

Probabilidade no pacote Rcmdr

Como utilizar o pacote Rcmdr
para o cálculo de probabilidades

Diogo Macedo Mendes
Keyla Megumi Sano de Oliveira
Profa. Dra. Giovana Fumes Ghantous
October 18, 2023



- ▶ Distribuições discretas
- ▶ Distribuições contínuas



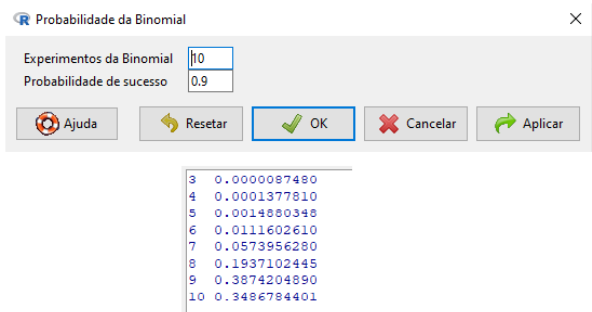
- Experimentos independentes, respostas dicotômicas.

Exemplo 1. Em uma fábrica de pacotes de arroz espera-se que o peso do produto final esteja entre 998 e 1002 gramas. 90% das embalagens continham a quantidade desejada, se escolhermos aleatoriamente 10 embalagens.

a) Qual a probabilidade de se encontrar 8 pacotes no peso ideal? ($P(X = 8)$)

Distribuições de Probabilidade - Binomial

Para o cálculo da probabilidade $P(X = 8)$, basta ir em **Distribuições > Distribuições Discretas > Distribuição binomial > Probabilidades da binomial**, que retornará as probabilidades associadas para $x = 0, \dots, 10$, incluindo o valor desejado.



Probabilidade da Binomial

Experimentos da Binomial: 10
Probabilidade de sucesso: 0.9

Ajuda Resetar OK Cancelar Aplicar

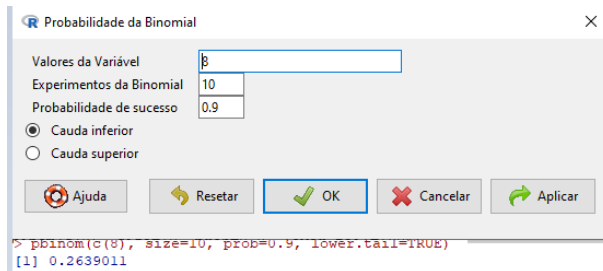
3	0.0000087480
4	0.0001377810
5	0.0014880348
6	0.0111602610
7	0.0573956280
8	0.1937102445
9	0.3874204890
10	0.3486784401

Assim, tem-se que $P(X = 8) = 0,1937$.

b) Qual a probabilidade de se encontrar no máximo 8 pacotes da amostra no peso ideal? ($P(X \leq 8)$).

Distribuições > Distribuições Discreta > Distribuição Binomial > Probabilidades da Binomial

Distribuições de Probabilidade - Binomial

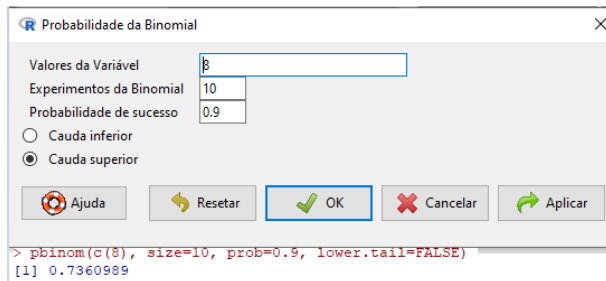


Assim, tem-se que $P(X \leq 8) = 0,2639$.

c) Qual a probabilidade de encontrar mais de 8 pacotes no peso ideal? ($P(X > 8)$)

Distribuições > Distribuições Discreta > Distribuição Binomial > Probabilidades das caudas da Binomial

Distribuições de Probabilidade - Binomial



The image shows a screenshot of the R GUI's 'Probabilidade da Binomial' (Binomial Probability) dialog box. The dialog has a title bar with the R logo and a close button. It contains several input fields and radio buttons. The 'Valores da Variável' (Variable Values) field is a text box containing the symbol β . Below it are two stacked input fields: 'Experimentos da Binomial' (Binomial Experiments) with the value '10', and 'Probabilidade de sucesso' (Probability of success) with the value '0.9'. There are two radio buttons: 'Cauda inferior' (Lower tail) which is unselected, and 'Cauda superior' (Upper tail) which is selected. At the bottom, there are five buttons: 'Ajuda' (Help) with a lifebuoy icon, 'Resetar' (Reset) with a circular arrow icon, 'OK' with a green checkmark icon and a blue border, 'Cancelar' (Cancel) with a red X icon, and 'Aplicar' (Apply) with a green curved arrow icon. Below the buttons, a console window shows the command `> pbinom(c(8), size=10, prob=0.9, lower.tail=FALSE)` and the output `[1] 0.7360989`.

Probabilidade da Binomial

Valores da Variável β

Experimentos da Binomial 10

Probabilidade de sucesso 0.9

☐ Cauda inferior

☒ Cauda superior

Ajuda Resetar OK Cancelar Aplicar

```
> pbinom(c(8), size=10, prob=0.9, lower.tail=FALSE)
[1] 0.7360989
```

Assim, tem-se que $P(X > 8) = 0,7361$.

Exemplo 2. Seja X uma variável aleatória que conta o número de plantas com mutação em um total de n plantas irradiadas, e seja $p = 0,0001$ a probabilidade de uma planta irradiada apresentar mutação.


Calcular:

a) A probabilidade de não aparecer plantas com mutação em um total de 1000 plantas irradiadas.

Distribuições > Distribuições discretas > Distribuição binomial > Probabilidades das caudas da binomial






(Experimentos = 1000, $p = 0,0001$)

Distribuições de Probabilidade - Binomial

 Probabilidade da Binomial ✕

Valores da Variável	<input type="text" value="p"/>
Experimentos da Binomial	<input type="text" value="1000"/>
Probabilidade de sucesso	<input type="text" value="0.0001"/>

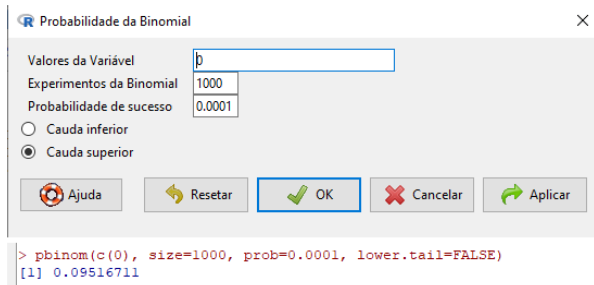
☒ Cauda inferior
☐ Cauda superior

 Ajuda  Resetar  OK  Cancelar  Aplicar

```
> pbinom(c(0), size=1000, prob=0.0001, lower.tail=TRUE)
[1] 0.9048329
```

Assim, tem-se que $P(X = 0) = 0,9048$.

b) A probabilidade de aparecer ao menos uma planta com mutação em 1000 plantas irradiadas.



The image shows the 'Probabilidade da Binomial' dialog box in the R GUI. The 'Valores da Variável' field is set to 'b'. The 'Experimentos da Binomial' field is set to '1000'. The 'Probabilidade de sucesso' field is set to '0.0001'. The 'Cauda superior' radio button is selected. The 'OK' button is highlighted with a blue border. Below the dialog box, the R console shows the command `> pbinom(c(0), size=1000, prob=0.0001, lower.tail=FALSE)` and the output `[1] 0.09516711`.

Valores da Variável	
Experimentos da Binomial	1000
Probabilidade de sucesso	0.0001

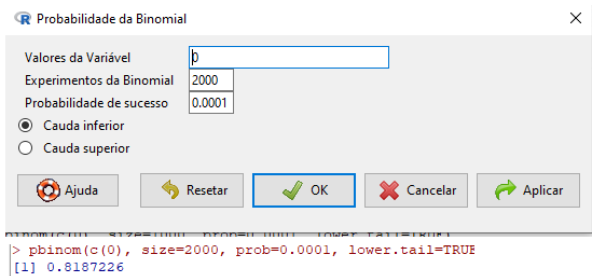
☐ Cauda inferior
☒ Cauda superior

Ajuda Resetar OK Cancelar Aplicar

```
> pbinom(c(0), size=1000, prob=0.0001, lower.tail=FALSE)
[1] 0.09516711
```

Assim, tem-se que $P(X \geq 1) = 0,0952$.

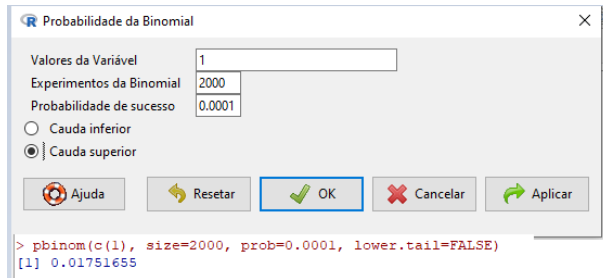
c) A probabilidade de não aparecer planta com mutação em 2000 plantas irradiadas.



Assim, tem-se que $P(X = 0) = 0,8187$.

Distribuições de Probabilidade - Binomial

d) A probabilidade de aparecer pelo menos duas plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas.




Assim, tem-se que $P(X \geq 2) = 0,0175$.

É possível também, dada uma certa probabilidade, encontrar o quantil associada a ela, por exemplo, o interesse pode ser o inverso do visto no item anterior, ou seja, dada uma variável aleatória X , que segue uma distribuição binomial com $n = 2000$ e $p = 0,0001$, qual o valor de x , para o qual $P(X \geq x) = 0,01751$?






Distribuições > Distribuições discretas > Distribuição binomial > Quantis da binomial

Distribuições de Probabilidade - Binomial

 Quantis da Binomial ✕

Probabilidades	<input type="text" value="p.01751"/>
Experimentos da Binomial	<input type="text" value="2000"/>
Probabilidade de sucesso	<input type="text" value="0.0001"/>

☐ Cauda inferior
☒ Cauda superior

 Ajuda  Resetar  OK  Cancelar  Aplicar

```
> qbinom(c(0.01751), size=2000, prob=0.0001, lower.tail=FALSE)
[1] 2
```


Modelo Poisson

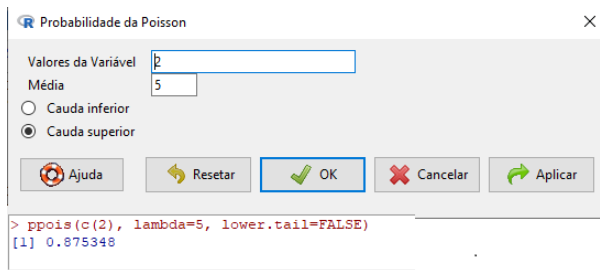
O modelo de probabilidade de Poisson é usado para modelar a probabilidade de ocorrência de um certo número de eventos em um intervalo fixo de tempo ou espaço, dado um número médio esperado de ocorrências. Ele é especialmente útil quando se trata de eventos raros, independentes e discretos.

- Biologia
- Contagem de eventos raros
- Epidemiologia

Exemplo 1. A emissão de partículas radioativas tem sido modelada por meio de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada. Suponha que o número de partículas alfa, emitidas por minuto, seja uma variável aleatória seguindo o modelo de Poisson com parâmetro 5, isto é, a taxa média de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto. Calcule a probabilidade de haver mais de duas emissões em um minuto.

Distribuições de Probabilidade - Poisson

Distribuições > Distribuições Discreta > Distribuição Poisson > Probabilidades da dist. poisson (caudas)



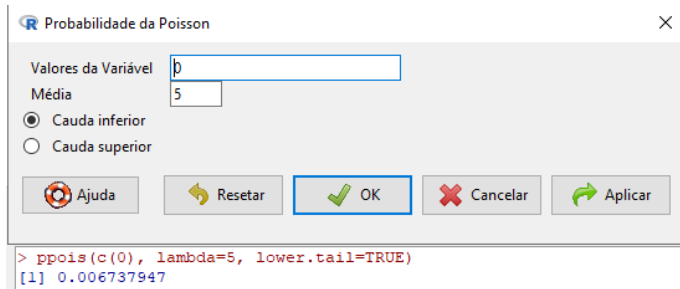
The image shows a screenshot of the 'Probabilidade da Poisson' dialog box in RStudio. The dialog has a title bar with the R logo and the text 'Probabilidade da Poisson'. It contains two input fields: 'Valores da Variável' with the value '2' and 'Média' with the value '5'. Below these are two radio buttons: 'Cauda inferior' (unselected) and 'Cauda superior' (selected). At the bottom, there are five buttons: 'Ajuda' (with a lifebuoy icon), 'Resetar' (with a circular arrow icon), 'OK' (with a green checkmark icon and a blue border), 'Cancelar' (with a red X icon), and 'Aplicar' (with a green curved arrow icon). Below the buttons, a console window shows the command `> ppois(c(2), lambda=5, lower.tail=FALSE)` and the output `[1] 0.875348`.

Assim, tem-se que $P(X > 2) = 0,8753$.

Exemplo 2. Um telefone recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obter a probabilidade de que o telefone não receba chamadas durante um intervalo de um minuto.

Distribuições de Probabilidade - Poisson

Distribuições > Distribuições Discreta > Distribuição Poisson > Probabilidades da dist. poisson (caudas)



The image shows a screenshot of the R graphical user interface (GUI) dialog box titled "Probabilidade da Poisson". The dialog box has a close button (X) in the top right corner. It contains two input fields: "Valores da Variável" with the value "0" and "Média" with the value "5". Below these fields are two radio buttons: "Cauda inferior" (selected) and "Cauda superior". At the bottom of the dialog box are five buttons: "Ajuda" (Help), "Resetar" (Reset), "OK" (highlighted with a blue border), "Cancelar" (Cancel), and "Aplicar" (Apply). Below the dialog box, the R console output is visible, showing the command `> ppois(c(0), lambda=5, lower.tail=TRUE)` and the result `[1] 0.006737947`.


```
> ppois(c(0), lambda=5, lower.tail=TRUE)
[1] 0.006737947
```

Assim, tem-se que $P(X = 0) = 0,0067$.



Exemplo 3. Suponha que um determinado em uma fábrica de laticínios, na etapa de embalagens podem ocorrer falhas, de acordo com uma variável aleatória X que segue uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 3$. ($P(X = 3)$).

Distribuições > Distribuições Discreta > Distribuição Poisson > Probabilidades da dist. Poisson

Distribuições de Probabilidade - Poisson

 Probabilidade da Poisson

Média

 Ajuda  Resetar

Output

1	0.1493612051
2	0.2240418077
3	0.2240418077
4	0.1680313557
5	0.1008188134
6	0.0504094067

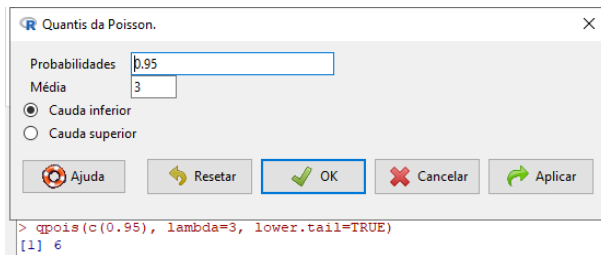
<

Assim, tem-se, por exemplo, que $P(X = 5) = 0,1008$.

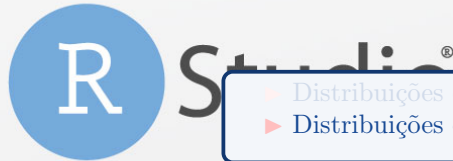
Exemplo 4. Usando a mesma distribuição Poisson do **Exemplo 3**, o quantil também pode ser calculado, por exemplo, para que x seja tal que $P(X \leq x) = 0,95$.

Distribuições > Distribuições Discreta > Distribuição Poisson > Quantis da dist. Poisson

Distribuições de Probabilidade - Poisson



O quantil referente ao percentil de ordem 0,95 de uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson, com média 3 é 6.



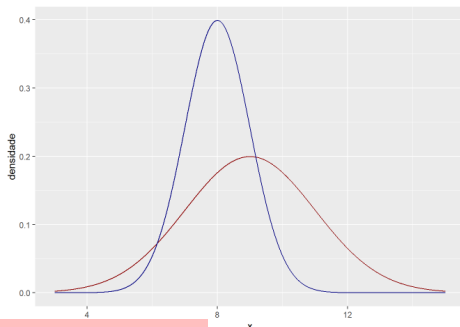
- ▶ Distribuições discretas
- ▶ Distribuições contínuas



Distribuições de Probabilidade - Normal

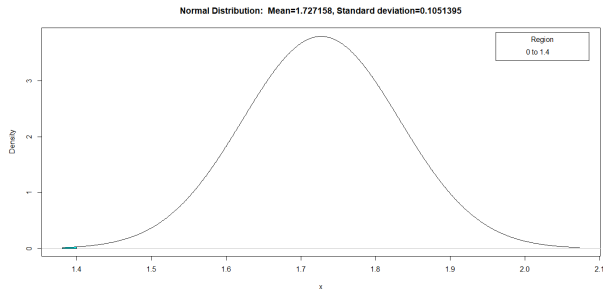
O modelo normal apresenta dois parâmetros - a média e a variância, que determinam o centro e a variabilidade da distribuição dos dados.

Exemplo 1. A curva vermelha possui média igual a 9 e desvio padrão igual a 2, enquanto que, a azul possui média 8 e desvio padrão 1.



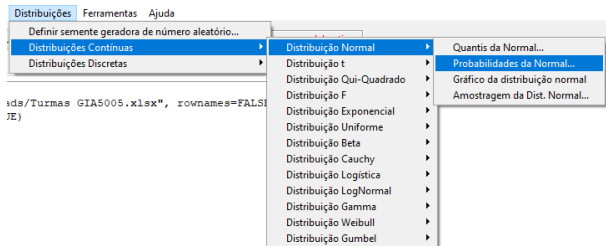
Distribuições de Probabilidade - Normal

Exemplo 2. Em uma determinada sala de aula, a média das alturas dos alunos é de 1,72 m, com desvio padrão de 0,105 m. Considerando que a distribuição dos dados segue um modelo normal, qual é a probabilidade dos alunos apresentarem uma altura inferior à 1,40 metros? ($P(X < 1,40)$)



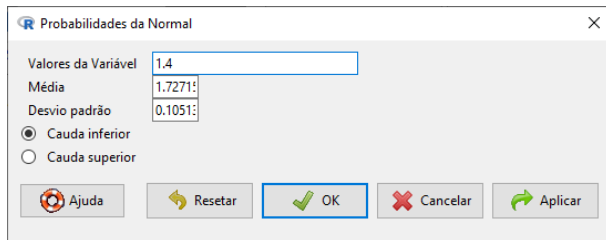
Distribuições de Probabilidade - Normal

Distribuição → Distribuições contínuas → Distribuição normal → Probabilidades da normal



Distribuições de Probabilidade - Normal

Para o cálculo, o valor da variável, a média e o desvio padrão devem ser inseridos. A opção **cauda inferior** deve ser selecionada, pois deseja-se calcular a probabilidade da altura **ser menor** que 1,40 metros.



Probabilidades da Normal

Valores da Variável: 1.4

Média: 1.7271

Desvio padrão: 0.1051

☒ Cauda inferior

☐ Cauda superior

Ajuda Resetar OK Cancelar Aplicar

Distribuições de Probabilidade - Normal

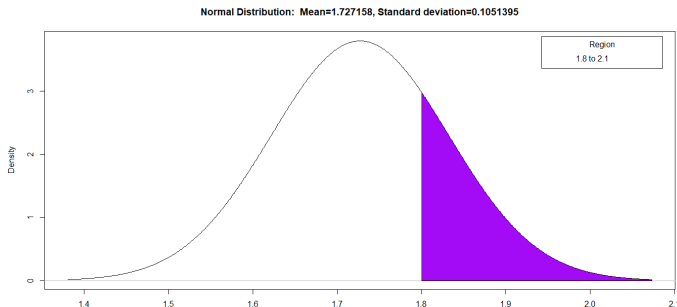


```
> pnorm(c(1.4), mean=1.727158, sd=0.1051395, lower.tail=TRUE)
[1] 0.0009302044
```

Assim, tem-se que $P(X < 1,40) = 0,0009$.

Distribuições de Probabilidade - Normal

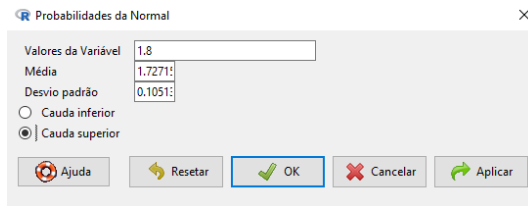
Exemplo 3. Em uma determinada sala de aula, a média das alturas dos alunos é de 1,72 m, com desvio padrão de 0,105 m. Considerando que a distribuição dos dados segue um modelo normal, qual é a probabilidade dos alunos apresentarem uma altura superior a 1,80 m? ($P(X > 1,80)$)



Distribuições de Probabilidade - Normal

Distribuição \rightarrow Distribuições contínuas \rightarrow Distribuição normal \rightarrow Probabilidades da normal

Os mesmos passos do **Exemplo 2** devem ser seguidos, porém, a opção **cauda superior** deve ser selecionada, pois deseja-se conhecer a probabilidade da altura ser **maior** que 1,80 m.



Probabilidades da Normal

Valores da Variável: 1.8

Média: 1.7271

Desvio padrão: 0.1051

☐ Cauda inferior

☒ Cauda superior

Ajuda Resetar OK Cancelar Aplicar

Distribuições de Probabilidade - Normal

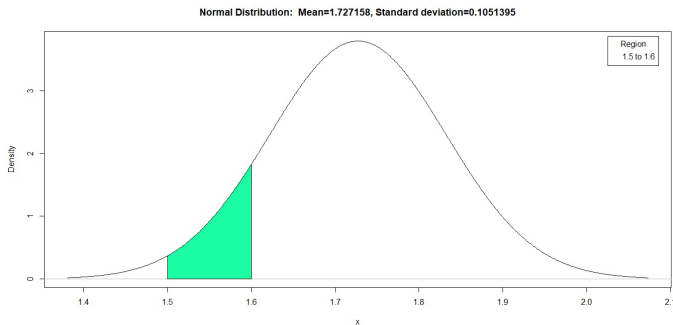


```
> pnorm(c(1.8), mean=1.727158, sd=0.1051395, lower.tail=FALSE)
[1] 0.2442135
```

Assim, tem-se que $P(X > 1,80) = 0,2442$.

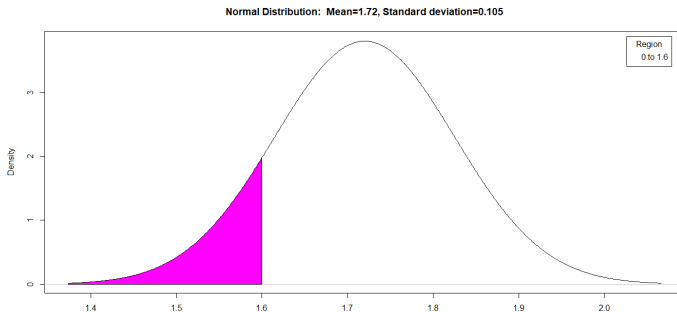
Distribuições de Probabilidade - Normal

Exemplo 4. Em uma determinada sala de aula, a média das alturas dos alunos é de 1,72 m, com desvio padrão de 0,105 m. Considerando que a distribuição dos dados segue um modelo normal, qual a probabilidade dos alunos possuírem uma altura entre 1,50 m e 1,60? ($P(1,50 < X < 1,60)$)




Distribuições de Probabilidade - Normal

1. Seguindo os mesmos passos vistos no **Exemplo 2**, calcula-se a $P(X < 1,60)$.








Distribuições de Probabilidade - Normal

 Probabilidades da Normal ✕

Valores da Variável	1.6
Média	1.72
Desvio padrão	0.105

☒ Cauda inferior
☐ Cauda superior

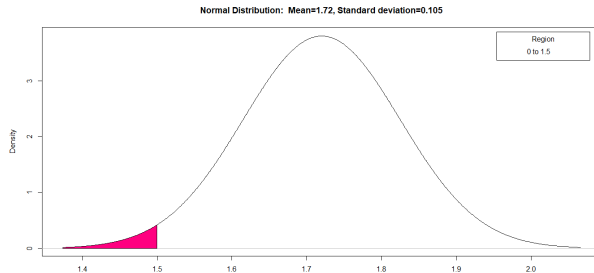
 Ajuda  Resetar  OK  Cancelar  Aplicar

Output


```
> pnorm(c(1.6), mean=1.72, sd=0.105, lower.tail=TRUE)
[1] 0.126549
```

Distribuições de Probabilidade - Normal

2. Seguindo os mesmos passos vistos no **Exemplo 2**, calcula-se a $P(X < 1,50)$.








Distribuições de Probabilidade - Normal

 Probabilidades da Normal ×

Valores da Variável	1.5
Média	1.72
Desvio padrão	0.105

☒ Cauda inferior
☐ Cauda superior

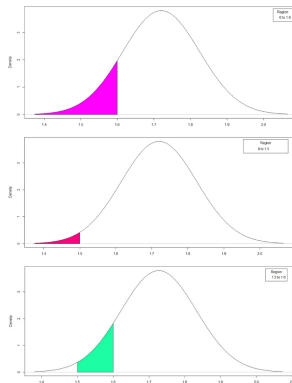
 Ajuda  Resetar  OK  Cancelar  Aplicar

Output

```
> pnorm(c(1.5), mean=1.72, sd=0.105, lower.tail=TRUE)  
[1] 0.01807492
```

Distribuições de Probabilidade - Normal

3. $P(1,50 < X < 1,60) = P(X < 1,60) - P(X < 1,50) = 0,126549 - 0,01807492 = 0,1084741$.

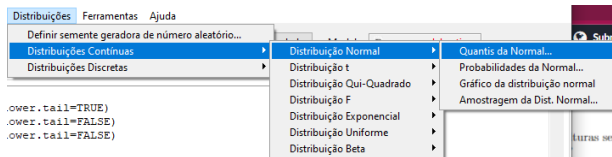


Exemplo 5. Calcule os valores de X correspondentes às porcentagens esperadas, em que X é o diâmetro em mm de tomates, que segue uma distribuição $N(60, 49)$.

Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
Pequeno	até ____ mm	20%
Médio	De ____ a ____ mm	60%
Grande	acima de ____ mm	20%

Distribuições de Probabilidade - Normal

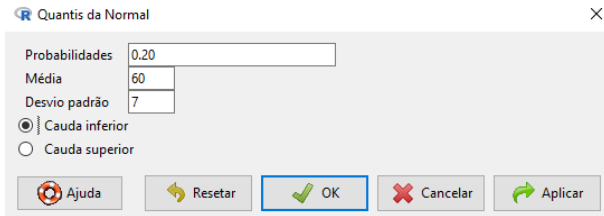
1. Distribuição → Distribuições contínuas → Distribuição normal → Quantis da normal



Distribuições de Probabilidade - Normal

Vamos calcular o diâmetro classificado como pequeno, que varia de 0 até x mm, ou seja,
 $P(X < x) = 0,20$

Seleciona-se a **cauda inferior**, e preenche as informações da probabilidade (0.20), média (60) e desvio padrão (7).



Quantis da Normal

Probabilidades 0.20

Média 60

Desvio padrão 7

☒ Cauda inferior

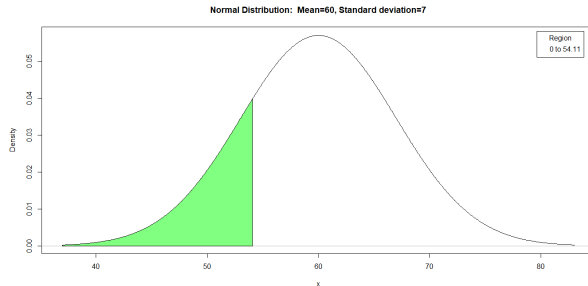
☐ Cauda superior

Ajuda Resetar OK Cancelar Aplicar

Distribuições de Probabilidade - Normal

Output

```
> qnorm(c(0.20), mean=60, sd=7, lower.tail=TRUE)  
[1] 54.10865
```



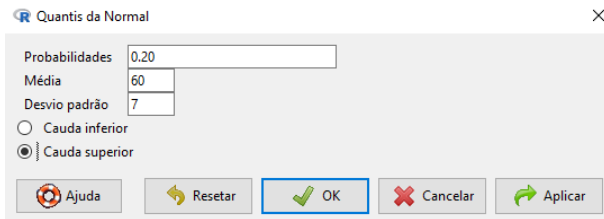
Assim, os 20% dos tomates classificados como pequenos possuem diâmetros de até 54,108 mm.

Distribuições de Probabilidade - Normal

Agora, vamos calcular o diâmetro classificado como médio, que está entre x_1 e x_2 , ou seja, $P(x_1 < X < x_2) = 0,60$

Como valor de $x_1 = 54,108$ mm, já calculado anteriormente, basta então o cálculo de x_2 .

Seleciona-se a **cauda superior**, e preenche as informações da probabilidade (0.20), média (60) e desvio padrão (7).



Quantis da Normal

Probabilidades 0.20

Média 60

Desvio padrão 7

☐ Cauda inferior

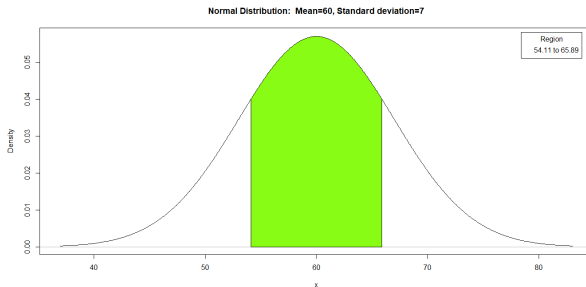
☒ Cauda superior

Ajuda Resetar OK Cancelar Aplicar

Distribuições de Probabilidade - Normal

Output

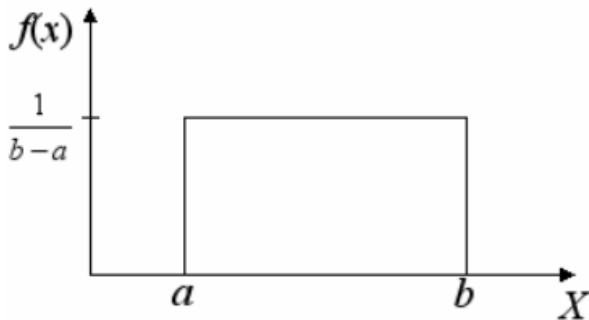
```
> qnorm(c(0.20), mean=60, sd=7, lower.tail=FALSE)  
[1] 65.89135
```



Portanto, os diâmetros classificados como médio, são aqueles que possuem diâmetros entre 54,108 mm e 65,89 mm. E, por fim, serão classificados com grandes, aqueles que tiveram um diâmetro superior a 65,89 mm.

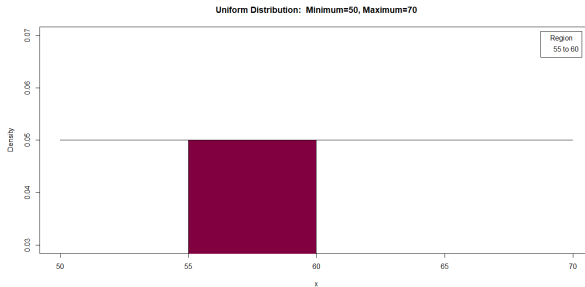
Distribuições de Probabilidade - Uniforme

Uma variável aleatória X que tem distribuição uniforme, é definida em um intervalo $[a, b]$.



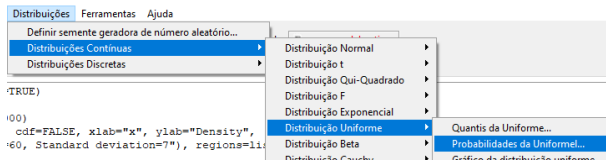
Distribuições de Probabilidade - Uniforme

Exemplo 1. A dureza H de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[50,70]$ da escala de Rockwell. Calcule a probabilidade de uma peça ter a dureza entre 55 e 60.



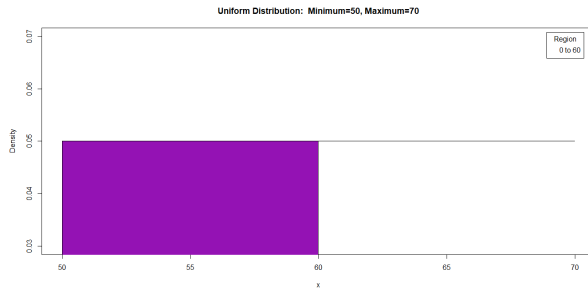
Distribuições de Probabilidade - Uniforme

1. Siga o passo a passo:



Distribuições de Probabilidade - Uniforme

Pede-se $P(55 < X < 60)$, primeiro calcular a probabilidade da peça de aço possuir uma dureza de até 60, ou seja, $P(X < 60)$.








Distribuições de Probabilidade - Uniforme

Para o cálculo de $P(X < 60)$, basta inserir valor da variável (60), e os valores de mínimo e máximo do intervalo, dados por 50 e 70, respectivamente.

Probabilidades da Uniforme ×

Valores da Variável	60
Mínimo	50
Máximo	70

☒ Cauda inferior
☐ Cauda superior

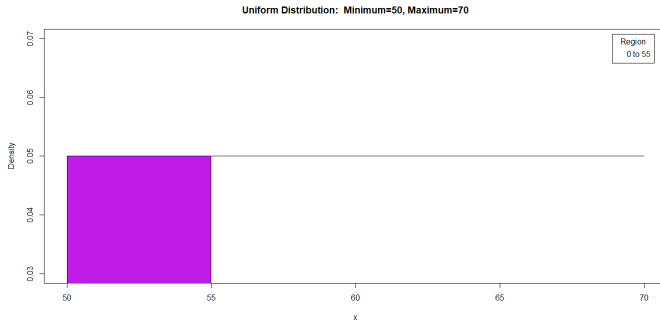
 Ajuda  Resetar  OK  Cancelar  Aplicar

Output

```
> punif(c(60), min=50, max=70, lower.tail=TRUE)
[1] 0.5
```


Distribuições de Probabilidade - Uniforme

Em seguida, calcule a probabilidade da peça de aço possuir uma dureza de menor que 55, ou seja, $P(X < 55)$.








Distribuições de Probabilidade - Uniforme

O processo é análogo ao anterior, a única alteração é no valor da variável, que no caso é 55.

 Probabilidades da Uniforme ×

Valores da Variável	55
Mínimo	50
Máximo	70

☒ Cauda inferior
☐ Cauda superior

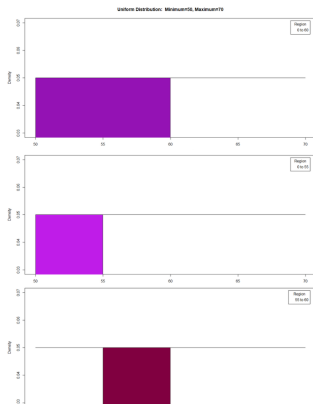
 Ajuda  Resetar  OK  Cancelar  Aplicar

Output

```
> punif(c(55), min=50, max=70, lower.tail=TRUE)
[1] 0.25
```

Distribuições de Probabilidade - Uniforme

Análogo ao exemplo feito para a distribuição normal, para o cálculo da probabilidade desejada, tem-se $P(55 < X < 60) = P(X < 60) - P(X < 55) = 0,50 - 0,25 = 0,25$. Portanto, a probabilidade de uma peça possuir a dureza entre 55 e 60 é de 25%.



Distribuições de Probabilidade - Exponencial

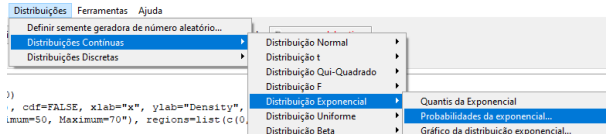


Probabilidade ao longo do tempo ou distância entre ocorrências num intervalo contínuo, utilizado para prever o período de tempo necessário até a ocorrência de um evento.

Exemplo: O tempo de vida (em horas) de um componente eletrônico pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial com $\beta = 500$. Segue-se que a vida média desse componente é $E(T) = 500$ horas. Qual é a probabilidade de que ele dure mais do que a média?

Distribuições de Probabilidade - Exponencial

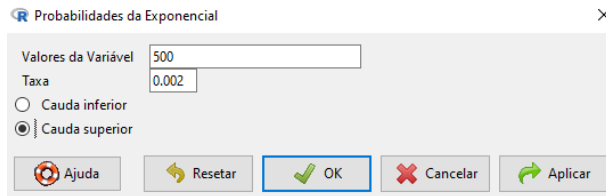
1. Siga o passo a passo.



Basta preencher o valor da variável (500), a taxa é calculada pela fração:

$$\text{taxa} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{500} = 0,002.$$

Seleciona-se a **cauda superior**, pois procura-se a probabilidade do tempo de vida durar mais do que a média, ou seja, $P(T > 500)$.



Probabilidades da Exponencial

Valores da Variável 500

Taxa 0.002

☐ Cauda inferior

☒ Cauda superior

Ajuda Resetar OK Cancelar Aplicar

Distribuições de Probabilidade - Exponencial



```
> pexp(c(500), rate=0.002, lower.tail=FALSE)
[1] 0.3678794
```

Assim, tem-se a probabilidade de 36,78% de que o tempo de vida do componente eletrônico dure mais do que a média.