



هوش مصنوعی

بهار ۱۴۰۳

استاد: محمدحسین رهبان

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: نیکی سپاسیان - عرفان سلیمان - مهدی لطفیان

مهلت ارسال: ۱۷ فروردین

ارضای قیود و جست و جوی تخصصی

تمرین دوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ هر تمرین تا سقف ۴ روز و در مجموع ۱۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر ساعت تأخیر غیر مجاز ۰.۵ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- تاخیر سوالات نظری و عملی با یکدیگر محاسبه می‌شوند. به عبارتی تاخیر شما در هر تمرین معادل تاخیر بیشتر بین ارسال جواب‌های تئوری و عملی است.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های ارسال شده حتماً باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- در کنار هر سوال عددی به عنوان درجه سختی قرار گرفته است. درجه سختی برای مقایسه میزان سختی و وقت‌گیری سوالات و برنامه ریزی بهتر شما برای حل سوالات قرار گرفته است. هر درجه تقریباً معادل ۵ دقیقه وقت برای حل است. البته این اعداد به هیچ وجه دقیق نیست چرا که سرعت حل افراد متفاوت است، اما می‌توانید فرض کنید که اگر سرعت عملی مشابه با درجه سختی‌های داده شده دارید، با اطمینان بالایی در امتحانات به مشکل نخواهید خورد.

سوالات نظری (۱۴۰ نمره)

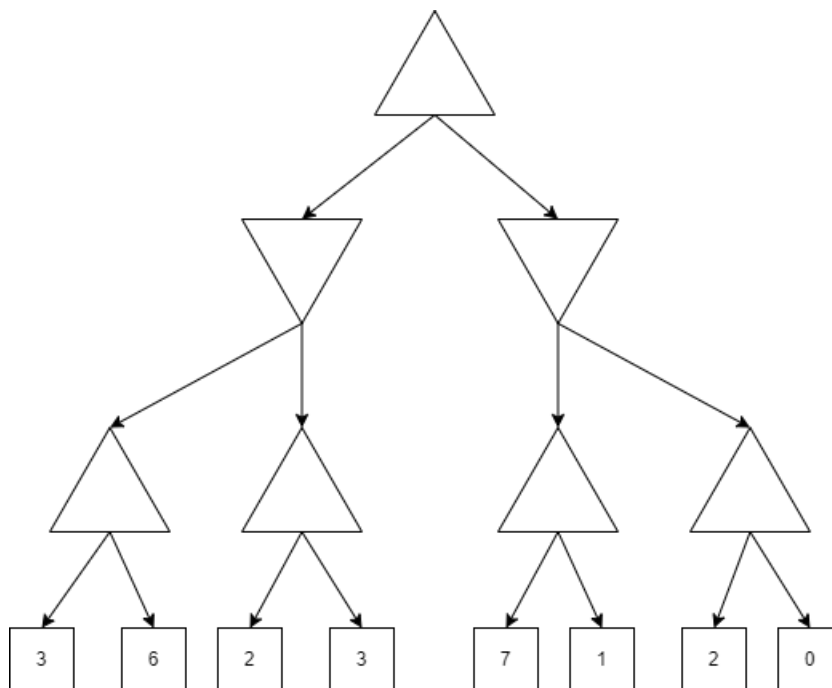
۱. (۱۵ نمره، درجه سختی ۷) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:

- (الف) حداکثر تعداد دفعاتی که الگوریتم backtracking ممکن است مجبور به backtrack شود، اگر از arc consistency و هیوریستیک‌های MRV و LCV استفاده کند $O(dn^2)$ است. (n تعداد متغیرها و d تعداد مقادیر مجاز برای هر متغیر است.)
- (ب) اگر گراف محدودیت یک مسئله CSP با محدودیت‌های دودویی به صورت درخت با n رأس باشد، پیچیدگی محاسباتی حل کننده کارا بر حسب n، $O(n^2)$ است.
- (ج) الگوریتم هرس آلفابتا علاوه بر آنکه زمان را کاهش می‌دهد در جواب به دست آمده برای ریشه درخت با minimax نیز تأثیرگذار می‌باشد.

برای دو مورد بعدی تابع اکیدا صعودی F و یک بازی zero-sum با دو بازیکن را در نظر بگیرید:

- (د) اعمال تابع F روی برگ‌های یک درخت minimax برای این بازی پاسخ بهینه آن را تغییر نخواهد داد.
- (ه) اعمال تابع F روی برگ‌های یک درخت minimax برای این بازی برگ‌هایی که توسط alpha-beta pruning هرس می‌شوند را تغییر نمی‌دهد.

۲. (۱۵ نمره، درجه سختی ۵) درخت بازی زیر را در نظر بگیرید و به سوالات مربوطه پاسخ دهید:



شکل ۱

الف) درخت minimax بازی مورد نظر را کامل نمایید.

فرض کنید بازیکن اول یک قابلیت ویژه دریافت کند. این قابلیت ویژه این است که بازیکن اول می تواند با پرداخت کردن هزینه c حرکت انتخابی توسط بازیکن مقابل را تحت کنترل خود دریاورد.

ب) با در نظر گرفتن فرض $c = 2$ آیا برای بازیکن اول به صرفه خواهد بود که از این قابلیت ویژه استفاده کند؟ درخت بازی را مجدد رسم کرده و کامل نمایید. اگر پاسخ سوال قبل مثبت بود، نقطه ای در درخت که برای بازیکن اول بهینه است از قابلیت ویژه خود استفاده کند را نیز مشخص نمایید.

ج) بخش قبل را مجدداً اما این بار با فرض $c = 5$ روی هزینه قابلیت ویژه برای بازیکن اول پاسخ دهید.

۳. (۲۰ نمره، درجه سختی ۶) فرض کنید یک جدول به شکل زیر داریم که در هر خانه آن یک عدد تا یک رقم اعشار، در پایین هر ستون و روبه روی هر ردیف یک عدد صحیح نوشته شده است. حال می خواهیم اعداد درون جدول را به گونه ای به سمت بالا یا پایین گرد کنیم که مجموع اعداد هر ردیف با عدد روبه روی آن و مجموع اعداد هر ستون با عدد پایین آن برابر شود.

| | | | |
|-----|-----|-----|----|
| ۴.۶ | ۵.۷ | ۳.۷ | ۱۴ |
| ۱.۵ | ۱.۶ | ۳.۷ | ۷ |
| ۷ | ۶ | ۸ | |

الف) این مسئله را به یک مسئله CSP تبدیل کنید.

ب) گراف محدودیت های آن را رسم کنید.

ج) با استفاده از روش forward checking و هیوریستیک های MRV و Degree با Backtrack مسئله را حل کنید.

۴. (۲۰ نمره، درجه سختی ۷)

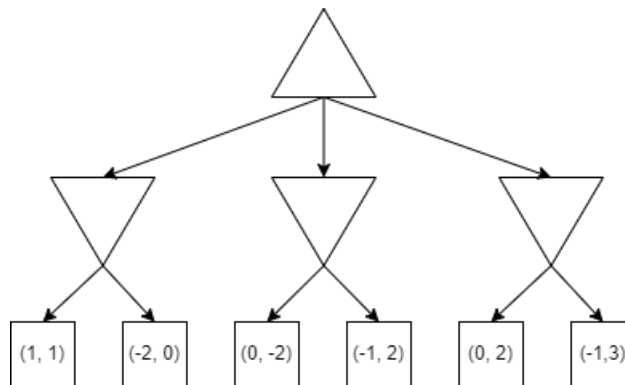
الف) با فرض آنکه $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ محدب‌اند و $t \geq 0$ نشان دهید که توابع زیر محدب هستند یا خیر. (در صورت محدب بودن اثبات کنید در غیر این صورت مثال نقض ارائه دهید.)

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + tg(x) \bullet \\ k(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \bullet \\ r(x) &= \min\{f(x), g(x)\} \bullet \\ s(x) &= f(x)g(x) \bullet \end{aligned}$$

ب) تعیین کنید که مجموعه C که برای زوج مرتب‌های شامل یک بردار x و عدد حقیقی t به شکل زیر تعریف می‌شود یک مجموعه محدب می‌باشد یا خیر.

$$C = \{(x, t) \mid \|x\| \leq t\}$$

۵. (۲۰ نمره، درجه سختی ۸) فرض کنید در حال بررسی کردن یک بازی non zero-sum هستیم. درخت بازی مورد بررسی به صورت زیر می‌باشد: (توجه کنید که مثلث‌های رو به بالا و پایین نشان دهنده دو بازیکن متفاوت هستند و گره بدیته‌ها در چنین بازی‌هایی مشخص کردن دقیق یک بازیکن maximizer و یک بازیکن minimizer چندان معنی‌دار نیست چون شرط بازی‌های zero-sum یعنی $U_A(s) + U_B(s) = 0$ دیگر برقرار نیست و بنابراین هر بازیکن به دنبال maximize کردن امتیاز خود خواهد بود.)



شکل ۲

هر جفت عدد در برگ‌ها به ترتیب امتیاز بازیکن اول و دوم را نمایش می‌دهد. بازیکن اول را A و بازیکن دوم را B می‌نامیم و بنابراین هر جفت عدد به فرمت (U_A, U_B) می‌باشد.

الف) مقادیر هر راس در درخت بازی مورد نظر را تکمیل نمایید.

ب) به طور خلاصه توضیح دهید چرا روش alpha-beta pruning در تعریف عام از بازی‌های non zero-sum قابل استفاده نمی‌باشد.

راهنمایی: برای مثال خود می‌توانید حالتی که شرط $U_A(s) = U_B(s)$ برای همه برگ‌ها برقرار باشد را مورد بررسی قرار دهید.

در minimax می‌دانیم که مقدار محاسبه شده برای ریشه (که فرض می‌کنیم بازیکن maximizer باشد.) اصطلاحاً یک مقدار worst-case می‌باشد؛ به این معنا که اگر بازیکن minimizer بهینه‌ترین عمل ممکن را انتخاب نکند نتیجه امتیاز maximizer هرگز بدتر نخواهد شد.

ج) آیا می‌توان گفت که برای یک بازی non zero-sum نیز مقدار محاسبه شده برای ریشه مشابه توضیحات داده شده worst-case می‌باشد؟ به طور خلاصه توضیح دهید.

اکنون فرض کنید که بازی تقریباً zero-sum باشد به این معنی که شرط $|U_A(s) + U_B(s)| \leq \epsilon$ برای تمامی برگ های آن به ازای یک مقدار ϵ مشخص برابر برقرار باشد. مثلاً درخت بازی ای که در ابتدای سوال رسم شده است برای مقدار $\epsilon = 2$ یک بازی nearly zero-sum می باشد.

د) در یک بازی nearly zero-sum امکان هرس کردن وجود دارد. با در نظر گرفتن مقدار $\epsilon = 2$ و تعمیم دادن alpha-beta pruning به بازی کنونی، راس هایی که در طی فرایند هرس کردن خط میخورند را مشخص کنید و توضیحی مختصر درباره الگوریتم در این حالت خاص بدهید. (فرض کنید فرایند هرس کردن به صورت استاندارد آن یعنی از چپ به راست و depth-first انجام می شود.)

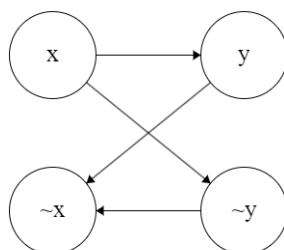
ه) یک شرط عمومی بیان کنید که تحت آن فرزند یک راس S می تواند هرس شود. شرط شما باید با در نظر گرفتن متغیرهایی چون $U_A(S)$ یا $U_B(S)$ برای راس S مربوطه، مقدار ϵ ، α و ... بیان شود.

و) در یک بازی nearly zero-sum چه شرطی روی حداقل مقدار امتیازی که ممکن است توسط بازیکن اول کسب شود (برحسب U_A ریشه و ϵ) وجود دارد؟

۶. (- نمره، درجه سختی؟) (سوال امتیازی) می دانیم که در حالت کلی پیچیدگی زمانی حل مسئله CSP از اردر نمایی است. در این سوال میخواهیم که حالت خاصی از این مسئله به اسم 2-SAT را در اردر خطی حل کنیم. در این حالت خاص تمام متغیرها باینری (با دامنه ۰ یا ۱) هستند. همچنین تمامی قیود مسئله دوتایی و به شکل $a \vee b$ هستند. یعنی مثلاً هیچ قیدی به شکل $a \vee b \vee c$ وجود ندارد.

برای حل ابتدا گرافی جهت دار می سازیم که به ازای هر متغیر مثل a دو راس متناظر a و $\neg a$ را قرار می دهیم. برای نمایش قید $p \vee q$ دو یال $\neg p \rightarrow q$ و $\neg q \rightarrow p$ را به گراف اضافه می کنیم. درواقع این دو یال به ترتیب معادل این هستند که اگر p گزاره را False در نظر بگیریم، آنگاه حتماً q باید True باشد. و اگر q را False در نظر بگیریم، آنگاه حتماً p باید True باشد. به عبارتی از هم ارزی $p \vee q \equiv (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow p)$ استفاده شده است.

به عنوان مثال اگر قیدهای مسئله به شکل $(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x)$ باشد، آنگاه گراف متناظر آن به شکل زیر خواهد بود:



شکل ۳

الف) ابتدا مسئله را به صورت یک مسئله CSP بیان کرده و سپس گراف مدنظر را برای مسئله نمونه با قیدهای $(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (y \vee z)$ رسم کنید و یک جواب برای آن بنویسید.

ب) ادعا میکنیم یک مسئله 2-SAT جواب خواهد داشت اگر و تنها اگر هیچ یک از مؤلفه های قویا همبند این گراف به طور همزمان شامل یک متغیر و نقیض آن نباشد. این ادعا را اثبات کنید. (مؤلفه قویا همبند: زیرمجموعه ای از رئوس گراف که برای هر جفت راس آن مثل x و y مسیری جهتدار از x به y و برعکس وجود دارد.)

ج) با فرض اینکه در مسئله شرط بخش ب برقرار است (یعنی حتماً مقداردهی صحیحی دارد)، یک روش از $O(n + m)$ برای یافتن یک مقداردهی صحیح ارائه کنید. که در آن n تعداد متغیرهاست و m تعداد قیود. (راهنمایی: به مرتب سازی توپولوژیک مؤلفه ها فکر کنید.)