

2021 计科 集合论与图论 回忆版试卷

选择题

每题 1 分

1

下列选项正确的是：

- A. $\mathbb{R} \approx \mathbb{Q}$
- B. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \approx P(\mathbb{R})$
- C. $\{0, 1\}^A \approx P(A)$
- D. $\mathbb{Q} \approx (0, 1)$

2

下列选项错误的是：

- A. 若 F 是函数，则 F^{-1} 不一定存在
- B. 若 F 是单射，则 F^{-1} 是双射
- C. 若 F 是双射，则 F^{-1} 是双射
- D. 若 F 是满射，则 F^{-1} 不一定存在

3

若 $|A| = n$, 则 $P(A)$ 的二元关系数量是：

仅保证正确选项存在，不保证选项顺序与错误选项内容

- A. 2^n
- B. 2^{2^n}
- C. 2^{2n}
- D. n^2

4

$B \cap C \subseteq A$ 是 $(A \cup B) \cap C = A$ 的什么条件？

仅保证选项内容，不保证选项顺序

- A. 充分条件
- B. 必要条件
- C. 充要条件
- D. 都不是

5

对于 $A = \{a, b, c\}$, 其即是等价关系又是偏序关系的关系数量是：

仅保证正确选项存在，不保证选项顺序与错误选项内容

- A. 0
- B. 1
- C. 2

- D. 不知道

6

下列度数序列可简单图化的是：

- A. (3, 4, 4, 5, 1, 2)
- B. (5, 4, 4, 3, 2)
- C. (3, 3, 2, 2)
- D. (3, 3, 3, 1)

7

TODO: C 选项可能不正确

下列关于哈密顿图的说法正确的是：

- A. 哈密顿回路可能不经过所有边
- B. 对于二分图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 若 $|V_1| = |V_2|$, 则其是哈密顿图
- C. 对于二分图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 若 $|V_2| \geq |V_1| + 2$, 则其不可能是哈密顿图
- D. 完全图 K_5 是哈密顿图

8

TODO: 图的限定？貌似题目里还有一个条件

下列条件不足以判断一个图是非平面图的是：

- A. $m > 3n - 6$
- B. K_5 是其子图
- C. 其同胚与 $K_{3,3}$
- D. 存在次数大于 3 的面

9

已知一表达式的逆波兰表达式为 `ad*c+ef*/`，其前缀不等式是？

选项忘记了

10

已知图 G 是无孤立点的简单图，下列选项错误的是：

TODO: A 选项有没有最大/最小来着？

- A. 图的任意一边覆盖的大小大于等于任意一匹配的大小
- B. 若图的顶点数量是奇数，则图不存在完美匹配
- C. 图的最大匹配都是图的极大匹配
- D. 对于一个图的极小边覆盖而言，有可能存在顶点 v , 使其不关联极小边覆盖里的任何一条边

判断题

每空 1 分

1

对任意集合 A, B , 都不可能有 $A - B = B$.

2

TODO: 图的条件可能不对？

对于一个无回路的图而言 , $m = n - 1$ 意味着图中无桥。

3

对任意函数 $f : X \rightarrow Y, A \subseteq X$, 均有 $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$

4

对任意无孤立点的图及其任意点覆盖 $V^*, \bar{V}^* = V - V^*$ 都是其一个点独立集。

5

图中有回路等价于图中有圈。

6

若关系 R 是等价关系 , 则 R^2 是等价关系。

7

对任意两张平面图 , 若其同构 , 则其对偶图同构。

8

对完全二分图 $K_{r,s}$, 若 r, s 都是偶数 , 则其是欧拉图。

9

对一个无孤立点的图 , 若其最大匹配 M 也是其最小边覆盖 , 则 M 是完备匹配。

10

TOOD: 图的限定条件？

对于任意图 G , 若 $\kappa(G) = \delta(G)$, 则 $\lambda(G) = \kappa(G)$.

填空题

每空 1 分

1

原题就是这么混沌...

$A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, 求 $\cap \cup A \cup (\cap \cup A \oplus \cup \cap A)$

2

已知集合 X, Y , $|X| = m$, $|Y| = n$, $m < n$, 求 X 到 Y 的单射的数量。

3

求 4 元集的不同等价关系数量。

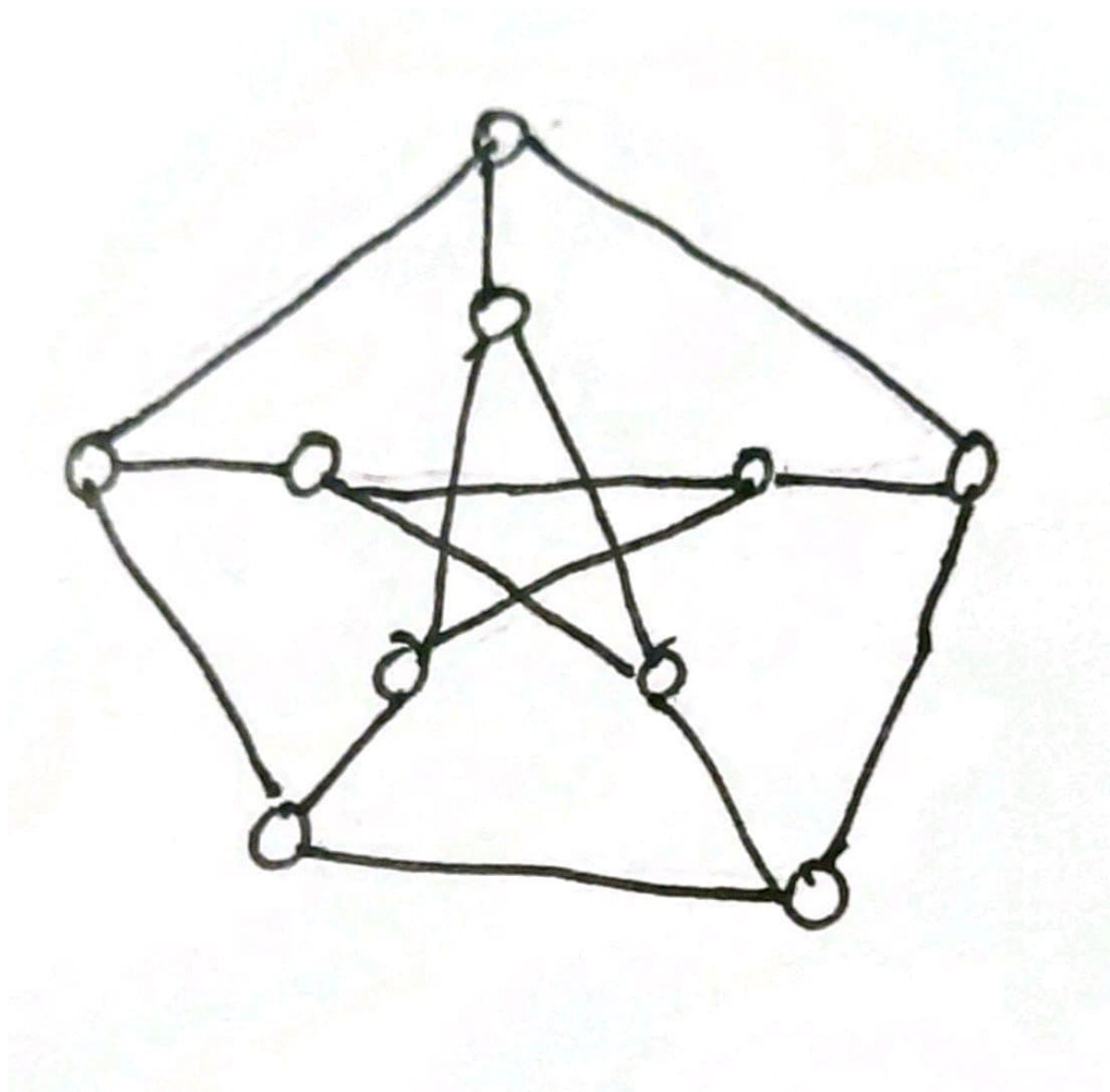
4

已知一个森林 (树的数量大于 1), 其有 7 个叶子, 3 个 2 度顶点, 1 个 3 度顶点, 并且有至少一个 4 度顶点, 求其树的数量与顶点数量。

5

求一个 n 阶 m 边图的基本回路数量。

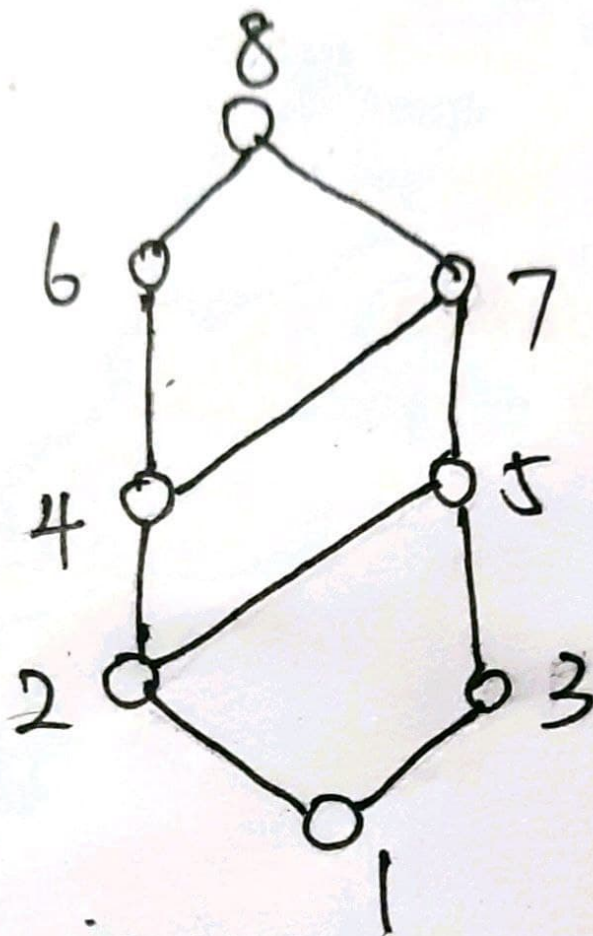
6



求彼得森图的点独立数 β_0 , 边独立数 β_1 , 点覆盖数 α_0 , 边覆盖数 α_1 .

7

已知偏序关系 $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \preceq \rangle$ 的哈斯图如下, 求 $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ 的上界, 上确界, 下界, 下确界。



8

对于完全图 K_{2k} , 至少要加多少条边才能使其成为欧拉图?

大题

最后一题 15 分, 其他的 10 分

1

某校有 75 个学生, 他们可以参加数理化竞赛 (数学, 物理, 化学三门竞赛). 有 20 人三门竞赛都参加了, 有 55 人至少参加了两场竞赛。已知每一门竞赛每一个报名费都是 10 元, 这 75 人的报名费之和是 1400 元, 求有多少人没有参加任何一门竞赛? (使用容斥原理作答)

2

在集合 $\langle \{a, b, c, d, e\}, \preceq \rangle$ 上有关系 R 定义如下:

$$R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, e \rangle \}$$

(1) 写出其关系矩阵

(2) 验证 R 是偏序关系

(3) 画出其哈斯图

(4) 对于 $B = \{b, d, e\}$, 说明其最大元, 极大元, 最小元, 极小元是否存在, 若存在, 则写出。

3

已知一简单平面图有 6 个顶点, 12 条边, 求其每面的次数, 并判断其是否为极大平面图, 分别说明理由。

4

现有字母 a, b, c, d, e, f, g, h 出现频率如下: 30%, 15%, 15%, 10%, 10%, 9%, 6%, 5%.

(1) 求其哈夫曼编码

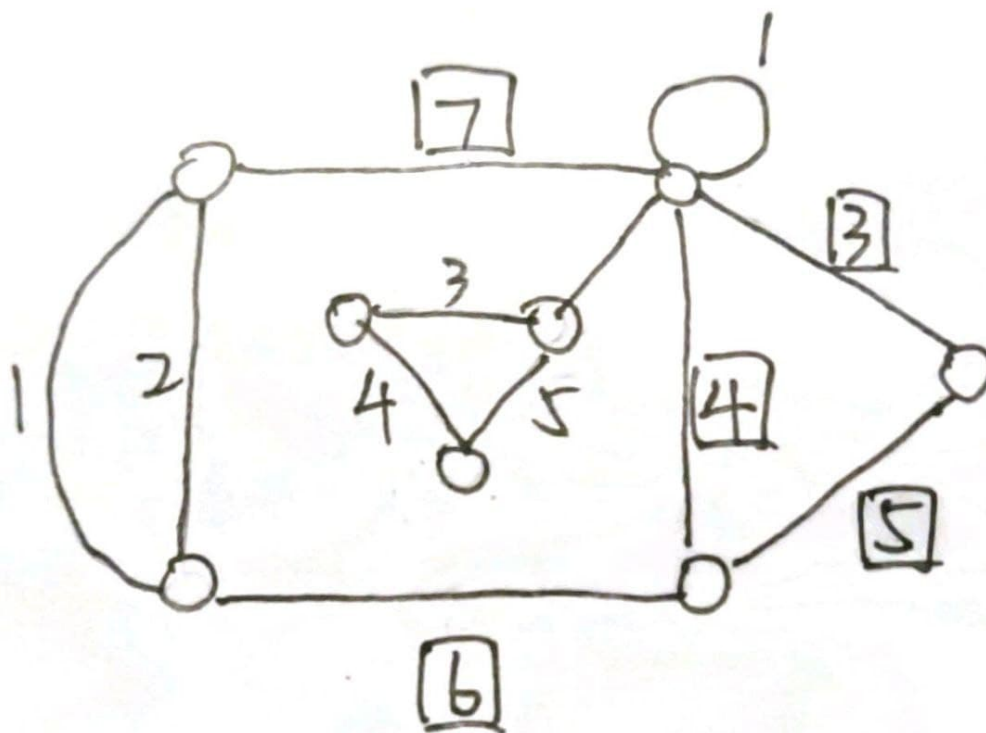
(2) 画出其哈夫曼树

(3) 如果有 100 个这些字母要传输, 至少要传输多少个二进制数字?

5

求下图的最小生成树, 写出求的过程。

带框框的边权不确定, 其他都是试卷上的。



6

已知连通简单平面图 G 不含 K_3 , 求证:

(1) G 的最小度 $\delta(G) \leq 3$

(2) G 是可 4-着色的

