第二型平面曲线积分的计算与格林公式

基本方法 （1）将第二型平面曲线积分化为定积分计算；

（2）运用格林公式计算；

（3)运用第二型平面曲线积分与积分路径无关性质以及曲线积分基本定理计算。

1、将第二型平面曲线积分化为定积分计算的方法

（1）第二型平面曲线积分化为定积分的公式

$$\int_L \vec{f}(x,y)\cdot d\vec{s} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

（2）两类曲线积分之间的关系

$$\int_L \vec{f}(x,y)\cdot d\vec{s} = \int_L \vec{f}(x,y)\cdot \vec{\mathrm{t}}^\circ ds$$

其中$\vec{t}^\circ = \{\cos(\vec{t},x),\cos(\vec{t},y)\}$为曲线正切向的单位化向量

例 1 计算 $\int_L \frac{x^3dy - y^3dx}{x^{\frac{8}{3}} + y^{\frac{8}{3}}}$，其中 L 是星形线

$x = R\cos^3 t, y = R\sin^3 t\ (0 \le t \le 2\pi)$的正向。

解 原式$= \int_0^{2\pi} \frac{R^3\cos^9 t\cdot 3R\sin^2 t\cos t - R^3\sin^9 t\cdot 3R\cos^2 t(-\sin t)}{R^{\frac{8}{3}}(\cos^8 t + \sin^8 t)}dt$

$$= 3R^{\frac{4}{3}}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^{10} t\cdot\sin^2 t + \sin^{10} t\cos^2 t}{\cos^8 t + \sin^8 t}dt = 3R^{\frac{4}{3}}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t dt$$

$$=\frac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt=\frac{3\pi}{4}R^{\frac{4}{3}}。$$

例 2 计算 $\int_L \frac{x^2y^{\frac{3}{2}}dy-xy^{\frac{5}{2}}dx}{(x^2+y^2)^3}$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$ 在第一象限中自点 $(R,0)$ 到点 $(0,R)$ 的弧段 $(R>0)$。

解 L 可化为参数方程 $x=R\cos t, y=R\sin t$,$0\le t\le\frac{\pi}{2}$，注意被积函数在 L 上取值，有

$$原式=\int_L \frac{x^2y^{\frac{3}{2}}dy-xy^{\frac{5}{2}}dx}{R^6}=\frac{1}{R^6}\int_L x^2y^{\frac{3}{2}}dy-xy^{\frac{5}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{R^6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(R\cos t)^2\cdot(R\sin t)^{\frac{3}{2}}\cdot R\cos t-R\cos t(R\sin t)^{\frac{5}{2}}(-R\sin t)]dt$$

$$=\frac{1}{R\sqrt{R}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}t\cos tdt=\frac{2}{5R\sqrt{R}}$$

2、运用格林公式计算第二型平面曲线积分的方法

格林公式

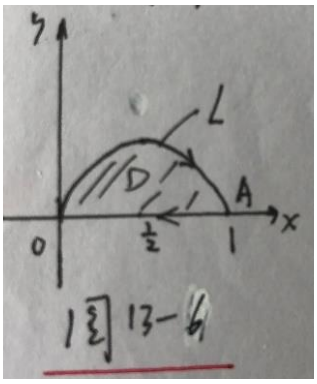
设 D 是以逐段光滑曲线 L 为边界的平面区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma\quad,$$

其中曲线积分沿闭曲线 L 的正向。

例 3 计算 $\int_L (xy-\sin x\sin y)dx+(x^2+\cos x\cos y)dy$，其中 L 自点 $(0,0)$

出发，沿曲线 $y=x-x^2$ 至点 $A(1,0)$。



解 选取辅助有向曲线 $AO: y=0, 0\le x\le 1$，则有

$$\text{原式}=\int_L+\int_{AO}-\int_{AO}=\oint_{L+AO}-\int_{AO}$$

又 $P=xy-\sin x\cos y, Q=x^2+\cos x\cos y\in C^1(R^2)$，且 $L+AO$ 形成封闭曲线的负向，运用格林公式

$$\text{原式}=\oint_{L+AO}-\int_{AO}=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma-\int_{AO}(xy-\sin x\sin y)dx$$

$$=-\iint_D xd\sigma-\int_1^0 0dx=-\int_0^1 dx\int_0^{x-x^2}xdy=-\int_0^1 2x(x-x^2)dx=-\frac{1}{12}$$

解二 运用积分分解和曲线积分基本定理计算。

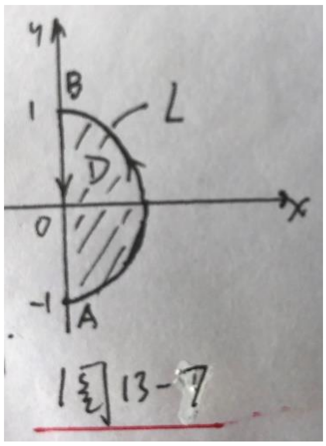
$$\text{原式}=\int_L xydx+x^2dy+\int_L\cos x\cos ydy-\sin x\sin ydx$$

$$=\int_0^1[x(x-x^2)+x^2(1-2x)]dx+\int_L d(\cos x\sin y)$$

$$=\int_0^1(2x^2-3x^3)dx+(\cos x\sin y)\Big|_{(0,0)}^{(1,0)}=-\frac{1}{12}+0=-\frac{1}{12}$$

例 4 计算 $\int_L(e^y+xe^{x^2+y^2}-y^3-ye^{-x})dx+(e^{-x}+ye^{x^2+y^2}+x^3+xe^y)dy$，

其中 L 是自点 $A(0,-1)$ 至点 $B(0,1)$ 的右半圆周 $x^2+y^2=1$。



解 由 L 的方程及被积函数的形式，注意到被积函数在曲线 L 上取值，所求积分可化简为

$$\text{原式}=\int_L (e^y+ex-y^3-ye^{-x})dx+(e^{-x}+ey+x^3+xe^y)dy$$

可见 $P=e^y+ex-y^3-ye^{-x},Q=e^{-x}+ey+x^3+xe^y\in C^1(R^2)$。添置有向曲线 $BA: x=0,-1\le y\le 1$ ，运用格林公式

$$\text{原式}=\oint_{L+BA}-\int_{BA}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma-\int_L(e^{-x}+ey+x^3+xe^y)dy$$

$$=\iint_D[(-e^{-x}+3x^2+e^y)-(e^y-3y^2-e^{-x})]d\sigma-\int_1^{-1}(1+ey)dy$$

$$=3\iint_D(x^2+y^2)d\sigma+2=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho+2=2+\frac{3}{4}\pi$$

3、运用曲线积分与路径无关，曲线积分基本定理计算的方法

（1）第二型平面曲线积分与积分路径无关的等价条件

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在平面单连通区域 D 内具有一阶连续的偏导数，则有以下等价结论：

曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 D 内与路径无关

$\Leftrightarrow$ 对 D 内的任一封闭曲线 L，有 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

$\Leftrightarrow$ 在 D 内处处成立 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

$\Leftrightarrow$ 微分形式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 D 内是一全微分式，即存在原函数 $\varphi(x,y)$ 使得在 D 内成立

$$d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy\text{。}$$

（2）平面曲线积分的微积分基本定理

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在平面单连通区域 D 上连续，$\varphi(x,y)$ 是微分

形式$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$在 D 内的一个原函数，则对完全落在 D 内的以点$A(x_1,y_1)$为起点，点$B(x_2,y_2)$为终点的任意路径 L，有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L d(\varphi(x,y))=\varphi(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}.$$

（3）当有奇点时，封闭路径上曲线积分的性质

设M_0是$P(x,y),Q(x,y)$的奇点，且当$M\neq M_0$时，$P(x,y),Q(x,y)$具有一阶连续的偏导数，并成立$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则

（A）当封闭的积分路径 L 不环绕且不经过奇点M_0时，总有

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

（B）当封闭的积分路径 L 环绕奇点M_0时，任意同方向路径上的积分值都相等，即

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\equiv C$$ （与路径 L 无关的常数）

例 5 计算$\displaystyle\int_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中 L 为抛物线$2x=\pi y^2$自点$(0,0)$到点$(\frac{\pi}{2},1)$的一段有向弧。

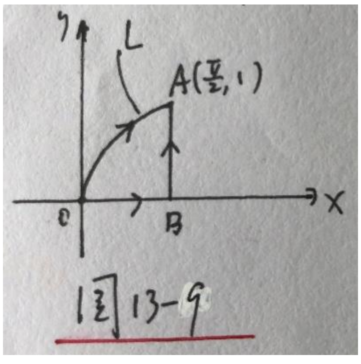


图13-9

解 由$P=2xy^3-y^2\cos x,Q=1-2y\sin x+3x^2y^2\in C^1(R^2)$，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x=\frac{\partial P}{\partial y}\text{，}(x,y)\in R^2$$

知积分在R^2上与路径无关。选取连接$O(0,0)$，$A(\frac{\pi}{2},1)$两点的路径

$$OB: y=0\ ,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\quad ,\quad BA: x=\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le y\le 1$$

则有

$$\text{原式}=\int_{OB}+\int_{BA}=\int_{OB}(2xy^3-y^2\cos x)dx+\int_{BA}(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx+\int_0^1(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2)dy=\frac{1}{4}\pi^2$$

解二　利用曲线积分基本定理式计算。采用凑微分法原函数 $\varphi(x,y)$。

$$Pdx+Qdy=(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

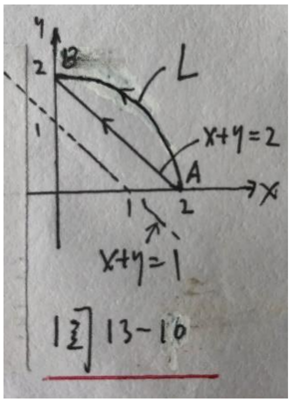
$$=2xy^3dx-y^2\cos xdx+dy-2y\sin xdy+3x^2y^2dy$$

$$=[y^3d(x^2)+x^2d(y^3)]-[y^2d(\sin x)+\sin xd(y^2)]+dy=d(x^2y^3-y^2\sin x+y)$$

求得微分形式在 R^2 上的一个原函数 $\varphi(x,y)=x^2y^3-y^2\sin x+y$

$$\text{原式}=(x^2y^3-y^2\sin x+y)\Big|_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1)}=\frac{\pi^2}{4}-1+1=\frac{\pi^2}{4}.$$

例 6　计算 $\int_L\frac{(1-y)dx+xdy}{(x+y-1)^2}$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=4$ 在第一象限中自点 $A(2,0)$ 至点 $B(0,2)$ 的一段圆弧。



解　由 $P=\frac{1-y}{(x+y-1)^2},Q=\frac{x}{(x+y-1)^2}\in C^1(x+y\ne 1)$， 且当 $x+y\ne 1$时

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y-x-1}{(x+y-1)^3}=\frac{\partial P}{\partial y}\quad ,$$

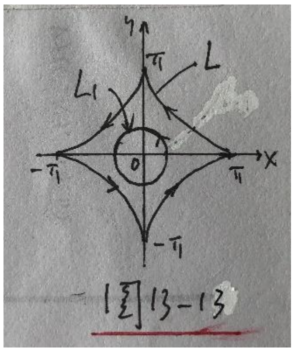
可知积分在包含积分路径 L 的单连通区域 $x+y>1$上与路径

无关。

根据 P,Q 分母函数的形式，选取连接 A,B 两点的路径 $AB: x+y=2, 0\le x\le 2$，，则有

$$\text{原式} = \int_{AB}\frac{(1-y)dx+xdy}{(x+y-1)^2}=\int_{AB}(1-y)dx+xdy=\int_2^0(-1)dx=2$$

例 7 计算 $\oint_L \frac{y^2xdy-y^3dx}{(x^2+y^2)^2}$，其中 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\pi^{\frac{2}{3}}$ 的正向。



解 $P=-\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}, Q=\frac{y^2x}{(x^2+y^2)^2}\in C^1((x,y)\ne(0,0))$，

且成立

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{\partial P}{\partial y},\ (x,y)\ne(0,0)$$

设 $L_1: x^2+y^2=1$，反时针方向为正向

$$\text{原式} = \oint_{L_1}\frac{y^2xdy-y^3dx}{(x^2+y^2)^2}=\oint_{L_1}y^2xdy-y^3dx$$

$$=\int_0^{2\pi}[\sin^2 t\cos t\cdot\cos t-\sin^3 t\cdot(-\sin t)]dt=\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt=\pi$$

例 8 试确定 k 的值，使上半平面的曲线积分

$$I=\int_{AB}\frac{x}{y}(x^2+y^2)^k dx-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^k dy$$

与路径无关，并取点 $A(0,1)$，点 $B(1,2)$ 计算此曲线积分的值。

解 $P=\frac{x}{y}(x^2+y^2)^k, Q=-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^k\in C^1(y>0)$，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2x}{y^2}(x^2+y^2)^{k-1}[(1+k)x^2+y^2],\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{k-1}[(2k-1)y^2-x^2]$$

为使积分在$y>0$上与路径无关，让 k 使得$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 成立，即

$$-\frac{2x}{y^2}(x^2+y^2)^{k-1}[(1+k)x^2+y^2]=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{k-1}[(2k-1)y^2-x^2],$$

即 $(2k+1)(x^2+y^2)=0$，即 $k=-\frac{1}{2}$.

所以当取$k=-\frac{1}{2}$时，积分在上半平面上与路径无关。为计算积分的值，先计算微分形式的原函数。

$$Pdx+Qdy=\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy=x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(\frac{ydx-xdy}{y^2})$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}d(\frac{x}{y})=\frac{\frac{x}{y}}{\sqrt{1+(\frac{x}{y})^2}}d(\frac{x}{y})=d(\sqrt{1+(\frac{x}{y})^2})$$

可知微分形式在$y>0$上的一个原函数为

$$\varphi(x,y)=\sqrt{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}$$

利用曲线积分基本定理，所求积分的值

$$I=\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(0,1)}^{(1,2)}=\frac{\sqrt{5}}{2}-1$$

例 9　试确定 n 的值，使微分形式

$$\frac{x-y}{(x^2+y^2)^n}dx+\frac{x+y}{(x^2+y^2)^n}dy,$$

为全微分式，并求该全微分式的原函数。

解 $P=\frac{x-y}{(x^2+y^2)^n},Q=\frac{x+y}{(x^2+y^2)^n}$，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2nx(x+y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}\text{，}\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2+2ny(x-y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

为使微分形式为全微分式，让 n 使得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 成立，即

$$\frac{x^2+y^2-2nx(x+y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}=-\frac{x^2+y^2+2ny(x-y)}{(x^2+y^2)^{n+1}},$$

即 $(1-n)(x^2+y^2)=0$，即 $n=1$。

所以当取 $n=1$ 时，微分形式在不包含环绕奇点 $(0,0)$ 的路径的区域上是全微分式。在 $x\neq 0$ 的区域上，

$$Pdx+Qdy=\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\frac{xdy-ydx}{x^2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}$$

$$=d[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)]+\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}d(\frac{y}{x})$$

$$=d[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}]$$

所以微分形式在 $x\neq 0$ 的区域上的原函数为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}+C$$

例 10 求满足 $\varphi(\pi)=1$ 的具有一阶连续导数的函数 $\varphi(x)$，使曲线积分

$$I=\int_{AB}(\varphi(x)-\cos x)\frac{y}{x}dx-\varphi(x)dy$$

在 $x>0$（或 $x<0$）的半平面内与路径无关，并求当取点 $A(\pi,\pi)$，

点$B(\frac{\pi}{2},0)$时此曲线积分的值。

解 $P=(\varphi(x)-\cos x)\frac{y}{x},Q=-\varphi(x)$ 在$x>0$（或$x<0$）上具有一阶连续的偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\varphi'(x)\text{，}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}$$

为使积分在$x>0$（或$x<0$）上与路径无关，取$\varphi(x)$使得成立

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，即 $-\varphi'(x)=\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}$，

也就是$\varphi(x)$满足初值问题：

$$\begin{cases}\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{1}{x}\varphi(x)=\frac{\cos x}{x}, \\ \varphi(\pi)=1\end{cases},$$

解得 $\varphi(x)=\frac{1}{x}(\pi+\sin x)$ 。此时微分形式

$$Pdx+Qdy=(\frac{\pi+\sin x}{x}-\cos x)\frac{y}{x}dx-\frac{\pi+\sin x}{x}dy$$

$$=\frac{\pi+\sin x-x\cos x}{x^2}ydx-\frac{\pi+\sin x}{x}dy$$

$$=-yd(\frac{\pi+\sin x}{x})-\frac{\pi+\sin x}{x}dy=-d(\frac{y(\pi+\sin x)}{x})=d(-\frac{y(\pi+\sin x)}{x})$$

所以在$x>0$（或$x<0$）上的原函数

$$\varphi(x,y)=-\frac{y(\pi+\sin x)}{x}$$

利用曲线积分基本定理，所求积分值

$$I=-\frac{y(\pi+\sin x)}{x}\Bigg|_{(\pi,\pi)}^{(\frac{\pi}{2},0)}=\pi$$

例 11 设 $|L|$ 为有向曲线 L 的弧长，M 为函数 $\sqrt{(P(x,y))^2+(Q(x,y))^2}$ 在 L 上的一个上界，试证明：

$$\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right| \le M|L|。$$

解 记曲线 L 的正切向的单位向量为 $\vec{t}^{\circ}$，利用第二型与第一型曲线积分的转换关系，及第一型曲线积分的不等式性质式

$$\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right| = \left|\int_L \vec{f}(x,y)\cdot d\vec{s}\right| = \left|\int_L \vec{f}(x,y)\cdot \vec{t}^{\circ} ds\right|$$

$$\le \int_L \left|\vec{f}(x,y)\cdot \vec{t}^{\circ}\right| ds = \int_L \left|\vec{f}(x,y)\right|\left|\vec{t}^{\circ}\right|\left|\cos(\vec{f}(x,y),\wedge \vec{t}^{\circ})\right| ds$$

$$\le \int_L \left|\vec{f}(x,y)\right| ds = \int_L \sqrt{(P(x,y))^2+(Q(x,y))^2} ds \le M\int_L ds = M|L|$$

例 12 设 $f(t)$ 是恒为正值的连续函数，L 是正向的圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$，证明不等式

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx \ge 2\pi.$$

解 记 L 所界的圆域为 D，利用格林公式，有

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx = \iint_D [f(y)-(-\frac{1}{f(x)})]d\sigma = \iint_D [f(y)+\frac{1}{f(x)}]d\sigma$$

又圆域 D 关于分角线 $y=x$ 对称，利用二重积分与积分变量名称无关的性质

$$\iint_D f(y)d\sigma \overset{x与y互换}{=} \iint_D f(x)d\sigma.$$

于是 $$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx = \iint_D (f(x)+\frac{1}{f(x)})d\sigma$$

$$= \iint_D [(\sqrt{f(x)}-\frac{1}{\sqrt{f(x)}})^2+2]d\sigma \ge \iint_D 2d\sigma = 2\pi$$