非線性震盪中的混沌現象

2010 初稿: 郭桓玉、簡若帆

有時初始條件的微小差異,將造成最終現象的極大改變。前者的小誤差,會造成後者極大的錯誤。預測將成為不可能的事,我們面臨的是偶發現象。

Poincare,《科學方法》,1908 年

PRE-LAB READING

Introduction

混沌(Chaos)指的是一非週期性、無法預測的現象,能在非線性震盪中產生,以下討論的為”決定混沌”(deterministic chaos),系統運動受初始狀態影響很大。有很多原因可以使規律的運動變成混沌,像是驅動頻率、驅動振幅、阻尼振幅和初始條件。

在討論震盪運動時,我們常將它的運動畫成以下三種圖

Fig.1 角位移(Θ)vs.時間(t)

Fig.2 相圖(phase diagram):角速度(ω) vs. 角位移(Θ)

Fig.3Poincare plot:角速度(ω) vs. 角位移(Θ),但每一個驅動週期記錄一次。

相圖和 Poincare plot 對混沌運動的辨識很有效,因為在混沌運動的圖中,軌跡不會重複,也就是當時間無限長,圖會被塗黑。

此實驗的裝置如下圖,包含一個鋁製轉盤連接兩條彈簧,和一放在轉盤邊緣的質點,不均勻的質量使震盪成為非線性。可以改變正弦驅動力的頻率(調整輸入電壓的大小控制驅動頻率),觀察由可預測運動變為混沌運動的過程

利用圓盤邊緣質點的位能與彈簧彈性位能的疊加,產生非線性的位能,質點質量為 m,圓盤外半徑為 R,內半徑為 r,令$\theta = 0$時彈簧伸長量為 0,重力位能為 0,

$$\text{重力位能} = \mathrm{mgRcos\theta}$$

$$\text{彈簧位能} = \frac{1}{2}\mathrm{k}(\mathrm{r\theta})^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k}(\mathrm{r\theta} - d)^2$$

因此得到

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\mathrm{k}(\mathrm{r\theta})^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k}(\mathrm{r\theta} - d)^2 + \mathrm{mgRcos\theta}$$

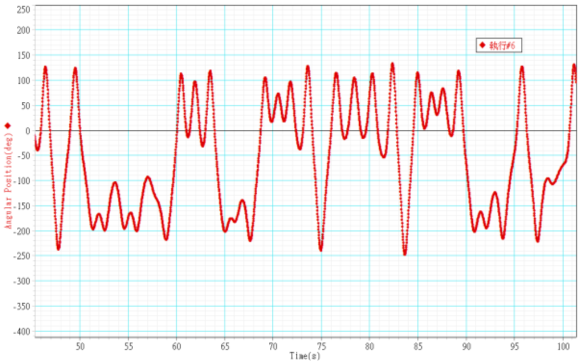

Fig. 1, 角位移(Θ)vs.時間(t)

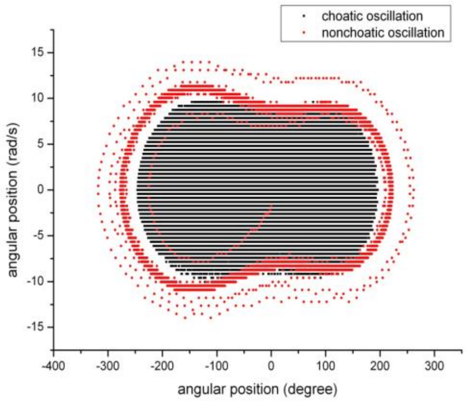

Fig. 2, phase diagram

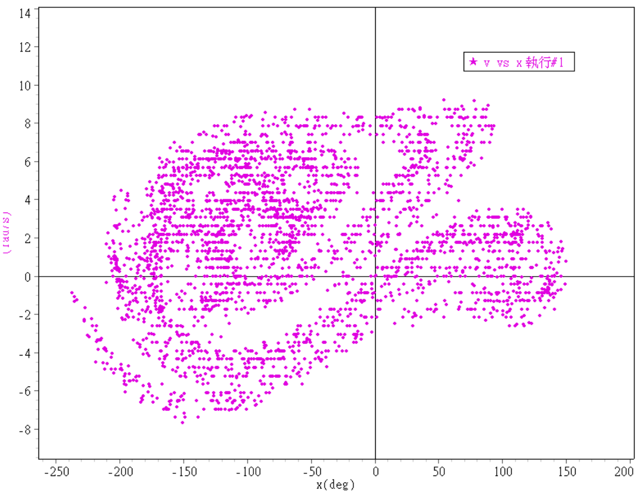

Fig. 3, Poincare plot

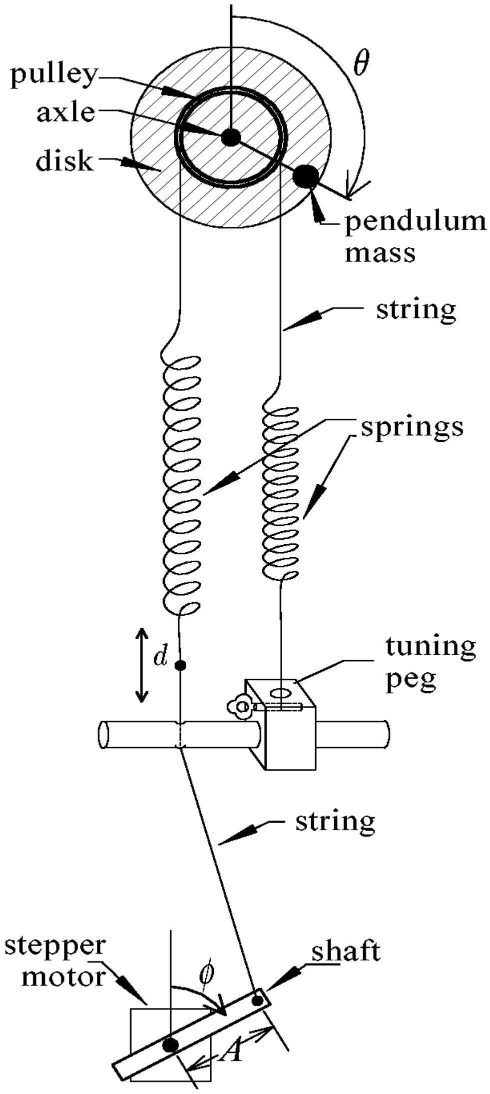

Fig. 4, Experimental setup

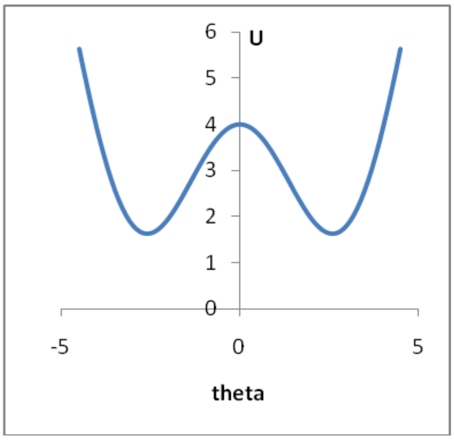

Fig. 5. Potential diagram

由上圖中可看出，在圓盤的左右會各有一個平衡點。
而當小球從靜止釋放時，

$$U_0 = \text{const.}\ ，T_0 = 0$$

且根據能量守恆

$$U + T = \text{const.}$$

得

$$U_0 = U + T$$

$$U = U_0 - T = U_0 - \frac{1}{2} I\omega^2$$

因此在實驗時，欲測得 U 與θ的關係圖，可將 U 對$-\omega^2$作圖求得。
在描述 pendulum 的運動，我們可以寫下運動方程式，我們發現他還有 damper，我們用$-b\omega$表示阻力矩隨角速度在變，我們知道力矩是 $\tau = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\Gamma\omega - \Gamma'\omega - \kappa\theta + \mu\sin\theta + \epsilon\cos\phi$$

其中$d = A\cos\phi$，$\epsilon = \frac{Akr}{I}$，$\mu = \frac{mgL}{I}$，$\kappa = \frac{2kr^2}{I}$，$\Gamma = \frac{b}{I}, \Gamma' = \frac{b'}{I}$，I 是轉動慣量。
現在要在 phase spase 畫出軌跡，我們可以利用總能 E 減去位能 V 得到動能 T：$\omega = \sqrt{\frac{2[E-V(\theta)]}{I}}$，然後對$\theta$作圖就可以得到 Phase diagram。一開始的起始點決定了能量跟接下來的運動軌跡 phase space。如果是有周期性的振盪軌跡的話，phase space 就會是封閉的圖形，而箭頭是其運動方向，但是是非線性的振盪，在一開始的狀態變化很快，在 phase space 就不會是封閉的曲線。

Apparatus

非線性震盪裝置一組、鋁盤(有加質點)一個、彈簧兩個、棉線、Rotary Motion Sensor 一個、Photogate Head 一個、DC 電源供應器(SE-9720)一個、Science Workshop 750 Interface 一台

IN-LAB ACTIVITIES

SET UP

1. 將 B 位於垂直最低點後，將棉線一端穿過 A 綁在 B 上，另一端綁上彈簧Ⅰ，彈簧位於 A 上約 1~2 cm。
2. 彈簧Ⅰ的另一端也綁上棉線，棉線繞過大滑輪後，在另一端綁上彈簧Ⅱ，彈簧Ⅱ再固定在基盤。
3. 為了讓質點在圓盤上的振盪兩邊對稱，先移除質點。調整彈簧，使兩彈簧彈力幾乎相等，此時裝質點的螺孔應在最高點，裝上質點，此時兩邊的平衡點應能對稱於垂直軸；彈簧振動到最大振幅時，不會卡到滑輪；彈簧振動時不會被完全壓縮。
4. 裝上 Rotary Motion Sensor。 *注意 B 轉一次時，感應器只感應到一次
5. 裝上磁阻、轉盤
6. 連接直流電源供應器
7. 將 Rotary Motion Sensor 接在 Channels 1 和 2；photogate 接在 Channel 3

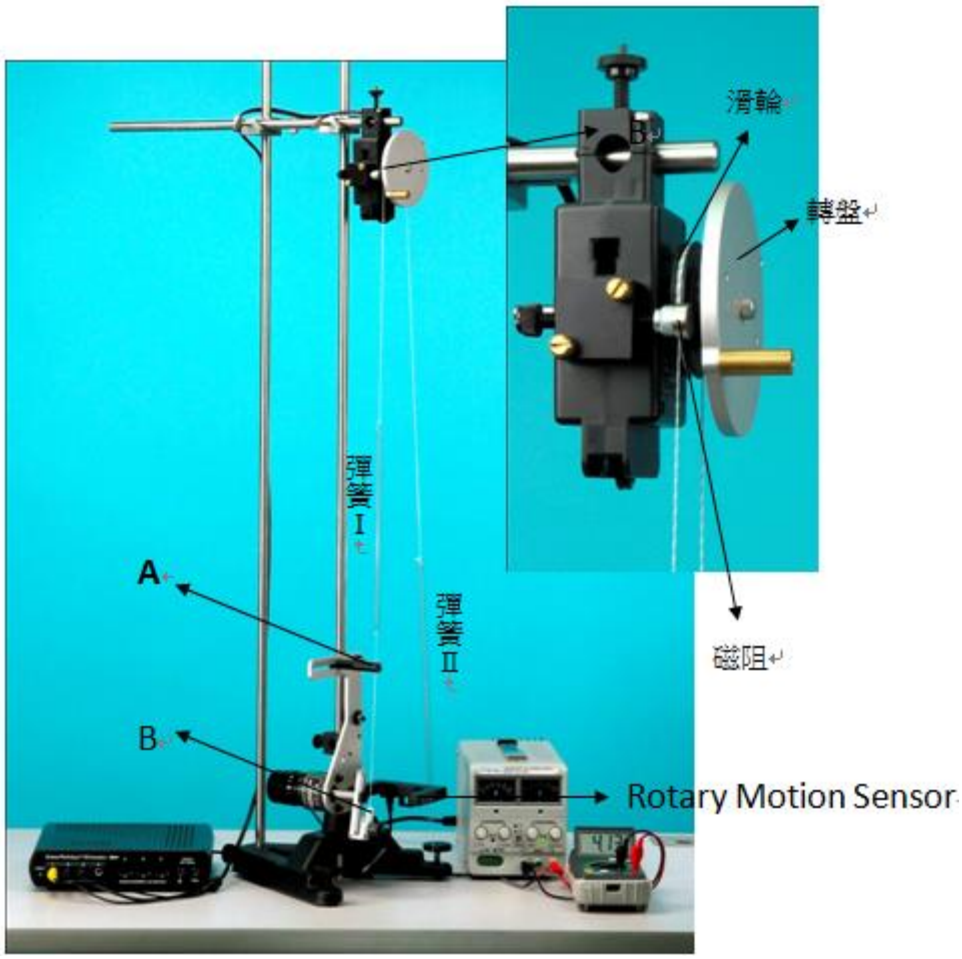

Fig. 6　Setup

PROCEDURE

Part I：繪製位能圖

1.關閉電源供應器，拿下磁阻。在 DataStudio 下載入提供的 ”potential wall”設定好之檔案 (若要手動設定的話，先選擇轉動感應器，然後再測量的部分：先計算-(角速度)^2，在對角位置作圖)。

2.質點停在一平衡點時，用手將質點轉過上方，繼續轉，超過另一邊平衡點約 90°，停住。

3.按下 START，並釋放質點，讓質點帶著轉盤振動一次，按下 STOP。(記錄一次完整振盪即可)

4.匯出位能圖($-\omega^2$ vs. Θ) 請換算成 U 畫位能圖，注意單位

Part II: 阻尼震盪與共振頻率

1.在 DataStudio 下載入提供的 ”chaos” 設定好之檔案。

2.在不開啟電源供應器的情況下，讓 point mass 在兩個平衡點之間來回震盪。質點停在一平衡點時，用手將質點轉過上方，繼續轉，超過另一邊平衡點約 90°，停住。開啟 data studio 開始記錄之，放手使其震盪，直至停止。

3.檢視角度與時間的關係圖。此震盪是否為正弦曲線？是否有阻尼？

4.檢視角速度與角度的相圖。嘗試指出阻尼如何對相圖產生影響？

5.使用 Origin Pro 中 FFT, 找出共振頻率

***注意由現在開始的實驗要給相同的初始條件：質點由最高點靜止釋放，驅動臂一開始位於最低點。**

Part III: Non-chaotic Oscillations

1.將驅動臂力臂調整約 3.3 cm。確定每次旋轉 driver arm 都有經過光柵(有通過的話光柵會顯示紅色)。

2.在 DataStudio 下載入提供的 ”chaos” 設定好之檔案

3.開啟電源並將電壓調至約 1.4-1.5 V 使得系統做**簡單的來回震盪**。

4.在幾分鐘之後開始記錄資料約 3-5 分鐘

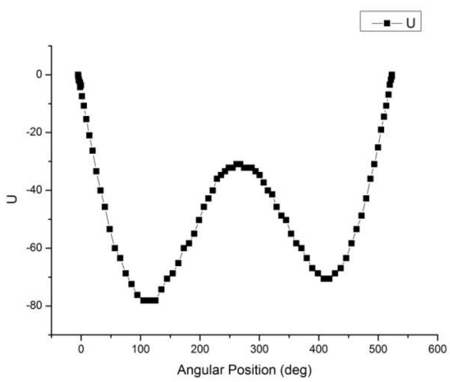

Fig. 7 Potential plot

5.report 中，繪(θ vs. t)圖，FFT 圖，phase diagram，檢視角度對時間的關係圖是否為正弦曲線?週期是?此週期和 driving 週期相等嗎?為什麼圖形會和 part II 中的不同?

6.檢視角速度與角度的關係圖，試說明為何圖形形狀會是如此。此關係圖和 partII 中的 phase diagram 有何不同?

7.繪出並檢視、說明 Poincare Plot。

Poincare Plot 的疊合 打開在階段圖表的圖表設置窗口。 核對在" Appearance"之下那 Full Color 沒有被選擇。 在" Layout" 點擊由 Unit of measure 建立新的圖表和小組。 點擊並且畫出 v 對在 phase 圖表上的 x 數據。

1.接著漸漸的藉由增加電壓(+0.1 V)至約 1.4-1.5 V 來增加驅動頻率。等待一段時間讓系統運動達到平衡，但此平衡運動有一點複雜，除了在兩個平衡點之間有來回震盪以外，在其中一個平衡點之間亦會有來回震盪。

2.重新將 point mass 設置於滑輪的最高點並且在釋放時讓 driver arm 位於最低點過幾分鐘後，並於 data studio 記錄之。

3.重複步驟 5-7

Part IV：比較極相似之初始值的非線性震盪的結果

1.漸漸藉由增加電壓(+0.1 V)至約 1.7 V 來增加驅動頻率，使運動成為混沌。如果達到 chaotic 的狀態可以觀察到在每一個平衡點的運動是 random 而不規則的。

2.電源供應器繼續開啟運轉，用一隻手固定圓盤，注意: 質點的位置最好不要在不穩定點附近(也就是不要在角度零度的地方)。

3.開啟"Choas" 程式開始記錄，在力臂轉到最低點的時候放手，記錄約 30-60 秒。

4.重複 2-3 的步驟共 4 次，我們主要是想利用人為誤差來造成初始狀態的差異。就算把質點的位置拉到和 2.一樣的地方，但肉眼造成的誤差判斷很容易就造成微小的不同。

5.把 4 次(θ vs. t)圖，phase diagram 疊在一起，並分析討論。

Part V：混沌

1.保持產生混沌運動的輸出電壓。開啟"Choas" 程式開始記錄，驅動臂一開始位於最低點，質點由最高點靜止釋放。

2.使之震盪最小一小時，期間最好不要擾動實驗器材，Poincare plot 的圖約在 30 分鐘後產生碎形的樣子出來，

3.分析工作(可以回家做，但是因為不是很容易，建議你在課堂開始做，有問題可以問):

a.使用 Origin Pro 畫出 <u>Part V</u> 中取得的 Poincare plot 如下圖，選定一個點非常密集的地方，比如下圖 Fig. 8 中 θ =100 – 110, ω = -3. — -5.0 間，放大 Poincare plot 至此區間，如圖 Fig. 9

b.在點很密之小區域選定某點 A，double click，按右鍵，選 Edit Point，加上顏色(比如紅色)，放大符號(較易看)，找出其在數據表中之編號(比如#5377) 對應 (θ, ω) =(106.474, -4.168)

c.往下加 10 週期的點，(比如#5387)，記錄對應點 A' (θ, ω) =(-190.33, -6.925)。

d.重複 b-c. 找出距 A 最近的 4-5 組點 B (106.539, -4.221), C, D, E，及對應的 B' (109.581, 8.399), C', D', E'，此 5 組極其相近的初始狀態 A-E($\Delta\theta$<0.5°, $\Delta\omega$<0.1 rad/s)，畫出 A', B', C', D', E' 如 Fig. 10 觀察說明 10 periods 後的狀態 A'-E'是否相近、有關?。討論 chaotic motion 的意涵。

FURTHER QUESTIONS

1.在位能圖中有兩個位能井，他們一樣深嗎？為什麼？如果只有一個位能井，對運動會有什麼影響？

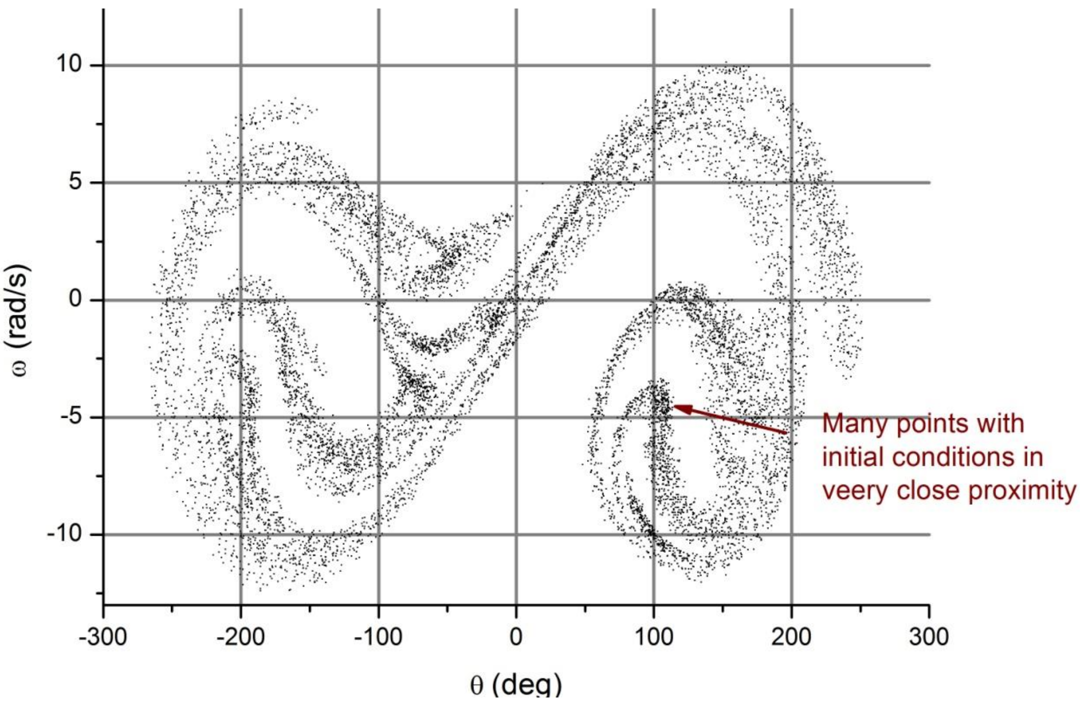

Fig. 8 Identify a dense area in the Poincare plot

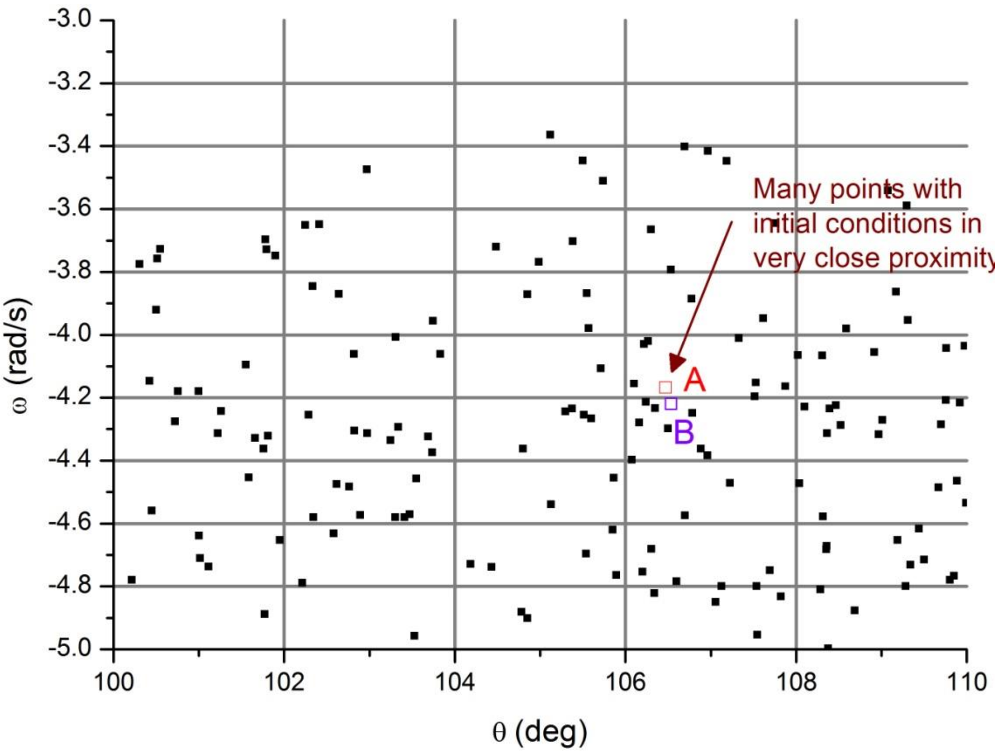

Fig. 9 Find A, B, C, etc at very close vicinity in the Poincare plot

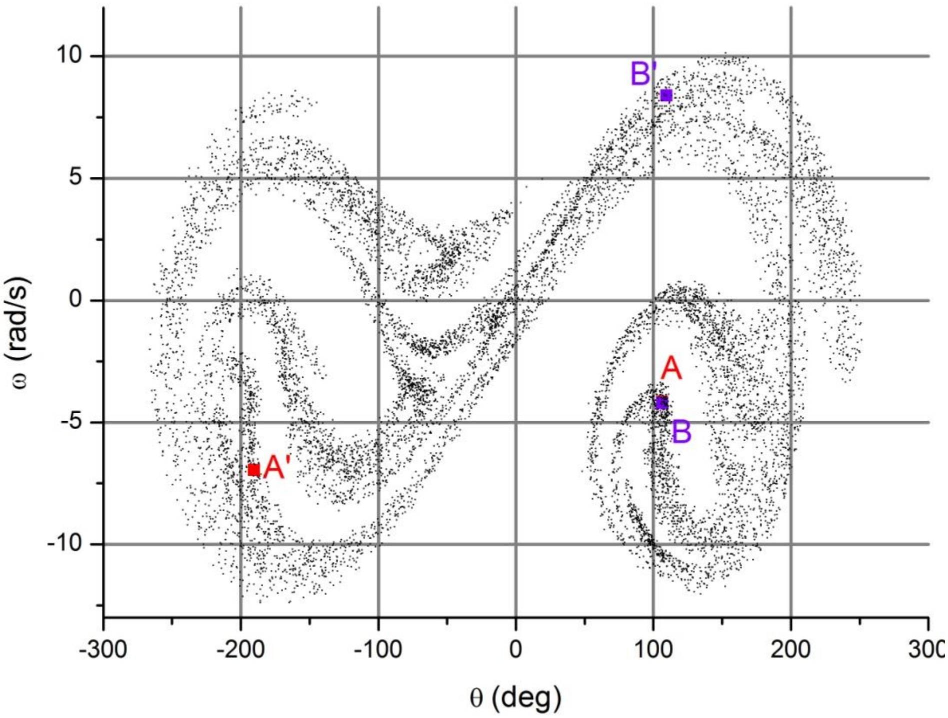

Fig. 10 Plot A', B' C' etc, on the Poincare plot.

Appendix: Chaos Theory

Chaos theory is very much a 20th century development, but the man who probably best deserves the title "Father of Chaos Theory" was a great French mathematician of the 19th century named Henri Poincaré. As discussed on the Dynamical Systems page, Isaac Newton had given the world what seemed to be the final word on how the solar system worked. But Poincaré made the observation that Newton's beautiful model was posited on the basis of the interaction between just two bodies. That is all Newton's differential equations allow. It was natural for anyone with an inquiring mind to wonder what would happen if three or more bodies were allowed in the model. In fact, the question became so famous that a prize was offered for its solution and it was given a name -- "The Three Body Problem." Poincaré, being one of the preemminent mathematicians of the time, tried his hand at solving the Three Body Problem. Ironically, he ended up winning the prize by writing a paper showing that he could not solve it. The problem was that, while Newton's differential equations for two bodies have nice clean "closed form" solutions, the equations for three bodies do not. They must be "solved" by approximate numerical techniques, which effectively change the modeling process from continuous to discrete. The two-body solution gives analytic confirmation of the great Johannes Kepler's empirically derived laws of planetary motion. Poincare found that the numerical "solution" of the three-body problem revealed orbits "so tangled that I cannot even begin to draw them." In addition, Poincaré discovered a very disturbing fact: when the three bodies were started from slightly different initial positions, the orbits would trace out drastically different paths. He wrote, **"It may happen that small differences in the initial positions may lead to enormous differences in the final phenomena. Prediction becomes impossible."** This is the statement which gives Poincare the claim to the title "Father of Chaos Theory." This is the first known published statement of the property now known as "sensitivity to initial conditions", which is one of the defining properties of a chaotic dynamical system.

Poincaré's conclusions about the three-body problem were undeniably correct, but also unwelcome in Newton's perfectly ordered universe. Science is very much about making predictions of future events based upon laws derived from the observation of past events. Deterministic models, so it was thought, must yield perfect or near-perfect predictability. Yet Poincaré's model for three bodies is just an extension of Newton's two-body model and is, therefore, also deterministic. But Poincare says that in the context of this model "prediction becomes impossible" in some instances. From the time of Newton until the time of Poincaré, scientists had experienced too many spectacular successes to simply jettison the comfortable clockwork predictability of Newton's two-body calculus in favor of Poincaré's disturbing uncertainties. Besides they had no palatable way to deal with the numerical drudgery involved in calculating Poincaré's discretely computed orbits. Thus Poincare's monumental discovery of deterministic chaos was destined to be placed on the scientific back burner.