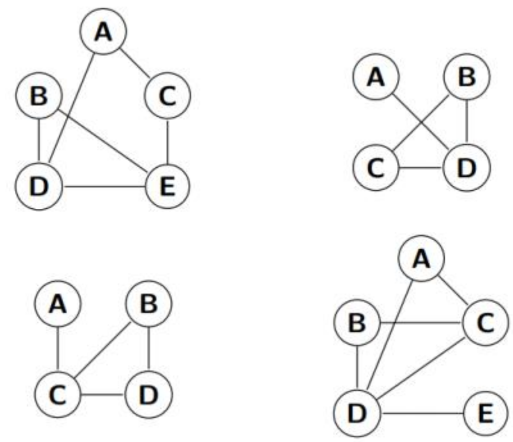
Question No.1

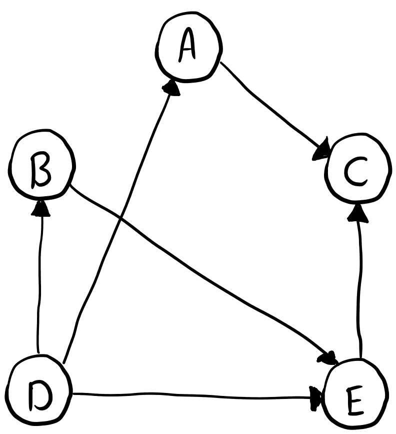
Monday, April 29, 2024 5:49 PM

سیدکیهان حمدایی - 401106696

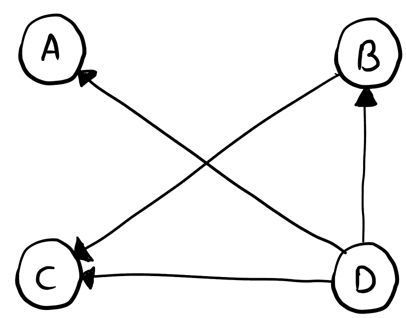
۱. (۱۲ نمره، درجه سختی ۴) یال‌های شبکه‌ی بیزی زیر را جهت‌دار کنید بطوری که متغیرهای A و B به شرط D مستقل باشند. (توجه کنید که جواب لزوما یکتا نیست و ذکر یک پاسخ صحیح کفایت می‌کند)



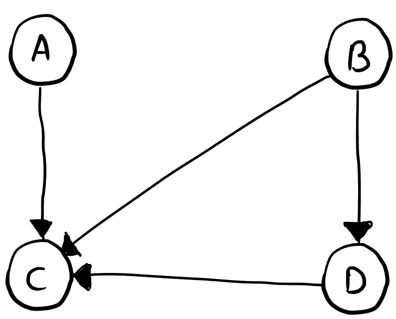
I)



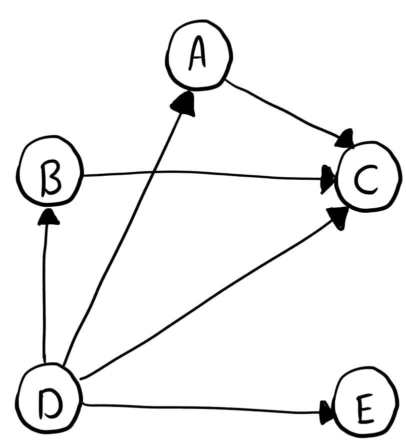
II)



III)

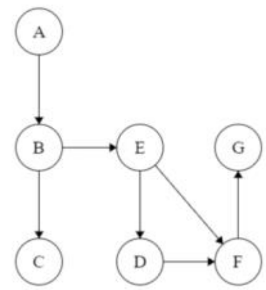


IV)



سیدکیهان حدایی - 401106696

۲. (۸ نمره، درجه سختی ۳) در شبکه بیزی زیر، مقدار $P(A,C,D|+f)$ را میخواهیم بدست بیاوریم. در صورتی که ترتیب حذف متغیرها به صورت B,G,E (از راست به چپ باشد)، مراحل variable elimination را بنویسید. در هر مرحله مشخص کنید کدام جداول با هم ادغام میشوند و کدام متغیر sum out میشود.



درابتدا دارای فاکتورهای هر گره به شرط پدرهایش هستیم: $f(A), f(B|A), f(C|B), f(E|B), f(D|E), f(F|D,E), f(G|F)$

به ترتیبی که در صورت سؤال گفته شده، ابتدا باید فاکتورهایی را که شامل E هستند، انتخاب، ادغام و در نهایت متغیر E را حذف می‌کنیم:

$$\text{merge}\Big(f(E|B), \underbrace{f(D|E), f(F|D,E)}_{f(D,F|E)}\Big) = f(D,E,F|B) \xrightarrow{\text{summing out } E} \text{new factor} = \sum_{e} f(D,e,F|B) = f(D,F|B)$$

بنابراین فاکتورهایمان به صورت روبرو خواهند بود: $f(A), f(B|A), f(C|B), f(D,F|B), f(G|F)$

به همین ترتیب عملیات مشابه را روی متغیر G انجام می‌دهیم:

$$\text{merge}\big(f(G|F)\big) = f(G|F) \xrightarrow{\text{summing out } G} \text{new factor} = \sum_{g} f(g|F) \longrightarrow \text{Parameter } G \text{ is summed out}$$

فاکتورهای جدیدمان به صورت روبرو هستند: $f(A), f(B|A), f(C|B), f(D,F|B)$

فرایندی مشابه را بر روی متغیر B انجام می‌دهیم:

$$\text{merge}\Big(f(B|A), \underbrace{f(C|B), f(D,F|B)}_{f(C,D,F|B)}\Big) = f(B,C,D,F|A) \xrightarrow{\text{summing out } B} \text{new factor} = \sum_{b} f(b,C,D,F|A)$$
$$= f(C,D,F|A)$$

حال با فاکتورهای جدیدی که داریم $\big(f(C,D,F|A), f(A)\big)$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{merge}\big(f(A), f(C,D,F|A)\big) = f(A,C,D,F)$$

با استفاده از این فاکتور، احتمال توأم $P(A,C,D,F)$ را داریم که می‌توان با استفاده از آن به احتمال $P(A,C,D|+f)$ رسید:

$$P(A,C,D|+f) = \frac{P(A,C,D,+f)}{P(+f)}$$

Question No.3

Monday, April 29, 2024 5:50 PM

۳. (۱۵ نمره، درجه سختی ۵) با توجه به جداول زیر به سوالات پاسخ دهید.

سیدکیهان حدایی - 401106696

A	$P(A)$
F	۰/۶
T	۰/۴

A	B	$P(B\|A)$
F	F	۰/۷
T	F	۰/۲
F	T	۰/۳
T	T	۰/۸

A	D	$P(D\|A)$
F	F	۰/۵
T	F	۰/۸۵
F	T	۰/۵
T	T	۰/۱۵

B	A	C	$P(C\|A,B)$
F	F	F	۰/۹
T	F	F	۰/۷۵
F	T	F	۰/۲
T	T	F	۰/۶
F	F	T	۰/۱
T	F	T	۰/۲۵
F	T	T	۰/۸
T	T	T	۰/۴

(آ) به کمک نمونه‌های زیر و با روش $Likelihood\ Weighting$، $P(+a|+b,-c)$ را بدست آورید.

$$\begin{array}{cccc} +a & +b & -c & +d \\ -a & +b & -c & +d \\ -a & +b & -c & -d \\ +a & +b & -c & -d \\ +a & +b & -c & +d \end{array}$$

(ب) حال با کمک نمونه‌های بخش آ، و با استفاده از روش $Prior\ Sampling$، مقدار $P(+d)$ را محاسبه کنید.

(ج) اگر در روش $Gibbs\ Sampling$، نمونه‌ی اولیه به صورت $(+a,+b,+c,+d)$ باشد و پس از آن مقدار B را برداریم، احتمال اینکه در نمونه‌ی بعدی مقدار B برابر b+ باشد چقدر است؟

آ) با توجه به اینکه evidence value هایمان $B=+b$ و $C=-c$ هستند، وزن هرکدام از حالات برابر با وزن زیر است:

$$w = P(+b|A)P(-c|A,+b)$$

با توجه به نتایجی که مشاهده می‌کنیم، مشخص است که w به مقدار A وابسته است.

حال وزن نمونه‌های داده شده را به‌دست می‌آوریم:

1) $+a \quad +b \quad -c \quad +d$

2) $-a \quad +b \quad -c \quad +d$

3) $-a \quad +b \quad -c \quad -d$

4) $+a \quad +b \quad -c \quad -d$

5) $+a \quad +b \quad -c \quad +d$

$$\rightarrow \begin{cases} w_1 = 0.8 \times 0.6 = 0.48 \\ w_2 = 0.3 \times 0.75 = 0.225 \\ w_3 = 0.3 \times 0.75 = 0.225 \\ w_4 = 0.8 \times 0.6 = 0.48 \\ w_5 = 0.8 \times 0.6 = 0.48 \end{cases}$$

$$\longrightarrow P(+a|+b,-c) = \frac{w_1 + w_4 + w_5}{w_1+w_2+w_3+w_4+w_5} \approx 0.76$$

ب) در این حالت، احتمال برابر با نسبت تعداد حالات مطلوب در داده‌ها به تعداد کل حالات است:

$$P(+d) = \frac{3}{5} \approx 0.6$$

ج) برای اینکه بسنجیم به چه احتمالی مقدار جدید B برابر با +b خواهد بود، باید احتمال $P(+b|+a,+c,+d)$ را به دست آوریم:

$$P(+b|+a,+c,+d) = \frac{P(+a,+b,+c,+d)}{P(+a,+c,+d)} = \frac{P(+a)P(+b|+a)P(+c|+a,+b)P(+d|+a)}{\sum\limits_{b\in\{-b,+b\}} P(+a,b,+c,+d)}$$

$$= \frac{P(+a)P(+b|+a)P(+c|+a,+b)P(+d|+a)}{\sum\limits_{b\in\{-b,+b\}} P(+a)P(b|+a)P(+c|+a,b)P(+d|a)} = \frac{P(\cancel{+a})P(+b|+a)P(+c|+a,+b)P(\cancel{+d|+a})}{P(\cancel{+a})P(\cancel{+d|a})\sum\limits_{b\in\{-b,+b\}} P(b|+a)P(+c|+a,b)}$$

$$= \frac{P(+b|+a)P(+c|+a,+b)}{\sum\limits_{b\in\{-b,+b\}} P(b|+a)P(+c|+a,b)} = \frac{P(+b|+a)P(+c|+a,+b)}{P(-b|+a)P(+c|+a,-b)+P(+b|+a)P(+c|+a,+b)}$$

$$= \frac{0.8\times 0.4}{0.2\times 0.8+0.8\times 0.4} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$