基于 Matlab 环境的弦振动方程的图像与音效模拟

□ 李 韵 郭怡文 吕郁文

(武汉大学电子信息学院 湖北·武汉 430000)

摘 要：本文将从波动方程入手，引申出声学弦振动的物理意义，在有界边界条件下，讨论一维情况下的驻波，给出弦振动方程的一般解。利用电吉它的例子，在 Matlab 环境中给出实例的振动模拟与音效模拟，进一步理解方程所描述的物理现象，使数理方程解的形式更为直观。

关键词：波动方程 MATLAB 仿真 振动模拟 音效模拟

中图分类号：O46 中图分类号：A 文章编码：1007-3973(2009)07-074-02

振动和波动是物体运动的两种基本形式，两者有着密切的联系。振动是波动的根源，波动是振动的传播形式。机械振动在介质内的传播形成机械波。电磁振动在真空或介质内的传播形成电磁波。不同性质的振动的传播机制虽不相同，但由此形成的波却具有共同的规律性。

作为波动一类特殊形式，弦振动在声音学中的地位尤为重要。声学是力学的一个分支，但在早期它几乎是独立发展的。自从毕达哥拉斯以来，声学研究方面一直没有什么重大的进展。直到十七世纪初叶，才有了一些显著性的进展。在现代，弦振动的理论，结合新的软硬件工具，在许多领域诸如音乐物理学、材料学和系统分析中都得到了广泛的应用。下面，我们将以电吉他弦振动为对象进行研究，具体分析弦振动的振动方程，并给出弦上不同位置处的振动图象。

1 一根琴弦的横振动

首先，我们来分析一根琴弦的振动。一根均匀柔软的弦受到一个垂直于弦方向的扰动以后开始作小振幅的振动，取绷紧弦的位置为平衡位置，振动的方向垂直于弦的平衡位置，这样的振动称为横振动。

假设弦的平衡位置为 x 轴，取振动中的一段弦元 AB，设弦的线密度是，两端受到的张力为 T，作用在单位质量上的外力是 f(x,t)，方向沿着 y 轴，弦的初始位移和初始速度分别用 ϕ(x)和 φ(x)表示，弦元偏离平衡位置的距离是 u(x,t)。可以列出下列方程组：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \quad (0\leqslant x\leqslant l) \\ u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0 \\ u(x,0)=\phi(x) \quad u_t(x,0)=\phi(x) \end{cases}$$

解之可得到弦的横振动方程：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中：

$$a^2=\frac{T}{\rho},(a>0)$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$B_n=\frac{1}{n\pi a}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

那么，我们这里引入电吉他作为研究对象。电吉他的琴弦从弦枕到琴马全长为 868mm，弦的直径为 2.696mm，由于琴弦是钢弦，可以近似取为 7.9g/。把琴弦的振动看作两端固定于 x 轴上 0、l 两点处的拉紧的弦的横振动问题。那么，它的波动表达式为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中 v 为弦的传播速度，$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$；这里由于振动的角度很小，可以假设 T 是一恒定值为 128N；ρ 为线密度，即弦线的质量与长度之比，在此[illegible]g/cm³；算出 m/s。

演奏吉他比较常见的一种技法是拨弦。拨弦即用手指把琴弦拨离平衡位置，使其振动发声。这相当于在 x=a 处把弦拉高到高度 h，然后松开，使其自由振动，即弦振动的初始位移不为零而初速度为零，则：

$$u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2a(l-a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l}*\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)$$

(1)假设在琴弦的正中间拨弦，则 $a=\frac{1}{2}l$，取值为 434mm，拨弦高度 h 为 4mm，则可以得到：

$$\phi(x)=\begin{cases}\frac{4}{434}x & 0\le x\le 434\\ \frac{4(868-x)}{434} & 434\le x\le 868\end{cases}$$

$$\varphi(x)=0$$

波动表达式为：

$$u(x,t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{n\pi}{2})\sin(\frac{n\pi x}{l})\cos(\frac{n\pi v}{l}t)$$

其中 x 为质点的坐标，取弦上均匀分布的三个点为观察对象，易得整根弦的质点运动情况关于拨弦点对称，故可以令 $\frac{x}{l}$ 分别为 1/6，1/3，1/2 来观察振动情况，

$$u_{1/6}(t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{6}\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)$$

$$u_{1/3}(t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)$$

$$u_{1/2}(t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)$$

比较以上三个点的振动情况，可大致得出整根弦线的振动情况。

(2)假设在弦的 1/3 处拨弦，令 $a=\frac{1}{3}l$，取值为 289mm，拨弦高度 h 为 4mm，则可以得到：

$$u(x,t)=\frac{9h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi vt}{l}$$

令分别为 1/6，1/3，1/2，得

$$u_{1/6}(t)=\frac{9h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{6}\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)$$

$$u_{1/6}(t)=\frac{9h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)$$

$$u_{1/6}(t)=\frac{9h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)$$

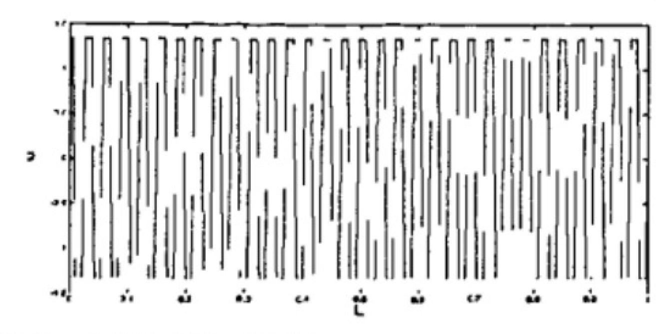
2 Matlab 环境下仿真

2.1 弦的振动的可视化数值模拟

由上一章所述，在琴弦的 1/6 点处：

$$u_{1/6}(t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{6}\cos\left(\frac{53.275n\pi}{838*10^{-3}}t\right)$$

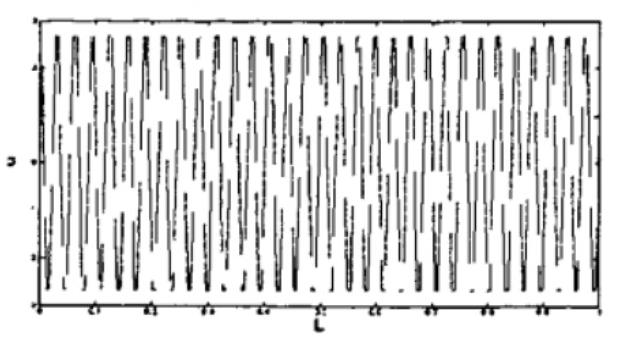
利用 plot 函数可以在 matlab 中画出它的振动图象，得到的图象如下：



同样的，在琴弦的 1/3 处：

$$u_{1/3}(t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\left(\frac{53.275n\pi}{868*10^{-3}}\right)$$

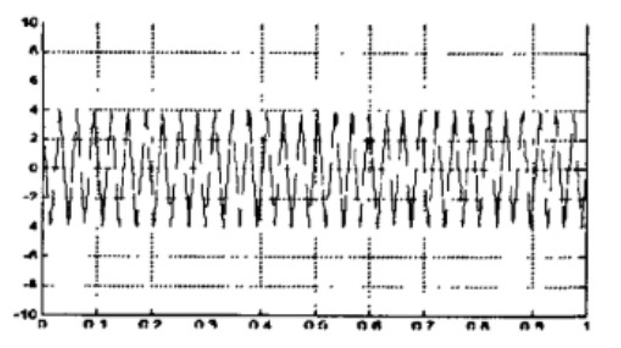
得到的图象如下：



在琴弦的 1/2 处：

$$u_{1/3}(t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\left(\frac{53.275n\pi}{868*10^{-3}}\right)$$

得到的图象如下：

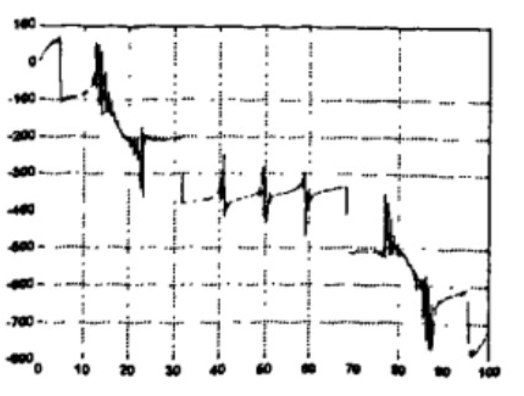


比较三个图形，可以知道：越靠近弦的端点振动的波峰持续越长，振动的幅度越小，声音越浑厚低沉；越靠近弦的中点，振动的波峰持续越短，振动的幅度越大，声音越清亮高昂，幅值响应对应于拨弦点的不同而不同。并且可以知道，对这条弦上的所有质点来说，它们振动的频率都是一样的，这是与实际情况相符合的。

2.2 弦的振动的频谱分析

从公式中可以看出，弦振动的频率是由许多不同的频率成份所组成，如果设振动的基频为 f，则其它的频率为 nf，n 取正整数。为了较好地仿真它的声音，需要从这些频率成分中拣选出最主要的成分来模拟。这里要用到快速傅立叶变换。

以弦上质点震动的频率为横坐标，振幅为纵坐标，在 matlab 中绘出图形，得到的相频的图象为：



可以看出，在 30~100Hz 频率段，振动的幅度最大，也就是说这个频率段发出的声音最大。考虑到人耳所能听到的声音频率范围是 20Hz~20kHz，那么在实际生活中，人耳接受到的这根弦发出的声音主要就是由这个频率段的声波所构成。U 是关于 x，t 的方程，由于弦线上各质点的振动频率一样，可以知道在原式中：

$$u(x,t)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

则：

$$\omega=2\pi f=\frac{n\pi v}{l}$$

$$f=\frac{nv}{2l}=\frac{53.275n}{2\times 838\times 10^{-3}}=31.787n$$

且振动的主要成份 f∈(30,100)

可以得出 n 的取值分别为 1、2、3；对应的 f 为 31.878、63.756、95.634。

考察

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi v}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

余弦分量为：

$$A_n=\frac{32}{\pi^2n^2}\sin\frac{1}{2}n\pi$$

则：

$$A_1=\frac{32}{\pi^2}\sin\frac{1}{2}\pi=\frac{32}{\pi^2}$$

$$A_2=\frac{32}{\pi^2}+\frac{32}{4\pi^2}\sin(\frac{2}{2}\pi)=\frac{32}{\pi^2}$$

$$A_3=2\times\frac{32}{\pi^2}+\frac{32}{9\pi^2}\sin(\frac{3\pi}{2})=\frac{17\times 64}{18\pi^2}$$

分别为对应频率下的振动幅度。

2.3 弦的振动的音效模拟

最后，将算得的弦振动方程在 Matlab 环境下模拟出相应的振动声音。

经过对于弦振动方程的有限阶的数值模拟，我们发现，模拟的声音始终非常的苍白单调，就好像弹棉花一样。事实上，单单弦振动的发声也的确很苍白、单调，一般的弦乐器之所以能发出和谐、美妙的声音，是因为它们都带有一个谐振的腔体。由谐振腔产生的泛音与弦本身发出的声音混合，产生和弦，才会使发出的声音显得和谐、美妙。

3 结论

本文从弦振动方程入手，讨论了一维情况下的驻波振动情况，给出了弦振动方程的，并在 Matlab 环境中给出实例的数值模拟与音效模拟。在明确弦振动方程中各参量的物理意义的基础上，基于 Matlab，给出可以模拟弦振动的 M 文件，研究了弦振动发声的声学原理。

参考文献：

[1] 霍泰山.数学物理方法[D].武汉大学电子信息学院,2003.
[2] 曾弋.赵阳.MATLAB 实用教程[M].电子工业出版社,2004.
[3] 邹鲲,袁俊泉,龚享铱.MATLAB 6.x 信号处理[M].清华大学出版社,2002.
[4] 曾亮.用弦的振动分析电贝司发声原理[M].清华大学数学科学系,2002.
[5] 郝玉华.一维弦振动方程的可视化处理[J].盐城工学院学报(自然科学版).