

利用光學槓桿原理測定微小的重力常數

2009 初稿: 李明隆 胡軒華、林明顯、吳宗耀

2010 修定: 陳冠謀、袁學平

Objectives

了解扭擺用途，並且利用雷射光及光槓桿原理，測定重力常數 G 。

PRE-LAB READING

Introduction

西元 1666 年，牛頓由自由落體與天體的運動發現了萬有引力：

$$F = G \frac{mM}{d^2} \dots\dots ①$$

其中 m 與 M 為兩物體之質量，力的方向為兩物體質心連線且相向靠近， d 則是兩物體之間質心之距離， G 則是重力常數。對於地球而言， M 為地球質量， d 為地球半徑，對於地表附近的物體來說，則有：

$$F = g m \dots\dots ②$$

其中

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M}{d^2} \dots\dots ③$$

在③式中，重力加速度與地球半徑皆為已知 ($g = 9.7883 \text{ m/s}^2$, $d=6783.1$ @赤道)，如果能測得 G 則亦可得知地球之質量，故而測得 G 為本實驗主要目的。1798 年卡文迪西 (Cavendish) 利用扭擺裝置，首先得到準確的 G 值 (6.754 ± 0.041) $\times 10^{-8}$ 達因·厘米²/克²) 如今公認最精確的 G 值是 $G = (6.6726 \pm 0.0010) \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ 。

原理及公式推導

在扭擺中，小球會因大球吸引而改變位置 (圖 1)，其中一個小球所受力矩為：

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2 = \left(\mathbf{r} \times \frac{GMm}{d^2} - \mathbf{r} \times \frac{GMm}{\sqrt{(2r)^2 + d^2}^2} \times \frac{d}{\sqrt{(2r)^2 + d^2}} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \left[\frac{GMmr}{d^2} \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4r^2}{d^2}}} \right) \right] \hat{\mathbf{z}} = \left\{ \frac{GMmr}{d^2} \times \left[1 - \left(1 + \frac{4r^2}{d^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \right\} \equiv \frac{\alpha GMmr}{d^2} \hat{\mathbf{z}} \dots\dots ④ \end{aligned}$$

Where $\alpha \equiv \left[1 - \left(1 + \frac{4r^2}{d^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$ 為小球對兩大球的力矩修正項。

小球因石英線之扭力而呈現一振幅隨時間增加而減小之來回震盪。若在扭擺之擺線上置一隨擺線轉動之平面鏡，則由光槓桿原理可知，當我們投射一光源至平面鏡時，若鏡子轉動 θ 角，反射光轉動 2θ 角。若將大球由 A 1 A 2 移至 B 1 B 2 時，小球角位置從 $-\theta$ 到 $+\theta$ ，反射光線總改變角度為 4θ 。而有下列關係式：

$$4\theta = \Delta x / L \dots\dots ⑤$$

其中， Δx 是大球分別在 A 位置和 B 位置時，光點在直尺上平衡位置的差值。 L 是反射鏡到直尺距離。

$$\text{擺線受到之總力矩為 } \tau = 2\tau_1 = \kappa \theta \dots\dots ⑥ \quad \kappa = I \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \dots\dots ⑦ \quad I =$$

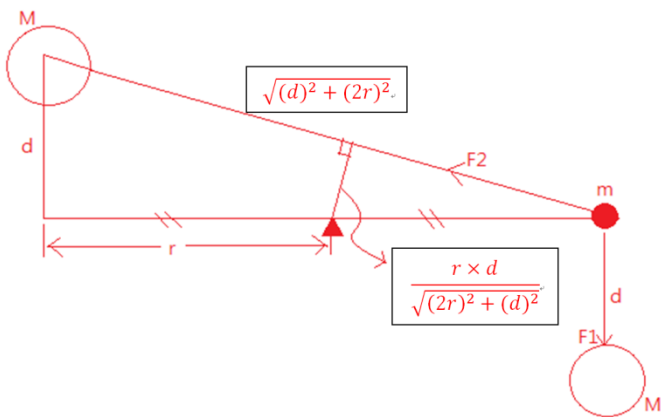
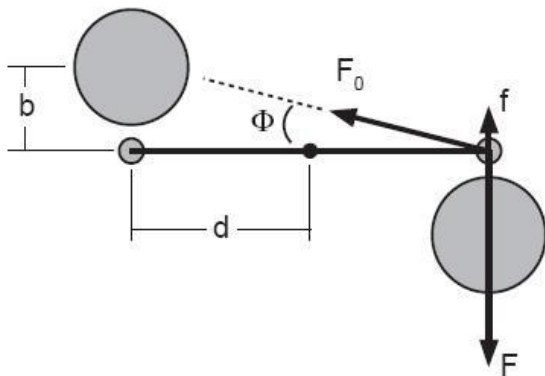
$$2mr^2 \dots\dots ⑧$$

其中， I 為兩小球之轉動慣量， T 為擺動之自然週期

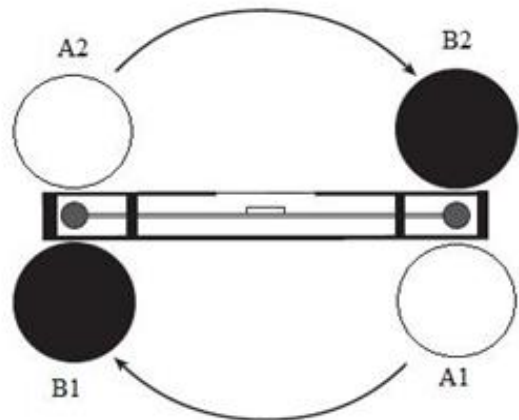
整理④、⑤、⑥、⑦、⑧ 式可得

$$G = \frac{\pi^2 r d^2 \Delta x}{\alpha M L T^2} \dots\dots ⑨$$

其中， π 、 r 、 d 、 α 、 M 的值都附在講義中， L 可由捲尺測得，故本次實驗數據的處理，目的在找出 Δx 、 T 。



〈圖 1〉 大小球力矩圖



〈圖 2〉 兩組大小球位置圖

利用扭擺及光槓桿找出 Δx 、 T

θ 為扭擺偏離平衡位置之角度， κ 為一常數。則其自由擺動時，

$$\theta(t) = \theta_0 + A \cos(\omega t + \delta) \dots\dots \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

θ_0 為小球之恢復力為零時之角度， A 為自由擺動開始時，小球偏離 θ_0 之角度， δ 為其相位差。又因其擺動會存在諸如摩擦、空氣阻力的影響，故其中存在一阻尼 β 。

故 θ 有一微分方程式：
$$m\ddot{\theta} = \kappa\theta - \beta\dot{\theta} \dots\dots 11$$

其解為：

$$\theta(t) = \theta_0 + Ae^{-\beta t/2m} \sin(\omega' t + \delta) \dots\dots 12$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} \dots\dots 12a$$

利用光槓桿把角度的變化換成位置變化，故可將12改寫為：

$$x(t) = x_0 + A'e^{-\beta t/2m} \sin(\omega' t + \delta) \dots\dots 13$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} \dots\dots 13a$$

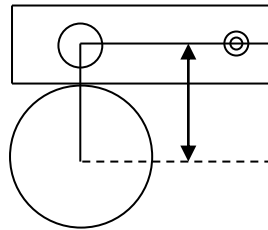
x 為光點在直尺上之刻度， x_0 為其平衡點之位置。

即可由作圖得到平衡點位置差 $\Delta x = |x_{A0} - x_{B0}| \dots\dots 14$ ，及自然擺動周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega'^2 + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}} \cong \frac{2\pi}{\omega'} \dots\dots 15$$

Apparatus

重力常數實驗儀器組(含大鉛球、小鉛球)、避震平台、雷射光源、刻度尺、碼表



小球與鄰近大球距離 d

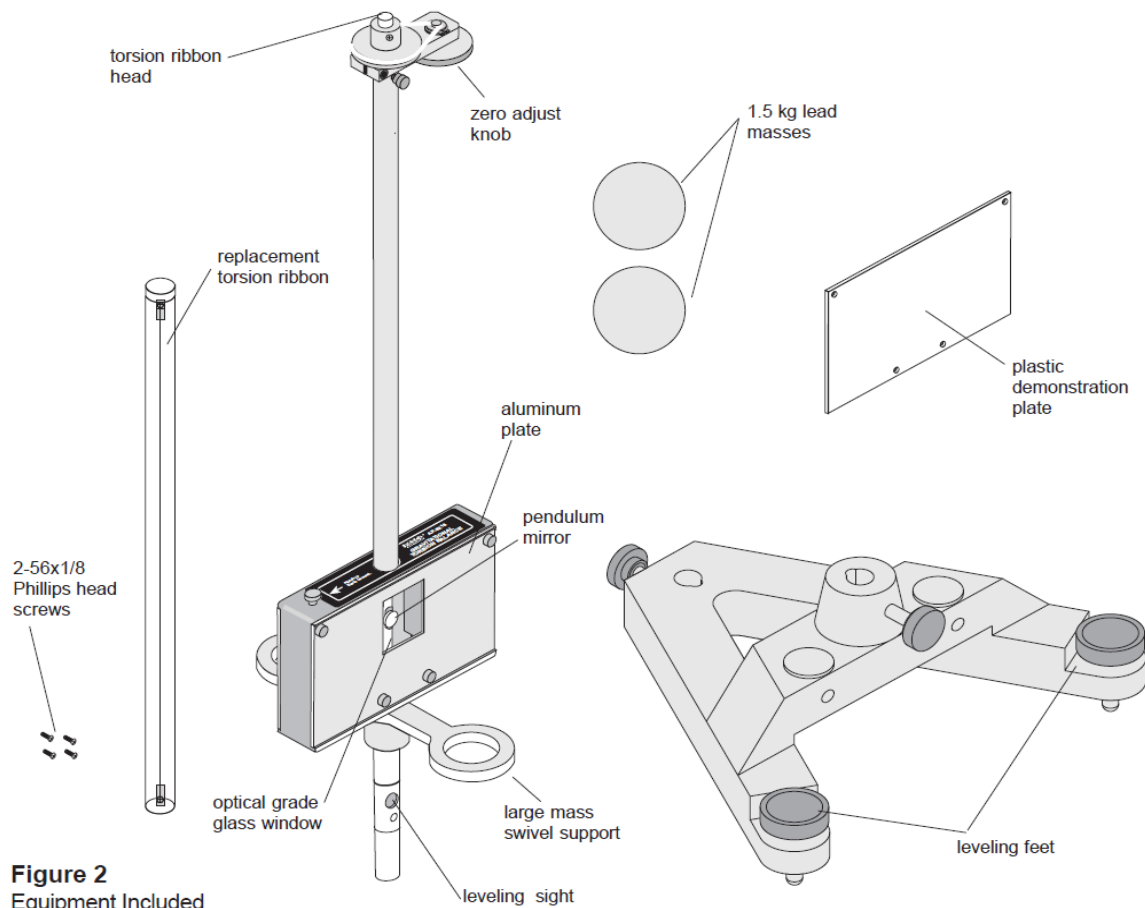
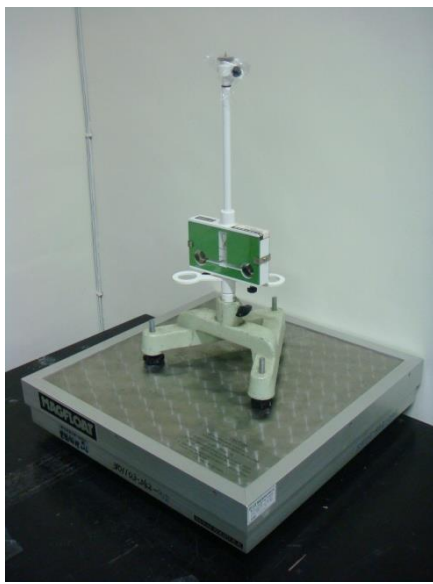


Figure 2
Equipment Included

[Note] : 本實驗儀器規格：小球質量 $m = 0.015 \text{ kg}$ (半徑 6.9 mm) 大球質量 $M = 1.500 \text{ kg}$ (半徑 32 mm) 半徑 $r = 5.0 \text{ cm}$ 距離 $d = 46.5 \text{ mm}$



重力常數實驗儀器 PASCO
AP-8215



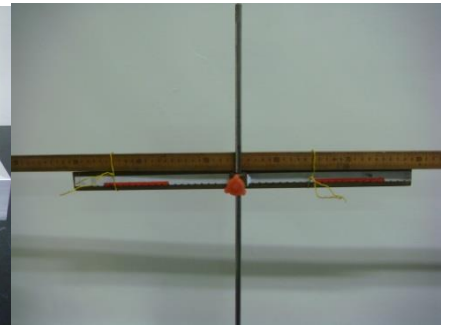
He-Ne 雷射光源 PASCO
OS-8526A 波長 650 nm 輸出



大鉛球(以下稱大球) 質量
1.5 kg 半徑 32 mm
小鉛球(以下稱小球) 質量
0.015 kg 半徑 6.9 mm



避震平台 (MAGFLOAT)



刻度尺 Length = 1m

Generalized procedure

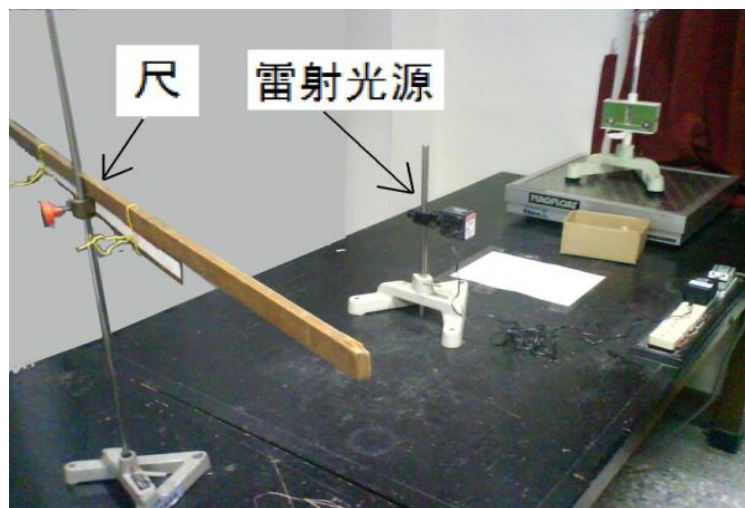
1. 校正水平，儀器歸零。
2. 測自然扭盪的 $x-t$ 圖，fit 曲線求出其週期。
3. 將大球置於 A1、A2 位置重複步驟 2。
4. 將大球置於 B1、B2 位置重複步驟 2。

PRE-LAB Questions

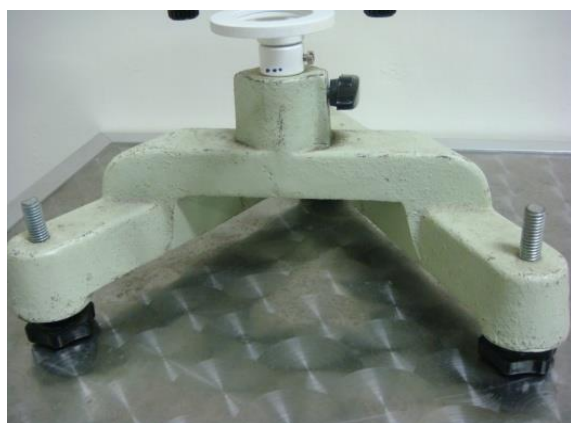
1. 在扭擺實驗中，若扭擺與直尺之距離為 1.5 公尺，且已知 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ，則求 Δx ？
2. 在扭擺的實驗中，若忽略扭擺中另一側大球對小球的吸引力，則以此所求出的重力常數為何？
3. 本實驗做了哪些近似與假設來得到算出 G 值得公式？
4. 本實驗使用扭擺和光槓桿的目的，請簡述之。

實驗準備及注意事項

1. 將重力常數實驗儀器、雷射光源置於第一桌、刻度尺置於第二桌的相對位置擺設，並將兩桌稍微分開，避免兩桌相接觸。而後請於第二桌做實驗，勿做會影響第一桌平衡的事，如：將身體靠近、腳大力踩地板.....。
2. (新學年初次使用時)，以水平儀調整避震平台、綠色盒子 "Alumina plate" 之水平。



實驗裝置全圖



腳架之水平調鈕

●儀器若不為水平:試調整扭擺腳架使其為水平，在調整時勿觸壓避震平台。

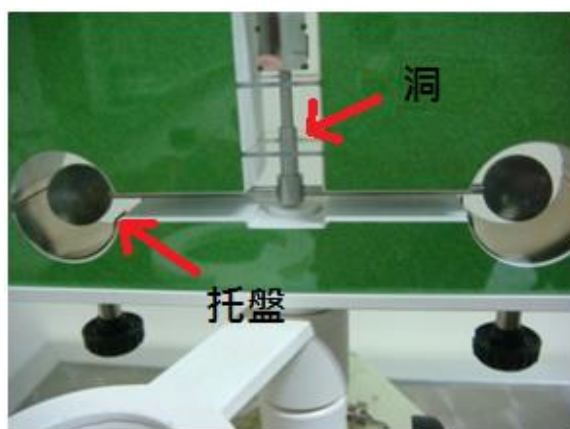


圖 11、旋桿及兩壓克力板

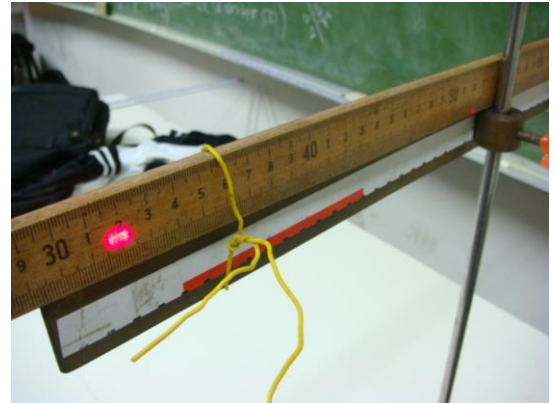
●調整不銹鋼旋桿水平: 將兩端小球托盤旋鈕順時鐘旋下，到小球托盤降下至確定小球能自由晃動即可。

●儀器是否為水平的依據是中間的不銹鋼旋桿需維持在兩壓克力板的洞中(圖 11)，不與壓克力板相觸，以免在實驗時對扭擺造成影響。**※請直接以不銹鋼旋桿得在壓克力板洞中央的位置來判斷是否水平，勿相信不平的水平儀！**

In-lab Activities

Experimental setup

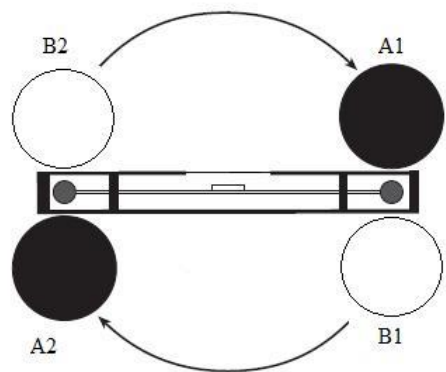
此實驗裝置對震動超級敏感，一不小心，實驗時間就要加長 15 分鐘，半小時。故在設置時將用以觀察數據的刻度尺置於第二桌，並將兩桌分開避免干擾，從事任何記錄或活動，均盡量在第二桌進行，實驗進行時非必要，不要靠近第一桌。從實驗一開始，附近的人都要所有動作都要輕，主要的實驗裝置桌不要以手、身體等碰觸，倚靠等，只可以雙手指、掌等輕輕調整，移動大球，雷射等。



最亮的光點才是反射的光點(中間那點)，注意測量時不要碰到尺
光點左右移動的範圍要在直尺內



直接以電閘開關雷射光源，
不要用雷射光源後調整鈕
及開關



- 在此，我們可將圖 19 分成三個部分：
- 不受大球影響時的自由擺動: C1C2 位置時。
- 當大球處於 A1A2 位置時的擺動。
- 當大球處於 B1B2 位置時的擺動。

●重力常數實驗儀器組頂端之歸零旋鈕切勿做任何調整(膠帶附著處)，以免造成細銅絲斷裂，如果需做調整或有任何問題，請找助教或教授解決。

1.將兩個大球放上大球托盤，並使托盤與玻璃板垂直(即 C 位置)。

2.緩緩將兩邊小球托盤旋鈕順時鐘旋出，扭擺會自然的來回擺動，動作越小越好，避免扭擺擺動振幅過大，以及能減少實驗時平衡的時間。

●若扭擺振幅過大時，可先將一端的小球托盤旋鈕逆時鐘旋上，使整個扭擺小球被托起固定，再緩緩將小球托盤旋鈕旋出，使其重新平衡。

●小球托盤旋鈕勿完全旋出，旋至與中間白色平台同高即可。

3.調整雷射光源: 直接從其電源線連接之電閘開啟(關閉時亦然)，雷射光源後方水平調整、開關等請勿調整。只調整其高度(請比大球低)與入射鏡面角度(略斜向上)，使其可掠過大球上方，打在反射鏡上半部，反射點並可以落在約 2 m 外的尺上。找反射光點時，可先用書本或白紙找出其大概位置，再調整測量的直尺至該處，同時考慮其擺動振幅調整其相對位置，使光點不會超出測量的尺，在找光點時，應找出亮光點最大的一點，其餘為散射或玻璃板反射之光點。

4.轉動大球托盤至 A, B, C 三位置，練習一下你的動作，並注意大球以及雷射光本身的支撐架是否會擋住雷射光。

Part 1 扭擺之 κ 值測量

(因實驗時間過長，暫時取消 Part 1, 直接以 Part 2, 3 數據中求取)

3.兩邊小球托盤旋鈕順時鐘旋出後，扭擺會自然的來回擺動，待 10 分鐘左右扭擺運動穩定後，開始記錄雷射光源反射在直尺上的光點位置，每 30 秒記取直尺數據一次，持續紀錄約 40~50 分鐘。，持續紀錄四個周期(八個折返點)，若時間不夠最少做三個完整周期。

4.將光點位置與時間作圖，由圖上可取出週期 T，代入公式即可求出 κ 值，比較大球在不同位置時，對 κ 值是否有影響。

Part 2 重力常數 G 之測量

1.延續 Part 1，不要動到桌子，及其他任何東西，小心將大球順時鐘轉至與實驗裝置之塑膠板相貼，也就是大球在 A1A2 位置。待 10 分鐘左右扭擺運動穩定後，開始記錄雷射光源反射在直尺上的光點位置，每 30 秒記取直尺數據一次，持續紀錄約 60 分鐘，約 5 個週期(6 個最大或最小值)，若時間不夠，最少做 4 個完整週期。

2.將托盤移至另一邊，也就是大球在 B1B2 位置，也是記錄約 5 個週期數據。

3.此時數據應有三個部分，小球自由擺動 C1C2 位置(可能應時間因素省略)、大球在 A1A2、大球在 B1B2 位置的數據，紀錄的 5 個峰值的數據，在後面處理數據要 CURVE FITTING 時，最好捨去掉前面 1~2 個峰值，所到的曲線會比較貼近原數據點所形成的曲線。

4.將光點位置與時間作 X-t 圖，求出平衡點位置與週期 T (請參考 Lab Report)，兩平衡點距離即為 Δx 。

5.測量凹面鏡到尺上估計光點最終停止之位置的距離 L。

6.將 L、T、 Δx 帶入⑨，考慮各測量的標準差，算出 $G \pm \Delta G$ 值。分析誤差並和公認值做比較，。

參考數據圖

數據分析 (使用 Origin Pro 8.1)

1. 作時間對位置的關係圖，觀察圖形。
2. 分成 A、B 兩段，並將前面數個尚未穩定的部分(就是 transient solution)mask 掉，分別以 Waveform/SineDamp 作 fitting steady solution。(※OriginPro 8.1 需要至少 2.5 個周期才能做 Sine Damp 的 fitting，故穩定震盪的時間要足夠。)
3. OriginPro8.1 內的公式為 $y=y_0 + A*\exp(-x/t_0)*\sin(\pi*(x-x_c)/w)$

對應講義中的公式 $x(t) = x_0 + A'e^{-\beta t/2m} \sin(\omega' t + \delta) \dots\dots 13$

$$x_0 = y_0 \quad t = x \quad \beta = \frac{2m}{t_0} \quad \omega' \cong \omega = \pi/w \Rightarrow T = 2w \quad \delta = \pi(-x_c)/w$$

可求得平衡點位置差 $\Delta x = |x_{A0} - x_{B0}| \dots\dots 14$

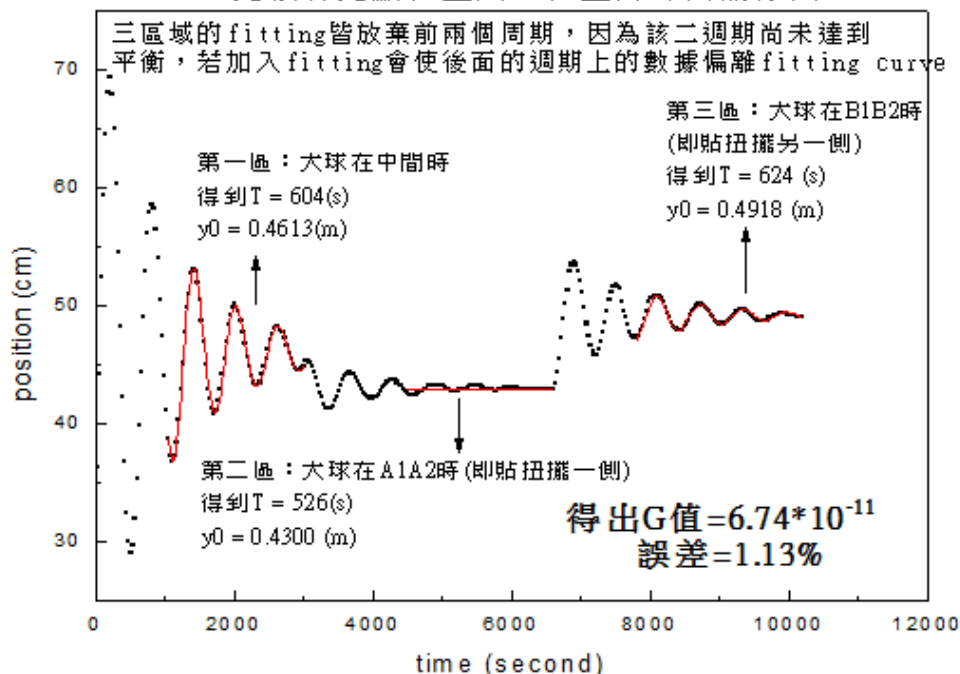
而 T 以兩個位置的 $T_A T_B$ 做平均，減少誤差，得 $T = W_A + W_B$

4. 將所需數據帶入 9，算出 G 值，並和公認值做百分相對誤差。
5. 分析誤差原因。



Note: 實驗結束後，務必將大球放回盒中，並將兩端小球托盤旋回，確定小球被托住固定。

重力常數測定實驗 光槓桿光點在直尺上位置對時間關係圖



Further Questions

1. 用 origin 作圖時，改變球位置後的最早 1-2 週期內觀測的點，在 fitting 時不可採用，原因為何？
2. 計算轉動慣量，是假設(a)小球為質點 (b)反射鏡轉動慣量為零 (c)細棒轉動慣量為零。以上假設對於 I 值有什麼影響？
3. 以上假設對於實驗結果中的 Δx 或 T 值是否有影響？
4. 大/小球是否是完美球體，會影響實驗誤差嗎？
5. 玻璃盒內是否抽成真空會影響實驗進行嗎？