幂级数收敛域的计算

基本方法

（1）利用收敛半径的计算公式确定非缺项幂级数的收敛域；

（2）利用变量代换或正项级数的比值（或根值）判别法确定缺项幂级数的收敛域；

1、非缺项幂级数的收敛域的计算

（1）阿贝尔定理

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_1$处收敛，则它在$(-|x_1|,|x_1|)$内任一点处都绝对收敛；若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_2$处发散，则它在满足$|x|>|x_2|$的任一点$x$处都发散.

（2）非缺项幂级数收敛半径的计算公式

对于非缺项的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$$ （L为有限数或$+\infty$），

则幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{L}, & L>0;\\ 0, & L=+\infty;\\ +\infty, & L=0.\end{cases}\qquad(1)$$

（3）非缺项幂级数收敛域的计算方法

(a) 运用收敛半径公式计算幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R$；

(b) 根据收敛半径R的情况确定收敛域。

例 1 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)2n}$的收敛域。

解 $a_n=\frac{1}{(2n-1)2n}$，则由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}{\frac{1}{(2n-1)2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n)}{(2n+1)(2n+2)}=1,$$

幂级数的收敛半径$R=1$，从而收敛区间为$(-1,1)$。

当$x=-1$时，

幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n)}$，由于通项的绝对值$|u_n|\sim\frac{1}{4n^2}(n\to\infty)$，

所以级数绝对收敛，从而收敛.

当$x=1$时，

幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)}$，由于$u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n)}\sim\frac{1}{4n^2}(n\to\infty)$，

所以级数绝对收敛，因此幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)2n}$的收敛域为$[-1,1]$.

例 2 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)2^n}x^{n+1}$ 的收敛域.

解 由$a_n=\frac{\ln(n+1)}{(n+1)2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln(n+2)}{(n+2)2^{n+2}}}{\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

根据式（1），幂级数的收敛半径$R=2$，于是收敛区间为$(-2,2)$。

当$x=-2$时，

幂级数为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2\ln(n+1)}{n+1}$，利用莱布尼茨判别法可知该级数收敛.

当$x=2$时，

幂级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\ln(n+1)}{n+1}$，利用积分判别法可知该级数发散．所以幂级数的收敛域为$[-2,2)$.

例 3 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2+\frac{1}{n})^n(x-\frac{1}{2})^n$的收敛域.

解 $a_n=(2+\frac{1}{n})^n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})=2,$$

根据式（1），幂级数的收敛半径为$\frac{1}{2}$，从而收敛区间为$(0,1)$.

当$x=0$时，

幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(2+\frac{1}{n})^n(-\frac{1}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{2n})^n$。

由于该级数通项的绝对值$|u_n|=(1+\frac{1}{2n})^n\to e^{\frac{1}{2}}\neq 0\quad(n\to\infty)$，所以该级数发散.

当$x=1$时，

幂级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2n})^n$，与上同理，该级数发散，所以幂级数的收敛域为$(0,1)$。

2、缺项幂级数的收敛域的计算

（1）通过变量代换的方法将缺项幂级数化为非缺项幂级数处理.

（2）将缺项幂级数中的x当作常量，在通项取绝对值之后，运用正项级数的比值（或根值）判别法计算其前后两项之比的极限（或n次方根的极限），根据算得的极限值确定使得此极限值小于 1 的x的范围，从而获得该缺项幂级数的收敛区间，最后再考察幂级数在收敛区间的两个端点处的敛散性，确定缺项幂级数的收敛域.

例 4 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{2^n(n+1)^2}$的收敛域.

解 记幂级数的通项$u_n(x)=\frac{(x+3)^{2n}}{2^n(n+1)^2}$，则由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(x+3)^{2n+2}}{2^{n+1}(n+2)^2}}{\dfrac{(x+3)^{2n}}{2^n(n+1)^2}}=\frac{(x+3)^2}{2},$$

当$\frac{(x+3)^2}{2}<1$，即$-3-\sqrt{2}<x<-3+\sqrt{2}$时，幂级数绝对收敛；

当$\frac{(x+3)^2}{2}>1$时，幂级数发散，从而获得幂级数的收敛区间

$(-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2})$.

又当 $x=-3\pm\sqrt{2}$ 时，幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$，可知是收敛的，所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{2^n(n+1)^2}$ 的收敛域为 $[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}]$.

解二 设 $t=(x+3)^2$，则原幂级数可写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{2^n(n+1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n(n+1)^2}$。

对于非缺项幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n(n+1)^2}$， 由 $a_n=\frac{1}{2^n(n+1)^2}$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+2)^2}}{\frac{1}{2^n(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

可知其收敛半径 $R=2$，收敛区间为 $(-2,2)$，

当 $t=-2$ 时，幂级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，级数收敛；

当 $t=2$ 时，幂级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$，也收敛。

所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n(n+1)^2}$ 的收敛域为 $[-2,2]$，再由 $t=(x+3)^2$，可知原幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{2^n(n+1)^2}$ 的收敛域为

$$-2\le(x+3)^2\le 2，\text{即}[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}].$$