第二型曲面积分的计算与高斯公式

基本方法 （1）将第二型曲面积分化为二重积分或第一型曲面积分计算；

（2）运用高斯公式计算；

（3）运用无散度场的第二型曲面积分性质计算。

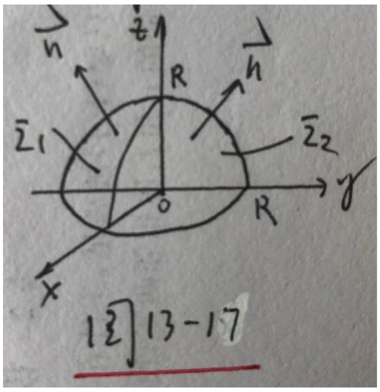
1、将第二型曲面积分化为二重积分或第一型曲面积分计算

两类曲面积分之间的关系

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Sigma} \vec{f}(x,y,z)\cdot \vec{n}^{\circ} dS$$
$$= \iint\limits_{\Sigma} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS$$

其中$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为有向曲面$\Sigma$的单位正法向量。

例 1 计算$\iint\limits_{\Sigma} z(x^2+y^2)(dydz+dzdx)$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$在第一，四卦限（$x\ge 0, z\ge 0$）部分的上侧。



解 原式$= \iint\limits_{\Sigma} z(x^2+y^2)dydz + \iint\limits_{\Sigma} z(x^2+y^2)dzdx$.

对于积分$\iint\limits_{\Sigma} z(x^2+y^2)dydz$，$\Sigma$在 yoz 平面上的投影区域

$$D_{yz}: y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0.$$

由于Σ的正法向量$\vec{n}$与 x 轴正向夹锐角，且被积函数在Σ上取值

$$\iint_{\Sigma} z(x^2+y^2)dydz=\iint_{\Sigma} z(R^2-z^2)dydz=\iint_{D_{yz}} z(R^2-z^2)dydz$$

$$=\int_0^R dz\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} z(R^2-z^2)dy$$

$$=2\int_0^R z(R^2-z^2)^{\frac{3}{2}}dz=-\frac{2}{5}(R^2-z^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^R=\frac{2}{5}R^5$$

对于积分$\iint_{\Sigma} z(x^2+y^2)dzdx$，利用积分的分域性质，有

$$\iint_{\Sigma} z(x^2+y^2)dzdx=\iint_{\Sigma_1} z(x^2+y^2)dzdx+\iint_{\Sigma_2} z(x^2+y^2)dzdx$$

又Σ_1与Σ_2在 xoz 平面上的投影区域$D_{xz}:x^2+z^2\le R^2,x\ge 0,z\ge 0$

$$\iint_{\Sigma_1} z(x^2+y^2)dzdx=-\iint_{D_{xz}} z(R^2-z^2)dxdz$$

$$\iint_{\Sigma_2} z(x^2+y^2)dzdx=\iint_{D_{xz}} z(R^2-z^2)dxdz$$

可知 $\iint_{\Sigma} z(x^2+y^2)dzdx=0$

所以所求积分 原式 $=\frac{2}{5}R^5$.

解二 化为第一型曲面积分计算。

曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$的法向量$\vec{n}=\pm\{x,y,z\}$。由于上侧为正侧，于是Σ的正法向量$\vec{n}=\{x,y,z\}$，从而单位法向量$\vec{n}^{\circ}=\{\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\}$。

又 $\vec{f}(x,y,z)=\{z(x^2+y^2),z(x^2+y^2),0\}$，所求积分化为

$$原式=\iint_{\Sigma}\vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{n}^{\circ}dS=\iint_{\Sigma}[\frac{xz(x^2+y^2)}{R}+\frac{yz(x^2+y^2)}{R}]dS$$

$$=\frac{1}{R}\iint_{\Sigma} xz(x^2+y^2)dS+\frac{1}{R}\iint_{\Sigma} yz(x^2+y^2)dS.$$

注意到Σ关于 xoz 平面对称，于是 $\iint_{\Sigma} yz(x^2+y^2)dS=0$，且

$$\iint_{\Sigma} xz(x^2+y^2)dS=2\iint_{\Sigma_2} xz(x^2+y^2)dS$$

又Σ_2在 xoy 平面上的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0$，$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，且

$$dS=\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

所以

$$\text{原式}=\frac{2}{R}\iint_{D_{xy}} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

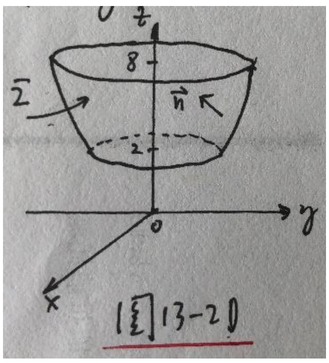
$$=2\iint_{D_{xy}} x(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R \rho\cos\theta\cdot\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{2}{5}R^5$$

例 2 设$f(x,y,z)$为连续函数，Σ为曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于$z=2$与$z=8$之间的部分，上侧为正侧，计算

$$I=\iint_{\Sigma}[yf(x,y,z)+x]dydz+[xf(x,y,z)+y]dzdx+[2xyf(x,y,z)+z]dxdy$$

解 对于任意的$(x,y,z)\in\Sigma$，曲面Σ在点(x,y,z)处的正法向

$$\vec{n}=\{-z_x,-z_y,1\}=\{-x,-y,1\},\quad \vec{n}^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\{-x,-y,1\}$$



于是

$$I=\iint_{\Sigma}\{yf+x,xf+y,2xyf+z\}\cdot\vec{n}^{\circ}dS=\iint_{\Sigma}\frac{z-x^2-y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS$$

$$=\iint_{4\le x^2+y^2\le 16}[\frac{1}{2}(x^2+y^2)-x^2-y^2]\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{4\le x^2+y^2\le 16}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4\rho^2\cdot\rho d\rho=-60\pi\text{.}$$

2、运用高斯公式计算第二型曲面积分

向量场的散度

设向量场 $\vec{f}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，其中函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在区域 Ω 内具有一阶连续偏导数，则向量场 $\vec{f}(x,y,z)$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的散度

$$div\vec{f}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

高斯公式

设空间区域 Ω 由光滑或分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，向量场 $\vec{f}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，且函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),$ $R(x,y,z)$ 在区域 Ω 上具有一阶连续偏导数，则

$$\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV$$

其中曲面积分沿 Ω 的整个边界曲面 Σ 的外侧。

用向量和散度的形式，高斯公式也可表示为

$$\oiint_{\Sigma}\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}div\vec{f}(x,y,z)dV$$

或

$$\oiint_{\Sigma}\vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{n}^{\circ}dS=\iiint_{\Omega}div\vec{f}(x,y,z)dV$$

例 3 设 $\vec{f}(x,y,z)=\{2x+3z,-xz-y,y^2+2z\}$，求 $\vec{f}(x,y,z)$ 穿过球面 $\Sigma:(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ 外侧的通量。

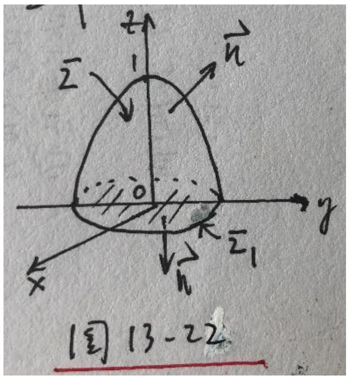
解 $P=2x+3z, Q=-xz-y, R=y^2+2z\in C^1(R^3)$，且积分沿封闭曲面的边的外侧，运用高斯公式，所求通量

$$\Phi=\oiint_{\Sigma}\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}div\vec{f}(x,y,z)dV=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV$$

$$=\iiint_{\Omega}3dV=3\cdot\frac{4}{3}\pi(3)^3=108\pi$$

例 4 计算 $\iint_{\Sigma}(x^3+e^y)dydz-z(x^2y+\sin z)dzdx-x^2(y^2+z^2)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 $z\geq 0$ 的部分，积分沿 Σ 的上侧。

解 添置有向曲面



$$\Sigma_1: z=0,(x,y)\in D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\},$$

下侧为正侧，则有

$$\text{原式}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}.$$

由于 $\Sigma+\Sigma_1$ 形成一封闭曲面，外侧为正侧，且

$$P=x^3+e^y,\quad Q=-z(x^2y+\sin z),\quad R=-x^2(y^2+z^2)$$

在 R^3 上具有一阶连续的偏导数，运用高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3+e^y)dydz-z(x^2y+\sin z)dzdx-x^2(y^2+z^2)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}3x^2(1-z)dV\overset{\text{利用柱面坐标}}{=}3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho\cos\theta)^2(1-z)\rho dz$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3(1-\rho^4)\cos^2\theta d\rho=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\cdot\int_0^1(\rho^3-\rho^7)d\rho=\frac{3}{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{16}\pi$$

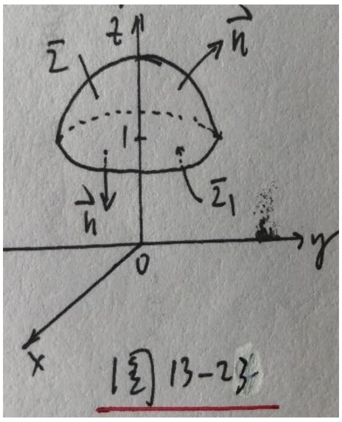
而积分 $\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3+e^y)dydz-z(x^2y+\sin z)dzdx-x^2(y^2+z^2)dxdy$

$$=-\iint\limits_{\Sigma_1}x^2(y^2+z^2)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\cdot\int_0^1\rho^5d\rho=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{24}.$$

所以 原式 $=\frac{3}{16}\pi-\frac{\pi}{24}=\frac{7}{48}\pi$.

例 5 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{r}^{\circ}\cdot d\vec{S}$，其中 $\vec{r}^{\circ}=\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\Sigma$ 为半球面 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$，积分沿 Σ 的上侧。



解 添置有向曲面 $\Sigma_1: z=1,(x,y)\in D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，下侧为正侧，则有

$$原式=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}.$$

由于 $\Sigma+\Sigma_1$ 形成一封闭曲面，外侧为正侧，且

$P=\frac{x}{r}$，$Q=\frac{y}{r}$，$R=\frac{z}{r}$ 在包含 Σ,Σ_1 及其所界区域 Ω 的上半空间 $z>0$ 上具有一阶连续的偏导数，

$$div(\vec{r}^{\circ})=(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})+(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})+(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3})=\frac{2}{r}$$

运用高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\vec{r}^{\circ}\cdot d\vec{S}=\iiint\limits_{\Omega}div\vec{r}^{\circ}dV=\iiint\limits_{\Omega}\frac{2}{r}dV=2\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV.$$

又球面 $\Sigma: z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$，平面 $\Sigma_1: z=1$ 在球面坐标系下的表达

式分别为 $\Sigma: r=2\cos\varphi$， $\Sigma_1: r=\dfrac{1}{\cos\varphi}$ ，$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$。

于是
$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\vec{r}^{\circ}\cdot d\vec{S}=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\cos\varphi}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\cos\varphi}r\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\cos^2\varphi-\frac{1}{\cos^2\varphi})\sin\varphi d\varphi=2\pi(\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2})\text{.}$$

而在 Σ_1 上

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\vec{r}^{\circ}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x}{r}dzdz+\frac{y}{r}dzdx+\frac{z}{r}dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{z}{r}dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}d\rho=-2\pi(\sqrt{2}-1)$$

所以所求积分

$$\text{原式}=2\pi(\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2})+2\pi(\sqrt{2}-1)=\frac{8-2\sqrt{2}}{3}\pi$$

3、运用无散度场的曲面积分性质计算第二型曲面积分

（1）无散度向量场在封闭曲面上的曲面积分性质

设向量场

$$\vec{f}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

的分量函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在区域 Ω 内除奇点外具有一阶连续偏导数。如果 $\vec{f}(x,y,z)$ 在 Ω 内是无散度场。即除了奇点外点 $\vec{f}(x,y,z)$ 在 Ω 内处处成立

$$div\vec{f}(x,y,z)=0$$

则对于Ω中的任一封闭曲面Σ，有以下结论成立:

（1）如果Σ内不包含$\vec{f}(x,y,z)$的奇点，则

$$\oiint_{\Sigma}\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0.$$

（2）如果Σ内包含$\vec{f}(x,y,z)$的一个奇点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，则积分

$$\oiint_{\Sigma}\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\equiv C \text{ （常数）}$$

即沿着同侧的只包含同一个奇点M_0的任意闭曲面上的积分值都相等。

（2）无散度向量场在非封闭曲面上的曲面积分性质

设Ω是二维单连通区域，向量场

$$\vec{f}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

的分量函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在区域$\Omega$上具有一阶连续的偏导数，则有以下等价结论：

在Ω内积分$\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$仅与$\Sigma$的边界曲线有关而与$\Sigma$的形状无关

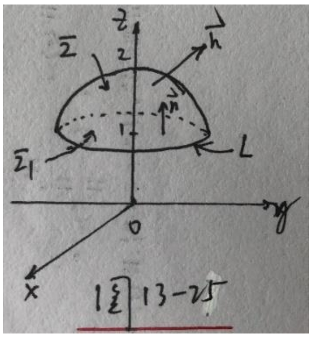
$\Leftrightarrow$对于Ω内的任何光滑闭曲面Σ有

$$\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$$

$\Leftrightarrow$对于Ω内处处成立

$$div\vec{f}(x,y,z)=0$$

例 6 计算



$$\iint\limits_{\Sigma} x(x-y-z)dzdy+y(y-z-x)dzdx+z(z-x-y)dxdy,$$

其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=4$在$z\geq 1$的部分，积分沿Σ的上侧。

解 由$P=x(x-y-z),Q=y(y-z-x),R=z(z-x-y)\in C^1(R^3)$，且对任意的 $(x,y,z)\in R^3$

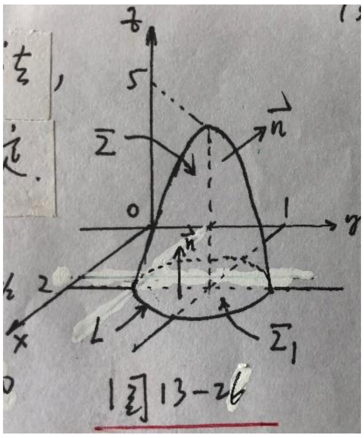
$$div\vec{f}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(2x-y-z)+(2y-z-x)+(2z-x-y)=0,$$

可知向量场$\vec{f}(x,y,z)$在R^3上是一无散度场。由于Σ是以曲线 L 为边界线的非封闭曲面（上图），选取有向曲面$\Sigma_1: z=1, x^2+y^2\leq 3$，上侧为正侧（上图），则$\Sigma_1$也是以曲线 L 为边界线，并与$\Sigma$同侧的曲面。应用无散度场在非封闭曲面上的曲面积分性质，有

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma_1} x(x-y-z)dzdy+y(y-z-x)dzdx+z(z-x-y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1} z(x-x-y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 3}(1-x-y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 3}dxdy=3\pi$$

例 7 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdzdy+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，



其中Σ为曲面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{3}+\dfrac{(y-1)^2}{2}$ $(z\geq 0)$的上侧。

解 从

$$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

可见，原点$O(0,0,0)$是奇点，且在$(x,y,z)\neq(0,0,0)$的区域上，

P,Q,R具有一阶连续的偏导数，若记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，并由

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}，\quad (x,y,z)\neq(0,0,0).$$

于是当$(x,y,z)\neq(0,0,0)$时，有

$$div\vec{f}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0。$$

所以$\vec{f}(x,y,z)$在包含Σ，但不包含原点O的二维单连通区域$\Omega=\{(x,y,z)|y>0\}$上是无散度场。

选取有向曲面$\Sigma_1:z=0,\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}\leq 1$，上侧为正侧（图 13-26)，则$\Sigma_1$是与$\Sigma$具有相同边界曲线 L，且与$\Sigma$同侧的有向曲面，运用无散度场在非封闭曲面上的曲面积分性质

$$原式=\iint_{\Sigma_1}\frac{xdzdy+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\iint_{\Sigma_1}\frac{zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{0}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy=0\quad（D_{xy}:\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}\leq 1）$$

例 8 计算 $\iint_{\Sigma}\frac{xdzdy+ydzdx+zdxdy}{(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧。

解 记$l=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}$，则从函数$P=\frac{x}{l^3},Q=\frac{y}{l^3},R=\frac{z}{l^3}$可见，原点$O(0,0,0)$是函数的奇点，且在$(x,y,z)\neq(0,0,0)$的区域上，$P,Q,R$具有一阶连续的偏导数，并有

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{l^3}-\frac{3}{l^5}(\frac{x}{a})^2,\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{l^3}-\frac{3}{l^5}(\frac{y}{b})^2,\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{l^3}-\frac{3}{l^5}(\frac{z}{c})^2，\quad (x,y,z)\neq(0,0,0).$$

于是有

$$div\vec{f}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3}{l^3}-\frac{3}{l^5}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})=0\text{，}\quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\text{，}$$

所以向量场 $\vec{f}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$ 在奇点 O 以外的区域上是无散度场。由于 Σ 环绕奇点 O，且外侧为正侧，根据无散度场的曲面积分性质，选取同样环绕奇点 O 的有向曲面

$\Sigma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，外侧为正侧，则有

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma_1}\frac{xdzdy+ydzdx+zdxdy}{(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}=\iint_{\Sigma_1}xdzdy+ydzdx+zdxdy$$

$$\overset{\text{高斯公式}}{=}\iiint_{\Omega}3dV=4\pi abc\text{。}$$