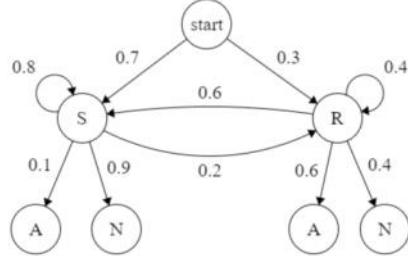


سیدلیپا / ۰۱۱۰۶۶۹۶-۴۰۱۱

۴. ۱۰ نمره، درجه سختی ۴ زیر که مربوط به احتمال تصادف کردن در روزهای آفتابی و بارانی هست را در نظر بگیرید. مقدار $P_\infty(\text{Accident})$ را حساب کنید.

(S : Sunny - R : Rainy - A : Accident - N : No - accident)



$$\left\{ \begin{array}{l} P_t(A) = 0.1P_{t-1}(S) + 0.6P_{t-1}(R) \\ P_t(S) = 0.8P_{t-1}(S) + 0.6P_{t-1}(R) \\ P_t(R) = 0.4P_{t-1}(R) + 0.2P_{t-1}(S) \end{array} \right.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} [0.1P_{t-1}(S) + 0.6P_{t-1}(R)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[0.1(0.8P_{t-2}(S) + 0.6P_{t-2}(R)) + 0.6(0.4P_{t-2}(R) + 0.2P_{t-2}(S)) \right]$$

فرض کنید $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(R) = y$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(S) = x$

$$P_\infty(A) = 0.1(0.8x + 0.6y) + 0.6(0.2x + 0.4y) = 0.2x + 0.3y$$

همین داریم:

$$P_\infty(A) = 0.1x + 0.6y$$

بنابراین باساوی دو عبارت ها داریم:

$$P_\infty(A) = 0.1x + 0.6y = 0.2x + 0.3y \rightsquigarrow 0.1x = 0.3y \rightsquigarrow x = 3y$$

$$P_t(S) + P_t(R) = 1 \quad \because P_t(S) > P_t(R) \quad \text{و} \quad \text{است} \quad 1.1 + \dots = 1$$

$$P_t(S) + P_t(R) = 1 \quad : \quad \begin{cases} S \\ R \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Rainy \\ Sunny \end{cases}$$

با وجود به اینه در زمان t هوا ب Sunny است و یا Rainy

$$\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\alpha + y = 1} \xrightarrow{\alpha = 3y} 3y + y = 1 \rightarrow y = 0.25 \rightarrow \alpha = 0.75$$

حال مقدار $P_\infty(A)$ را بدست می آوریم:

$$\rightarrow P_\infty(A) = 0.225$$

401106696-
سید علی هدایی

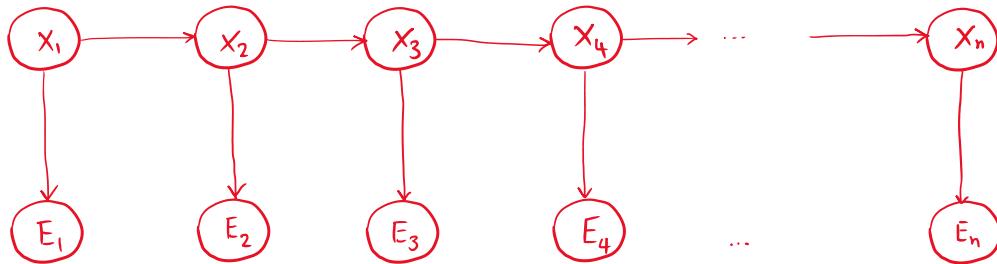
۵. (۱۵ نمره، درجه سختی ۴) توماس و میتهو می‌خواهند رفتار هیولا‌ای داخل ماز را پیش‌بینی کنند. طبق بررسی آنها، هیولا ممکن است خواب یا بیدار باشد و در هر وضعیت ممکن است صدایی از خود تولید کند. حال با یافته‌های زیر به سوالات پاسخ دهید:

- احتمال بیدار بودن هیولا در لحظه t بدون داشت قلي، ۰/۷ است.
- اگر هیولا در لحظه t خواب باشد، به احتمال ۰/۶ در لحظه $t+1$ هم خواب است و اگر بیدار باشد، به احتمال ۰/۰ در لحظه $t+1$ بعدی هم بیدار است.

- اگر هیولا بیدار باشد به احتمال ۰/۰ و اگر خواب باشد، به احتمال ۰/۱ صدا تولید می‌کند.

(آ) برای این مسئله یک *Hidden Markov Model* به همراه جداول احتمالات آن طراحی کنید.
(ب) با استفاده از الگوریتم *forward*، احتمال $Observation = no\ noise, noise, noise$ را بدست آوردید.

آ) در لحظه t هیولا می‌تواند خواب یا بیدار باشد و با توجه به خواب یا بیدار بودن هیولا در لحظه $t-1$ یادداشته باشد. در لحظه t احتمال خواب بودن هیولا می‌تواند صدایی تولید نماید. مساهدات (evidence) در لحظه t این است که هیولا از خود صدایی تولید نماید.



S: Sleep A: Awake M: Made a sound D: Didn't make a sound

X_t	X_{t+1}	$P(X_{t+1} X_t)$
S	S	0.6
S	A	0.4
A	S	0.3
A	A	0.7

X_t	E_t	$P(E_t X_t)$
S	M	0.1
S	D	0.9
A	M	0.7
A	D	0.3

X_1	$P(X_1)$
S	0.3
A	0.7

ب) با استفاده از الگوریتم forward دارم:

$$f(x_1=S) = P(x_1=S)P(E_1=D|x_1=S) = 0.27$$

$$f(x_1=A) = P(x_1=A)P(E_1=D|x_1=A) = 0.21$$

$$f(x_2=S) = \sum_{x_1 \in \{S, A\}} P(x_2=S|x_1=x_1)P(E_2=M|x_2=S) f(x_1=x_1) = P(E_2=M|x_2=S) \sum_{x_1 \in \{S, A\}} P(x_2=S|x_1=x_1) f(x_1=x_1) = 0.0225$$

$$f(x_2=A) = \sum_{x_1 \in \{S, A\}} P(x_2=A|x_1=x_1)P(E_2=M|x_2=A) f(x_1=x_1) = P(E_2=M|x_2=A) \sum_{x_1 \in \{S, A\}} P(x_2=A|x_1=x_1) f(x_1=x_1) = 0.1785$$

$$f(x_3=S) = \sum_{x_2 \in \{S, A\}} P(x_3=S|x_2=x_2)P(E_2=M|x_3=S) f(x_2=x_2) = P(E_2=M|x_3=S) \sum_{x_2 \in \{S, A\}} P(x_3=S|x_2=x_2) f(x_2=x_2) = 0.006705$$

$$f(x_3=A) = \sum_{x_2 \in \{S, A\}} P(x_3=A|x_2=x_2)P(E_2=M|x_3=A) f(x_2=x_2) = P(E_2=M|x_3=A) \sum_{x_2 \in \{S, A\}} P(x_3=A|x_2=x_2) f(x_2=x_2) = 0.093765$$

$\alpha_2 \in \{S, A\}$ $\alpha_2 \in \{S, A\}$

$$f(x_3=A) = \sum_{\alpha_2 \in \{S, A\}} P(x_3=A | x_2=\alpha_2) P(E_2=M | x_3=A) f(x_2=\alpha_2) = P(E_2=M | x_3=A) \sum_{\alpha_2 \in \{S, A\}} P(x_3=A | x_2=\alpha_2) f(x_2=\alpha_2) = 0.093765$$

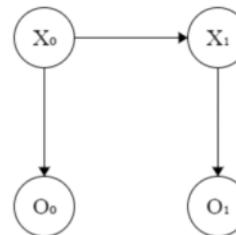
$$\rightarrow P(E_1=D, E_2=M, E_3=M) = f(x_3=S) + f(x_3=A) = 0.10047$$

Question No.6

Friday, May 10, 2024 6:26 PM

۶. (۱۵ نمره، درجه سختی ۵) مدل HMM زیر را در نظر بگیرید. میدانم O_i مشاهدات(observation) هستند.

سیدی پارس
401106696-هدایت



X_t	O_t	$P(O_t X_t)$	X_{t+1}	X_t	$P(X_{t+1} X_t)$	$X_{.}$	$P(X_{.})$
.	A	.74	.	.	.75	.	.73
.	B	.26	.	.	.25	.	.27
1	A	.72	1	.	.74	1	.76
1	B	.28	1	1	.76		

(آ) به ازای X_i های ممکن، مقادیر احتمال $P(X_i, O_i = B)$ را بدست بیاورید.

(ب) توزیع احتمال $P(X_1, O_1 = B, O_0 = B)$ را بیابید.

(ج) توزیع احتمال $P(X_1 | O_1 = B, O_0 = B)$ را محاسبه کنید.

$$P(X_0, O_0 = B) = P(O_0 = B | x_0) P(x_0) \quad \text{با دوچه به عافون بز داریم :}$$

بنابراین با استفاده از تهادیری که در جداول ماده سده درس اول درس‌رس هستند، داریم :

X_0	$P(x_0, O_0 = B)$
0	0.03
1	0.56

ب) با وجود بُشله بُزی که در صورت سوال است، می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\begin{aligned} P(x_1, O_0 = B, O_1 = B) &= \sum_{x_0} P(x_1 | x_0) P(O_1 = B | x_1) P(O_0 = B | x_0) P(x_0) \\ &= P(O_1 = B | x_1) \sum_{x_0 \in \{0,1\}} P(x_1 | x_0) P(O_0 = B | x_0) P(x_0) \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از تهادیری که در جداول درس‌رس هستند، داریم :

X_1	$P(x_1, O_0 = B, O_1 = B)$
0	0.0239
1	0.2808

$$\sum P(x_1 | x_0) = P(0 - 0.74 \cdot 0.03 + 1 \cdot 0.72 \cdot 0.56) = P(x_1, O_0 = B, O_1 = B) = 0.0239$$

$$\sum_{x_1} P(x_1 | O_0 = B, O_1 = B) = 1 \text{ باشد که داشتیم} . P(x_1 | O_0 = B, O_1 = B) = \frac{P(x_1, O_0 = B, O_1 = B)}{P(O_0 = B, O_1 = B)}$$

باشد. بنابراین $P(x_1 | O_0 = B, O_1 = B)$ را normalize کردن نویسیم:

$$P(x_1 | O_0 = B, O_1 = B) \propto P(x_1, O_0 = B, O_1 = B) \rightarrow \sum_{x_1} P(x_1 | O_0 = B, O_1 = B) = k \sum_{x_1} P(x_1, O_0 = B, O_1 = B) = 1$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{0.0239 + 0.2808} \approx 3.28$$

بنابراین $P(x_1 | O_0 = B, O_1 = B)$ به صورت زیر خواهد بود:

x_1	$P(x_1 O_0 = B, O_1 = B)$
0	0.0784
1	0.9216

پیک جان - 40106696

نام	فقط	نام	فقط
D	20.5	E _b	16.2
F	14.2	G	13.2
E _a	12.0		
E _c	10.0		
E _d	8.0		
E _e	6.0		
E _f	4.0		
E _g	2.0		
E _h	1.0		

جدول ۱: نام و فرکانس آنها

نام	فرکانس (%)	نام	فرکانس (%)
D	20.5	E _b	16.2
F	14.2	G	13.2
E _a	12.0		
E _c	10.0		
E _d	8.0		
E _e	6.0		
E _f	4.0		
E _g	2.0		
E _h	1.0		

جدول ۲: نام و فرکانس آنها

نام	فرکانس (%)	نام	فرکانس (%)
E _a	38.8	E _b	30.0
E _b	30.0	E _c	13.3
E _c	13.3	E _d	8.0
E _d	8.0	E _e	3.3
E _e	3.3	E _f	2.0
E _f	2.0	E _g	1.0
E _g	1.0	E _h	0.5
E _h	0.5		

جدول ۳: نام و فرکانس آنها

: احتمال انتقال ماتریس ترانزیشن

	D	E _b	F	G
D	2/5	18/55	9/55	6/55
E _b	6/25	2/5	6/25	3/25
F	3/25	6/25	2/5	6/25
G	6/55	9/55	18/55	2/5

: با استفاده از الگوریتم Viterbi

$$\begin{cases} f(X_1=D) = P(e_1 | X_1=D) P(X_1=D) = 2.75e-3 \\ f(X_1=E_b) = P(e_1 | X_1=E_b) P(X_1=E_b) = 5.75e-3 \\ f(X_1=F) = P(e_1 | X_1=F) P(X_1=F) = 3.5e-2 \\ f(X_1=G) = P(e_1 | X_1=G) P(X_1=G) = 1.78e-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(X_2=D) = \max(f(X_1=C) P(X_2=D | X_1=C) P(e_2 | X_2=D), f(X_1=E_b) P(X_2=D | X_1=E_b) P(e_2 | X_2=D), f(X_1=F) P(X_2=D | X_1=F) P(e_2 | X_2=D), f(X_1=G) P(X_2=D | X_1=G) P(e_2 | X_2=D)) \\ f(X_2=E_b) = \max(f(X_1=C) P(X_2=E_b | X_1=C) P(e_2 | X_2=E_b), f(X_1=E_b) P(X_2=E_b | X_1=E_b) P(e_2 | X_2=E_b), f(X_1=F) P(X_2=E_b | X_1=F) P(e_2 | X_2=E_b), f(X_1=G) P(X_2=E_b | X_1=G) P(e_2 | X_2=E_b)) \\ f(X_2=F) = \max(f(X_1=C) P(X_2=F | X_1=C) P(e_2 | X_2=F), f(X_1=E_b) P(X_2=F | X_1=E_b) P(e_2 | X_2=F), f(X_1=F) P(X_2=F | X_1=F) P(e_2 | X_2=F), f(X_1=G) P(X_2=F | X_1=G) P(e_2 | X_2=G)) \\ f(X_2=G) = \max(f(X_1=C) P(X_2=G | X_1=C) P(e_2 | X_2=G), f(X_1=E_b) P(X_2=G | X_1=E_b) P(e_2 | X_2=G), f(X_1=F) P(X_2=G | X_1=F) P(e_2 | X_2=F), f(X_1=G) P(X_2=G | X_1=G) P(e_2 | X_2=G)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(X_3=D) = \max(f(X_2=C) P(X_3=D | X_2=C) P(e_3 | X_3=D), f(X_2=E_b) P(X_3=D | X_2=E_b) P(e_3 | X_3=D), f(X_2=F) P(X_3=D | X_2=F) P(e_3 | X_3=D), f(X_2=G) P(X_3=D | X_2=G) P(e_3 | X_3=D)) \\ f(X_3=E_b) = \max(f(X_2=C) P(X_3=E_b | X_2=C) P(e_3 | X_3=E_b), f(X_2=E_b) P(X_3=E_b | X_2=E_b) P(e_3 | X_3=E_b), f(X_2=F) P(X_3=E_b | X_2=F) P(e_3 | X_3=E_b), f(X_2=G) P(X_3=E_b | X_2=G) P(e_3 | X_3=E_b)) \\ f(X_3=F) = \max(f(X_2=C) P(X_3=F | X_2=C) P(e_3 | X_3=F), f(X_2=E_b) P(X_3=F | X_2=E_b) P(e_3 | X_3=F), f(X_2=F) P(X_3=F | X_2=F) P(e_3 | X_3=F), f(X_2=G) P(X_3=F | X_2=G) P(e_3 | X_3=F)) \\ f(X_3=G) = \max(f(X_2=C) P(X_3=G | X_2=C) P(e_3 | X_3=G), f(X_2=E_b) P(X_3=G | X_2=E_b) P(e_3 | X_3=G), f(X_2=F) P(X_3=G | X_2=F) P(e_3 | X_3=F), f(X_2=G) P(X_3=G | X_2=G) P(e_3 | X_3=G)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(X_4=D) = \max(f(X_3=C) P(X_4=D | X_3=C) P(e_4 | X_4=D), f(X_3=E_b) P(X_4=D | X_3=E_b) P(e_4 | X_4=D), f(X_3=F) P(X_4=D | X_3=F) P(e_4 | X_4=D), f(X_3=G) P(X_4=D | X_3=G) P(e_4 | X_4=D)) \\ f(X_4=E_b) = \max(f(X_3=C) P(X_4=E_b | X_3=C) P(e_4 | X_4=E_b), f(X_3=E_b) P(X_4=E_b | X_3=E_b) P(e_4 | X_4=E_b), f(X_3=F) P(X_4=E_b | X_3=F) P(e_4 | X_4=E_b), f(X_3=G) P(X_4=E_b | X_3=G) P(e_4 | X_4=E_b)) \\ f(X_4=F) = \max(f(X_3=C) P(X_4=F | X_3=C) P(e_4 | X_4=F), f(X_3=E_b) P(X_4=F | X_3=E_b) P(e_4 | X_4=F), f(X_3=F) P(X_4=F | X_3=F) P(e_4 | X_4=F), f(X_3=G) P(X_4=F | X_3=G) P(e_4 | X_4=F)) \\ f(X_4=G) = \max(f(X_3=C) P(X_4=G | X_3=C) P(e_4 | X_4=G), f(X_3=E_b) P(X_4=G | X_3=E_b) P(e_4 | X_4=G), f(X_3=F) P(X_4=G | X_3=F) P(e_4 | X_4=F), f(X_3=G) P(X_4=G | X_3=G) P(e_4 | X_4=G)) \end{cases}$$

: با داده های اولیه و ماتریس انتقال احتمال اولیه محاسبه شود

$$X_1, Y_2, X_3, X_4 = CCGE E_6$$

: با داده های اولیه و ماتریس انتقال احتمال اولیه محاسبه شود

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 = CCC E FFF D$$

ب) از اعداد تصادمی داده شده پایین صورت انتقالی کسر کار، یک مرحله از پاسخ افزایش دارد، این انتقال را در میان این بایان انتقالی می خواهیم بررسی کرد.

$$1: [D, P_1], 2: [P_1, P_1, P_2], 3: [P_1 + P_2, P_1 + P_2 + P_3], \dots, n: \left[\sum_{i=1}^{n-1} P_i, \sum_{i=1}^n P_i \right]$$

عدد تصادمی دارای مرحله افزایشی از پاسخ افزایشی دارد، منابع با آن بایان انتقالی می خواهند.

: حالت پایانی Particule filtering را ایجاد کنید

$$\begin{aligned} P(x_2=D | x_1=D) P(e_2 | x_2=D) &= 1.55e-4 \\ P(x_2=E_b | x_1=D) P(e_2 | x_2=E_b) &= 4.06e-4 \\ P(x_2=F | x_1=D) P(e_2 | x_2=F) &= 5.126e-3 \\ P(x_2=C | x_1=D) P(e_2 | x_2=C) &= 5.433e-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x_3=D | x_2=D) P(e_3 | x_3=D) &= 5.3e-5 \\ P(x_3=E_b | x_2=D) P(e_3 | x_3=E_b) &= 1.4e-4 \\ P(x_3=F | x_2=D) P(e_3 | x_3=F) &= 1.7e-3 \\ P(x_3=C | x_2=D) P(e_3 | x_3=C) &= 1.8e-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x_4=D | x_3=D) P(e_4 | x_4=D) &= 3.6e-4 \\ P(x_4=E_b | x_3=D) P(e_4 | x_4=E_b) &= 1.5e-3 \\ P(x_4=F | x_3=D) P(e_4 | x_4=F) &= 1.4e-4 \\ P(x_4=C | x_3=D) P(e_4 | x_4=C) &= 1.3e-4 \end{aligned}$$

عدد نهادی در آن مرحله در محدوده از بین صادر کرده عدد مناسب با آن باره این بی شود.

حل راه حل Partice filtering را ام ای یم :

$$P_1 = D, P_2 = E_f, P_3 = F, P_4 = G$$

$$\text{I) weighting } w(P_i) = P(e_i | X_i, P_i)$$

$$w_1 = 0.011, w_2 = 0.023, w_3 = 0.140, w_4 = 0.72$$

$$\text{II) resampling sampling probability } P_i = \frac{w_i}{\sum w_i}$$

$$P_1 = 0.0124, P_2 = 0.0260, P_3 = 0.1580, P_4 = 0.8036$$

$$\text{Intervals: } [0, 0.0124), [0.0124, 0.0384), [0.0384, 0.1964), [0.1964, 1]$$

$$\text{new_} P_i = \text{sample}(weights, random.number)$$

$$\text{new_} P_1 = \text{sample}(0.6284) = P_4 \quad (G)$$

$$\text{new_} P_2 = \text{sample}(0.1842) = P_3 \quad (F)$$

$$\text{new_} P_3 = \text{sample}(0.5482) = P_4 \quad (G)$$

$$\text{new_} P_4 = \text{sample}(0.7700) = P_4 \quad (G)$$

III) elapse of time

$$\rightsquigarrow P_1 = F, P_2 = F, P_3 = D, P_4 = F$$

و دوباره این راه حل اگر این چنین : مرحله دوست

$$\text{I) weighting } \rightsquigarrow w_1 = 0.120, w_2 = 0.120, w_3 = 0.120, w_4 = 0.008$$

$$\text{II) resampling } \rightsquigarrow P_1 = 0.326, P_2 = 0.326, P_3 = 0.326, P_4 = 0.022$$

$$\text{Intervals: } [0, 0.326), [0.326, 0.652), [0.652, 0.674), [0.674, 1]$$

$$\rightsquigarrow \text{new_} P_1 = \text{sample}(0.3556) = P_2 \quad (F)$$

$$\text{new_} P_2 = \text{sample}(0.8090) = P_4 \quad (F)$$

$$\text{new_} P_3 = \text{sample}(0.1113) = P_1 \quad (F)$$

$$\text{new_} P_4 = \text{sample}(0.5338) = P_2 \quad (F)$$

III) elapse of time

$$\rightsquigarrow P_1 = D, P_2 = G, P_3 = F, P_4 = G$$

: مسافت

$$\text{I) weighting } \rightsquigarrow w_1 = 0.009, w_2 = 0.830, w_3 = 0.131, w_4 = 0.830$$

$$\text{II) resampling } \rightsquigarrow P_1 = 0.005, P_2 = 0.461, P_3 = 0.073, P_4 = 0.461$$

$$\text{Intervals: } [0, 0.005), [0.005, 0.466), [0.466, 0.539), [0.539, 1]$$

$$\rightsquigarrow \text{new_} P_1 = \text{sample}(0.0043) = P_1 \quad (D)$$

$$\text{new_} P_2 = \text{sample}(0.3455) = P_2 \quad (G)$$

$$\text{new_} P_3 = \text{sample}(0.2198) = P_2 \quad (G)$$

$$\text{new_} P_4 = \text{sample}(0.2875) = P_2 \quad (G)$$

با زوایه بست خالی بست آنها تیکی بیکنست مسیر اخراج 0.75 متر می باشد.

