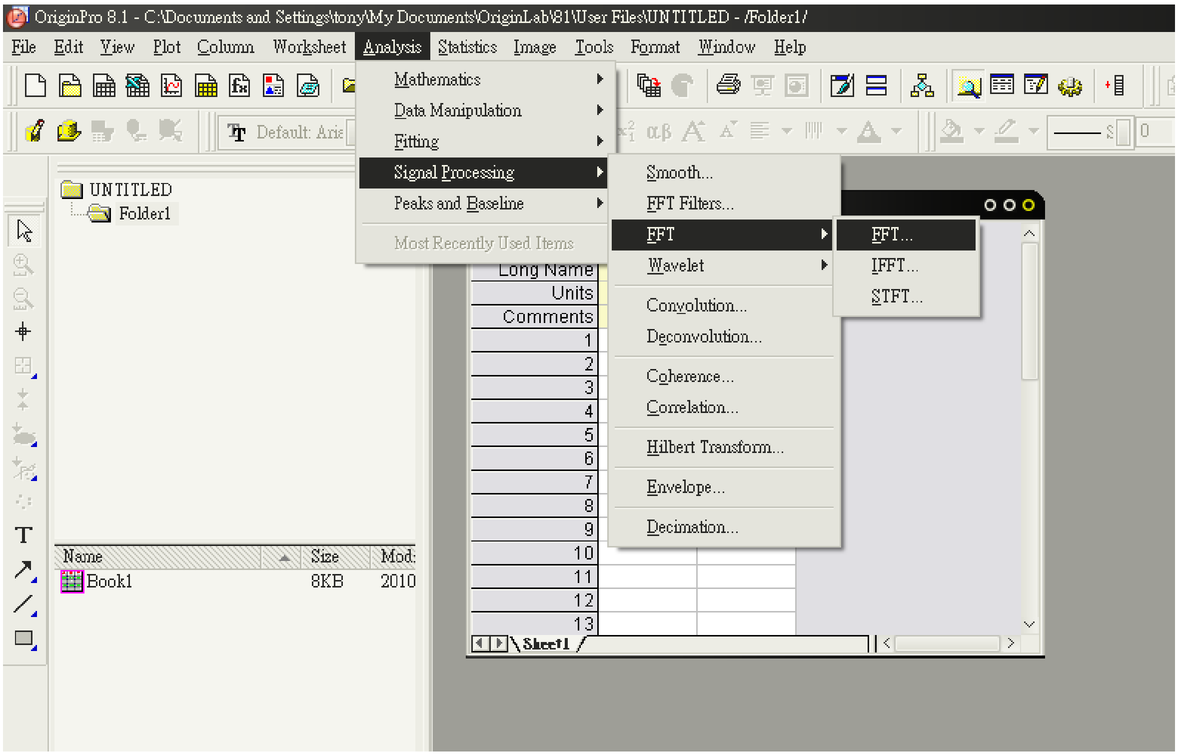




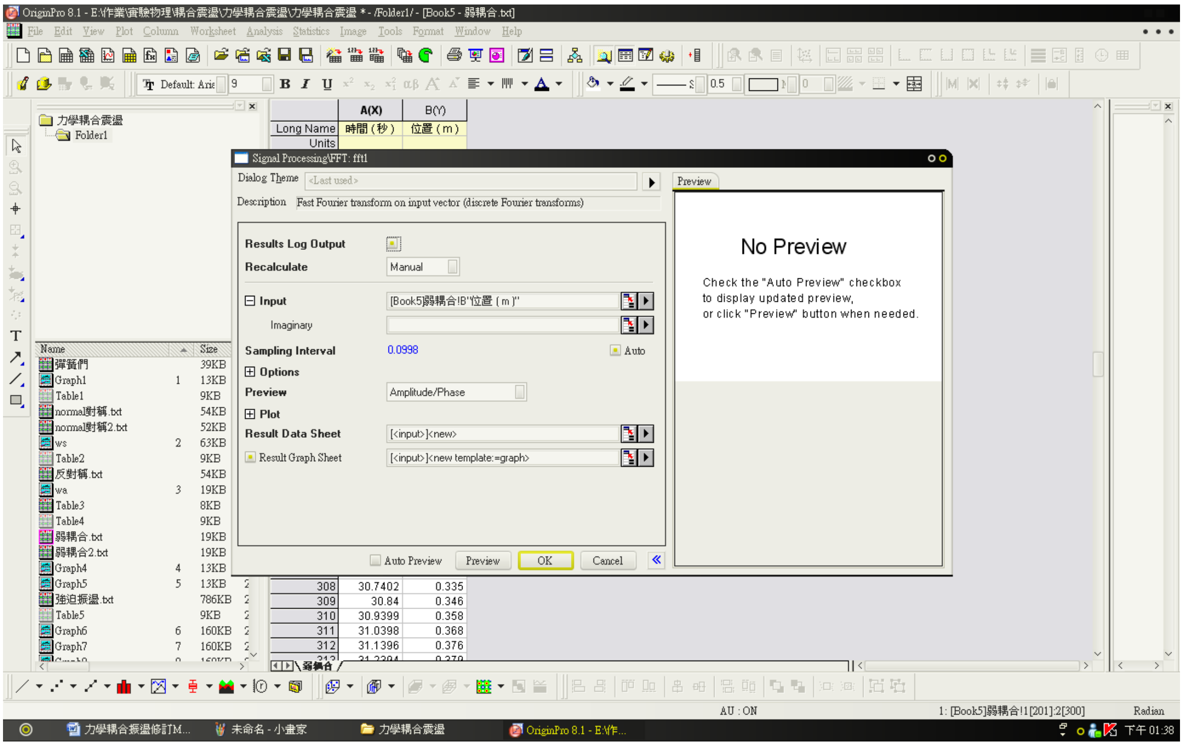
匯出數據、圖形



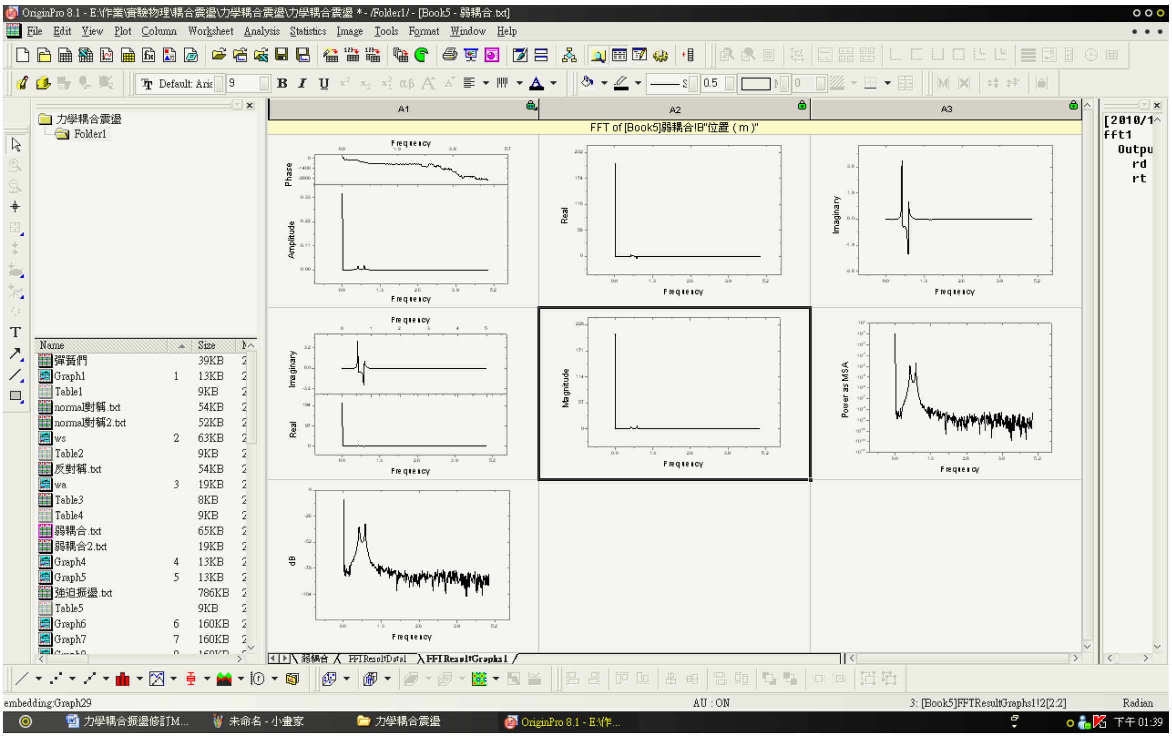
使用 OriginPro8.1 進行 FFT(Fast Fourier Transform)



反白選取弱耦合的數據，如圖示進行 FFT。



直接點選 OK



FFT Sheet 裡找到振幅對頻率的圖，調整座標範圍，最後結果如下圖