第二型空间曲线积分的计算与斯托克斯公式

基本方法（1）将第二型空间曲线积分化为定积分计算；

（2）运用斯托克斯公式计算；

（3）运用第二型空间曲线积分与积分路径无关的性质以及曲线积分基本定理计算。

1、将第二型空间曲线积分化为定积分计算

（1）第二型空间曲线积分化为定积分计算的公式

设积分路径 $L: x = x(t), y = y(t),\ z = z(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$

$$\int_L \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt$$

(2) 两类空间曲线积分之间的关系

$$\int_L \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = \int_L \vec{f}(x,y,z)\cdot \vec{t}^{\circ} ds$$

$$= \int_L [P\cos(\vec{t},\wedge x) + Q\cos(\vec{t},\wedge y) + R\cos(\vec{t},\wedge z)]ds$$

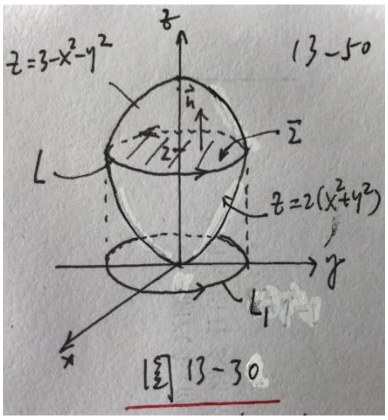
其中 $\vec{t}^{\circ} = \{\cos(\vec{t},\wedge x),\cos(\vec{t},\wedge y),\cos(\vec{t},\wedge z)\}$ 为曲线的正切向的单位化向量。

例 1 计算曲线积分 $\int_L z^3dx + x^3dy + y^3dz$，其中 L 是曲面 $z = 2(x^2+y^2)$ 与曲面 $z = 3 - x^2 - y^2$ 的交线，沿 oz 轴的正向看 L 是

顺时针方向的。

解 将$L:\begin{cases} z=2(x^2+y^2), \\ z=3-x^2-y^2 \end{cases}$投影到 xoy 平面，得投影曲线$L_1: x^2+y^2=1$。

令$x=\cos t, y=\sin t$， 则$z=2$，于是 L 得参数方程



$$L: x=\cos t, y=\sin t, z=2\ ,0\le t\le 2\pi\text{。}$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}[(2)^3(-\sin t)+\cos^3 t\cdot\cos t+0]dt=\int_0^{2\pi}(-8\sin t+\cos^4 t)dt$$

$$=-8\int_0^{2\pi}\sin tdt+\int_0^{2\pi}\cos^4 tdt \overset{\cos^4 t\text{周期函数}}{=} 8\cos t\Big|_0^{2\pi}+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt$$

$$\overset{\cos^4 t\text{为偶函数}}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$$

解二 采用降维法计算。

由于 L 在曲面$z=2(x^2+y^2)$ 上，所以曲线 L 上的点满足方程$z=2(x^2+y^2)$。于是$dz=4xdx+4ydy$。代入所求积分的被积表达式

$$\text{原式}=\int_{L_1}8(x^2+y^2)^3dx+x^3dy+y^3(4xdx+4ydy)$$ （$L_1: x^2+y^2=1$，反时针方向）

$$=\int_{L_1}[8(x^2+y^2)^3+4xy^3]dx+(x^3+4y^4)dy$$

$$\overset{\text{格林公式}}{=}\iint_{x^2+y^2\le 1}[3x^2-48y(x^2+y^2)^2-12xy^2]dxdy$$

$$\overset{\text{对称性性质}}{=}\iint_{x^2+y^2\le 1}3x^2dxdy=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho d\rho=3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1\rho^3d\rho=\frac{3}{4}\pi.$$

说明 当积分路径 L 由两空间曲面相交的形式给出时，也可通过从曲

面方程中解出某一变量，例如$z=z(x,y)$，根据微分形式不变性，曲线L上点(x,y,z)处的正切向量$\{dx,dy,dz\}$满足$dz=z_x dx+z_y dy$，将$z=z(x,y)$，dz的表达式代入曲线积分，消去z,dz后把积分降维，化为L在xoy平面的投影曲线L'上的第二型平面曲线积分计算。

解三 利用斯托克斯公式计算

取绷在 L 上的平面$\Sigma: z=2$，$x^2+y^2\le 1$，上侧为正侧（图13-30)，利用斯托克斯公式

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma} rot\{z^3,x^3,y^3\}\cdot d\vec{S}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^3 & x^3 & y^3\end{vmatrix}\cdot d\vec{S}$$

$$=\iint_{\Sigma}\{3y^2,3z^3,3x^2\}\cdot\{dzdy,dzdx,dxdy\}$$

$$=\iint_{\Sigma}3y^2dzdy+3z^3dzdx+3x^2dxdy$$

$$\overset{\Sigma\text{平行于}xoy\text{平面}}{=}\iint_{\Sigma}3x^2dxdy=3\iint_{x^2+y^2\le 1}x^2dxdy=\frac{3}{4}\pi$$

2、运用斯托克斯公式计算第二型空间曲线积分

（1）向量场的旋度

设向量场$\vec{f}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，其中函数$P,Q,R$在区域$\Omega$内具有一阶连续的偏导数，则向量场$\vec{f}(x,y,z)$在点$(x,y,z)\in\Omega$处的旋度

$$rot\vec{f}(x,y,z)=\nabla\times\vec{f}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$$=\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\},$$

（2）斯托克斯公式

设 L 是空间中的分段光滑的有向曲线，Σ是以 L 为边界线的分片光滑的有向曲面，向量场$\vec{f}(x,y,z)$的三个分量函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在包含曲面$\Sigma$的空间区域$\Omega$内具有一阶连续的偏导数，则

$$\oint_L \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=\iint_\Sigma rot\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$$

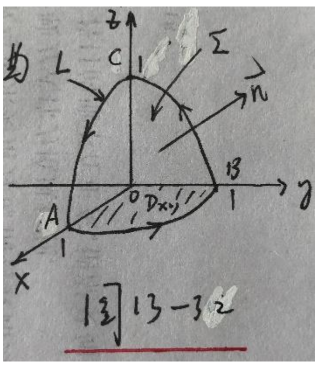
$$=\iint_\Sigma \nabla\times\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_\Sigma \nabla\times\vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{n}^\circ dS$$

其中 L 的正向与Σ的正侧符合右手规则，$\vec{n}^\circ=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，$d\vec{S}=\{dydz,dzdx,dxdy\}=\vec{n}^\circ dS$ 。

例 2 计算曲线积分$\int_L x^2zdx+xy^2dy+z^2dz$，其中 L 是抛物面$z=1-x^2-y^2$在第一卦限部分的边界，方向从正 z 轴向原点看去是逆时针的。

解 运用斯托克斯公式计算。

$$P=x^2z,Q=xy^2,R=z^2\in C^1(R^3)$$



取曲面$z=1-x^2-y^2$在第一卦限部分的曲面为Σ，上侧为正侧（图 13-32）。则Σ是以 L 为边界线，且与 L 正向形成右手系的有向曲面。从$\vec{f}(x,y,z)=\{x^2z,xy^2,z^2\}$计算旋度 ，得

$$rot\vec{f}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2z & xy^2 & z^2\end{vmatrix}=\{0,x^2,y^2\}$$

又Σ的正法向

$$\vec{n}=\{-z_x,-z_y,1\}=\{2x,2y,1\}，\quad \vec{n}^\circ=\frac{1}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\{2x,2y,1\}，$$

运用斯托克斯公式

$$\text{原式}=\iint_\Sigma rot\vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_\Sigma rot\vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{n}^\circ dS$$

$$=\iint_\Sigma\frac{2x^2y+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}dS$$

（$dS=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy,D_{xy}:x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0$）

$$=\iint_{D_{xy}}(2x^2y+y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta+\rho^2\sin^2\theta)\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{5}\cos^2\theta\sin\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)d\theta=\frac{2}{15}+\frac{\pi}{16}.$$

例 3 计算曲线积分$\oint_L(z-2y)dx+(x-2z)dy+(y-2x)dz$，其中 L 是曲面$4x^2+4y^2+z^2=32+8xy$与平面$2x+2y+z=0$的交线，方向从正 z 轴向原点看去是逆时针的。

解 $P=z-2y,Q=x-2z,R=y-2x\in C^1(R^3)$。取平面$2x+2y+z=0$上绷在 L 上的那块平面为Σ，上侧为正侧，则Σ以 L 为边界线，其正侧与 L 正向形成右手系。

由于 $\vec{f}(x,y,z)=\{z-2y,x-2z,y-2x\}$，所以

$$rot\vec{f}(x,y,z)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-2y & x-2z & y-2x \end{vmatrix}=\{3,3,3\}.$$

又Σ的正法向量 $\vec{n}=\{2,2,1\}$，$\vec{n}^{\circ}=\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}$，运用斯托克斯公式

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma} rot\vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{n}^{\circ}dS=\iint\limits_{\Sigma}\{3,3,3\}\cdot\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}dS=5\iint\limits_{\Sigma}dS\ .$$

从方程组 $\begin{cases}4x^2+4y^2+z^2=32+8xy, \\ 2x+2y+z=0\end{cases}$ 中消去 z，得 L 在 xoy 平面上的投影曲线为 $x^2+y^2=4$，可知Σ在 xoy 平面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 4$。所以

$$\text{原式}=5\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy=5\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}dxdy$$

$$=15\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=15\cdot 4\pi=60\pi.$$

解二 利用降维法计算。

记 L 在 xoy 平面上的投影曲线为 $L': x^2+y^2=4$。由 L 在平面 $z=-2x-2y$ 上，可知 $dz=-2dx-2dy$。代入被积表达式消去 z,dz，有

$$\text{原式}=\int\limits_{L'}(-2x-4y)dx+(5x+4y)dy-2(y-2x)(dx+dy)$$

$$=\int\limits_{L'}(2x-6y)dx+(9x+2y)dy$$

$$\overset{\text{格林公式}}{=}\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}[9-(-6)]dxdy=15\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}dxdy=60\pi$$

3、运用无旋场曲线积分性质，曲线积分基本定理计算第二型空间曲线积分

对于向量场 $\vec{f}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$

（1） $\vec{f}(x,y,z)$ 是保守场

如果积分 $\int_L \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$ 在区域 Ω 内与路径无关，则称向量场 $\vec{f}(x,y,z)$ 在 Ω 内是保守场。

（2） $\vec{f}(x,y,z)$ 是无旋场

如果在区域 Ω 内恒有 $rot\vec{f}(x,y,z)=0$，则称向量场 $\vec{f}(x,y,z)$ 在 Ω 内是无旋场。

（3） $\vec{f}(x,y,z)$ 是有势场

如果存在函数 $\varphi(x,y,z)$，使得在 Ω 内成立

$$\vec{f}(x,y,z)=\nabla\varphi(x,y,z),$$

则称向量场 $\vec{f}(x,y,z)$ 在 Ω 内是有势场，并称 $-\varphi(x,y,z)$ 为向量场 $\vec{f}(x,y,z)$ 的势函数。

（4）第二型空间曲线积分与路径无关的等价条件

设空间区域 Ω 是一维单连通区域，向量场 $\vec{f}(x,y,z)$ 的三个分量函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z),R(x,y,z)\in C^1(\Omega)$，则有以下等价结论：

曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ 在 Ω 内与路径无关，即 $\vec{f}(x,y,z)$ 是保守场

$\Leftrightarrow$ 对于Ω内任一分段光滑的闭曲线 L，有

$$\oint_L \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0$$

$\Leftrightarrow$ 在Ω内处处成立 $rot\vec{f}(x,y,z)=0$ ，即 $\vec{f}(x,y,z)$是无旋场。

$\Leftrightarrow$ 微分形式$Pdx+Qdy+Rdz$在Ω内是一全微分式，即存在原函数$\varphi(x,y,z)$，使得在Ω 内成立

$$d\varphi(x,y,z)=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\ .$$

$\Leftrightarrow$ 存在函数$\varphi(x,y,z)$，使得在Ω内成立

$$\vec{f}(x,y,z)=\nabla\varphi(x,y,z)\ ,$$

即 $\vec{f}(x,y,z)$是有势场。

（5）空间曲线积分的微积分基本定理

设$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z),R(x,y,z)$在空间一维单连通区域Ω上连续，$\varphi(x,y,z)$是微分形式$Pdx+Qdy+Rdz$在Ω内的一个原函数，则对完全落在Ω内的以点$A(x_1,y_1,z_1)$为起点，点$B(x_2,y_2,z_2)$为终点的任意路径 L，有

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L d(\varphi(x,y,z))=\varphi(x,y,z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

例 4 计算曲线积分$\int_L (yz-xe^{-x^3})dx+(xz+\dfrac{2\sqrt{2}}{1+2y^2})dy+(xy+1)dz$，其中 L 是从点$A(\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\pi)$沿曲线$x=2\cos t,y=\sin t,z=4t$到点$B(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\pi)$的有向曲线。

解 $P = yz - xe^{-x^3}, Q = xz + \dfrac{2\sqrt{2}}{1+2y^2}, R = xy + 1 \in C^1(R^3)$，

且 $\vec{f}(x,y,z) = \{P,Q,R\}$ 的旋度

$$rot\vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz - xe^{-x^3} & xz + \dfrac{2\sqrt{2}}{1+2y^2} & xy+1 \end{vmatrix} = \{x-x, y-y, z-z\} = \{0,0,0\}.$$

可知 $\vec{f}(x,y,z)$ 在 R^3 上是一无旋场，根据无旋场的等价条件，所求积分在 R^3 上与路径无关。选取连接 A, B 点的积分路径：

$AC: x = \sqrt{2}, y = y, z = -\pi \; (-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \dfrac{\sqrt{2}}{2})$， $CB: x = \sqrt{2}, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, z = z(-\pi \le z \le \pi)$

则有

$$原式 = \int_{AC} + \int_{CB} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-\sqrt{2}\pi + \frac{2\sqrt{2}}{1+2y^2})dy + \int_{-\pi}^{\pi}(1+1)dz = 3\pi.$$

解二 积分也可通过计算原函数后利用曲线积分基本定理计算。

$$Pdx+Qdy+Rdz = (yz - xe^{-x^3})dx + (xz + \frac{2\sqrt{2}}{1+2y^2})dy + (xy+1)dz$$

$$= yzdx - xe^{-x^3}dx + xzdy + \frac{2\sqrt{2}}{1+2y^2}dy + xydz + dz$$

$$= d(xyz) + d[2\arctan(\sqrt{2}y)] + dz + d(\int_0^x t^2 e^{-t^3}dt) = d(xyz + 2\arctan(\sqrt{2}y) + z + \int_0^x t^2 e^{-t^3}dt)$$

所以被积表达式的一个原函数为

$$\varphi(x,y,z) = xyz + 2\arctan(\sqrt{2}y) + z + \int_0^x t^2 e^{-t^3}dt,$$

利用曲线积分基本定理

$$原式=(xyz+z+2\arctan(\sqrt{2}y)+\int_0^x t^2e^{-t^3}dt)\Big|_{(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\pi)}^{(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\pi)}=3\pi.$$

例 5 确定常数a,b，使向量场

$$\vec{f}(x,y,z)=\{x^2-ayz,y^2-2xz,z^2-bxy\}$$

为有势场，并求其势函数。

解 $P=x^2-ayz,Q=y^2-2xz,R=z^2-bxy\in C^1(R^3)$。$\vec{f}(x,y,z)$的旋度

$$rot\vec{f}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-ayz & y^2-2xz & z^2-bxy\end{vmatrix}=\{(2-b)x,(b-a)y,(a-2)z\}$$

令$2-b=0,a-b=0,a-2=0$，解得$a=2,b=2$，此时

$$rot\vec{f}(x,y,z)=\vec{0},$$

根据有势场的等价条件，当$a=2,b=2$时，$\vec{f}(x,y,z)$是有势场。

为求$\vec{f}(x,y,z)$的势函数，先求微分形式$Pdx+Qdy+Rdz$的原函数。

$$\begin{aligned}Pdx+Qdy+Rdz&=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz\\&=x^2dx+y^2dy+z^2dz-2(yzdx+xzdy+xydz)\\&=d[\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)]-2d(xyz)=d[\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz],\end{aligned}$$

所求原函数 $\varphi(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz$。所以$\vec{f}(x,y,z)$的势函数 $u(x,y,z)=-\varphi(x,y,z)=2xyz-\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)$.