混 沌 振 动 研 究

方法与实践

龙运佳

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

混沌振动是机械振动理论正在发展中的分支。本书从工程角度,用科技人员能理解的简明语言,全面系统、由浅入深地介绍其基本概念、理论与方法。书中包括最近的新实践、新应用、新产品。全书图文并茂,内容丰富,分为 5 个部分 21 章、第一部分,概念与方法; 第二部分,应用与新例; 第三部分,测试与调控; 第四部分,产品与专利; 第五部分,文献与资料。

本书可供高校师生、科技人员阅读,也可作为大学有关课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

混沌振动研究: 方法与实践/龙运佳编著 .- 北京:清华大学出版社,1996

ISBN 7-302-02392-1

Ⅰ.混… Ⅱ.龙… Ⅲ.非线性振动-研究 Ⅳ.0322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 23710 号

出版者: 清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)
印刷者: 北京清华园胶印厂
发行者: 新华书店总店北京科技发行所
开　本: 850×1168 1/32 印张: 5 字数: 113 千字
版　次: 1997 年 4 月第 1 版 1997 年 4 月第 1 次印刷
书　号: ISBN 7-302-02392-1/TB·23
印　数: 0001—2000
定　价: 8.00 元

目　　录

序

在非线性振动系统中，即使为单自由度系统，当参数满足一定条件时，输入确定性激励后，却输出类似随机的宽频响应。因而，在机械振动理论中，兴起一个新分支——混沌振动。

因从简单的非线性机械系统即可得到这种具有宽频谱的混沌振动，而其振动作业的功效又往往高于简谐振动，故使混沌振动的应用研究吸引了国际、国内、军方、民间的众多学者，其中以美国康奈尔大学的研究较早，但至今尚未见产品。

1996 年，我们研制的混沌激振器与混沌振动台产品均取得了国家专利。它们在工业、农业、土建、水利、军备等部门，可用于振动压实，筛选，分离，粉碎，钻进，打桩等各种振动作业。

混沌沟通了有序与无序，确定与随机之间的联系，是人类认识世界的新飞跃，也是改造世界的新科技。混沌振动的普遍应用将是人类利用振动的一次突破性技术进步，其科学价值在于：从实践上证实了混沌振动的普遍性、可控性与可用性。

现在，混沌振动的研究已遍及各工程领域，本书旨在用科技人员能够理解的语言，结合工程力学系统来叙述混沌振动的概念与方法(第一部分)，应用与新例(第二部分)，测试与调控(第三部分)，产品与专利(第四部分)，文献与资料(第五部分)。

本专著为中国农业大学研究生“工程系统混沌振动”研究方向

的参考书，由 1995 年原北京农业工程大学研究生"混沌振动"课程参考书"混沌振动实验识别及其发生机构参数研究"增新而成，可供机械、力学各专业师生和科研人员参考。

作　者

1996.3

本研究属国家自然科学基金委员会材料与工程科学部资助项目(59275173)。

第一部分　概念与方法

第1章　绪　　言

1.1　工程混沌振动

混沌(chaos)指发生在确定性系统中貌似随机的不规则运动。按传统观念,当确定性系统的参数不带随机性时,对确定性激励的响应也必是确定性的。但现已证实,由于系统的非线性,满足一定条件的振动系统,受规则激励后也会产生貌似无规永不重复的振动响应——混沌振动。

混沌研究的鼻祖是法国H.Poincare(1854～1912),虽然他没用chaos这个词。当时他研究能不能从数学上证明太阳系的稳定性问题,发现即使只有三个星体的模型,仍产生明显随机的结果。

1963年,美国E.N.Lorenz对一个完全确定的三阶常微分方程用计算机作数值计算,却得到杂乱的解。当时计算机速度很慢,Lorenz出去喝了一杯咖啡,就算出完全不同的结果。他还以为机器出了毛病,后来认识到是由于喝咖啡前将中间计算结果送进机器,因初值微异所致。Lorenz发现混沌的同时,发现了混沌对初条件的极端敏感。

1971年,法国Ruelle和荷兰Takens一起创造了“奇怪吸引子”这个术语,他们形容为“一簇曲线,一团斑点,有时展现为光彩夺目的星云或烟火,有时展现为非常可怕和令人生厌的花丛,数不清的形式有待探讨,有待发现。”

1973年,日本京都大学上田(Y.Ueda)在用计算机研究非线性振动时,发现了一种杂乱振动形态,称为Uede吸引子。

1975 年, 李天印(T. Y. Li) 和 J. A. Yorke 在他们的论文中, 首先提出 chaos(混沌) 这个词, 并为后来的学者所接受。

1978 年, M. J. Feigenbaum 用手摇计算器彻夜工作, 发现一类周期倍化通向混沌的道路中的普适常数。这个结果太奇怪了, 使杂志拒登其论文达 3 年之久。

1979 年美国 P. J. Holmes 作了磁场中曲片受简谐激励时的振动实验, 发现激励频率和振幅超过特定值后, 就出现混沌振动。

1980 年, 意大利 V. Franceschini 用计算机研究流体从平流过渡到湍流时, 发现了周期倍化现象, 验证了 Feigenbaum 常数。

1981 年, 美国麻省理工学院 P. S. Linsay 第一次用实验证明了 Feigenbaum 常数。

现在, 各工程学科都有混沌振动的实例, 迄今已有论文上千篇, 开过多次国际会议, 如:

1981 年 8 月, 在丹麦召开的第 16 届国际理论与应用力学大会(ICTAM), 混沌是其主要论题之一;

1989 年, 在前苏联基辅举行了全球的第 4 届非线性力学大会, 重点讨论了混沌问题;

1989 年, 召开美苏混沌讨论会;

1990 年, 在德国专门召开了分岔与混沌研讨会;

1991 年 4 月, 在日本由联合国大学与东京大学共同召开"混沌对科学与社会的影响"的国际会议;

1991 年 10 月, 在美国召开了首届实验混沌研讨会。

作为机械振动理论的新分支, 混沌振动正成为一个很活跃的研究领域。

以往, 在工程中之所以对混沌没加注意是因为:

1. 混沌振动数学理论深奥, 鲜为工程人员所知;

2. 工程人员的力学知识, 以确定论为主, 如理论力学, 又以线性论为主, 如线性振动, 模态分析;

3. 工程人员用计算机计算的能力还没有得到今天这样的突破;

4. 信号处理机的应用还没有达到今日如此之普及;

5. 误认为混沌不可控,没法用。

但实际工程中的很多现象,要用混沌振动才能得到恰当解释,如下列的非线性系统之振动:

机器人手臂振动;

多自由度摆的振动;

振动造形机的碰撞振动;

多级透平扭振;

多索吊桥摆振;

火车蛇行振动;

汽车导向轮摆振;

打印机打字头的振动;

管道振动;

………………

当速度达到一定后,会产生混沌振动。

一般,在各种工程振动系统中,若含有

1. 几何非线性或运动关系非线性;

2. 力非线性;

3. 本构关系(由归纳实验数据所得反映宏观物质性质的数学关系)的非线性;

4. 约束条件的非线性;

5. 有多个平衡位置,

就很可能存在混沌振动。近几年,国内外学者重视研究分岔现象的原因之一,就是分岔有可能引起复杂的运动——混沌,见文献[59]。

现代混沌的发现被认为是20世纪的三大成就(相对论、量子

力学、混沌)之一,见文献[12]。它冲破了牛顿力学确定论的约束。它对全部科学(包括自然科学与社会科学乃至哲学)所起之作用相当于微积分学在18世纪对数理科学的影响。它在工程中有广阔的应用前景。

1.2 混沌振动的研究课题

以前,国内外对混沌的研究,以理论研究居多,当今的趋势是:混沌振动的研究已从抽象的数学,转向各领域的工程问题。如在国家自然科学基金委员会资助下的项目有:

黄克累(北京航空航天大学),非线性陀螺系统的稳定性,分岔与混沌(1992～1994);

龙运佳(北京农业工程大学),混沌振动实验识别及其发生机构参数研究(1993～1995);

褚亦清(北京理工大学),非线性振动控制系统的分岔与混沌(1992～1994);

黄文灶(北京大学),动力系统的分岔与混沌及其应用(1992～1994);

张　伟(天津大学),参数与强迫激励联合作用下非线性振动系统的分岔与混沌(1992～1994);

严宗达(天津大学),板壳强迫振动中的混沌现象研究(1993～1995);

陈予恕(天津大学),非线性参数振动系统的全局分岔及其通往混沌的道路(1993～1995);

吴　雅(华中理工大学),非线性机械振动中的分形几何与小波分析的研究(1993～1995);

黄毓瑜(北京航空航天大学),声环境的分维模拟(1993～1995);

赵晓华(云南大学),广义哈密顿扰动系统的分岔和混沌研究及在力学中的应用(1993～1995);

段　雄(中国矿业大学),岩石截割破碎载荷谱的混沌力学模拟(1993～1995);

一般,混沌振动研究的问题有:

1. 机理——研究混沌振动出现的原因;
2. 参数——研究混沌振动出现的条件,估计出现混沌时系统之参数;
3. 通道——研究从规则振动通往混沌振动的道路;
4. 识别——研究混沌振动的定性特征与定量特征,识别的方法与手段;
5. 控制——由混沌振动的多样性(柔性),控制系统参数,灵活地得到所需之各种不同的稳定运动状态;
6. 模拟——用混沌振动装置,作为简单可靠的拟随机振动发生机构,用混沌信号模拟噪音环境。

直接开发利用混沌造福人类的研究,国内外均没有系统展开。混沌振动发生机构在某些工程(机械,土建,运输)的某些振动作业(振动分离,振动筛选,振动检验)中有广阔的应用前景。曾用混沌振动筛做过一个实验:以 18 号筛网筛选 24 号粗砂,以 90 号筛网筛选 100 号细砂,发现在同样能量下,因混沌振动比柔和的简谐振动变化剧烈,而可提高生产率(20～70)%,且网孔越细,效果越明显。

其他相关的研究课题,有与分维有关的一些题目,如下列的国家自然科学基金资助项目:

吴国璋(合肥工业大学),颗粒复合材料断口的分形维数与其静摩擦系数关系的研究(1993～1995);

江来珠(华中理工大学),颗粒型复合材料中颗粒表面分数维对强韧性影响的研究(1993～1995);

1.3 混沌振动产生的数学机理

混沌振动之所以产生是由于非线性振动系统对初始条件的敏感性。为什么初始条件的微小差别会产生捉摸不定的混沌,可以从以下代表离散的非线性动力系统之非线性差分方程看出:

$$x(n+1)=\begin{cases}2x(n) & (0\leq x(n)<0.5)\\ 2x(n-1) & (0.5\leq x(n)\leq 1)\end{cases}\tag{1-1}$$

x 为动态变量。取初值 $x(0)=11/32$, 二进制记作 $x(0)=0.01011......$

逐次迭代得:

$$x(1)=0.1011.......$$
$$x(2)=0.011........$$
$$x(3)=0.11.........$$
$$.....................$$

可见迭代一次,原信息就损失一位,若 $x(0)$ 有 n 位信息,经 n 次迭代,就完全损失原有信息。

由于迭代 n 次后,原来小数点后第 n 位,迭代成第一位,则两个仅有小数点 n 位后微小差别的初值,迭代 n 次后,差别就变大,故非线性系统对初条件的微小差别十分敏感。正如 Poincare 所说,“初条件的微小差别,最终导致根本不同的现象,未来难以预测。”这就是混沌产生的数学机理。

第 2 章　Poincare 映射

2.1　相空间与相轨

若非线性系统,由状态方程表示为

$$\dot{X} = f(X) \tag{2-1}$$

其中 X 为由 n 个状态变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$组成的向量,它决定了系统的一个状态,也叫相。状态变量组成的空间叫状态空间或相空间。

对二阶振动系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2-2}$$

则 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,其中 x_1 为位移 x, x_2 为速度 $\dot{x}$,由 x, $\dot{x}$ 组成相平面,如图 2-1 所示。

式(2-2)的解在相平面上的曲线叫相轨,相轨上箭头表示时间增加的方向。若测出 x_1, x_2,则可用绘图机画出相轨。

2.1.1　Duffing 振子的相轨

对这类振子,(2-2)中的 F 为:

$$F = x_1 - x_1^3 + \varepsilon(a\cos\omega t - \mu x_2) \tag{2-3}$$

其中, ε为小参数, μ为阻尼系数, ω为激励频率, a 为激励振幅, t 为时间。

当激励较小时,画出相轨为图 2-1 封闭曲线,作简谐振动。

当激励较大时,画出相轨为图 2-2 自相交的封闭曲线,作倍周

期振动，其周期是激励周期的 m 倍。在图 2-2 中，m = 2，称为 2 周期振动，在图 2-1 中，m = 1，称为 1 周期振动。

图　2-1　　　　　　　　　　图　2-2

2.1.2　Van Der Pol 振子的相轨

对这类振子，式(2-2)中的 F 为：

$$F = \alpha x_2(1 - \beta x_1^2) - \omega_0^2 x_1 \qquad (2\text{-}4)$$

画出相轨为极限环，如图 2-3，环内、环外的轨线均趋于此环，以环为极限。

此振子若受高频(ω_1)简谐激励($\omega_1 \gg \omega_0$)，且 ω_1/ω_0 为无理数，则响应为

$$x = r_0 \cos \omega_0 t + r_1 \cos \omega_1 t \qquad (2\text{-}5)$$

其相轨不封闭，失去周期性，故称拟周期振动，但非混沌。混沌功率谱应为连续功率谱，而式(2-5)的功率谱为两条离散谱线。设 $\theta_0 = \omega_0 t$，$\theta_1 = \omega_1 t$，若在水平面上，用极坐标 r_0，θ_0，在沿 r_0 方向的垂直面上，用极坐标 r_1，θ_1，则式(2-5)可用 r_0，θ_0，r_1，θ_1 表示，其相轨绕满在一个像面包圈一样的环面上，见图 2-4。

图　2-3

图　2-4

2.2　Poincare 映射与流形

将相轨离散化为相点,可用较少数据得到较多信息,例如,用

$$\Delta t = 2\pi/\omega_1$$

对拟周期振动(2-5)采样得:

$$x_n = r_1 + r_0\cos(2\pi n\omega_0/\omega_1) \tag{2-6}$$

对(2-6)取导得:

$$\dot{x}_n = -r_0\omega\sin(2\pi n\omega/\omega) \tag{2-7}$$

从(2-6)(2-7)得:

$$(x_n - r_1)^2 + (\dot{x}_n/\omega)^2 = r_0^2 \tag{2-8}$$

画出的相点图称为 Poincare 映射图,或称 Poincare 图。(2-8)说明相点分布在椭园上(图 2-5),间断相点组成的序列称为轨(Orbit),轨所经过之连续曲线叫流(Manifolds),(2-5)的轨不封闭,但流封闭。

图 2-5

可见,Poincare 映射图有较多的信息。它也可理解为在相空间中作一截面 Σ,称 Poincare 截面(图 2-6)。相轨与 Σ 交于 P_0, P_1, P_2, …,各点,组成了 Poincare 映射

$$P_{k+1} = f(P_k) = f^2(P_{k-1}) = \cdots$$

其中 f 为映射关系。

若为周期激励,可在激励的某个任定相角(ωt)处,陆续测响应,以获响应的 Poincare 映射。

周期性响应的 Poincare 映射为有限点,非周期性的混沌响应之 Poincare 映射有无数个点。但是,有无数个点的 Poincare 映射

图　2-6

不一定是混沌, 图 2-5 就是一例, 无数相点排列在椭圆流型上, 它只是拟周期振动, 而非混沌振动。

2.3　Smale 马蹄

1976 年法国科学家 Hennon 研究了二维平方映射:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1 - \alpha x_n^2 + y_n \\
y_{n+1} &= -\beta x_n \quad (\beta < 1)
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

图　2-7

若将所有初始点选在图 2-7 的矩形内，则经过式(2-9)迭代，映射成图 2-7 的阴影区，面积缩小(因 $\beta < 1$，耗散系统的性质)，并变成马蹄。Smale 证明：它好像和制造马蹄一样，可经过伸缩弯折而形成，故称为 Smale 马蹄。矩形内的每一个小矩形也在大马蹄内形成小马蹄，称为自相似结构，它是混沌映射图的重要特征，故马蹄映射常意味着混沌的存在。

第 3 章　分　　岔

3.1　Floquet 指数

Floquet 指数是研究分岔中用到的一个指数。

分岔研究平衡点的数目, 稳定性和运动性态随系统参数的变化。办法是在平衡点将非线性函数用 Taylor 级数展开, 取其一次项而线性化。

例如, 令 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, 若将二阶动力学系统写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3-1}$$

从 $f_1 = f_2 = 0$, 可获平衡点 x_{1e}, x_{2e}。为研究稳定性, 给系统一个微小扰动 η ξ

$$x_1 = x_{1e} + \eta \qquad x_2 = x_{2e} + \xi$$

代入(3-1), 线性化后获:

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

其中偏导数阵记作 ∂F, 称为 Jacobi 阵, 其中 $F = (f_1, f_2)$, ∂F 可用 x_{1e}, x_{2e}代入计算。为研究平衡点附近的运动特征, 将特解

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{3-3}$$

代入式(3-2), 可解得两个值 λ_1, λ_2, 称为 Floquet 指数。根据 λ可将平衡点附近的相轨分为四种情况: 当 λ_1、λ_2 在实数轴上两侧, 则如

图 3-1, 称为鞍点; 而在同侧, 则如图 3-2, 称为结点; 若在虚轴上, 则如图 3-3, 称为中心点; 若离开数轴, 则如图 3-4, 称为焦点。从稳定性理论可知, 只要 Floquet 指数 λ中有一个使 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, 就失稳。故鞍点总不稳定; 而结点与焦点, 若相轨离开平衡点, 则不稳定; 而中心点一般均稳定。

图 3-1

图 3-2

图 3-3

图 3-4

3.2 Hopt 分岔

当非线性系统参数变化时, 从平衡点"冒"出极限环, 称为 Hopt 分岔。这时, Floquet 指数 λ从复平面的左边 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, 变到

复平面的右边 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, 故又称为复分岔。

例如, 在式(2-4)中, 当 $\omega = \beta = 1$, ©$|\alpha| < 2$ 时, 有

$$f_1 = x_2$$

$$f_2 = -x_1 + \alpha x_2(1 - x_1^2)$$

由 $f_1 = f_2 = 0$, 解出平衡点为(0, 0)。算出 Floquet 指数 λ 离开数轴而在复平面上, 当

$\alpha < 0$ 时, 则 $\mathrm{Re}(\lambda) = 0.5\alpha < 0$, 有稳定焦点;

$\alpha > 0$ 时, 则 $\mathrm{Re}(\lambda) = 0.5\alpha > 0$, 有不稳焦点。

故 $\alpha = 0$ 时出现 Hopt 分岔, 有如图 2-3 所示之极限环, 发生了颤振。

3.3 叉形分岔

当系统参数 α 变到 $\mathrm{Re}[\lambda(\alpha)] = 0$, 分岔出现新的平衡点, 称为叉形分岔。例如, 对 Duffing 振子

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad (\beta > 0) \tag{3-4}$$

由(3-1)有

$$f_1 = x_2$$

$$f_2 = -x_1(\alpha + \beta x_1^2)$$

从 $f_1 = f_2 = 0$ 知

$\alpha > 0$ 时, 有一个平衡点(0, 0),

$$\lambda_1 = +\alpha^{0.5} i$$

$$\lambda_2 = -\alpha^{0.5} i$$

因 λ 在虚轴上, 故为一个稳定中心点。

$\alpha < 0$ 时, 有三个平衡点: (0, 0),

$$(-(-\alpha/\beta)^{0.5}, 0)$$

$$(+(-\alpha/\beta)^{0.5}, 0)$$

在(0,0)处, $\lambda_1 = -(-\alpha)^{0.5}$

$\lambda_2 = +(-\alpha)^{0.5}$

λ在实轴两侧,为不稳鞍点。

在$(\pm(-\alpha\beta)^{0.5},0)$处

$\lambda = \pm(-2\alpha)^{0.5}i$

λ在虚轴上,为两个稳定中心点。

故 $\alpha = 0$ 为叉形分岔点。

有时,出现多个平衡点是一种混沌先兆。

3.4 鞍结分岔

鞍结分岔典型方程如:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha + x_1^2 = f_1 \\ \dot{x}_2 &= \pm x_2 = f_2 \end{aligned} \tag{3-5}$$

从(3-5)看出, $\alpha > 0$ 时,无平衡点。当 $\alpha < 0$ 时,平衡点在 $(\pm(-\alpha)^{0.5},0)$,其 Jacobi 阵为

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(\pm(-\alpha)^{0.5},0)} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}_{(\pm(-\alpha)^{0.5},0)} = \begin{bmatrix} \pm 2(-\alpha)^{0.5} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \tag{3-6}$$

其 Floquet 指数(J 的特征值)为

$$\lambda_1 = \pm 2(-\alpha)^{0.5}$$

$$\lambda_2 = \pm 1$$

λ_1与λ_2符号相同为结点,反之为鞍点。

当$\alpha=0$时,结点与鞍点合而为一,成为一个鞍结点。

当α从正变到负时,从没有平衡点,变到有鞍结点,再分岔为鞍点和结点,故称为鞍结分岔,是混沌发生的先兆之一。

第 4 章　奇怪吸引子

4.1　吸　引　子

吸引子是指非线性系统最终形成的运动状态在相空间中的不变流形或点集。例如，平衡，简谐运动，亚简谐运动，极限环，拟周期运动，相空间中其他点（运动状态）都被吸引到这些点集或不变流形中，故称为吸引子，见图 2-2，图 2-3，图 2-4，图 2-5。其中，图 2-1 与图 2-2 的 Poincare 映射图分别为一个点和两个点。

4.2　奇怪吸引子

奇怪吸引子是指非线性系统的运动状态在相空间中形成变化的流形或点集。例如，图 4-1 中（N-S 为磁铁）屈曲梁 AB 的混沌振动之相轨始终不封闭，见图 4-2。

图　4-1

图 4-2

4.3 用时间序列重构吸引子

对复杂结构或连续系统,当不知其自由度数目时,只要测出其一个状态变量的时间历程,即可通过时延采样以虚拟其他状态变量,构成镶空间

$$x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \cdots$$

其中 τ为常数,用 $x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau)$,可构成三维空间;用 $x(t), x(t+\tau)$,可构成二维平面。τ要选得比激励周期小很多。

例如,图 2-1 吸引子的时间序列重构吸引子为图 4-3,它反映了原吸引子的周期振动。图 4-2 的重构吸引子为图 4-4,它反映了原吸引子的混沌振动。

图　4-3

图　4-4

第 5 章　Liapunov 指数

5.1　连续(时间)系统

5.1.1　一维系统

一维系统的非线性微分方程为

$$\dot{x} = f(x) \tag{5-1}$$

两边对 x 作变分(即给以扰动),在初值 x_0 处得一阶(线性化) 近似式为:

$$\delta \frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt} \delta x = A \delta x \tag{5-2}$$

其中

$$A = \left. \frac{f}{x} \right|_{x = x_0} \tag{5-3}$$

积分(5-2)得

$$\delta x = \delta x_0 e^{\lambda} \tag{5-4}$$

其中 $\lambda = A$, δx_0 为初值的差异。显然, 若 $\lambda > 0$, 则 x 间的差异 δx 会越来越大而呈现混沌, 从式(5-4) 可定义 Liapunov 指数为:

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\| \delta x \|}{\| \delta x_0 \|} \tag{5-5}$$

它反映了差异按指数扩大的平均速度。正的 λ 为混沌特征。

5.1.2　多维系统

对多维系统, 式(5-1) 中的 x 变为 X

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \tag{5-6}$$

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T \tag{5-7}$$

初值为
$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})^T \tag{5-8}$$

其中 n 为维数。

而式(5-2)中, Jacobi 阵变成

$$A = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right|_{x = x_0} \tag{5-9}$$

式(5-5)的定义仍可用, 而 δx 为式(5-2)的解之一。n 维系统的 λ 有 n 个, 只要有一个 λ 为正, 就会出现混沌。

5.2 离散(时间)系统

5.2.1 一维系统

一维系统的非线性差分方程为

$$x_i = f(x_{i-1}) \tag{5-10}$$

初始差异 δx_0, 经 m 次迭代后变成

$$\delta x_m = f^m(x_0 + \delta x_0) - f^m(x_0) \sim B\,\delta x_0 \tag{5-11}$$

$$B \sim \left. \frac{df^m(x)}{dx} \right|_{x = x_0} \sim (e^{\lambda})^m \tag{5-12}$$

则
$$\lambda = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \ln \frac{|\delta x_m|}{|\delta x_0|} \tag{5-13}$$

因
$$\left. \frac{df^m}{dx} \right|_{x = x_0} = f'(x_0) f'(x_1) \cdots f'(x_{m-1})$$

$$= \prod_{i=0}^{m-1} f'(x_i) \tag{5-14}$$

故

$$\lambda = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left| f'(x_i) \right| \tag{5-15}$$

λ为每次迭代后,差异扩大之平均指数。

例 5-1　对映射 $x_i = \alpha x_{i-1}(1 - x_{i-1})$,算出 λ与 α的关系,见图 5-1。发现在 $\alpha \geq 3.57$ 时,有正 λ(除个别峰以外)而呈混沌。

图　5-1

5.2.2　多维系统

对多维系统,式(5-10)中 x 变为 X

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \tag{5-16}$$

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T \tag{5-17}$$

初值

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})^T \tag{5-18}$$

其中 n 为维数。

式(5-11)中的 B 变成 Jacobi 阵

$$B = \left.\begin{matrix} \dfrac{f_1^m}{x_1} & \cdots & \dfrac{f_1^m}{x_n} \\ \dfrac{f_n^m}{x_1} & \cdots & \dfrac{f_n^m}{x_n} \end{matrix}\right|_{x=x_0} \tag{5-19}$$

按迭代次数 m 平均的 λ取决于 B 的 n 个特征值, 只要有一个为正, 则为混沌。

5.3 数值算法

设两根相轨起点差距为 d_0, 经过时间 t 后, 呈指数分离 , 差距为 d_t, 即

$$d_t = d_0 e^{t\lambda} \tag{5-20}$$

对映射或差分方程有

$$d_n = d_0 e^{n\lambda} \tag{5-21}$$

1985 年 Wolf 编出计算机程序(Physica. 16D. p285～p317)他从一条参考相轨图 5-2 上找一个起点, 算与相邻相轨的 d_0, d_t, 若

图 5-2

d_t 不按指数增长, 另找新起点算 d_0, d_t。最后按下式平均(N 为循

环的次数)，称为最大 Liapunov 指数 λ_1:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_N - t_0}\sum_{k=1}^{N} \ln \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})} \tag{5-22}$$

例 5-2　对三维系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Kx_2 - x_1^3 + B\cos x_3 \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{aligned} \tag{5-23}$$

当 $K = 0.1$，$B = 10$ 时，用数值积分后，算出的 λ_1 与 N 的关系为图 5-3，从图中可知，想得到一个可靠的 λ_1，要用足够大的 N 才行。

图　5-3

1985 年他提出了一个计算 λ_2，λ_3 的算法:

设面积(由参考相轨上一点与附近两条轨线上两点形成)变化

为:

$$A(t) = A_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \tag{5-24}$$

从中算出 λ_2。

再设体积(由参考相轨上一点与附近三条轨线上三点形成)变化为:

$$V(t) = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \tag{5-25}$$

从中算出 λ_3。

第 6 章　分　　维

6.1　引　　言

平衡在相空间中的吸引子为一个点, 维数为 0, 自激振动在相空间中吸引子为极限环, 维数为 1, 拟周期运动在相空间中的吸引子为环面 (像面包圈), 维数为 2, 混沌吸引子轨线不充满于“面”或“体”上, 即其维数并非整数, 而是分数维。简称分维。先看两个几何例子:

例 6-1　Koch 线: 取一直线作三等分, 将中段折成等边三角形, 然后对每一新线段, 均作此种几何变化(图 6-1), 最后, 曲线变得“混沌”一片, 维数在 1 与 2 之间。称为 Koch 线。

图　6-1

例 6-2　Cantor 集: 前例中, Koch 将线越变越长, 与例 6-1 相反, Cantor 将线越变越短。取一直线三等分, 去中段, 然后对每一新线段, 均如此作截断(图 6-2)。形成 Cantor 集合。其维数在 0～1 之间。

图　6-2

6.2　容　量　维

在相空间中，用大小为 ε 的有限单元覆盖大小为 1 的 1 维“线”(流形)上密布的相点(图 6-3)，能容下的单元数 $N = 1/\varepsilon^1$，覆盖 2 维“面”(图 6-4)的容量为 $N = 1/\varepsilon^2$，覆盖 d 维“域”的容量为

$$N = 1/\varepsilon^d$$

图　6-3　　　　　　　　图　6-4

故

$$d_c = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{6-1}$$

式(6-1)称为容量维，记作 d_c。

例 6-3　计算 Koch **线** d_c: **一次变化生成四段每段为原长的** 1/3, n **次变化后, 每段** ε $(1/3)^n$, **总段数** $N = 4^n$, **代入式**(6-1), **得**

$$d_c = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4)^n}{\ln(3)^n} = 1.26185$$

例 6-4　计算 Cantor **集之** d_c: **一次变化生两段, 每段为原长的** 1/3, n **次变化后, 每段** ε $(1/3)^n$, **总段数** $N = 2^n$, **代入式**(6-1), **得**

$$d_c = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2)^n}{\ln(3)^n} = 0.63092$$

6.3　相　关　维

容量维是几何性的, 它并不考虑相点在流形上出现的频次, 而相关维直接用相点来计算相关函数。采样时间要小于激励的周期。

在相空间(或用 4.3 **的方法重构) 取** N **个点** $\{x_i\}$, **计算各点间距** $S_{ij} = \|x_i - x_j\|$ **给出一个距离** r, **相关函数定义为**:

$$C(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} (S_{ij} < r \text{ 之一对点的数目}) \tag{6-2}$$

并发现有指数规律:

$$\lim_{r\to 0} C(r) = r^d$$

故

$$d_G = \lim_{r\to 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \tag{6-3}$$

式(6-3) **为相关维, 记作** d_G。

式(6-2) **的数学表达式为**:

$$C(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i}^{N} \sum_{\substack{j \\ (i\neq j)}}^{N} H(u) \tag{6-4}$$

其中

$$u = r - |X_i - X_j| \quad (6\text{-}5)$$

$$H(u) = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases} \quad (6\text{-}6)$$

1985 年, Swinney 用此方法比较成功。

1983 年, Grassberger 与 Proccacia 还证明了

$$d_G \leq d_c \quad (6\text{-}7)$$

但很多时候, 两者相近, 例如, 式(2-9)的 Hennon 映射 (当 $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$ 时) $d_c = 1.26$, $d_G = 1.21 \pm 0.01$。

在计算机上算分维, 常用 N = 2000～20000 个点, 1986 年 Abraham 等减为 500 点即可(见 Phys. Lett. 114. A(5). p. 217～221)。

1983 年, Grassberger 与 Proccacia 用了一种快速算法, 使运算次数 N^2 减为 NlnN 次(见 Phys. Rev. Lett. 50. p346～p349)。

6.4 点 形 维

1986 年, Holzfuss 与 Mayer-Kress 估计了从时间序列数据重构吸引子所算维数的误差, 发现平均点形维误差较小。

先在相空间(可用时间序列重构)按一定时间间隔采许多点(N_0 个点), 并随机地选取其中的 M 个($M < N_0$, 可取 $M = 0.2N_0$)相点, 在其中 X_i 上, 放一个半径为 r 的球(图 6-5)。

数一下球中的相点数 N(r), 则相点在球中出现的概率为 P(r)

$$P(r) = \frac{N(r)}{N_0} \quad (6\text{-}8)$$

定义

$$d_p = \lim_{r \to 0} \frac{\ln P(r)}{\ln r} \quad (6\text{-}9)$$

图 6-5

将 M 个点所得 P(r) 平均, 得平均点型维

$$d_p = \lim_{r \to 0} \frac{\ln \overline{P}(r)}{\ln r} \tag{6-10}$$

6.5 分维与 Liapunov 数的关系

我们称 e^{λ_i} 为 Liapunov 数 L_i。

1983 年, Farmer 等人得到 N 维相空间分维 d 与 Liapunov 数 L 的关系, 他先将 N 个 L 按大小排个队(L 对所有系统有意义, d 只对耗散系统有意义)

$$L_1 > L_2 > \cdots > L_K > \cdots > L_N$$

找出前 K 个 L, 使

$$L_1 L_2 \cdots L_K \geq 1$$

则

$$d = K + \frac{\lg(L_1 L_2 \cdots L_K)}{\lg(1/L_{K+1})} \tag{6-11}$$

例如, 对两维空间, K = 1

$$d = 1 + \frac{\lg L_1}{\lg(1/L_2)} = 1 - \frac{\lg L_1}{\lg L_2} \tag{6-12}$$

用(6-11)(6-12)算的 d，专记为 d_L。Kaplan 与 Yorke 发现：

$$d_L \leq d_c$$

6.6 奇怪吸引子的分维

除个别的奇怪吸引子(如 Lorenz 吸引子的分维 $d = 2.06$)的维数接近整数外，大部分奇怪吸引子具有分数维。它是混沌识别的指标之一。

分维的形成与耗散系统的马蹄映射有关。它映射一次，收缩一次，在相空间中留下许多空隙，使轨道没有充满相空间。相空间被轨道充满的程度可用分维加以度量，它是奇怪吸引子的特征之一。

例 6-5 图 4-1 系统的杜芬方程可写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\delta y - 0.5x(1 - x^2) + f\cos z \\ \dot{z} &= \omega \end{aligned} \tag{6-13}$$

其中 x 为位移，y 为速度，z 为激励力的相位；δ，f，ω处在各自的混沌参数区内。用 ΔT 采样(ΔT n 激励力的周期)，取 N_0 个点 $x_n = \{x(n\Delta T), y(n\Delta T), z(n\Delta T)\}$，由三个物理量 x, y, z 组成相空间\.

在 N_0 个点中，随机取 $M(M = 0.2N_0)$ 个相点 x_n，计算在半径为 ε的小球中相点出现的概率为：

$$P_n(\varepsilon) = \frac{1}{N_0}\sum_{m=1}^{N_0} H(\varepsilon - S_{nm}) \tag{6-14}$$

其中，S_{nm}为各点到 x_n 之距：

$$\begin{aligned} S_{nm} = &\ |x(n\Delta T) - x(m\Delta T)| + |y(n\Delta T) - y(m\Delta T)| \\ &+ |z(n\Delta T) - z(m\Delta T)| \end{aligned} \tag{6-15}$$

H 为 Heaviside 函数:

$$H(r) = \begin{cases} 1 & (r > 0) \\ 0 & (r < 0) \end{cases} \tag{6-16}$$

再算式(6-14)的平均值

$$\overline{P}(\varepsilon) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M} P_n(\varepsilon) \tag{6-17}$$

则

$$d_p = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg \overline{P}(\varepsilon)}{\lg \varepsilon} \tag{6-18}$$

此即平均点型维。N_0 常取 $3\times 10^3 \sim 10^4$ 个点。最小 ε 常取

$$\varepsilon > \frac{L}{2N_0^{1/3}} \tag{6-19}$$

其中,L 为吸引子的宏观平均尺寸。例如,图 6-6 中,纵坐标为 $\lg \overline{P}(\varepsilon)/\lg \varepsilon$,横坐标为 ε,其极值 $d_P = 2.5$。

图 6-6

式(6-13)的原方程为式(6-20):

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - 0.5x(1 - x^2) = f\cos\omega t \qquad (6\text{-}20)$$

也可用 $\dot{x}, x$ 相空间的 Poincare 图求分维 D。1985 年, Moon 与 Li 曾在 $\delta = 0.013$, 激励频率为 8.5Hz, 用数值计算验证了 D 与激励力的相位无关。故吸引子的总维数 $d = 1 + D$。

图 6-7 为用 1500 个点作的式(6-20)的 Poincare 图, 从图 6-7 中算出 $D = 1.5$, 故 $d = 2.5$。

图 6-7

6.7 阻尼对分维的影响

用不同的 δ 值, 对式(6-20)作数值模拟, 再算分维, 发现: δ 越大, D 越小; δ 越小, D 越大。例如, $\delta = 0.22$, $D = 1$, $d = 2$; 而 $\delta = 0.04$, $D = 2$, $d = 3$。因为阻尼越小, 吸引子越易充满整个相空

间。1980 年 Moon 作了小阻尼时图 4-1 系统的 Poincare 图, 见图 6-8。

图 6-8

图中看不到任何结构。1983 年 Lichtenberg 与 Lieberman 称它为随机的。图 6-9, 图 6-10 为大阻尼时的 Poincare 图, 可看到明显的结构, 好像有许多“平行”线, 放大 n 次, 仍保持原有结构, 见图 6-11。这种镶套的自相似结构称为 Cantor 集, 它是混沌振动的标记之一。

图 6-9

图 6-10

图 6-11

6.8 Takens 定理

分维计算的一个重要应用是：在由单个物理量 x 时间序列重构的相空间中，得到描写大系统（特别是连续介质系统）所需之最少方程数 N_{min}，（$N_{min} > d$），这是大系统化为小系统的一个重要方法。

为求 N_{min}，重构一系列相空间（从 2, 3, …, m 维），直到吸引子分维趋于渐近值 $d = N_{min} - \mu$ 其中 $\mu < 1$，即将 d 取整，就是 N_{min}。

现在的问题是：m 取多少，才能得到 d 的渐近值呢？Takens 从数学上证明：若原吸引子相空间为 N 维，则

$$m = 2N + 1$$

例如，在节 6.6 中，图 4-1 系统的 $N = 3$，则 $m = 7$。我们重构 2,

3, 4, 5, 6, 7 维相空间(用 X 的离散化数据重构)。每种相空间所算吸引子维数作为图 6-12 中的纵坐标, 而横坐标为重构相空间的维数。从图 6-12 知, d 的渐近值为 2.5, 故 $N_{min} = 3$。

图 6-12

除白噪音外, d 一般均可找到渐近值。1986 年, Holzfuss 与 Mayer-Kress 研究比较了各种不同的分维计算方法对用重构相空间来估计 N_{min} 的误差, 发现分维的平均点型维算法误差最小。

第 7 章　Melnikov 函数

7.1　同 宿 轨 道

同一个鞍点(图 3-1)的流形(节 2-2)相交, 称为形成同宿轨道。已证明, 同宿轨道必伴有 Smale 马蹄 (节 2-3) 而生成混沌振动。

图 7-1 中 H 为鞍点, 实线为稳定流形 M^s, 虚线为不稳定流形 M^u, 一旦两个流形相交, 可证明: 一交就交无数次, 形成同宿轨道。

M^u 与 M^s 的交点, 称为同宿点, 见图 7-2 中 0, 1, 2, 3, 4 点。图

图　7-1

图　7-2

中 H 为鞍点, 混沌动力学过程相当于吸引子相空间发生形变(伸, 缩, 折), 如图 7-2 那样, 在同宿点附近, 体积从 $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to$

P_4 地变化, 构成马蹄映射而产生混沌振动。

7.2 Melnikov 函数

Melnikov 函数是度量同一个鞍点(Poincare 截面上)的 M^u 与 M^s 流形之距 Δ_1 的函数。若 $\Delta_1 = 0$, 则 M^u 与 M^s 有交点, 存在同宿轨道。它是产生混沌振动的必要条件。

将动力学方程写成如下形式:

$$\dot{x} = f_0(x) + \varepsilon f_1(x,t) \tag{7-1}$$

其中 $f_1(x, t+T, \varepsilon) = f_1(x, t, \varepsilon)$ 为周期函数, ε为小参数。1982 年 Kopell, 1980 年 Holmes 用摄动法得到 Δ_1 的解析式:

$$\Delta(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \{f_0[x_0(\tau)], f_1[x_0(\tau), \tau - t]\} \times \exp\left[-\int_0^{\tau} T_r \frac{f_0}{x}(x_0(u))\,du\right] d\tau \tag{7-2}$$

在 Δ_1 中, 1 表示距离函数的一阶展开, 在式(7-1)的形式中, 将系统的阻尼与激励都归入 f_1 中, 而 x_0 为无阻尼自由振动($\varepsilon = 0$)的解。

$tr\,\frac{f_0}{x}$为矩阵$\frac{f_0}{x}$的迹, 即矩阵对角线之和, {, }为 Poission 括号,

$$\{a, b\} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

混沌振动的必要条件是:

Δ 有简单零点, 即 $\Delta_1 = 0$, $\Delta' \neq 0$。

7.3 应用举例

有阻尼迫振 Duffing 振子

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = F\cos\omega t \tag{7-3}$$

将式(7-3)写成式(7-1)形式,设 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$,则

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{7-4}$$

设 $\gamma = \varepsilon\gamma'$, $F = \varepsilon F'$

$$f_0 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1(1 - x_1^2) \end{pmatrix} \tag{7-5}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F'\cos\omega t - \gamma' x_2 \end{pmatrix} \tag{7-6}$$

计算:

$$\mathrm{Tr}\frac{\partial f_0}{\partial X} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}[x_1(1 - x_1^2)] = 0 \tag{7-7}$$

将式(7-7)代入式(7-2),得:

$$\Delta_1 = -\int_{-\infty}^{\infty}\{f_0[x_0(\tau)], f_1[x_0(\tau), \tau - t]\}\,d\tau \tag{7-8}$$

式(7-3)的无阻尼自由振动解为:

$$x_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,\mathrm{sech}(t) \\ -\sqrt{2}\,\mathrm{sech}(t)\,\mathrm{tant}(t) \end{pmatrix} \tag{7-9}$$

将式(7-9)代入式(7-5)、(7-6)得:

$$f_0[x_0(\tau)] = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\mathrm{sech}(\tau)\tanh(\tau) \\ \sqrt{2}\,\mathrm{sech}(\tau)(1 - 2\mathrm{sech}^2(\tau)) \end{pmatrix} \tag{7-10}$$

$$f_1[x_0(\tau), \tau - t] = \begin{pmatrix} 0 \\ F'\cos(\tau - t) + \sqrt{2}\,\gamma'\mathrm{sech}(\tau)\tanh(\tau) \end{pmatrix} \tag{7-11}$$

将式(7-10)(7-11)代入式(7-8)，1983 年 Guckenheimer 与 Holmer 积分出

$$\Delta_1 = \frac{4\gamma'}{3} + \sqrt{2}F'\pi\omega\,\mathrm{sech}\,\frac{\pi\omega}{2}\sin(\omega t) \tag{7-12}$$

式(7-12)中当

$$F' > \frac{4}{3}\gamma'\frac{\cosh(\pi\omega/2)}{\sqrt{2}\pi\omega}$$

即

$$\lambda > \lambda_c \tag{7-13}$$

式中

$$\lambda = F/\gamma = F'/\gamma'$$

$$\lambda_c = (4/3)[\cosh(\pi\omega/2)]/(\sqrt{2}\pi\omega) \tag{7-14}$$

λ_c 为发生混沌时的参数值。

即满足式(7-13)时，Δ_1 有简单零点，存在混沌振动。

1980 年 Holmes 数值模拟的结果与之相符。

第 8 章　混 沌 先 兆

混沌先兆(即通向混沌的道路)有许多种,这里只讲常见的三种,即周期倍化,间隙阵发与环面分岔。

8.1　周 期 倍 化

即参数变化时,发生振动周期的成倍分岔。例如 Duffing 振子,若不满足式(7-13),当 λ 较小时,作图 2-1 所示的 2 周期振动,记 λ 为 λ_0,当 λ 增大后,作图 2-2 所示的 2 周期振动,记 λ 为 λ_1。以此类推,当 λ 增大到 λ_m 时,作 2^m 周期振动,即周期按 2^m 分岔($m=0, 1, 2, \cdots, \infty$)(见图 8-1),直到发生混沌振动。

图　8-1

混沌振动发生前的参数分岔点可表示为:

$$\lambda_m = \lambda_\infty - c\delta^{-m} \qquad (m \geq 1) \tag{8-1}$$

其中　c 为常数。

δ为 Feigenbaum 常数(4.6692…)。

当实验(或计算机模拟)中发现在 λ_0 和 λ_1 时有周期倍化,由式(8-1)有

$$\lambda_\infty - \lambda_0 = c \tag{8-2}$$

$$\lambda_\infty - \lambda_1 = c\delta^{-1} \tag{8-3}$$

从式(8-2)、(8-3)中可解出

$$\lambda_\infty = \lambda_0 + \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{1 - \delta^{-1}} \tag{8-4}$$

由式(8-4)可近似估算发生混沌时的 λ_∞ 参数。若把式(8-4)及从式(8-2)(8-3)解出的 c 一起代入式(8-1),则式(8-1)可改为:

$$\lambda_m = \lambda_0 \frac{\delta^{1-m} - 1}{\delta - 1} + \lambda_1 \frac{\delta - \delta^{1-m}}{\delta - 1} \tag{8-5}$$

从式(8-5)可近似估算混沌先兆中, 周期倍化各参数分岔点。

用(8-1)不难证明

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} = \delta \tag{8-6}$$

式(8-6)说明: 在混沌振动发生前,相继分岔点参数间,具有一样的缩小比例,显示一种自相似结构。

式(8-6)是 Feigenbaum 常数的理论意义,式(8-4)(8-5)是 Feigenbaum 常数的实用价值。

实际问题十分复杂,即使在混沌参数区中,还会有发生周期振动的参数,称为周期窗口,在这些窗口中,周期振动又不断周期倍化为混沌.即混沌中有窗口,窗口中有混沌,组成无穷无尽的自相似结构。倍周期分岔为叉形分岔。

8.2 间歇阵发

间歇阵发时间记录见图 8-2。即从间歇阵发的混沌过渡到完

全的混沌振动。1980 年 Manneville 与 Pomean 发现: 当参数改变时, 间歇越来越小, 阵发越来越密, 持续越来越长。直至无间歇的完全混沌振动。

图 8-2

但 1983 年 Grebogi 发现一种瞬态混沌, 即混沌振动只是昙花一现, 而非真正的混沌先兆。故 1988 年 Moon 建议: 在做实验或数值模拟时, 应运算一段时间才能判断。例如, 画 Poincare 图, 需取 4000 点。间歇阵发处于鞍结分岔(切分岔) 的参数区内。

8.3 拟周期分岔

1983 年, Grebogi. C. , Ott. E. , Yorke. J. A. 认为二次 Hopt 分岔, 出现两个极限环, 也是一种混沌先兆。当其 ω_1 与 ω_2 不可相约时, 产生拟周期运动。其相轨永不自行封闭(见图 2-4), 绕满在环面上。由此失稳而进入混沌称为环面分岔(1978 年 Newhouse 曾认为三次 Hopt 分岔, 出现三个极限环才算是混沌先兆) 。

1978 年 Swinney 与 Gullub 在他们的实验研究中, 随着参数变化, 得到三个不同的功率谱图, 见图 8-3。水平轴为频率 f , 纵轴为 Couette 流(即同轴内外两个转柱间的流体) 的功率谱密度 s。图 8-3 中, 从上图到下图, 内外柱的转速差变大。上图为单频, 中图主要取决于两个频率, 下图则为宽频, 具有明显的混沌性态。所以, 拟

图 8-3

周期分岔为混沌先兆。

第 9 章　Hamilton 系统的混沌

9.1　自　治　化

1834 年 Hamilton 用广义动量 p，广义坐标 q，建立了 N 个自由度保守系统的一阶运动微分方程组——Hamilton 方程（正则方程）：

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{9-1}$$

式中

$$H = H(p_1, p_2, \cdots, p_N, q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \tag{9-2}$$

称为 Hamilton 函数。它往往可通过变换化为无 t 的形式（形式上多一对 p_0，q_0）：

$$H^* = p_0 + H(p_1, p_2, \cdots, p_N, q_0, q_1, \cdots, q_N) \tag{9-3}$$

而仍然有正则方程

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i},\quad \dot{q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}\quad (i = 0, 1, 2, \cdots, N) \tag{9-4}$$

当 $i = 0$ 时

$$\dot{q}_0 = \frac{\partial H^*}{\partial p_0} = 1 \tag{9-5}$$

故

$$t = q_0 \tag{9-6}$$

因保守系统有

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \dot{H} \tag{9-7}$$

则

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial H^*}{\partial q_0} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\dot{H} \tag{9-8}$$

故
$$p_0 = -H \tag{9-9}$$
而当 $i = 0$ 时，式(9-4)同于式(9-1)。所以，只要增加一对状态变量 $(p_0, q_0) = (-H, t)$，即可把 N 个自由度的含 t 的非自治系统化为形式上无 t 的 $(N+1)$ 个自由度的自治系统(这在研究混沌振动时常用)，因式(9-9)代入式(9-3)得 $H^* = 0$，p_0 这一维可省略，即其动力学行为可在 $p_1, p_2, \cdots, p_N, q_0, q_1, q_2, \cdots, q_N$ 的 $(2N+1)$ 维相空间中描述，故也有人称为 N 加半个自由度系统。另外，对周期激励系统，可用旋转坐标变换成自治系统

9.2 可　积　性

若把 (p_i, q_i) 变换成新的变量 (J_i, θ_i)，使原 Hamilton 函数 H 变为新的 Hamilton 函数 H_0，且 H_0 仅为 J_i 的函数
$$H_0 = H_0(J_1, J_2, \cdots, J_N) = E \tag{9-10}$$
式中：E 为系统总能量，

则称系统为可积的，其正则方程为
$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_i} = 0, \quad J_i = \text{常数} \tag{9-11}$$
$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i} = \text{常数} = \omega_i, \quad \theta_i = \omega_i t + \theta_{i0} \tag{9-12}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, N)$$
式中：θ_i 为角变量($t = 0$, $\theta_i = \theta_{i0}$)；

ω_i 为角速度；

J_i 为作用量。
$$J_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i \mathrm{d}q_i \tag{9-13}$$
当 $N = 1$ 时
$$J = \frac{1}{\pi}\int_0^{q_{max}} p(q, H)\mathrm{d}q \tag{9-14}$$

从式(9-14)**可得**

$$H(p,q) = H_0(J) \tag{9-15}$$

以式(9-15)**代入** $p(q,H)$, **可算正则变换的发生函数** S:

$$S = \int_0^q p(q,J)\,dq \tag{9-16}$$

用式(9-16)**可算角变量**

$$\theta = \frac{S(q,J)}{J} \tag{9-17}$$

从式(9-17)**可得**

$$q = q(J,\theta) \tag{9-18}$$

把式(9-18)**代入式**(9-15), **可得**:

$$p = p(J,\theta) \tag{9-19}$$

例如, **对** $H = 0.5(p^2 + \omega^2 q^2)$ **的单位质量振子**, **把** $q_{max} = (2H)^{0.5}/\omega$, $p = (2H - \omega^2 q^2)^{0.5}$

代入式(9-14), **得**:

$$H = J\omega \tag{9-20}$$

$$p = (2J\omega - \omega^2 q^2)^{0.5} \tag{9-21}$$

把式(9-21)**代入式**(9-16), **得** $S(q,J)$, **再代入式**(9-17)**解得**

$$q = (2J/\omega)^{0.5}\sin\theta \tag{9-22}$$

把式(9-22)**代入** $H = 0.5(p^2 + \omega^2 q^2)$, **解得**

$$p = (2J\omega)^{0.5}\cos\theta \tag{9-23}$$

把式(9-20)**代入式**(9-12), **得**:

$$\omega = \omega$$

$$\theta = \omega t + \theta_0 \tag{9-24}$$

1892 **年**, Poincare **证明**: **许多力学问题是不可积的**, **于是人们研究近可积系统**。

9.3 KAM 环面与 Arnold 混沌网

若 Hamilton 函数

$$H = H_0(J) + \varepsilon V(J, \theta) \tag{9-25}$$

中 ε为小量时, 系统称为近可积系统。

当 H 充分光滑, 而 H_0 系统各 ω_i 不相关, 无共振发生, 且

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j}\right| \neq 0 \tag{9-26}$$

时, 近可积系统与 H_0 系统具有类似的拓扑结构, 此称 KAM 定理 (Kolmogorov-Arnold-Moser)。相轨所在 N 维环面称为 KAM 环面。

如果满足

$$\sum_{i=1}^{N} n_i \omega_i = 0 \tag{9-27}$$

其中 $n_1, n_2, \cdots, n_N$ 为整数, 则生共振。

当 N = 2, 据式(9-27):

$$\omega_2(J_1, J_2) = -\frac{n_1}{n_2}\omega_1(J_1, J_2) \tag{9-28}$$

又据式(9-10):

$$E = H_0(J_1, J_2) \tag{9-29}$$

则从式(9-12)、(9-28)、(9-29)可得一个共振解。

在图 9-1 中, 射线为式(9-28), 曲线为式(9-29)。交点为其解。1991 年. G. M. Zasolavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, A. A. Chernikov 指出: 在每个这样的共振区附近, 存在一个个分开的混沌解小区。小区内每一点(图 9-1)为一个混沌解(当 $\varepsilon \to 0$ 时, 小区才会消失)。此种情况为局部混沌, 混沌区相互不连通。

当 N > 2, 则与 N = 2 情况完全不同。例如 N = 3, 则式(9-27)写成

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3 = 0 \tag{9-30}$$

用式(9-12)把 J 换为 ω可得:

$$\begin{aligned} E &= H_0(J_1, J_2, J_3) \\ &= H_0^*(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{aligned} \tag{9-31}$$

图 9-1

则在(ω_1, ω_2, ω_3)的空间中,式(9-30)代表过原点的一族平面。式(9-31)为空间曲面。式(9-30)与(9-31)的解为许多复杂的相互连通的空间曲线,见图 9-2。它与式(9-30)平面族交连成网架,并在网上附有厚为 $\varepsilon^{0.5}$ 的混沌层(图 9-2),再由混沌层连通成混沌网。此种情况称为全局混沌(当 ε→0 时,就剩下网架)。运动从网上一点开始,慢慢扩散到全网,这种扩散叫 Arnold 扩散,此网称为 Arnold 混沌网。

图 9-2

第 10 章　胞　映　射

胞映射于 1980 年由 Hsu. C. S.(徐皆苏)创立。

10.1　胞对胞的映射

把 N 维状态空间的每个坐标,都等分成许多小段,每段用一个整数 Z_i 表示,离散化状态空间的 N 维有限单元称为胞,以 N 个整数 $Z_i(i=1,2,\cdots,N)$ 构成矢量 Z(称为胞矢量)来表征它。

系统的动力学行为(从 n 时刻到 n+1 时刻)用胞对胞的映射 c 表示为整数方程:

$$Z(n+1)=c(Z(n)) \tag{10-1}$$

c 具确定性,称为简单映射;c 具概率性,称为广义映射。

用 c^m 表示映射 c 的 m 次运算。

当平衡时　　$Z^*=c(Z^*)$　　称 Z^* 为平衡胞。

作周期振动时　在 k 个胞 $Z^*(j)$ 中,$(j=1,2,\cdots,k)$。若满足

$$Z^*(m+1)=c^m(Z^*(1))\quad m=1,2,\cdots,k-1$$

$$Z^*(1)=c^k(Z^*(1)) \tag{10-2}$$

则记 $Z^*(j)$ 为 p-k 胞,即周期为 k 的周期胞。显然,p-1 为平衡胞。

若 $c^r(Z)=Z^*(j)$,即 r 步映射后,系统进入周期运动,则将 r 步以内所有胞的集合称为“r 步吸引域”。

10.2 简单胞映射

设胞 $Z(n)$ 中心点的状态矢量为 $X^d(n)$,从点映射 g(可由按时间离散化的状态方程中得到)算出:

$$X^d(n+1) = g(X^d(n)) \tag{10-3}$$

找出 $X^d(n+1)$ 所在的胞,即得 $Z(n+1)$。此为作简单胞映射的中心点方法。

胞映射与点映射相比,可省机时,还可得到 r 步的吸引域,但胞要十分细小。

10.3 广义胞映射

普通胞映射,每个胞都只有一个映射胞。但由于测量与计算精度的限制,我们不可能精确地描述一个点,只好在一个胞内均匀分布若干个状态点。这时,一个胞的各映射将分布在许多胞中,可以算出的只是下一时刻的状态在各不同胞 i 中的概率,记为 ζ_i。把这些概率汇总列成胞概率向量,记为 ζ。

若将第 j 个胞离散细化为若干子胞,用式(10-3)算出各子胞中心点下一时刻的状态变量,找出这些状态变量落入第 i 个胞的个数,记为 M_{ij},则从第 j 个胞转移到第 i 个胞的概率为

$$P_{ij} = M_{ij}/N_s \tag{10-4}$$

式中: N_s 为一个胞内子胞的总数。

由 P_{ij} 构成 Markov 转移概率矩阵 P,则系统的动力学行为可用广义胞映射的概率方程表示为:

$$\zeta(n+1) = P\zeta(n) \tag{10-5}$$

设系统由胞 j 出发,经 n 步后首次到达胞 i 的概率用 $P_{ij}^{(n)}$ 标记,

若 $$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$$

称胞 i 为暂时胞。若对所有的 n 有 $P_{ij}^{(n)} \equiv 0$, 称胞 i 为吸收胞。而至少到达胞 i 一次的概率 P_{ij}^{*} 为

$$P_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} \tag{10-6}$$

若式(10-6) 等于 1, 称胞 i 为持久胞。由暂时胞到持久胞的转移称为系统的吸收。动力学系统的吸引子由持久胞的集合给出。这种算法还可以给出吸收的期望时间与概率, 以表征系统的长入性态, 有利于对混沌的研究。

研究混沌振动时要注意的是, 这种方法将给出一个或多个胞集来代替一个奇怪吸引子, 且各胞间存有间隙。奇怪吸引子的内部结构很难观察, 所以, 对结果的解释需有一定的经验。

例如, 1984 年 Kreuzer 研究了干摩擦振子(图 10-1)。他取 10201 个胞, 每个胞中再取 4 个子胞, 计算结果由 1578 个胞组成的持久集(持久胞的集合) 的概率分布图(图 10-2) 所示, 概率在 $(7\times 10^{-4}, 1]$ 间的胞组成了极限环。

图 10-1

1985 年, Hsu. C. S. 和 Kim. M. C. 证实广义胞映射方法所用的时间只是其他方法的 1/5。1995 年, Hsu. C. S. 的最新成果是发展了一种全局分析法, 即局部序集与有向图解理论, 见文献[76]。

图 10-2 **摩擦振子持久集内的极限概率分布** p

第二部分　应用与新例

第 11 章　混沌振摆

11.1　卫星的混沌振摆

1987 年, Wisdom 指出: 不对称的卫星沿非圆轨道运行时, 会有混沌自振。

设卫星自转轴垂直于轨道表面, 见图 11-1。卫星三个惯性主矩 $A < B < C$ (C 为对自转轴的惯性矩) 。卫星不对称度用下列无量纲参数表示:

$$\alpha^2 = 3(A - B)/C \tag{11-1}$$

图　11-1

设椭圆轨道可用极坐标表示为

$$\rho = a(1 - e_0^2)/(1 + e_0 \cos\ ) \tag{11-2}$$

式中: e_0 —— 偏心率;

a —— 轨道的长轴。

卫星沿轨道的运行频率

$$\omega = (\gamma M)^{0.5}/(a^{1.5}) \qquad (11\text{-}3)$$

式中: γ —— 引力常数;

M —— 地球质量。

则卫星自振方程为

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 0.5\alpha^2\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\sin 2(\theta - \quad) = 0 \qquad (11\text{-}4)$$

式中 $\tau = \omega t$

Wisdom 的数值计算表明: 当卫星不对称度 α 较小时, 如 0.017, 振摆呈局部混沌; α 较大时, 如 0.89, 振摆呈全局混沌性态。

11.2 粉碎机锤片的混沌振动

1991 年, F. Dimaggio 和 J. P. Yeh 研究了粉碎机锤片的混沌振动(图 11-2)。均质锤片 AB 长为 L, 质量为 M。

粉碎机不变转速为 Ω, 振摆角 θ(相对径向), 锤片运动方程(有参数激励与外激励)为:

$$\dot{\theta} = \theta \qquad (11\text{-}5)$$

$$\dot{\theta} = 2Q\sin(2\tau + \theta) - A\sin\theta - c\theta \qquad (11\text{-}6)$$

式中: c 为阻尼系数;

$2\tau = \Omega t + \pi$, $A = 6R/L$; $2Q = (2\omega/\Omega)^2$; $\omega = (1.5g/L)^{0.5}$。

对式(11-5)、(11-6)用 6 阶 Runge-Kutta-Verner 数值解法, 步长 $\Delta\tau = 0.1\pi$, 每十步取一个 Poincare 映射点。

当 C = 0 时:

(1) $Q < 0.7$ 为拟周期振动(图 11-3)。

图 11-2

图 11-3

(2) Q= 0.7 **混沌海中有空洞**(**图** 11-4);**或混沌海中有拟周期运动**(**图** 11-5)。

图 11-4

图 11-5

(3) Q= 1. 2　　混沌海中, 上洞消失, 下洞变小(图 11-6)。

(4) Q ∈(1. 7, 2]　　呈混沌海(图 11-7), 分维数近 2。

图 11-6　　　　图 11-7

当 C= 0. 2～0. 8, Q= 2 时:

从图 11-8～图 11-11 可知, 随 C 增大, 分维数趋近于 1, 混沌性越来越小, 且无混沌振动与周期振动并存的现象。

图 11-8

图　11-9

图　11-10

图　11-11

11.3 单摆的混沌振动

1992 年, 美国 Duke 大学 P. V. Bayly 与 L. N. Virgin 对作水平大幅简谐激励的摆长为 L 的重力单摆进行实验研究(图11-12)。

单摆的动力学方程为

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \sin\theta/\Omega^2 = (A/L)\sin\tau\cos\theta \tag{11-7}$$

式中: $\tau = \omega t$

$\Omega = \omega/\omega_0$

$\omega_0 = (g/L)^{0.5}$

$\theta \in (-\pi, \pi)$

图 11-12

对(11-7)式, 用 4 阶 Runge-Kutta 法作数值积分, 用其结果指导实验。实验单摆用 30mm 长的铝棒与铜球作成, 支点为 3mm 的轴, 单摆装在电位计上, 转角以电压输出到计算机。

单摆支座振幅为 A, ($A/L > 1$), 用正弦机构驱动, 为得 Poincare 映射图(图 11-13), 在正弦机构驱动轴上装圆盘式光栅, 每过一栅, 采一次样。阻尼由轴承摩擦构成。

经数值模拟证明, 在很大范围内存在混沌振动, 其 Poincare 图为图 11-14。

用时间序列重构吸引子, 如图 11-15, 得同样性态的吸引子。

为避免瞬态混沌, 无论实物实验, 还是数值模拟, 时域上均跳过几百个运动循环后起算。图 11-16 为数值模拟的结果, 图 11-17 为实物试验的结果。

图11-18, 图11-19分别是数值模拟与实物试验的对数功率谱

图 11-13

图 11-14

图。两个谱均与 $1/f^{\alpha}$ 有很好的拟合, 图 11-18 中 $\alpha= 1.9$, 图 11-19 中 $\alpha= 2$。

图 11-15

图 11-16

1989 年, Osborne 与 Provenzale 指出, $1/f^{\alpha}$ 和分维 d_f 的关系为:

$$d_f = 1/H, \qquad H = (\alpha - 1)/2$$

图 11-17

图 11-18

1981 年, Levin 与 Koch 已对支点受垂直简谐激励的单摆作过数值研究, 其动力学方程为:

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + (1 + A\sin\Omega\tau)\sin\theta = 0 \tag{11-8}$$

曾发现由周期倍化进入混沌振动的现象。

图 11-19

11.4 倒摆的混沌振动

[57]中，倒摆混沌振动的实验装置见图 11-20，其中摆 1 支承在刀口 2 上，摆上的重锤 3 的位置可调，恢复力矩由簧 7 供给，干扰力矩由簧 8 和 9 供给，簧 9 右边由偏心连杆机构带动，偏心可调，电动机 11 转速可调，阻尼器 12 为一个在水中运动的挡片，挡片面积可调，摆的偏角可用指针和标尺 5 观察到，但记录则用簧片 6 随摆变形，并通过 6 上应变片转化为电信号输入信号处理机处理。

其运动微分方程为

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = (1 - 0.5a^2x^2)F\cos\omega\tau \qquad (11\text{-}9)$$

式中：a 为平衡时偏角，约为 0.05 弧度；

$x = X/a$（无量纲摆角）；

X 为实际摆角（弧度）；

图 11-20

$\tau = \Omega_0 t$;

Ω_0 为固有频率;

K 为 7 的刚度(单位转角的力矩);

l 为摆的长度;

m 为重锤质量;

$\gamma = C/J\Omega_0$ 设 $\gamma = \varepsilon\gamma'$($\varepsilon$为小量);

C 为单位角速度的阻尼力矩;

J 为摆的转动惯量;

$\omega = \Omega/\Omega_0$; Ω为迫振频率;

$F = (A/a)(\Omega/\Omega_0)^2$, 设 $F = \varepsilon F'$(ε为小量);

A 为迫振振幅;

$\lambda = F/\gamma_0$

按式(7-2)算出 Melnikov 函数为:

$$\Delta_1(t) = -(4/3)\gamma' + (2)^{0.5}F'\pi\omega[\mathrm{sech}(\pi\omega/2)\sin\omega t] \times [1-(1+\omega^2)a^2/6] \quad (11\text{-}10)$$

从 $\Delta_1 = 0$, $\Delta_1' \neq 0$, 可得混沌阈值

$$\lambda_{\infty}(\omega) = (2/3)(2)^{0.5}[\mathrm{ch}(\omega\pi/2)]/\{\pi\omega[1-(1+\omega^2)a^2/6]\}$$

实验所得结果为图 11-21, 图中带点的区为混沌区。它离阈值以上很远, 这一则因为实验有误差, 二则因为阈值以上混沌与周期解共存, 而纯混沌区较小。

图 11-21

11.5 悬臂屈曲梁的混沌振摆

1979 年, Holmes 对如图 11-22 的实验装置进行了研究。

足够薄的钢片在很强的磁铁作用下有三个平衡位置, 其中铅垂位置不稳定, 左边与右边两个平衡位置是稳定的, 具有 Duffing 型的运动微分方程

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = F\cos\omega t \tag{11-11}$$

当 F 很小时, 钢片在两个平衡位置中的一个附近作周期振动。当 F 加大到一定值时, 钢片在两个磁铁间作混沌振动。当 $\gamma = 0.045$, $F = 0.28$, $\omega = 0.84$, $\alpha = \beta = 0.5$ 时, 模拟计算机计算的时域曲线为图 11-23。

当 $\gamma = 0.0036$, $F = 0.035$, $\omega = 0.89$, $\alpha = \beta = 0.5$ 时, 实物实验

图 11-22

图 11-23

得到的时域曲线为图 11-24。

图 11-24

从示波器中看到的相轨为图 11-25。

用信号处理机处理得到的 Poincare 图为图 11-26。

当 $\gamma = 0.09$, $F = 0.46$, $\omega = 1.19$, $\alpha = \beta = 1$ 时, 对数功率谱图为图 11-27。

图 11-25

图 11-26

图 11-27

11.6 Freud 摆

电动机上空套一个摩擦摆(图 11-28),其运动微分方程为

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -M_f + M_m \qquad (11\text{-}12)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = M_f - mgl\sin\theta_2 \qquad (11\text{-}13)$$

图 11-28

式中: J_1 **为电机转子的转动惯量**;

J_2 **为摆的转动惯量**;

M_m **为电机力矩**;

M_f **为摩擦力矩**;

m **为摆锤质量**;

l **为摆长**;

θ_1 **为转子转角**;

θ_2 **为摆的转角**。

$$M_m = B - D\dot{\theta}_1 \qquad (11\text{-}14)$$

式中: B **为起动力矩**, (**图** 11-29),

$D = \mathrm{tg}\,\alpha$ (**图** 11-29)。

图 11-29

$$M_f = M_0[(C|\omega|/\omega_0 - 1)^2 + 1]\,\mathrm{sgn}(\omega) \qquad (11\text{-}15)$$

式中: M_0, C, ω_0 **为常数**;

$$\omega = \text{¡¤}_1 - \text{¡¤}_2$$

$$\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} +1 & \omega > 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases}$$

M_f **见图** 11-30。

图 11-30

用 $\tau = \omega_0 t$ **及正则坐标**

$$x_0 = {}_1, \quad x_1 = \dot{}_1, \quad x_2 = {}_2, \quad x_3 = \dot{}_2$$

得一阶方程组 $\dot{x}_0 = x_1$

$$\dot{x}_1 = -C_1 f + C_3 + C_4 x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{11-16}$$

$$\dot{x}_3 = -C_5 \sin(x_2) + C_6 f$$

式中:

$$f = (C_2(|x_1 - x_3| - 1)^2 + 1)\,\mathrm{sgn}(x_1 - x_3)$$

$$C_1 = M_0/(J_1 \omega_0^2)$$

$$C_2 = C$$

$$C_3 = B/(J_1 \omega_0^2)$$

$$C_4 = D/(J_1 \omega_0)$$

$$C_5 = mgl/(J_2 \omega_0^2)$$

$$C_6 = M_0/(J_2 \omega_0^2)$$

若静止的摆,**由轴因摩擦带起偏角** x_{20},**当** $C_1 = 0.5P$, $P = \sin(x_{20})$, $C_2 = 3$, $C_3 = 5P$, $C_4 = 10P$, $C_5 = 0.5$, $C_6 = 0.5P$, $M_0 = P\,mgl$, $\omega_0^2 = g/l$ **时**,**用** Rung-Kutta **法做数值仿真**,**发现当** $P = 0.0027 \sim 0.247$ **时**,**相关维为** 2～2.91,**具有分岔图**(**图** 11-31)。

图 11-31

第 12 章　转子混沌振动

12.1　刚度非线性引起的混沌

高速转子是许多机器的基本另件,其轴的刚度一般是非线性的。

将转子简化为一个由两个轴承支承的盘轴系统,并忽略转轴的质量,其数学模型为

$$\ddot{Z}+\gamma\dot{Z}+F(Z)Z=P\exp(i\Omega t) \tag{12-1}$$

式中: $Z=x+iy$;

x, y 是盘振动时的质心坐标;

i 是单位虚数;

γ是阻尼系数;

Ω为激励频率。

图　12-1　　　　　　　　图　12-2

刚度非线性由 $F(Z)$ 表示:

$$F(Z) = b|Z|^2 \tag{12-2}$$

b 是常数。

当 $b=1, P=0.25, \gamma=0.2, \Omega=0.67$ 时发现有 $3T\ (T=2\pi/\Omega)$ 的周期运动, 轴心轨迹见图 12-1。这是混沌先兆。果然, 当 $\Omega=0.99$ 时, 即发生了混沌振动, 轴心轨迹见图 12-2。

12.2 钻杆的混沌振动

1993 年, G. H. M. VAN DER HEIJDEN 1991 年, J. D. JANSEN 研究了钻杆的混沌振动。石油钻具一般由钻头、钻杆与稳定器组成, 稳定器空套在钻杆上, 见图 12-3。

钻杆的弯曲状态见图 12-4。图中 A-A 断面见图 12-5。其力学

图 12-3

图 12-4

简图见图 12-6。考虑了稳定器与井壁间隙的受力分析见图 12-7。其运动微分方程为: (Jansen 的极坐标形式的方程)

图 12-5 **图** 12-6

图 12-7

$$\{\beta(\ddot r + 2i\dot r\dot\theta + ir\ddot\theta - r\dot\theta^2) + \xi(\dot r + ir\dot\theta)(\dot r + ir\dot\theta) + (r - \delta)$$

$$+ i(\delta - \delta^2/r)\}\exp(i\theta) = \varepsilon\eta^2\exp(i\eta\tau) \tag{12-3}$$

将变换 $\theta = \psi + \eta\tau$ 代入式(12-3),得自治化方程:

$$\{\beta(\ddot{r} + 2i\dot{r}(\dot{\psi} + \eta) + ir\ddot{\psi} - r(\dot{\psi} + \eta)^2) + \xi[\dot{r} + ir(\dot{\psi} + \eta)]$$

$$-(\dot{r} + ir(\dot{\psi} + \eta)) + (r - \delta) + i(\delta - \delta^2/r)\}\exp(i\psi) = \varepsilon\eta^2 \tag{12-4}$$

式中: $r = q/c_0$, $\beta = (m_f + m)/m$, $\delta = s_0/c_0$,

$\varepsilon = e_0/c_0$, $\eta = \Omega/\omega$, $\xi = c_f c_0/m$

$\omega = (k/m)^{0.5}$, $c_0 = 0.5(D_h - D_c)$,

$s_0 = 0.5(D_h - D_*)$

D_h 为钻井内径;

D_c 为钻杆外径;

D_* 为稳定器的外径;

q 为钻杆挠度;

c_f 为泥浆的当量阻尼系数;

e_0 为钻杆质量的偏心;

m 为钻具的当量质量;

m_f 为泥浆的当量质量;

ψ 为动坐标的相位差;

$= tg^{-1}(\mu)$

μ 为摩擦系数;

Ω 为钻杆转速。

当 $\beta = 1$, $\delta = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$, $\xi = 0.05$, $= 0$, $(r, \psi, \dot{r}, \dot{\psi})_{\tau=0} = (\delta, 0, 0, 0)$ 时,作数值模拟,得到图 12-8,钻杆中心相对图 12-6 中动坐标 y_1, y_2 的轨迹。

中心轨迹的 Poincare 图,见图 12-9。

从图 12-8,图 12-9,可看出钻杆作混沌振动。

图 12-8

图 12-9

第 13 章　切削机床混沌振动

13.1　力 学 分 析

1986 年, Grabec 用混沌动力学分析了金属切削机床振动。切削区受力分析见图 13-1。

图　13-1

图中受到的力有摩擦力 F_y, 切削力和弹塑性变形力的合力 F_x, 切削过程动力学方程可表示为

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_x &= F_x \\ m\ddot{y} + k_y &= F_y \end{aligned} \tag{13-1}$$

式中: m 为工夹具的质量;

k 为工夹具的弹性。

$$F_y = \mu F_x \tag{13-2}$$

式中：μ为摩擦系数。

13.2 数值仿真

据 1971 年 Hastings 等人的近似经验公式，切削中的摩擦系数为

$$\mu = \mu_0[C_2(v_f R/v_0 - 1)^2[C_3(h/h_0 - 1)^2 + 1]]$$

$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{0.5} = F_x(h/h_0)[C_1(v/v_0 - 1)^2 + 1]$$

式中：$v_f = v/R - \dot{y}$，$v = v_i - \dot{x}$，$v_i = 0.5v_0$，$h = h_i - y$，$h_i = 0.5h_0$，

$R = R_0[C_4(v/v_0 - 1)^2 + 1]$

切削低碳钢时，$C_1 = 0.3$，$C_2 = 0.7$，$C_3 = 1.5$，$C_4 = 1.2$，

$R_0 = 2.2$，$\mu_0 = 0.35$，

切削用量为 $h_0 = 0.25\text{mm}$，$v_0 = 6.6\text{ms}^{-1}$，

为将式(13-1)、(13-2)无量纲化，取以下无量纲参数：

$$X = x/h_0,\quad Y = y/h_0,\quad T = tv_0/h_0$$

$$A = k_x h_0^2/(mv_0^2),\ B = k_y h_0^2(mv_0^2),\ F_0 = F_x h_0(mv_0^2)$$

用初始条件

$$x_0 = y_0 = 0,\ \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$$

做数值积分：

当 $A = 1$，$B = 0.25$，$F_0 = 0.25$ 时，得到拟周期运动；

F_0 加大到 0.5 时，发现混沌振动；

当 $F_0 \to 1$ 时，混沌振动得到加强。

1987 年，Grabec 用实验功率谱证明了这一点。在图 13-2 中，随着 F_0 的加大，功率谱图从单频，通过分频，过渡到混沌。当 $F_0 = 1$ 时，宽频成分明显增大。混沌振动可以认为是金属切削机床产生不规则振动的主要原因。

图　13-2

第 14 章　分段线性系统的混沌振动

分段线性系统在实际工程中用得很多。

1980 年, Bykhovsky 用于振实土壤。

1983 年, Ysfanski 与 Beresnevich 用于抗振工程。

1984 年, Thompson 与 Elvey 用于船舶工程。

14.1　简 化 模 型

1983 年, Shaw 与 Holmesygh 证明了非对称性恢复力的分段线性系统(图 14-1) 具有混沌振动。

图　14-1

1988 年, Kisliakov 与 Popov 证明了对称恢复力的分段线性系统(图 14-2) 具有混沌振动。

图中:　m 为质量;　k_1, k_2 为弹簧;　c 为阻尼器;

x_0 为 m 与 k_2 的间隙;　ω为干扰力的频率。

图 14-2

14.2 力学分析

1986 年, Bapat 和 Sankar 研究了以下运动微分方程:

$$m\ddot{x} + \gamma(x)\dot{x} + g(x) = F_0\sin\Omega t + F_1 \tag{14-1}$$

式中

$$\gamma(x) = \begin{cases} c & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{14-2}$$

$$g(x) = \begin{cases} kx & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{14-3}$$

为计算方便起见, 令 $x > 0$ 为 1 区

$x < 0$ 为 2 区

设式(14-1)的解在 1 区中, 与 $x = 0$ 第 i 次相交于 t_i 时刻, 与 $x = 0$ 第 $i+1$ 次相交于 t_{i+1} 时刻的解 $x(t)$ 为

$$x(t) = \exp(-\xi\omega_0 t')(a_i\sin\eta\omega_0 t' + b_i\cos\eta\omega_0 t') + A\sin(\Omega t + \psi) + F_1/k \tag{14-4}$$

式中

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad t' \in (0, t_{i+1} - t_i),$$

$$\xi = c/2(km)^{0.5}, \qquad \eta = (1 - \xi^2)^{0.5},$$

$$r = \Omega/\omega, \qquad \tau = \Omega t_1 - 1/\mathrm{tg}[2\xi r/(1-r^2)],$$

$$A = (F_0/k)[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]^{0.5},$$

$$a_i = [\dot{x}_i/\omega - Ar\cos(\Omega t_i + \tau) + \xi b_i]/\eta,$$

$$b_i = -A\sin(\Omega t_i + \tau) - F_1/k,$$

在 t_i 时刻,以 $\dot{x}_i$ 的初速度进入 1 区,用数值方法从式(14-4)的零点中找出 t_{i+1}将得到的 t_{i+1}代入式(14-4)的导数中,求出 $\dot{x}_{i+1}$。

在分别对应第 i+ 1 次和第 i+ 2 次与 $x=0$ 相交的 t_{i+1}时刻和 t_{i+2}时刻中间的时间区间内的 $x(t)$ 为:

$$x(t) = e_{i+1} + h_{i+1}t' + F_1 t'^2/2m - (F_0/m\Omega^2)\sin(\Omega t + \tau) \tag{14-5}$$

式中 $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}], \quad t' \in [0, t_{i+2} - t_{i+1}]$

$$e_{i+1} = F_0\sin(\Omega t_{i+1} + \tau)/(m\Omega^2)$$

$$h_{i+1} = \dot{x}_{i+1} + F_0\cos(\Omega t_{i+1} + \tau)/(m\Omega)$$

系统重新进入 1 区的时刻 t_{i+2}可从式(14-5)的 $x=0$ 中求得。再将所得 t_{i+2}代入式(14-5)的导数中,求出进入 1 区的初速度 $\dot{x}_{i+2}$。

Bapat 和 Sankar 给出了计算的数值结果,见图 14-3。

为方便起见,若简谐干扰力经 p 次循环后,$x(t)$ 与 $x=0$ 相交 n 次,记为(n, p)。可以看出,当 F_0/F_1 变化时,经过(2, 2)进入混沌。

图 14-1 与 14-2 均用式(14-1)描述,在图 14-1 中:

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < x_0) \\ \omega^2 x + (1-\omega^2)x_0 & (x > x_0) \end{cases}$$

在图 14-2 中:

$$g(x) = \begin{cases} \omega^2 x - (1-\omega^2)x_0 & (x > x_0) \\ x & (-x_0 < x < x_0) \\ \omega^2 x - (1-\omega^2)x_0 & (x < -x_0) \end{cases}$$

同样可以证明:图 14-1、图 14-2 具有混沌振动。

图 14-3 . (2, 1);× . (4, 2); . (12, 8); ·. (4, 4);
△. (2, 2); ▲. 混沌

第 15 章　冲击系统的混沌振动

15.1　冲 击 振 子

冲击振子常常产生混沌振动。图 15-1 所示为一个最简单的系统, 小球在两块板间振动, 其中一块是不动的, 另一块作简谐振动。

图　15-1

1983 年, Lichtenberg 和 Lieberman 在其专著“Regular and Stochastic Motion”中得到其差分方程:

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= v_n + v_0 \sin \omega t_n \\
t_{n+1} &= t_n + 2\Delta / v_{n+1}
\end{aligned}
\tag{15-1}
$$

式中　Δ——间隙;　$v_0 \sin \omega t$——动板的振动规律

其 $(v_n, \omega t_n)$ 图为图 15-2, 图中见有若干极限环, 其余为混沌区, 因无阻尼, 故无分形结构。

图 15-2

1982 年, Holmes 研究了图 15-3 中小球的弹跳, 考虑了恢复系数, 即考虑了每次碰后的能量损失。小球时间历程见图 15-4(a)。小球的相空间图见图 15-4(b), 呈现混沌。

图 15-3

图　15-4 (a)

图　15-4 (b)

15.2　打印机的混沌振动

1983 年, IBM 公司 Hendriks 研究了由于打印机打印头的冲击引起的混沌振动。这种振动限制了打印机的高速运转, 混沌的产生是由于冲击力的强非线性造成的。此冲击力的经验公式为:

$$F = \begin{cases} -AE_p u^{2.7} & (u > 0) \\ -AE_p \beta u^{11} & (u < 0) \end{cases} \qquad (15\text{-}2)$$

式中: u 为位移与色带加纸的厚度之比;

A 为打印头的接触面积;

E_p 为色带-纸的合成刚度;

β为取决于最大位移的一个常数。

打印头以交流电通过电磁铁被激振(图 15-5)。低频时,响应为周期振动,高频时则生混沌振动,见图 15-6。

图 15-6

图 15-6 为时间(t)-频率(f)-位移(d)的三维谱图。

图 15-6

15.3　齿轮等机构的混沌振动

1991 年, Moon 与 Broschart 研究了机器噪音的根源——机构间隙产生的混沌振动。这对水下潜艇的安全至关重要, 也是美国海军重视混沌振动研究的原因之一。

1990 年, Beletzky 研究了机器人机构、四杆机构、曲柄滑块机构的混沌振动。1991 年 Comparin 与 Singh 在俄亥俄州立大学的 R. Singh 齿轮实验室研究了齿轮的混沌振动。1991 年, 德国慕尼黑工业大学的 Pfeiffer 及其合作者的工作具有领先水平。他们用 Fokker-Planck 方程研究齿轮噪声的概率分布, 以说明如何安排齿轮才能削弱混沌噪声。1990 年 Li 等人研究了一对齿轮(图15-7)中, 当其中一个作周期振摆时, 另一个齿轮作混沌振摆的 Poincare 图, 见图 15-8。

图　15-7

图　15-8

15.4　农机具的混沌振动

1994 年, 日本北海道大学农业工程系 Kenshi Sakai 和日本东京大学数理信息工程系 Kazuyuki Aihara 合作对轮式拖拉机悬挂式振动松土铲的混沌振动进行了实验研究。

松土铲机构由拖拉机尾部的动力输出轴带动的空间曲柄-连杆-摇臂铲机构组成, 见图 15-9。测时拖拉机变速杆放在空挡, 振动加速度计装在座椅之下, 水平加速度电信号由电荷放大器放大后记在数据记录仪上, 经 20Hz 低通滤波器滤波后送入微形计算机处理。

图　15-9

对实验数据，用时间序列重构相空间吸引子的办法来进行研究。发现：当导轮接地，铲子入土后为周期振动，而导轮离地，铲子入土之前(图 15-10)。即当铲子与地面有冲击时为混沌振动，其时间历程见图 15-11。相应对数功率谱图为图 15-12。相应在重构相

图 15-10

图 15-11

图 15-12

空间中的相轨为图 15-13。相应在重构相空间中的 Poincare 图为图 15-14。而且用实验数据计算的相关系数很快就从 1 趋近于零，见图 15-15。

图 15-13

图 15-14

图 15-15

15.5　重力双摆的冲击混沌振动

1992 年, 作者和研究生一起研究了简谐激励下重力双摆的冲击混沌振动, 实验装置见图 15-16。

图　15-16

图中机构为铝制双摆框架。上摆装有无级调速直流电动机, 质量为 4.65kg, 摆长 0.093mm, 电机轴装有可调偏心块, 质量为 0.16kg。下摆质量为 1.7kg, 摆长可调, 机座上装有挡块作为下摆运动的边界约束条件。静态时, 下摆与挡块之距为 4.3mm, 振动时下摆与挡块发生冲击。当上下摆长之比为 4.043, 偏心距为 0.083mm, 电机转速从 4Hz 上升至 6.25Hz 时, 系统由周期振动, 经过分频进入混沌振动, 其波形图见图 15-17。

其功率谱图见图 15-18(a); 重构相空间 Poincare 图为图 15-18(b)。

图　15-17

图　15-18

15.6　三自由度碰撞振动系统的混沌振动

1993 年，在国家自然科学基金资助下，作者和研究生一起研究了简谐激励下，三自由度碰撞振动系统的混沌振动。机构分成上中下三层，下层装有无级变速直流电动机，总质量 5.9kg，电机轴装有可调偏心块 0.16kg，下层用左右两条弹簧钢片与机座固联。

中层水平框架总质量为 1.05kg，也用左右两条弹簧钢片与下

层质量固接。装有滑轮的上层工作台质量为 2.5kg,可在中层水平框架上左右滑动,其运动受到装在水平框架上的可调挡块的约束,发生左右碰撞。这上中下三层构成三自由度碰撞振动系统。

机构的阻尼,通过模态分析的方法识别,其结果为:

下层阻尼为 0.08N · s/ m;

中层阻尼为 0.06N · s/ m;

上层无阻尼

当挡块与上层工作台的静态距离小于 5.3mm,电机转速为 7.78Hz 时,工作台的加速度波形图为正弦波,见图 15-19。

图 15-19

当挡块与上层工作台的静态距离调到 5.3mm,电机转速为 7.78Hz 时,工作台的加速度波形图(图 15-20)中的每个峰出现了许多小峰,即出现了分频现象(周期倍化现象)。

图 15-20

当挡块与上层工作台的静态距离调到 4.3mm,电机转速为 7.45Hz 时,工作台的加速度波形图(图 15-21)呈混沌波形。

发生混沌振动时的功率谱为图 15-22。

图 15-21

图 15-22

发生混沌振动时的 Poincare **图为图** 15-23。

图 15-23

因系统有阻尼,故为耗散系统。可从图 15-23 中看到混沌吸引子的分形结构。

15.7 海上设备的混沌振动

1991 年,美国 Oregon 州立大学的 Solomon C. S. Yim 和 Huan Lin 研究了海洋平台上设备的混沌振动,见图 15-24。

图 15-24

图中设备与平台不固联(图 15-25)。设备简化为一个方形刚体,受水平与垂直两个方向的简谐加速度激励,设备与平台发生碰撞时有能量损失。

其动力学方程为:

$$
\begin{aligned}
& I_0\ddot{\theta} + MRa_{gx}\cos(\theta_{cr} - \theta) \\
& + M(g + a_{gy})R\sin(\theta_{cr} - \theta) \\
& = 0 \qquad (15\text{-}3)
\end{aligned}
$$

式中: I_0 为设备对 O 点之惯性矩;

图 15-25

图 15-26

M—**设备质量**, $M = W/g$;

W **为设备重量**;

R—**设备质心到** O **点之距**;

$$\theta_{cr} = ctg^{-1}(H/B)$$

$$a_{gx} = a_x \cos \omega_x t$$

$a_{gy} = a_y \cos \omega_y t$

当

$$Wa_{gx} H / 2g > (W + Wa_{gy} / g) B / 2 \qquad (15\text{-}4)$$

则会发生与平台的碰撞，这时有:

$$\dot{\theta}(t^+) = e\dot{\theta}(t^-) \qquad (15\text{-}5)$$

式中: e——恢复系数。

用数值模拟计算式(15-3)、(15-4)、(15-5)，可得 θ 其时间历程和相轨迹图见图 15-26(a)、(b)。

第 16 章　地震的混沌振动问题

16.1　力 学 模 型

1992 年, 美国 Cornell 大学的 D. L. Turcotte 和法国 Nice 大学的 C. A. Stewart 合作, 发表了一个最简单的模拟地壳结构变形的滑块模型, 见图 16-1。

图　16-1

图中

质量块:　$m_1 = m_2 = m =$ 常数。

弹　簧:　$k_1 = k_2 = k =$ 常数。

$k_c = \alpha k$, α为常数。

速　度:　v 为上块的速度(近于零的常数)。当下块滑动时, $v = 0$。

摩擦力:　$F_2 = \beta F_1 = \beta F$, 式中 β为常数。

$$F = F_0/(1 + |\dot{y}_1/v|) \tag{16-1}$$

即摩擦力随速度增加而变小。式(16-1)中 F_0 为常数。

位　移: y_1、y_2 分别为 m_1、m_2 相对上块的坐标。

16.2 混 沌 参 数

图 16-1 的运动微分方程为:

$$m_1\ddot{y}_1 + (k_1 + k_c)y_1 - k_c y_2 = F_1$$

$$m_2\ddot{y}_2 + (k_2 + k_c)y_2 - k_c y_1 = F_2$$

或

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + (1+\alpha)ky_1 - \alpha k y_2 &= F \\ m\ddot{y}_2 + (1+\alpha)ky_2 - \alpha k y_1 &= \beta F \end{aligned} \tag{16-2}$$

令无量纲时间　$\tau = t\sqrt{k/m}$

无量纲坐标　$Y_i = y_i k/F_0 \ (i = 1, 2)$

则式(16-2)变成:

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_1 + Y_1 + \alpha(Y_1 - Y_2) &= 1/(1 + \gamma|\dot{Y}_1|) \\ \ddot{Y}_2 + Y_2 + \alpha(Y_2 - Y_1) &= 1/(1 + \gamma|\dot{Y}_2|) \end{aligned} \tag{16-3}$$

式中　$\gamma = F_0/v\sqrt{mk}$

当 $\alpha = 1.2$, $\beta = 1.5$ 从式(16-3)中算出 $Y_2 - Y_1$ 随 γ 的变化呈现混沌状态, 见图 16-2。

当 γ 在 3 左右, 从分叉进入混沌, 见图 16-3。

图　16-2

图　16-3

第 17 章　心脏的混沌振动

17.1　ECG 混沌波

ECG 是医学上用在临床上记录心脏振动电信号的波形图，简称为心电图(Electro-Cardio-Graphy)。早在 1946 年出版的 L. N. Katz 所著“心电图学”(第二版)中就已经出现过混沌心动(Chaotic Heart Action)一词，不过，当时心电图专家用“混沌”这个词，纯为形象描述，并不反映他们对心脏振动的心律不齐有力学上的理解。

直到 1982～1984 年间，L. Glass 等人，对胚胎中的雏鸡心脏在电脉冲激励下的响应进行了实验研究，并将实验中看到的无序振动用有限差分方程的混沌理论加以解释，发现实验得到的许多心律与人体心电图在临床中看到的异常心律一模一样，从而证实了，ECG 中的心律不齐可以用人体心脏数学模型中产生的混沌振动加以力学上的解释，为人工心脏起搏器的研制提供了理论依据。

17.2　混 沌 通 道

正常人的 ECG 会有轻微的混沌，而在心脏病患者猝死以前的 ECG 记录中，却常可看到有严重的混沌振动。因此，有必要研究通往混沌的道路。

从 L. Glass 等人的实验中可看到，心脏振动通向严重混沌有三条路:

1. 阵发性心动过速

阵发性心动过速也称为文氏(Wenckebach)现象，其 ECG 见

图 17-1。

即由阵发性混沌振动通向完全混沌。

图 17-1

2. **拟周期振动**

心脏由拟周期振动通向混沌，其 ECG **图见图** 17-2。

图 17-2

3. **周期倍化**

心脏振动由倍周期通向混沌，其 ECG **图见图** 17-3。

图 17-3

第三部分　测试与调控

第 18 章　测　　试

18.1　波　形　图

现代的测试方法一般是用压电晶体加速度计(图 18-1)。经电荷放大器放大后,送示波器得到加速度波形图。若要得到速度或位移的波形,则需经过积分线路。丹麦 B & K 公司的 2635 型电荷放大器上(图 18-2)带有这种积分线路,即具有速度挡与位移挡。若要同时看到速度和位移波形图,可用两个电荷放大器,一个用速度挡(积分一次),

图　18-1

图　18-2

另一个用位移挡(积分两次),然后接双踪示波器输出波形图。有时也可用应变片测位移,再微分得到速度,以此得到位移与速度的波形图。

混沌振动的波形图一般呈现为不规则的杂乱波。

18.2 相 轨 图

相轨图是观察混沌振动的一个重要方法之一。将 18.1 中从电荷放大器得到的速度与位移信号同时接到示波器或信号处理机中,速度为 y 坐标,位移为 x 坐标,做 Lissajous 图,即可得到两维相轨图。

混沌振动的相轨图呈现为不规则的螺旋杂乱曲线族。

当只用一个电荷放大器时,从中得到的只是一种信号(加速度或速度或位移),这时可用重构相空间的办法得到相轨图。即将同一信号同时接到丹麦 B & K 公司 2034 型信号处理机(图 18-3)的

图 18-3

A 与 B 两个通道中,并在测量设置时,设置两个通道间之时间差

τ(τ应比激励的周期短得很多), 即选用 2034 信号处理机屏幕上参数设置区的第 36 个测量参数: 通道间的时间延迟 DELAY (BETWEEN CHANNELS), 其可选值为

$$
\begin{array}{c}
0 \\
\Delta T \\
2\Delta T \\
\vdots \\
\vdots
\end{array}
$$

其中 ΔT 为信号处理机的采样间隔。

再在屏幕上显示参数设置区的第 2 个显示参数 FUNCTION, 其可选值为

0 TIME CH. A

1 TIME CH. B

2 TIME CH. A VS B

⋮

⋮

从中选取 TIME CH. A VS B 来做 Lissajous 图, 这样得到的是两维重构相空间的相轨图, 其拓扑结构同从速度与位移相空间中得到的一样, 也是不规则的螺旋杂乱曲线族(微观上由点组成)。

三维相轨要用三维画图软件在微机上显示。

18.3 Poincare 图

Poincare 图是研究低阶系统混沌振动的主要方法, 它将相轨按激励周期取点离散化而成。在二维相图 $\dot{x}(t_n), x(t_n)$ 中, t_n 从

$$\omega t_n = 2\pi n + \quad_{o}$$

中, 解出为

$$t_n = (2\pi/\omega)n + \quad_{o}/\omega$$

式中:　ω——激励频率;

$_o$——激励的初相位。

当　　$_o = 0$

则　　$t_n = n\Delta T$　　(记激励周期为 $\Delta T = 2\pi/\omega$)

在做 TIME CH. A VS B 的 Lissajous 图时,取 ΔT 为数字式信号处理机的采样间隔,即可将相轨离散化为 Poincare 图。

$_o$不会使吸引子的混沌性质有大的变动。图 18-4 为 $_o$。

图 18-4

从 0°～180°时的屈梁在双磁铁间追振的 Poincare 图。但阻尼的影响比较大。图 18-5(a)，小阻尼使吸引子均匀分布为散点，分维结构不明显。加大阻尼后，从图 18-5(b)，图 18-5(c) 中可见到分维结构。

图　18-5

若用时间延迟 τ 以同一信号给通道 A 和 B, 做 TIME CH. A 对 B 的 Lissajous 图, 可得到重构相空间的 Poincare 图, 这时应取

$$\tau = \Delta T / n$$

式中 n 应为很大的整数。若不是整数, 则难以看到分维结构。

在 Poincare 图中:

有限若干点表征周期振动;

封闭曲线表征拟周期振动;

有分维结构表征混沌吸引子;

无分维结构表征:

(1) 系统有噪声干扰,

(2) 若无噪声干扰, 则为小阻尼混沌振动,

(3) 若系统阻尼不小, 则可能为多频激励, 应作多频 Poincare 图, 见节 18.5。

18.4 用外触发测 Poincare 图

若系统由正弦激励, 用应变片测得混沌位移信号为 x, 微分后得 $\dot{x}$, 则以图 18-6 的系统, 将经滤波后的输入简谐信号给脉冲信号, 发生器产生间隔为 ΔT 的脉冲作为示波器或信号处理机的外触发信号。作 Lissajous 图即可得 Poincare 图。

图中: 1 为激励力;

2 为实际系统;

3 为输入信号滤波器;

4 为输出信号滤波器;

5 为微分器;

6 为脉冲信号发生器;

7 为数字式示波器或计算机;

8 为记忆示波器。

图　18-6

另一种外触发为位置触发，移动式触发见图 18-7。当图中质量 m 碰到弹性挡块时，其上的应变片发出脉冲信号作为外触发信号。得到的 Poincare 图见图 18-8，而转动式触发则可在转轴上装转盘，沿盘半径方向上开一槽，用光敏二极管得到脉冲信号作为外触发来测 Poincare 图。用此法研究一种非线性力矩驱动之电机的混沌转动，其以极坐标形式表示的 Poincare 图见图 18-9。

图 18-7

图 18-8

图 18-9

18.5 多频 Poincare 图

当系统同时受到两个不可相约频率的简谐激励时，例如，将这种激励加给在两磁铁间的屈梁上，若只对其中一个频率用 1/1000 ms 的脉冲作外触发，得到的 Poincare 图无分维结构（见图 18-10），但机时较少，画 4000 个点，只需用 10 分钟。所谓双频 Poincare 图，就是除对一个频率用宽 1/1000ms 脉冲同步外，同时再用宽 1ms 的脉冲来同步。将这两种脉冲信号同时送到‘与门’数字逻辑脉冲电路中，它仅当两个不同宽度的脉冲相重时，才发出一个脉冲给示波器或信号处理机去作外触发。这样得到的 Poincare

图　18-10

图, 分维结构就很清晰; 见图 18-11。

图　18-11

分维结构虽一目了然, 但机时太长, 画 4000 个点, 需 10 小时。这个办法当然可以推广到多个不可相约频率作简谐激励的系统, 得到清晰的多频 Poincare 图, 但所费机时就更可观了。

18.6 功 率 谱 图

对小阻尼系统和多自由度系统，从所测 Poincare 图中较难看到混沌吸引子的分维结构。所以，对混沌的识别还要辅之以其他方法，例如，功率谱与自相关等。

功率谱可用信号处理机测，也可通过 AD 转换，将模拟量变成数字量后，送入微机内用 FFT 软件计算。

功率谱是能量按频率的分布，周期振动的功率谱由许多离散的谱线组成，每根谱线的高度表征相应频率的振动强度。当发生周期倍化时，在频谱上有 n 根频率为 $\omega/2n$ 的谱线，ω 为基本频率，也是谱线中的最高频率。

1979 年，Feigenbaum 的论文计算出每次分频后，谱线高会短 16.4 分贝，混沌功率谱以连续谱为主，有时还能显示出若干主频的结构。图 18-12 为双磁铁间屈梁受迫混沌振动的对数功率谱图。

图 18-12

18.7 自 相 关

自相关可以从信号处理机得到，也可以通过 AD 转换，将模拟量变成数字量后送入微机内用软件计算。

如果振动信号是混沌信号,则意味着会失掉以往的信息,即经过一定时间后,自相关趋于零。图 18-13 为双磁铁间屈梁受迫混沌振动的自相关图。开始时最大,最后趋于零。

图　18-13

自相关算式为

$$r(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u(k+n)u(k) \tag{18-1}$$

1989 年,Singh 和 Joseph 建议从符号序列中提取自相关,若 u 只有+ 1 与- 1 两个符号,通过+ 1 与- 1 的混沌序列求自相关。1989 年,Feeny 和 Moon 在研究摩擦振子时,令+ 1 与- 1 分别代表“打滑”与“不打滑”两种状态,算出的自相关图见图 18-14。

图　18-14

18.8 KS 熵与 Liapunov 指数

1959 年, Kolmogorov 和 Sinai 建立了信息论中熵的定义, 称为 KS 熵 E:

$$E = -\lim_{\tau\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}(1/m\tau)\sum p(i_1, \cdots, i_m)\ln p(i_1, \cdots, i_m) \tag{18-2}$$

这里, 将 n 维相空间离散成边长为 ε的 n 维“胞”, $p(i_1, \cdots, i_m)$ 是相“流”(见节 2-2) τ时落在胞 i_1 内; 2τ时落在胞 i_2 内, ……, mτ时落在胞 i_m 内的联合概率。

对于混沌吸引子, 1977 年, Pesin 给出了 KS 熵与正 Liapunov 指数的一个关系:

$$E = \sum \lambda \tag{18-3}$$

故 $E > 0$ 和 $\lambda > 0$ 均可用以识别混沌振动。

18.9 概率密度分布

概率密度分布也是分析混沌振动的一种方法。例如:

在两个磁铁间屈梁迫振的混沌振动中, 将速度和位移送入信号处理机, 可得到速度概率密度分布图(图 18-15)。及位移概率密度分布图(18-16)。

混沌振动的概率密度分布, 往往具有多峰。位移的概率密度分布往往具有宏观多峰, 如图 18-16 的双峰; 速度概率密度分布往往具有微观多峰, 如图 18-15。

有了概率密度分布就可测得混沌振动的均值, 均方值, 方差。

图 18-15

图 18-16

18.10 分维测试

1986 年, Lee 和 Moon 对双磁铁间屈梁迫振的 Poincare 图的分维, 进行了光学测试, 其装置见图 18-17。

图 18-17

为优化光电效应, 光源加上一个橘色琥珀滤色镜, 并用一个 100Hz 的光栅转盘, 配合锁相放大器来消除噪音干扰。其测试过程为:

首先, 将从信号处理机中测得的 Poincare 图, 拍成照片, 用其两张一样的底片(黑色底片上的 Poincare 图为透明点), 放在图 18-17 中所示的位置上。光源经透镜, 先通过前一张底片的透明点。光线通过每一个透明点均形成一个小光锥, 射在后一张底片上形成一个很小的圆。调整两张底片之距 L, 即可调整此圆的半径 r 和后面底片的 Poincare 透明点。凡点距在此小圆以内者, 光才能被透射到光电管上, 见图 18-17。因此, 光电管所收到的总光量, 正比于式(6-2)的相关函数 C。变 L 即可用对数坐标画出 lnC 对 lnr 的关系图, 从图中斜率即可求出分维。又因为 L 与 r 成正比, 光通

量与 C 成正比，故光通量与 L 的对数坐标图上的斜率即分维 1.6，见图 18-18。

图 18-18

当阻尼比为 0.075 时，测得分维为 1.558。而 1985 年，Moon 与 Li 用 Rung-Kutta 计算数得到的分维为 1.565，两者很接近。由于 Poincare 图是由时间触发的，这意味着吸引子本身的维数应再加 1。

第 19 章　控　　制

19.1　控 制 参 数

在参数空间中，运动趋于某些吸引子的区域称为吸引域，两个域间的参数构成域界。现已发现：许多非线性系统的域界不是光滑的，而是分形的，即具自相似的不规则形态，称为分形域界。

1984 年，Moon 从双磁铁间曲梁迫振实验中得到了周期振动吸引子与混沌振动吸引子的分形域界，见图 19-1。

图　19-1

Moon 算出此实验分形域界的分维为 1.28。因此, 一条清晰的光滑域界是不实际的。在实际分形域界的上下限之间, 参数的微小变化都会引起吸引子的突变, 这就提供了良好的控制柔性, 即在分形域界的上下限之间, 控制参数就能得到想要的吸引子(混沌振动或周期振动)。图 19-1 中, 按 Melnikov 函数计算的理论域界才“ 光滑”。

19.2　控制子系统

1993 年, 波兰 Lodz 科技大学 T. Kapitaniak 和美国加州大学的 L. J. Kocarev 与 L. O. Chua 合作研究了通过控制线性子系统来控制非线性主系统的振动, 见图 19-2。

图　19-2

其运动微分方程为

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 + \varepsilon(x - y) = B_0 + B_1\cos\Omega t \quad (19\text{-}1)$$

$$\ddot{y} + e(y - x) = 0 \tag{19-2}$$

式中:

$a = c/(m\Omega)$

$b = k_1/(m\Omega^2)$

$c = k_c/(m\Omega^2)$

$\varepsilon = k_\varepsilon/(m\Omega^2)$

$e = k_\varepsilon/(m_\varepsilon\Omega^2)$

$B_0 = F_0/(m\Omega)$

$B_1 = F_1/(m\Omega)$

对每一个 Ω, **控制子系统的参数** e, **即可控主系统的振动。当** $a = 0.77$, $b = 0$, $c = 1$, $\varepsilon = 0.002$, $B_0 = 0.045$, $B_1 = 0.16$ **时**, **用数值模拟和理论分析得其参数吸引域如图** 19-3。

图 19-3

例如, $\Omega = 0.98$ **时**, **当** e **从** 0.2 **变到** 0.1, **从图** 19-3 **中可见**, **主系统从周期倍化进入混沌振动。因此**, **只要控制** e, **即可得到想要的混沌振动或周期振动。**

19.3 实物试验系统

图 19-4 为实物试验测试系统。在阻尼器 4 上边联结子系统(质量-板簧系统), 子系统上边联结主系统 1(双轴惯性振动系统), 主系统结构见图 19-5, 图中 3 为加速度计。

图 19-4　　　　图 19-5

1— 主系统;　　3— 加速度计;

2— 子系统;　　4— 阻尼器。

在图 19-5 中, 两个一样的电机带动两个一样的偏心作相向运动, 两个偏心产生的激振力在水平方向上相互抵消, 而在铅直方向上合成增强, 从而只得到主系统的铅直方向的简谐激振力。

在图 19-5 中, 左右两边的水平弹簧在铅直方向上产生非线性恢复力, 其受力分析见图 19-6。图中的主系统铅直方向非线性弹力为 $2F\sin\alpha$ 即

$$2k\{[(L+\Delta L)^2 + x^2]^{0.5} - L\}x/L$$

它可以简化为

$$k_1 x + k_c x^3$$

其中

$k_1 = 2k\Delta L / L$；　　L 为弹簧原长；

$k_c = k / L^2$；　　ΔL 为弹簧静伸长。

k 为弹簧刚度；

主系统下，用直杆联结子系统，其结构见图 19-7。

图　19-6　　　　图　19-7

图 19-7 中，1 为板簧，2 为可调质量片。调其片数即可变子系统质量的大小，调其左右位置即可变子系统的刚度。

子系统下，用直杆联结一个可变油阻尼器，其结构见图 19-8。

图　19-8　　　　图　19-9

图 19-8 中，1 为阻尼油，2 为一组铁片，两铁片的形状见图 19-9。调两铁片间的相对转角，即可调其间的开口度，而开口度大小与阻尼大小成反比。

19.4 实验结果

当激振频率为 4.4Hz 时，将子系统质量分别调到 0.13kg、0.26kg、0.32kg，主系统振动的 Poincare 图，分别为图 19-10、图

图 19-10

图 19-11

19-11、图 19-12，从中可见混沌性态随子系统质量的增加而增强，即通过控制式(19-2)的 e，而使混沌性态强化。

图　19-12

从以上三种情况对应的自谱(图 19-13，图 19-14，图 19-15)可

图　19-13

知，随着子系统质量的增加，系统的振动频带趋于平缓，说明混沌性态的加强。

图 19-14

图 19-15

从以上三种情况对应的自相关(图 19-16, 图 19-17, 图 19-18)

图 19-16

图 19-17

也同样可知，随着子系统质量的增加，自相关收敛加快，混沌性态得到加强。

图　19-18

所以，通过控制子系统的参数，确可控制主系统的振动性态。

第四部分　产品与专利

第 20 章　混沌激振器

20.1　专　　利

由于混沌振动具有比简谐振动更宽的振动频率，更剧烈的速度变化，有利于用作振动压实，振动筛选，振动钻进，振动切削，振动时效，振动落料及宽频振动试验等工作，故 1995 年，我们对多种混沌发生机构进行了实验，研制出具有很强的几何非线性及物理非线性的混沌激振器，可作为各种振动作业器械的高效振源，并取得国家专利，专利证书见图 20-1。它对国民经济中的机制、农机、轻工、石油、化工、食品等工业，土建、矿冶等工程，制药、制烟、制茶各行业均有广泛应用前景。

20.2　力学模型与状态方程

因为双摆具有很强的几何非线性，而库伦摩擦具有很强的物理非线性，我们的力学模型将两者结合，形成一个具有库伦摩擦的双偏心系统，见图 20-2。在图中 O 为偏心轴转动中心；O 为偏心轴的几何中心；C 为偏心盘质心；e_1 为 OO'；e_2 为 CO；ϕ_1 为偏心轴转角 ω_1；$\dot{\phi}_1$ 为偏心轴角速度 ω，ϕ_2 为偏心盘转角；$\dot{\phi}_2$ 为偏心盘角速度；$\ddot{\phi}_2$ 为偏心盘角加速度；R 为偏心盘孔径；m 为偏心盘质量；ρ 为偏心盘对 O 点的回转半径。

图 20-2 为偏心盘的加速度分析图。图中偏心盘质心加速度为

图 20-1

图 20-1

$$a_c = a_0 + a_{co}^{\tau} + a_{co}^{n} \tag{20-1}$$

其中

$$a_0 = e_1\omega^2$$

$$a_{co}^{\tau} = e_2\ddot{\varphi}_2$$

$$a_{co}^{n} = e_2\dot{\varphi}_2^2$$

偏心盘的受力(包括惯性力及力矩)如图 20-3 所示。在图中,偏心盘的惯性力矩 $M_\Phi = J_c\ddot{\varphi}_2$(其中:$J_c$ 为偏心盘相对质心的转动惯量)。Φ_c 为偏心盘质心惯性力:

图 20-2

图 20-3

$$\Phi_c = \Phi_o + \Phi_{co}^{n} + \Phi_{co}^{\tau} \tag{20-2}$$

式中

$$\Phi_o = me_1\omega^2$$

$$\Phi_{co}^{n} = me_2\dot{\varphi}_2^2$$

$$\Phi_{co}^{\tau} = me_2\ddot{\varphi}_2$$

在图 20-3 中:

$$\varphi' = \mathrm{arctg}\, f'$$

f' 为动摩擦系数

S 为全反力(当 $me_1\omega^2 \gg mg$ 时, S 过 O'点)

在$\triangle OO'q$ 中

$$\alpha = \pi - \theta - \psi$$

其中, 从$\triangle OO'p$ 得, $\theta \approx \sin\theta = (e_1/R)\sin\varphi_1' \approx (e_1/R)\varphi_1'$

又因

$$\psi = \pi - \varphi_1 + \varphi_2$$

得

$$\alpha = \varphi_1 - \varphi_2 - (e_1/R)\varphi_1'$$

用 D′Alembert 原理分别对图 20-3 中 O 点取矩和沿 S 方向投影得:

$$SR\sin\varphi_1' - M_\Phi - e_2\Phi_{c_o}^{\tau} - mge_2\sin\varphi_2$$

$$- e_2\Phi_{c_o}^{n}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \qquad (20\text{-}3)$$

$$S - \Phi_{c_o}^{n}\cos\alpha - \Phi_{o}\cos[\alpha - (\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$- mg\cos(\alpha - \varphi_2) - \Phi_{c_o}^{\tau}\sin\alpha = 0 \qquad (20\text{-}4)$$

从上两式中消去 S, 得到偏心盘振动微分方程:

$$\ddot{\theta}[e_2R\sin\varphi_1'\sin(\theta - e_1\varphi_1'/R) - \rho^2]$$

$$= ge_2\sin(\theta + \omega t) + e_2\omega^2\sin\theta - R\sin\varphi_1'\{e_2(\dot{\theta} + \omega)^2$$

$$\cos(\theta - e_1\varphi_1'/R) + e_1\omega^2\cos(e_1\varphi_1'/R) + g\cos(\omega t + e_1\varphi_1'/R)\}$$

$$(20\text{-}5)$$

在上式中

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2 - \omega t$$

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 - \omega$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varphi}_2$$

令 $x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}$

则得偏心盘相对运动状态方程为:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_2 = & \{ g e_2 \sin(x_1 + \omega t) + e_2 \omega^2 \sin x_1 \\
& - R \sin\phi [e_2 (x_2 + \omega)^2 \cos(x_1 - e_1 \phi / R) \\
& + e_1 \omega^2 \cos(e_1 \phi / R) + g \cos(\omega t + e_1 \phi / R)] \} / \\
& [e_2 R \sin\phi \sin(x_1 - e_1 \phi / R) - \rho^2]
\end{aligned}
\tag{20-6}
$$

20.3 偏心盘振动仿真

因为混沌振动的状态方程往往是刚性的, 故以 Treanor 方法用小步长做数字仿真, 其特点是用指数函进行逼近。

偏心盘对偏心轴相对转动的 C 语言程序是边算边画而不用另外设置数据文件的程序, 也不用另外的画图软件。由于程序中只用到一维数组, 因而可算大量的点而不必等到全部算完, 边算就边知结果。

当参数为 $f = 0.15$, $R = 3.725\mathrm{cm}$, $e_1 = e_2 = 0.94\mathrm{cm}$,

$\rho = 4.784\mathrm{cm}$, $\omega = 314\mathrm{rad/s}$

时, 混沌激振器中偏心盘相对偏心轴振动的相轨见图 20-4。从图

图 20-4

20-4 的相轨不重复性与复杂性可知, 偏心盘相对偏心轴作混沌

振动。

20.4 实测振动

用丹麦 B. K. 2034 数字信号分析仪，对混沌激振器作整机沿垂直方向的振动测试。测试时，用两只 YD-1 型压电晶体加速度

图 20-5

图 20-6

计，将振动信号分别通过两只电荷放大器 B. K. 2635(一只积分一次，输出速度信号，另一只积分两次，输出位移信号)以后分别接到 B. K. 2034 的 A 与 B 两通道中，做信号处理得到整机振动的自相

关与功率谱。

从相关系数的衰减性(图 20-5)与功率谱平缓的宽频特性(图 20-6),可知其具有混沌振动性态。

20.5 在振动压实中的应用

在振动作用下,颗粒间的摩擦显著减小,呈现出流动状态而充满间隙,从而由振动减摩而达到压实的目的。由于振动压实的效率高,节省能源,工作适用性广,故近代压实机械的发展趋势是广泛采用振动压实。

20.5.1 以电动机驱动激振器的实验

对砂子做振动压实试验,压前压后先后以大采样环刀取样,再用天平称。振动压实前取样称得为 150.4g,正弦激振压实 5 分钟后取样,称得为 152.2g。混沌振动压实 5 分钟后取样,称得为 162.2g。证明混沌激振有更好的振动减摩作用与压实效果。

20.5.2 以柴油机驱动激振器的实验

对砂子做振动压实试验,压前压后先后以小采样环刀取样,再用天平称。振动压实前取样,称得 99.5g,正弦激振压实 1 分钟后取样,称得 107g,混沌激振压实 1 分钟后取样,称得 113g。证明混沌激振有更好的振动减摩作用与压实效果。

所以,强非线性混沌激振器作为工程上宽频带振动的振源,有广阔的应用前景。

第 21 章　混沌振动台

21.1　专　　利

从力学的角度，人们不难设想，只用很简单的非线性机构，就能产生复杂而有用的混沌振动。1993 年的国际混沌实验学术会议后，美国的很多大学成立了研究中心，发达国家纷纷投入巨额经费，加快混沌振动的应用研究。

1995 年，我们对多种混沌发生机构进行研究，其中具有很强几何非线性的水平混沌振动台，取得了国家专利，专利证书见图 21-1。

21.2　力学模型

在机械动力学领域，有运动副间隙的连杆机构动力学方程是非线性的，用数字仿真求这些非线性方程的响应时，几乎得不到稳定的周期解。近年文献的研究证明，含间隙机构的动态响应存在混沌性态。

在设计混沌振动台时，通过加大运动副的间隙，虽可产生混沌振动，但间隙的存在会引起运动副间的冲击，碰撞，产生噪声，加快其疲劳失效。因此，通过加大运动副间隙的办法不可取。可取的是，用短杆代替间隙。

我们在一个滑杆机构中以两个短杆 AB 与 EF，代替运动副的间隙，见图 21-2。图中，$OA=r$，$AB=e_1$，$BC=a$，$BD=b$，$EF=e_2$，$FO=d$. BDE 杆为振动台的台面，AB 与 EF 杆在实际机构中可用

图 21-1

图 21-1

偏心套代替,曲柄 OA 由电机驱动,以转速 ω作匀速转动。通过数值仿真发现,虽然曲柄匀速转动,且在运动副中不含有间隙,但台面的运动却具有混沌性态。

图 21-2

21.3 动力学方程

在图 21-2 所示机构中,杆 BDE 的质心位于点 C,其余构件的质心位于其两端铰链连线的中点,构件 OA, AB, BDE, EF 的质量和转动惯量分别为 m_1, J_1, m_2, J_2, m_c, J_c, m_3, J_3。因曲柄匀速转动,故 $\theta_1 = \omega t$,而 DE 为时间 t 的函数,设 DE = $l(t)$,利用第二类 Lagrange 方程,可以建立其中两个广义坐标 θ_2, θ_c 的运动微分方程,其形式为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = Q_2 \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_c} - \frac{\partial T}{\partial \theta_c} = Q_c
\end{aligned}
\qquad (21\text{-}1)
$$

式中

Q_2, Q_c 分别是对应于 θ_2, θ_c 的广义力, 均为零, 动能为 T

$$T = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^{3} (m_i \dot{x}_i^2 + m_i \dot{y}_i^2 + J_i \dot{\theta}_i^2)$$

$$+ 0.5 \cdot m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + 0.5 J_c \dot{\theta}_c^2 \tag{21-2}$$

另外, 用了众所周知的两个分析力学的关系

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial q_j} \tag{21-3}$$

式中 p_i 为构件位置坐标(如 x_i, y_i 等); q_j 是广义坐标, 利用式(21-2)(21-3)可将式(21-1)化为便于推导的形式

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial \theta_2} \right) + J_2 \ddot{\theta}_2 \\
&+ J_3 \ddot{\theta}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} + m_c \ddot{x}_c \frac{\partial x_c}{\partial \theta_2} + m_c \ddot{y}_c \frac{\partial y_c}{\partial \theta_2} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{3} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_c} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial \theta_c} \right) + J_c \ddot{\theta}_c \\
&+ J_3 \ddot{\theta}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_c} + m_c \ddot{x}_c \frac{\partial x_c}{\partial \theta_c} + m_c \ddot{y}_c \frac{\partial y_c}{\partial \theta_c} = 0
\end{aligned} \tag{21-4}$$

为将上式中的非线性项表示成广义坐标的函数, 利用机构环封闭方程

$$r\cos\theta + e_1\cos\theta + b\cos\theta + l\cos(\theta + \pi - \alpha) + e_2\cos\theta + d = 0$$

$$r\sin\theta + e_1\sin\theta + b\sin\theta + l\sin(\theta + \pi - \alpha) + e_2\sin\theta = 0$$

可将 l, θ, $\dot{l}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{l}$, $\ddot{\theta}$, $\partial\theta/\partial\theta$, $\partial\theta/\partial\theta$ 表示为广义坐标, 广义速度, 广义加速度的非线性函数。

对式(21-4)进行推导并经整理后, 可将系统运动微分方程写成如下形式

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{21-5}$$

式(21-5)中 A_{ij}, B_{ij} 均为广义坐标, 广义速度的非线性函数。因此, 式(21-5)是二阶非线性变系数微分方程组, 可从中解出 θ_c, θ_2。

实际上, 我们关心的是振动台的运动情况, 即构件 BDE 的运动 θ_c, x_c, y_c。其中, θ_c, $\dot{\theta}_c$, $\ddot{\theta}_c$ 由式(21-5)可知, 而 x_c, $\dot{x}_c$, $\ddot{x}_c$, y_c, $\dot{y}_c$, $\ddot{y}_c$ 是广义坐标和时间的函数, 由运动分析可知为:

$$
\begin{aligned}
x_c &= r\cos\theta_1 + e_1\cos\theta_2 + a\cos\theta_c \\
y_c &= r\sin\theta_1 + e_1\sin\theta_2 + a\sin\theta_c \\
\dot{x}_c &= -r\omega\sin\theta_1 - e_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - a\dot{\theta}_c\sin\theta_c \\
\dot{y}_c &= r\omega\cos\theta_1 + e_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + a\dot{\theta}_c\cos\theta_c \\
\ddot{x}_c &= -r\omega^2\cos\theta_1 - e_1\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2 - a\dot{\theta}_c^2\cos\theta_c \\
&\quad + e_1\ddot{\theta}_2\sin\theta_2 - a\ddot{\theta}_c\sin\theta_c \\
\ddot{y}_c &= r\omega^2\sin\theta_1 - e_1\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 - a\dot{\theta}_c^2\cos\theta_c \\
&\quad + e_1\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 + a\ddot{\theta}_c\cos\theta_c
\end{aligned}
\tag{21-6}
$$

21.4 数 值 仿 真

因为微分方程式(21-5)是强非线性的, 所以用数值方法对其进行求解。设式(21-5)中用到的机构参数如下:

$r = 8.1\text{mm}$	$e_1 = 0.78\text{mm}$	$b = 141.5\text{mm}$
$a = 0.78\text{mm}$	$e_2 = 0.78\text{mm}$	$d = 146.02\text{mm}$
$m_1 = 0.0148\text{kg}$	$m_2 = 0.0064\text{kg}$	$J_1 = 0.6876\text{kg}\cdot\text{mm}^2$
$m_3 = 0.0062\text{kg}$	$m_c = 2.1598\text{kg}$	$J_2 = 0.2618\text{kg}\cdot\text{mm}^2$
$J_3 = 0.2572\text{kg}\cdot\text{mm}^2$	$J_c = 81574\text{kg}\cdot\text{mm}^2$	$\alpha = 150°$
$\omega = 31.42\text{rad/s}$	$\theta_1 = 0^0 (t = 0)$	

任取一组(θ_2, θ_c, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_c$), 用 Gill 法进行积分, 可得式(21-5)、

(21-6)的数值解。现取(330°,177°,0,0),所得图21-3,图21-4为

图 21-3

图 21-4

曲柄从第 20-24 圈间杆 BDE(即振动台面)的加速度图与相轨图。因为一般机械动力学系统在曲柄回转 2-3 圈后就可得到稳定的运动,故可认为图 21-3,图 21-4 的情况已超出过渡过程。

由图 21-3 可见,台面的加速度是非线性的;由图 21-4 可知,台面的相轨图呈现无穷缠绕和折叠的情况,具有奇怪吸引子的特征。这些情况表明,台面的运动具有明显的混沌性态。

21.5 电测结果

用 B. K. 2034 信号分析仪处理电测实验数据,可得振动台加速度 $\ddot{x}_c$ 的功率谱图(图 21-5)与自相关图(图 21-6)。由图 21-5 可

图 21-5

图 21-6

知，功率谱是连续的；由图 21-6 可知，自相关是衰减的。从而可得出结论：台面的运动具有混沌特性。

21.6　在振动筛分中的应用

为了验证本振动台的效果，我们采用柳州探矿机械厂 1980 年生产的 Φ200 标准振筛机（简称振筛机）和混沌振动台作对比实验。振筛机的工作原理主要是：在水平摇动的平台上固定筛子，该摇动为简谐振动，同时周期性地打击筛子上的盖。振筛机的主要工作参数为：电机功率 370W，摇动次数为 290 次/分，打击次数为 156 次/分。

实验中用三层筛，分别为 70 目，100 目，120 目。实验对象为 100g 金刚砂。时间为 2 分钟。各层筛子上筛下的砂子见表 21-1（单位：g）

表 21-1　各层筛里砂子质量

	振筛机	振动台
70 目	39	38.7
100 目	30.8	28.5
120 目	17.7	18.4
底盘	11.2	11.9

由表中可知，两台设备的效果相当，但混沌振动台功率（100W）小于振筛机的功率（370W），而且混沌振动台不必打击筛子，因而可以认为：如果功率相同的话，混沌振动台的筛分效果要比振筛机好。

第五部分　文献与资料

专　　刊

1　International Journal of Biurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, World Scientific Publishing Company.

2　Chaos, Solitons & Fractals , Pergamon Press Ltd.

3　Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, American Association of Physics.

4　Physica. (D), North-Holland.

7D (1983). Order in Chaos

18D (1986). Instabilities and Chaos

23D (1986). Spatio-Temporal Coherence and Chaos in Physical Systems

33D (1988). Progress in Chaotic Dynamics

专　　著

5　Abraham R H, Shaw C D. Dynamics: the Geometry of Behavior. Part II. Chaotic Behavior. Aerial Press, 1983

6　Schuster H C. Deterministic Chaos. An Introduction, 2nd Edition, Physic-Verlay 1988

7　Zaslavsky G M. Chaos in Dynamical Systems. Harwood Academic Publishers 1985

8　Devaney R L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Benjamin/ Cummings 1986

9 Thompson J M T, Stewart H B. Nonlinear Dynamics and Chaos. Geometrical Methods For Engineers and Scientists, Wiley 1986

10 Mira C. Chaotic Dynamics. World Scientific, 1987

11 Moon C F. Chaotic Vibration. An Introduction for Applied Scientists and Engineers. John Wiley & Sons, 1987

12 Gleik J. Chaos: Making a New Science. Viking Penguin Inc, New York, twelfth printing, 1988

13 Kapitaniak T. Chaos in Systems with Noise. World Scientific 1988

14 Parker T S, Chua L O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer-Verlag 1989

15 Rulle D. Chaotic Evolution and Strange Attractors. Cambridge University Press 1989

16 Tabor M. Chaos and Interability in Nonlinear Dynamics An Introduction. Wiley 1989

17 Rasband S N. Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems. Wiley 1989

18 Christiansen P L, Parmentier R D. Structure, Coherence and Chaos in Dynamical Systems. Manchester University Press, 1989

19 Hao Bai-lin. Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems. World Scientific, 1989

20 Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer-Verlag, New York, 1990

21 Zaslavsky G M, Sagdeev R Z, Usikov D A and Chernikov A A. Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns. Cambridge University Press, 1991

22 Kapitaniak T. Chaotic Oscillations in Mechanical Systrms. Manchester University Press, 1991
23 Lichtenberg, Lieberman. Regular and Chaotic Dynamics. 2nd ed. Springer, 1992
24 Wiggins. Chaotic Transport in Dynamical Systems. Springer 1992
25 Peitgen, Jurgens, Saupe. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. 2nd print 1993. Springer
26 **龙运佳**. 1995. **混沌振动实验识别及其发生机构参数研究**. **北京农业工程大学**
27 Tufillaro N B, Abbott T, Reilly J. An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos. Addison-Wesley Publishing Company 1992

文　　集

28 Haken H. ed.. Evolution of Order and Chaos. Springer Serier in Synergetics 17. Springer-Verlag 1982
29 Garrido L ed.. Dynamical Systems and Chaos. Lect. Note in Phys.. 179. Springer-Verlag, 1983
30 Hao Bai-lin ed.. Chaos. An introduction and reprints volume. World Scientific 1984
31 Cvitanovic P ed. University in chaos. An introduction and reprints volume. Adam Hilger 1984
32 Schuster P ed. Stochastic Phenomena and Chaotic Behaviour in Complex Systems. Springer Series in Synergetics 21. Springer-Verlag 1984
33 Kuramoto Y, ed.. Chaos and Statisstical Methods Springer

Series in Synergetics 24. Springer-Verlag 1984
34 Chandra J ed.. Chaos in Nonlinear Dynamical Systems. SIAM 1984
35 Velo G, Wigthman A S eds. Regular and Chaotic Motion in Dynamiccal Systems. Plenum 1985
36 Fischer D, Smith W R eds. Chaos, Fractals, and Dynamics, Dekka
37 Lundqvist S ed. Physics of Chaos and Related Problems. Proceedings of the 59th Nobel Symposium. Phys. Scripta, T9 1985
38 Holden A V ed. Chaos. Manchester University Press, 1986
39 Mayer-Kress G. ed. Dimensions and Entropies in Chaotic Systems. Quantification of complex behaviour. Springer Series in Synergetics 32. Springer-Verlag 1986
40 Sarkar S. ed. Nonlinear Phenomena and Chaos. Adam Hilger 1986
41 Barnsley M F, ed. Chaotic Dynamics and Fractals. Academic Press 1986
42 Hao Bai-lin. ed. Directions in Chaos. 1987 Vol. 1, World Scientific
43 Pike E R, Lugiato L, eds. Chaos, Noise and Fractal. Adam Hilger 1987
44 Zweifel P, Gallavotti G, Anile M, eds. Nonlinear Evolution and Chaotic Phenmena. Plenum 1987
45 Hao Bai-lin, ed. Directions in Chaos. 1988 Vol. 2 World Scientific
46 Berry M V, ed. Dynamical Chaos. Cambridge University Press 1988

47 Lundqvist S, March N H, Tosi M P, eds. Order and Chaos in Nonlinear Physical Systems. Plenum 1988
48 Velarde M G, ed.. Synergetics, Order and Chaos. World Scientific 1988
49 Livi R, Ruffo S, Ciliberto S, Buiatti M, eds. Chaos and Complexity, World Scientific 1988
50 Moss F, Lugiato L A, Schleich W, ed. Noise and Chaos in Nonlinear Dynamical Systems. Cambridge University Press 1990
51 Rozmus W, Tuszynski J A, eds. Nomlinear and Chaotic Phenomena. World Scientific 1991
52 Antonion I, Lambert F J, eds. Solitons and Chaos. Springer-Verlag 1991
53 Vohra S, Spano M, Shlesinger M, Pecora L, Ditto W, ed. Proceedings of 1st Experimental Chaos Conference. World Scientific 1992

述　　评

54 **郝柏林. 分岔, 混沌, 奇怪吸引子, 湍流及其他—— 关于确定性系统中的内在随机性. 物理学进展**, 1983, 3(3), 329- 415
55 **朱照宣. 非线性动力学中的混沌. 力学进展**, 1984, 14(2) 129 - 143
56 **朱照宣. 什么是混沌. 力学与实践**, 1985, 7(4), 2- 7
57 **朱照宣. 混沌. 见: 钱伟长主编. 非线性力学的新发展—— 稳定性, 分岔, 突变, 混沌. 华中理工大学出版社**, 1988. 270- 363
58 **陈幼松. 混沌理论应用的可能性. 世界科学**, 1992, (2)
59 **陈予恕. 非线性振动, 分岔和混沌理论及其应用. 振动工程学**

报, 1992, 5(3), 235- 249
60 徐健学. 混沌和通向混沌的道路. 陈予恕, 唐云等编. 非线性动力学中的现代分析方法. 科学出版社 1992, 163- 224

论 文

61 Van Der Heijden G H M. Bifurcation and Chaos in Drillstring Dynamics. Chaos, Solitons & Fractals, 1993, Vol. 3, No. 2, 219- 247
62 Kapitaniak T, Kocarev L J and Chua L O. Controlling Chaos Without Feedback. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1993, Vol. 3, No. 2, 459- 468
63 Roger Dettmer. Chaos and Engineering. IEE Review (Sep) 1993, 199- 203
64 Tong X, Rimrott F P J. Chaotic Attitude Motion of Gyrostat Satellites in a Central Force Field. Nonlinear Dynamics 1993, 4: 269- 278
65 Solomon C S, Yim, Huan Lin. Chaotic Behavior and Stability of Free-Standing Offshore Equipment. Ocean Engng, 1991, Vol. 18, No 3, 225- 250
66 Jiin-Po , Frank Dimaggio. Chaotic Motion of Pendulum with Support in Circular Orbit. Journal of Engineering Mechanics 1991, Vol 117 , No 2, 329- 347
67 Dan Gabriel Cacuci. On Chaotic Dynamics in Nuclear Engineering Systems. Nuclear Technology, 1993, Vol. 103 (Sep) 303- 309
68 Hall E K, Hanagud S V. Control of Nonlinear Structural Dynamic Systems: Chaotic Vibrations. Journal of Guidance,

Control, and Dynamics. 1993, Vol 10. No 3, 470- 476
69 Levien R B, Tan S M. Double pendulum: An experiment in chaos. Am. J. Phys. 1993 61(11), 1038- 1044
70 William L, Ditto, Louis M, . Pecora. Mastering Chaos. Scientific American (Aug) 1993, 62- 68
71 Kenshi Sakai, Kazuyuki Aihara. Nonlinear Vibrations in an Agricultural Implement System. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1994, Vol. 4, No. 2, 465- 470
72 **龙运佳. 混沌振动实验识别及其发生机构研究. 工程力学增刊清华大学出版社**, 1995, 994- 1000
73 **龙运佳. 混沌激振器. 中国学术期刊文摘**, 1996 **年第** 3 **期, 中国科学技术协会学会工作部出版**
74 **龙运佳等. 强非线性宽频带混沌激振器及其应用. 农业工程学报** 1995 **年第** 4 **期**
75 **龙运佳等. 强非线性水平混沌振动台. 农业工程学报** 1996 **年第** 1 **期**
76 Hsu C S. Global Analysis of Dynamical Systems Using Posets and Digraphs. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1995, Vol. 5. No. 4, 1085- 1118