Distribuições de probabilidade no *software* R

Por meio do pacote Rcmdr

Diogo Macedo Mendes
Keyla Megumi Sano de Oliveira
Profa. Dra. Giovana Fumes Ghantous

- Distribuições discretas
- Distribuições contínuas

Distribuição binomial

- A distribuição binomial é originária de repetidos ensaios independentes de Bernoulli, no qual define-se uma variável aleatória que assume apenas dois valores: 1, se ocorre o sucesso, e 0, se ocorre o fracasso. A cada ensaio tem-se uma probabilidade p de sucesso, tal que $0 < p < 1$, e apenas dois resultados são possíveis para o experimento: "sucesso" ou "fracasso".

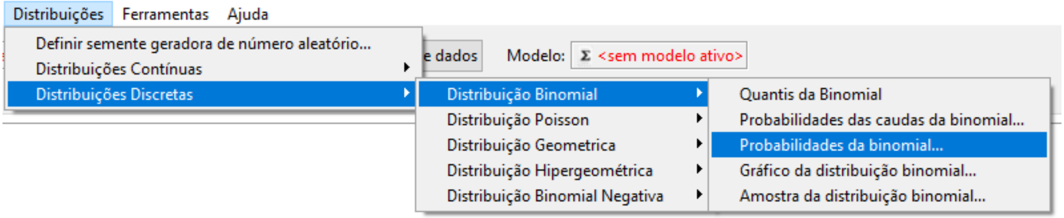
- Assim, a distribuição binomial é caracterizada por dois parâmetros: o número de experimentos (n) e a probabilidade de sucesso (p) em cada experimento. Ela fornece a probabilidade de obter um número específico de sucessos em n tentativas independentes.

Exemplo. Em uma fábrica de pacotes de arroz, espera-se que o peso do produto final esteja entre 998 e 1002 gramas. Suponha que 90% das embalagens contenha a quantidade desejada, ao escolher aleatoriamente 10 embalagens, pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de se encontrar 8 pacotes no peso ideal? ($\mathrm{P}(X = 8)$)

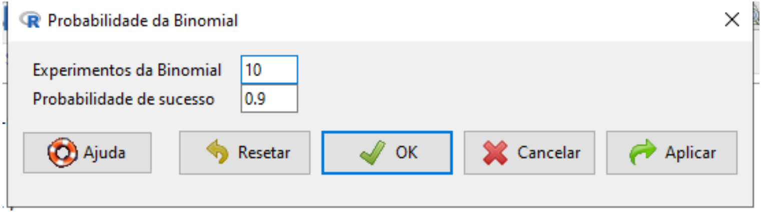
Distribuições de Probabilidade - Binomial

Para o cálculo da probabilidade $P(X = 8)$, basta ir em **Distribuições** > **Distribuições Discretas** > **Distribuição binomial** > **Probabilidades da binomial**



Distribuições de Probabilidade - Binomial

Em seguida, basta escrever o número de experimentos em **Experimentos da Binomial**, e colocar a probabilidade de sucesso em **Probabilidade de sucesso**.



Distribuições de Probabilidade- Binomial

Output

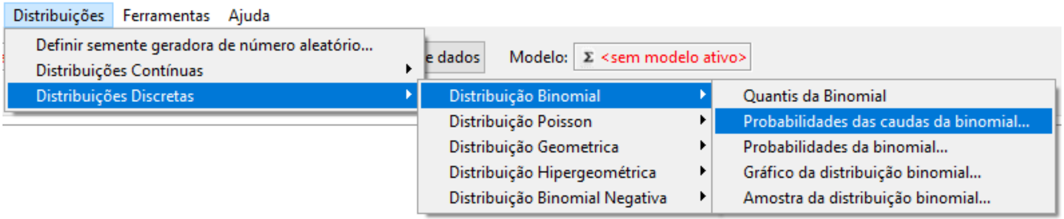
```
+ })
    Probability
0   0.0000000001
1   0.0000000090
2   0.0000003645
3   0.0000087480
4   0.0001377810
5   0.0014880348
6   0.0111602610
7   0.0573956280
8   0.1937102445
9   0.3874204890
10  0.3486784401
```

Assim, tem-se que $P(X = 8) = 0{,}1937$.

Distribuições de Probabilidade - Binomial

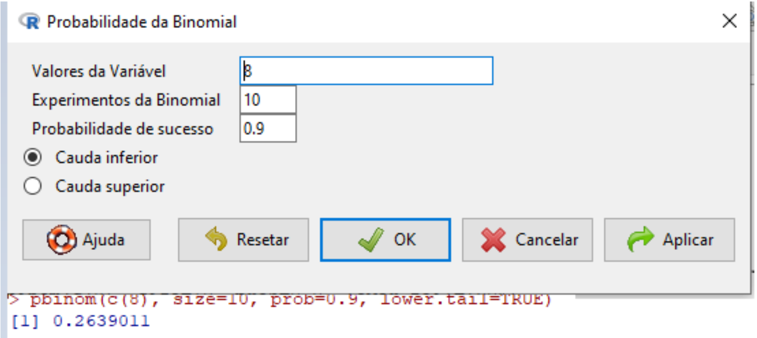
b) Qual a probabilidade de se encontrar no máximo 8 pacotes no peso ideal? $(P(X \leq 8))$.

Basta seguir o menu da forma: **Distribuições** $>$ **Distribuições Discretas** $>$ **Distribuição Binomial** $>$ **Probabilidades das caudas da binomial**



Distribuições de Probabilidade - Binomial

Seleciona-se a **cauda inferior**, pois deseja-se a probabilidade de ser menor ou igual a 8.

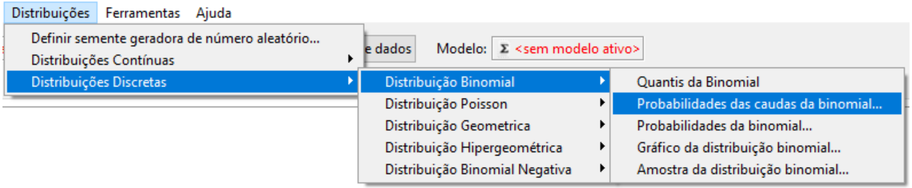


Assim, tem-se que $P(X \leq 8) = 0{,}2639$.

Distribuições de Probabilidade - Binomial

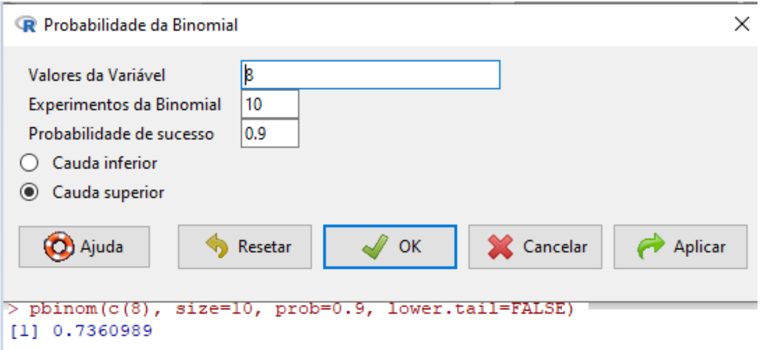
c) Qual a probabilidade de encontrar mais de 8 pacotes no peso ideal? ($P(X>8)$)

Basta seguir o menu da forma: **Distribuições** > **Distribuições Discretas** > **Distribuição Binomial** > **Probabilidades das caudas da Binomial**



Distribuições de Probabilidade - Binomial

Nesse caso, seleciona-se a **cauda superior**, pois deseja-se saber a probabilidade de ser maior do que 8.

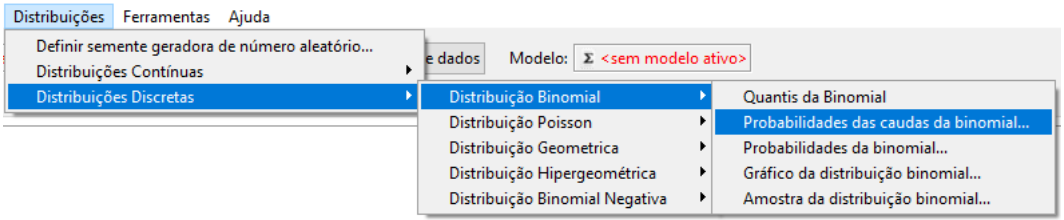


Assim, tem-se que $P(X > 8) = 0{,}7361$.

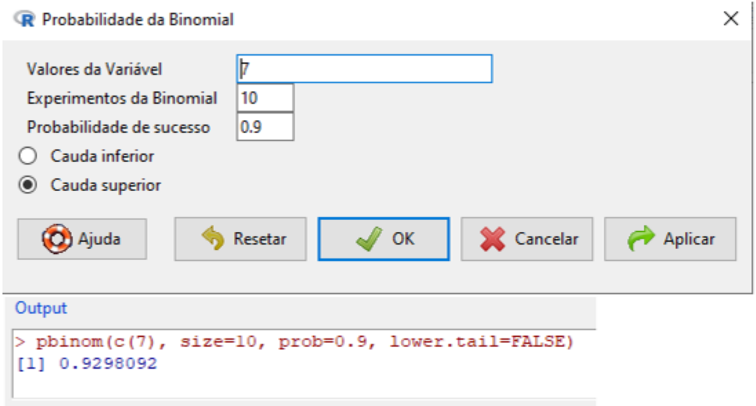
Distribuições de Probabilidade - Binomial

d) Qual a probabilidade de encontrar 8 ou mais pacotes no peso ideal? $(P(X \geq 8))$

Basta seguir o menu da forma: **Distribuições** $>$ **Distribuições Discretas** $>$ **Distribuição Binomial** $>$ **Probabilidades das caudas da Binomial**



Distribuições de Probabilidade - Binomial



Assim, tem-se que $P(X \geq 8) = 0{,}9298$.

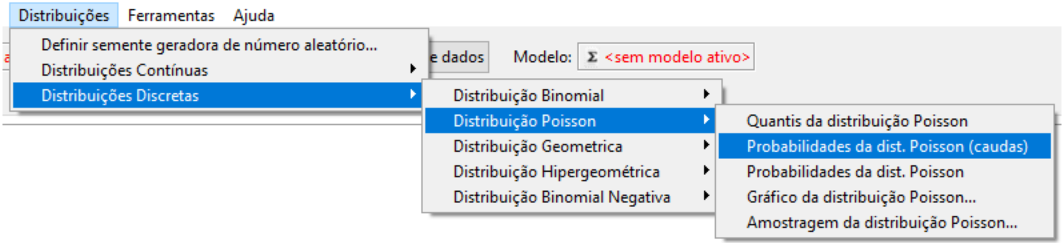
Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é usada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo, espaço, superfície ou volume, sendo caracterizada pelo número médio esperado de ocorrências no intervalo. Ele é especialmente útil quando se trata de eventos raros, independentes e discretos.

Exemplo 1. A emissão de partículas radioativas tem sido modelada por meio de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada. Suponha que o número de partículas alfa, emitidas por minuto, seja uma variável aleatória seguindo o modelo de Poisson com parâmetro 5, isto é, a taxa média de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto. Calcule a probabilidade de haver mais de duas emissões em um minuto. $(P(X > 2))$

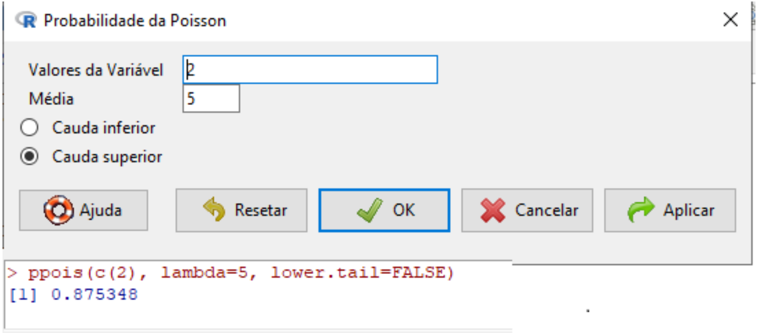
Distribuições de Probabilidade - Poisson

Basta seguir o menu da forma: **Distribuições** > **Distribuições Discretas** > **Distribuição Poisson** > **Probabilidades da dist. Poisson (Caudas)**



Distribuições de Probabilidade - Poisson

Assim, basta inserir os dados fornecidos, e selecionar a **cauda superior**, pois a probabilidade é de ser maior do que 2.



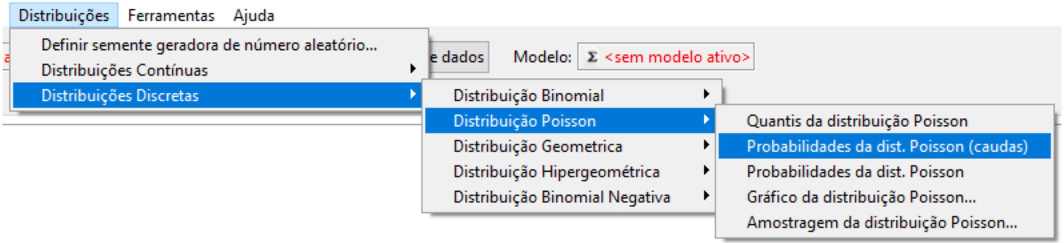
Assim, tem-se que $P(X > 2) = 0{,}8753$.

Distribuições de Probabilidade - Poisson

Exemplo 2. Um telefone recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, calcule a probabilidade do telefone receber no máximo uma ligação ($P(X \leq 1)$).

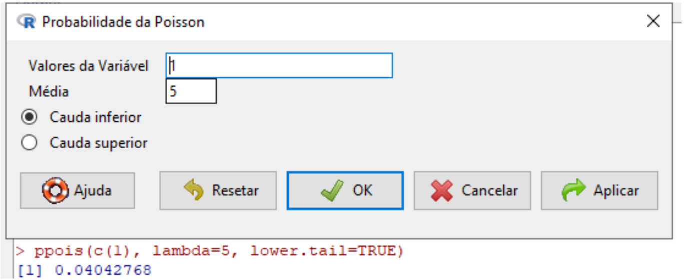
Distribuições de Probabilidade - Poisson

Basta seguir o menu da forma: **Distribuições** > **Distribuições Discretas** > **Distribuição Poisson** > **Probabilidades da dist. Poisson (Caudas)**



Distribuições de Probabilidade - Poisson

Neste caso, seleciona-se a **cauda inferior**, pois a probabilidade que se deseja calcular é a de ser no máximo um.

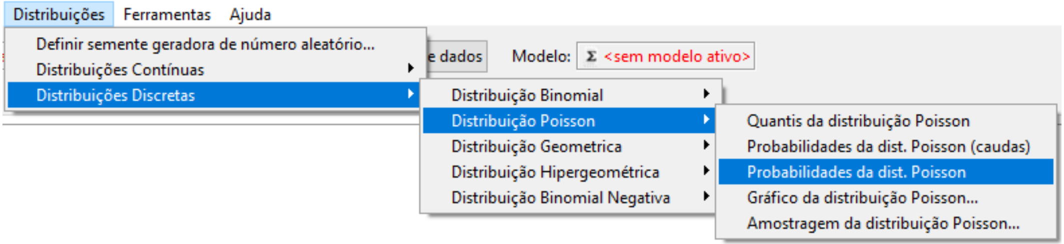


Assim, tem-se que $P(X \leq 1) = 0{,}0404$.

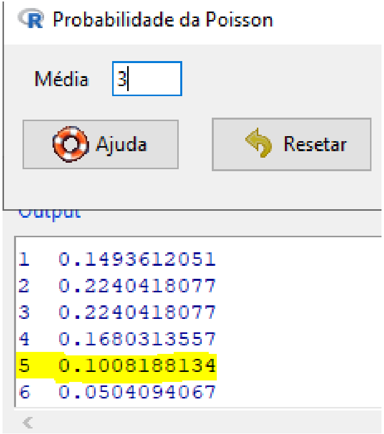
Exemplo 3. Em uma fábrica de laticínios, durante a etapa de embalagens podem ocorrer falhas. Suponha que a contagem da ocorrência das falhas que acontecem em um mês, seja modelada por uma variável aleatória X que segue uma distribuição de Poisson, com parâmetro $\lambda = 3$, ou seja, o número médio de falhas ocorridas em um mês no processo de embalagens é igual a três. Calcule a probabilidade de ocorrerem cinco falhas em um mês. $(P(X = 5))$

Distribuições de Probabilidade - Poisson

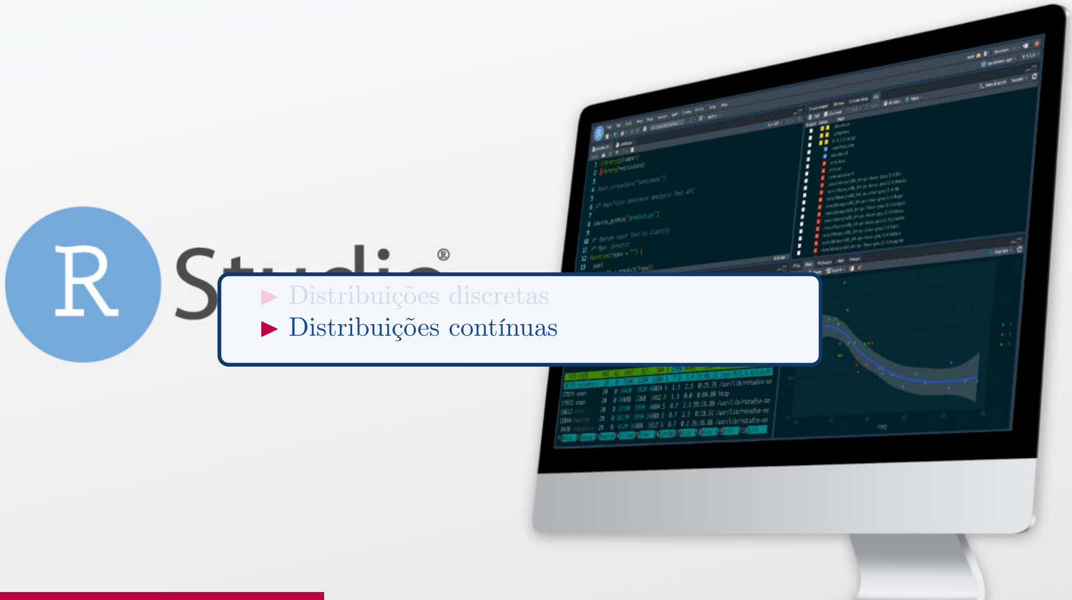
Basta seguir o menu da forma: **Distribuições** > **Distribuições Discretas** > **Distribuição Poisson** > **Probabilidades da dist. Poisson**



Distribuições de Probabilidade - Poisson



Assim, tem-se que $P(X = 5) = 0{,}1008$.



- Distribuições discretas
- Distribuições contínuas

A distribuição normal é caracterizada por dois parâmetros - a média e a variância, que determinam o centro e a variabilidade da distribuição dos dados. No **R**, para que o cálculo de probabilidade associado a esta distribuição seja realizado, os valores de média e de desvio padrão (raiz quadrada da variância) são requeridos.

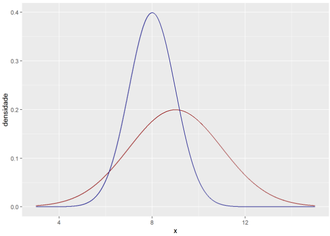
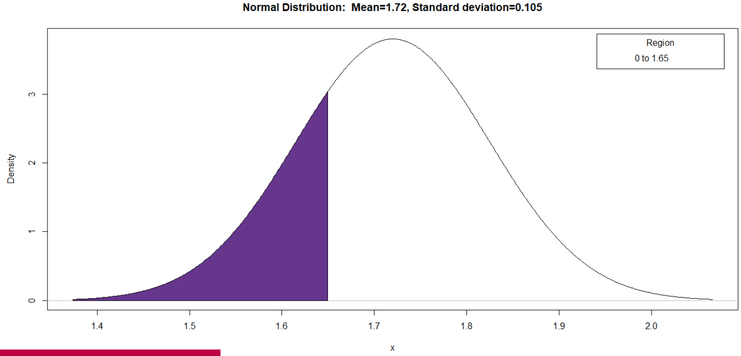


Figure: Funções densidades de probabilidades. Na curva vermelha, tem-se $X \sim N(9,4)$; na curva azul, tem-se $Y \sim N(8,1)$.

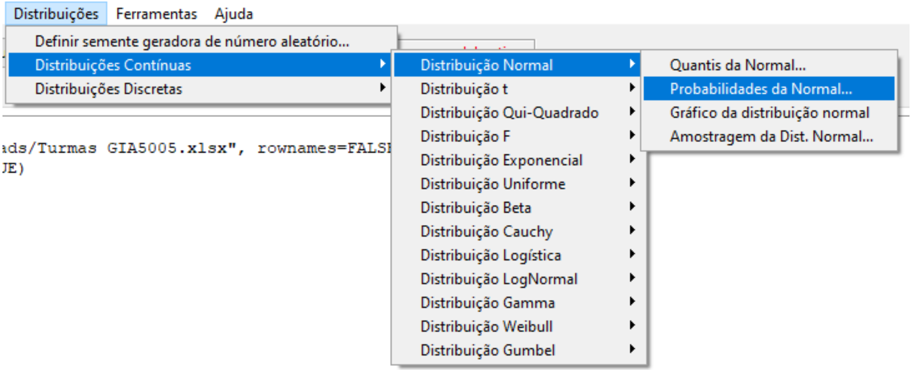
Exemplo 1. As alturas de alunos de uma determinada sala têm distribuição aproximadamente normal, com média 1,72 m e desvio padrão 0,105 m.

a) Qual é a probabilidade de um aluno apresentar uma altura inferior à 1,65 metros? ($P(X < 1{,}65)$)



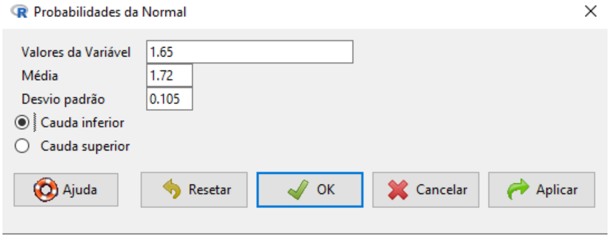
Distribuições de Probabilidade - Normal

Distribuições –> Distribuições contínuas –> Distribuição normal –> Probabilidades da normal



Distribuições de Probabilidade - Normal

Para o cálculo da probabilidade, o valor da variável, a média e o desvio padrão devem ser inseridos. A opção **cauda inferior** deve ser selecionada, pois deseja-se calcular a probabilidade da altura **ser menor** a 1,65 metros.



Distribuições de Probabilidade - Normal

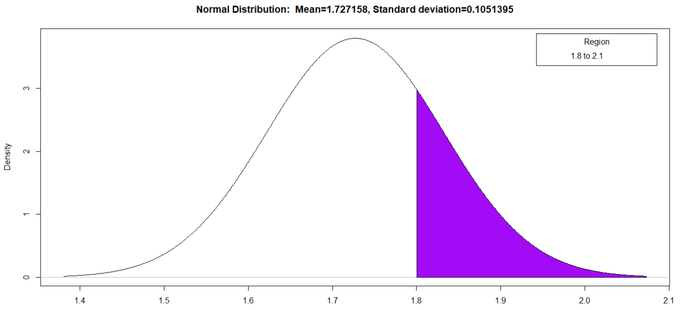
Output

```
> pnorm(c(1.65), mean=1.72, sd=0.105, lower.tail=TRUE)
[1] 0.2524925
```

Assim, tem-se que $P(X < 1,65) =$ 0,2525.

Distribuições de Probabilidade - Normal

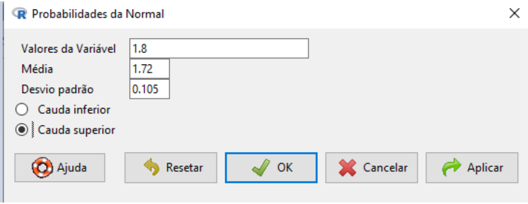
b) Qual é a probabilidade de um alunos apresentar uma altura superior à 1,80 m? (P $(X > 1,80)$)



Distribuições de Probabilidade - Normal

Distribuições –> Distribuições contínuas –> Distribuição normal –> Probabilidades da normal

Os mesmos passos do **Exemplo 2** devem ser seguidos, porém, a opção **cauda superior** deve ser selecionada, pois deseja-se conhecer a probabilidade da variável altura ser **maior** do que 1,80 m.



Distribuições de Probabilidade - Normal

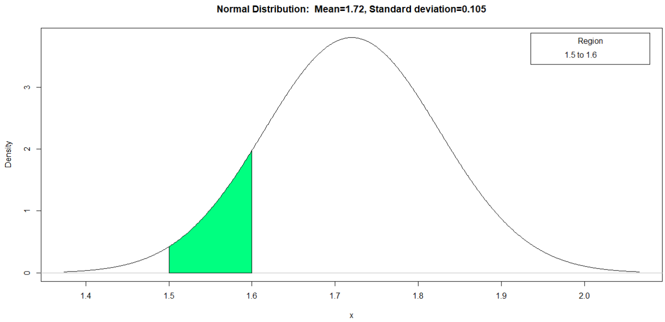
Output

```
> pnorm(c(1.8), mean=1.72, sd=0.105, lower.tail=FALSE)
[1] 0.2230584
```

Assim, tem-se que $P(X > 1{,}80) = 0{,}2231$.

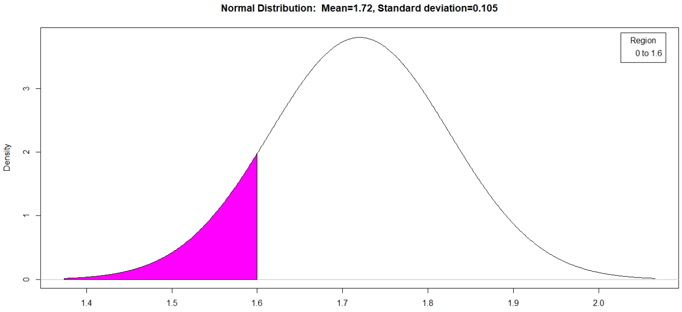
Distribuições de Probabilidade - Normal

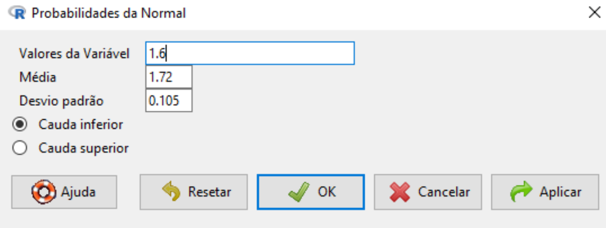
c) Qual é a probabilidade de um aluno apresentar uma altura entre 1,50 m e 1,60 m? $(\mathrm{P}(1,50 < X < 1,60))$



Distribuições de Probabilidade - Normal

Analogamente ao **Exemplo 2**, calcula-se a $P(X < 1,60)$.



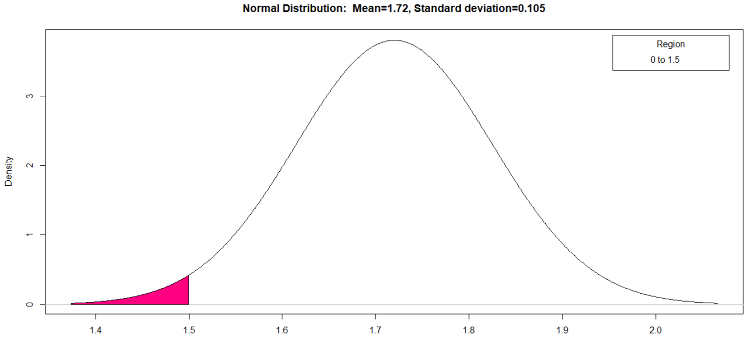


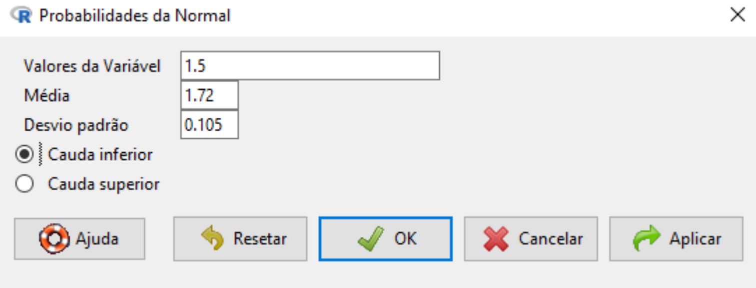
Output

```
> pnorm(c(1.6), mean=1.72, sd=0.105, lower.tail=TRUE)
[1] 0.126549
```

Distribuições de Probabilidade - Normal

Do mesmo modo, calcula-se a probabilidade: $P(X < 1,50)$.



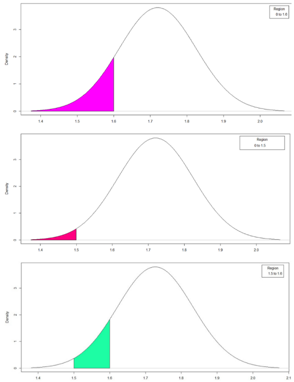


Output

```
> pnorm(c(1.5), mean=1.72, sd=0.105, lower.tail=TRUE)
[1] 0.01807492
```

Distribuições de Probabilidade - Normal

E então, tem-se que: $P(1,50 < X < 1,60) = P(X < 1,60) - P(X < 1,50) =$
$=$ 0,126549 - 0,01807492 $=$ 0,1084741.



Exemplo 2. Suponha que a distribuição dos diâmetros de um certo tipo de tomate siga uma distribuição aproximadamente normal, com média 60 mm e variância 49 mm^2. Uma classificação quanto ao tamanho dos diâmetros é proposta, de acordo com a tabela abaixo.

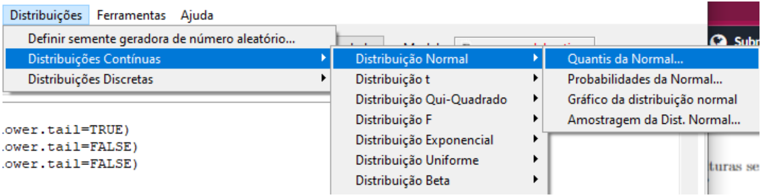
Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
Pequeno	até ___ *mm*	20%
Médio	De ___ a ___ *mm*	60%
Grande	acima de ___ *mm*	20%

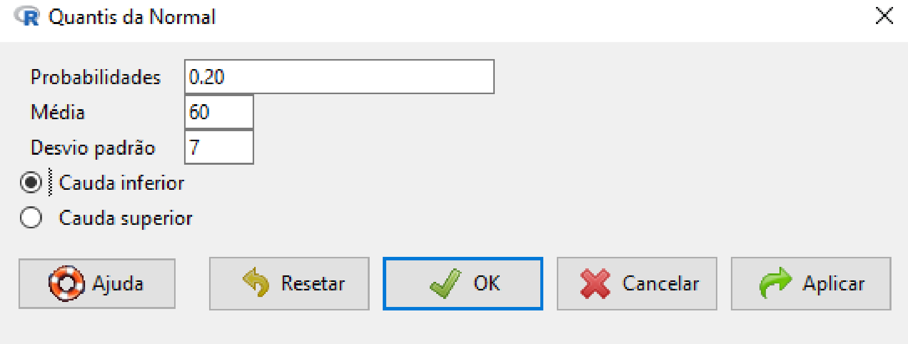
Determine os valores dos diâmetros correspondentes às porcentagens esperadas para realizar esta classificação.

Distribuições de Probabilidade - Normal

Para o cálculo do diâmetro máximo que os tomates devem ter para serem classificados como pequenos, basta calcular o valor de x_1 tal que $P(X < x_1) = 0,20$.

Assim, os seguintes passos do menu devem ser seguidos: **Distribuições –> Distribuições contínuas –> Distribuição normal –> Quantis da normal**

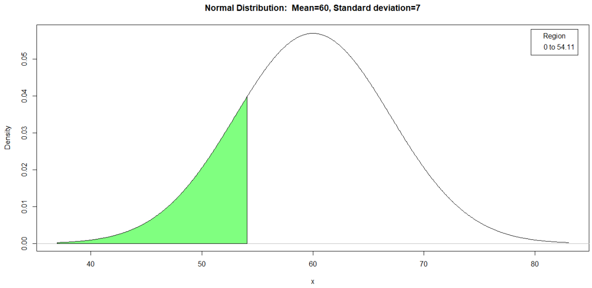



Quantis da Normal
Probabilidades
0.20
Média
60
Desvio padrão
7
Cauda inferior
Cauda superior
Ajuda
Resetar
OK
Cancelar
Aplicar

Distribuições de Probabilidade - Normal

Output

```
> qnorm(c(0.20), mean=60, sd=7, lower.tail=TRUE)
[1] 54.10865
```

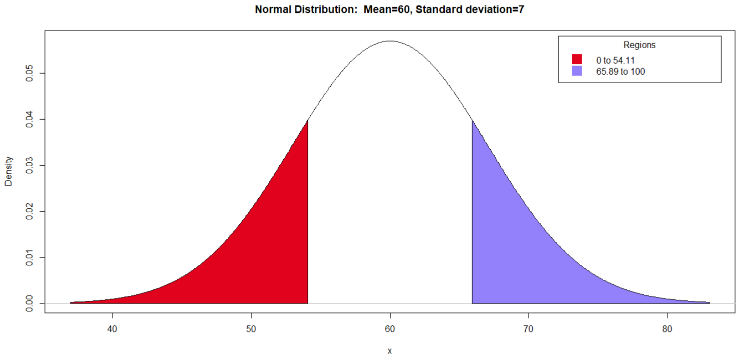


Assim, os 20% dos tomates classificados como pequenos possuem diâmetros de até 54,11 mm.

Distribuições de Probabilidade - Normal

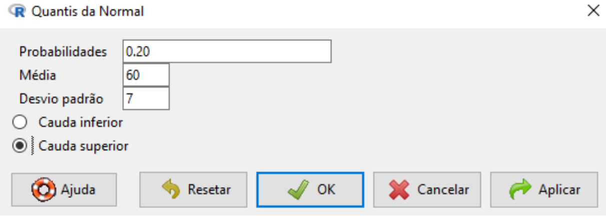
O tomate classificado como médio, tem um valor de diâmetro que está entre x_1 e x_2, de tal modo que $P(x_1 < X < x_2) = 0,60$.

O valor de x_1 é $54,11$ mm, já calculado anteriormente, logo, basta calcular o valor de x_2.



Distribuições de Probabilidade - Normal

Selecionase a **cauda superior**, e preenche as informações da probabilidade (0.20), média (60) e desvio padrão (7).



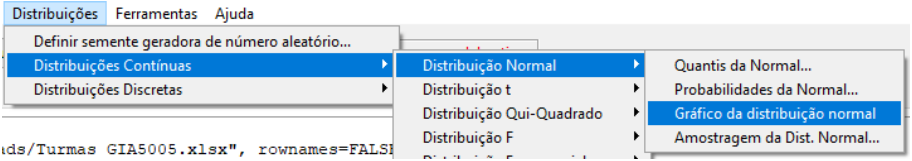

```
> qnorm(c(0.20), mean=60, sd=7, lower.tail=FALSE)
[1] 65.89135
```

Portanto, os tomates são classificados como médio, se possuem diâmetros entre 54,11 mm e 65,89 mm, e são classificados com grandes, os que possuem diâmetros superiores a 65,89 mm.

Distribuiçoes de Probabilidade - Normal

Exemplo 3. Construa o gráfico da função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória que segue uma distribuição normal, com média 15 e desvio padrão 3.

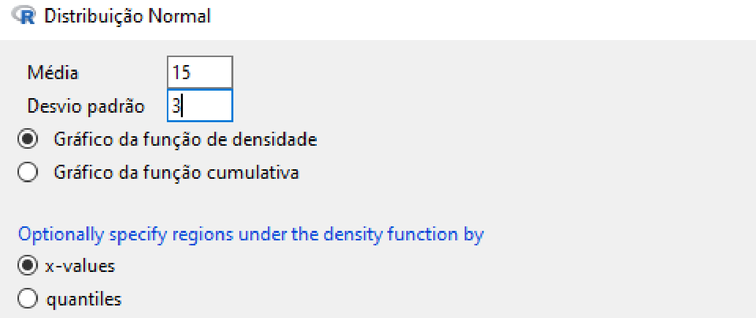
No menu, siga o caminho: **Distribuições** –> **Distribuições contínuas** –> **Distribuição normal** –> **Gráfico da distribuição normal**



Distribuiçoes de Probabilidade - Normal

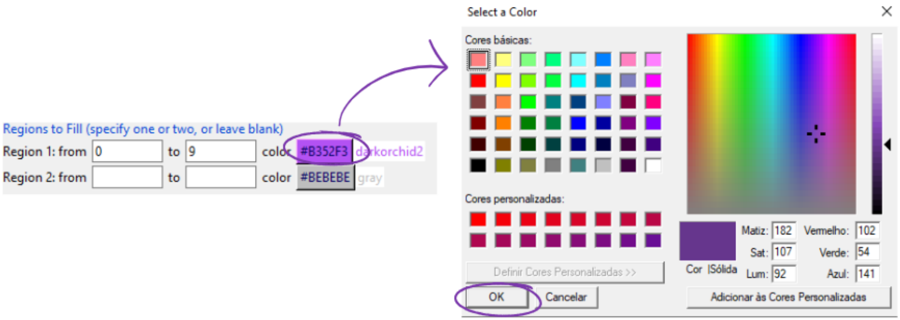
Configuração do gráfico

No menu da distribuição normal, seleciona-se o gráfico da função de densidade.



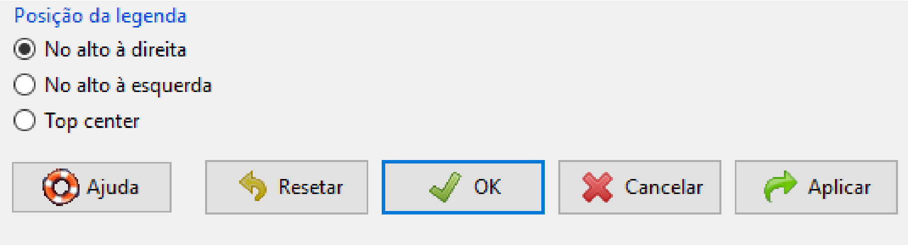
Configuração do gráfico

Também é possível destacar uma região do gráfico alterando sua cor, basta escrever a região desejada e selecionar uma cor em *color*.

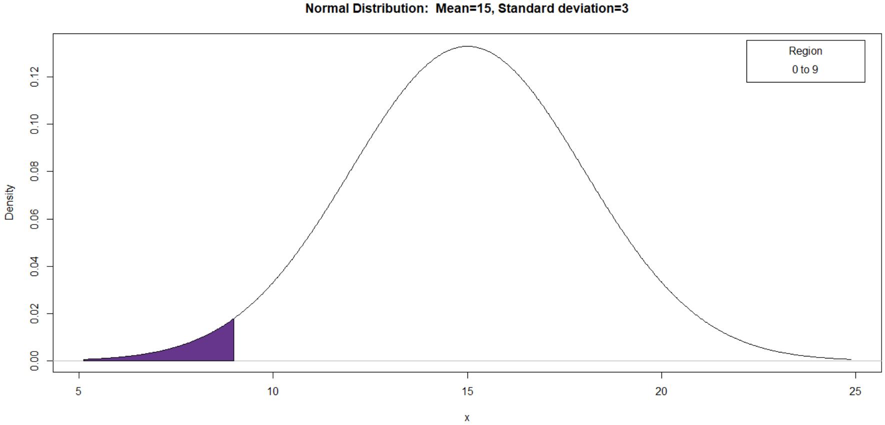


Configuração do gráfico

Por fim, selecione a posição desejada da legenda, depois clique em ok.

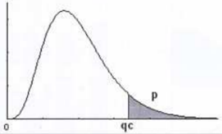


Resultado


Normal Distribution: Mean=15, Standard deviation=3
Region
0 to 9
Density
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
5
10
15
20
25
x

TÁBUA 2: Valores críticos (q_c) da distribuição Quiquadrado com v graus de liberdade

Valores q_c tais que $p = P(Q > q_c)$

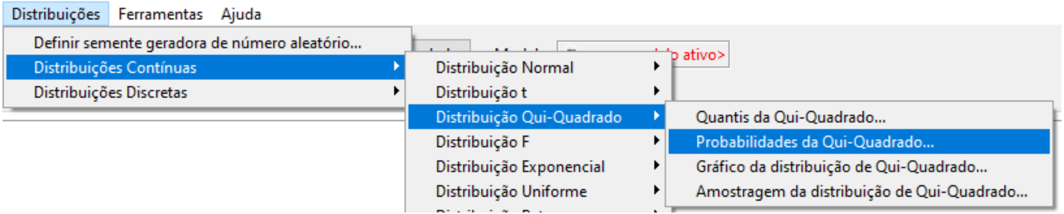


v	Probabilidades (p)																	
	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,800	0,700	0,500	0,300	0,200	0,100	0,050	0,040	0,030	0,025	0,020	0,010	0,005	0,001
1	0,000	0,001	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	4,218	4,709	5,024	5,412	6,635	7,879	10,828
2	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	6,438	7,013	7,378	7,824	9,210	10,597	13,816
3	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	8,311	8,947	9,348	9,837	11,345	12,838	16,266
4	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	10,026	10,712	11,143	11,668	13,277	14,860	18,467
5	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	11,644	12,375	12,833	13,388	15,086	16,750	20,515
6	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	13,198	13,968	14,449	15,033	16,812	18,548	22,458
7	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	14,703	15,509	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322

Exemplo 1: Seja Q uma variável aleatória que segue uma distribuição de qui-quadrado com 10 graus de liberdade ($\nu = 10$), calcule a $P(Q > 2,558)$.

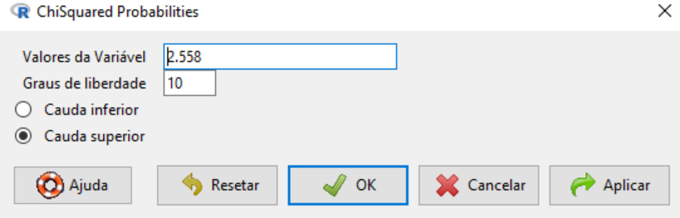
Distribuições de Probabilidade - Qui-quadrado

No menu, tem-se o caminho: **Distribuições** > **Distribuições Contínuas** > **Distribuição Qui-Quadrado** > **Probabilidades da Qui-Quadrado**



Distribuições de Probabilidade - Qui-quadrado

Em seguida, basta inserir o valor do quantil (2,558) e o número de graus de liberdade (10). Depois, seleciona-se a **cauda superior**, pois deseja-se saber a probabilidade de Q ser **maior** do que 2,558.



Output

```
> pchisq(c(2.558), df=10, lower.tail=FALSE)
[1] 0.9900033
```

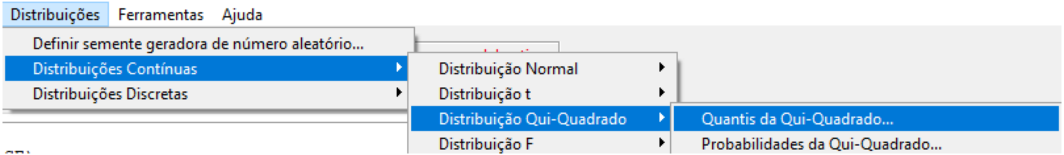
Distribuições de Probabilidade - Qui-quadrado

Também é possível calcular o valor do quantil associado à uma probabilidade.

Exemplo 2: Seja $Q \sim \chi^2_{10}$, determine q_c tal que $P(Q > q_c) = 0,99$.

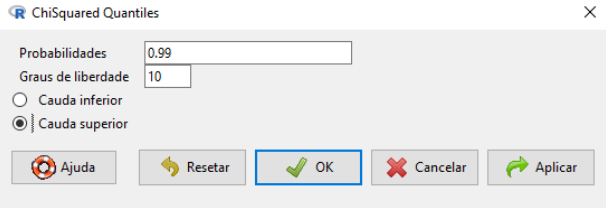
Distribuições de Probabilidade - Qui-quadrado

No menu, tem-se: **Distribuições > Distribuições Contínuas > Distribuição Qui-Quadrado > Quantis da Qui-quadrado**



Distribuições de Probabilidade - Qui-quadrado

Preencha os valores requeridos, e selecione a opção cauda superior.

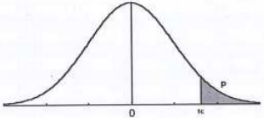



```
> qchisq(c(0.99), df=10, lower.tail=FALSE)
[1] 2.558212
```

Note que o valor obtido foi $q_c = 2,558$, o quantil dado no **Exemplo 1**.

TÁBUA 3: Valores críticos (t_c) da distribuição t-Student com v graus de liberdade

Valores t_c tais que $P(T > t_c) = p$

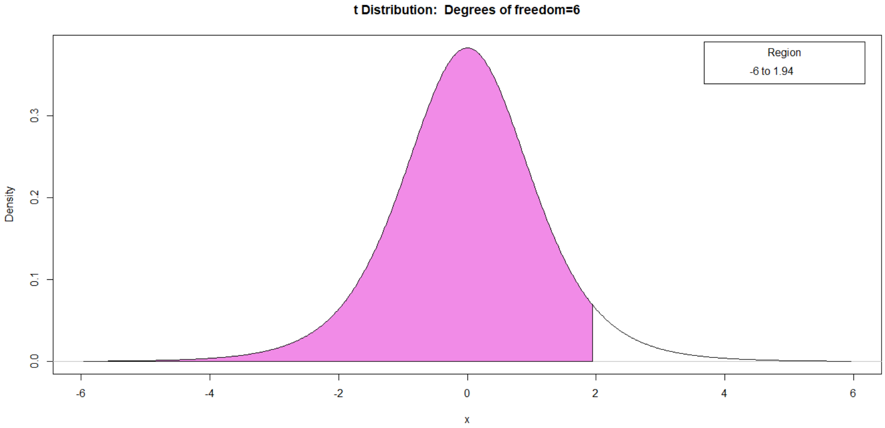


v	Probabilidade (p)																
	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150	0,100	0,050	0,040	0,030	0,025	0,020	0,015	0,010	0,005	0,002	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	21,205	31,821	63,657	127,322	318,317	636,607
2	0,289	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	5,643	6,965	9,925	14,089	22,327	31,598
3	0,277	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	3,896	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924
4	0,271	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,298	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,003	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,265	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	2,829	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,715	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408

Exemplo 1: Seja T uma variável aleatória que segue uma distribuição t de Student com seis graus de liberdade, calcule $P(-1,943 < T < 1,943)$.

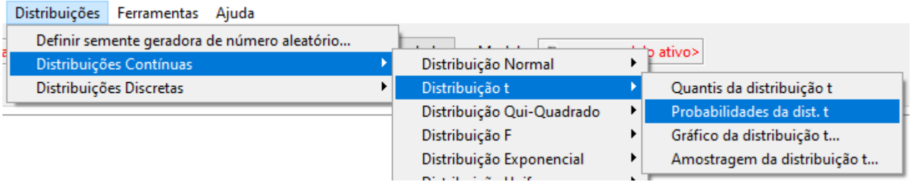
Distribuições de Probabilidade - t de Student

Para o cálculo de $P(-1,943 < T < 1,943)$, deve-se primeiro calcular $P(T < 1,943)$.



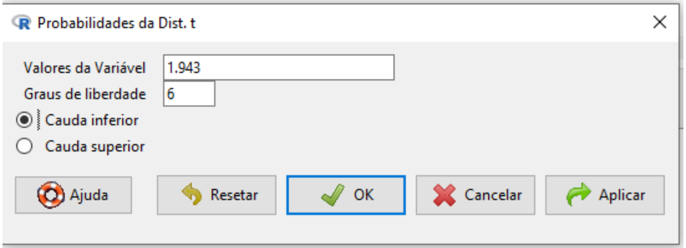
Distribuições de Probabilidade - t de Student

No menu, tem-se o caminho: **Distribuições** $>$ **Distribuições Contínuas** $>$ **Distribuição t** $>$ **Probabilidades da t**



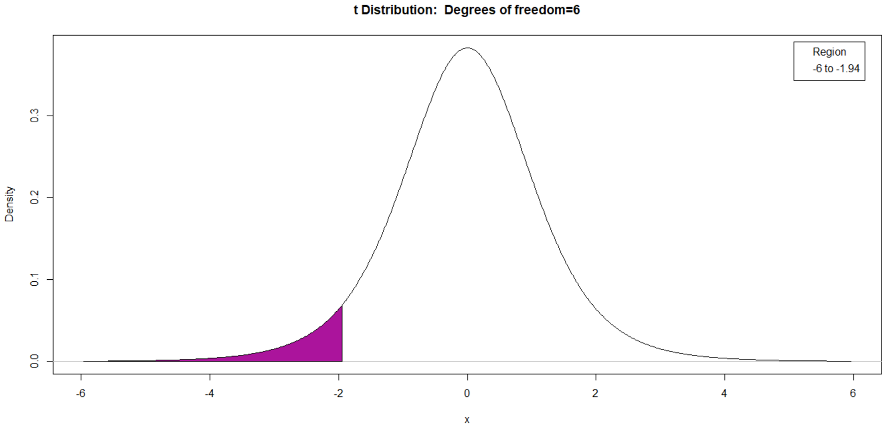
Distribuições de Probabilidade - t de Student

Para o cálculo, basta inserir o valor da variável (1.943), o número de graus de liberdade (6), e selecionar a opção **cauda inferior**.

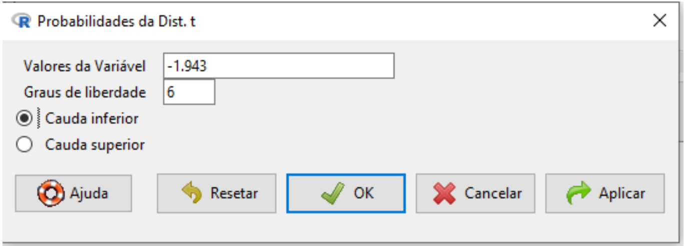



```
> pt(c(1.943), df=6, lower.tail=TRUE)
[1] 0.9499875
```

Na sequência, calcula-se $\mathrm{P}(T < -1,943)$.



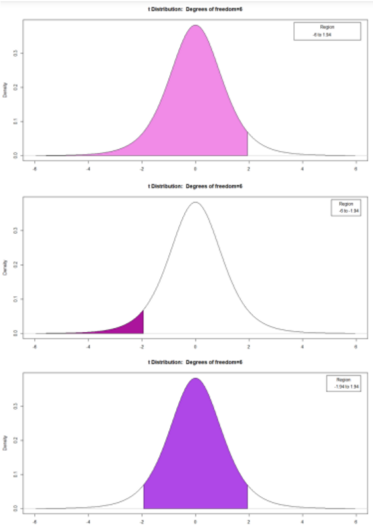
Para tal, basta inserir o valor (-1.943), o número de graus de liberdade (6), e selecionar a opção **cauda inferior**.




```
> pt(c(-1.943), df=6, lower.tail=TRUE)
[1] 0.0500125
```

Análogo ao exemplo feito para a distribuição normal, para o cálculo da probabilidade desejada, tem-se que $P(-1,943 < T < 1,943) = P(T < 1,943) - P(T < -1,943) = 0,9499875 - 0,0500125 = 0,899975$. Portanto, a probabilidade é de aproximadamente 90%.

Distribuições de Probabilidade - t de Student

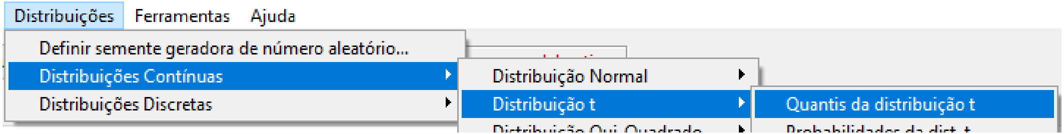


Um quantil de uma distribuição t de Student também pode ser encontrado dada a probabilidade.

Exemplo 2. Suponha que T seja uma variável aleatória que segue uma distribuição t de Student, com 4 graus de liberdade. Determine o valor de t_c, tal que $P(T > t_c) = 0,005$.

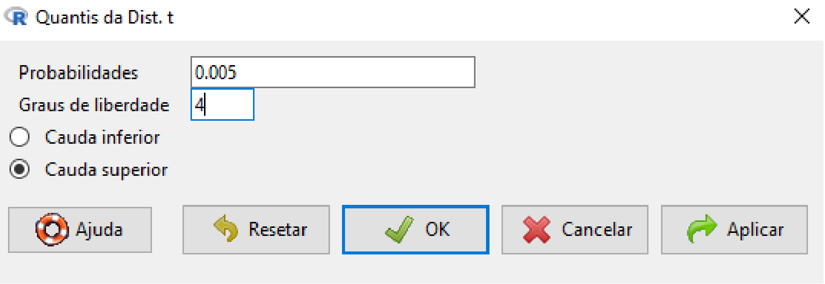
Distribuições de Probabilidade - t de Student

Siga os seguintes passos: **Distribuições** –> **Disribuições contínuas** –> **Distribuição T** –> **Quantis da distribuição T**



Distribuições de Probabilidade - t de Student

De acordo com o enunciado, a probabilidade é 0,005, o número de graus de liberdade é 4, e a opção cauda **superior** deve ser selecionada.



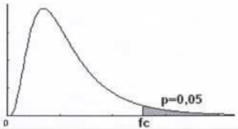

```
> qt(c(0.005), df=4, lower.tail=FALSE)
[1] 4.604095
```

Distribuições de Probabilidade - F

TÁBUA 4: Valores críticos (f_c) da distribuição F-Snedecor com (v_1; v_2) graus de liberdade

v_1 = número de graus de liberdade do numerador
v_2 = número de graus de liberdade do denominador

Valores f_c tais que $P(F > f_c) = 0{,}05$

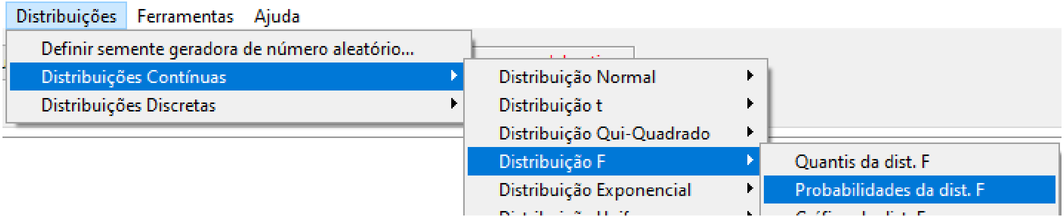


v2	v1 (graus de liberdade do numerador)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	50	70	100
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,90	245,36	246,46	247,32	248,01	250,09	251,77	252,49	253,04
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,48	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66	8,62	8,58	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,84	5,82	5,80	5,75	5,70	5,68	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64	4,60	4,58	4,56	4,50	4,44	4,42	4,41
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,92	3,90	3,87	3,81	3,75	3,73	3,71

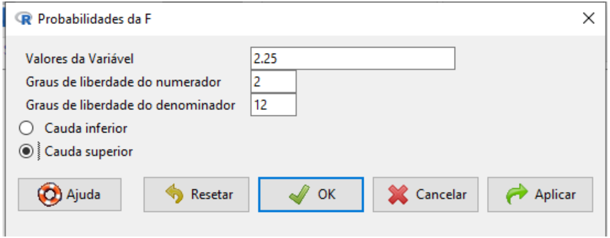
Exemplo 1. Seja $X \sim F(2, 12)$, determine $P(X > 2{,}25)$.

Distribuições de Probabilidade - F

No menu, siga o caminho: **Distribuições –> Distribuições Contínuas –> Distribuição F –> Probabilidades da distribuição F**



Preencha as informações solicitadas, selecione a opção cauda **superior**.




```
> pf(c(2.25), df1=2, df2=12, lower.tail=FALSE)
[1] 0.1479735
```

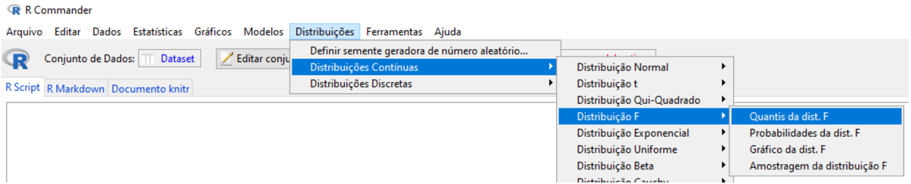
Assim, P(X>2,25)= 0,1480.

Distribuições de Probabilidade - F

O quantil associado a uma probabilidade também pode ser solitado.

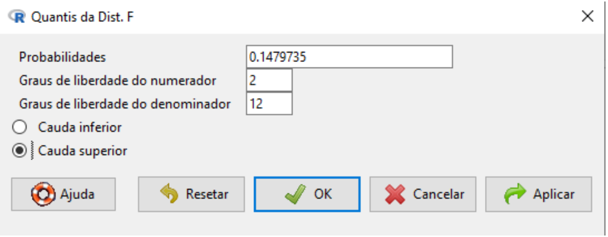
Exemplo 2. Seja $X \sim F(2, 12)$, determine x_c, tal que $P(X > x_c) = 0,1479735$.

No menu, tem-se que: **Distribuições –> Distribuições Contínuas –> Distribuição F –> Quantis da distribuição F**



Distribuições de Probabilidade - F

Preencha as informações requeridas.




```
> qf(c(0.1479735), df1=2, df2=12, lower.tail=FALSE)
[1] 2.25
```

Assim, se $X \sim F(2,12)$, $P(X > 2,25) \approx 0,1480$.