函数的幂级数展开式和幂级数求和

基本方法 （1）直接展开法；（2）间接展开法.

1、 利用间接展开法求函数的幂级数展开式

间接展开法就是根据一些已知的初等函数展开式，利用幂级数的性质（包括逐项求导，逐项积分）、变量代换等方法将所给函数展开成幂级数。

重要结论

（1）基本的函数幂级数展开式

① $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,(-1<x<1)$ （1）

② $(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,(-1<x<1)$ （2）

③ $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},(-\infty<x<+\infty)$ （3）

④ $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},(-\infty<x<+\infty)$ （4）

⑤ $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},(-\infty<x<+\infty)$ （5）

⑥ $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n,(-1<x\le 1)$ （6）

（2）幂级数的运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ， $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为 R_1,R_2 ，记 $R=\min\{R_1,R_2\}$，则当$-R<x<R$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n\ .$$

（3）幂级数的逐项求导，逐项积分，逐项求极限性质

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R>0$，则其和函数$S(x)$在收敛域内连续，在收敛区间$(-R,R)$ 内可导、可积，且可逐项求极限，逐项求导，逐项积分，即有

$$\lim_{x\to x_0}S(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}(a_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n{x_0}^n\ ，（x_0\ 属于收敛域）；$$

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\ ，\ |x|<R\ ；$$

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ ,\ |x|<R\ .$$

例 1 将函数$f(x)=\ln\sqrt[3]{8+2x-x^2}$展开为$x-1$的幂级数.

解 $f(x)$的定义域为$(-2,4)$，对于$x\in(-2,4)$， $f(x)$可写成

$$f(x)=\frac{1}{3}\ln(x+2)(4-x)=\frac{1}{3}\ln(x+2)+\frac{1}{3}\ln(4-x)$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left[3+(x-1)\right]+\frac{1}{3}\ln\left[3-(x-1)\right]=\frac{1}{3}\left[\ln3+\ln(1+\frac{x-1}{3})\right]+\frac{1}{3}\left[\ln3+\ln(1-\frac{x-1}{3})\right]$$

在式（6）中分别令$x=\frac{x-1}{3}$和$x=-\frac{x-1}{3}$，有

$$\ln(1+\frac{x-1}{3})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n,-1<\frac{x-1}{3}\le1,即-2<x\le4，$$

$$\ln(1-\frac{x-1}{3})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(-\frac{x-1}{3}\right)^n,-1<-\frac{x-1}{3}\le1,即-2\le x<4，$$

所以当$-2<x<4$时， $f(x)$的关于$x-1$的幂级数展开式

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n3^n}(x-1)^n+\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n3^n}(x-1)^n\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n3^n}(x-1)^n\right]$$

$$=\frac{2}{3}\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n3^{n+1}}(x-1)^n,-2<x<4.$$

例 2 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}$ 展开为 $x+4$ 的幂级数.

解 运用部分分式分解的方法， $f(x)$ 可变形为

$$f(x)=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x+4)-2}-\frac{1}{(x+4)-3}=\frac{1}{3(1-\frac{x+4}{3})}-\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}$$

在式（2）中分别令 $x=\dfrac{x+4}{3}$ 和 $x=\dfrac{x+4}{2}$，得 $f(x)$ 关于 $x+4$ 的幂级数展开式.

$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{3})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{2})^n \quad (-1<\frac{x+4}{3}<1,\ -1<\frac{x+4}{2}<1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^n})(x+4)^n \quad (-6<x<-2).$$

例 3 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan x+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为麦克劳林级数.

解 因为 $$f'(x)=\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1\text{-}x})=\frac{1}{1-x^4},$$

在式（8-2）中令 $x=x^4$，有

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n},\quad |x|<1.$$

将上式两边从 0 到 $x(|x|<1)$ 积分，得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n})dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^{4n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}(-1<x<1),$$

由于 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 的麦克劳林展开式为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}\quad(-1<x<1).$$

例 4 将函数 $f(x)=\int_0^x\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 展开为 x 的幂级数.

解 因为 $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$，在式（8-2）中，令 $x=-x^2(|x|<1)$，则有

$$\arctan x=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad(|x|<1),$$

由于上式右边幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1]$，从而 $S(x)$ 在 $x=\pm1$ 处连续，在等式两边取极限知上展开式在 $x=\pm1$ 处也成立，所以

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},(-1\le x\le 1).$$

于是对于 $x\in[-1,1]$，$x\neq 0$，有展开式

$$\frac{\arctan x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\ 。$$

又当 $x\to 0$ 时，$\frac{\arctan x}{x}\to 1$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\to 1$，即上展开式在 $x=0$ 处也成立，因此被积函数关于 x 的幂级数展开式为

$$\frac{\arctan x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n},\quad x\in[-1,1].$$

将上式两边从 0 到 x $(|x|<1)$ 积分就得 $f(x)$ 关于 x 的幂级数展开式

$$f(x)=\int_0^x \frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n})dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1},(-1\le x\le 1).$$

2、求幂级数的和函数

基本方法

（1）利用几个基本初等函数的展开式求幂级数的和函数；

（2）利用幂级数的逐项求导、逐项积分性质求幂级数的和函数.

A、利用几个基本初等函数的展开式求幂级数的和函数

这一方法的基本思路是：通过恒等变形以及幂级数的运算性质将所求和函数的幂级数化为或分解为已知和函数的幂级数的组合。已知和函数的幂级数常用的是 6 个基本初等函数的展开式（1）-（6）。

例 5 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n}$ 的和函数.

解 因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}x^2=x^2,$$

可得幂级数的收敛域为 $-1\le x\le 1$. 记和函数 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n}}{n}$，则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x^2)^n}{n}\overset{t=x^2}{=}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n}$$

利用式(6)，得

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n}-t=\ln(1+t)-t \quad (-1<t\le 1)$$

$$=\ln(1+x^2)-x^2，\quad (-1\le x\le 1).$$

B、利用幂级数逐项求导、逐项积分等性质求幂级数和函数

这一方法的基本思路是：通过对幂级数逐项求导、逐项积分，拆项分解等方法将问题转化为已知和函数的幂级数求和问题。

例 6 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}$的和函数.

解 容易算得幂级数的收敛域为$[-1,1]$．记和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}，\quad -1\le x\le 1.$$

先设$x\in(-1,1)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n，\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}，$$

从而有 $S''(x)=\frac{1}{1+x}$

将上式两边从0到x积分

$$S'(x)-S'(0)=\ln(1+x)$$

由于$S'(0)=0$，所以有 $S'(x)=\ln(1+x)$.

将上式两边再从0到x积分

$$S(x)-S(0)=\int_0^x\ln(1+x)\mathrm{d}x=(1+x)\ln(1+x)-x.$$

再从 $S(0)=0$，得 $S(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$，

所以 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}=(1+x)\ln(1+x)-x,\qquad x\in(-1,1).$$

又函数 $(1+x)\ln(1+x)-x$，$S(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故上式在 $x=1$ 处仍然成立。又因

$$S(-1)=\lim_{x\to -1^{+}}[(1+x)\ln(1+x)-x]=1.$$

所以幂级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)-x, & x\in(-1,1]\\ 1, & x=-1\end{cases}.$$

解二 对于 $x\in(-1,1)$，运用逐项积分性质

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t(-1)^{n-1}s^{n-1}\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t=\int_0^x\Big(\int_0^t\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}s^{n-1}\Big)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t=\int_0^x\Big(\int_0^t\frac{1}{1+s}\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t=(1+x)\ln(1+x)-x.$$

与解一同样可得，上式在 $x=1$ 处仍然成立，且 $S(-1)=1$.

解三 对于 $x\in(-1,1]$，幂级数可以写成

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big]x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^{n+1}$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-2}}{k}x^{k}$$

$$=x\ln(1+x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n}=x\ln(1+x)+\ln(1+x)-x,\quad -1<x\le 1.$$

在 $x=-1$ 处与解一同样可得，$S(-1)=1$。

例 7 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ n!}x^{2n}$的和函数.

解 容易确定幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，记和函数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ n!}x^{2n}$.

当$x\neq 0$时，运用幂级数的逐项积分公式，

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ n!}x^{2n}\overset{t=x^2}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ n!}t^{n}=\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ n!}t^{n+2}$$

$$=\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{1}{n!}s^{n+1}ds=\frac{1}{t^2}\int_0^t(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{n+1}}{n!})ds$$

$$=\frac{1}{t^2}\int_0^t se^s ds=\frac{1}{t^2}(s\mathrm{e}^s\Big|_0^t-\int_0^t e^s\mathrm{d}s)$$

$$=\frac{1}{t^2}(te^t-\mathrm{e}^t+1)=\frac{1}{x^4}(x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1).$$

注意到，$S(0)=\frac{1}{2}$，所以幂级数和函数为

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^4}(x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1), & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}.$$

3、 利用幂级数的和函数求数项级数的和

数项级数的求和如果仅仅着眼于定义的方法，由于要计算部分和S_n的原因，能求出和的级数不多．由于幂级数求和有许多有效的方法，所以数项级数求和的另外一个重要方法是把数项级数的求和问题转化为与问题相适应的辅助幂级数的求和问题，在求出辅助幂级数的和函数之后，令x为某一具体数值获得该数项级数的和.

例 8 求级数$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$的和。

解 原级数$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n-2}$

构造辅助幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$，其收敛域为$(-1,1)$.

对于$x\in(-1,1)$，运用幂级数的逐项求导性质，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n-1})'=(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1})'=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

令$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\in(-1,1)$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$